Список результатів та формул з курсу «Рівняння матфізики», які студент повинен знати напам'ять

1) Оператор Лапласа в ортогональних системах координат:

а) Вигляд оператора Лапласа в сферичних координатах:

$$\Delta = \Delta_r^{(3)} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}$$

де радіальна частина оператора Лапласа:

$$\Delta_r^{(3)} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}$$

кутова частина оператора Лапласа (оператор Лапласа на одиничній сфері, або оператор Бельтрамі)

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

б) Вигляд оператора Лапласа в циліндричних координатах:

$$\Delta = \Delta_\rho^{(2)} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

де радіальна частина оператора Лапласа:

$$\Delta_\rho^{(2)} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}$$

2) Загальний вигляд розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом відокремлення змінних:

а) одновимірне рівняння дифузії $u_t - a^2u_{xx} = 0$:

$$u(x,t) = \sum_n \left[A_n\cos\lambda_n x + B_n\sin\lambda_n x\right]\cdot e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

б) одновимірне хвильового рівняння $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$:

$$u(x,t) = \sum_n \left[A_n\cos\lambda_n x + B_n\sin\lambda_n x\right]\cdot\left[C_n\cos(a\lambda_n t) + D_n\sin(a\lambda_n t)\right]$$

в) рівняння Лапласа на площині в декартових координатах $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$u(x,y) = \sum_n \left[A_n\cos\lambda_n x + B_n\sin\lambda_n x\right]\cdot\left[C_n\operatorname{ch}(\lambda_n y) + D_n\operatorname{sh}(\lambda_n y)\right]$$

г) рівняння Лапласа на площині в полярних координатах $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0$:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0\ln\rho + \sum_\nu \rho^{|\nu|}\left[A_\nu\cos(\nu\varphi) + B_\nu\sin(\nu\varphi)\right] + \sum_\nu \rho^{-|\nu|}\left[C_\nu\cos(\nu\varphi) + D_\nu\sin(\nu\varphi)\right]$$

3) Сферичні функції:

а) Формула Лапласа для сферичних функцій:

$$Y_{lm}(\theta\varphi) = N_{lm} e^{im\varphi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \left[\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right]^l e^{im\psi}$$

б) Сферичні функції порядку $l = 0, 1, 2$:

$$Y_{00} = \text{const} \quad Y_{10} = \text{const}\cdot\cos\theta \quad Y_{1,\pm1} = \pm\text{const}\cdot\sin\theta e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{20} = \text{const}\cdot(3\cos^2\theta - 1) \quad Y_{2,\pm1} = \pm\text{const}\cdot\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} \quad Y_{2,\pm2} = \text{const}\cdot\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

в) Диференціальне рівняння для сферичних функцій:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm}(\theta,\varphi) + l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0$$

г) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

д) Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд по сферичних функціях:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|} = \begin{cases} \frac{1}{R}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\theta) & r < R, \\ \frac{1}{r}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) & r > R. \end{cases}$$

4) Циліндричні функції:

а) Формули Шлеффлі та Зоммерфельда для циліндричних функцій:

$$Z_\nu(z) = C\int\limits_\Gamma \mathrm{d}\zeta e^{iz\zeta\sin\zeta - i\nu\zeta}$$

б) Співвідношення між функціями Бесселя, Неймана та Ганкеля 1-го та 2-го роду:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = J_\nu(z) \pm iN_\nu(z)$$

в) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля

$$J_0(0) = 1, \quad J_\nu(z) \propto z^\nu, \qquad N_0(z) \propto \ln z, \quad N_\nu(z) \propto z^{-\nu}$$

г) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нескінченості

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \qquad N_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4),$$
$$H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[\pm(z - \nu\pi/2 - \pi/4)\right]$$

д) Диференціальне рівняння для циліндричних функцій $u \equiv Z_\nu(k\rho)$:

$$u'' + \frac{u'}{\rho^2} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) u = 0$$

е) Нормування циліндричних функцій: $\int_a^b u_1 u_2 \rho \mathrm{d}\rho = \delta_{k_1 k_2} \|Z_\nu(k\rho)\|^2$, де $u_1 = Z_\nu(k_1\rho)$, $u_2 = Z_\nu(k_2\rho)$, норма:

$$\|u\|^2 = \|Z_\nu(k\rho)\|^2 = \frac{\rho^2}{2}\left[u'^2 - uu''\right]\Bigg|_{\rho=a}^{\rho=b}$$

є) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах:

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{k,\nu}\left(A_{k\nu}J_\nu(k\rho) + B_{k\nu}N_\nu(k\rho)\right)\cdot\left(C_{k\nu}\cos\nu\varphi + D_{k\nu}\sin\nu\varphi\right)\cdot\left(E_{k\nu}e^{kz} + F_{k\nu}e^{-kz}\right)$$

5) Узагальнені функції:

а) Властивості узагальнених функцій:

$$(af,\phi) = (f,a\phi), \qquad (f(y(x)),\phi(x)) = \left(\frac{f(y)}{|\det|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x||},\phi(x(y))\right), \qquad (\partial^\alpha f,\phi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\partial^\alpha\phi),$$
$$f' = \{f'\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0), \qquad (f\otimes g,\phi) = (f,(g,\phi)), \qquad \partial^\alpha[f\otimes g] = [\partial^\alpha f\otimes g],$$
$$(f\star g,\phi) = (f(x)\otimes g(y),\phi(x+y)), \qquad \partial^\alpha(f\star g) = \partial^\alpha f\star g = f\star\partial^\alpha g,$$
$$(F[f],\phi) = (f,F[\phi]), \qquad F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^d}F[f(-k)], \qquad \partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f],$$
$$F[\partial^\alpha f] = (-ik)^\alpha F[f], \qquad F[f\star g] = F[f]F[g]$$

б) Властивості дельта–функції Дірака:

$$(\delta,\phi)\equiv\phi(0), \qquad a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \qquad \delta(y(x)) = \sum_{x_k:y(x_k)=0}\frac{\delta(x-x_k)}{\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_k}},$$
$$(\delta',\phi) = -\phi'(0), \qquad \theta'(x) = \delta(x), \qquad \delta\star f = f, \quad F[\delta] = 1, \qquad F[1] = (2\pi)^d\delta(\xi).$$

в) Формула Сохоцького:

$$\frac{1}{x\pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x).$$

6) Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами через фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}_n = \theta(t)T(t)$:

$$LT(t) = 0, \qquad T'(0) = \cdots T^{(n-2)}(0) = 0, \quad T^{(n-1)}(0) = 1.$$

7) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії:

а) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в d–вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_d(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^d}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right]$$

б) Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в d-вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_t - a^2\Delta^{(d)}u = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x)$$
$$u(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}s\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}y\,\mathcal{E}_d(x-y,t-s)f(y,s) + \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}y\,\mathcal{E}_d(x-y,t)u_0(y)$$

8) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння:

а) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в одно– двох– і трьох–вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\cdot\theta(t)\theta(at-|x|) \quad \mathcal{E}_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\theta(t)\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}} \quad \mathcal{E}_3(x,t) = \frac{1}{4\pi a|x|}\cdot\theta(t)\delta(at-|x|)$$

б) Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в d-вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_{tt} - a^2\Delta^{(d)}u = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \mathcal{E}_d(x-y,t-s)f(y,s) + \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \mathcal{E}_d(x-y,t)u_0(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \mathcal{E}_d(x-y,t)u_1(y)$$

в) Розв'язок одновимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула д'Аламбера):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \mathrm{d}y f(y,s) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \mathrm{d}y u_1(y) + \frac{1}{2}\left(u_0(x+at) + u_0(x-at)\right).$$

г) Розв'язок двовимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула Пуассона):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_{|x-y|\le a(t-s)} \mathrm{d}y \frac{f(y,s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\partial_t \int\limits_{|x-y|\le at} \mathrm{d}y \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|x-y|\le at} \mathrm{d}y \frac{u_1(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}$$

д) Розв'язок трьохвимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула Кірхгофа):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|x-y|\le at} \mathrm{d}y \frac{f\left(y, t-\frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} + \frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|x-y|=at} u_0(y)\mathrm{d}S_y\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|x-y|=at} u_1(y)\mathrm{d}S_y.$$