

**198.** Какова амплитуда напряженности  $H$  магнитного поля электромагнитной волны в месте изображения Солнца, получаемого в фотоаппарате при светосиле объектива, равной  $1/4$ ? Угловой диаметр Солнца  $\approx 0,01$  рад. Потерями энергии излучения в атмосфере и объективе пренебречь.

### § 3. Интерференция света

**199.** Составить уравнение плоской волны, нормаль к которой параллельна единичному вектору  $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Какой вид принимает это уравнение для монохроматической волны?

**200.** Составить уравнение волны, излучаемой: 1) точечным источником (сферическая волна); 2) бесконечной нитью (цилиндрическая волна).

**201.** Показать, что если разность фаз двух складываемых колебаний беспорядочно меняется во времени, то средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме энергий исходных колебаний.

Указание. Считать, что за время наблюдения все значения разности фаз равновероятны.

**202.** В каком случае две электромагнитные волны одинаковой частоты складываются всегда (т.е. при любых фазовых соотношениях) так, что интенсивность результирующего колебания  $I$  равна сумме интенсивностей исходных колебаний  $I_1$  и  $I_2$ ?

**203.** Три колебания, происходящие вдоль одной и той же прямой, имеют одинаковую амплитуду и частоту. Какая получится средняя интенсивность при сложении этих колебаний, если их фазы независимо и беспорядочно меняются, принимая значения 0 или  $\pi$ ?

**204.** Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины  $\lambda$  составляют друг с другом малый угол  $\varphi$ . Волны падают на экран, плоскость которого приблизительно перпендикулярна к направлению их распространения. Написав уравнения обеих плоских волн и сложив поля этих волн, показать, что расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением  $\Delta x = \lambda/\varphi$ .

**205.** Как изменится выражение для  $\Delta x$  в предыдущей задаче, если интерферирующие лучи падают на экран наклонно?

**206.** Найти длину волны  $\lambda$  монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние

первого интерференционного максимума от центральной полосы  $x = 0,05$  см. Данные установки (рис. 21):  $a = 5$  м,  $d = 0,5$  см.

**207.** На пути одного луча в интерференционной установке Юнга находится трубка длиной  $l = 2$  см с плоскопараллельными стеклян-

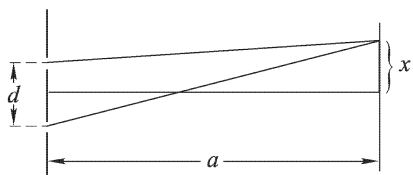


Рис. 21

ными основаниями. Когда эта трубка наполняется воздухом, наблюдается интерференционная картина. При наполнении трубки хлором имеет место смещение интерференционной картины на  $N = 20$  полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии  $D$  натрия ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ). Принимая показатель преломления воздуха  $n = 1,000276$ , вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

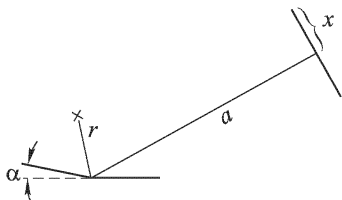


Рис. 22

**208.** Определить угол  $\alpha$  между зеркалами Френеля (рис. 22), если расстояние  $\Delta x$  между полосами интерференции на экране равно 1 мм,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $r = 10 \text{ см}$ ,  $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

**209.** Определить расстояние  $x$  между центром интерференционной картины и пятой светлой полосой в установке с зеркалами Френеля (рис. 22) ( $\alpha = 20'$ ,  $r = 10 \text{ см}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ) для  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

**210.** Найти распределение интенсивности  $I$  на экране в установке с зеркалами Френеля (рис. 22).

**211.** Определить вид поверхности равной интенсивности в опыте с зеркалами Френеля, если источник света: 1) точка; 2) щель, параллельная линии пересечения зеркал.

**Примечание.** Предполагается, что отдельные участки щели когерентны между собой и колеблются в одной фазе. Это можно осуществить, например, освещая щель плоской волной.

**212.** Выразить расстояние  $x$  от центра интерференционной картины до  $m$ -й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 23). Показатель

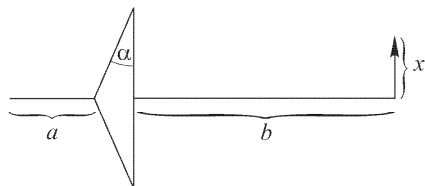


Рис. 23

преломления призмы  $n$ , длина волны  $\lambda$ , преломляющий угол  $\alpha$ . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

**213.** Преломляющий угол бипризмы  $\alpha = 3'26''$ . Между точечным источником монохроматического света ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ) и бипризмой помещена линза та-

ким образом, что ширина интерференционных полос оказалась не зависящей от расстояния экрана до бипризмы. Найти расстояние между соседними темными полосами, если показатель преломления стекла бипризмы  $n = 1,5$ . Найти максимальное число полос  $N$ , которое может

наблюдаться в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на  $L = 5$  м.

**214.** При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы составляет  $l = 4$  см? Чему равно это число полос  $N$ ? При каком положении экрана интерференционные полосы исчезнут?

**215.** Найти число полос интерференции  $N$ , получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления ее  $n$ , преломляющий угол  $\alpha$ , длина волны источника  $\lambda$ . Расстояние источника света от бипризмы равно  $a$ , а расстояние бипризмы от экрана равно  $b$ .

**216.** Полосы интерференции получаются с помощью бипризмы Френеля с малым преломляющим углом и щелевого источника света, параллельного ребру бипризмы. Интерференционные полосы наблюдаются на экране, расположенном перпендикулярно к оси установки. Нулевая полоса получается в центре экрана — на оси (точнее, в плоскости симметрии) установки. Расстояние от источника до бипризмы равно  $a$ , от бипризмы до экрана  $b$ . В какую сторону и на какую величину  $x$  сместится нулевая интерференционная полоса, если щелевой источник света немного сместить в направлении, перпендикулярном к оси оптической системы, на величину  $h$ ?

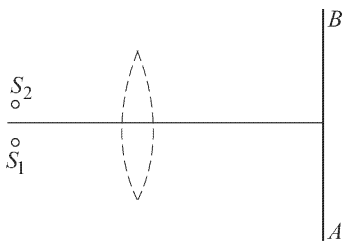


Рис. 24

**217.** От двух когерентных источников света  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 24) получена система интерференционных полос на экране  $AB$ , удаленном от источников на расстояние  $a = 2$  м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f = 25$  см. Рассмотреть два случая: 1) расстояние линзы от источников равно  $2f = 50$  см; 2) источники  $S_1$  и  $S_2$  находятся в фокальной плоскости линзы.

**218.** Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$ , падая на ее поверхность нормально. Толщина пластинки испытывает скачкообразное изменение на величину  $d$  порядка длины световой волны вдоль некоторой прямой, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 25). Прошедшая волна собирается линзой в ее фокусе. При каких значениях  $d$  интенсивность света в фокусе будет вдвое меньше интенсивности света в том же фокусе в случае отсутствия уступа на пластинке?

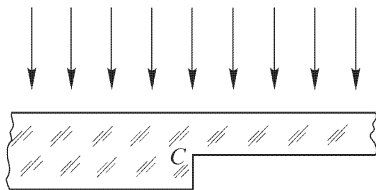


Рис. 25

**219.** В предыдущей задаче  $n = 3/2$ ,  $d = 2/3\lambda$ . Найти интенсивность света в фокусе линзы, если интенсивность в нем при отсутствии уступа равна  $I_0$ .

**220.** Будут ли наблюдаться интерференционные полосы на экране, если в установке с билинзой поместить источник света между линзой и главным фокусом (билинза получается разрезанием пополам целой линзы, обе половины которой раздвигаются)?

**221.** Из линзы с фокусным расстоянием  $f = 50$  см вырезана центральная часть ширины  $a$ , как показано на рис. 26. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник монохроматического света ( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ). С противоположной стороны линзы помещен экран, на котором наблюдаются полосы интерференции. Расстояние между соседними светлыми полосами  $\Delta x = 0,5$  мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найти  $a$ .

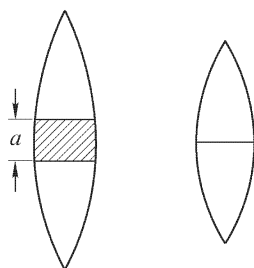


Рис. 26

**222.** При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, интерференционные полосы исчезнут, если диаметр линзы  $D = 6$  см? При каком положении экрана число интерференционных полос будет максимальным и чему равно это число полос?

**223.** Наблюдение полос интерференции в белом свете с помощью зеркал Ллойда может быть использовано для экспериментального доказательства потери полуволны при отражении света от зеркала. С этой

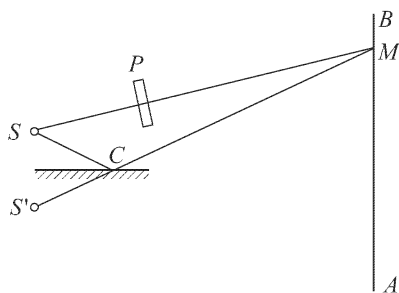


Рис. 27

целью на пути луча  $SM$  (рис. 27) ставят тонкую пластинку  $P$ , смещающую полосы интерференции на экране  $AB$  вверх. Пусть точка  $M$  на экране выбрана так, что оптические длины ( $SM$  и  $SCM$ ) равны. Если бы не было потери полуволны при отражении и изменения фазы волны при входе в пластинку  $P$  или при выходе из нее, то волны, приходящие в  $M$  по путям  $SM$  и  $SCM$ , имели бы одинаковые фазы. При использо-

вании белого света в  $M$  получилась бы ахроматическая светлая полоса. Опыт же показывает, что ахроматическая полоса темная. Этот факт объясняют потерей полуволны при отражении от зеркала. Как доказать экспериментально, что потеря полуволны происходит именно при отражении от зеркала, а не при входе света в пластинку  $P$  или при выходе из нее?

**224.** Какому условию должны удовлетворять размеры источника света, чтобы могли наблюдаться интерференционные полосы в установке с 1) зеркалами Френеля, 2) зеркалом Ллойда? Различные светящиеся точки источника излучают некогерентно.

**225.** Билинза Билле изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f = 10$  см. На расстоянии  $x = \frac{3}{2}f$  от нее помещен источник света в виде щели, освещаемый широкоугольным пучком света с длиной волны  $\lambda = 5790 \text{ \AA}$ . Экран для наблюдения интерференционных полос установлен с противоположной стороны билинзы на расстоянии  $L = 330$  см от нее. При какой минимальной ширине щели  $b$  интерференционные полосы на экране пропадут? Считать, что различные точки щели излучают световые волны некогерентно. Расстояние между половинками билинзы  $a = 0,5$  мм.

**226.** На экран с двумя узкими параллельными щелями собирают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии  $D$  между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой диаметр Солнца  $\alpha \approx 0,01$  рад.

*Примечание.* Для упрощения расчета диск Солнца заменить квадратом постоянной поверхности яркости.

**227.** Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием  $f = 50$  мм на отверстии экрана (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии  $D = 1$  мм друг от друга. При каком расстоянии  $l$  между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы?

*Примечание.* См. предыдущую задачу.

**228.** На металлическое зеркало нормально падает пучок света с длиной волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см, причем образуются стоячие волны. На каком расстоянии от зеркала находятся 1-я пучность и 1-й узел электрического вектора светового поля?

**229.** Линейно поляризованный свет падает под углом  $45^\circ$  на металлическое зеркало, покрытое очень тонким фотослоем (толщина фотослоя  $\ll \lambda$ ). В одном случае вектор  $E$  лежит в плоскости падения, а в другом перпендикулярен к плоскости падения. В каком случае фотослой почернеет?

**230.** Тонкая пленка освещается источником света. Свет, отраженный от пленки, проецируется линзой на экран. Как надо установить линзу, чтобы на экране наблюдались полосы интерференции?

**231.** Прозрачная плоскопараллельная стеклянная пластинка освещается параллельным пучком монохроматического света и при этом угол падения, толщина пластинки,  $n$  и  $\lambda$  подобраны так, что отраженный свет вследствие интерференции между лучами, отраженными от двух поверхностей пластинки, максимально ослаблен. Следовательно, при изменении толщины пластинки в пределах длины волны ее коэффициент отражения должен был бы изменяться. Однако при увеличении первоначальной толщины в целое число раз он должен остаться

неизменным. Поэтому для сколь угодно толстой пластинки получались бы различные коэффициенты отражения в зависимости от ее толщины. Между тем для бесконечно толстой пластинки коэффициент отражения не зависит от ее толщины и определяется формулами Френеля. В чем решение этого кажущегося парадокса?

**232.** Темной или светлой будет в отраженном свете мыльная пленка толщиной  $d = 1/10\lambda$ ? Пленка находится в воздухе.

**233.** При каких толщинах  $d$  пленки исчезают интерференционные полосы при освещении ее светом с длиной волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см? Показатель преломления пленки  $n = 1,5$ .

**234.** Зимой на стеклах трамваев и автобусов образуются пленки наледи, окрашивающие все видимое сквозь них в зеленоватый цвет. Оценить, какова наименьшая толщина этих пленок (показатель преломления наледи принять равным 1,33).

**235.** Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на воздушном клине между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине  $\alpha = 1'$ . Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны  $\lambda = 5461 \text{ \AA}$  и шириной  $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ . Определить: 1) расстояние  $\Delta x$  между двумя соседними полосами; 2) максимальное количество полос  $N$ , которые можно было бы видеть на клине, если бы его размеры не были ограничены; 3) расстояние  $x$  последней наблюдаемой полосы от вершины клина и толщину последнего  $h$  в этом месте; 4) степень параллельности пучка лучей, необходимую для наблюдения всех полос (т.е. максимально допустимое угловое расхождение лучей  $\delta\varphi$ ).

**236.** Свет с длиной волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  падает на тонкую мыльную пленку под углом падения  $\varphi = 30^\circ$ . В отраженном свете на пленке наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними полосами равно  $\Delta x = 4$  мм. Показатель преломления мыльной пленки  $n = 1,33$ . Вычислить угол  $\alpha$  между поверхностями пленки.

**237.** В очень тонкой клиновидной пластинке в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами  $\Delta x = 5$  мм. Зная, что длина световой волны равна  $\lambda = 5800 \text{ \AA}$ , а показатель преломления пластинки  $n = 1,5$ , найти угол  $\alpha$  между гранями пластинки.

**238.** Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клино освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения  $L = 25$  см в направлении, перпендикулярном к поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно к ребру клина. Оценить максимальное число интерференционных полос  $N$ , которое может видеть глаз в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза  $d = 5$  мм. Оценить

степень монохроматичности света, необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаться.

**239.** Полосы равной толщины, получающиеся в тонком стеклянном клине с показателем преломления  $n = 1,5$  при освещении рассеянным монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ , проецируются линзой на экран. Перед линзой помещена квадратная диафрагма со стороной  $d = 1 \text{ см}$  и отстоящая от клина на расстоянии  $L = 50 \text{ см}$ . Какой максимальный порядок интерференции  $N$  может при этом наблюдаться на экране? Главная оптическая ось проецирующей системы приблизительно перпендикулярна к поверхности клина.

**240.** С помощью воздушного клина с углом при вершине  $\alpha$  наблюдаются полосы равной толщины в отраженном монохроматическом свете. Свет падает на клин нормально. Найти распределение освещенности  $E$  в интерференционной картине на поверхности клина. Считать интенсивности световых пучков, отраженных от обеих поверхностей клина, одинаковыми и равными  $I_0$ .

**241.** Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный?

**242.** Если между линзами из крона и флинта поместить масло, показатель преломления которого имеет промежуточное значение между значениями показателей преломления крона и флинта, то точка соприкосновения линз будет окружена светлым пятном в отраженном свете и темным — в проходящем. Объяснить это явление.

**243.** Линза из крона ( $n_k = 1,50$ ) лежит на пластинке, одна половина которой сделана из того же крона, а другая из флинта ( $n_{\text{фл}} = 1,70$ ). Прослойка между линзой и пластинкой заполнена сероуглеродом ( $n = 1,63$ ). Описать характер ньютоновых колец в отраженном и проходящем свете.

**244.** Найти расстояние  $\Delta l$  между двадцатым и двадцать первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим равно  $1 \text{ мм}$ , а кольца наблюдаются в отраженном свете.

**245.** Найти фокусное расстояние  $f$  плосковыпуклой линзы, примененной для получения колец Ньютона, если радиус третьего светлого кольца равен  $1,1 \text{ мм}$ ,  $n_{\text{ст}} = 1,6$ ,  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ . Кольца наблюдаются в отраженном свете.

**246.** При наблюдении колец Ньютона в отраженном синем свете ( $\lambda_c = 4500 \text{ \AA}$ ) с помощью плосковыпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным  $1,06 \text{ мм}$ . После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого светлого кольца, оказавшийся равным  $1,77 \text{ мм}$ . Найти радиус кривизны  $R$  линзы и длину волны  $\lambda_{\text{кр}}$  красного света.

**247.** Плоскопараллельная стеклянная пластинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете натриевой горелки ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ) найдено, что радиус темного кольца порядка  $m = 20$  (центральному темному кольцу

соответствует  $m = 0$ ) равен  $r_1 = 2$  мм. Когда пластинка была положена на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка сделался равным  $r_2 = 4$  мм. Определить фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена,  $n = 1,5$ .

**248.** Найти радиус  $r$  центрального темного пятна колец Ньютона, если между линзой и пластинкой налит бензол ( $n = 1,5$ ). Радиус кривизны линзы  $R = 1$  м. Показатели преломления линзы и пластинки одинаковы. Наблюдение ведется в отраженном натриевом свете ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ).

**249.** Кольца Ньютона получаются между двумя плосковыпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Найти радиус  $r_m$   $m$ -го темного кольца, если длина световой волны равна  $\lambda$ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз равны  $R_1$  и  $R_2$ . Наблюдение ведется в отраженном свете.

**250.** Кольца Ньютона получаются с помощью плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны  $R_1$ , положенной на вогнутую сферическую поверхность с радиусом кривизны  $R_2 > R_1$ . Кольца наблюдаются в отраженном свете. Определить радиус  $r_m$   $m$ -то темного кольца, если длина световой волны равна  $\lambda$ .

**251.** В установке для наблюдения колец Ньютона плосковыпуклая линза сделана подвижной и может перемещаться в направлении, перпендикулярном к пластинке. Описать, что будет происходить с кольцами Ньютона при удалении и приближении линзы к пластинке. Кольца получаются с помощью монохроматического света.

**252.** Описать, как будет меняться резкость колец Ньютона при перемещении линзы в установке, описанной в предыдущей задаче, если они наблюдаются в отраженном свете  $D$ -линии Na, учитывая, что  $D$ -линия Na не монохроматична, а представляет собой две близкие спектральные линии с  $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$  и  $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ .

**253.** Найти разность длин волн  $D$ -линий Na, если известно, что резкость интерференционной картины, наблюдаемой в интерферометре с двумя лучами, минимальна у четырехста девяностой полосы, тысяча четыреста семидесятой и т. д., а максимальна у первой, девятьсот восьмидесятой и т. д. полос. Средняя длина волны  $D$ -линий  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ .

**254.** Перед линзой  $L$  (рис. 28) установлена плоскопараллельная стеклянная пластинка  $\Pi$ , перпендикулярная к главной оптической оси и освещаемая монохроматическим светом от протяженного источника. Описать интерференционную картину в фокальной плоскости линзы. Как изменится эта картина при наклоне пластинки на угол  $\alpha = 10^\circ$

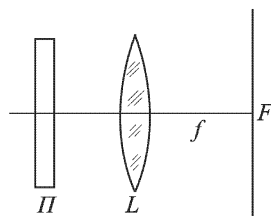


Рис. 28



(по отношению к исходному положению)? Фокусное расстояние линзы  $f = 30$  см.

**255.** Интерференционные полосы равного наклона в фокальной плоскости линзы  $L$  (рис. 29) получаются при отражении от плоскопараллельной пластинки  $\Pi$ , освещаемой монохроматическим источником света  $S$ . Прямой свет источника на линзу не попадает. Длина световой волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ; толщина пластинки  $d = 1,6$  мм; показатель преломления  $n = 1,5$ ; фокусное расстояние линзы  $f = 40$  см. Найти радиус  $r$  первого видимого на экране  $\mathcal{E}$  темного интерференционного кольца, если центр колец — темный. Какова максимально допустимая ширина линии  $\Delta\lambda$ , освещающей пластинку, чтобы при указанных параметрах схемы можно было наблюдать интерференционные кольца?

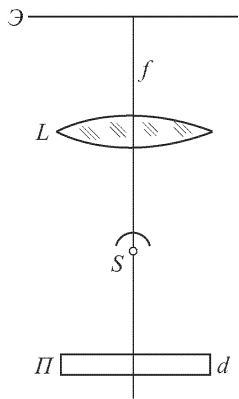


Рис. 29

**256.** Сколько темных колец  $N$  можно наблюдать в условиях предыдущей задачи, если диаметр линзы  $D = 8$  см, а источник  $S$  помещен посередине между линзой и пластинкой на расстоянии  $f$  от линзы?

**257.** Какова должна быть минимальная толщина пластинки, чтобы в условиях предыдущей задачи можно было получить по крайней мере одно темное кольцо?

**258.** Три синфазных излучателя  $1, 2, 3$  расположены вдоль прямой (рис. 30). Расстояние между излучателями  $1$  и  $2$  равно  $\lambda/2$ , а между излучателями  $2$  и  $3$  в полтора раза больше. Амплитуды излучателей  $1$  и  $2$  одинаковы. Какова должна быть амплитуда излучателя  $3$ , чтобы в диаграмме направленности системы существовали минимумы нулевой интенсивности? Найти направления на эти минимумы. Решение дать аналитически и с помощью векторной диаграммы.

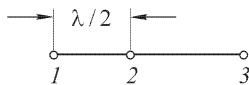


Рис. 30

**259.** Тот же вопрос для случая, когда расстояние между излучателями  $1$  и  $2$  равно  $\frac{2}{5}\lambda$ , а между излучателями  $2$  и  $3$  вдвое больше.

**260.** Горизонтальный электрический вибратор помещен над идеально проводящей горизонтальной плоскостью на высоте  $h$ . Начертить диаграммы направленности вибратора в вертикальной плоскости, перпендикулярной к его оси, для  $h = \frac{1}{4}\lambda$ ,  $h = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $h = \frac{3}{4}\lambda$ ,  $h = \lambda$ . Найти направления на максимумы и минимумы излучения для этих случаев.

**261.** Эффект Вавилова–Черенкова состоит в том, что электрон, равномерно движущийся в среде с показателем преломления  $n$ , может при известных условиях излучать свет. Найти условия, при которых такое излучение возникает, а также направление излучения, рассматривая интерференцию волн, возбуждаемых электроном в разные моменты времени.

**262.** Существуют различные конструкции черенковских счетчиков, в которых излучение Вавилова–Черенкова используется для регистрации заряженных частиц. Частицы попадают в блок прозрачного вещества  $ABCD$  (рис. 31) и возбуждают в нем черенковское излучение. Излучение выходит через грань  $AB$  и попадает в фотоумножитель, где вызывает импульс тока. Считая, что частицы летят нормально к грани  $CD$ , определить, при каких скоростях они могут регистрироваться счетчиком, если показатель преломления вещества блока равен  $n$ . При каком показателе преломления  $n$  релятивистские частицы ( $\beta \equiv V/c \approx 1$ ) не могут регистрироваться счетчиком?

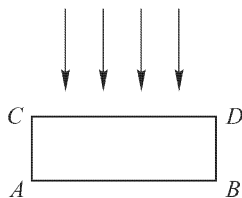


Рис. 31

## § 4. Дифракция света

**263.** 1) Вычислить радиус  $m$ -й зоны Френеля, если расстояние от источника до зонной пластинки равно  $a$ , а расстояние от пластинки до места наблюдения равно  $b$ . Длина волны  $\lambda$ . 2) Найти радиус первой зоны, если  $a = b = 10$  м,  $\lambda = 4500$  Å.

**264.** 1) Вычислить радиус  $m$ -й зоны Френеля при условии, что на зонную пластинку падает плоская волна. 2) Найти  $r_1$  для этого случая, полагая, как и в предыдущей задаче,  $b = 10$  м,  $\lambda = 4500$  Å.

**265.** Зоны Френеля строятся со стороны вогнутой поверхности сходящейся сферической волны радиуса  $a$ . Расстояние от поверхности волны до точки наблюдения равно  $b$ . Найти выражение для радиуса  $r_m$   $m$ -й зоны Френеля.

**266.** Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 3 м, на расстоянии 2 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его отодвинуть в бесконечность?

**267.** Определить фокусное расстояние  $f$  зонной пластинки для света с длиной волны  $5000$  Å, если радиус пятого кольца этой пластинки равен  $1,5$  мм; определить радиус  $r_1$  первого кольца этой пластинки. Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления  $n$  ( $n > 1$ )?

**268.** Какова интенсивность света  $I$  в фокусе зонной пластинки, если закрыты все зоны, кроме первой? Интенсивность света без пластинки равна  $I_0$ .

**269.** Какова будет интенсивность света  $I$  в фокусе зонной пластинки, если закрыть всю пластинку, за исключением верхней половины первой зоны? Интенсивность света без пластинки равна  $I_0$ .

**270.** Какова интенсивность света  $I$  в центре дифракционной картины от круглого экрана, если он закрывает всю первую зону? Интенсивность света в отсутствие экрана равна  $I_0$ .

**271.** Яркий источник можно сфотографировать, поместив между ним и фотопластинкой гладкий непрозрачный шар. Объяснить явление. Диаметр шара  $D = 40$  мм, расстояние от источника до шара  $a = 12$  м, расстояние от шара до изображения  $b = 18$  м, размер источника  $y = 7$  мм. Определить размер изображения  $y'$ . Будет ли изображение испорчено, если поверхность шара испещрена множеством неправильных царапин, глубина которых  $h$  порядка  $0,1$  мм? Можно ли шар заменить диском?

**272.** Диск из стекла с показателем преломления  $n$  (для длины волны  $\lambda$ ) закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения  $P$ .

При какой толщине  $h$  диска освещенность в  $P$  будет наибольшая?

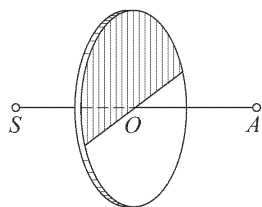


Рис. 32

**273.** Непрозрачный экран, имеющий форму полудиска, помещен между точечным источником  $S$  и точкой наблюдения  $A$  таким образом, что точка  $O$  располагается на одной прямой с точками  $S$  и  $A$  (рис. 32). Экран закрывает небольшое нечетное число полузон Френеля. Какая будет освещенность в точке  $A$ ?

**274.** Между точечным источником  $S$  и точкой наблюдения  $A$  помещен диск, центр которого расположен на одной прямой с точками  $S$  и  $A$  (рис. 32). Одна половина диска прозрачна, другая непрозрачна. Диск закрывает первые три зоны Френеля. Толщина прозрачной части

диска  $l = N \frac{\lambda}{2(n-1)}$ , где  $n$  — показатель преломления прозрачной части диска,  $N$  — целое число. Какая будет освещенность в точке  $A$  при четном и нечетном  $N$ ?

**275.** Вдали от точечного источника  $S$  электромагнитной волны поставлен бесконечный идеально отражающий плоский экран  $AB$  (рис. 33). Пользуясь векторной диаграммой, найти, как изменится интенсивность отраженной волны в точке  $S$ , если из экрана вырезать диск  $CD$  с центром в основании перпендикуляра, опущенного из  $S$  на плоскость экрана, и сместить этот диск по направлению к источнику на одну двенадцатую длины волны? Площадь диска составляет одну треть от площади первой зоны Френеля. Как изменится результат, если смещение произвести в противоположную сторону на ту же величину?

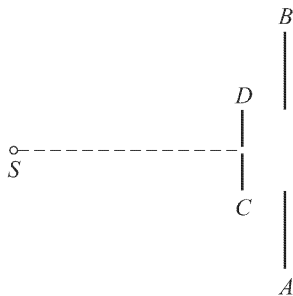


Рис. 33

**276.** В установке предыдущей задачи площадь диска составляет половину площади центральной зоны Френеля. На какое минимальное расстояние  $h$  следует сместить диск в направлении от источника, чтобы интенсивность отраженной волны в точке  $S$  осталась неизменной?

**277.** Если круглое отверстие (например, ирисовая диафрагма) увеличивается таким образом, что его радиус от радиуса одной зоны возрастает до радиуса двух зон, то освещенность в точке  $P$  (точка  $P$  — изображение источника света, даваемое диафрагмой) падает почти до нуля. Как согласовать этот факт с увеличением всего светового потока через диафрагму в два раза?

**278.** Точечный источник монохроматического света помещен на расстоянии  $a$  от круглой диафрагмы, а экран с противоположной стороны — на расстоянии  $b$  от нее. При каких радиусах диафрагмы  $r$  центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет темным и при каких — светлым, если перпендикуляр, опущенный из источника на плоскость диафрагмы, проходит через ее центр?

**279.** На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии  $a$  от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких — светлым, если фокусное расстояние линзы равно  $f$ ?

**280.** Для получения фотографий дифракционных картин в тех случаях, когда источник света и экран расположены очень далеко, В.К. Аркадьевым был применен метод подобия, в котором вместо действительных препятствий, стоящих на пути лучей, используются их уменьшенные и подобные модели. Требуется получить фотографию дифракционной картины от диска диаметром  $D = 50$  см, когда на его оси расположен точечный источник света на расстоянии  $A = 25$  км, а экран удален от него на  $B = 50$  км (плоскость экрана перпендикулярна к оси диска). С этой целью диск заменили уменьшенной моделью с диаметром  $d = 1$  см. Определить, на каких расстояниях  $a$  и  $b$  следует поместить источник света и экран, чтобы получилась подобная и уменьшенная в  $n = 50$  раз дифракционная картина.

**281.** На рис. 34 изображена схема одной из установок для наблюдения интерференционных полос. Линза разрезается на две одинаковые половинки  $L_1$  и  $L_2$ , которые отодвигаются друг от друга на значительное расстояние вдоль оптической оси. Источник света  $S$  помещен на оптической оси. Световой пучок, проходящий через половинку линзы  $L_1$ , перекрывается с пучком, проходящим через половинку  $L_2$  на участке  $S''S'$ , на котором и происходит интерференция этих двух пучков света. Если там поместить экран или (что лучше) производить наблюдение в микроскоп, то будут видны интерференционные кольца. Какой центр будут иметь эти кольца: светлый или темный?

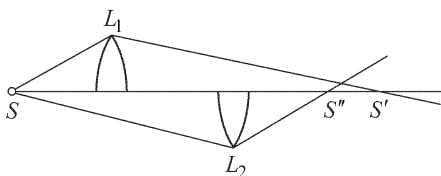


Рис. 34

**282.** Интенсивность света в некоторой точке на оси за отверстием в непрозрачном экране, на который нормально падает параллельный пучок монохроматического света, равна  $I_0$ , если в отверстии укладывается одна зона Френеля. С помощью векторной диафрагмы найти интенсивность света в той же точке, если радиус отверстия уменьшить на  $\alpha = 1/3$  первоначальной величины.

**283.** Требуется изготовить отражательную зонную пластинку на вогнутом сферическом зеркале путем снятия отражающего покрытия зеркала кольцевыми зонами Френеля. Найти радиус  $m$ -й зоны  $r_m$ , если источник света и точка наблюдения расположены на оси зеркала на расстояниях  $a$  и  $b$  соответственно от его вершины, причем  $a \leq R \leq b$ ,  $r_m \ll a$ , где  $R$  — радиус кривизны поверхности зеркала.

**284.** В предыдущей задаче  $R = 100$  см,  $a = 80$  см,  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ , радиус четвертой зоны Френеля  $r_4 = 0,2$  см. Где будут расположены изображения  $S'$  источника нулевого и  $\pm 1$ -го порядков?

**285.** Зонная пластинка имеет такие же параметры, как и в предыдущей задаче. Источник монохроматического света ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ) помещен в центре кривизны вогнутого зеркала, на котором она изготовлена ( $a = R$ ). Пластинка дает два отражения  $\pm 1$ -го порядков в точках, отстоящих от зеркала на расстояниях  $b_1$  и  $b_2$ , причем  $b_1 - b_2 = R/10$ . Найти радиус  $m$ -й зоны пластинки.

**286.** Параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ) интенсивности  $I_0$  падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметра 2 мм. 1) Найти расстояния  $b_1, b_2, \dots, b_m$  до экрана точек  $P_1, P_2, \dots, P_m$  на оси отверстия, для которых в пределах отверстия укладывается 1, 2, ...,  $m$  зон Френеля. 2) Построить приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния точки наблюдения до экрана. 3) На сколько надо сместиться из точки  $P_1$ , удаляясь от экрана, чтобы интенсивность света в новой точке наблюдения стала в два раза меньше, чем в точке  $P_1$ ?

**287.** Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  нормально падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром  $D = 1,2$  мм. На расстоянии  $b_1 = 18$  см за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние  $\Delta b$  нужно сместиться от этой точки вдоль оси отверстия, удаляясь от него, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

**288.** Дифракция Френеля от точечного монохроматического источника света, расположенного на оси круглого отверстия, наблюдается на экране, установленном перпендикулярно к оси отверстия. При перемещении экрана вдоль оси интенсивность в центре дифракционной картины проходит через максимумы и минимумы. Сколько зон Френеля  $m$  вписывается в отверстие диафрагмы при наблюдении наиболее удаленного максимума, если экран при этом оказался на таком же

расстоянии от диафрагмы, что и источник света, находящийся по другую сторону диафрагмы?

**289.** Основное фокусное расстояние амплитудной плоской зонной пластинки равно  $f_0$ . Найти ее остальные фокусные расстояния.

**290.** Освещенный предмет расположен на оси зонной пластинки на расстоянии  $a$  от нее. Самое дальнее от зонной пластинки изображение предмета получается на расстоянии  $b$  от нее. На каких расстояниях  $b_k$  от пластинки получают остальные изображения предмета?

**291.** С помощью зонной пластинки надо сфотографировать освещенный предмет с угловым размером  $2\alpha = 0,1$  рад. Оценить число зон пластинки, при котором будет достигнута наибольшая четкость в изображении всех частей предмета.

**292.** На белой стене наблюдается тень от прямолинейного края  $AB$  непрозрачного экрана, освещаемого параллельными монохроматическими лучами, падающими на экран перпендикулярно ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ). Плоскости стены и экрана параллельны, расстояние между ними  $b = 4$  м. На краю экрана выточено углубление, имеющее форму полукруга радиуса  $r = 1$  мм (рис. 35). Как изменится интенсивность света в точке стены, являющейся геометрической тенью центра  $O$  соответствующего круга по сравнению с интенсивностью в той же точке, когда углубления не было?

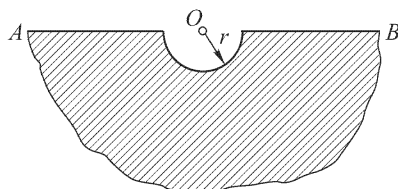


Рис. 35

**293.** Условие того, чтобы френелева дифракционная картина на отверстии переходила в фраунгоферову, заключается, очевидно, в том, чтобы максимальная разность фаз двух лучей, идущих от разных точек отверстия к экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, была мала по сравнению с  $\pi$ . Выразить это условие через размеры отверстия  $d$ , длину волны  $\lambda$  и расстояние от экрана до места наблюдения  $r$ .

**294.** Один из методов измерения угловых диаметров звезд заключается в следующем. Свет от звезды во время новолуния проходит мимо края Луны и на нем претерпевает дифракцию. На поверхности Земли получают дифракционные полосы, перемещающиеся со скоростью около  $500$  м/с. Для их наблюдения в фокусе телескопа помещают фотозаписывающий элемент. Возбуждаемый фотоэлектрический ток усиливается и с помощью осциллографа записывается на движущейся ленте. Резкость максимумов и минимумов на осциллограмме зависит от углового размера звезды. Сравнивая осциллограмму с теоретической, вычисленной в предположении, что звезда излучает как равномерно светящийся диск, можно вычислить ее угловой диаметр  $\varphi$ . Считая сначала край Луны абсолютно гладким, оценить, какие угловые диаметры звезд доступны измерению указанным методом. Оценить высоту неровностей

лунной поверхности  $h$  для возможности получения дифракционных полос. Расстояние до Луны  $b = 380\,000$  км.

**295.** Найти угловое положение минимумов при дифракции Фраунгофера на щели, пользуясь принципом Гюйгенса–Френеля и разбивая плоскость щели на зоны. Угол скольжения падающего луча относительно плоскости щели равен  $\alpha_0$ . Плоскость падения перпендикулярна к длине щели.

**296.** Квадратное отверстие со стороной  $L_0 = 0,2$  см освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающих нормально к плоскости отверстия. Найти форму и размер  $L \times L$  изображения отверстия на экране, удаленном на 50 м от него, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия. Границей освещенности на экране считать положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоняемых лучей (видимый спектр  $7000\text{--}4000\text{ \AA}$ ).

**297.** Доказать, что при дифракции Фраунгофера интенсивности дифрагированного света от дополнительных экранов совпадают во всех направлениях, за исключением направления падающей волны (принцип Бабине). Дополнительными называются два экрана, когда непрозрачные места одного экрана по форме и положению совпадают с отверстиями другого.

**298.** Плоская световая волна падает нормально на абсолютно черный экран, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Часть энергии поглощается черным экраном, а часть рассеивается из-за дифракции. Показать, что количество поглощенной энергии равно количеству рассеянной.

**299.** Щель постоянной ширины прикрыта двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками толщины  $d$  с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , примыкающими друг к другу. Одна пластинка закрывает

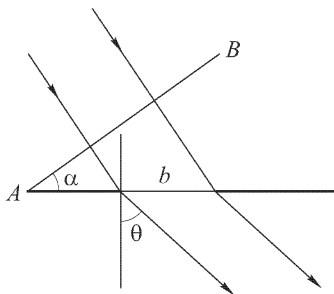


Рис. 36

первую половину щели, другая — вторую половину щели. На щель нормально падает плоская монохроматическая волна. При каком условии центр дифракционной картины Фраунгофера будет темным?

**300.** На щель ширины  $b$  положена стеклянная призма с показателем преломления  $n$  и преломляющим углом  $\alpha$  (рис. 36). На грань  $AB$  призмы нормально падает плоская монохроматическая волна. Найти направления на нулевой максимум и минимумы в дифракционной картине Фраунгофера.

**301.** Найти угловое распределение интенсивности света при фраунгоферовой дифракции на решетке из  $N$  щелей и с периодом  $d$  при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щели равна  $b$ .

**302.** Дополнительными, или взаимно дополнительными дифракционными решетками называются такие щелевые решетки, у которых непрозрачные места одной решетки заменяются прозрачными в другой (ср. задачу 297). Убедиться непосредственным расчетом, что при освещении таких решеток одним и тем же световым пучком положения и интенсивности главных дифракционных максимумов одного и того же порядка совпадают, за исключением главных максимумов нулевых порядков. Если же число штрихов решетки очень велико, то совпадают также интенсивности дифрагированного света для всех направлений, за исключением направления падающего света.

**303.** Параллельный пучок монохроматического света падает нормально на дифракционную решетку с заданной полной шириной ее штрихованной поверхности. При каком значении отношения  $b/d$  ширины щели  $b$  к периоду решетки интенсивность главных дифракционных максимумов второго порядка будет максимальной?

**304.** Показать, что для обычной амплитудной щелевой дифракционной решетки справедливо неравенство  $I_{\text{диф}} \leq 1/4 I_{\text{пад}}$ , где  $I_{\text{пад}}$  — полный поток энергии, падающий на решетку, а  $I_{\text{диф}}$  — поток энергии дифрагированного света, приходящийся на все дифракционные максимумы, кроме максимума нулевого порядка. Максимальное значение дифрагированного потока энергии достигается в случае, когда ширина щелей решетки равна половине ее периода.

**305.** Найти угловое распределение дифракционных минимумов при дифракции на решетке, период которой равен  $d$ , а ширина щели равна  $b$ .

**306.** Найти условие появления главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения  $\theta_0$ ). Какой вид принимает это условие, если  $d \gg \lambda$ , а порядок спектра  $n \ll d/\lambda$ ?

**307.** Пучок рентгеновских лучей падает на решетку с периодом 1 мкм под углом  $89^\circ 30'$ . Угол дифракции для спектра второго порядка равен  $89^\circ$ . Найти  $\lambda$ .

**308.** При каком условии можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения?

**309.** Могут ли перекрываться спектры первого и второго порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом (7000–4000 Å)?

**310.** Найти условие равенства нулю интенсивности  $m$ -го максимума для дифракционной решетки с периодом  $d$  и шириной щели  $b$ .

**311.** Описать характер спектров дифракционной решетки, если ее постоянная равна: 1) удвоенной; 2) утроенной; 3) учетверенной ширине щели.

**312.** Какой максимальный порядок спектра может наблюдаться при дифракции света длины волны  $\lambda$  на решетке с периодом  $d$ ?

**313.** Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре третьего поряд-



ка, совпадает с изображением линии  $\lambda = 4861 \text{ \AA}$  в спектре четвертого порядка.

**314.** Чем определяется максимальная длина волны, которая может получиться в спектре дифракционной решетки? Определить постоянную, которую должна иметь решетка, способная давать инфракрасный спектр с длинами волн до  $100 \text{ мкм}$ .

**315.** На одномерную фазовую дифракционную решетку (рис. 37) нормально падает плоская монохроматическая волна. На участках  $a$  и  $b$

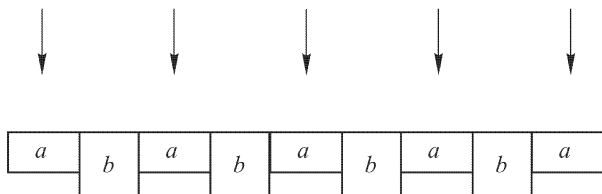


Рис. 37

оптические пути равны соответственно  $l_1 = n_1 z_1$  и  $l_2 = n_2 z_2$  ( $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления,  $z_1$  и  $z_2$  — соответствующие толщины). Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции при  $n_1 \rightarrow n_2$  и  $z_1 \rightarrow z_2$ ?

**316.** На одномерную дифракционную решетку со щелями (рис. 38) падает плоская монохроматическая волна. Щели  $b$  решетки совсем

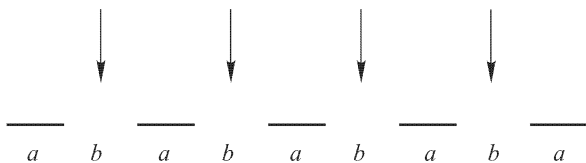


Рис. 38

прозрачные, а участки  $a$  имеют коэффициент пропускания  $\alpha$ . Толщина решетки бесконечно мала по сравнению с длиной волны. Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции, когда  $\alpha \rightarrow 1$ ?

**317.** Прозрачная периодическая структура, профиль которой изображен на рис. 39, освещается сверху плоской монохроматической волной, падающей нормально на верхнюю границу. Ширины уступов и впадин структуры одинаковы. При заданном показателе преломления  $n$  подобрать глубину  $h$  таким образом, чтобы главные френгоферовы дифракционные максимумы первого порядка имели наибольшую интенсивность. Какова при этом интенсивность нулевого главного максимума?

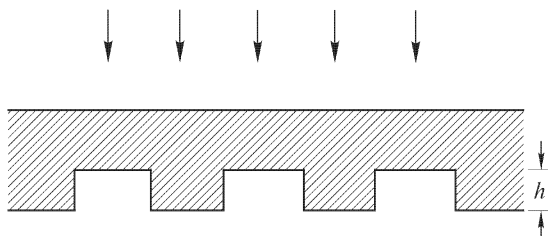


Рис. 39

**318.** Две решетки из  $N$  синфазных вибраторов каждая сдвинуты друг относительно друга на расстояние  $a$  (рис. 40). Как будет меняться

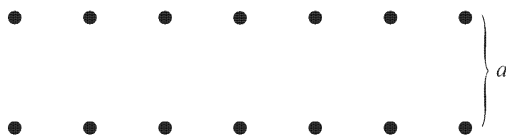


Рис. 40

диаграмма направленности системы из таких решеток в зависимости от изменения расстояния  $a$  между ними? Рассмотреть случаи:  $a = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $a = \lambda$ ,  $a = \frac{3}{2}\lambda$ ,  $a = 2\lambda$ .

**319.** Как изменится диаграмма направленности решетки из  $3N$  равноотстоящих синфазных вибраторов, если убрать каждый третий из них?

**320.** Сложная излучающая система состоит из конечного ряда густо расставленных параллельных вибраторов с равномерным распределением фаз колебаний вдоль ряда. Как должен изменяться со временем сдвиг фаз  $\Delta\varphi$  между двумя соседними вибраторами, чтобы главный лепесток диаграммы направленности всей системы совершал круговой обзор местности с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (при отсутствии вращения самой системы)?

**321.** Над центром граммофонной пластинки  $O_1$  помещен точечный источник монохроматического света на высоте  $h_1 = 1$  см. Глаз наблюдателя расположен на высоте  $h_2 = 10$  см на расстоянии  $a = 110$  см от оси пластинки. Помимо геометрического изображения источника глаз видит систему дифракционных полос на поверхности пластинки. Определить расстояние  $\Delta x$  между ними, если расстояние между бороздками  $d = 0,5$  мм. Длина световой волны  $\lambda = 5500$  Å.

**322.** Дифракционную решетку можно характеризовать ее пропусканием. Пропусканием  $D$  называется функция, определяемая соотношением  $E_{\text{вых}}(x) = D(x)E_{\text{вх}}(x)$ , где  $E_{\text{вх}}$  — поле падающей волны на передней поверхности решетки, а  $E_{\text{вых}}$  — поле выходящей волны на задней поверхности решетки. (Ось  $X$  выбрана на поверхности решетки

перпендикулярно к ее штрихам.) Если пропускаемость синусоидальна, т. е. представляется выражением  $D = \alpha(1 + q \cos px)$  с постоянными  $\alpha$ ,  $q$ ,  $p$ , то решетка называется решеткой Рэлея. Показать, что дифракционный спектр такой решетки состоит только из трех максимумов: нулевого и двух максимумов первого порядка.

**323.** 1) Подсчитать угловую дисперсию в  $\text{угл.с}/\text{\AA}$  в спектре первого порядка для решетки, имеющей 3937 штрихов на 1 см. 2) Подсчитать линейную дисперсию спектрографа с такой решеткой при объективе с фокусным расстоянием 50 см. 3) Подсчитать величину, обратную линейной дисперсии (число  $\text{\AA}$  на 1 мм). При расчете считать, что углы дифракции малы ( $\cos \theta \approx 1$ ).

**324.** Какое расстояние между компонентами желтой линии дублета натрия ( $\lambda_1 = 5890 \text{\AA}$ ,  $\lambda_2 = 5896 \text{\AA}$ ) получится на фотографическом негативе в спектрографе, описанном в предыдущей задаче?

**325.** Найти угловую дисперсию решетки с постоянной  $d = 5 \text{ мкм}$ , если  $\lambda = 5000 \text{\AA}$ , порядок спектра  $n = 3$ .

**326.** На плоскую отражательную решетку нормально падает свет  $D$ -линии натрия ( $\lambda = 5890 \text{\AA}$ ). Определить число штрихов решетки на 1 мм, если спектр второго порядка наблюдается под углом  $45^\circ$  к нормали.

**327.** Найти угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом дифракционной решетки.

**328.** Какая получится ширина спектральной линии водорода ( $\lambda = 6563 \text{\AA}$ ) на негативе спектрографа, если в нем использована решетка шириной  $l = 3 \text{ см}$  и объектив с фокусным расстоянием  $f = 15 \text{ см}$ ?

**329.** Подсчитать минимальное число штрихов решетки, которая может разрешить натриевый дублет в спектре первого порядка.

**330.** Подсчитать разрешающую силу решетки с периодом  $2,5 \times 10^{-4} \text{ см}$  и шириной 3 см в спектрах первого и четвертого порядков.

**331.** Изменяется ли разрешающая сила решетки при изменении наклона первичного пучка, падающего на нее?

**332.** Изменяется ли разрешающая способность и дисперсионная область дифракционной решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

**333.** На плоскую отражательную решетку, содержащую  $N = 50\,000$  штрихов, нормально падает свет от двойной линии натрия ( $\lambda_1 = 5890 \text{\AA}$ ,  $\lambda_2 = 5896 \text{\AA}$ ). Число штрихов, приходящееся на 1 см длины решетки, равно  $n = 5000$ . Какой максимальный порядок спектра  $m$  можно получить от такой решетки и каково минимальное расстояние  $\delta\lambda$  между спектральными линиями, которое способна разрешить решетка в указанной области спектра? Спектр максимального порядка фотографируется на фотопластинке с помощью объектива с фокусным расстоянием  $f = 50 \text{ см}$ . Какое расстояние  $\Delta x$  между спектральными линиями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  получится на фотопластинке?

**334.** Коллиматорная щель  $S$ , освещаемая источником света, помещается в главном фокусе линзы  $L$  с фокусным расстоянием  $f = 20$  см. Пройдя через линзу, свет падает на дифракционную решетку, плоскость которой перпендикулярна к главной оптической оси линзы  $L$ . Число штрихов решетки  $N = 1000$ , ее период  $d = 0,001$  см. Какова должна быть ширина коллиматорной щели  $x$ , чтобы была полностью использована разрешающая способность решетки в окрестности длины волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ?

**335.** Найти связь между углом выхода луча (соответствующего максимуму) из пластинки Луммера–Герке с толщиной  $h$  и показателем преломления  $n$ .

**336.** Определить угловую дисперсию и дисперсионную область пластинки Луммера–Герке с учетом дисперсии показателя преломления. Считать  $\varepsilon$  малым (см. ответ к предыдущей задаче).

**337.** Каково число  $z$  интерферирующих лучей в пластинке Луммера–Герке длиной  $L = 30$  см, толщиной  $h = 1$  см и с показателем преломления  $n = 1,52$ ?

**338.** Найти минимальный и максимальный порядки спектров, которые могут наблюдаться с пластинкой, описанной в предыдущей задаче, для водородной линии  $H_\beta$  ( $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ ).

**339.** Найти дисперсионную область и разрешающую силу  $R$  пластинки Луммера–Герке, описанной в задаче 337;  $dn/d\lambda$  для водородной линии  $H_\beta$  равно  $9,6 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}^{-1}$ .

**340.** Определить угловое расстояние между соседними максимумами в пластинке, описанной в задаче 337, для  $H_\beta$ -линии при условии, что  $\varepsilon = 1^\circ$ .

**341.** Как изменятся разрешающая способность и дисперсионная область пластинки Луммера–Герке, если ее толщину увеличить вдвое, а длину оставить без изменения?

**342.** Как изменятся разрешающая способность и дисперсионная область пластинки Луммера–Герке, если ее длину увеличить вдвое, а толщину оставить без изменения?

**343.** Две пластинки Луммера–Герке имеют одинаковые геометрические размеры, но сделаны из различных сортов стекла. Какая пластинка имеет большую разрешающую способность и какая большую дисперсионную область?

**344.** Какую минимальную длину должна иметь пластинка Луммера–Герке ( $n = 1,5$ ), чтобы разрешить дублетную структуру линии  $H_\alpha$  ( $\lambda = 6563 \text{ \AA}$ )? Разность длин волн линий дублета равна  $0,14 \text{ \AA}$ . Пренебречь величиной  $dn/d\lambda$ .

**345.** Какая интерференционная картина будет наблюдаться при освещении монохроматическим светом двух скрещенных пластинок Луммера–Герке, т.е. двух пластинок, расположенных одна за другой вдоль прямой линии, но повернутых друг относительно друга на  $90^\circ$ ?

**346.** Определить условие максимума, угловое расстояние между максимумами, угловую дисперсию и дисперсионную область эталона Фабри–Перо (ввести угол падения  $\varphi$  и расстояние между пластинками  $h$ ).

**347.** Определить дисперсионную область эталона Фабри–Перо при  $h = 1$  см,  $\lambda = 5000$  Å. Угол падения  $\varphi$  считать малым.

**348.** Чему равен порядок спектра при работе с эталоном Фабри–Перо в зеленой части спектра ( $\lambda = 5500$  Å), если расстояние между пластинками равно 1 см? Угол падения очень мал.

**349.** Разрешающую способность интерферометра Фабри–Перо можно определить, пользуясь следующим критерием. Для разрешения двух спектральных линий  $\lambda$  и  $\lambda'$  необходимо, чтобы в интерференционной картине, даваемой интерферометром, эти линии были разведены на расстояние, не меньшее полуширины линии. Пользуясь этим критерием, найти выражение для разрешающей способности интерферометра Фабри–Перо.

**350.** 1) Каков порядок  $m$  спектра при работе в области  $\lambda = 5000$  Å с эшеломом Майкельсона, высота ступенек которого  $b = 1$  см, а показатель преломления стекла  $n = 1,5$ ? Найти угловое расстояние  $\theta$  между главными максимумами для той же области спектра при ширине ступеньки  $a = 0,2$  см.

**351.** Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета  $D$ -линии натрия ( $\lambda_1 = 5890$  Å,  $\lambda_2 = 5896$  Å)?

**352.** Найти величину наименьшего основания призмы, изготовленной из стекла, дисперсия которого вблизи  $D$ -линии натрия равна  $dn/d\lambda = 956$  см<sup>-1</sup> и которая сможет разрешить желтый дублет натрия ( $\lambda_1 = 5890$  Å,  $\lambda_2 = 5896$  Å).

**353.** Спектрограф имеет стеклянную призму с основанием  $a = 10$  см и преломляющим углом  $A = 60^\circ$ , устанавливаемую при работе на угол наименьшего отклонения вблизи длины волны  $\lambda = 5000$  Å. Показатель преломления стекла призмы  $n = 1,73$ ; фокусное расстояние объектива коллиматора  $f = 25$  см. Какова должна быть ширина коллиматорной щели  $b$ , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы?

**354.** Какой должна быть длина  $b$  основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и пластинка Луммера–Герке длиной  $L = 20$  см? Показатель преломления пластинки  $n = 1,5$ ; дисперсия показателя преломления призмы  $dn_{\text{пр}}/d\lambda = 956$  см<sup>-1</sup>; длина волны  $\lambda = 6000$  Å.

**355.** Эшелон Майкельсона состоит из  $N = 30$  стеклянных пластинок с показателем преломления  $n = 1,5$ ; толщина каждой из них  $h = 1$  см. Какова должна быть длина  $b$  основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, что и рас-

смаатриваемый эшелон? Дисперсия показателя преломления призмы  $dn_{\text{пр}}/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$ ; длина волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ .

**356.** Ширина заштрихованной части дифракционной решетки равна длине основания призмы из каменной соли. Разрешающая способность решетки в первом порядке равна разрешающей способности призмы для длины волны  $\lambda = 5150 \text{ \AA}$ . Определить период решетки  $d$ , если показатель преломления каменной соли для длины волны  $\lambda_1 = 4861 \text{ \AA}$  равен  $n_1 = 1,5537$ , а для длины волны  $\lambda_2 = 5461 \text{ \AA}$   $n_2 = 1,5477$ .

**357.** Стеклянная призма с основанием  $b = 10 \text{ см}$  изготовлена из тяжелого флинта, дисперсия которого в окрестности  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  равна  $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$ . Какую максимальную разрешающую способность может иметь дифракционная решетка, ширина заштрихованной части которой равна длине основания этой призмы? Сравнить разрешающую способность такой решетки с разрешающей способностью призмы.

**358.** На щель спектрографа (с дифракционной решеткой) спроецированы ньютоновы кольца, полученные в отраженном белом свете. Щель проходит по одному из диаметров ньютоновых колец. Описать вид спектра, если его порядок и период дифракционной решетки таковы, что углы дифракции  $\theta$  малы, и при расчетах можно положить  $\sin \theta = \text{tg } \theta$ . Как изменится картина спектра, если щель не проходит через центр ньютоновых колец, а сдвинута от него в сторону на расстояние  $a$ ? Описать качественно, как изменится картина при замене дифракционной решетки призмой.

**359.** Для рентгеновских лучей не существует линз и сферических зеркал. Для наблюдения дифракции рентгеновских лучей узкий пучок их падает на кристалл или (при скользящем падении) на дифракционную решетку. Дифракционная картина фиксируется на фотопластинке без какой бы то ни было фокусировки. На каком расстоянии  $l_F$  от кристалла надо установить фотопластинку, чтобы на ней наблюдалась дифракционная картина Фраунгофера, если ширина пучка падающих рентгеновских лучей  $h = 1 \text{ мм}$ , а длина волны  $\lambda = 1 \text{ \AA}$ ? На опыте фотопластинку устанавливают на расстоянии нескольких сантиметров или десятков сантиметров, а для вычисления направлений на дифракционные максимумы пользуются формулами френгоферовой дифракции. Приняв во внимание вычисленное значение для  $l_F$ , объяснить, почему можно поступать таким образом.

**360.** Имея в виду решение предыдущей задачи, получить выражение для разрешающей способности (одномерной) дифракционной решетки в рентгеновской области спектра.

**361.** Диафрагма линзы имеет форму квадрата, длина стороны которого равна  $D$ . Точечный монохроматический источник света помещается на главной оптической оси линзы. Найти распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции на краях диафрагмы, в плоскости, перпендикулярной к главной оптической оси и проходящей через фокус геометрического схождения лучей.

**362.** Оптическая система (труба или микроскоп) дает в качестве изображения светящейся точки систему дифракционных колец. Согласно Рэлею, минимальное расстояние между двумя близкими точками, которые еще изображаются раздельно, определяется тем, что центральный светлый кружок колец от первой светящейся точки должен приходиться на первое темное кольцо дифракционной картины, даваемой второй светящейся точкой. Ориентировочно можно принять, что глаз способен различить две близкие точки, если максимумы освещенности в местах их геометрических изображений превосходят интенсивность посредине между ними не менее чем на 15%. Приняв это, проверить, действительно ли при выполнении критерия Рэлея получатся раздельные изображения двух самосветящихся точек.

**Указание.** Для простоты расчета принять, что диафрагма квадратная. В случае круглой диафрагмы результаты мало отличаются от тех, которые получаются для квадратной диафрагмы. (См. решение предыдущей задачи.)

**363.** Решить предыдущую задачу в предположении, что изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света. Например, можно взять два круглых отверстия в экране, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Рассмотреть качественно три случая: 1) отверстия освещаются пучком лучей, параллельных главной оптической оси; 2) отверстия освещаются параллельными лучами, но наклоненными к главной оптической оси; 3) отверстия освещаются диффузным светом.

**364.** 1) Считая, что при естественном освещении наибольшее количество света приходится на длину волны около  $5500 \text{ \AA}$ , подсчитать минимальное разрешаемое угловое расстояние для глаза при адаптации на небольшие яркости (диаметр зрачка 4 мм). 2) Найти наименьшее разрешаемое глазом расстояние между штрихами, начерченными на листе бумаги, находящемся на расстоянии ясного зрения (25 см).

**365.** Каково должно быть увеличение зрительной трубы для того, чтобы полностью использовать разрешающую способность ее объектива?

**366.** 1) Подсчитать разрешающую способность зрительной трубы с диаметром объектива 5 см. 2) При каком увеличении будет использована полная разрешающая способность этой трубы? Диаметр зрачка глаза  $d = 5 \text{ мм}$ .

**367.** Самый большой в мире телескоп сооружен в Советском Союзе и установлен в астрономической обсерватории на северных отрогах Кавказского хребта вблизи станции Зеленчукская. Диаметр зеркала этого телескопа  $D = 6 \text{ м}$ . Найти разрешаемое им угловое расстояние  $\delta\theta$  для длины волны  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ .

**368.** В чем выгода применения телескопов для рассматривания звезд, если они не дают увеличения по сравнению с невооруженным глазом?

**369.** Почему в телескоп наиболее яркие звезды, находящиеся вдали от Солнца, можно наблюдать даже днем?

**370.** При наблюдении в телескоп с нормальным увеличением освещенность изображения звезды на сетчатке глаза в  $\alpha = 10$  раз меньше освещенности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива для того, чтобы освещенность изображения звезды на сетчатке стала в  $\beta = 10$  раз больше освещенности изображения неба, если вместе с объективом телескопа заменен и окуляр таким образом, что увеличение телескопа осталось нормальным?

**371.** В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластинка. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в  $\alpha = 10$  раз меньше освещенности дневного неба. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды на фотопластинке стала в  $\beta = 10$  раз больше освещенности изображения неба?

**372.** Ракету, удаляющуюся от Земли, фотографируют, помещая фотопленку в фокальной плоскости объектива астрономического телескопа. При диаметре объектива  $D_1 = 80$  мм дифракционное изображение ракеты становится неразличимым на фоне изображения неба, когда ракета находится на расстоянии  $l_1 = 2 \cdot 10^4$  км от Земли. На каком расстоянии от Земли  $l_2$  удастся заметить ракету на фотографии, полученной с помощью объектива диаметром  $D_2 = 200$  мм при той же контрастной чувствительности пленки?

**373.** О зоркости хищных птиц слагают легенды. Оцените, на основе дифракционных соображений, сможет ли орел, летающий над землей на высоте 1 км, разглядеть мышонка размером в 2 см, или он сможет только обнаружить его присутствие.

**374.** Какова должна быть минимальная длина отрезка на Луне и Солнце, чтобы его изображение в рефлекторе с диаметром зеркала 6 м можно было отличить от изображения точки?

**375.** Каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса, чтобы их изображения в телескопе (рефракторе) с диаметром объектива 60 см можно было отличить от изображения одной точки? Считать, что Марс наблюдается в момент великого противостояния, когда расстояние до него от Земли минимально и оставляет  $56 \cdot 10^6$  км.

**376.** Точечный источник света находится на некотором расстоянии  $a$  от щели ширины  $D$ . За щелью на расстоянии  $b$  нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости щели. Прямая, соединяющая источник света с серединой щели, перпендикулярна к плоскости экрана. Найти приближенное выражение для расстояния  $x$  между центральным максимумом и первым дифракционным минимумом на экране, считая, что углы дифракции малы. Найти условие применимости найденного приближенного выражения.



**377.** При получении изображения с помощью малого отверстия, как в камере-обскуре (принцип стеноскопии), следует считаться с тем, что при слишком малом отверстии изображение начинает искажаться из-за дифракции; однако увеличение размеров отверстия приведет к уширению пучков света, идущих от каждой точки, и размытию изображения по этим причинам. Считая, что расстояния  $a$  и  $b$  от предмета до отверстия и от отверстия до изображения остаются неизменными, наивыгоднейший размер отверстия можно приближенно найти из требования, чтобы изображение точки, полученное по правилам геометрической оптики, совпадало по величине с центральным кружком в дифракционной картине на отверстии от той же светящейся точки. Определить наивыгоднейшую величину отверстия.

**Указание.** Для упрощения вычислений заменить круглое отверстие щелью или квадратным отверстием. (См. предыдущую задачу.)

**378.** Камера с малым отверстием длиной  $L = 10$  см предназначена для фотографирования удаленных предметов. Оценить диаметр отверстия  $D$  камеры, при котором она имеет наибольшую разрешающую способность. Длина волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ .

**379.** В принципе можно построить телескоп сколь угодно высокой разрешающей способности без объектива, заменив объектив круглым отверстием. Какова должна быть длина  $L$  такого телескопа, чтобы он имел ту же разрешающую способность, что и обычный телескоп с диаметром объектива  $D = 1$  м? Чему будет равна светосила  $S$  такого телескопа?

**380.** Как изменится разрешающая способность объектива телескопа, если его центральную часть закрыть круглым экраном, диаметр которого мало отличается от диаметра самого объектива?

**Указание.** При решении задачи круглые объектив и экран заменить квадратными.

**381.** Производится фотографирование удаленных предметов с помощью объектива телескопа на фотопластинке, помещенной в его фокальной плоскости. Полученный снимок с помощью окуляра того же телескопа проецируется на удаленный экран. Каково должно быть угловое увеличение телескопа, чтобы при этом была использована полностью разрешающая способность объектива телескопа? Изображение на экране рассматривается с того места, где установлен проекционный аппарат.

**382.** Гальванометр имеет зеркальце диаметром  $D = 5$  мм. Оценить (учитывая дифракционные эффекты), дальше какого расстояния  $L$  не следует отодвигать шкалу от гальванометра, если отсчеты с помощью зрительной трубы можно делать с точностью до  $l = 0,5$  мм.

**383.** С какого расстояния  $r$  можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме  $P = 10$  кВт на частоте  $\omega = 4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , если для формирования луча используется параболическое зеркало с диаметром  $D = 5$  м? Глаз видит источник,

если в зрачок диаметром  $d = 5$  мм попадает в 1 с  $n = 60$  квантов излучения, лежащего в зеленой части спектра.

**384.** Излучение лазера непрерывного действия на волне  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  мощностью  $P = 1$  Вт направляется на спутник с помощью телескопа, диаметр объектива которого равен  $D = 30$  см. Свет, рассеянный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоумножитель с пороговой чувствительностью  $P_{\text{пор}} = 10^{-14}$  Вт. При каких расстояниях  $l$  до спутника отраженный сигнал может быть обнаружен, если поверхность спутника равномерно рассеивает падающий на него свет (по закону Ламберта)? Диаметр спутника  $d = 20$  см.

**385.** Дифракционные полосы от двух одинаковых параллельных щелей наблюдаются в фокальной плоскости линзы  $L$  (рис. 41).  $S_1$  и  $S_2$  — бесконечно удаленные линейные источники монохроматического света, параллельные щелям. При каком угловом расстоянии между  $S_1$  и  $S_2$  дифракционные полосы исчезнут, если расстояние между центрами щелей равно  $D$  и велико по сравнению с шириной щели и длиной световой волны  $\lambda$ ?

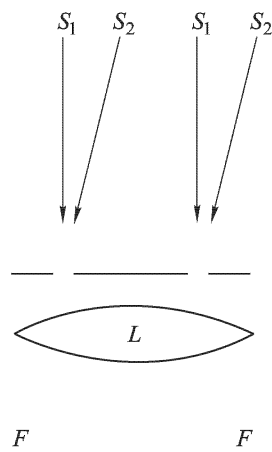


Рис. 41

**386.** В установке, описанной в предыдущей задаче, источники  $S_1$  и  $S_2$  помещены в фокальной плоскости коллиматорной линзы с фокусным расстоянием  $f$ . При каком расстоянии  $x$  между  $S_1$  и  $S_2$  дифракционные полосы исчезнут?

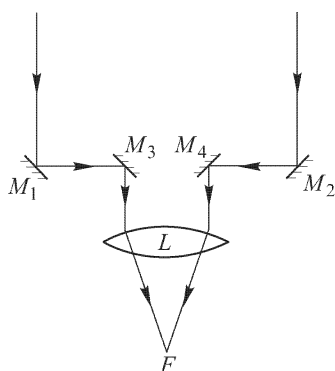


Рис. 42

**387.** В установке, описанной в задаче 385, вместо линейных источников  $S_1$  и  $S_2$  применяется один бесконечно удаленный источник, имеющий форму прямоугольника, длинные стороны которого параллельны щелям. Считая, что поверхностная яркость этого источника постоянна, найти угловую ширину источника  $\theta$ , при которой дифракционные полосы исчезают.

**У к а з а н и е.** Разбить прямоугольный источник на узкие полосы. Считать каждую из этих полос за линейный источник и воспользоваться решением задачи 385.

**388.** На рис. 42 изображена схема установки Майкельсона, предназначенной для измерения угловых диаметров звезд. Зеркала  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , снабженные круглыми диафрагмами, направляют в объектив

телескопа два пучка света, интерферирующие друг с другом в фокальной плоскости объектива. Какой вид будет иметь дифракционная картина, наблюдаемая в фокальной плоскости?

**389.** При каком условии в установке, описанной в предыдущей задаче, исчезнут интерференционные полосы, если источником света служит: 1) двойная звезда; 2) одиночная звезда конечного углового размера? (Для упрощения расчетов можно принять, что звезда имеет форму квадрата с постоянной поверхностной яркостью.) Как будет меняться интерференционная картина при изменении расстояния между зеркалами  $M_3$  и  $M_4$  (рис. 42)?

**390.** При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе на установке, схематически описанной в задаче 388, Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезли, когда расстояние между внешними зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 42) равнялось 306,5 см. Считая, что эффективная длина волны света от Бетельгейзе равна  $5750 \text{ \AA}$ , вычислить угловой диаметр этой звезды.

**391.** В задаче 271 описан способ фотографирования предметов с помощью непрозрачного гладкого шара. Оценить минимальное угловое разрешаемое расстояние  $\delta\varphi$  при фотографировании удаленных предметов этим способом.

**У к а з а н и е.** Размер светлого кружка в центре геометрической тени от точечного источника можно оценить из условия, что первый дифракционный минимум получается, когда разность хода лучей от противоположных точек шара порядка длины волны.

**392.** Существующие радиотелескопы и радиоустановки, предназначенные для изучения радиоизлучения Солнца и Галактики, обладают малой разрешающей способностью из-за больших длин волн радиоизлучения. 1) Найти минимальное разрешаемое угловое расстояние  $\delta\varphi$  радиотелескопа с диаметром зеркала  $d = 50 \text{ м}$  для длин волн  $\lambda = 1 \text{ м}$  и  $\lambda = 10 \text{ см}$ .

Для увеличения разрешающей способности предлагалось использовать дифракцию радиоволн от края Луны (см. задачу 294). 2) Оценить разрешающую способность этого метода для тех же волн в предположении, что край Луны действует как тонкий непрозрачный экран, ограниченный прямолинейным краем. 3) Оценить, каковы должны быть высоты  $h$  неровностей лунной поверхности, чтобы можно было пользоваться этим методом. Расстояние до Луны  $b = 380\,000 \text{ км}$ .

**393.** Один из принципиально возможных (но практически не осуществимых) способов повышения разрешающей способности радиоустановок для изучения радиоизлучения космических масс состоит в том, чтобы использовать дифракционный максимум интенсивности радиоизлучения, получающийся в центре геометрической тени Луны от точечного источника (ср. с задачей 391). Оценить разрешающую способность этого метода, найти минимальное угловое разрешаемое расстояние для тех же длин волн, что и в предыдущей задаче. Обсу-

дить возможности использования рассматриваемого метода. Диаметр Луны  $D = 3470$  км.

**394.** В качестве одного из двух зеркал (антенн) радиоинтерферометра можно использовать пассивный отражатель, например, морскую поверхность. Определить угловое разрешение интерферометра для волны с длиной  $\lambda = 1$  м, антенна которого расположена над морем на скале высотой  $h = 500$  м.

**У к а з а н и е.** Диаграммы направленности антенны для приема и испускания излучения одинаковы. (Это следует из теоремы взаимности, см. задачу 695).

**395.** Каково минимальное угловое разрешение радиоинтерферометра, установленного на Земле, при работе на волне  $\lambda = 10$  м?

**396.** Каково угловое разрешение радиоинтерферометра, одна из антенн которого помещена на искусственном спутнике Луны? Предполагается, что используется отражение от лунной поверхности; ее следует считать плоской, так как рассматривается спутник, летящий на небольшой высоте. Время обращения спутника по круговой орбите вокруг Луны равно  $10^4$  с, длина волны  $\lambda = 100$  м. Почему в данном случае желательно использовать спутник Луны, а не Земли?

**397.** Какова форма главного лепестка диаграммы направленности приемной антенны в виде полосы шириной  $d$ , «вырезанной» из параболического рефлектора диаметром  $D$ ?

**398.** Определить минимальное разрешаемое расстояние  $\delta$  микроскопа при наилучших условиях освещения для: 1) безиммерсионного объектива с числовой апертурой  $a = 0,9$ ; 2) того же объектива, но с масляной иммерсией ( $n = 1,6$ ). Длина волны при визуальных наблюдениях  $\lambda = 5500$  Å.

**399.** 1) Во сколько раз можно повысить разрешающую способность микроскопа, перейдя к фотографированию в ультрафиолетовых лучах ( $\lambda = 2700$  Å) по сравнению с фотографированием в зеленых лучах? 2) Подсчитать наименьшее расстояние между штрихами, которое разрешит ультрафиолетовый микроскоп с иммерсией (использовать данные предыдущей задачи). 3) Какое необходимо увеличение объектива микроскопа, чтобы на фотографической пластинке, помещенной в плоскости изображения, даваемого объективом, наименьшие разрешаемые детали имели размеры порядка  $0,5$  мм?

**400.** Каково должно быть увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность его объектива?

**401.** Проволочная сетка, ячейки которой имеют форму квадратов, проецируется собирающей линзой на экран. В задней фокальной плоскости линзы помещена узкая щель. Как будет меняться картина на экране при вращении щели вокруг главной оптической оси линзы? Как изменится картина при увеличении ширины щели?

**402.** С помощью объектива микроскопа получена микрофотография малого объекта (например, растительных клеток или бактерий) с ли-

нейным увеличением  $N$ . Тот же объектив был использован для проецирования полученной микрофотографии на удаленный экран. Каково должно быть минимальное значение увеличения  $N$ , чтобы полностью была использована разрешающая способность микроскопа? Диаметр апертурной диафрагмы объектива равен  $D$ , диаметр зрачка глаза  $d$ . Изображение на экране рассматривается с места нахождения объектива.

**403.** Каково должно быть фокусное расстояние  $f_2$  окуляра микроскопа, чтобы была полностью использована разрешающая способность объектива? Числовая апертура объектива равна  $n \sin \alpha$ , фокусное расстояние объектива  $f_1$ , длина тубуса (трубы микроскопа)  $l$ . Длину тубуса можно считать равной расстоянию между объективом и плоскостью первого изображения (т. е. изображения, даваемого объективом).

**404.** С помощью объектива телескопа с диаметром  $D$  и фокусным расстоянием  $f$  производится фотографирование удаленных объектов на мелкозернистой пластинке, помещенной в фокальной плоскости объектива. Полученное изображение рассматривается в микроскоп с числовой апертурой  $n \sin \alpha$  и увеличением  $N$ . Каким условиям должны удовлетворять числовая апертура и увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива телескопа?

**405.** Современные фотопластинки способны разрешать до  $z = 10^4$  линий на сантиметр. Какую светосилу (т. е. отношение квадратов диаметра  $D$  и фокусного расстояния  $f$ ) должен иметь объектив фотоаппарата, чтобы полностью использовать разрешающую способность пленки?

**406.** В кювету, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, налит толуол, в котором возбуждаются ультразвуковые волны с помощью колебаний пластинки пьезокварца. Пластика кварца установлена параллельно боковым стенкам кюветы. Ультразвуковые волны, возбуждаемые пластинкой, отражаются от одной из боковых стенок кюветы. В результате в жидкости образуется стоячая ультразвуковая волна. Чему равен пространственный период изменения показателя преломления жидкости при наличии в ней стоячей ультразвуковой волны?

**407.** На рис. 43 изображена схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуке. Стоячие ультразвуковые волны образуются в кювете  $K$ . Пластика кварца  $P$  установлена параллельно

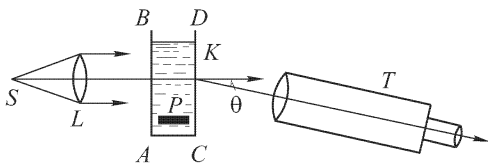


Рис. 43

стенке  $AC$ , так что волны, излучаемые ею, распространяются в направлении, параллельном  $AB$ . Дифракционные максимумы и минимумы наблюдаются в трубу  $T$ , установленную на бесконечность. Показать, что угол дифракции  $\theta$  для максимума  $m$ -го порядка определяется из условия  $\Delta \sin \theta = m\lambda$ .

**Указание.** Принять во внимание, что частота ультразвуковых колебаний весьма мала по сравнению с частотой световых колебаний.

**408.** Дифракция света на ультразвуковой волне в толуоле наблюдается на установке, описанной в предыдущей задаче. В качестве источника света использована зеленая линия ртути ( $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ ). Вместо трубы  $T$  за кюветой поставлена собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 30 \text{ см}$ . Дифракционные полосы получаются в фокальной плоскости линзы и рассматриваются в микроскоп, снабженный шкалой. Определить скорость звука  $v$  в толуоле, если расстояние между двумя соседними максимумами  $\Delta x = 0,546 \text{ мм}$ , а частота ультразвука  $\nu = 4000 \text{ кГц}$ .

**409.** Можно ли по характеру дифракционной картины Фраунгофера на плоской ультразвуковой волне решить, происходит ли дифракция на бегущей или стоячей ультразвуковой волне? Поглощением ультразвука пренебречь.

**410.** Если жидкость, в которой установилась стоячая ультразвуковая волна, рассматривать в микроскоп, то благодаря неоднородности жидкости будут видны светлые и темные полосы. Чему равно расстояние между двумя соседними светлыми или темными полосами?

**411.** Как изменится результат решения задачи 407, если не пренебрегать частотой ультразвуковых колебаний по сравнению с частотой световых колебаний?

## § 5. Элементы голографии

**412.** Плоская монохроматическая волна падает под углом  $\theta$  на экран  $\mathcal{E}$ , плоскость которого перпендикулярна к плоскости рис. 44, и принята за координатную плоскость  $XU$  с началом координат в точке  $O$ . Нормаль к волне также лежит в плоскости рисунка. Найти распределение фазы волны  $\Phi(x)$  в плоскости этого экрана в зависимости от координаты  $x$ . За нулевую принять фазу волны в начале координат  $O$ . Записать выражение для напряженности поля волны  $E_P$  в произвольной точке  $P$  экра-

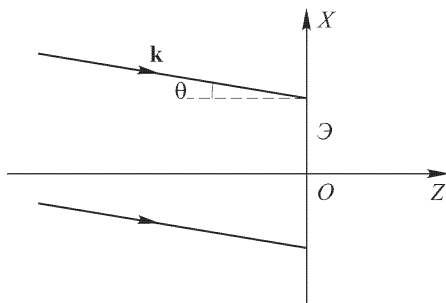


Рис. 44

### § 3. Интерференция света

**199.**  $\Psi = \varphi\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{v}\right) = \varphi\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right)$ . Для монохроматической волны  $\Psi = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta)$ , где  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n}$  — волновой вектор.

**200.** 1)  $\Psi = \frac{\varphi(t - R/c)}{R}$ ; 2)  $\Psi = \frac{\varphi(t - r/c)}{\sqrt{r}}$ .

**202.** Когда плоскости колебаний обеих волн взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим сложение колебаний, соответствующих обеим волнам, в некоторой точке пространства. Пусть первое колебание происходит по закону  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 \cos \omega t$ , а второе — по закону  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega t + \delta)$ . Результирующее колебание будет определяться выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_1 \cos \omega t + \mathbf{A}_2 \cos(\omega t + \delta),$$

откуда

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{A}_1^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{A}_2^2 \cos^2(\omega t + \delta) + 2\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cos \omega t \cos(\omega t + \delta).$$

Чтобы получить интенсивность  $I$ , надо усреднить это выражение по времени. Это дает

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{A}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_2^2 + 2(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \overline{\cos \omega t \cos(\omega t + \delta)},$$

где черта означает усреднение по времени. По условию задачи последний член должен обращаться в нуль, каков бы ни был угол  $\delta$ . Это возможно только тогда, когда  $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = 0$ , т. е. колебания должны быть взаимно перпендикулярны.

**203.** Решение. Возможные комбинации направлений складываемых колебаний представлены на рис. 100. Вероятность каждой комбинации равна  $1/8$ .

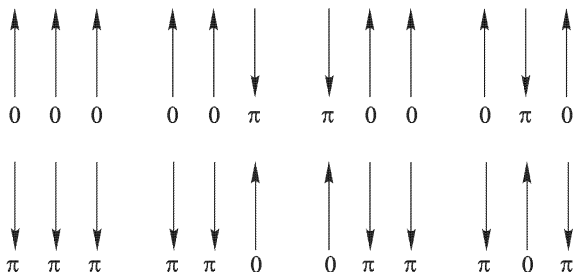


Рис. 100

Амплитуды результирующих колебаний в первой и пятой комбинациях равны  $3A_0$ , а во всех остальных  $A_0$ . Соответствующие интенсивности будут  $9I_0$  и  $I_0$ , где  $A_0$  и  $I_0$  — амплитуда и интенсивность одного колебания. Для средней интенсивности при сложении всех трех колебаний получим

$$I = \left(2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 + 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right) I_0 = 3I_0.$$

**204.** Решение. Интерферирующие волны можно записать в виде

$$\Psi_1 = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \delta_1), \quad \Psi_2 = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \delta_2).$$

Отсюда

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2\Psi_0 \cos\left(\frac{\Delta\mathbf{k}}{2} \mathbf{r} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}),$$

где  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2$ . Максимумы интенсивности получаются там, где выражение

$$\cos \Phi = \cos\left(\frac{\Delta\mathbf{k}}{2} \mathbf{r} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)$$

обращается в максимум. Так как  $k_1 = k_2$  и угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  мал, то приближенно можно написать

$$|\Delta k| \approx k\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi,$$

откуда для  $\Delta x$  следует приведенное в условии задачи выражение.

**205.** Примем за ось  $X$  линию пересечения плоскости падения с плоскостью экрана. Тогда

$$\Phi = \frac{\pi\varphi x}{\lambda} \cos\theta + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2},$$

где  $\theta$  — угол падения. При смещении вдоль оси  $X$  на ширину полосы  $\Delta x$  величина  $\Phi$  должна меняться на  $\pi$ , что дает

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi \cos\theta}.$$

**206.**  $\lambda = xd/a = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 5000 \text{ Å}$ .

**207.**  $n_{\text{Cl}} = n + N\lambda/l = 1,000865$ . Полосы интерференции смещаются в сторону трубки.

**208.**  $\alpha \approx \frac{\lambda(a+r)}{2r\Delta x} \approx 9'10''$ .

**209.**  $x \approx \frac{n\lambda(a+r)}{2r\alpha} \approx 2,8 \text{ мм}$ , где  $n$  — номер полосы.

**210.**  $I = I_0 \cos^2 \frac{2\pi x r \alpha}{\lambda(a+r)}$ .

**211.** Поверхности равной интенсивности: 1) гиперболоиды вращения; 2) гиперболы.

**212.**  $x = m\lambda \frac{a+b}{2a(n-1)\alpha}$ .

**213.**  $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,5 \text{ мм}$ ;  $N = \frac{4L(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} = 10$ .

**214.** Максимальное число полос  $N = l(n-1)\alpha/\lambda = 40$  получится при удалении экрана на  $L =$

$= \frac{l}{4(n-1)\alpha} = 20 \text{ м}$  от бипризмы.

Полосы исчезнут, если удалить экран от бипризмы не менее чем на  $2L = 40 \text{ м}$ .

**215.**  $N = \frac{4ab}{a+b} \frac{(n-1)^2\alpha^2}{\lambda}$ .

**216.** Решение. Пока источник  $S$  находился на оси системы, центр интерференционной картины получался в точке  $O$  (рис. 101). Сместим источник

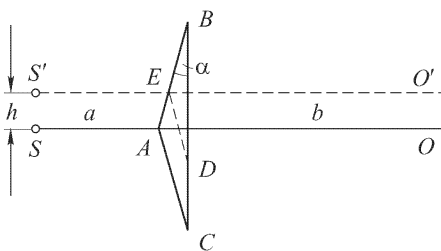


Рис. 101





**225.** Первое исчезновение полос будет при ширине щели

$$b = \frac{\lambda}{a} \frac{x-f}{x} \frac{(L-f)x-Lf}{x} = \frac{L-3f}{6a} \lambda = 0,58 \text{ мм.}$$

**226.**  $D < \lambda/\alpha \approx 0,05 \text{ мм.}$

**227.**  $l > fD\alpha/\lambda \approx 100 \text{ см.}$

**228.** Пучность:  $\lambda/4 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ см;}$  узел:  $\lambda/2 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$

**229.** В первом.

**230.** Так, чтобы линза давала на экране изображение пленки.

**231.** Решение. Если бы пластинка была абсолютно прозрачна, а свет строго монохроматичен, то интенсивность отраженного света весьма резко менялась бы при изменении толщины пластинки на величину порядка длины световой волны. Она определялась бы разностью хода между волнами, отразившимися от верхней и нижней поверхностей пластинки. Значит, в случае строгой монохроматичности света и абсолютной прозрачности пластинки при беспредельном увеличении толщины последней интенсивность отраженного света действительно периодически изменялась бы с толщиной. Однако в природе не существует ни абсолютно прозрачных сред, ни строго монохроматических волн.

Если среда обладает поглощением, хотя бы и очень малым, то волна, вступившая в пластинку, при достаточно большой толщине последней не достигает нижней поверхности пластинки, а поглотится в ней. В этом случае интенсивность отраженной от пластинки волны будет определяться формулами Френеля.

Для прозрачной пластинки парадокс устраняется, если принять во внимание, что свет, падающий на пластинку, не строго монохроматичен. Действительно, чтобы наблюдалась интерференция между волнами, отразившимися от передней и задней поверхностей пластинки, необходимо, чтобы спектральная область  $\Delta\lambda$ , занимаемая падающим светом, не превосходила величины  $\delta\lambda = \lambda/N$ , где  $N$  — порядок интерференции. При увеличении толщины пластинки порядок интерференции  $N$  растет, а  $\delta\lambda$  уменьшается. Значит, поскольку  $\Delta\lambda$  конечно, при достаточно большой толщине пластинки интерференция волн, отразившихся от верхней и нижней поверхностей пластинки, не будет наблюдаться. Поэтому при дальнейшем увеличении толщины пластинки интенсивность волны, отраженной от пластинки, не будет изменяться, хотя она и не будет определяться формулами Френеля, поскольку световые волны внутри пластинки претерпевают многократные отражения от ее поверхностей.

В нашем рассуждении молчаливо предполагалось, что падающая волна является плоской в строгом смысле этого слова. Нетрудно показать, что парадокс исчезнет, если отказаться даже только от одного этого предположения и принять строгую монохроматичность света и абсолютную прозрачность материала пластинки.

**232.** Темной.

Решение. Разность хода между лучом, отразившимся от нижней поверхности пленки, и лучом, отразившимся от ее верхней поверхности, равна  $2dn \cos \psi \pm \lambda/2$ . Слагаемое  $\lambda/2$  учитывает «потерю полуволны», т.е. поворот фазы на  $\pi$  при отражении от границы пленка–воздух. Первый член достигает максимума  $2dn$  при нормальном падении ( $\psi = 0$ ). Полагая  $d = 1/10 \lambda$  и  $n = 1,3$ , получим для разности хода при нормальном падении  $(0,26 \pm 1/2)\lambda$ . Это соответствует разности фаз приблизительно  $(90 \pm 180^\circ)$ . Если дальше

уменьшать толщину пленки, то разность фаз будет стремиться к  $\pm 180^\circ$ , и рассматриваемые лучи, интерферируя между собой, почти целиком погасят друг друга.

**233.** Приблизительно при  $d < \lambda/4n = 10^{-5}$  см.

**234.** Чтобы пленка приобрела зеленоватый цвет, необходимо, очевидно, ослабить синие и красные лучи с длинами волн примерно 0,4 и 0,6 мкм (в воздухе). Этому соответствует толщина пленки около 0,00050 мм.

**235. 1)**  $\Delta x = \lambda/2\alpha = 0,94$  мм.

2) Решение. Допустим сначала, что линия ртути — двойная с двумя длинами волн  $\lambda_1 = \lambda$  и  $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ . Пусть на отрезке  $x$  от вершины клина укладывается  $N$  интерференционных полос с длиной волны  $\lambda_1$  и  $N - 1/2$  полос с длиной волны  $\lambda_2$ , т. е.  $N\lambda_1 = (N - 1/2)\lambda_2$ . Тогда на конце этого отрезка интерференционные максимумы от длины волны  $\lambda_1$  наложатся на интерференционные минимумы от длины волны  $\lambda_2$  и интерференционные полосы пропадут. Число  $N$  и будет искомым числом полос. Оно равно  $N = (\lambda_2/2)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ , или, пренебрегая квадратами  $\Delta\lambda$ ,  $N = (\lambda/2)/\Delta\lambda$ . Допустим теперь, что интервал между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  непрерывно и равномерно заполнен длинами волн. Тогда всю спектральную линию можно считать состоящей из двух линий ширины  $\Delta\lambda/2$  каждая с расстоянием между ними  $\Delta\lambda/2$ . К этим двум линиям применимы предыдущие рассуждения. Поэтому число полос  $N$  найдется из предыдущего результата заменой  $\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/2$ , что дает  $N = \lambda/\Delta\lambda$ . Таким образом, считая линию ртути сплошной, находим  $N \approx \lambda/\Delta\lambda \approx 54\,600$ .

3)  $x = N\Delta x \approx 51,3$  м;  $h = \lambda^2/2\Delta\lambda \approx 14,9$  см.

4)  $\delta\varphi \approx \sqrt{(\Delta\lambda/\lambda)\alpha} \approx 0,25'$ .

**236.**  $\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \approx 12''$ .

**237.**  $\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 8''$ .

**238.**  $N \approx (L/d)^2 = 2500$ ,  $\Delta\lambda/\lambda \approx 1/N = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**239.**  $N \approx (nL/d)^2 \approx 5600$ .

**240.**  $E \sim 4I_0 \sin^2 \frac{2\pi x \alpha}{\lambda}$ , где  $x$  — расстояние от ребра клина.

**241.** При отражении света на границе стекло—воздух электрический вектор не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе воздух—стекло меняет фазу на  $180^\circ$ .

**242.** Решение. Каково бы ни было расположение линз, свет либо теряет полноволны при отражении на обеих границах раздела масла с поверхностями линз, либо совсем не теряет. Поэтому разность хода между лучами, отразившись от поверхностей линз в месте их соприкосновения, равна нулю. Эти лучи при интерференции усиливают друг друга. Поэтому центр колец в отраженном свете светлый, а в проходящем — темный.

**243.** В обоих случаях будут наблюдаться две системы полуколец, примыкающих друг к другу. В одной системе центр темный, в другой — светлый. Картина в проходящем свете будет дополнительной по отношению к картине в отраженном свете. (Ср. с решением предыдущей задачи.)

**244.**  $\Delta l = 0,32$  мм.

**245.**  $f = 137$  см.

**246.**  $R = 1$  м;  $\lambda_{кр} = 0,7$  мкм.

**247.**  $f = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2 (n-1)m\lambda} = 54$  см.

$$248. r = \sqrt{R\lambda/n} = 0,63 \text{ мм.}$$

$$249. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/R_1 + 1/R_2}}.$$

$$250. r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/R_1 - 1/R_2}}.$$

**251.** Решение. Каждое кольцо Ньютона можно определить как линию, вдоль которой разность хода между интерферирующими лучами постоянна. Легко видеть, что при удалении линзы от пластинки «кольца постоянной разности хода» будут сжиматься к центру картины, а при приближении — расширяться от центра. Центр картины попеременно будет темным и светлым.

**252.** Решение. Двум длинам волн соответствуют две системы колец Ньютона с незначительно отличающимися размерами. Если линза соприкасается с поверхностью пластинки, то в центре картины светлые (темные) кольца одной системы практически совпадают со светлыми (темными) кольцами другой системы. Поэтому вблизи центра кольца видны почти так же резко, как при монохроматическом свете. Но при некотором удалении от центра светлое кольцо одной системы может совпасть по положению с темным кольцом другой системы. В соответствующем месте кольца Ньютона не будут видны, а в окрестности этого места они будут видны не резко.

Определим номер  $N$  светлого кольца для длины волны  $\lambda_2$ , которое совпадает по положению с  $(N+1)$ -м темным кольцом для длины волны  $\lambda_1$ . Первому темному кольцу (точнее, центральному темному пятну) для длины волны  $\lambda_1$  соответствует разность хода  $\lambda_1/2$ , второму темному кольцу — разность хода  $\lambda_1 + \lambda_1/2$  и т. д., наконец,  $(N+1)$ -му темному кольцу — разность хода  $N\lambda_1 + \lambda_1/2$ . Та же разность хода  $N\lambda_1 + \lambda_1/2$ , очевидно, должна равняться  $N\lambda_2$ , так как должно происходить наложение  $N$ -го светлого кольца для длины волны  $\lambda_2$  на  $(N+1)$ -е темное кольцо для длины волны  $\lambda_1$ . Итак,

$$N\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} = N\lambda_2, \quad \text{откуда} \quad N = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5890}{12} \approx 490.$$

Отсюда следует, что кольца пропадут в окрестности четырехста девяностого кольца. Легко видеть, что они опять будут резкими в окрестности  $2 \cdot 490 = 980$ -го кольца. При удалении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру (см. решение предыдущей задачи). Если линзу переместить на  $490\lambda_1$ , то через поле зрения пройдет 490 колец, и в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы на  $2 \cdot 490\lambda_1 = 980\lambda_1$ , кольца в центре снова будут резкими; при перемещении на  $3 \cdot 490\lambda_1 = 1470\lambda_1$  — опять пропадут и т. д.

$$253. \Delta\lambda/\lambda = 1/980; \Delta\lambda = 6,02 \text{ \AA}.$$

**254.** Кольца равного наклона с центром  $F$ . При наклоне пластинки кольца становятся эллиптическими. Центр картины в точке схождения параллельных лучей, падающих на пластинку нормально. При наклоне пластинки на угол  $\alpha$  центр картины смещается на  $x = f \operatorname{tg} \alpha \approx f \alpha \approx 5,3 \text{ см}$ .

**255.** Решение. Разность хода между лучами, отразившимися от передней и задней поверхностей пластинки, равна  $2dn \cos \psi + \lambda/2$ . Так как центр колец темный, то эта величина должна содержать нечетное число полуволн. Первому темному кольцу соответствует такое приращение угла преломления  $\psi$ , что разность хода уменьшается на  $\lambda$ . Это дает  $2dn(1 - \cos \psi) = \lambda$ , или  $4dn \sin^2(\psi/2) = \lambda$ . Для малых углов  $dn \psi^2 = \lambda$ . Малые углы падения и преломления связаны соотношением  $\varphi = n\psi$ . Таким образом,  $\varphi^2 = n\lambda/d$ . Для

радиуса первого темного кольца получаем  $r = f\varphi = f\sqrt{n\lambda/d} = 9,5$  мм. Величина  $\Delta\lambda$  находится обычным способом по порядку интерференции, который равен  $2dn/\lambda$ . Это дает  $\Delta\lambda = \lambda^2/(2dn) = 0,75$  Å.

**256.** Решение. Максимальный угол падения  $\varphi_{\max} = D/6f$ . Поэтому из результатов решения предыдущей задачи получаем  $N = \frac{dD^2}{36nf^2\lambda} = 2$ .

**257.**  $d_{\min} = 36nf^2\lambda/D^2 = 0,81$  мм.

**258.** Амплитуда излучателя 3 должна быть в  $\sqrt{2}$  раз больше амплитуд излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под углами  $\theta = \pm 60^\circ$  к линии источников 123.

**259.** Амплитуда излучателя 3 должна быть такой же, что и амплитуды излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под теми же углами, что и в предыдущей задаче.

**260.** Условие максимумов:

$$\frac{4\pi h \cos \theta}{\lambda} + \pi = 2m\pi, \quad \text{или} \quad 4h \cos \theta = (2m - 1)\lambda;$$

условие минимумов:

$$2h \cos \theta = m\lambda,$$

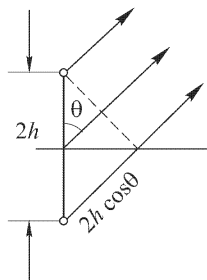


Рис. 103

где  $m$  — целое число, а  $\theta$  — угол между нормалью к идеально отражающей плоскости и направлением излучения (рис. 103). Угол  $\theta$  может меняться в пределах от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ .

$h = \frac{1}{4}\lambda$ . Максимум:  $\theta = 0^\circ$ ; минимумы:  $\theta = \pm 90^\circ$ .  
 $h = \frac{1}{2}\lambda$ . Максимумы:  $\theta = \pm 60^\circ$ ; минимумы:  $\theta = 0^\circ, \pm 90^\circ$ .  
 $h = \frac{3}{4}\lambda$ . Максимумы:  $\theta = 0^\circ, \pm 70,5^\circ$ ; минимумы:  $\theta = \pm 48,3^\circ, \pm 90^\circ$ .  
 $h = \lambda$ . Максимумы:  $\theta = \pm 41,5^\circ, \pm 75,5^\circ$ ; минимумы:  $\theta = 0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ$ .

**261.** Решение. Обозначим через  $V$  скорость электрона относительно среды, а через  $v$  — фазовую скорость света в среде. Движущийся электрон своим полем возмущает молекулы или атомы среды, благодаря чему они становятся источниками световых волн. Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные точки среды на пути движения электрона, а  $P$  — достаточно удаленная точка наблюдения (рис. 104). Пусть в момент времени  $t = 0$  световая волна, возбужденная электроном, вышла из  $A$ . В точку наблюдения  $P$  она придет в момент времени  $t_1 = AP/v$ . Такая же волна выйдет из  $B$  позднее на время  $AB/V$ . В точку наблюдения  $P$  она придет в момент  $t_2 = AB/V + BP/v$ . Разность времен, таким образом, равна

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{V} - \frac{AP - BP}{v}.$$

Для достаточно удаленной точки  $P$  можно положить  $AP - BP = AB \cos \theta$ .

Итак,

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{v} \left( \frac{v}{V} - \cos \theta \right).$$

Если  $v/V - \cos \theta \neq 0$ , то каждой точке  $A$  можно привести в соответствие такую

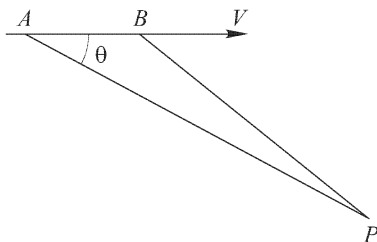


Рис. 104

точку  $B$ , что волны, вышедшие из  $A$  и  $B$ , придут в  $P$  в противоположных фазах и погасят друг друга. Если же

$$\cos \theta = \frac{v}{V}, \quad (261.1)$$

то при любом положении точек  $A$  и  $B$  волны, вышедшие из них, придут в  $P$  одновременно и будут усиливать друг друга. Следовательно, в направлении, определяемом условием (261.1), электрон будет излучать. Излучение возможно лишь при  $V > v$ , т. е. когда скорость электрона превосходит фазовую скорость света в среде.

**262.** Черенковское излучение происходит под углом  $\theta$  к направлению полета частицы, который определяется условием  $\cos \theta = 1/n\beta$ , причем  $c\beta$  — скорость частицы. Для возможности излучения необходимо  $n\beta > 1$ . Чтобы излучение могло выйти из блока, на границе  $AB$  (рис. 105) не должно быть полного отражения, т. е.  $n \sin \theta < 1$ , откуда  $\beta^2(n^2 - 1) < 1$ . Интервал регистрируемых скоростей определяется неравенством  $\frac{1}{n^2} < \beta^2 < \frac{1}{n^2 - 1}$ . Чтобы релятивистские частицы ( $\beta \approx 1$ ) не регистрировались, должно быть  $n > \sqrt{2}$ .

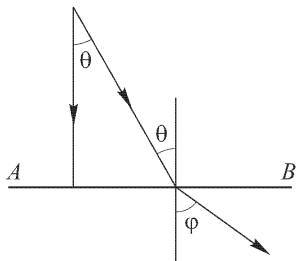


Рис. 105

## § 4. Дифракция света

**263.** 1)  $r_m \approx \sqrt{abm\lambda/(a+b)}$ ; 2)  $r_1 = 0,15$  см.

**264.** 1)  $r_m \approx \sqrt{bm\lambda}$ ; 2)  $r_1 = 0,212$  см.

**265.**  $r_m \approx \sqrt{abm\lambda/|a-b|}$ .

**266.** На расстоянии 1,2 м.

**267.**  $f = 90$  см;  $r_1 = 0,672$  мм. Изображения, т. е. максимумы, расположенные на оси пластинки, отодвинутся от последней.

**268.**  $I \approx 4I_0$ .

**269.**  $I \approx I_0$ .

**270.**  $I \approx I_0$ .

**271.**  $y' = \frac{b}{a} y = 10,5$  мм. Опыт был поставлен Полем с параметрами, указанными в задаче. Чтобы опыт удался, необходимо, чтобы глубина неровностей  $h$  удовлетворяла условию  $h < \frac{\lambda}{D} \frac{ab}{a+b} = 180\lambda \approx 0,1$  мм. Шар можно заменить

диском при условии  $y < \frac{2a}{D} \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} \approx 1$  м. Соответствующий опыт был поставлен Ангерером.

**272.**  $h = \frac{2m+5/4}{2(n-1)} \lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

**273.** Решение. Если  $E_1, E_2, E_3$  — поля, создаваемые в точке  $A$  последовательными полными зонами Френеля, то искомое поле  $E$  в точке  $A$  представится рядом

$$E = \frac{1}{2}(\underbrace{E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1}}_{\text{четное число}}) + \frac{1}{2}E_n + (E_{n+1} + E_{n+2} + \dots).$$

четное число

При небольшом  $N$  первая скобка близка к нулю, а последняя — к  $E_{N+1}/2$ , так что

$$E \approx \frac{E_N + E_{N+1}}{2} \approx 0.$$

В точке  $A$  будет минимум освещенности.

**274.** При четном  $N$  в точке  $A$  будет минимум освещенности ( $E = 0$ ), при нечетном  $N$  — максимум, приблизительно такой же, как при одной открытой центральной зоне.

**275. Решение.** Колебание, вызываемое всеми зонами Френеля, изображается вектором  $\vec{OC}$  (рис. 106), колебание от одной трети первой зоны — вектором  $\vec{OA}$ . Вектор  $\vec{AC}$  представляет колебание, вызываемое волнами, отразившимися от внешней части экрана, расположенной за отверстием  $CD$  (см. рис. 33). Эти три вектора образуют равнобедренный треугольник, если пренебречь уменьшением радиуса витка спирали на одном обороте. При смещении центрального круга к источнику на  $\lambda/12$  фаза отраженной им волны увеличится на  $2 \cdot 2\pi/12 = \pi/3$ , и колебание изобразится вектором, равным и противоположно направленным вектору  $\vec{AC}$ . Интенсивность всей отраженной волны в точке  $S$  обратится в нуль. При смещении круга  $CD$  в противоположную сторону фаза колебания  $\vec{OA}$  уменьшится на  $\pi/3$  и вектор  $\vec{OA}$  повернется в положение  $\vec{OC}$ . Результирующее колебание найдется сложением векто-

Рис. 106

ров  $\vec{AC}$  и  $\vec{OC}$ . Таким путем найдем, что амплитуда колебания в точке  $S$  увеличится в  $\sqrt{3}$  раз, а интенсивность — в три раза.

**276.**  $h = \frac{3}{8}\lambda$ .

**277.** Энергия перераспределяется, причем в одних точках плоскости изображения плотность светового потока возрастает, а в других убывает. Весь поток через плоскость изображения возрастает в 2 раза.

**278.**  $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/a + 1/b}}$ . Центр колец темный, если  $m$  — четное число, и светлый, если  $m$  — нечетное число.

**Решение.** Освещенность в центре дифракционной картины можно найти, разбивая волновую поверхность  $ACB$  (рис. 107) на зоны Френеля. Если в ней уложится четное число зон Френеля, то в точке  $P$  получится минимум освещенности; если нечетное — максимум. Построим сферу радиуса  $PA$  с центром в точке  $P$ . Число зон Френеля на волновой поверхности  $ACB$ , очевидно, равно длине  $CD$ , деленной на  $\lambda/2$ . Отсюда легко получить результат, приведенный в ответе.

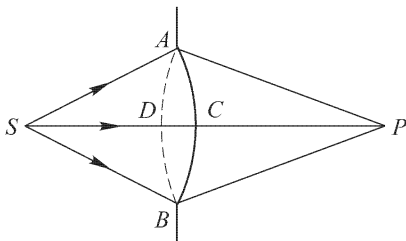


Рис. 107

**279.**  $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{|1/f - 1/a|}}$ . Центр колец темный, если  $m$  — четное число, и светлый, если  $m$  — нечетное число.

Решение. Метод решения такой же, как и предыдущей задачи. Разница только в том, что теперь сферическая волна не расходится, как было раньше, а сходится в точке  $S$  (рис. 108). Зоны Френеля для точки  $P$  строятся поэтому с вогнутой стороны сферической волновой поверхности. Число зон, укладывающихся в отверстии диафрагмы, будет равно длине  $CD$ , деленной на  $\lambda/2$ .

**280.**  $a = A/n^2 = 10$  м,  $b = B/n^2 = 20$  м.

**281.** Центр колец будет темный.

Решение. Построение зон Френеля для расходящейся сферической волновой поверхности (рис. 109)

показывает, что при свободном распространении волны действие всей волны в точке  $P$  равно половине действия центральной зоны и что вторичные источники Гюйгенса должны опережать по фазе световые колебания на волновой поверхности  $ACB$  на  $\pi/2$ . Если бы это было не так, то мы получили бы неправильное значение фазы колебаний в точке  $P$ . Допустим, например, что вторичные источники Гюйгенса на волновой поверхности совпадают по фазе со световыми колебаниями на ней. Пусть  $C_1CC_1''$  — центральная зона Френеля. Поскольку волны, идущие в  $P$  из центра этой зоны, проходят меньшее расстояние, чем волны, идущие из ее краев, расчет по методу зон Френеля дал бы неправильное значение фазы колебаний в точке  $P$ , а именно на  $\pi/2$  меньше истинного. Чтобы такую ошибку устранить, достаточно увеличить фазы вторичных источников на  $\pi/2$  по сравнению с фазой световых колебаний на волновой поверхности  $ACB$ .

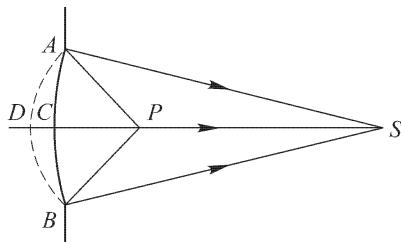


Рис. 108

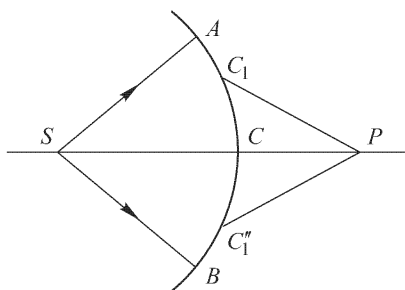


Рис. 109

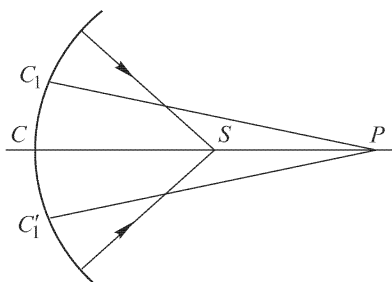


Рис. 110

Построение зон Френеля, разумеется, сохраняет смысл и для сходящейся сферической волны (рис. 110). Понятно, что в этом случае фазы вторичных источников Гюйгенса также должны опережать фазы световых колебаний на сферической волновой поверхности на  $\pi/2$ . Пока точка наблюдения лежит между серединой центральной френелевой зоны и центром  $S$  сферической



волновой поверхности, мы не получаем ничего существенно нового: колебания приходят в эту точку раньше от середины центральной зоны, чем от ее краев.

Дело меняется, когда точка наблюдения  $P$  (рис. 110) отстоит от середины центральной зоны дальше центра  $S$ . Теперь колебания, приходящие в  $S$  от краев центральной зоны, будут опережать по фазе колебания, приходящие из ее середины, на  $\pi$ , а результирующее колебание всей центральной зоны придет с опережением на  $\pi/2$ . Если учесть еще опережение по фазе вторичных источников Гюйгенса, то мы придем к заключению, что при прохождении сферической волны через ее центр фаза колебаний как бы меняется скачком на  $\pi$ . Благодаря этому волновое поле нигде не обращается в бесконечность. Действительно, сходящаяся сферическая волна сначала стягивается в точку  $S$ , а затем становится расходящейся. Получается наложение двух сферических волн, из которых одна распространяется к центру, а другая от центра. Эти волны в центре  $S$  имеют противоположные фазы, благодаря чему там не получается бесконечно больших амплитуд колебаний, как это было бы при всяком ином соотношении фаз.

Все эти выводы, строго говоря, относятся к случаю свободного распространения сферических волн. Когда волна ограничена диафрагмой, они остаются также справедливыми, если только точка наблюдения  $P$  находится не слишком близко от фокуса геометрического схождения лучей. В окрестности фокуса наблюдается сложное распределение амплитуд и фаз светового поля. Но если исключить из рассмотрения эту окрестность, то окажется, что окончательный результат получится такой же, как если бы фаза волны при переходе через фокус увеличивалась скачком на  $\pi$ .

Теперь решение задачи очевидно. Сферическая волна, идущая снизу (рис. 34), проходит через фокус  $S''$  прежде, чем она попадает на экран. Волна же, идущая сверху, попадает на экран, не проходя через свой фокус  $S'$ .

**282.** Решение. Если  $r$  — радиус отверстия, то разность хода между лучами, приходящими от его края и от центра, равна  $r^2/2L$ , где  $L$  — расстояние от центра отверстия до точки наблюдения. Положим сначала  $r = r_1$ , а затем  $r = r_1(1 - \alpha)$ , где  $r_1$  — радиус центральной зоны Френеля. Тогда соответствующие разности фаз будут  $\pi$  и  $\delta = \pi(1 - \alpha)^2$ .

Как видно из векторной диаграммы (рис. 111), амплитуды колебаний  $A_0$  и  $A$  в рассматриваемых двух случаях связаны соотношением  $A = A_0 \sin(\delta/2)$ , а интенсивности — соотношением  $I = I_0 \sin^2(\delta/2)$ . При  $\alpha = 1/3$

$$I = I_0 \sin^2 \frac{2\pi}{9} \approx I_0 \sin^2 40^\circ \approx 0,41 I_0.$$

**283.** Решение. Как видно из рис. 112,  $SM^2 = (a - x)^2 + r_m^2$ . Извлекая квадратный корень и пренебрегая квадратом малого отрезка  $x$ , находим  $SM \approx a + r_m^2/2a - x$ . Аналогично,  $MS' \approx b + r_m^2/2b - x$ . Далее,  $x \approx r_m^2/2R$ . Радиус  $m$ -й зоны определится из условия

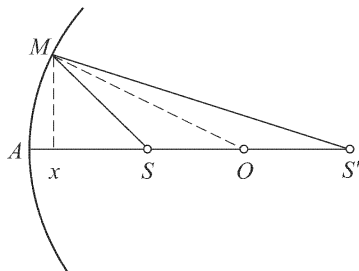


Рис. 112

Рис. 111

$|(SM + MS') - (SA + AS')| = m\lambda/2$ . Подставляя сюда вычисленные значения, получим

$$r_m^2 = \frac{m\lambda}{\left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}\right|}.$$

Результат можно получить проще, если заметить, что в принятом приближении зоны Френеля можно строить не на поверхности зеркала, а на поверхности сходящейся волны, отразившейся от зеркала. Радиус кривизны этой поверхности  $a'$  найдется по формуле зеркала  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - \frac{2}{R} = 0$ . Для определения  $r_m$  теперь достаточно заменить в ответе к задаче 278 величину  $a$  на  $a'$ .

**284.** Решение. Разность хода  $(SMS') - (SAS')$  (рис. 112), возникающая при отражении лучей от соседних зон Френеля, равна нулю для изображения нулевого порядка и  $\pm\lambda/2$  для изображений  $\pm 1$ -го порядков. При отражении от центральной и  $m$ -й зон она в  $m$  раз больше. Из этого условия получаем

$$\frac{r_m^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Полагая здесь  $|m| = 4$ , находим  $b_0 \approx 1,33$  см,  $b_{+1} = 80$  см,  $b_{-1} = 400$  см.

**285.**  $r_m = \left[ \frac{m\lambda R}{b_1 - b_2} (R + \sqrt{R^2 + (b_1 - b_2)^2}) \right]^{1/2} \approx 0,7$  см ( $m = 5$ ).

**286.** 1)  $b_m = r^2/m\lambda$ .

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b_m$ , см	200	100	66	50	40	33	29	25	22	20

2) См. рис. 113. 3)  $\Delta b = 200$  см.

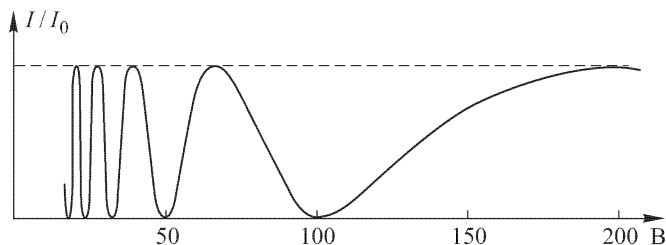


Рис. 113

**287.**  $\Delta b = \frac{8b_1^2\lambda}{D^2 - 8b_1\lambda} = 18$  см.

**288.** Решение. При свободном распространении волны интенсивность света в точке  $A$  (рис. 114) представляется выражением  $I = I_0 \left( \frac{a}{a+b} \right)^2$ , где  $I_0$  — интенсивность в центре  $O$ ,  $a$  — расстояние от источника  $S$  до точки  $O$ ,  $b$  — расстояние от  $O$  до  $A$ . Наличие диафрагмы, как в этом легко убедиться

с помощью векторной диаграммы (рис. 111), приводит к появлению множителя  $4 \sin^2(\delta/2)$ , где  $\delta = \pi R^2(1/a + 1/b)$  — разность фаз между осевыми и крайними

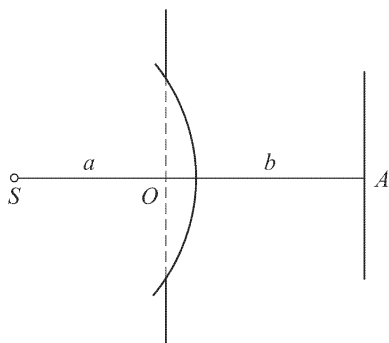


Рис. 114

лучами,  $R$  — радиус диафрагмы. Таким образом, при наличии диафрагмы интенсивность в точке  $A$  будет  $I = 4I_0 \left( \frac{a}{a+b} \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ . Приравнявая производную этого выражения по  $b$  нулю, находим условие экстремума  $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = -\frac{a}{b} \frac{\delta}{2}$ . По условию задачи экстремуму соответствует  $a = b$ , т. е.  $\operatorname{tg}(\delta/2) = -\delta/2$ . Решая это уравнение графически, находим  $\delta/2 = 2,03$ . Искомое число зон Френеля будет  $m = \delta/\pi = 1,3$ .

**289.** Основной фокус есть точка, для которой зоны, начерченные на пластинке, совпадают с зонами Френеля.

Если  $r$  — радиус первой зоны, начерченной на пластинке, то основной фокус определяется выражением  $f_0 = r^2/\lambda$ . Следующие фокусы получаются, когда в первой зоне, начерченной на пластинке, укладывается 3, 5, ...,  $2k+1$ , ... зон Френеля, т. е. когда  $r^2/f_k = (2k+1)\lambda$ . Следовательно,  $f_k = \pm f_0/(2k+1)$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  Знаку плюс соответствуют действительные, а минусу — мнимые фокусы.

**290.** Фокусы пластинки различных порядков:  $f_k = \frac{ab}{(a+b)(2k+1)}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$  Положения всех изображений определяются формулой  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b_k} = \frac{1}{f_k}$ .

**291.** Решение. Допустим сначала, что источник света  $S$  — точечный, а зонная пластинка  $CD$  наклонена к его оптической оси под углом  $\pi/2 - \alpha$  (рис. 115). Из рисунка видно  $x^2 = a^2 + R^2 + 2aR \sin \alpha$ . Извлекая квадратный корень и пренебрегая всеми степенями радиуса  $R$ , начиная с третьих, получим

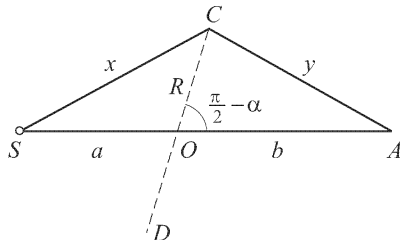


Рис. 115

$$x = a + R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2a}.$$

Аналогично,

$$y = b - R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2b}.$$

Отсюда для разности хода между лучами  $SCA$  и  $SOA$  находим

$$\Delta = (x + y) - (a + b) = \frac{R \cos^2 \alpha}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

или  $\Delta = \Delta_0 - \delta\Delta$ , где  $\Delta_0$  — значение  $\Delta$  при отсутствии наклона зонной пластинки, а  $-\delta\Delta$  — приращение величины  $\Delta$ , обусловленное наклоном:

$$\delta\Delta = \Delta_0(1 - \cos^2 \alpha) = \Delta_0 \sin^2 \alpha \approx \Delta_0 \alpha^2.$$

Если  $\delta\Delta \ll \lambda$ , то наклон пластинки не скажется существенно на работе зон, расположенных в пределах круга радиуса  $R$ . Если же  $\delta\Delta \approx \lambda/2$ , то все зоны, расположенные выше этого круга, становятся бесполезными и даже вредными. Из этого условия находится предельное значение разности хода  $\Delta_0 \approx \lambda/(2\alpha^2)$ . Соответствующее число зон Френеля будет  $N \approx \Delta_0/(\lambda/2) \approx 1/\alpha^2$ .

Допустим теперь, что фотографируемый предмет не точечный, причем его центр расположен на оси зонной пластинки. Для периферийных точек предмета, не лежащих на оси пластинки, последняя действует как наклонная под углом  $\alpha$ . Поэтому предельное число зон Френеля, при котором должно получиться наиболее отчетливое изображение, будет  $N \sim 1/\alpha^2 \sim 400$ .

**292.**  $I = I_0\{1/4 + 2\sin^2(\delta/2)\}$ , где  $I_0$  — интенсивность света в отсутствие экрана,  $\delta = \pi r^2/b\lambda$  — разность фаз между лучами, пришедшими в точку наблюдения от краев и центра углубления. Подставляя числовые значения, получим  $\delta = \pi/2$ ,  $I = \frac{5}{4}I_0$ . Интенсивность увеличится в 5 раз.

**293.**  $d^2 \ll \lambda r$ .

**294.**  $\varphi \approx \sqrt{\lambda/b} = 3,6 \cdot 10^{-8}$  рад = 0,0075",  $h \lesssim \sqrt{b\lambda} = 14$  м. Угол  $\varphi$  получен в предположении, что можно измерить угловое расстояние между двумя точечными звездами, когда дифракционные картины от них сдвинуты друг относительно друга на величину порядка ширины полосы. Указанный предел может быть уменьшен приблизительно раз в десять.

**295.**  $a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda$ , где  $a$  — ширина щели,  $\alpha$  — угол скольжения, соответствующий минимуму, а  $m$  — целое число (положительное или отрицательное).

**296.** Квадрат со стороной  $L = 3,5$  см.

**297.** Решение. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля напряженность поля волны  $E_1$ , дифрагировавшей на первом экране, представляется некоторым интегралом по отверстиям этого экрана. Напряженность поля волны  $E_2$ , возникшей при дифракции на дополнительном экране, представляется таким же интегралом по отверстиям этого экрана. Сумма  $E_1 + E_2$  представляется интегралом по всей бесконечной плоскости, в которой расположены рассматриваемые экраны. Но таким же интегралом представилось бы поле за экраном, если бы этого экрана совсем не было, т. е. волна распространялась свободно. Следовательно,  $E_1 + E_2 = E$ , где  $E$  — напряженность поля волны в отсутствие экрана, т. е. поля падающей волны. Но в падающей волне свет распространяется только в одном направлении. Для всех других направлений  $E = 0$ , а следовательно,  $E_1 + E_2 = 0$ , откуда  $E_1^2 = E_2^2$ , или  $I_1 = I_2$ .

**298.** Решение. Рассмотрим щель той же ширины, что и черный экран. Если на щель и экран падает одна и та же плоская волна, то количество энергии, поглощенной экраном, будет равно количеству энергии, падающей на щель. Согласно принципу Бабине интенсивности света во всех направлениях, за исключением направления падающей волны, в обоих случаях одинаковы. Следовательно, одинаковы и энергии, рассеянные экраном и щелью. Но в случае щели вся энергия рассеивается. Значит, энергия, поглощенная экраном, равна энергии, рассеянной им.

**299.**  $d|n_2 - n_1| = (m + 1/2)\lambda$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$

**300.** Нулевой максимум  $\sin \theta = n \sin \alpha$ , минимумы

$$b(\sin \theta - n \sin \alpha) = m\lambda; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

**301.** 
$$I = C \left\{ \frac{\sin[(N\pi d/\lambda) \sin \theta]}{\sin[(\pi d/\lambda) \sin \theta]} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin[(\pi b/\lambda) \sin \theta]}{(\pi b/\lambda) \sin \theta} \right\}^2, \quad (301.1)$$

где  $C$  — постоянная, а  $\theta$  — угол между нормалью к решетке и заданным направлением, к которому относится интенсивность  $I$ .

Решение. Так как требуется рассчитать распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера на решетке, то можно считать, что экран, на котором наблюдается эта картина, отодвинут достаточно далеко. Лучи, приходящие из различных щелей решетки в любую точку экрана, можно считать параллельными. Выберем такую точку на экране, чтобы приходящие в нее лучи образовывали угол  $\theta$  с нормалью к решетке. Разность фаз между соседними интерферирующими лучами будет равна  $\delta = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ . На векторной диаграмме колебание, приходящее в рассматриваемую точку от какой-либо щели решетки, можно изобразить вектором. Эти векторы образуют ломаную линию с равными звеньями и равными углами (рис. 116). Результирующее колебание изобразится геометрической суммой всех этих векторов. Сложение векторов на плоскости формально тождественно со сложением комплексных чисел. Если первый вектор изобразить

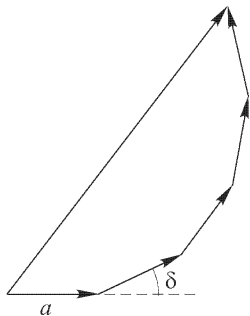


Рис. 116

комплексным числом  $a$ , то последующие изобразятся комплексными числами  $ae^{j\delta}$ ,  $ae^{2j\delta}$  и т.д. Их сумма равна

$$A = a[1 + e^{j\delta} + e^{2j\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta}] = a \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}}.$$

Квадрат модуля комплексного числа  $A$  дает относительную интенсивность света в рассматриваемой точке экрана:

$$\begin{aligned} I = |A|^2 = AA^* &= |a|^2 \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}} \frac{1 - e^{-jN\delta}}{1 - e^{-j\delta}} = \\ &= |a|^2 \frac{2 - (e^{jN\delta} + e^{-jN\delta})}{2 - (e^{j\delta} + e^{-j\delta})} = |a|^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos \delta}. \end{aligned}$$

Так как  $|a|^2$  определяет интенсивность дифрагированного света на одной щели, то по известной формуле

$$|a|^2 = C \left\{ \frac{\sin[(\pi b/\lambda) \sin \theta]}{(\pi b/\lambda) \sin \theta} \right\}^2.$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение, легко получить ответ. Постоянная  $C$  пропорциональна интенсивности падающего света и квадрату ширины щели  $b$ . Ни от каких других параметров решетки она не зависит.

**302.** Решение. Представим формулу (301.1) в виде

$$I(\theta) = Cb^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2, \quad (302.1)$$

где  $\alpha = \pi b \sin \theta / \lambda$ ,  $\beta = \pi d \sin \theta / \lambda$ , а постоянная  $C$  от параметров решетки не зависит. Подставляя значение  $\alpha$ , получим

$$I(\theta) = C \lambda^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\pi^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Для дополнительной решетки

$$I'(\theta) = C \lambda^2 \frac{\sin^2 \alpha'}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\sin N \beta}{\sin \beta} \right)^2,$$

где  $\alpha' = \pi(d - b) \sin \theta / \lambda$ , так что  $\alpha + \alpha' = \pi d \sin \theta / \lambda = \beta$ . Для главных максимумов  $d \sin \theta = m \lambda$ ,  $\alpha + \alpha' = m \lambda$ . Поэтому  $\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha'$ , и следовательно,  $I'_{\text{гл}} = I_{\text{гл}}$ . При  $m = 0$  рассуждение неприменимо, так как в этом случае в знаменателе  $\sin \theta = 0$ . Допустим теперь, что  $\theta$  не есть угол на главный максимум. При больших значениях  $N$  главные максимумы очень резкие. Практически весь свет концентрируется в главных максимумах, занимающих очень узкие интервалы углов  $\Delta \theta$ , стремящиеся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Практическое значение имеют только углы, удовлетворяющие условию  $d \sin \theta = m \lambda$ , а также углы, отличающиеся от них ничтожно мало, а в этих случаях применимо доказательство, приведенное выше.

**303.**  $b/d = 1/4$  или  $b/d = 3/4$  (см. предыдущую задачу).

**304.** Решение. Введем обозначения  $q = b/d$ ,  $q(d - b)/d = 1 - q$ . Суммарный поток энергии прошедшего света, распределяющийся по всем максимумам, пропорционален  $q$ , интенсивность нулевого максимума пропорциональна  $q^2$ , а потому

$$\frac{I_{\text{прош}}}{q} = \frac{I'_{\text{прош}}}{q'}, \quad \frac{I_0}{q^2} = \frac{I'_0}{q'^2}.$$

По теореме Бабиня для дополнительных решеток  $I_{\text{диф}} = I'_{\text{диф}}$ . Кроме того,  $I_{\text{прош}} = I_0 + I_{\text{диф}}$ . Исключив из написанных соотношений  $I'_{\text{диф}}$  и  $I'_0$ , найдем  $I_{\text{диф}} = (1 - q)I_{\text{прош}}$ . Учитывая также, что  $I_{\text{прош}} = qI_{\text{пад}}$ , получим  $I_{\text{диф}} = q(1 - q)I_{\text{пад}}$ . Максимум для  $I_{\text{диф}}$  получается при  $q = 1/2$ . При этом  $I_{\text{диф}} = 1/4 I_{\text{пад}}$ .

**305.**  $N d \sin \theta = n \lambda$ , но  $d \sin \theta \neq k \lambda$ ,  $b \sin \theta = m \lambda$ , где  $n, m, k$  — целые числа. Условие минимума — выполнение хотя бы одного из этих равенств.

**306.**  $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = n \lambda$ . Если  $d \gg n \lambda$ , то условие максимума принимает вид  $d \cos \theta_0 (\theta - \theta_0) \approx n \lambda$ , т.е. постоянная решетки как бы уменьшилась по сравнению со случаем нормального падения и стала равной  $d \cos \theta_0$  вместо  $d$ . При этом углы  $\theta - \theta_0$ , определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающего света (или отраженного в отражающей решетке).

**307.**  $\lambda = 0,573 \text{ \AA}$ .

**308.** Если угол падения близок к  $\pi/2$ , зеркальное отражение наблюдается всегда. При малых углах падения зеркальное отражение может наблюдаться, если шероховатость поверхности  $\ll \lambda$ .

Решение. Пусть падающие лучи образуют угол  $\theta$  с нормалью к плоскости, изображенной на рис. 117 штриховой линией. Рассмотрим интерференцию вторичных волн, исходящих от поверхности тела под углом  $\theta'$  к нормали. Разность хода каких-либо двух лучей, идущих в рассматриваемом направлении, определяется выражением

$$\Delta = AD - BC = a(\sin \theta' - \sin \theta) + h(\cos \theta' + \cos \theta).$$

Здесь  $a$  может принимать какие угодно значения. Поэтому если  $\theta' \neq \theta$ , то разность хода  $\Delta$  может принимать также какие угодно значения, и притом для неправильной поверхности тела эти значения будут встречаться одинаково

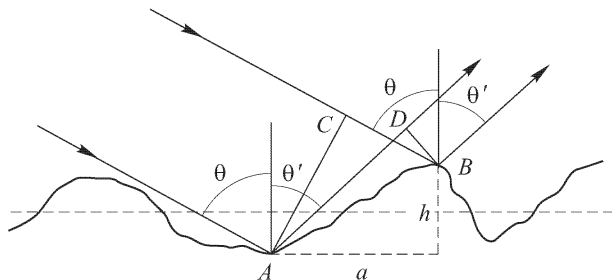


Рис. 117

часто. Это показывает, что правильное отражение, если таковое возможно, может происходить лишь под углом  $\theta' = \theta$ . В таком случае

$$\Delta = 2h \cos \theta.$$

Отсюда видно, что, каково бы ни было  $h$ , можно подобрать достаточно большой угол  $\theta$ , для которого  $\Delta \ll \lambda$ . При этом условии отражение будет правильное. При нормальном падении  $\Delta = 2h$ , и правильное отражение возможно лишь при соблюдении условия  $h \ll \lambda$ .

**309.** Не могут.

**310.**  $m = nd/b$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

**311.** Исчезнут: 1) спектры порядков 2, 4, 6, ...; 2) спектры порядков 3, 6, 9, ...; 3) спектры порядков 4, 8, 12, ...

**312.** Максимальный порядок равен наибольшему из целых чисел, не превосходящих  $d/\lambda$ .

**313.**  $\lambda = 6481 \text{ \AA}$ .

**314.** При нормальном падении  $\lambda_{\text{макс}} = d$ . Период решетки должен быть не менее 0,01 см, т. е. решетка должна иметь не более 10 штрихов на 1 мм. При скользящем падении на пропускающую решетку  $\lambda_{\text{макс}} = 2d$ .

**315.** Углы дифракции не меняются, интенсивности стремятся к нулю.

**316.** Углы дифракции не меняются, интенсивности стремятся к нулю.

**317.**  $h = \frac{2m-1}{2(n-1)} \lambda$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$  Интенсивность нулевого главного максимума равна нулю.

**318.** Главные максимумы системы из двух решеток будут на тех же местах, что и у одной решетки, но интенсивность каждого главного максимума изменится в  $4 \cos^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \cos \theta \right)$  раз, где  $\theta$  — угол между нормалью к решетке и направлением на главный максимум.

**320.** Если угол между нормалью к ряду вибраторов и направлением на главный лепесток  $\theta = \Omega t + \delta$ , то

$$\Delta \varphi = -\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\Omega t + \delta) + 2\pi m, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**321.** Решение. Условие максимума  $m$ -го порядка (рис. 118)

$$d(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = m\lambda,$$

а максимума  $(m+1)$ -го порядка

$$d(\sin \theta'_1 - \sin \theta'_2) = (m+1)\lambda.$$

При переходе от одного максимума к другому углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  получают приращения  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$ , связанные соотношением

$$d(\cos \theta_1 \Delta\theta_1 - \cos \theta_2 \Delta\theta_2) + \lambda.$$

Кроме того,  $x_1 = h_1 \operatorname{tg} \theta_1$ ,  $x_2 = h_2 \operatorname{tg} \theta_2$ , причем  $x_1 + x_2 = a = \text{const}$ . Из этого условия получается второе соотношение

$$\frac{h_1}{\cos^2 \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{h_2}{\cos^2 \theta_2} \Delta\theta_2 = 0.$$

Из этих двух соотношений находим  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$ , а после этого расстояние между максимумами:

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{h_1}{\cos^2 \theta_1} \Delta\theta_1 = -\frac{h_2}{\cos^2 \theta_2} \Delta\theta_2.$$

Вычисления можно упростить, заметив, что углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  мало отличаются от угла падения  $\theta_0$ , соответствующего правильному отражению света от пластины. Заменяя эти углы на  $\theta_0$ , находим

$$\Delta x = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\lambda}{d \cos^3 \theta_0}.$$

При этом  $\cos \theta_0 \approx h_1/x_1 \approx h_2/x_2$ , или  $\cos \theta_0 = (h_1 + h_2)/(x_1 + x_2) = (h_1 + h_2)/a = 1/10$ . Подстановка числовых значений дает  $\Delta x = 1$  см.

**322.** Решение. Не теряя общности, при расчетах можно считать решетку бесконечно тонкой. Если ось  $Z$  направить перпендикулярно к плоскости решетки в сторону распространения падающей волны, то эта волна представится выражением  $E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ . Поле на входе  $E_{\text{вх}} = E_0 e^{i\omega t}$ . Поле на выходе

$$E_{\text{вых}} = DE_{\text{вх}} = \alpha \left( 1 + q \frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2} \right) E_0 e^{i\omega t}.$$

Это соотношение должно рассматриваться как граничное условие, которому на поверхности решетки должна удовлетворять дифрагированная волна. В силу этого последнюю надо записать в виде

$$E = \alpha E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} + \beta_1 E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + \beta_2 E_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)}.$$

На поверхности решетки ( $z = 0$ ) это выражение переходит в предыдущее, если положить  $\beta_1 = \beta_2 = \alpha q/2$ ;  $k_x = p$ . Если угол дифракции равен  $\theta$ , то  $k_x =$

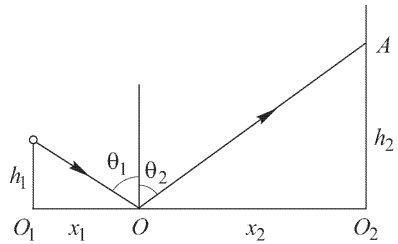


Рис. 118



$= k \sin \theta$ , или  $k \sin \theta = p$ . Введя длину волны  $\lambda = 2\pi/k$  и период решетки  $d = 2\pi/p$ , получим  $d \sin \theta = \lambda$ . Таким образом, весь спектр состоит только из главных максимумов нулевого, первого и минус первого порядков. Если  $d < \lambda$ , то волны первых порядков за решеткой не пропадают, а становятся неоднородными. Они проникают лишь в тонкий слой вблизи решетки и экспоненциально затухают при удалении от нее.

**323.** 1) 8,1 угл. с/Å; 2) 0,0197 мм/Å; 3) 50,7 Å/мм.

**324.** Около 0,12 мм.

**325.**  $D = \frac{n}{d \cos \theta} = \frac{n}{d \sqrt{1 - (n\lambda/d)^2}} = 0,63 \cdot 10^4 \text{ рад/см} = 13 \text{ угл. с/Å}.$

**326.** 600 штрих/мм.

**327.**  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}.$

**328.**  $\Delta x = f\lambda/l = 3,3 \text{ мкм}.$

**329.** Около 1000.

**330.** 12 000 и 48 000.

**331.** Нет.

**332.** Разрешающая способность не изменится. Дисперсионная область уменьшится вдвое.

**333.** Максимальный порядок спектра равен целому числу, содержащемуся в  $d/\lambda$ , т. е.  $m = 3$ . В этом порядке

$$\delta \lambda = \frac{\lambda}{Nm} = 0,04 \text{ Å}, \quad \Delta x = \frac{f m \delta \lambda}{\sqrt{d^2 - m^2 \lambda^2}} = 1 \text{ мм}.$$

**334.**  $x \ll f\lambda/(Nd) = 0,001 \text{ см}.$

**335.**  $m\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — угол между выходящим лучом и поверхностью пластинки.

$$\mathbf{336.} \quad D = \frac{(n^2 - 1) - \lambda n \, dn/d\lambda}{\lambda \varepsilon}, \quad \Delta \lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2h[(n^2 - 1) - \lambda n \, dn/d\lambda]}.$$

**337.**  $z = L\sqrt{n^2 - 1}/2h = 17.$

**338.** Минимальный порядок  $m_1 = 2h\sqrt{n^2 - 1}/\lambda \approx 47\,200$ , максимальный порядок  $m_2 = 2hn/\lambda = 62\,400$ .

**339.**  $\Delta \lambda = 0,098 \text{ Å}; R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{L}{\lambda} [(n^2 - 1) - \lambda n \, dn/d\lambda] = 852\,000.$

**340.**  $\Delta \varepsilon = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{2h\varepsilon} \approx 5', 4.$

**341.** Разрешающая способность не изменится, дисперсионная область уменьшится вдвое.

**342.** Разрешающая способность увеличится в два раза, дисперсионная область не изменится.

**343.** Пластинка с большим показателем преломления имеет большую разрешающую способность, но меньшую дисперсионную область.

**344.**  $L = \frac{\lambda^2}{(n^2 - 1)d\lambda} = 2,5 \text{ см}.$

**345.** Будет наблюдаться система пятен, расположенных в узлах прямоугольной сетки.

$$\mathbf{346.} \quad 2h \cos \varphi = m\lambda, \quad \Delta \varphi = -\frac{\lambda}{2h \sin \varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h \sin \varphi}, \quad \Delta \lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2h \cos \varphi}.$$

**347.**  $\Delta \lambda = 0,125 \text{ Å}.$

**348.**  $m \approx 36\,300$ .

**349.** Решение. Пусть  $R$  — коэффициент отражения света от каждой посеребренной поверхности пластин интерферометра. (Последние для простоты на рис. 119 изображены математическими плоскостями.) Если  $I_0$  — интенсивность падающего света, то интенсивности прошедших пучков 1, 2, 3, ... будут

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - R)^2 I_0, \\ I_2 &= R^2 (1 - R)^2 I_0, \\ I_3 &= R^4 (1 - R)^2 I_0, \dots, \end{aligned}$$

а соответствующие амплитуды

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - R) A_0, \\ A_2 &= R(1 - R) A_0, \\ A_3 &= R^2 (1 - R) A_0, \dots, \end{aligned}$$

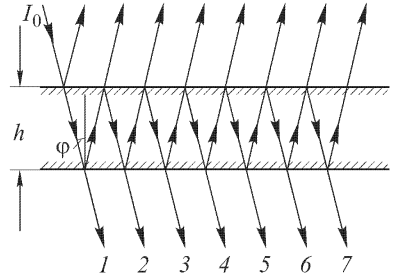


Рис. 119

где  $A_0$  — амплитуда падающего света. Каждый пучок запаздывает по фазе относительно предыдущего пучка на  $\Delta = 2h \cos \varphi / \lambda$ , где  $h$  — расстояние между отражающими плоскостями интерферометра, а  $\varphi$  — угол падения. С учетом запаздывания амплитуда результирующего колебания прошедшей волны представится геометрической прогрессией:

$$A = A_0(1 - r)[1 + Re^{-i\Delta} + R^2 e^{-2i\Delta} + \dots] = \frac{A_0(1 - R)}{1 - Re^{-i\Delta}},$$

а интенсивность

$$I = \frac{A_0^2(1 - R)^2}{(1 - Re^{-i\Delta})(1 - Re^{i\Delta})} = \frac{I_0(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Delta/2)}.$$

Когда  $\Delta = (2m + 1)\pi$ , это выражение минимально:  $I_{\min} = I_0 \left( \frac{1 - R}{1 + R} \right)^2$ , или  $I_{\min} \approx \frac{I_0}{4} (1 - R)^2 \approx 0$ , так как отражательная способность  $R$  близка к единице. Когда  $\Delta = 2m\pi$ , величина  $I$  достигает максимума:  $I_{\max} = I_0$ . Когда  $(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Delta/2) = 2(1 - R)^2$ , т.е.  $4R \sin^2(\Delta/2) = (1 - R)^2$ , то максимальная интенсивность убывает вдвое. В максимуме  $\Delta = 2m\pi$ ; в точке, где  $I = \frac{1}{2} I_{\max}$ ,  $\Delta = 2m\pi + \delta\Delta$ , причем  $4R^2 \sin^2(\delta\Delta/2) = (1 - R)^2$ . Так как эта величина мала по сравнению с единицей, то синус можно заменить самим углом и таким путем получить  $\delta\Delta = (1 - R)/\sqrt{R}$ .

Пусть для угла падения  $\varphi$  интенсивность линии с длиной волны  $\lambda$  равна половине максимальной. Тогда

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda} = 2m\pi + \delta\Delta.$$

Для более длинной волны  $\lambda'$  и того же угла падения интенсивность будет также равна половине максимальной при условии

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda'} = 2m\pi - \delta\Delta.$$

Тогда расстояние между максимумами обеих линий как раз окажется равным полуширине линии, т. е. минимальному расстоянию, разрешаемому интерферометром. В этом случае  $\lambda(2m\pi + \delta\Delta) = \lambda'(2m\pi - \delta\Delta)$ , откуда

$$\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda' - \lambda} = \frac{2m\pi}{\delta\Delta} = \frac{2m\pi}{1-R} \sqrt{R},$$

или ввиду близости линий  $\lambda$  и  $\lambda'$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m\pi}{1-R} \sqrt{R} \approx \frac{m\pi}{1-R} \approx \frac{\pi}{1-R} \frac{2h}{\lambda}.$$

Это выражение можно записать в том же виде, что и для дифракционной решетки, т. е.  $\lambda/\delta\lambda = Nm$ . Роль эффективного числа штрихов играет величина  $N = \pi/(1-R)$ . Полученные результаты справедливы и для случая, когда интерферометр работает в отраженном свете.

**350.** 1)  $m = \frac{n-1}{\lambda} b = 10000$ ; 2)  $\theta = \lambda/a = 51, 5''$ .

**351.** Около 1000.

**352.** Около 1 см.

**353.** Решение. Пусть  $\delta\lambda$  — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, разрешаемая призмой при бесконечно узкой коллиматорной щели. Согласно формуле для теоретической разрешающей способности

$\lambda/\delta\lambda = a|dn/d\lambda|$ , разность показателей преломления для этих спектральных линий равна  $\delta n = \lambda/a$ . Благодаря различию в показателях преломления первоначально параллельный пучок лучей по выходе из призмы делается расходящимся. Рассчитаем угловое расхождение вышедшего пучка в предположении, что на призму падал параллельный пучок. Имеем (рис. 120):  $\sin \varphi_1 = n \sin \psi_1$ . Отсюда при постоянном  $\varphi_1$

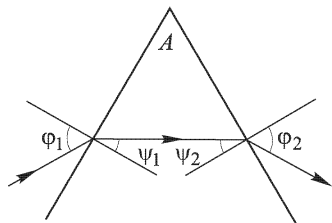


Рис. 120

$$\delta n \cdot \sin \psi_1 + n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_1 = 0.$$

Так как  $\psi_1 + \psi_2 = A = \text{const}$ , и следовательно,  $\delta \psi_1 + \delta \psi_2 = 0$ , то

$$\delta n \cdot \sin \psi_1 = n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_2.$$

Далее, из  $\sin \varphi_2 = n \sin \psi_2$  находим искомое угловое расхождение вышедшего пучка:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta n + \frac{n \cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta \psi_2 = \left( \frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} + \frac{n \cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \frac{\sin \psi_1}{n \cos \psi_1} \right) \delta n,$$

а при установке на угол наименьшего отклонения ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ;  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ ):

$$\delta \varphi_2 = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \delta n = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{\lambda}{a}.$$

Для полного использования теоретической разрешающей способности призмы необходимо, чтобы угловая ширина коллиматорной щели  $\alpha = b/f$  была мала по сравнению с  $\delta \varphi_2$ . Это дает

$$b \ll 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{f \lambda}{a}.$$

Для  $A/2 = \psi = 30^\circ$ ,  $n = 1,73$  получаем

$$b \ll \frac{2}{\sqrt{4 - n^2}} \frac{f\lambda}{a} = \frac{2f\lambda}{a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

$$354. b = \frac{L(n^2 - 1)}{\lambda dn_{\text{пр}}/d\lambda} = 4,4 \text{ м.}$$

$$355. b = \frac{Nh(n - 1)}{\lambda dn_{\text{пр}}/d\lambda} = 2,6 \text{ м.}$$

$$356. d = |d\lambda/dn| = 10^{-3} \text{ см.}$$

357. Решение. Из формулы решетки  $d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda$  следует  $m\lambda \leq 2d$ , откуда умножением на  $N = b/d$  получаем  $R_{\text{реш}} = 2b/\lambda = 3,3 \cdot 10^5$  и  $\frac{R_{\text{реш}}}{R_{\text{пр}}} = \frac{2/\lambda}{dn/d\lambda} = 33$ .

358. Спектр будет пересечен темными линиями, имеющими форму отрезков семейства парабол  $y^2 = Cmx$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ , где  $C$  — постоянная, зависящая от параметров установки. (Начало координат помещено в центре Ньютоновых колец, ось  $X$  направлена перпендикулярно, а ось  $Y$  — параллельно щели спектрографа.) Все параболы имеют общую вершину  $x = 0, y = 0$ , которой соответствует  $\lambda = 0$ . Отрезки парабол от вершины до фиолетового конца спектра не производятся на опыте. Если щель сдвинуть от центра колец на  $a$ , то семейство парабол перейдет в  $y^2 = Cmx - a^2$ , где  $C$  — та же постоянная. В этом случае параболы с различными  $m$  имеют разные вершины, и могут быть получены те части парабол, на которых находятся вершины. При замене дифракционного спектрографа призматическим темные линии остаются, но их форма перестает быть параболической. (Ср. с задачей 685.)

359. Решение.  $l_F \gg h^2/\lambda = 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км}$ . На меньших расстояниях никакой френгоферовой картины не возникает. При  $l \ll h^2/\lambda$  справедлива геометрическая оптика. За кристаллом получаются пучки дифрагированных лучей, а в местах их пересечения с плоскостью фотопластинки — система пятен. Френгоферовый характер пятен проявляется в том, что в каждом пятне фаза колебаний меняется от точки к точке, тогда как в случае френгоферовой картины она практически одинакова в пределах каждого пятна. Однако направления пучков за кристаллом можно определить, проводя от кристалла прямые на (расположенные в бесконечности) френгоферовы максимумы. Этим и объясняется, почему при расчете указанных направлений можно пользоваться формулами френгоферовой дифракции.

360. Решение. Пусть на решетку падает пучок параллельных лучей с длиной волны  $\lambda$  под углом скольжения  $\alpha_0$ . Направление дифрагированного пучка  $m$ -го порядка определяется условием  $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = m\lambda$ . Для такого же пучка с близкой длиной волны  $\lambda'$ :  $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha') = m\lambda'$ . Отсюда

$$d(\cos \alpha' - \cos \alpha) = m(\lambda - \lambda'), \quad \text{или} \quad d \sin \alpha \cdot \delta\alpha = m\delta\lambda,$$

где введены обозначения:  $\delta\alpha = |\alpha' - \alpha|$ ,  $\delta\lambda = |\lambda' - \lambda|$ . Для спектрального разрешения необходимо, чтобы оба пучка пространственно разделились. Если  $l$  — расстояние до фотопластинки, измеренное вдоль направления дифрагированного луча, то боковое смещение одного пучка относительно другого равно  $x = l\delta\alpha$ . Условие разрешения состоит в том, чтобы это смещение было не меньше ширины дифрагированного пучка, т.е.  $x \geq h$ . Ширина  $h$  определяется

выражением  $h = D \sin \alpha$ , где  $D$  — ширина дифракционной решетки. В результате условие разрешения принимает вид

$$\frac{lm\delta\lambda}{d \sin \alpha} \geq D \sin \alpha.$$

Минимальному разрешаемому расстоянию  $\delta\lambda$  соответствует знак равенства. Поэтому для разрешающей способности получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{lm\lambda}{Dd \sin^2 \alpha} = Nm \frac{l\lambda}{h^2}.$$

Так как  $l\lambda/h^2 \ll 1$ , то  $\lambda/\delta\lambda \ll Nm$ , т. е. разрешающая способность решетки в рентгеновской области спектра меньше, чем в оптической. Для повышения разрешающей способности надо применять узкие пучки, а фотопластинку помещать возможно дальше от решетки.

**361.** Решение. Пусть  $O$  — фокус геометрического схождения лучей (рис. 121);  $r_0$  — ближайшее расстояние от линзы до  $O$ . Опишем из  $O$ , как

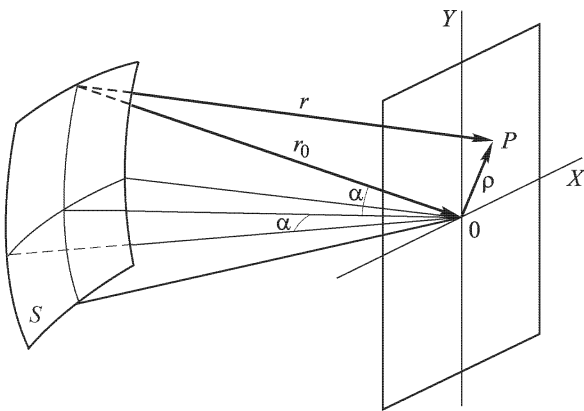


Рис. 121

из центра, сферическую поверхность  $S$  радиуса  $r_0$ . При вычислении светового поля на поверхности  $S$  можно ограничиться приближением геометрической оптики. Тогда световое поле на  $S$  в комплексной форме можно записать в виде

$$E_S = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t + kr_0)}.$$

Пусть  $P$  — точка наблюдения,  $dS$  — элемент поверхности на  $S$ ,  $r$  — расстояние между  $dS$  и  $P$ . Световое поле в  $P$  найдется по принципу Гюйгенса по формуле

$$E_P = \int \frac{dS}{r_0 r} e^{i(\omega t - k(r - r_0))}, \quad (361.1)$$

где интегрирование производится по той части сферической поверхности  $S$ , на которой поле отлично от нуля. Очевидно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  — радиусы-векторы, проведенные из  $dS$  в точки  $P$  и  $O$  соответственно, а  $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OP}$ . Отсюда

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2\mathbf{r}_0\boldsymbol{\rho} + \rho^2}{r_0^2}}.$$

Пользуясь формулой бинোма Ньютона, находим с точностью до величин, содержащих квадраты  $\rho$ :

$$r - r_0 = \frac{\mathbf{r}_0\boldsymbol{\rho}}{r_0} + \frac{\rho^2}{2r_0} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{r}_0\boldsymbol{\rho})^2}{r_0^3} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{r}_1 + \frac{\rho^2}{2r_0} \sin^2(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_1),$$

а в линейном приближении

$$r - r_0 = \boldsymbol{\rho}\mathbf{r}_1,$$

где  $\mathbf{r}_1$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_0$ , т. е.  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0/r_0$ . Ошибка, допустимая при вычислении  $r - r_0$ , должна быть много меньше длины волны. Поэтому линейным приближением можно пользоваться при условии

$$\frac{\rho^2}{r_0} \ll \lambda. \quad (361.2)$$

Вычислим световое поле в окрестности  $O$  в предположении, что условие (361.2) выполняется. Направление единичного вектора  $\mathbf{r}_1$  можно характеризовать углами  $\varphi$  и  $\psi$ , которые он образует с плоскостями, проходящими через оптическую ось и параллельными сторонам диафрагмы. Очевидно,  $dS = r_0^2 d\varphi d\psi$ . Введем в плоскости наблюдения (экрана) прямоугольную систему координат с началом в точке  $O$  и с осями, параллельными сторонам квадратной диафрагмы. Координаты точки  $P$  обозначим через  $x$  и  $y$ . Тогда

$$r - r_0 = \mathbf{r}_1\boldsymbol{\rho} = x \sin \varphi + y \sin \psi.$$

Если угол  $\alpha = \arctg \frac{D}{2r_0}$ , под которым из  $O$  видна половина стороны квадратной диафрагмы, мал, то  $\sin \varphi$  и  $\sin \psi$  можно заменить через  $\varphi$  и  $\psi$ . Кроме того, в знаменателе (361.1)  $r$  можно приближенно заменить через  $r_0$ . Окончательно

$$E_P = e^{+i\omega t} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ik(x\varphi + y\psi)} d\varphi d\psi.$$

Если амплитуду в точке  $O$  принять равной единице, то амплитуда в точке  $P$ :

$$A = \frac{\sin[(2\pi x/\lambda)\alpha]}{(2\pi x/\lambda)\alpha} \frac{\sin[(2\pi y/\lambda)\alpha]}{(2\pi y/\lambda)\alpha}, \quad (361.3)$$

а интенсивность

$$I = \left\{ \frac{\sin[(2\pi x/\lambda)\alpha]}{(2\pi x/\lambda)\alpha} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin[(2\pi y/\lambda)\alpha]}{(2\pi y/\lambda)\alpha} \right\}^2. \quad (361.4)$$

Дифракционная картина получается такая же, как при дифракции Фраунгофера от квадратного отверстия. Расстояния между двумя соседними минимумами, а также от центра центрального максимума до первого минимума равны

$$\Delta x = \frac{\lambda/2}{\alpha}. \quad (361.5)$$

Остается проверить, выполняется ли условие (361.2). Так как заметная интенсивность по формуле (361.3) получается при  $\rho$  порядка  $\Delta x$ , то, подставляя в (361.2)  $\rho \approx \lambda/\alpha$ , придадим (361.2) вид

$$\alpha \gg \sqrt{\lambda/r_0}. \quad (361.6)$$

Последнее условие выполняется во всех оптических приборах с линзами или зеркалами.

Случай круглой диафрагмы существенно не отличается от случая квадратной диафрагмы. Интеграл (361.1) для круглой диафрагмы в линейном приближении может быть выражен через бесселеву функцию первого порядка. Дифракционная картина в фокальной плоскости имеет вид светлых и темных концентрических кругов со светлым центром. Радиусы темных колец имеют следующие значения:

$$R = 0,61\lambda/\alpha; 1,12\lambda/\alpha; 1,62\lambda/\alpha; \dots, \quad (361.7)$$

где  $\alpha$  — угол, под которым виден радиус диафрагмы из точки  $O$ .

**362. Решение.** В случае самосветящихся точек волны, ими излучаемые, некогерентны. На экране складываются интенсивности волн, исходящих из этих точек. Пусть обе точки расположены симметрично относительно главной оптической оси. Рассмотрим распределение интенсивности вдоль оси  $X$  (рис. 122). Положение точки наблюдения на этой оси можно характеризовать координатой  $\xi = (2\pi x/\lambda)\alpha$ . Минимальное расстояние между центрами

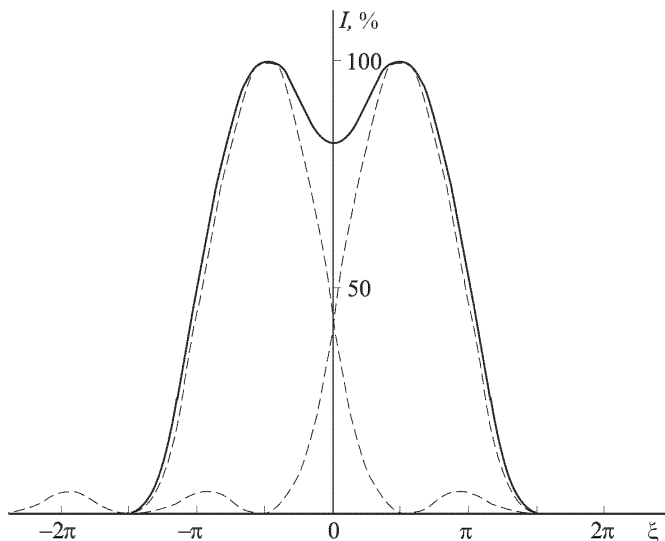


Рис. 122

дифракционных кружков соответствует по Рэлею разности координат  $\Delta\xi = \pi$  (см. решение задачи 361). На рис. 122 пунктирные кривые изображают распределение интенсивностей от каждой из рассматриваемых двух самосветящихся

точек, а сплошная кривая дает результирующую интенсивность. Мы видим, что интенсивность в центре картины почти на 20 % меньше максимальной интенсивности, равной наибольшей интенсивности от одной светящейся точки. Поэтому при выполнении критерия Рэлея получается раздельное изображение самосветящихся точек.

**363.** Решение. Если изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света, то волны, исходящие из них, когерентны. Складывать надо не интенсивности, а амплитуды колебаний, учитывая разность фаз между ними. Из решения задачи 361 следует, что в случае изображения одной точки фаза колебаний одна и та же в пределах каждого светлого кольца (в случае квадратной диафрагмы — светлого квадрата) и меняется на  $180^\circ$  при переходе через минимум освещенности в соседнее светлое кольцо.

1) Отверстия освещаются лучами, параллельными главной оптической оси. В этом случае волны исходят из них в одинаковых фазах. Так как до точки  $O$  волны проходят одинаковые расстояния, то в точку  $O$  они приходят также в одинаковых фазах. Амплитуда результирующего колебания в точке  $O$  будет больше в 2 раза, а интенсивность в 4 раза, чем в случае изображения одного из отверстий. Распределение результирующей интенсивности дает кривая рис. 123. Она имеет лишь один максимум, и изображение в глазу будет такое

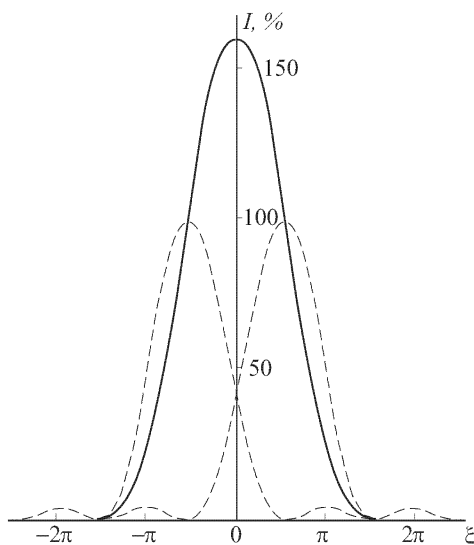


Рис. 123

же, как и от одной точки. Поэтому при рассматриваемом способе освещения раздельного изображения освещаемых точек не получится, если расстояние между ними равно минимальному расстоянию, требуемому критерием Рэлея. Чтобы получилось раздельное изображение, надо это расстояние увеличить примерно в 1,4 раза. В соответствии с этим в такое же число раз уменьшается и разрешающая способность по сравнению со случаем самосветящихся объектов.



2) Отверстия освещаются параллельными лучами, наклоненными под углом  $\theta$  к главной оптической оси. В этом случае волны из отверстий выходят не с одинаковыми фазами, а с разностью фаз  $\delta = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ , где  $d$  — расстояние между центрами отверстий. С такой же разностью фаз они придут и в  $O$ . Если  $d \sin \theta = \lambda/4$ , то  $\delta = \pi/2$ , интенсивность в  $O$  будет в два раза больше соответствующей интенсивности при наличии одного из отверстий. Разрешающая способность при таком освещении будет такая же, как и в случае самосветящегося объекта. Если  $d \sin \theta = \lambda/2$ , то  $\delta = \pi$ . Тогда волны приходят в  $O$  в противоположных фазах и интенсивность там будет равна нулю. Разделение изображений будет выражено весьма резко. При таком освещении расстояние между отверстиями может быть меньше предела Рэлея, и все же будут получаться отдельные изображения их.

3) Отверстия освещаются лучами всевозможных направлений. В этом случае получается практически такая же разрешающая способность, как и для самосветящихся объектов.

**364.** 1)  $34''$ ; 2)  $0,042$  мм.

**365.** Решение. Пусть рассматриваемый объект виден невооруженным глазом под углом  $\alpha = 1,22\lambda/D$ , где  $D$  — диаметр объектива, т.е. под минимальным углом, который способен разрешить объектив. В трубу тот же объект будет виден под углом  $\beta = N\alpha$ . Угол  $\beta$  должен быть не меньше угла  $\gamma = 1,22\lambda/d$ , который способен разрешить глаз ( $d$  — диаметр зрачка глаза). Из условия  $\beta \geq \gamma$  получаем

$$N \geq \frac{D}{d}.$$

Увеличение  $N_{\text{норм}} = D/d$  называется нормальным. При меньших увеличениях используется только часть объектива, и разрешающая способность системы труба-глаз понижается. Увеличения, больше нормального, не целесообразны, так как при этом разрешающая способность системы не увеличивается, а яркость изображения уменьшается (см. задачу 188).

**366.** 1) Разрешаемое угловое расстояние зрительной трубы  $\theta = 1,22\lambda/D$ , где  $D$  — диаметр объектива. При визуальных наблюдениях можно принять  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ ; тогда  $\theta = 2,76''$ . 2) При увеличении  $N \geq D/d = 10$ .

**367.**  $\delta\theta = 1,22\lambda/D = 0,023''$ .

**368.** Угловые размеры почти всех звезд много меньше разрешаемых угловых расстояний даже самых больших телескопов. При таких условиях величина изображения звезды на сетчатке глаза определяется исключительно дифракционными эффектами в оптической системе (телескоп+глаз) и не зависит от увеличения. Но яркость этого изображения пропорциональна световому потоку, поступающему в оптическую систему. Этот световой поток при пользовании телескопом во столько раз больше светового потока, проходящего через зрачок невооруженного глаза, во сколько раз площадь отверстия объектива больше площади зрачка глаза (если увеличение телескопа нормальное). Поэтому в телескоп можно видеть более слабые звезды, чем невооруженным глазом. При нормальном увеличении диаметр выходного зрачка равен диаметру зрачка глаза. Применение больших увеличений при рассматривании звезд бесполезно. При меньших увеличениях не весь свет, поступивший в телескоп, проходит через зрачок глаза.

**369.** См. ответ предыдущей задачи.

**370.** В  $\sqrt{\alpha\beta} = 10$  раз.

**371.** В  $\sqrt{\alpha\beta} = 10$  раз.

**372.**  $l_2 = l_1 D_2 / D_1 = 5 \cdot 10^4$  км.

**373.** Не может. Диаметр зрачка глаза орла не превышает нескольких миллиметров. Если предположить, что он равен даже 10 мм, то минимальный угол, под которым орел может видеть отдельно две точки предмета, окажется примерно в 3 раза больше угловых размеров мышонка.

**374.** На Луне около 40 м, на Солнце около 20 км.

**375.** Около 28 км. Рассмотренная задача до сравнительно недавнего времени представляла интерес в связи с гипотезой о каналах на Марсе и их искусственном сооружении. Фотографирование поверхности Марса с помощью ракет и исследование его посредством управляемых аппаратов, спускаемых на поверхность Марса, не подтвердило эту гипотезу.

**376.** Решение. При малых углах дифракции искомое расстояние  $x$  найдется из требования, чтобы разность хода  $r_2 - r_1$  крайних интерферирующих лучей (рис. 124) была равна длине волны  $\lambda$ . Применяя теорему Пифагора и извлекая квадратные корни с помощью формулы бинома Ньютона, для этой разности нетрудно получить

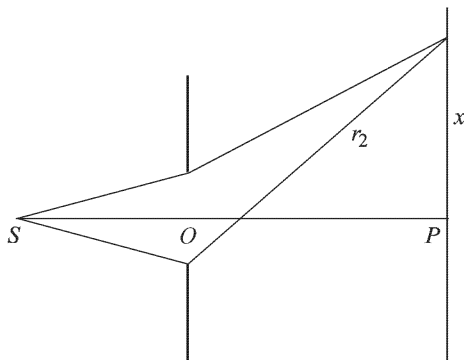


Рис. 124

$$r_2 - r_1 = \frac{xD}{b} - \frac{xD}{2b^3} \left( x^2 + \frac{D^2}{4} \right) + \dots$$

Ограничиваясь первым членом, найдем

$$x = \frac{b\lambda}{D}. \quad (376.1)$$

Ошибка при вычислении  $r_2 - r_1$  должна быть мала по сравнению с  $\lambda$ . Отсюда получаем условие применимости предыдущей формулы

$$\frac{1}{2b^2} \left( \frac{b^2 \lambda^2}{D^2} + \frac{D^2}{4} \right) \ll 1. \quad (376.2)$$

**377.** Если пользоваться для радиуса первого темного дифракционного кольца формулой (376.1), то получится

$$D^2 = \frac{2ab\lambda}{a+b}, \quad (377.1)$$

т.е. площадь отверстия должна равняться половине площади центральной френелевой зоны, построенной для точек  $S$  и  $P$  (рис. 124). Условие (376.2) сводится к

$$\frac{D^2}{4b^2} \left( 1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right) \ll 1$$

и всегда хорошо выполняется во всякой камере с малым отверстием.

При более точном решении надо пользоваться для радиуса  $x$  первого темного кольца формулой  $x = 1,22b\lambda/D$ , что дает

$$D^2 = \frac{2,44ab\lambda}{a+b}. \quad (377.2)$$

Рэлей, более подробно исследовавший этот вопрос теоретически и экспериментально, нашел для наивыгоднейшего диаметра отверстия

$$D = 1,8\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}, \quad (377.3)$$

что практически совпадает с (377.1) или (377.2).

**378.**  $D = \sqrt{2,44L\lambda} \approx 0,35 \text{ мм.}$

**379.**  $L \approx D^2/(2,44\lambda) \approx 1000 \text{ км; } S \approx (2,44\lambda/D)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-12}.$

**380.** Разрешающая способность увеличится приблизительно в два раза.

**381.**  $N \geq D/d$ , где  $D$  — диаметр объектива, а  $d$  — зрачка глаза.

**382.**  $L < Dl/(1,22\lambda) = 3,7 \text{ м.}$  Легко видеть, что то же условие соблюдается и при применении так называемого объективного отсчета на шкале, т. е. при проецировании светового зайчика, отраженного от зеркала гальванометра на шкалу.

**383.**  $r \approx \frac{Dd}{2} \sqrt{\frac{P}{hc\lambda n}} \approx 0,1 \text{ светового года.}$

**384.**  $l \leq \frac{D}{2} \sqrt[4]{\frac{Pd^2}{2P_{\text{пор}}\lambda^2}} \approx 250 \text{ км.}$

**385.**  $\theta = (m + 1/2)\lambda/D$ , где  $m$  — целое число.

**386.**  $x = f\theta = (m + 1/2)f\lambda/D$ , где  $m$  — целое число.

**387.**  $\theta = 2(m + 1/2)\lambda/D$ , где  $m$  — целое число.

**388.** Решение. Для одного пучка света (зеркало  $M_1$  или  $M_2$  закрыто) в фокальной плоскости будет наблюдаться система дифракционных колец, появляющихся в результате дифракции на круглой диафрагме зеркала. Диаметры колец определяются размером диафрагмы. Для двух пучков света (зеркала  $M_1$  и  $M_2$  открыты) одновременно будут наблюдаться две системы колец, которые, вообще говоря, не совпадают друг с другом. Но путем поворота зеркал  $M_2$  и  $M_4$  можно вторую систему колец совместить с первой. Тогда они будут интерферировать друг с другом и кольца будут пересечены темными и светлыми полосами, перпендикулярными к линии  $M_1M_2$ .

**389.** Решение. По принципу Гюйгенса действительные источники света можно заменить виртуальными источниками, распределенными в плоскостях диафрагм, стоящих перед зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ . Ради простоты (это не является ограничением) будем считать диафрагмы настолько малыми, что их можно принять за точки. Тогда задача сводится к нахождению интерференционной картины от двух точечных источников  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 125), когерентных между собой. Световые пучки от этих источников, прежде чем они достигнут объектива  $L$ , претерпевают отражения от зеркал  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Можно в рассуждениях исключить из рассмотрения эти отражения, если заменить источники  $S_1$  и  $S_2$  воображаемыми источниками  $S_1''$  и  $S_2''$ , которые являются их изображениями в плоских зеркалах. При такой замене фазы  $S_1$  и  $S_1''$  будут одинаковы, равно как и фазы  $S_2$  и  $S_2''$ . Тем самым задача свелась к задаче 385. При сближении зеркал  $M_3$  и  $M_4$  уменьшается расстояние между  $S_1''$  и  $S_2''$ , что ведет к увеличению ширины интерференционных полос.

Допустим, что одна из звезд посылает свет перпендикулярно к прямой  $S_1S_2$ . Тогда фазы источников  $S_1$  и  $S_2$  (а следовательно,  $S_1''$  и  $S_2''$ ) будут

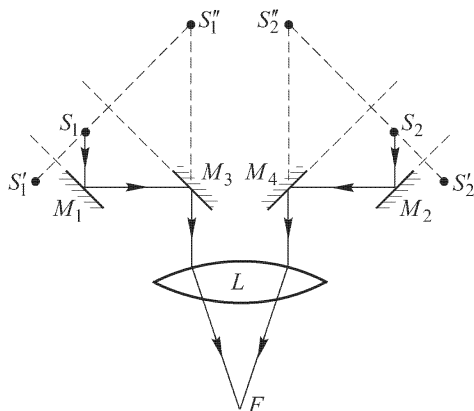


Рис. 125

одинаковы. Для того чтобы вторая звезда дала систему полос, смещенную относительно первой на половину ширины полосы, необходимо, чтобы фазы вторичных источников  $S_1$  и  $S_2$ , возбуждаемых второй звездой, отличались на  $\pi$ . Это дает

$$D \sin \theta \approx D\theta = \frac{\lambda}{2},$$

где  $\theta$  — угловое расстояние между звездами, а  $D$  — расстояние между центрами зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Таким образом,

$$\theta = \frac{\lambda/2}{D}.$$

Если обе звезды одинаковы, то при выполнении этого условия полосы интерференции исчезают. Вообще, интерференционные полосы будут исчезать, если

$$\theta = \frac{(m + 1/2)\lambda}{D}.$$

Если одиночную звезду заменить квадратом постоянной поверхностной яркости, то этот квадрат можно разбить на линейные источники, параллельные одной из сторон квадрата, а именно той, которая перпендикулярна к  $S_1S_2$ . Если угловые размеры сторон квадрата равны

$$\theta = \frac{\lambda}{D},$$

то каждый линейный источник одной половины квадрата уничтожит интерференционные полосы, даваемые соответственным источником второй половины квадрата. Вообще, полосы интерференции пропадают при выполнении условия

$$\theta = \frac{2(m + 1/2)\lambda}{D}.$$

Расчет для звезд с круглым диском постоянной поверхностной яркости несколько сложнее. Он показывает, что первое исчезновение интерференционных полос наступает тогда, когда

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D},$$

где  $\theta$  — угловой диаметр звезды.

**390.**  $0,047''$ .

**391.**  $\delta\varphi \approx \lambda/D$ .

**392.** 1)  $\delta\varphi \approx \lambda/d$ . При  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\delta\varphi \approx 1^\circ$ ; при  $\lambda = 10 \text{ см}$   $\delta\varphi \approx 7'$ .

2)  $\delta\varphi \approx \sqrt{\lambda/b}$ . При  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\delta\varphi \approx 2'$ ; при  $\lambda = 10 \text{ см}$   $\delta\varphi \approx 40''$ .

3)  $h \ll \sqrt{b\lambda}$ . При  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\sqrt{b\lambda} = 19,5 \text{ км}$ ; при  $\lambda = 10 \text{ см}$   $\sqrt{b\lambda} = 6,2 \text{ км}$ .

**393.**  $\delta\varphi \approx \lambda/D$ . При  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\delta\varphi \approx 0,06''$ . При  $\lambda = 10 \text{ см}$   $\delta\varphi \approx 0,006''$ .

Метод требует, чтобы источник радиоизлучения находился на прямой, соединяющей точку наблюдения с центром Луны. Кроме того, он предъявляет весьма жесткие требования к гладкости лунной поверхности и к отступлениям формы Луны от сферической. Высота неровностей поверхности по всей границе лунного диска должна быть мала по сравнению с  $h = b\lambda/D$ . Разность наибольшего и наименьшего диаметров лунного диска также не должна превышать этой величины. При  $\lambda = 1 \text{ м}$   $h \approx 100 \text{ м}$ ; при  $\lambda = 10 \text{ см}$   $h \approx 10 \text{ м}$ . Эти жесткие требования исключают возможность использования рассматриваемого метода, по крайней мере, для радиоволн с длиной волны  $\lambda < 100 \text{ м}$ .

**394.**  $\theta \approx \lambda/(2h) \approx 3'$ .

**395.**  $\theta \approx \lambda/(2R) \sim 0,2''$ , где  $R$  — радиус Земли.

**396.**  $\theta \approx \lambda/(2h) \sim 20''$ . Высота спутника над поверхностью Луны  $h \approx 500 \text{ км}$ . Спутник Земли при работе на волне с длиной  $100 \text{ м}$  использовать трудно, а обычно даже невозможно из-за влияния земной ионосферы.

**397.** Диаграмма имеет «ножевую» форму с угловыми размерами  $\lambda/D$  в одном направлении и  $\lambda/d$  — в другом.

**398.** 1) Около  $0,3 \text{ мкм}$ ; 2) около  $0,19 \text{ мкм}$ .

**399.** 1) В 2 раза; 2)  $0,095 \text{ мкм}$ ; 3) около  $5300$ .

**400.** Решение. Пусть в микроскоп рассматривается объект, величина которого  $l$  равна наименьшему разрешаемому расстоянию его объектива. Для самосветящихся объектов или объектов, освещаемых диффузно,  $l = 0,61\lambda/(n \sin u)$ , где  $n \sin u$  — числовая апертура объектива. Невооруженным глазом с расстояния ясного зрения  $L$  этот объект виден под углом  $\alpha = l/L$ . В микроскоп он виден под углом  $\beta = N\alpha$ , где  $N$  — увеличение микроскопа. Угол  $\beta$  должен быть не меньше минимального углового расстояния  $\gamma = 1,22\lambda/d$ , разрешаемого глазом ( $d$  — диаметр зрачка глаза). Условие  $\beta \geq \gamma$  дает  $N \geq 2Ln \sin u/d$ . Увеличение  $N_{\text{норм}} = 2Ln \sin u/d$  называется нормальным. Применять увеличения больше нормального не целесообразно, так как при этом разрешающая способность микроскопа не повышается, а яркость изображения уменьшается. (См. задачу 192.)

**401.** Когда узкая щель вертикальна, на экране получается система горизонтальных полос. При горизонтальной щели полосы становятся вертикальными. Когда щель наклонена под углом  $45^\circ$  к горизонту полосы также наклонены под тем же углом, но перпендикулярны к направлению щели. При широкой щели, независимо от ее направления, на экране получается подобное изображение проволоочной сетки.

**402.**  $N \geq D/d$ .

**403.**  $f_2 \leq \frac{ld}{2f_1 n \sin \alpha}$ , где  $d$  — диаметр зрачка глаза.

**404.**  $n \sin \alpha \geq D/(2f)$ ,  $N \geq DL/(fd)$ , где  $L$  — расстояние ясного зрения,  $d$  — диаметр зрачка глаза.

**405.**  $D^2/f^2 \geq z^2 \lambda^2 \approx 0,25$ .

**406.** Период изменения показателя преломления жидкости равен длине ультразвуковой волны  $\Lambda$ .

Решение. Показатель преломления жидкости зависит только от ее плотности. Поэтому задача сводится к определению пространственного периода изменения плотности жидкости. На рис. 126 черными кружками изображены



Рис. 126

узлы скоростей в стоячей звуковой волне, а стрелками показаны направления движения частиц жидкости в некоторый момент времени. В стоячей волне все частицы жидкости между двумя соседними узлами скорости движутся в одном направлении. При переходе через узел скорости направление движения частиц меняется на противоположное. Пусть смещения частиц жидкости в некоторый момент времени достигли своих максимальных значений. Тогда при направлениях скоростей, указанных на рис. 126, в узлах  $A, B, \dots$  будут сгущения, а в узлах  $C, D, \dots$  — разрежения. Через половину периода в узлах  $A, B, \dots$  будут разрежения, а в узлах  $C, D, \dots$  — сгущения. Расстояние между двумя соседними сгущениями или разрежениями равно пространственному периоду изменения плотности, а следовательно, и показателя преломления жидкости. Оно, как видно из рис. 126, равно длине ультразвуковой волны  $\Lambda$ .

**407.** Решение. Так как частота звуковых колебаний очень мала по сравнению с частотой световых колебаний, то можно считать, что жидкость, в которой распространяется свет, неподвижна. Такая жидкость представляет собой неоднородную среду, показатель преломления которой меняется периодически в направлении, параллельном  $AB$ . Расчет светового поля в такой неоднородной среде представляет очень трудную задачу. Однако, как бы ни распространялся свет внутри жидкости, можно утверждать, что световое поле в плоскости  $CD$  при выходе из кюветы будет периодически меняться в направлении  $CD$  с периодом  $\Lambda$ . Для определения светового поля за кюветой можно, по принципу Гюйгенса, заменить реальные источники света виртуальными, распределенными по поверхности  $CD$ . При этом расстояние между двумя соседними одинаковыми виртуальными источниками будет равно длине ультразвуковой волны  $\Lambda$  (см. решение задачи 406). Этим задача сведена к дифракции света на двумерной плоской решетке.

**408.**  $v = f\lambda\nu/\Delta x = 1200 \text{ м/с}$ .

**409.** Нельзя.

Решение. Пространственный период изменения показателя преломления жидкости в обоих случаях равен длине ультразвуковой волны  $\Lambda$ . Поэтому в обоих случаях будут одинаковы углы дифракции. Более того, будет одно и то же распределение интенсивности света в дифракционных спектрах, ибо в обоих случаях показатель преломления как функция координат (при фиксированном времени) меняется по одному и тому же закону синуса. При заметном затухании ультразвука характер изменения показателя преломления

в пространстве в стоячей и бегущей волнах уже не будет одинаковым. В этом случае по характеру дифракционной картины бегущую волну в принципе можно отличить от стоячей.

**410.** Решение. Если бы глаз мгновенно реагировал на световое раздражение и не обладал способностью сохранять зрительные впечатления, то, взглянув на жидкость, мы увидели бы светлые и темные полосы, расстояние между которыми равнялось бы расстоянию между двумя соседними сгущениями, т.е.  $\Lambda$ . Через половину периода звуковых колебаний на месте каждой светлой полосы образовалась бы темная, и наоборот. В действительности глаз сохраняет зрительные впечатления в течение примерно 0,1 с, т.е. в течение времени, которое чрезвычайно велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. Поэтому глаз не в состоянии видеть смену полос. Он фиксирует некоторую среднюю освещенность сетчатки, получающуюся путем усреднения мгновенной освещенности по времени, которое очень велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. При таком усреднении интенсивность света во всех узлах скоростей делается одинаковой. Во всех пучностях скоростей интенсивность будет также одинаковой, но отличающейся от интенсивности в узлах. Поэтому период видимой картины должен равняться расстоянию между соседними узлами, т.е.  $\Lambda/2$ .

**Примечание.** Для полного исследования вопроса необходимо было бы показать, почему при усреднении получается система полос, а не равномерное освещение жидкости. Такое исследование требует подробного рассмотрения сложного вопроса о распространении световой волны в сильно неоднородной среде, какой является жидкость при наличии в ней ультразвукового поля. Это исследование, в согласии с опытом, показывает, что полосы должны наблюдаться. Цель рассмотренной нами задачи состояла в том, чтобы, принимая наличие полос как опытный факт, определить расстояние между ними.

**411.** В дифракционных спектрах, наряду с основной частотой  $\omega$ , появятся частоты  $\omega \pm m\Omega$ , где  $\Omega$  — частота ультразвуковых колебаний,  $m$  — целое число.

**Решение.** Стенку кюветы, на которую падает световая волна, примем за координатную плоскость  $XY$ , за направление оси  $Z$  выберем направление распространения света, а ось  $X$  направим перпендикулярно к волновым фронтам ультразвуковой волны. Поле падающей волны имеет вид  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ . На передней стенке кюветы, где  $z = 0$ , оно равно  $E_1 = E_0 \cos \omega t$ . Поле  $E_2$  на задней стенке кюветы можно представить в виде  $E_2 = AE_1$ , где  $A$  — пропускаемость кюветы, которая, очевидно, является периодической функцией координаты  $x$  и времени  $t$ . Разложив ее в ряд Фурье и отбросив высшие гармоники, можно написать:

$$A = a + b_1 \cos \Omega t + b_2 \sin \Omega t,$$

где  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  не зависят от времени. В результате амплитуда поля  $E_2$  оказывается модулированной с частотой модуляции  $\Omega$ . Такое поле эквивалентно трем гармоническим полям с частотами  $\omega$ ,  $\omega - \Omega$ ,  $\omega + \Omega$ . Действительно,

$$\begin{aligned} E_2 &= AE_1 = (a + b_1 \cos \Omega t + b_2 \sin \Omega t) \cos \omega t = \\ &= a \cos \omega t + \frac{1}{2} \{b_1 \cos(\omega - \Omega)t - b_2 \sin(\omega - \Omega)t\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \{b_1 \cos(\omega + \Omega)t + b_2 \sin(\omega + \Omega)t\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что и вторичные волны Гюйгенса, распространяющиеся от задней стенки кюветы, будут иметь частоты  $\omega$ ,  $\omega - \Omega$ ,  $\omega + \Omega$ . Такие же частоты появятся и в дифракционных спектрах. Если в разложении  $A$  учесть высшие гармоники, то в дифракционном спектре добавятся частоты  $\omega \pm 2\Omega$ ,  $\omega \pm 3\Omega$  и т. д.

### § 5. Элементы голографии

**412.**  $\Phi(x) = \alpha x$ ,  $E_P = E_0 \exp(i\alpha x)$ , где  $\alpha = k \sin \theta$ . При изменении знака проекции  $k_x$  знак перед произведением  $\alpha x$  изменится на обратный.

**413.**  $\Phi = -\frac{\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2)$ ,  $E_P = E_0 \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2) \right\}$ .

Решение. Поле волны, распространяющейся из источника  $S$ , в точке  $P$  можно записать в виде

$$E_P = \frac{A}{r} \exp\{i(\omega t - kr)\},$$

где  $r \approx r_0 + \frac{x^2}{2r_0} + \frac{y^2}{2r_0}$ ,  $A$  — постоянная. Учитывая это, получаем результат, приведенный в ответе.

**414.**  $\Phi = \frac{\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2)$ ,  $E_P = E_0 \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2) \right\}$ .

**415.**  $D(x) = 2E_0^2 - \gamma E_1^2 - 2E_0 E_1 \gamma \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right)$ , где  $\gamma$  — постоянная, зависящая от условий экспонирования и проявления, называемая коэффициентом контрастности фотопластинки. Пространственный период расположения полос почернения  $d = \lambda / \sin \theta$ .

**416.**  $D(x) = 2E_0^2 - \gamma E_1^2 - \gamma E_0 E_1 \exp \left\{ i\alpha x + \frac{i\pi}{\lambda a} (x^2 + y^2) \right\} - \gamma E_0 E_1 \exp \left\{ -i\alpha x - \frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda a} \right\}$ , где  $\alpha = k \sin \theta$ , а для опорной волны было принято следующее выражение:

$$E = E_0 \exp\{i(\omega t + kx \sin \theta - kz \cos \theta)\}.$$

**417.** За голограммой будут распространяться четыре волны, показанные на рис. 127. Точки  $S'$  и  $S''$  находятся соответственно перед голограммой и за ней

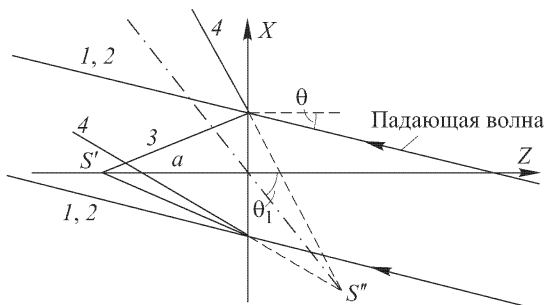


Рис. 127