

Перелік екзаменаційних питань з курсу «Математична фізика»

- 1) Принцип суперпозиції для лінійних диференціальних рівнянь та приклади його застосування.
- 2) Класифікація та зведення лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку до канонічного вигляду. Характеристики.
- 3) Розв'язок неоднорідного рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.
- 4) Розв'язок рівняння дифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних межових умов. Приклад.
- 5) Розв'язок хвильового рівняння на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.
- 6) Розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику методом відокремлення змінних. Приклад.
- 7) Розв'язок рівняння Лапласа в крузі та кільці методом відокремлення змінних. Приклад.
- 8) Розв'язок рівняння Лапласа в кільці методом відокремлення змінних. Приклад.
- 9) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок декартових координат.
- 10) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок полярних координат.
- 11) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок еліптичних координат.
- 12) Умови відокремлення змінних у двовимірному рівнянні Гельмгольца. Системи координат, в яких відокремлюються змінні для двовимірного рівняння Гельмгольца. Випадок параболічних координат.
- 13) Гармонічні поліноми та їх властивості. Лема Лапласа та теорема про кількість лінійно-незалежних поліномів.
- 14) Сферичні функції: означення і основні властивості. Приклад.
- 15) Ортогональність та повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіусу. Диференціальне рівняння для сферичних функцій. Оператор Бельтрамі.

- 16) Представлення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа у вигляді ряду по сферичних функціях у випадку, коли особлива точка фундаментального розв'язку і центр координат не збігаються.
- 17) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах.
- 18) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Приклад.
- 19) Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Неймана та Ханкеля. Інтегральні зображення циліндричних функцій.
- 20) Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля. Приклади.
- 21) Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нескінченності. Приклади.
- 22) Метод перевалу. Приклади.
- 23) Диференціальне рівняння для циліндричних функцій.
- 24) Задача Штурма–Ліувілля для циліндричних функцій. Нормування циліндричних функцій.
- 25) Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Ряди Фур'є-Беселя.
- 26) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.
- 27) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних умов на основі циліндру. Приклад.
- 28) Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Випадок неоднорідних умов на бічній поверхні циліндру. Модифіковані циліндричні функції. Приклад.
- 29) Означення узагальнених функцій. Означення та приклади регулярних та сингулярних узагальнених функцій.
- 30) Простори основних функцій. Властивості основних функцій. Ядро осереднення.
- 31) Заміна змінних в узагальнених функціях. Приклади. Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.
- 32) Диференціювання узагальнених функцій. Похідна від функції Хевісайда і δ -функції. Приклади.
- 33) Прямий (зовнішній) добуток і згортка узагальнених функцій. Приклади.
- 34) Узагальнені функції повільного зростання. Перетворення Фур'є узагальнених функцій. Приклади.

- 35) Означення δ -функції та її фізична інтерпретація. Диференціювання та заміна змінної в δ -функції. Збіжність в просторі узагальнених функцій. δ -подібні послідовності.
- 36) Множення δ -функції на основну функцію. Згортка δ -функції з узагальненими функціями. Перетворення Фур'є від δ -функції.
- 37) Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння. Теорема про існування та єдиність розв'язку лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.
- 38) Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння із звичайними похідними. Приклади.
- 39) Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння за допомогою фундаментального розв'язку. Приклади.
- 40) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в n -вимірному просторі.
- 41) Розв'язок задачі Коші та межових задач з однорідними межовими умовами для n -вимірного рівняння дифузії.
- 42) Метод спуску. Приклади.
- 43) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в одновимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.
- 44) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в двовимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для двовимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.
- 45) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в тривимірному просторі. Розв'язок задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння. Збудження хвиль точковим джерелом.

Приклад питань екзаменаційного білету

Екзаменаційний білет № 0

Запитання 1. Метод перевалу. Приклад. За допомогою методу перевалу обчислити асимптотичне значення функції

$$F(x) = \int_{\Gamma} z \exp \left(\frac{xz^3}{3} - xz \right) dz, \quad \Gamma = \{z(t) : z = 3t, t \in [-1; 1]\}$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Запитання 2.

Методом відокремлення змінних розв'язати наступну крайову задачу для сферичного шару:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, & r \in (1, 2), \theta \in (0, \pi), \varphi \in S^1, \\ u(1, \theta, \varphi) = \cos^2 \theta, & \theta \in (0, \pi), \varphi \in S^1, \\ u(2, \theta, \varphi) = \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1), & \theta \in (0, \pi), \varphi \in S^1, \end{cases}$$

Запитання 3. Методом фундаментальних розв'язків розв'язати одновимірну задачу Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{\alpha t} \delta(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \delta(1 - |x|), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$.