

1. ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕРНОЇ МАТЕРІЇ

Приклад 1. Оцінити густину та концентрацію ядерної речовини. Знайти частину об'єму ядра, яка зайнята нуклонами.

Розв'язання. Маса протона та нейтрона дуже близькі за числовим значенням, тому часто для спрощення розрахунків їх можна вважати рівними. Отже, маса одного нуклона в ядрі $m_N \approx 1 \text{ а.о.м.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$. Середня густина ядерної матерії ρ дорівнює відношенню маси ядра $M = Am_N$ до його об'єму $V = 4\pi R^3 / 3$, де A – масове число ($A = Z + N$). Якщо вважати ядро сферичним, то радіус визначатиметься за формулою $R = R_0 A^{1/3} = 1,22 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} (\text{см})$. Значення параметра R_0 для важких ядер може варіюватися в межах $(1,2 \div 1,5) \text{ фм}$, в залежності від методу його визначення. Слід зауважити, що середня густина ядерної речовини не залежить від масового числа A , тобто однакова для всіх ядер:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Am_N}{4\pi R_0^3 A} = \frac{3m_N}{4\pi R_0^3} = \frac{3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{4\pi \cdot (1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см})^3} = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3. \quad (1.1.1)$$

Концентрацію нуклонів в ядрі можна визначити як відношення густини ядерної речовини до маси одного нуклона:

$$n = \frac{\rho}{m_N} = \frac{2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3}{1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}} = 1,2 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}. \quad (1.1.2)$$

Частина об'єму ядра η , яка зайнята нуклонами, запишеться як відношення об'єму всіх нуклонів у ядрі до загального об'єму ядра V :

$$\eta = \frac{AV_N}{V} = \frac{4\pi AR_N^3 / 3}{4\pi R^3 / 3} = \frac{AR_N^3}{R^3 A} = \left(\frac{R_N}{R_0} \right)^3. \quad (1.1.3)$$

Тут V_N та R_N – об'єм та радіус одного нуклона відповідно. Будемо вважати, що радіуси нейтрона та протона приблизно однакові та дорівнюють $R_N = 0,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Тоді підстановка числових значень у (1.1.3) дає

$$\eta = \left(\frac{0,4 \cdot 10^{-13}}{1,22 \cdot 10^{-13}} \right)^3 = 0,035 \text{ або } 3,5\%.$$

Приклад 2. Використовуючи формулу Вайцзеккера, знайти енергію, яка виділяється під час спонтанного поділу ядра ^{235}U на два уламки з приблизним відношенням мас 2 : 3 (взяти масові числа уламків рівними 94 та 141).

Розв'язання. В результаті поділу ізотопу урану-235 в нашому випадку утворюються два уламки (рубідій-94 та цезій-141):



Енергія поділу Q ядра на два уламки виражається через різницю енергій зв'язку ядра ^{235}U та ядер-уламків:

$$Q = E_{^{94}\text{Rb}}(Z_{\text{Rb}}, A_{\text{Rb}}) + E_{^{141}\text{Cs}}(Z_{\text{Cs}}, A_{\text{Cs}}) - E_{^{235}\text{U}}(Z_{\text{U}}, A_{\text{U}}), \quad (1.2.2)$$

де $E_{^{94}\text{Rb}}$, $E_{^{141}\text{Cs}}$ та $E_{^{235}\text{U}}$ – енергії зв'язку ядер урану та уламків. Тут зарядові числа $Z_{\text{U}} = 92$, $Z_{\text{Rb}} = 37$ та $Z_{\text{Cs}} = 55$. Масові числа дорівнюють $A_{\text{U}} = 235$, $A_{\text{Rb}} = 94$ та $A_{\text{Cs}} = 141$.

В загальному випадку, енергія зв'язку ядра описується формулою Вайцзеккера [13]:

$$E_{\text{зв}}(Z, A) = \varepsilon_1 A - \varepsilon_2 A^{2/3} - \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \varepsilon_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}, \quad (1.2.3)$$

Оскільки формула Вайцзеккера отримана в припущенні нестисливості ядерної речовини, можна не враховувати перший доданок, тому що його величина не

змінюється при поділі ядра. Також, енергія симетрії (четвертий доданок в формулі Вайцзеккера) не змінюється до та після поділу ядра.

Коефіцієнт δ для даних парно-непарних ізотопів урану ^{235}U та цезію ^{141}Cs складає $\delta_U = \delta_{Cs} = 0$, тому енергія парності для них $E_U^{nap} = E_{Cs}^{nap} = 0$. Для ізотопу ^{94}Rb $\delta_{Rb} = -1$ та енергія парності складатиме:

$$E_{Rb}^{nap} = -\frac{\varepsilon_5}{A_{Rb}^{3/4}} = -\frac{34 \text{ MeV}}{37^{3/4}} = -2,27 \text{ MeV}. \quad (1.2.4)$$

Тому під час розгляду поділу урану зміну п'ятого доданку (енергії парності) $\varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}$ з формули (1.2.3) треба також враховувати.

Тобто, енергія поділу ядра буде залежати від другого, третього та п'ятого членів формули Вайцзеккера (поверхневої $E_U^{nos} = \varepsilon_2 A^{2/3}$ та кулонівської $E_U^{кул} = \frac{\varepsilon_3 Z^2}{A^{1/3}}$ енергій та енергії парності $\varepsilon_5 \frac{\delta}{A^{3/4}}$):

$$Q = E_U^{nos} + E_U^{кул} - E_{Rb}^{nos} - E_{Rb}^{кул} - E_{Cs}^{nos} - E_{Cs}^{кул} - E_{Rb}^{nap}. \quad (1.2.5)$$

Поверхнева енергія:

- 1) урану $E_U^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_U^{2/3} = 17,8 \cdot 235^{2/3} = 677,8 \text{ MeV}$;
- 2) рубідію $E_{Rb}^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_{Rb}^{2/3} = 17,8 \cdot 94^{2/3} = 368 \text{ MeV}$;
- 3) цезію $E_{Cs}^{nos} = \varepsilon_2 \cdot A_{Cs}^{2/3} = 17,8 \cdot 141^{2/3} = 482,2 \text{ MeV}$.

Кулонівська енергія:

- 4) урану $E_U^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_U^2}{A_U^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{92^2}{235^{1/3}} = 976,6 \text{ MeV}$;
- 5) рубідію $E_{Rb}^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_{Rb}^2}{A_{Rb}^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{37^2}{94^{1/3}} = 241,4 \text{ MeV}$;
- 6) цезію $E_{Cs}^{кул} = \varepsilon_3 \cdot \frac{Z_{Cs}^2}{A_{Cs}^{1/3}} = 0,712 \cdot \frac{55^2}{141^{1/3}} = 413,8 \text{ MeV}$.

Отже, з виразу (1.2.5) енергія поділу ядра Q , яка вивільнюється в результаті зміни кулонівської та поверхневої енергій вихідного ядра та уламків, дорівнюватиме $Q = (677,8 + 976,6 - 368 - 241,4 - 482,2 - 413,8 + 2,27) \text{ MeV} = 151,27 \text{ MeV}$

Приклад 3. За допомогою формули Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтронів для парно-парного ізотопу ^{40}Ca .

Розв'язання. Енергія відділення нейтрона від ядра з масовим A та зарядовим Z числами дорівнює енергії зв'язку нейтрона в тому ж ядрі:

$$E_n(Z, A) = (m_n + m_{\alpha}(Z, A-1) - m_{\alpha}(Z, A))c^2. \quad (1.3.1)$$

$$\text{Маса ядра } m_{\alpha}(Z, A) = (Zm_p + (A-Z)m_n) - E_{\alpha}(Z, A)/c^2.$$

Тобто,

$$E_n(Z, A) = (m_n + Zm_p + (A-1-Z)m_n)c^2 - E_{\alpha}(Z, A-1) - (Zm_p + (A-Z)m_n)c^2 + E_{\alpha}(Z, A) = E_{\alpha}(Z, A) - E_{\alpha}(Z, A-1). \quad (1.3.2)$$

Розрахуємо за формулою Вайцзеккера (1.2.3) енергії зв'язку ядер $^{40}_{20}\text{Ca}$ та $^{39}_{20}\text{Ca}$ відповідно, вважаючи, що $Z = 20$ та $A_1 = 40$, $A_2 = 39$:

$$E_{\text{зв}}(20,40) = 15,75 \cdot 40 - 17,8 \cdot 40^{2/3} - 0,712 \cdot 20 \cdot (20-1)/40^{1/3} - \\ - 94,8 \cdot (40/2 - 20)^2 / 40 + 34/40^{3/4} = 344,84 \text{ MeV}, \\ E_{\text{зв}}(20,39) = 15,75 \cdot 39 - 17,8 \cdot 39^{2/3} - 0,712 \cdot 20 \cdot (20-1)/39^{1/3} - \\ - 94,8 \cdot (39/2 - 20)^2 / 39 = 329,15 \text{ MeV}.$$

Їх різниця визначає енергію відділення нейтрона від ядра ${}^{40}_{20}\text{Ca}$:

$$E_n(20,40) = E_{\text{зв}}(20,40) - E_{\text{зв}}(20,39) = 344,8 - 329,2 = 15,7 \text{ MeV}$$

Така аномально велика енергія відриву нейтрона обумовлена тим, що ядро ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ є так званим «двічі магічним» ядром та має велику питому енергію зв'язку (див. питання 1).

Приклад 4. Маса нейтрального атома ${}^{16}\text{O}$ $m_{\text{O}} = 15,9949 \text{ а.о.м.}$ Визначити питому енергію зв'язку ε ядра ${}^{16}\text{O}$.

Розв'язання. Питома енергія зв'язку ядра, тобто енергія зв'язку, яка приходить на один нуклон в ядрі:

$$\varepsilon(Z, A) = \frac{E_{\text{зв}}(Z, A)}{A}. \quad (1.4.1)$$

Ця величина є мірою стабільності ядра та приблизно однакова майже для всіх стабільних ядер: $\varepsilon(Z, A) \approx 8 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}$.

Повна енергія зв'язку ядра:

$$E_{\text{зв}}(Z, A) = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}(Z, A))c^2 = \\ = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{ат}}(Z, A) + Zm_e)c, \quad (1.4.2)$$

де $m_{\text{я}}$ – маса ядра, а $M_{\text{ат}}$ – маса атома.

Взагалі, маса ядра визначається як сума його масового числа A та надлишку маси нукліда. Для ядра з масовим числом A надлишок маси нукліда також називається дефектом маси ядра Δ_A :

$$\Delta_A = m_{\text{я}} - A, \quad (1.4.3)$$

В таблицях зазвичай вказується дефект маси атома δ_A :

$$\delta_A = M_{\text{ат}} - A, \quad (1.4.4)$$

$M_{\text{ат}}$ відрізняється від $m_{\text{я}}$ масою електронної оболонки:

$$m_{\text{я}} = M_{\text{ат}} - Zm_e = \delta_A + A - Zm_e. \quad (1.4.5)$$

Значення дефектів мас ядер можна взяти з довідкових таблиць (див. [8,9]).

Тобто, питома енергія зв'язку ядра:

$$\varepsilon(Z, A) = \frac{(Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{ат}}(Z, A) + Zm_e)c^2}{A}. \quad (1.4.6)$$

Відомо, що енергії спокою протона, нейтрона та електрона складають, відповідно, $m_p c^2 = 938,28 \text{ MeV}$, $m_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$ та $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

Виразимо атомну одиницю маси в енергетичних одиницях:

$$1 \text{ а.о.м.} \cdot c^2 = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = \\ = 14,92 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 931,5 \text{ MeV} \quad (1.4.7)$$

Використаємо ці значення та врахуємо, що для ${}^{16}\text{O}$ $Z = 8$, $A = 16$:

$$\varepsilon(8,16) = (8 \cdot 938,28 \text{ MeV} + (16 - 8) \cdot 939,57 \text{ MeV} - \\ - 15,9949 \cdot 931,5 \text{ MeV} + 8 \cdot 0,511 \text{ MeV}) / 16 = 7,98 \text{ MeV}. \quad (1.4.8)$$

Приклад 5. Вважаючи, що при рівномірному розподілі заряду по об'єму ядра різниця енергій зв'язку дзеркальних ядер визначається тільки різницею енергій кулонівської взаємодії протонів в цих ядрах, обчислити радіуси дзеркальних ядер ${}^{23}_{11}\text{Na}$ та ${}^{23}_{12}\text{Mg}$. $E_{\text{зв}}({}^{23}_{11}\text{Na}) = 186,56 \text{ MeV}$ та $E_{\text{зв}}({}^{23}_{12}\text{Mg}) = 181,72 \text{ MeV}$ – відповідні енергії зв'язку. Порівняти отримані радіуси цих ядер з розрахованими за формулою $R = 1,22 \cdot A^{1/3} \text{ фм}$.

Розв'язання. Дзеркальними називаються два ядра з однаковими масовими числами A , кожне з яких отримується з іншого заміною всіх протонів нейтронами, а всіх нейтронів – протонами. Позначимо заряд ядра ${}^{23}_{11}\text{Na}$ як $Z-1$, а заряд ядра ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ як Z . Тоді різниця енергій зв'язку цих ядер дорівнює

$$\Delta E_{\text{зв}} = E_{\text{зв}}(Z-1, A) - E_{\text{зв}}(Z, A) = 186,56 - 181,72 = 4,84 \text{ MeV}. \quad (1.5.1)$$

Можливою є реакція β^+ -розпаду для нукліду ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ з перетворенням його на дзеркальне ядро ${}^{23}_{11}\text{Na}$: ${}^{23}_{12}\text{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\text{Na} + \beta^+ + \nu$.

Оскільки масове число A однакове для дзеркальних ядер, то для них в формулі Вайцзеккера (1.2.3) перший, другий та п'ятий доданки однакові. Четвертий доданок також співпадає для дзеркальних ядер. Це легко показати. Розглянемо, наприклад, β^+ -перетворення (позитронний розпад). Тоді ядро з зарядовим числом Z після такого розпаду перетвориться в дзеркальне ядро з $Z-1$ протонами. Також згадаємо, що масове число є $A = Z + N$. Значить, для ядра з Z протонами та $Z-1$ нейтронами енергія симетрії дорівнюватиме

$$E_{\text{сим1}} = \epsilon_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} = \frac{\epsilon_4}{A} \left(\frac{Z + Z - 1}{2} - Z \right)^2 = -\frac{\epsilon_4}{4A}, \quad (1.5.2)$$

а для дзеркального йому ядра з $Z-1$ протонами та Z нейтронами отримується, відповідно, те саме:

$$E_{\text{сим2}} = -\frac{\epsilon_4}{4A}. \quad (1.5.3)$$

Тобто для дзеркальних ядер енергія зв'язку буде відрізнятися лише третім доданком в (1.2.3) (енергією кулонівської взаємодії $\epsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$).

Кулонівська енергія рівномірно зарядженого сферичного ядра з радіусом R визначається співвідношенням [1]

$$E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{R}. \quad (1.5.4)$$

Знайдемо різницю кулонівської енергії для дзеркальних ядер:

$$\Delta E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{R} - \frac{3}{5} \cdot \frac{((Z-1)e)^2}{R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} (Z^2 - Z^2 + 2Z - 1) = \frac{3e^2(2Z-1)}{5R}.$$

Отже, для радіуса ядра вираз буде наступним:

$$R = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2Z-1)e^2}{\Delta E_{\text{зв}}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2 \cdot 12 - 1) \cdot (4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ})^2}{4,84 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}} = 4,1 \cdot 10^{-13} \text{ см} = 4,1 \text{ фм}.$$

Розрахований радіус є “електричним” радіусом ядра, тобто дає інформацію про розподіл електричного заряду всередині ядра.

Для цих нуклідів проведемо також розрахунок за емпіричною формулою, яка дає значення радіуса ядра за методом розсіяння швидких електронів на атомних ядрах:

$$R = 1,22 \cdot A^{1/3} \text{ фм} = 1,22 \cdot 23^{1/3} = 3,5 \text{ фм}.$$

Приклад 6. Визначити за допомогою формули Вайцеккера найбільш стабільний по відношенню до β – розпаду елемент з масовим числом $A = 40$.

Розв’язання. Очевидно, що найстабільніші ізобари повинні мати мінімальну масу при заданій кількості нуклонів. Тому знайдемо зарядове число Z , при якому енергія зв’язку ядра буде максимальною. Для цього дослідимо на екстремум функцію (1.2.3):

$$\left. \frac{\partial E_{\text{зв}}(Z, A)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const}} = -\frac{\epsilon_3}{A^{1/3}} \cdot 2Z - \frac{\epsilon_4}{A} \cdot 2 \left(\frac{A}{2} - Z \right) \cdot (-1) = 0. \quad (1.6.1)$$

Звідси отримаємо рівняння так званої «доріжки стабільності» ядер (див. Рис. 1.1):

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{A}{2 + 2 \frac{\epsilon_3}{\epsilon_4} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 2 \frac{0,712}{94,8} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (1.6.2)$$

Всі ядра, що знаходяться вище кривої (1.6.2), мають надлишкову кількість протонів, тому є β^+ – радіоактивними (надлишкові протони в ядрі перетворюються на нейтрони згідно реакції ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + \beta^+ + \nu$). Аналогічним чином, ядра, що мають меншу за оптимальну кількість протонів (знаходяться нижче «доріжки стабільності»), позбавляються від надлишкових нейтронів шляхом β^- – розпаду згідно реакції ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + \beta^- + \bar{\nu}$. П’ятий доданок в формулі Вайцеккера (1.2.3), який пов’язаний з парністю нуклонів у ядрі, ми враховуємо непрямым чином за допомогою (1.6.2).

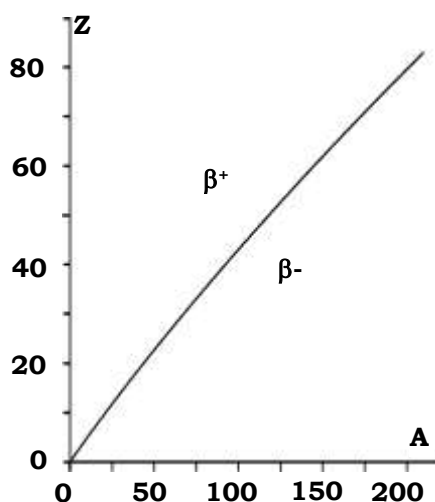


Рис.1.1. Залежність зарядового числа Z від масового числа A для стабільних по відношенню до β – розпаду ядер («Доріжка стабільності»).

Конкретне значення масового числа $A = 40$ дає стабільний ізобар з зарядовим числом

$$Z = \left[\frac{40}{2 + 0,015 \cdot 40^{2/3}} \right] = [18,4] = 18. \quad (1.6.3)$$

Це парно-парне ядро аргона ${}_{18}^{40}\text{Ar}$. Дійсно, цей ізотоп аргону є стабільним по відношенню до β^+ - та β^- – розпадів. Його масовий вміст в природній суміші ізотопів дорівнює 99,6%.

Приклад 7. Одне зі складових повної енергії зв'язку ядра в формулі Вайцзеккера має вигляд $E_{\text{сим}} = \frac{\varepsilon_{\text{сим}}(Z - N)^2}{A}$, де $\varepsilon_{\text{сим}}$ – нормуюча константа. Середня енергія відриву одного нейтрона від ядра близька до значення $E_1 = 8 \text{ MeV}$. Згідно до однієї з основних квантово-механічних моделей, ядро є сферою, в межах якої $N = A - Z$ нейтронів та Z протонів вільно рухаються, утворюючи два взаємно незалежні нерелятивістські вироджені фермі-гази нуклонів. Виходячи з цієї моделі, визначити:

- 1) енергію Фермі газу протонів E_{Fp} та нейтронів E_{Fn} ;
- 2) глибину потенціальної ями для нейтронів в ядрі E_n ;
- 3) середню кінетичну енергію, яка приходить на один протон та
- 4) нейтрон $\langle E(Z) \rangle$ та $\langle E(N) \rangle$;
- 5) повну кінетичну енергію протонів та нейтронів у ядрі $E(Z, N)$;
- 6) показати, що при заданому значенні масового числа A величина $E(Z, N)$ має мінімум при оптимальному значенні $Z_{\text{opt}} = A/2$;
- 7) знайти залежність $E(Z, N)$ від малої різниці $Z - N$, в цьому наближенні знайти коефіцієнт $C_{\text{сим}}$.

Розв'язання. Напівемпірична формула Вайцзеккера для енергії зв'язку ґрунтується на моделі ядра у вигляді рідкої краплі. Це дуже спрощена модель, оскільки ядро має багато властивостей, які можна пояснити, базуючись лише на моделі незалежного руху нуклонів у ньому. Одна з найбільш простих моделей (модель незалежних нуклонів) представляє ядро у вигляді виродженого фермі-газу з нуклонів. Припустимо, що нуклони в ядрі рухаються абсолютно вільно всередині кулі радіусом $R = R_0 A^{1/3} = 1,22 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} (\text{см})$ та підкоряються тільки принципу заборони Паулі.

Такий підхід проілюстровано на Рис. 1.2, на якому зображені дві потенціальні ями: одна для нейтронів, а друга – для протонів.

Дно протонної ями знаходиться вище за дно нейтронної ями на величину повної кулонівської енергії відштовхування протонів E_c . Крім того, протонна яма повинна мати кулонівський бар'єр, який оточує її, оскільки протони, які намагаються проникнути всередину ядра ззовні, відштовхуються електричним зарядом ядра; також протони, які знаходяться всередині ядра, мають подолати цей бар'єр для того, щоб вийти назовні. Тому протони або змушені тунелювати крізь бар'єр, або повинні мати енергію, що більша за висоту кулонівського бар'єра [3].

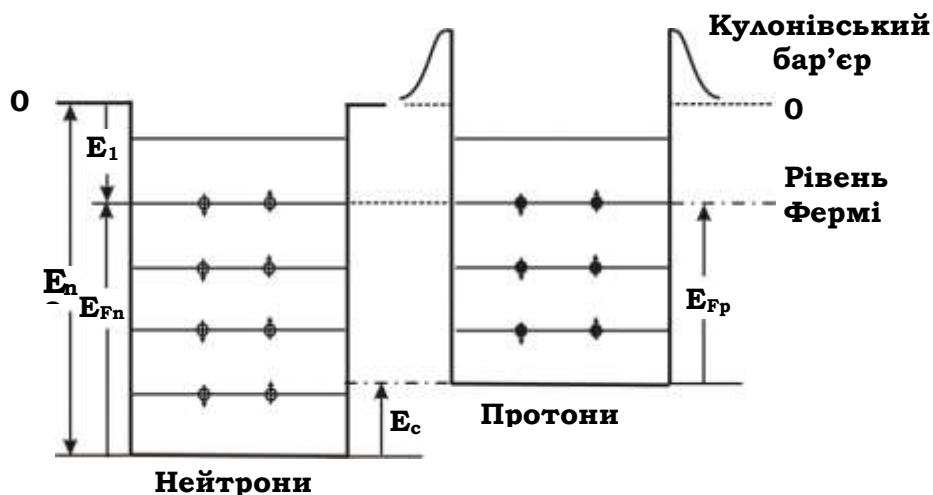


Рис.1.2. Потенціальні ями для нейтронів та протонів в ядрі.

- 1) Надалі наведемо розрахунки тільки для нейтронів. Для протонів результати відрізнятимуться наступними параметрами: а) кількістю частинок, тобто N для

нейтронів треба замінити на Z для протонів; б) масою нуклонів; в) дно протонної ями піднімається на величину E_c .

Можлива кількість станів для нейтронів виражається через фазовий об'єм Γ наступним чином:

$$N = \frac{2\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.7.1)$$

де N – загальна кількість нейтронів у ядрі.

В формулі (1.7.1) використано квазікласичне наближення: якою б не була фазова траєкторія, в одновимірному випадку на один ступінь вільності буде приходитися площа $2\pi\hbar$. Двійка в чисельнику цієї формули з'являється внаслідок виродження станів нуклонів відносно орієнтації спіну (зміна спінової орієнтації відповідає новому стану) – врахування принципу Паулі для ферміонів.

Фазовий об'єм у тривимірному просторі узагальнених координат q_x, q_y, q_z та імпульсів p_x, p_y, p_z складає:

$$\Gamma = \iiint d^3p \iiint d^3q. \quad (1.7.2)$$

В моделі сферичного ядра зручно перейти до сферичної системи координат. Тоді вираз (1.7.2) переписеться наступним чином:

$$\Gamma = V \int d\Omega \int p^2 dp, \quad (1.7.3)$$

де Ω – тілесний кут, а p^2 – якобіан переходу від декартової до сферичної системи координат.

Оскільки повний тілесний кут дорівнює $\int d\Omega = 4\pi$, то фазовий об'єм в сферичних координатах запишеться як

$$\Gamma = 4\pi V \int p^2 dp. \quad (1.7.4)$$

При абсолютному нулі температури протони та нейтрони, як і будь-які частинки, що підкоряються статистиці Фермі-Дірака, будуть послідовно заповнювати найнижчі можливі рівні енергії, тобто фермі-газ є виродженим. Максимально можливою енергією нуклонів є енергія Фермі E_F , якій відповідає імпульс Фермі p_F .

Модель передбачає, що нуклони в ядрі розглядаються як нерелятивістські частинки. Дійсно, протони та нейтрони, які вилітають з ядра, мають швидкості в 10–12 разів менші за швидкість світла, тому таку модель можна використати для спрощення розрахунків. Зв'язок між імпульсом та енергією в цьому випадку виражається наступним чином:

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.7.5)$$

Розглянемо окремо нейтронний фермі-газ.

З урахуванням (1.7.5), число можливих станів одного нейтрона в тривимірному випадку складає за формулою (1.7.1):

$$N = \frac{V \int_0^{p_{Fn}} p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{V p_{Fn}^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{V (2m_n E_{Fn})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (1.7.6)$$

де m_n – маса спокою нейтрона.

За допомогою формули (1.7.6) концентрація нейтронів у ядрі визначатиметься наступним чином:

$$n_n = \frac{N}{V} = \frac{(2m_n E_{Fn})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (1.7.7)$$

З формули (1.7.7) виразимо енергію Фермі нейтронів:

$$E_{Fn} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_n} n_n^{2/3}. \quad (1.7.8 \text{ a})$$

Для протонів формула для енергії Фермі буде відрізнятися лише масою та концентрацією частинок:

$$E_{Fp} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_p} n_p^{2/3}. \quad (1.7.8 \text{ б})$$

Можна оцінити величину енергії Фермі для протонів і для нейтронів, взявши для ферміонів типову концентрацію ядерної матерії $n_n \approx n_p \approx n \approx 10^{38} \text{ см}^{-3}$; маси нуклонів вважатимемо приблизно однаковими ($m_n \approx m_p \approx m \approx 2 \cdot 10^{-24} \text{ г}$):

$$E_{Fn} = E_{Fp} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m} n^{2/3} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} (10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-24} \text{ г}} (10^{38} \text{ см}^{-3})^{2/3} =$$

$$= 5,15 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 32,2 \text{ МеВ}. \quad (1.7.9)$$

Видно, що енергія Фермі нуклонів залежить тільки від їх концентрації в ядрі.

2) Для знаходження глибини потенціальної ями для нейтронів в ядрі E_n треба знову звернутися до Рис. 1.2. Є очевидним, що сума середньої енергії відриву одного нейтрона з ядра E_1 та енергії Фермі нейтронів E_{Fn} задають глибину потенціальної ями для нейтронів:

$$E_n = E_1 + E_{Fn} = (8 + 32,2) \text{ МеВ} = 40,2 \text{ МеВ}. \quad (1.7.10)$$

3) Середню кінетичну енергію, яка припадає на один протон та нейтрон $\langle E(Z) \rangle$ та $\langle E(N) \rangle$, можна обрахувати за правилом знаходження середніх величин. Для цього треба ввести поняття густини станів для протонів $\rho_p(E)$ та нейтронів $\rho_n(E)$.

Густина станів для нейтронів показує, наскільки щільно заповнені частинками енергетичні рівні в системі. Густина станів складатиме:

$$\rho_n(E) = \frac{dN}{dE}. \quad (1.7.11)$$

Скористаємося нормуванням частинок на їх максимальну кількість. Для протонів та нейтронів відповідно:

$$Z = \int_0^{E_{Fp}} \rho_p(E) dE \text{ та } N = \int_0^{E_{Fn}} \rho_n(E) dE. \quad (1.7.12)$$

Розрахуємо тепер N – число нейтронів, які заповнюють всі можливі стани з енергією від нуля до енергії Фермі (повна кількість нейтронів у ядрі). З формули (1.7.6) в межах від нульової до певної енергії E кількість нейтронів N' складатиме:

$$N' = \frac{V(2m_n E)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (1.7.13)$$

Відповідно, густину станів для нейтронів отримаємо, диференціюючи формулу (1.7.13) по енергії:

$$\rho_n(E) = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3} m_n^{3/2} E^{1/2}. \quad (1.7.14)$$

Згідно визначенню, середня кінетична енергія $\langle E(N) \rangle$, яка припадає на один нейтрон, запишеться наступним чином:

$$\langle E(N) \rangle = \frac{\int_0^{E_{Fn}} E \cdot \rho_n(E) dE}{\int_0^{E_{Fn}} \rho_n(E) dE} = \frac{1}{N} \int_0^{E_{Fn}} E \cdot \rho_n(E) dE = \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \int_0^{E_{Fn}} E^{3/2} dE =$$

$$= \frac{\sqrt{2}V}{\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \frac{2}{5} E_{Fn}^{5/2} = \frac{2^{3/2} V}{5\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} E_{Fn}^{5/2}. \quad (1.7.15)$$

Оскільки вираз для енергії Фермі нам вже відомий зі співвідношення (1.7.8 а,б), остаточно середня кінетична енергія нейтронів $\langle E(N) \rangle$ дорівнюватиме:

$$\langle E(N) \rangle = \frac{2^{3/2} V}{5\pi^2 \hbar^3 N} m_n^{3/2} \frac{(3\pi^2)^{5/3}}{(2m_n)^{5/2}} \hbar^5 \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m_n} n_n^{2/3}. \quad (1.7.16)$$

Врахувавши, що ми працюємо з моделлю ядра у вигляді сфери, тобто об'єм ядра становить $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A$, альтернативно формулу (1.7.16) можна записати наступним чином:

$$\langle E(N) \rangle = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{10m_n} \cdot \frac{N^{2/3}}{\left(\frac{4}{3} \pi R_0^3 A \right)^{2/3}} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2} \cdot \left(\frac{N}{A} \right)^{2/3}. \quad (1.7.17)$$

Аналогічно, середня кінетична енергія, що припадає на один протон, становитиме:

$$\langle E(Z) \rangle = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_p R_0^2} \cdot \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3}. \quad (1.7.18)$$

4) Повну кінетичну енергію протонів та нейтронів у ядрі $E(Z, N)$ знайдемо як суму кінетичної енергії всіх протонів та кінетичної енергії всіх нейтронів за умови приблизної рівності мас протона та нейтрона:

$$E(Z, N) = N \langle E(N) \rangle + Z \langle E(Z) \rangle = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2 A^{2/3}} \left(N^{5/3} + Z^{5/3} \right). \quad (1.7.19)$$

5) Можна показати, що при заданому значенні масового числа A величина $E(Z, N)$ має мінімум при оптимальному значенні $Z_{opt} = A/2$, знайшовши екстремум повної енергії протонів та нейтронів у ядрі по зарядовому числу Z . Врахуємо, що загальна кількість нейтронів у ядрі становить $N = A - Z$. З формули (1.7.19) отримаємо:

$$\frac{dE(Z, N)}{dZ} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5m_n R_0^2 A^{2/3}} \frac{d}{dZ} \left((A - Z)^{5/3} + Z^{5/3} \right) = 0, \quad (1.7.20)$$

звідси

$$-\frac{5}{3} (A - Z)^{2/3} + \frac{5}{3} Z^{2/3} = 0, \Rightarrow Z_{opt} = A/2.$$

Що і треба було довести в цьому пункті задачі.

б) А тепер знайдемо залежність повної енергії протонів та нейтронів у ядрі $E(Z, N)$ від малої різниці $\Delta = Z - N$. Щоб дослідити поведінку цієї енергії в околі мінімуму, при фіксованому масовому числі A покладемо наступний малий параметр: $\frac{Z - N}{A} = \frac{\Delta}{A} \ll 1$.

Тобто отримаємо просту систему рівнянь, врахувавши, що $N = A - Z$:

$$\begin{cases} Z = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{A} \right), \\ N = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{A} \right). \end{cases} \quad (1.7.21)$$

Підставимо величини Z та N у такому вигляді до виразу для повної енергії нуклонів (1.7.19):

$$E(Z, N) = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2 A}{2^{5/3} \cdot 5m_n R_0^2} \left[\left(1 - \frac{\Delta}{A} \right)^{5/3} + \left(1 + \frac{\Delta}{A} \right)^{5/3} \right]. \quad (1.7.22)$$

Тут зручно скористатися формулою розкладання виразу в ряд за малим параметром (біноміальний розклад):

$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \pm \dots$, де для нашого випадку ступінь складатиме $n = \frac{5}{3}$, а сама змінна є $x = \frac{\Delta}{A}$.

Після розкладу виразу (1.7.22) в ряд до квадратичного доданку отримаємо:

$$E(Z, N) = \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2 A}{80 m_n R_0^2} \left[1 - \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta}{A} + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A^2} + 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{\Delta}{A} + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A^2} + \dots \right] =$$

$$= \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{40 m_n R_0^2} \left(A + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A} + \dots \right). \quad (1.7.23)$$

Тепер підставимо значення параметра $\varepsilon = Z - N$ у (1.7.23):

$$E(Z, N) = \frac{3^{7/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{40 m_n R_0^2} \left(A + \frac{5}{9} \cdot \frac{(Z - N)^2}{A} + \dots \right). \quad (1.7.24)$$

Перший (основний) доданок в цій формулі пропорційний до масового числа A та відображає вклад об'ємної енергії. Другий доданок має вигляд енергії симетрії.

Константу, яка входить до енергії $E(Z, N)$ перед виразом $\frac{(Z - N)^2}{A}$, можна визначити. Це й буде коефіцієнт $C_{\text{сим}}$ при енергії симетрії:

$$C_{\text{сим}} = \frac{3^{1/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{8 m_n R_0^2} = \frac{3^{1/3} \pi^{4/3} (10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с})^2}{8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ з} \cdot (1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см})^2} =$$

$$= 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 20,8 \text{ МеВ}.$$

Зв'язок між коефіцієнтом $C_{\text{сим}}$ та коефіцієнтом ε_4 , що входить до формули Вейцеккера, є таким: $\varepsilon_4 = 4C_{\text{сим}}$. Підставляючи отримане значення $C_{\text{сим}}$ з (1.7.25), знайдемо $\varepsilon_{4\text{теор}} = 83,2 \text{ МеВ}$. Нагадаємо, що емпіричне значення для цього коефіцієнту $\varepsilon_4 = 94,8 \text{ МеВ}$. Таким чином, коефіцієнт $C_{\text{сим}}$, який ми оцінили, виходячи з представленої моделі, відрізняється від його емпіричного значення. Це пов'язано з тим, що нами не було враховано магнітну взаємодію між протонами та нейтронами, тоді як середня взаємодія окремо між протонами та окремо між нейтронами менша, ніж середня взаємодія між нейтронами та протонами через дію принципу заборони Паулі. Принцип Паулі послаблює взаємодію між однаковими частинками, оскільки забороняє визначені двохчастинкові стани. Взаємодія ж між нейтроном та протоном не підкоряється такому обмеженню.

2. ПРИРОДНА РАДІОАКТИВНІСТЬ ТА ЗАКОНИ СПОНТАННОГО РОЗПАДУ

2.2. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. До крові людини увели невелику кількість розчину, який містить ^{24}Na з активністю $A_0 = 2,1 \cdot 10^3$ Бк. Активність 1 см^3 крові, взятої через $t = 5$ год після цього, складала $a = 0,28$ Бк/см 3 . Знайти об'єм крові людини.

Розв'язання. Активність препарату за визначенням є швидкість зміни кількості радіоактивних ядер, що дорівнює:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (2.1.1)$$

де N – кількість радіоактивних ядер в довільний момент часу, λ – стала розпаду, а знак «-» вказує на зменшення кількості ядер з часом. Початкова кількість ядер ізотопу ^{24}Na визначається як $N_0 = \frac{A_0}{\lambda}$. Закон зміни кількості радіоактивних ядер з часом внаслідок їх спонтанного розпаду має вигляд:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.1.2)$$

Таким чином, через час t активність препарату дорівнюватиме:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.1.3)$$

Активність одиниці об'єму речовини, з урахуванням (2.1.3),

$$a = \frac{A}{V} = \frac{A_0}{V} e^{-\lambda t}. \quad (2.1.4)$$

З (2.1.4) виражаємо об'єм:

$$V = \frac{A_0}{a} e^{-\lambda t} = \frac{A_0}{a} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right), \quad (2.1.5)$$

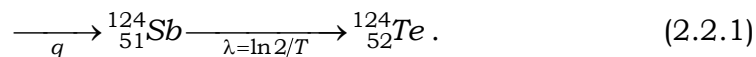
де враховано зв'язок між сталою розпаду λ та періодом піврозпаду T : $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.

Підставляючи у (2.1.5) параметри задачі, та врахувавши, що період піврозпаду ^{24}Na становить 15 год., знаходимо об'єм крові людини:

$$V = \frac{2,1 \cdot 10^3}{0,28} \exp\left(-\frac{\ln 2}{1,5} \cdot 5\right) = 6,08 \cdot 10^3 \text{ см}^3 \approx 6 \text{ л}.$$

Приклад 2. Радіонуклід $^{124}_{51}\text{Sb}$ утворюється зі сталою швидкістю $q = 1,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Шляхом β^- -розпаду з періодом піврозпаду $T = 60$ діб він перетворюється на стабільний нуклід $^{124}_{52}\text{Te}$. Знайти проміжок часу після початку утворення, коли активність нукліда $^{124}_{51}\text{Sb}$ становитиме $A = 3,7 \cdot 10^5$ Бк. Визначити, яка маса нукліду $^{124}_{52}\text{Te}$ накопичиться в препараті за час $t = 120$ діб після початку його утворення.

Розв'язання. Ланцюжок утворення та розпаду ізотопу $^{124}_{51}\text{Sb}$ має вигляд:



Позначимо: N_1 та N_2 – кількості ядер ізотопів $^{124}_{51}\text{Sb}$ та $^{124}_{52}\text{Te}$ відповідно, λ – стала розпаду ізотопу $^{124}_{51}\text{Sb}$. Закони зміни кількості ядер з часом будуть описуватись такими рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = q - \lambda N_1, \quad (2.2.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda N_1. \quad (2.2.3)$$

Перший доданок в (2.2.2) враховує утворення ядер $^{124}_{51}\text{Sb}$ з постійною швидкістю q , другий – зменшення кількості за рахунок розпаду. Аналогічно, рівняння (2.2.3)

описує зростання кількості ядер $^{124}_{52}\text{Te}$ за рахунок розпаду ядер $^{124}_{51}\text{Sb}$. Розв'язок рівняння (2.2.2) будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = C_1 + C_2 e^{-\lambda t}, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -C_2 \lambda e^{-\lambda t}, \quad (2.2.5)$$

де C_1 та C_2 – константи, що визначаються з початкових умов. Вважатимемо, що в початковий момент часу кількість ядер ізоотопу $^{124}_{51}\text{Sb}$ $N_{10} = 0$. Підставивши (2.2.4) та (2.2.5) у рівняння (2.2.2), отримаємо рівняння:

$$-C_2 \lambda \cdot e^{-\lambda t} = q - \lambda C_1 - \lambda C_2 \cdot e^{-\lambda t}.$$

З останнього виразу знаходимо константу $C_1 = q/\lambda$. Для знаходження іншої константи скористаємось початковими умовами:

$$N_{10} = 0 = \frac{q}{\lambda} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{q}{\lambda}.$$

Таким чином, закон накопичення ядер $^{124}_{51}\text{Sb}$ остаточно набуде вигляду:

$$N_1 = \frac{q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.6)$$

Знайдемо тепер закон накопичення ядер стабільного ізоотопу $^{124}_{52}\text{Te}$. Підставивши (2.2.6) у (2.2.3), отримаємо:

$$\frac{dN_2}{dt} = q(1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.7)$$

Інтегруючи рівняння (2.2.7) по часу в межах від нуля до поточного моменту часу t , отримаємо вираз для N_2 :

$$N_2 = qt + \frac{q}{\lambda} e^{-\lambda t} + C. \quad (2.2.8)$$

Константу C знаходимо з урахуванням початкових умов, а саме: в початковий момент часу $N_{20} = 0$. Отже,

$$N_{20} = 0 = \frac{q}{\lambda} + C \Rightarrow C = -\frac{q}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Підставляючи (2.9) у (2.8), остаточно знаходимо закон зміни кількості ядер нукліду $^{124}_{52}\text{Te}$ з часом:

$$N_2 = qt + \frac{q}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) = \frac{q}{\lambda} (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1). \quad (2.2.10)$$

Активність нукліда $^{124}_{51}\text{Sb}$ через проміжок часу t складатиме:

$$A = \lambda N_1 = q(1 - e^{-\lambda t}). \quad (2.2.11)$$

З (2.2.11) виражаємо час:

$$e^{\lambda t} = \frac{q}{q - A} \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{A}{q} \right) = -\frac{T}{\ln 2} \ln \left(1 - \frac{A}{q} \right). \quad (2.2.12)$$

Підставляючи у (2.2.12) числові дані, знайдемо проміжок часу після початку утворення нукліду $^{124}_{51}\text{Sb}$, коли активність становитиме $A = 3,7 \cdot 10^8$ Бк:

$$t = -\frac{60}{\ln 2} \ln \left(1 - \frac{3,7 \cdot 10^8}{10^9} \right) = 40 \text{ діб}.$$

Масу нукліду $^{124}_{52}\text{Te}$ знайдемо з допомогою закону (2.2.10):

$$\Delta m = m_0 \frac{qT}{\ln 2} (e^{-\lambda t} + \lambda t - 1), \quad (2.2.13)$$

де $m_0 \approx 124$ а.о.м. – маса ядра $^{124}_{52}\text{Te}$. Підставивши числові дані, отримаємо з (2.2.13)

$$\Delta t = 124 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \frac{5,184 \cdot 10^{15}}{\ln 2} \left(\exp \left(-\frac{\ln 2}{60} \cdot 120 \right) + 2 \ln 2 - 1 \right) = 9,8 \cdot 10^{-7} \text{ з.}$$

Приклад 3. Під час радіоактивного розпаду ядер нукліда A_1 утворюється радіонуклід A_2 . Їх сталі розпаду дорівнюють λ_1 та λ_2 відповідно, причому $\lambda_1 < \lambda_2$. Вважаючи, що в початковий момент часу препарат містить лише ядра нукліда A_1 у кількості N_{10} , визначити:

- 1) кількість ядер нукліда A_2 в момент часу t ;
- 2) момент часу t_m , коли кількість ядер нукліда A_2 виявиться максимальною;
- 3) в якому випадку може виникнути стан перехідної рівноваги, при якому відношення кількостей обох нуклідів буде залишатись сталим? Чому дорівнюватиме це відношення?

Розв'язання. Позначимо через N_1 та N_2 кількість материнських (A_1) та дочірніх (A_2) ядер, відповідно. Закони зміни кількості ядер будуть описуватись такими рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (2.3.2)$$

Перше рівняння показує, що кількість материнських ядер A_1 може тільки зменшуватись за рахунок розпаду. При цьому з кожного материнського ядра виникає одне дочірнє ядро (перший доданок у правій частині рівняння (2.3.2)). Другий доданок у (2.3.2) враховує зменшення кількості дочірніх ядер за рахунок радіоактивного розпаду зі сталою λ_2 . Розв'язання рівняння (2.3.1) має вигляд:

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad (2.3.3)$$

де N_{10} – початкова кількість материнських ядер. Врахувавши (2.3.3), (2.3.2) перепишемо наступним чином:

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.3.4)$$

Частинний розв'язок цього лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$N_2 = N_{10} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.5)$$

Для того, щоб отримати загальний розв'язок, до (2.3.5) необхідно додати загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає (2.3.4), тобто $N_2(0) e^{-\lambda_2 t}$. Таким чином, загальний розв'язок буде наступним:

$$N_2 = N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + N_{10} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.6)$$

Підставляючи (2.3.6) у (2.3.4) та врахувавши, що

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2(0) e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_{10} C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

отримаємо таке рівняння:

$$-\lambda_1 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}.$$

Звідси знаходимо константу C_1 :

$$-\lambda_1 N_{10} C_1 + \lambda_2 N_{10} C_1 = \lambda_1 N_{10} \Rightarrow C_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.3.7)$$

Для знаходження константи C_2 необхідно використати початкові умови: в момент часу $t = 0$ кількість дочірніх ядер $N_2(0) = N_{20}$. У такому випадку з (2.3.6), з урахуванням (2.3.7), знаходимо

$$N_2(0) = N_{20} + N_{10} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + C_2 \right) \Rightarrow C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.3.8)$$

Остаточно, закон зміни кількості дочірніх ядер A_2 запишеться так:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \left(N_{20} - \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.3.9)$$

У випадку, якщо початкова кількість дочірніх ядер $N_{20} = 0$, вираз (2.3.9) спрощується:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.10)$$

Для знаходження моменту часу, при якому кількість дочірніх ядер буде максимальною, дослідимо функцію (2.3.10) на екстремум:

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m}) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_m} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow t_m = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.3.11)$$

Оскільки, згідно умови, $\lambda_2 > \lambda_1$, то через проміжок часу достатньо великий порівняно з середньою тривалістю життя материнської речовини, буде виконуватись співвідношення $\exp(-\lambda_1 t) \gg \exp(-\lambda_2 t)$, тому в формулі (2.3.10) другим доданком можна буде знехтувати, так що

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}. \quad (2.3.12)$$

Це означатиме, що кількість ядер обох речовин буде зменшуватись зі швидкістю розпаду материнських ядер, а їх відношення залишатиметься незмінним:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (2.3.13)$$

Такий стан називають перехідною рівновагою.

Важливим є випадок, коли материнське ядро має великий час життя, а дочірнє, порівняно з ним, розпадається швидко, тобто виконується співвідношення $\lambda_1 \ll \lambda_2$. При цьому час спостереження є набагато меншим за час життя материнських ядер, тобто $\lambda_1 t \ll 1$ (це співвідношення виконується при розрахунку розпаду важких α -радіоактивних ядер, наприклад, урану). В такому разі протягом часу спостереження можна знехтувати зміною кількості материнських ядер, вважаючи, що $N_1 = \text{const}$ і з (2.3.10) отримати:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.3.14)$$

оскільки величиною λ_1 в знаменнику можна знехтувати. При $t \rightarrow \infty$ кількість дочірніх атомів асимптотично наближується до насичення:

$$N_2(\infty) = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2}, \quad (2.3.15)$$

і в стані насичення виконуватиметься умова:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2. \quad (2.3.16)$$

Рівність (2.3.16) називається умовою радіоактивної рівноваги, фізичний зміст якої полягає в тому, що розпад дочірніх ядер в будь-який момент часу компенсується збільшенням їх кількості за рахунок розпаду материнської речовини. Як приклад, можна навести рівновагу між радоном ($T_1 = 1620$ років) та радієм ($T_2 = 3,8$ діб). Через 2 місяці між радоном та радієм встановлюється рівновага.

Кількість радію, що перетвориться протягом цього часу, складатиме лише $7 \cdot 10^{-5}$ від його початкової кількості. У такому випадку рівновага називається віковою.

Приклад 4. При β – розпаді ^{112}Pd виникає β – активний нуклід ^{112}Ag . Їх періоди піврозпаду дорівнюють $T_1 = 21$ год та $T_2 = 3,2$ год, відповідно. Знайти відношення максимальної активності нукліда ^{112}Ag до початкової активності препарату, якщо в початковий момент часу він містив лише нуклід ^{112}Pd .

Розв’язання. Скористаємось розв’язком попереднього прикладу. Закон накопичення дочірніх ядер ^{112}Ag має вигляд:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.4.1)$$

Зміна активності дочірнього нукліда з часом запишеться так:

$$A = \lambda_2 N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.4.2)$$

Для знаходження максимальної активності ^{112}Ag необхідно дослідити функцію (2.4.2) на екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0 \Rightarrow \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_m} &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_m} \Rightarrow t_m = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Підставивши значення t_m у (2.4.2), отримаємо максимальну активність нукліда ^{112}Ag :

$$A_{\max} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_m} - e^{-\lambda_2 t_m}),$$

врахувавши, що $A_0 = \lambda_1 N_{10}$, знайдемо відношення A_{\max} до початкової активності препарату:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t_m} - e^{-\lambda_2 t_m}). \quad (2.4.4)$$

Приймаючи до уваги, що $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, з (2.4.3) та (2.4.4) остаточно знаходимо:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(2^{-\frac{t_m}{T_1}} - 2^{-\frac{t_m}{T_2}} \right), \quad (2.4.5)$$

$$t_m = \frac{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\ln 2} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}. \quad (2.4.6)$$

Підставимо у (2.4.5) та (2.4.6) параметри прикладу і одержимо:

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{\ln\left(\frac{21}{3,2}\right)}{\ln 2} \frac{21 \cdot 3,2}{17,8} = 10,25 \text{ год.} \\ \frac{A_{\max}}{A_0} &= \frac{21}{17,8} \left(2^{-\frac{10,25}{21}} - 2^{-\frac{10,25}{3,2}} \right) = 0,713. \end{aligned}$$

Приклад 5. На даний момент часу в природному урані міститься 99,28% ^{238}U та 0,72% ^{235}U . Яким було співвідношення між ^{238}U та ^{235}U на момент утворення Землі, якщо вік Землі складає $4 \cdot 10^9$ років? Періоди піврозпаду ^{238}U та ^{235}U дорівнюють, відповідно, $T_1 = 4,51 \cdot 10^9$ років та $T_2 = 0,713 \cdot 10^9$ років.

Розв'язання. Позначимо: N_1 та N_2 – кількості ядер ізотопів ^{238}U та ^{235}U , відповідно, $k_1 = 0,9928$ та $k_2 = 0,0072$ – вміст в урановій руді ізотопів ^{238}U та ^{235}U на даний момент часу. Будемо вважати, що в даний момент в урановій руді містяться лише ізотопи ^{238}U та ^{235}U . Тоді

$$k_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, k_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \quad (2.5.1)$$

Знайдемо закон зміни з часом коефіцієнтів k_1 та k_2 . Використовуючи закон радіоактивного розпаду, для кількостей ядер запишемо:

$$N_1 = N_{10} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_1} t\right), \quad (2.5.2)$$

$$N_2 = N_{20} \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_2} t\right). \quad (2.5.3)$$

де N_{10} та N_{20} – кількості ізотопів ^{238}U та ^{235}U в початковий момент часу. Розділимо (2.5.2) на (2.5.3):

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{N_{10}}{N_{20}} \exp\left\{-t \ln 2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\}. \quad (2.5.4)$$

Припустимо, що на момент утворення Землі не існувало інших ізотопів урану, крім тих, про які йдеться в прикладі (звичайно, це припущення не зовсім вірне, оскільки в невеликій кількості існували й інші ізотопи, наприклад, ^{234}U , період піврозпаду якого є значно меншим за вік Землі). В такому разі для коефіцієнтів k_{10} та k_{20} , що характеризують початковий вміст ізотопів урану, отримаємо два рівняння:

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_{10}}{k_{20}} \exp\left\{-t \ln 2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\} \\ k_{10} + k_{20} = 1 \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Розв'язуючи систему (2.5.5), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} \exp\left\{t \ln 2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\} &= \frac{k_{10}}{1 - k_{10}} \Rightarrow \\ k_{10} &= \frac{1}{1 + \frac{k_1}{k_2} \exp\left\{t \ln 2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\}}, k_{20} = 1 - k_{10}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Підставляючи числові значення у (2.5.6), знаходимо початковий вміст ізотопу ^{238}U :

$$k_{10} = \frac{1}{1 + \frac{0,0072}{0,9928} \exp\left\{\ln 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{0,713} - \frac{1}{4,51}\right)\right\}} = 0,876$$

та ізотопу ^{235}U : $k_{20} = 0,124$. Таким чином, $4 \cdot 10^9$ років тому кількість ^{235}U складала 12,4%, а ^{238}U – 87,6%.

Приклад 6. Радіонуклід ^{99}Mo з періодом піврозпаду 67 год. в результаті β – розпаду перетворюється в стабільний нуклід ^{99}Tc . При цьому 75% β – перетворювань відбуваються через ізомерний стан $^{99}\text{Tc}^m$, період піврозпаду якого становить 6,04 год. Визначити відносну кількість стабільних ядер в препараті через 5,00 год., покладаючи, що в початковий момент часу препарат містив тільки радіонуклід ^{99}Mo .

Розв’язання. Покладаємо, що в початковий момент часу препарат містив лише ядра ^{99}Mo у кількості N_{10} . Позначимо $\eta=0,75$ – частина ядер ^{99}Mo , що перетворюються по каналу 1: $^{99}\text{Mo} \xrightarrow{\lambda_1} ^{99}\text{Tc}^m \xrightarrow{\lambda_2} ^{99}\text{Tc}$; $1-\eta=0,25$ – частина ядер, що перетворюються по каналу 2: $^{99}\text{Mo} \xrightarrow{\lambda_1} ^{99}\text{Tc}$, де λ_1 та λ_2 – сталі розпаду ^{99}Mo та $^{99}\text{Tc}^m$, відповідно. Знайдемо спочатку кількість стабільних ядер ^{99}Tc , що виникають у першому каналі. Закони зміни кількості ядер $^{99}\text{Mo}(N_1)$ та $^{99}\text{Tc}^m(N_2)$ записуються так (див. приклад №3):

$$N_1 = \eta N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad (2.6.1)$$

$$N_2 = \eta N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.6.2)$$

Для швидкості накопичення стабільного нукліду ^{99}Tc з урахуванням (2.6.2) можемо записати рівняння:

$$\frac{dN_3^{(1)}}{dt} = \lambda_2 N_2 = \eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (2.6.3)$$

Інтегруючи рівняння (2.6.3), отримаємо:

$$N_3^{(1)}(t) = \eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right\} + C. \quad (2.6.4)$$

Константу в (2.6.4) знаходимо з початкової умови $N_3(0) = 0$:

$$C = -\eta N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right\} = \eta N_{10}. \quad (2.6.5)$$

Остаточно, закон зміни кількості ядер ^{99}Tc за першим каналом запишеться так:

$$N_3^{(1)}(t) = \eta N_{10} \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) + 1 \right\}. \quad (2.6.6)$$

Зміна кількості ядер ^{99}Tc у другому каналі відбувається за законом (пропонуємо переконатись у цьому самостійно):

$$N_3^{(2)}(t) = N_{10} (1 - \eta) (1 - e^{-\lambda_1 t}). \quad (2.6.7)$$

Таким чином, відносна кількість стабільних ядер в препараті з часом змінюється наступним чином:

$$\frac{\sum N_3}{N_{10}} = \frac{N_3^{(1)}(t) + N_3^{(2)}(t)}{N_{10}} = 1 + \frac{\lambda_1 (1 - \eta) - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\eta \lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.6.8)$$

Врахувавши, що $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, (2.6.8) перепишемо наступним чином:

$$\frac{\sum N_3}{N_{10}} = 1 + \frac{T_2 (1 - \eta) - T_1}{T_1 - T_2} 2^{-t/T_1} + \frac{\eta T_2}{T_1 - T_2} 2^{-t/T_2}. \quad (2.6.9)$$

Підставимо дані з умови прикладу й отримаємо відносну кількість стабільних ядер, що накопичиться в препараті протягом 5 годин:

3. АЛЬФА-РОЗПАД ВАЖКИХ ЯДЕР

3.2. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. Оцінити висоту кулонівського бар'єра для α -частинок, що випускаються ядрами $^{222}_{86}\text{Rn}$ (заокругленням верхівки потенціального бар'єра знехтувати). Якою в цих ядрах буде ширина бар'єра (тунельна відстань) для α -частинок з енергією 5,5 MeB? (Рис. 3.1).

Розв'язання. Для α -частинки, що знаходиться всередині ядра, існує потенціальний бар'єр в області $r > R$ (R – радіус ядра), який вона має подолати шляхом тунелювання (підбар'єрне проходження). Цей бар'єр зумовлений дією кулонівського поля протонів. В межах ядра $r \leq R$ рух і стан α -частинки визначається дією сумарного потенціалу, який складається з кулонівського потенціалу, що формується розподіленими протонами, і потенціалу сильної взаємодії, який є результатом усереднення по об'єму ядра потенціалу Юкави, зумовленого обміном π -мезонами з масою m_π між сусідніми нуклонами:

$$U_\pi(r) = -\frac{1,45 \cdot \hbar c}{r} \exp\left\{-\frac{m_\pi cr}{\hbar}\right\} \quad (3.1.1)$$

Сумарний потенціал в області $r \leq R$ можна замінити моделлю прямокутної потенціальної ями. На відстані, більшій за радіус дії ядерних сил, залишається лише кулонівська взаємодія. Таким чином, потенціал $U(r)$ можна апроксимувати модельною функцією (Рис. 3.1):

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 = \text{const}, & r < R; \\ \frac{zZe^2}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

де z, Z – заряд α -частинки та дочірнього ядра відповідно, R – радіус дочірнього ядра, $R \cong 1,3 \cdot A^{1/3}$ фм, A – масове число дочірнього ядра, ϵ_0 – електрична стала. Якщо знехтувати заокругленням верхівки, висоту кулонівського бар'єра в ядрі $^{218}_{84}\text{Po}$, яке утворюється після α -розпаду ядра $^{222}_{86}\text{Rn}$, можемо оцінити за допомогою формули:

$$U_{\max} = \frac{zZe^2}{R} = \frac{2 \cdot 84 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}{1,3 \cdot 218^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}} = 4,95 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} \approx 31 \text{ MeB}.$$

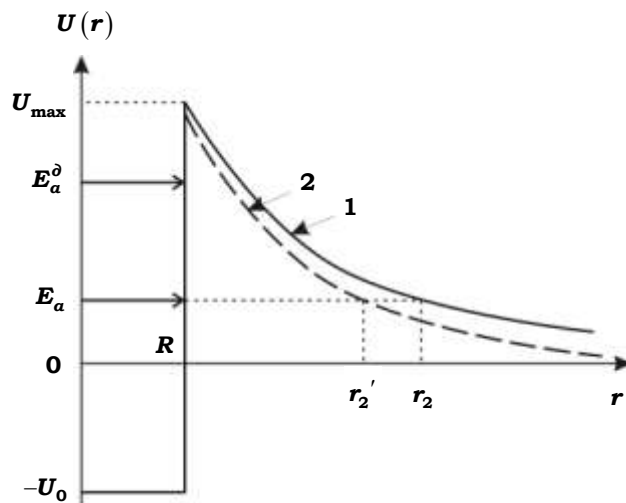


Рис. 3.1. 1 – кулонівський потенціальний бар'єр для α -частинки, що знаходиться всередині ядра. $-U_0$ – потенціал всередині ядра, E_α – енергія α -частинки, r_2 – координата точки виходу з бар'єра 1; 2 – екранований кулонівський потенціал, r_2' – координата точки виходу з бар'єра 2; E_α^d – енергія довгопробіжної α -частинки

Ширина бар'єра для α -частинки, що вилітає з ядра, визначається її енергією. Так, координата виходу з тунельного бар'єра визначається з умови:

$$E_\alpha = U(r) \Rightarrow r_2 = \frac{zZe^2}{E_\alpha}. \quad (3.1.3)$$

З (3.1.3) знаходимо $r_2 = \frac{2 \cdot 84 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20} \text{ CGSE}^2}{5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}} \approx 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ см} = 44 \text{ фм.}$ Радіус

дочірнього ядра $^{218}_{84}\text{Po}$ $R = 1,3 \cdot 218^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см} = 7,8 \text{ фм.}$ Таким чином, тунельна відстань для α -частинок з енергією $5,5 \text{ MeV}$ становить $\Delta r = r_2 - R = 44 - 7,8 = 36,2 \text{ фм.}$

Врахуємо тепер, що електрони, які рухаються між ядрами, екранують кулонівський потенціал [7]:

$$U(r) = \frac{zZe^2}{r} e^{-r/r_0}, \quad (3.1.4)$$

де $r_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)E_F}{3\pi n_0 e^2}}$ – довжина екранування для виродженого електронного Фермі-газу, E_F – енергія Фермі електронів, n_0 – їх концентрація, $\varepsilon(0)$ – діелектрична проникність середовища.

В нерелятивістському випадку енергія Фермі електронів визначається згідно формули [7]:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_0^{2/3}. \quad (3.1.5)$$

Концентрація електронів в речовині, що складається з ізотопів полонію $^{218}_{84}\text{Po}$, приблизно дорівнює $n_0 \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. В такому випадку енергія Фермі становитиме

$$E_F = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-54}}{2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-27}} (3\pi^2)^{2/3} 10^{15} \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} = 3,75 \text{ eV},$$

а довжина екранування

$$r_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-12}}{3\pi \cdot 10^{23} \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}} = 7,4 \cdot 10^{-9} \text{ см},$$

якщо прийняти, що діелектрична проникність середовища $\varepsilon(0) \approx 2$.

Отже, врахування екранування кулонівського потенціалу ядра електронами призведе до незначного зменшення шляху тунелювання для α -частинок:

$$r_2' = \frac{zZe^2}{E_\alpha} e^{-r_2'/r_0}. \quad (3.1.6)$$

Враховуючи, що $r_2' \ll r_0$, можемо розкласти експоненту в (3.1.6) та спростити останній вираз:

$$r_2' \approx \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{E_\alpha}{zZe^2}}. \quad (3.1.7)$$

Підставляючи числові дані у (3.1.7), отримуємо значення $r_2' \approx 43,97 \text{ фм}$, а отже, шлях тунелювання $\Delta r = r_2' - R = 36,17 \text{ фм.}$

Такі оцінки відповідають екрануванню за рахунок, наприклад, електронів провідності в металах. Більш ефективним є екранування за рахунок власних електронів атома, для яких довжина екранування згідно моделі Томаса-Фермі виражається величиною $r_0 = 0,885 \frac{a}{Z^{1/3}}$, де $a \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ – перший борівський

радіус, Z – заряд ядра. За цією моделлю для того ж ядра ${}^{218}_{84}\text{Po}$ маємо $r_0 \approx 10^{-9}$ см, $r_2' \approx 43,8$ фм.

Набагато більшим буде ефект екранування кулонівського потенціалу ядер мюонами, які захоплені на орбіту атома, під час пропускання через речовину повільних від'ємних μ – мезонів. При цьому будуть утворюватись мезоатоми (мезон захоплюється атомом на борівську орбіту замість електрона), в яких μ – мезони рухатимуться по периферії ядра. В такому випадку значним чином «зрізується» найбільш широка частина кулонівського потенціального бар'єра, внаслідок чого час життя α – радіоактивних ядер може суттєво зменшуватись (мюонний каталіз) [13].

Слід зауважити, що на практиці такий метод екранування поля ядра може бути застосований тільки для легких ядер (наприклад, дейтерію), оскільки неможливо одночасно захопити $Z \gg 1$ мюонів важким ядром.

Приклад 2. Ядра ${}^{210}\text{Po}$ випускають α – частинки з кінетичною енергією $E_\alpha = 5,3$ МеВ, при цьому практично всі дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Знайти повну енергію, що вивільнюється під час одного акту розпаду. Визначити початкову активність препарату ${}^{210}\text{Po}$, якщо за час, що дорівнює його періоду піврозпаду, препарат виділив $2,2$ кДж тепла.

Розв'язання. Запишемо реакцію α – розпаду ядра ${}^{210}\text{Po}$:



Повна енергія, що звільняється у такому процесі, дорівнює сумі кінетичних енергій дочірнього ядра ${}^{206}\text{Pb}$ та α – частинки. Позначимо: p_2, p_α – імпульси дочірнього ядра та α – частинки, m_1, m_2, m_α – маси материнського ядра ${}^{210}\text{Po}$, дочірнього ядра ${}^{206}\text{Pb}$ та α – частинки, відповідно. У випадку, коли материнське ядро знаходиться у спокої, закон збереження імпульсу для реакції (3.2.1) записується так:

$$0 = \vec{p}_2 + \vec{p}_\alpha \Rightarrow p_2 = p_\alpha \quad (3.2.2)$$

Дочірнє ядро отримує кінетичну енергію за рахунок віддачі:

$$E_{k2} = \frac{p_2^2}{2m_2}. \quad (3.2.3)$$

Враховуючи (3.2.2), з (3.2.3) знаходимо кінетичну енергію ядра ${}^{206}\text{Pb}$:

$$E_{k2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_2} = \frac{m_\alpha}{m_2} E_\alpha. \quad (3.2.4)$$

Таким чином, енергетичний вихід реакції (3.2.1) становитиме:

$$Q_1 = E_{k2} + E_\alpha = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2}\right) E_\alpha. \quad (3.2.5)$$

Згідно закону радіоактивного розпаду, активність препарату ${}^{210}\text{Po}$ з часом змінюється так:

$$A = A_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \quad (3.2.6)$$

де A_0 – початкова активність препарату, $T_{1/2}$ – період піврозпаду ${}^{210}\text{Po}$, $T = 138$ діб. Через час, що дорівнює періоду піврозпаду, активність становитиме $A = A_0/2$. Кількість ядер, що розпадаються протягом цього часу,

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{N_0}{2}. \quad (3.2.7)$$

Повна енергія, що виділяється при цьому:

$$Q = \Delta N \cdot Q_1 = Q_1 \frac{N_0}{2}. \quad (3.2.8)$$

З (3.2.8), з урахуванням (3.2.5), знайдемо початкову активність препарату ^{210}Po :

$$A_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{2Q}{Q_1} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{2Q}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2}\right) E_\alpha}. \quad (3.2.9)$$

Масу ядра в атомних одиницях маси можна виразити через масове число та дефект мас: $m_\alpha = A + \Delta(Z, A)$. Внаслідок того, що величина $\Delta(Z, A)$ є малою порівняно з масовим числом, при розрахунках нею іноді нехтують. Якщо врахувати дефекти мас $\Delta(2, 4) = 0,002604 \text{ а.о.м.}$, $\Delta(82, 206) = -0,02554 \text{ а.о.м.}$, точне значення маси α -частинки та ядра ^{206}Pb становитиме: $m_\alpha = 4,002604 \text{ а.о.м.}$, $m_{\text{Pb}} = 205,97446 \text{ а.о.м.}$, відповідно. В такому випадку відношення мас $\frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} = \frac{4,002604}{205,97446} \approx 1,943 \cdot 10^{-2}$, тоді як відношення масових чисел відповідних ядер

становить $\frac{A_\alpha}{A_{\text{Pb}}} = \frac{4}{206} \approx 1,942 \cdot 10^{-2}$. Як бачимо, похибка є зовсім несуттєвою, тому

надалі при подібних розрахунках замість маси ядра будемо для спрощення використовувати значення його масового числа.

Підставимо у (3.2.5) та (3.2.9) дані з умови та знайдемо повну енергію, що виділяється під час одного акту розпаду:

$$Q_1 = \left(1 + \frac{4}{206}\right) \cdot 5,3 = 5,4 \text{ MeV}, \quad (3.2.10)$$

та початкову активність препарату ^{210}Po :

$$A_0 = \frac{\ln 2}{138 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{5,403 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,96 \cdot 10^8 \text{ Бк} = 8 \text{ мКі}.$$

Приклад 3. Визначити кінетичні енергії α -частинок E_α , що утворюються під час розпаду ядра ^{212}Bi на збуджені рівні ядра ^{208}Tl з енергіями $0,49 \text{ MeV}$ та $0,61 \text{ MeV}$

(Рис. 3.2). Енергія зв'язку $E_{зв}(Z, A)$ ядра ^{212}Bi – 1654,32 MeB, ядра ^{208}Tl – 1632,23 MeB та α – частинки – 28,3 MeB.

Розв'язання. Енергія α – розпаду з основного стану материнського ядра до основного стану дочірнього ядра визначається з виразу:

$$Q_0 = (m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha) c^2 = E_{зв}(Z - 2, A - 4) + E_{зв}(2, 4) - E_{зв}(Z, A), \quad (3.3.1)$$

де $m(Z, A)$ – маса материнського ядра, $m(Z - 2, A - 4)$ – маса дочірнього ядра, m_α – маса α – частинки, $E_{зв}(Z, A)$, $E_{зв}(Z - 2, A - 4)$, $E_{зв}(2, 4)$ – відповідні енергії зв'язку. Якщо α – розпад відбувається на збуджені рівні дочірнього ядра, енергія розпаду визначається співвідношенням:

$$Q = Q_0 - E^*, \quad (3.3.2)$$

де E^* – енергія збудження дочірнього ядра.

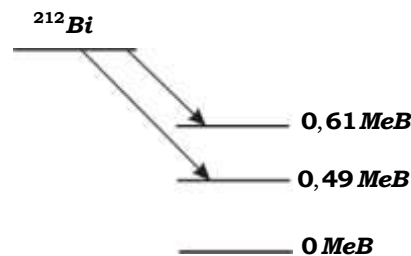


Рис. 3.2. Схема α – розпаду ядра ^{212}Bi на збуджені енергетичні рівні ядра ^{208}Tl .

Енергія Q виділяється у вигляді кінетичної енергії продуктів розпаду: дочірнього ядра та α – частинки:

$$Q = E_\alpha + E_{\text{доч}}. \quad (3.3.3)$$

Враховуючи, що $p_\alpha = p_{\text{доч}}$, де $p_{\text{доч}}$ – імпульс дочірнього ядра, отримаємо співвідношення між кінетичними енергіями продуктів розпаду:

$$E_{\text{доч}} = \frac{m_\alpha}{m(Z - 2, A - 4)} E_\alpha. \quad (3.3.4)$$

Приймаючи до уваги (3.3.2), (3.3.3) та (3.3.4), знаходимо енергію α – частинки:

$$Q_0 - E^* = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m(Z - 2, A - 4)} \right) \Rightarrow E_\alpha = (Q_0 - E^*) \frac{m(Z - 2, A - 4)}{m_\alpha + m(Z - 2, A - 4)}. \quad (3.3.5)$$

Підставляючи параметри задачі, з (3.3.1) знаходимо енергію Q_0 реакції α – розпаду ядра ^{212}Bi :

$$Q_0 = 1632,23 + 28,3 - 1654,32 = 6,21 \text{ MeB}.$$

Кінетична енергія α – частинок, що випускаються під час розпаду ядра ^{212}Bi на перший збуджений рівень ядра ^{208}Tl (0,49 MeB) з (3.3.5):

$$E_{\alpha 1} = (6,21 - 0,49) \frac{208}{212} = 5,61 \text{ MeB},$$

Під час розпаду на другий збуджений рівень (0,61 MeB) енергія α – частинки дорівнюватиме:

$$E_{\alpha 2} = (6,21 - 0,61) \frac{208}{212} = 5,49 \text{ MeB}.$$

Приклад 4. Розпад ядер ^{210}Po відбувається з основного стану й супроводжується випусканням двох груп α -частинок: основної з енергією $E_\alpha = 5,3 \text{ MeV}$ та слабкої (за інтенсивністю) з енергією $E'_\alpha = 4,5 \text{ MeV}$. Знайти енергію α -розпаду цих ядер та енергію γ -квантів, що випромінюються дочірніми ядрами.

Розв'язання. Запишемо реакцію α -розпаду ядра ^{210}Po , при якому випускаються α -частинки основної групи:

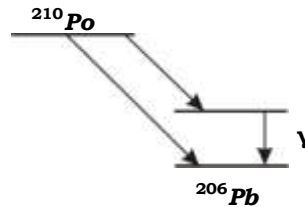
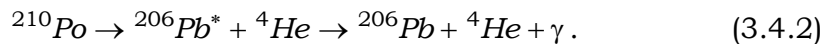


Рис. 3.3. Схема α -розпаду ядра ^{210}Po .

Очевидно, що у випадку випускання α -частинок слабкої групи, дочірнє ядро ^{206}Pb утворюється в збудженому стані. Зняття збудження ядра ^{206}Pb відбувається шляхом випромінювання γ -кванта. Реакція розпаду за цим каналом матиме вигляд:



Схему розпаду ядер ^{210}Po за двома каналами зображено на Рис. 3.3. Задачу будемо розраховувати окремо для кожної групи α -частинок. Позначимо: p'_α - імпульс α -частинки слабкої групи, p_γ - імпульс γ -кванта, m_1, m_2, m_α - маси материнського ядра ^{210}Po , дочірнього ядра ^{206}Pb та α -частинки, відповідно. У випадку основної групи α -частинок енергію реакції (3.4.1) запишемо так:

$$Q = (m_1 - m_2 - m_\alpha)c^2 = E_\alpha + E_{k2}. \quad (3.4.3)$$

Скористаємось розв'язком (3.2.5) прикладу №2:

$$Q = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right) = 5,3 \left(1 + \frac{4}{206} \right) \approx 5,4 \text{ MeV}. \quad (3.4.4)$$

Це і є енергія реакції α -розпаду ядер ^{210}Po . Частина, яку складає кінетична енергія дочірнього ядра

$$\frac{E_2}{Q} = \frac{\frac{m_\alpha}{m_2} E_\alpha}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right) E_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_2 + m_\alpha} = \frac{4}{210} \approx 0,02 \text{ або } 2\%. \quad (3.4.5)$$

Розрахуємо тепер енергію γ -квантів, що випромінюються дочірніми ядрами ^{206}Pb . Закон збереження енергії для реакції (3.4.2) матиме вигляд:

$$Q = (m_1 - m_2 - m_\alpha)c^2 = E'_\alpha + E'_{k2} + E_\gamma. \quad (3.4.6)$$

Закон збереження імпульсу для реакції (3.4.2) записується так:

$$0 = \vec{p}'_2 + \vec{p}'_\alpha + \vec{p}_\gamma. \quad (3.4.7 \text{ а})$$

Імпульс γ -кванта є набагато меншим за імпульс ядер-продуктів реакції (3.4.2). Доведемо це, зробивши деякі оцінки. Імпульс γ -кванта з енергією 1 MeV :

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \approx 5,3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}. \text{ Імпульс } \alpha\text{-частинки з енергією } 5 \text{ MeV}$$

$$p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha} \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \text{ та ядра } ^{206}\text{Pb} \text{ з енергією } 5,1 \cdot 0,02 = 0,1 \text{ MeV}$$

$p_{Pb} = \sqrt{2m_{Pb}E_{Pb}} \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Як бачимо, у рівнянні (3.4.7а) можна знехтувати імпульсом γ – кванта, тобто

$$0 \approx \vec{p}'_2 + \vec{p}'_\alpha \Rightarrow p'_2 = p'_\alpha = p. \quad (3.4.7 \text{ б})$$

Враховуючи (3.4.7 б), з рівняння (3.4.6) знайдемо енергію γ – кванта:

$$E_\gamma = Q - E'_\alpha - E'_{k2} = Q - E'_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right). \quad (3.4.8)$$

Підставляючи параметри задачі та числове значення (3.4.4) у (3.4.8), знаходимо енергію γ – кванта:

$$E_\gamma = 5,4 - 4,5 \left(1 + \frac{4}{206} \right) = 0,81 \text{ MeV}.$$

Приклад 5. Під час розпаду ядер ^{212}Po випускаються чотири групи α – частинок: основна з енергією $8,78 \text{ MeV}$ та довгопробіжні з енергіями $9,492$; $10,422$ та $10,542 \text{ MeV}$. Розрахувати та побудувати схему рівнів ядра ^{212}Po , якщо відомо, що дочірні ядра в усіх випадках опиняються безпосередньо в основному стані.

Розв'язання. Реакція, за якою відбувається α – розпад ядер ^{212}Po , записується так:



причому материнські ядра $^{208}\text{Po}^*$ знаходяться у збуджених станах. Позначимо: $p_{2i}, p_{\alpha i}$ – імпульси дочірнього ядра та α – частинки відповідної групи, m_1, m_2, m_α – маси материнського ядра ^{212}Po , дочірнього ядра ^{208}Pb та α – частинки відповідно.

Закон збереження енергії для реакції (3.5.1) матиме вигляд:

$$(m_1 - m_2 - m_\alpha)c^2 + E_i^* = Q + E_i^* = E_{2i} + E_{\alpha i}, \quad (3.5.2)$$

де Q – енергія α – розпаду ядер ^{212}Po , E_i^* – енергія збудження ядра $^{208}\text{Po}^*$, E_{2i} та $E_{\alpha i}$ – кінетичні енергії дочірнього ядра та альфа-частинки відповідно. При умові, що материнське ядро знаходилось у спокої, закон збереження імпульсу матиме вигляд:

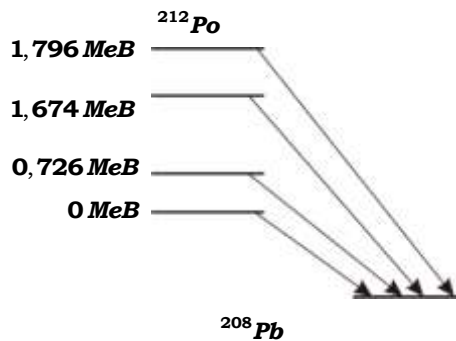


Рис. 3.4. Схема α – розпаду зі збуджених станів ядра ^{212}Po до основного стану ядра ^{208}Pb .

$$0 = \vec{p}_{2i} + \vec{p}_{\alpha i} \Rightarrow p_{2i} = p_{\alpha i}. \quad (3.5.3)$$

Отже, рівняння (3.5.2) можемо переписати наступним чином:

$$Q + E_i^* = E_{\alpha i} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right). \quad (3.5.4)$$

З (3.5.4) виражаємо енергію збудження материнського ядра E_i^* :

$$E_i^* = E_{\alpha i} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_2} \right) - Q. \quad (3.5.5)$$

Енергетичні рівні ядра ^{212}Po знайдемо з (3.5.5):

$$E_i^* - E_1 = (E_{\alpha i} - E_{\alpha 1}) \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right). \quad (3.5.6)$$

Зручно покласти, що енергія першого енергетичного рівня $E_1 = 0$ (для основної групи α -частинок). Підставляючи у (3.5.6) енергію довгопробіжних α -частинок $E_{\alpha i}$ та енергію основної групи $E_{\alpha 1}$, знаходимо положення енергетичних рівнів материнського ядра:

$$E_2^* = 0,726 \text{ MeV};$$

$$E_3^* = 1,674 \text{ MeV};$$

$$E_4^* = 1,796 \text{ MeV}.$$

Енергія реакції (3.5.1) становитиме $Q = E_{\alpha 1} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_2} \right) = 8,95 \text{ MeV}$. Схему

енергетичних рівнів ядра ^{212}Po зображено на Рис. 3.4.

Приклад 6. Оцінити відношення висоти відцентрового бар'єра до висоти кулонівського бар'єра для α -частинок, що вилітають з ядра $^{230}_{90}\text{Th}$.

Розв'язання: Якщо α -частинка вилітає з ядра, маючи при цьому ненульовий орбітальний момент імпульсу $|\vec{P}_L| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, $l \neq 0$, то на неї діятиме відцентрова сила. Якщо врахувати, що α -розпад є підбар'єрним процесом, відцентрова сила сприятиме зростанню потенціального бар'єра та збільшуватиме його ширину, що призводить до збільшення періоду піврозпаду T α -радіоактивного ядра. Таким чином, потенціал $U(r)$ (див. приклад 1) матиме вигляд:

$$U(r) = U_{\text{кул}} + U_{\text{цб}} = \frac{2(Z-2)e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_{\alpha}^* r^2}, \quad (3.6.1)$$

де Z — заряд материнського ядра, $m_{\alpha}^* = \frac{m_{\alpha} M}{m_{\alpha} + M}$ — зведена маса α -частинки,

M — маса дочірнього ядра. Оцінимо значення моменту імпульсу для α -частинки в ядрі. Згідно співвідношенню невизначеностей, $\Delta r \Delta x \approx \hbar$. Приймаючи $\Delta r \approx r = m_{\alpha} v$, $\Delta x \approx R$, де R — радіус ядра, знайдемо $m_{\alpha} v R = |\vec{P}_L| \approx \hbar$, так що орбітальне квантове число l може приймати значення, не більше за кілька одиниць, наприклад, $l < 4$. Максимальне значення відцентрового потенціального бар'єру для ядра $^{230}_{90}\text{Th}$ становитиме:

$$U_{\text{цб}} = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{2m_{\alpha}^* c^2 R^2} < \frac{(1,05 \cdot 3 \cdot 10^{-17})^2 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3,93 \cdot 931,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot (1,22 \cdot 230^{1/3} \cdot 10^{-13})^2} \approx$$

$$\approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ ерг} \approx 1,88 \text{ MeV}.$$

Знайдемо величину кулонівського потенціального бар'єру для α -частинки в ядрі $^{230}_{90}\text{Th}$:

$$U_{\text{кул}} = \frac{2(Z-2)e^2}{R} = \frac{2 \cdot 88 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}}{1,22 \cdot 226^{1/3} \cdot 10^{-13}} = 5,45 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} \approx 34 \text{ MeV}.$$

Таким чином, висота відцентрового бар'єра майже у 20 разів менша за висоту кулонівського бар'єра: $\frac{U_{\text{цб}}}{U_{\text{кул}}} = 0,055$. Крім того, відцентрова енергія спадає з відстанню швидше (за законом $\frac{1}{r^2}$), ніж кулонівська, тому її наявність мало змінює форму потенціальної кривої. Відцентровий бар'єр, як правило, лише незначно збільшує період піврозпаду радіоактивних ядер.

4. БЕТА-РОЗПАД ЯДЕР

4.3. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. Ядро $^{32}_{15}\text{P}$ зазнає β^- -розпаду, в результаті якого дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані. Визначити максимальні значення кінетичної енергії та імпульсу β -частинок та відповідну кінетичну енергію віддачі дочірнього ядра.

Розв'язання: Реакція β^- -розпаду даного ізотопу фосфору записується наступним чином:



Радіоактивні атоми одного й того ж сорту випускають електрони з різними енергіями, починаючи від нуля та закінчуючи граничним значенням, яке характерне для кожного окремого β -випромінювача. Це граничне значення називається верхньою границею β -спектра. Тобто β -спектр є суцільним, енергія не квантується (на противагу, наприклад, α -розпаду). Верхня межа β -спектра відповідає випадку, коли на долю електрона припадає вся енергія, що виділяється в результаті реакції розпаду. При цьому енергію антинейтрино можна вважати приблизно рівною нулю. До речі, коли йдеться про нейтрино та антинейтрино, то під енергією частинки розуміють її кінетичну енергію.

Енергетичний вихід реакції (4.1.1) можна представити як різницю мас материнського ядра та частинок, які утворилися в результаті β^- -розпаду:

$$Q = (m_P - m_e - m_S)c^2, \quad (4.1.2)$$

де m_P та m_S — маси ядер фосфору та сірки відповідно; $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4}$ а.о.м. — маса електрона.

Скориставшись довідковими даними, можна записати енергетичний вихід за допомогою дефектів мас ядер:

$$Q = [\Delta_P + A_P - m_e - \Delta_S - A_S]c^2 = [\Delta_P - \Delta_S - m_e]c^2. \quad (4.1.3)$$

Дефекти мас відповідних нуклідів фосфору та сірки становлять відповідно $\Delta_P = -0,026092$ а.о.м. та $\Delta_S = -0,027926$ а.о.м. [8,9].

Користуючись числовими значеннями, знайдемо з (4.1.3) енергетичний вихід реакції (4.1.1):

$$Q = (-0,026092 - 5,486 \cdot 10^{-4} + 0,027926) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1,197 \text{ MeV}. \quad (4.1.4)$$

З іншого боку, енергетичний вихід реакції дорівнює різниці кінетичних енергій материнського ядра та частинок, які утворилися в результаті реакції. Запишемо, таким чином, закон збереження енергії:

$$Q = E_{\kappa S} + E_{\kappa \beta} + E_{\kappa \bar{\nu}} - E_{\kappa P}. \quad (4.1.5)$$

Тут $E_{\kappa P}$, $E_{\kappa S}$, $E_{\kappa \beta}$ та $E_{\kappa \bar{\nu}}$ — кінетичні енергії фосфору, сірки, електрона та антинейтрино відповідно. Оскільки материнське ядро знаходилося у спокої, $E_{\kappa P} = 0$. Кінетична енергія електронів, які утворилися при β^- -розпаді, буде максимальною в тому випадку, коли енергія антинейтрино буде мінімальною. Тому для антинейтрино вважатимемо кінетичну енергію $E_{\kappa \bar{\nu}} \approx 0$ та імпульс $\vec{p}_{\bar{\nu}} \approx 0$.

Отже, (4.1.5) переписується як

$$Q = E_{\kappa S} + E_{\kappa \beta}^{\max}. \quad (4.1.6)$$

Запишемо закон збереження імпульсу у векторному вигляді:

$$\vec{p}_P = \vec{p}_S + \vec{p}_{\beta} + \vec{p}_{\bar{\nu}}, \quad (4.1.7)$$

або в скалярному вигляді у випадку верхньої границі β -спектра:

$$0 = p_S - p_{\beta}^{\max}. \quad (4.1.8)$$

Для ядра сірки через його досить велику масу можна застосувати нерелятивістське наближення для імпульсу, тобто

$$p_S = \sqrt{2m_S E_{\kappa S}}. \quad (4.1.9)$$

Але для електрона, як для досить легкої частинки, релятивізм вже треба враховувати. (Зазвичай для оцінки ступеню релятивізму частинки застосовують порівняння з її енергією спокою. Так, якщо виконується співвідношення $m_0 c^2 \ll E_k$, користуються нерелятивістським наближенням, якщо ж $E_k > m_0 c^2$, слід застосовувати релятивістські формули). Максимальна кінетична енергія електрона:

$$E_{\kappa\beta}^{\max} = \sqrt{(p_{\beta}^{\max})^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2, \quad (4.1.10)$$

де m_e – маса спокою електрона.

Звідси виражаємо імпульс електрона:

$$p_{\beta}^{\max} = \frac{\sqrt{E_{\kappa\beta}^{\max} (E_{\kappa\beta}^{\max} + 2m_e c^2)}}{c}. \quad (4.1.11)$$

Підставимо формули (4.1.9) та (4.1.11) до закону збереження імпульсу (4.1.8):

$$0 = \sqrt{2m_S E_{\kappa S}} - \frac{\sqrt{E_{\kappa\beta}^{\max} (E_{\kappa\beta}^{\max} + 2m_e c^2)}}{c}. \quad (4.1.12)$$

Розв'яжемо (4.1.6) та (4.1.12) як систему з двох рівнянь та отримаємо наступне квадратне рівняння відносно максимальної кінетичної енергії електрона:

$$(E_{\kappa\beta}^{\max})^2 + 2(m_S + m_e)c^2 \cdot E_{\kappa\beta}^{\max} - 2m_S c^2 \cdot Q = 0. \quad (4.1.13)$$

Оцінимо окремо величини, що входять до цієї формули. Маса ядра сірки:

$$\begin{aligned} m_S &= M_{amS} - Z_S m_e = \Delta_S + A_S = -0,027926 + 32 = \\ &= 31,97207 \text{ а.о.м.} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Очевидно, що можна взяти суму мас електрона та ядра сірки приблизно рівною масі сірки (4.1.14), похибка при цьому складе всього $\approx 4,6 \cdot 10^{-4}\%$, тобто

$$m_S + m_e \cong m_S \quad (4.1.15)$$

Рівняння (4.1.13) має єдиний фізичний розв'язання, який дає максимальну кінетичну енергію β – частинки:

$$\begin{aligned} E_{\kappa\beta}^{\max} &= -m_S c^2 + m_S c^2 \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_S c^2}} = m_S c^2 \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_S c^2}} \right\} = \\ &= 31,97207 \cdot 931,5 \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1,197}{31,97207 \cdot 931,5}} \right\} = 1,194 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Або $E_{\kappa\beta}^{\max} = 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ ерг} = 1,91 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

Це точний розв'язання рівняння (4.1.13). А можна знайти його наближений розв'язання, записавши $E_{\kappa\beta}^{\max}$ в формулі (4.1.14) з урахуванням співвідношення (4.1.15) та розклавши корінь в (4.1.16) в ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$\begin{aligned} E_{\kappa\beta}^{\max} &= -m_S c^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_S c^2}} \right) \cong m_S c^2 \left(\frac{Q}{m_S c^2} - \frac{Q^2}{2m_S^2 c^4} \right) = \\ &= Q - \frac{Q^2}{2m_S c^2}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Квадратичний доданок $\frac{Q^2}{2m_S c^2}$ складає $2,9 \cdot 10^{-3}\%$ від енергетичного виходу реакції Q , а значить можна вважати, що в максимумі β – спектра кінетична енергія електрона фактично дорівнює енергетичному виходу реакції розпаду:

$$E_{\kappa\beta}^{\max} \cong Q. \quad (4.1.18)$$

Співвідношення (4.1.18) підтверджується розрахунком в (4.1.16).

Максимальне значення імпульсу β – частинки можна знайти, підставивши числові значення до формули (4.1.11):

$$p_{\beta}^{\max} = \frac{\sqrt{1,91 \cdot 10^{-13} (1,91 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0,511 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) \text{ Дж}^2}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \cong \\ \cong 0,87 \cdot 10^{-21} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Тут враховано, що маса спокою електрона дорівнює $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV} \approx 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

Відповідно, кінетична енергія ядра сірки визначатиметься зі співвідношення (4.1.17):

$$E_{\kappa S} = \frac{Q^2}{2m_S c^2} = \frac{(1,197 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж})^2}{2 \cdot 31,97207 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2} = \\ = 3,84 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 24 \text{ eV}.$$

Приклад 2. Ядра ^{37}Ar зазнають K – захоплення, в результаті якого дочірні ядра опиняються безпосередньо в основному стані. Нехтуючи енергією зв'язку K – електрона, визначити кінетичну енергію та швидкість дочірнього ядра.

Розв'язання: Реакція електронного захоплення ^{37}Ar , при якій ядро захоплює електрон з найближчої до нього K – оболонки, записується наступним чином:



Закон збереження енергії для цього процесу має вигляд:

$$Q = E_{\nu} + E_{\kappa\text{Cl}} - E_{\kappa\text{Ar}}. \quad (4.2.2)$$

Ядро аргону до K – захоплення знаходилося в стані спокою, тому його кінетична енергія $E_{\kappa\text{Ar}} = 0$ та імпульс $p_{\text{Ar}} = 0$.

Закон збереження імпульсу в векторному вигляді:

$$0 = \vec{p}_{\text{Ar}} = \vec{p}_{\text{Cl}} + \vec{p}_{\nu}, \quad (4.2.3)$$

або в проекціях на обрану вісь:

$$0 = p_{\text{Cl}} - p_{\nu}. \quad (4.2.4)$$

Піднесемо (4.2.4) до квадрата та помножимо на c^2 , врахувавши, що $E_{\nu} = p_{\nu}c$ та $E_{\kappa\text{Cl}} = \frac{p_{\text{Cl}}^2}{2M_{\text{Cl}}}$ (тут M_{Cl} – маса ядра хлору):

$$2M_{\text{Cl}}E_{\kappa\text{Cl}}c^2 = E_{\nu}^2. \quad (4.2.5)$$

Зі співвідношення (4.2.2) виразимо енергію нейтрино: $E_{\nu} = Q - E_{\kappa\text{Cl}}$, тому (4.2.5) запишеться як

$$E_{\kappa\text{Cl}}^2 - 2(Q + M_{\text{Cl}}c^2)E_{\kappa\text{Cl}} + Q^2 = 0. \quad (4.2.6)$$

З цього рівняння отримаємо вираз для кінетичної енергії ядра хлору:

$$E_{\kappa\text{Cl}} = Q + M_{\text{Cl}}c^2 - \sqrt{M_{\text{Cl}}c^2(M_{\text{Cl}}c^2 + 2Q)}. \quad (4.2.7)$$

Маси ядер хлору та аргону:

$$M_{\text{Cl}} = A_{\text{Cl}} + \Delta_{\text{Cl}} = (37 - 0,034104) \text{ а.о.м.} = 36,965896 \text{ а.о.м.};$$

$$M_{\text{Ar}} = A_{\text{Ar}} + \Delta_{\text{Ar}} = (37 - 0,033228) \text{ а.о.м.} = 36,966772 \text{ а.о.м.},$$

де Δ_{Cl} та Δ_{Ar} – надлишки мас відповідних нуклідів, а A_{Cl} та A_{Ar} – їх масові числа. Енергетичний вихід реакції (4.2.1):

$$Q = (M_{\text{Ar}} - M_{\text{Cl}})c^2 = (36,966772 - 36,965896) \cdot 931,5 \text{ MeV} = \\ = 0,816 \text{ MeV}. \quad (4.2.8)$$

Отже, кінетична енергія ядра хлору дорівнюватиме:

$$E_{\text{кCl}} = 0,816 + 36,965896 \cdot 931,5 - \sqrt{36,965896 \cdot 931,5(36,965896 \cdot 931,5 + 2 \cdot 0,816)} = 9,7 \text{ eB}. \quad (4.2.9)$$

Наведемо наближений вигляд співвідношення (4.2.7), розклавши корінь у (4.2.7) в ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$\begin{aligned} E_{\text{кCl}} &= Q + M_{\text{Cl}}c^2 - M_{\text{Cl}}c^2 \sqrt{1 + \frac{2Q}{M_{\text{Cl}}c^2}} \cong Q + M_{\text{Cl}}c^2 - M_{\text{Cl}}c^2 \left(1 + \frac{Q}{M_{\text{Cl}}c^2} - \frac{Q^2}{2M_{\text{Cl}}^2c^4} \right) = \\ &= \frac{Q^2}{2M_{\text{Cl}}c^2} = \frac{0,816^2 \text{ MeB}}{2 \cdot 36,965896 \cdot 931,5} \cong 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ MeB} = 9,7 \text{ eB}. \end{aligned}$$

Цей результат ідентичний по числовому значенню до точного розв'язку (4.2.9).

Знайдемо швидкість дочірнього ядра:

$$v_{\text{Cl}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{кCl}}}{M_{\text{Cl}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}}{36,965896 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}}} = 7,1 \cdot 10^5 \text{ см/с}. \quad (4.2.10)$$

Приклад 3. Визначити можливі типи β -розпаду ядра ^{114}In . Енергії зв'язку відповідних ядер: $E_{\text{зв}}(^{114}\text{In}) = 970,2 \text{ MeB}$, $E_{\text{зв}}(^{114}\text{Cd}) = 972,4 \text{ MeB}$, $E_{\text{зв}}(^{114}\text{Sn}) = 971,4 \text{ MeB}$.

Розв'язання: Можливі реакції β -розпадів ядра ^{114}In виглядатимуть як:

$$\beta^- - \text{розпад } ^{114}_{49}\text{In} \rightarrow ^{114}_{50}\text{Sn} + \beta^- + \tilde{\nu}_e, \quad (4.3.1)$$

$$\beta^+ - \text{розпад } ^{114}_{49}\text{In} \rightarrow ^{114}_{48}\text{Cd} + \beta^+ + \nu_e, \quad (4.3.2)$$

$$e - \text{захоплення } ^{114}_{49}\text{In} + \beta^- \rightarrow ^{114}_{48}\text{Cd} + \nu_e. \quad (4.3.3)$$

Необхідною та достатньою умовою спонтанного розпаду є додатне значення енергетичного виходу відповідної реакції.

Запишемо енергетичні виходи реакцій (4.3.1)-(4.3.3):

$$Q_{\beta^-} = (m_{\text{In}} - m_{\text{Sn}} - m_e)c^2,$$

$$Q_{\beta^+} = (m_{\text{In}} - m_{\text{Cd}} - m_e)c^2,$$

$$Q_e = (m_{\text{In}} + m_e - m_{\text{Cd}})c^2,$$

де m_{In} , m_{Sn} та m_{Cd} – маси ядер індію, олова та кадмію відповідно.

Використаємо формулу для енергії зв'язку:

$$E_{\text{зв}} = Zm_H + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \quad (4.3.4)$$

де m_p , m_n – маси протона та нейтрона, виражені в енергетичних одиницях.

Звідси отримаємо вираз для маси ядра:

$$m_{\text{я}} = Zm_p + (A - Z)m_n - E_{\text{зв}}(Z, A). \quad (4.3.5)$$

З урахуванням (4.3.5), запишемо вираз для енергетичного виходу реакцій:

$$Q_{\beta^-} = (m_{\text{In}} - m_p - m_e)c^2 + E_{\text{зв}}(^{114}\text{Sn}) - E_{\text{зв}}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.6)$$

$$Q_{\beta^+} = (m_p - m_n - m_e)c^2 + E_{\text{зв}}(^{114}\text{Cd}) - E_{\text{зв}}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.7)$$

$$Q_e = (m_p - m_n + m_e)c^2 + E_{\text{зв}}(^{114}\text{Cd}) - E_{\text{зв}}(^{114}\text{In}); \quad (4.3.8)$$

Перший доданок в формулах (4.3.6) – (4.3.8) враховує перетворення протона на нейтрон або нейтрона на протон в процесі β -розпаду. Використовуючи числові значення мас протона, нейтрона та електрона: $m_p = 1,007825 \text{ а.о.м}$,

$m_n = 1,008665 \text{ а.о.м}$, $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а.о.м}$, знайдемо енергії (4.3.6) – (4.3.8):

$$Q_{\beta^-} = 0,27 \text{ MeB} + 1,2 \text{ MeB} = 1,47 \text{ MeB};$$

$$Q_{\beta^+} = -1,29 \text{ MeV} + 2,2 \text{ MeV} = 0,907 \text{ MeV};$$

$$Q_e = -0,27 \text{ MeV} + 2,2 \text{ MeV} = 1,93 \text{ MeV};$$

Отже, всі три енергетичні виходи реакцій додатні, тобто для ядра ^{114}In можливими є всі три типи розпаду. Проте енергетично найбільш вигідним, згідно розрахунку, є процес e – захоплення.

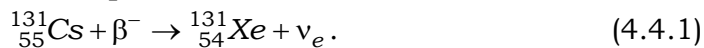
Знайдемо стабільний ізобар з масовим числом 114. Для цього використаємо вираз для «доріжки стабільності» (1.6.2) з розділу 1, підставивши в нього значення масового числа даного ізотопу індію:

$$Z_{\text{стаб}} = \frac{A}{2 + 0,015A^{2/3}} = \left[\frac{114}{2 + 0,015 \cdot 114^{2/3}} \right] = 48.$$

Таким чином, найбільш стабільним ізобаром з масовим числом 114 буде саме ^{114}Cd . Обидва ізотопи, що утворюються під час β^- – розпаду ядра ^{114}In , є стабільними, проте вміст ізотопу ^{114}Sn в природній суміші складає 0,65%, тоді як вміст ізотопу ^{114}Cd в природній суміші становить 29%. Це може означати, що більша частина перетворень ^{114}In йде саме шляхом e – захоплення.

Приклад 4. Знайти енергію нейтрино при K – захопленні в атомах ^{131}Cs , якщо енергія зв'язку K – електрона в дочірньому атомі 35 кеВ, а повна енергія, яка виділяється в процесі, дорівнює 355 кеВ. Дочірнє ядро опиняється безпосередньо в основному стані.

Розв'язання: Реакція електронного захоплення для атома ^{131}Cs :



Закон збереження енергії з урахуванням стану спокою ядра цезію ($E_{\kappa\text{Cs}} = 0$):

$$Q = E_{\kappa\text{Xe}} + E_\nu + \varepsilon_{38e}. \quad (4.4.2)$$

Тут $E_{\kappa\text{Xe}}$ та E_ν – кінетичні енергії атома ксенону та нейтрино, а ε_{38e} – енергія зв'язку електрона на K – оболонці дочірнього атома.

Енергія нейтрино в цьому процесі дорівнюватиме:

$$E_\nu = Q - \varepsilon_{38e} - E_{\kappa\text{Xe}}. \quad (4.4.3)$$

Кінетична енергія дочірнього ядра є невеликою в порівнянні з енергією нейтрино, тому нею можна знехтувати. Покажемо це.

Закон збереження імпульсу в скалярному вигляді:

$$P_{\text{Xe}} = P_\nu. \quad (4.4.4)$$

Або, що те ж саме:

$$2M_{\text{Xe}}E_{\kappa\text{Xe}} = \left(\frac{E_\nu}{c} \right)^2. \quad (4.4.5)$$

Таким чином, з (4.4.3) та (4.4.5) отримаємо просте квадратне рівняння відносно енергії нейтрино:

$$E_\nu^2 + 2M_{\text{Xe}}c^2E_\nu + (\varepsilon_{38e} - Q) = 0, \quad (4.4.6)$$

єдиний фізичний розв'язання якого

$$E_\nu = M_{\text{Xe}}c^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2(Q - \varepsilon_{38e})}{M_{\text{Xe}}c^2}} \right) \cong Q - \varepsilon_{38e} - \frac{(Q - \varepsilon_{38e})^2}{2M_{\text{Xe}}c^2}. \quad (4.4.7)$$

При цьому третім доданком у (4.7) можна знехтувати, оскільки його значення відносно величини $Q - \varepsilon_{38e}$ становить:

$$\frac{Q - \varepsilon_{38e}}{2M_{\text{Xe}}c^2} = \frac{0,355 - 0,035}{2 \cdot 131 \cdot 931,5} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ або } 1,3 \cdot 10^{-4}\%.$$

Тому можна вважати, що $E_\nu \cong Q - \varepsilon_{38e} = 355 - 35 = 320 \text{ кеВ}$.

Приклад 5. Обчислити сумарну кінетичну енергію частинок, які виникають під час β^- – розпаду нейтрона, що знаходиться у стані спокою.

Розв’язання: Тільки один з нуклонів є стабільним у вільному стані – протон. Вільні нейтрони можуть існувати тільки протягом короткого часу. Одна з причин цього – поглинання нейтронів ядрами, друга – β – радіоактивність вільного нейтрона. Його час життя у вільному просторі складає приблизно 10 хвилин. Нейтрон перетворюється на протон, випромінюючи електрон та антинейтрино. Вільні нейтрони виникають в природі або їх отримують в лабораторії тільки в результаті ядерних перетворень.

Реакція β^- – розпаду нейтрона має вигляд:



Запишемо масу до розпаду:

$$m_1 = m_n = 1,008665 \text{ а.о.м.} \quad (4.5.2)$$

Маса спокою системи частинок після розпаду становить:

$$\begin{aligned} m_2 = m_p + m_e &= (1,007276 + 5,486 \cdot 10^{-4}) \text{ а.о.м.} = \\ &= 1,0078246 \text{ а.о.м.} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Різниця мас Δm визначить енергетичний вихід реакції реакції (енергію перетворення нейтрона на протон):

$$Q = \Delta mc^2 = (m_1 - m_2)c^2 = (1,008665 - 1,0078246) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 0,78 \text{ MeV}.$$

Ця енергія й дорівнює сумарній кінетичній енергії частинок, які виникають під час β^- – розпаду нейтрона, що знаходиться у стані спокою:

$$Q = E_{kp} + E_{ke} + E_{\bar{\nu}}. \quad (4.5.4)$$

Приклад 6. К – захоплення в атомах ${}^7\text{Be}$ частково відбувається через збуджений стан дочірнього ядра, яке випромінює при цьому γ – квант з енергією 720 кеВ. Визначити кінетичну енергію дочірнього ядра після випромінювання γ – кванта, якщо кут між напрямками руху нейтрино та ядра віддачі дорівнює 90° . Якою є ця енергія в тому випадку, коли дочірнє ядро виникає безпосередньо в основному стані?

Розв’язання: Реакція, яка відповідає умові прикладу, є двохступеневою з утворенням проміжного збудженого стану ядра ${}^7_3\text{Li}^*$:

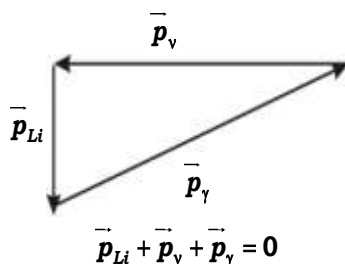
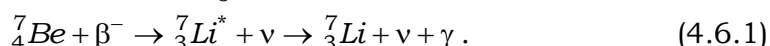


Рис. 4.1. Векторна діаграма імпульсів (до прикладу 4.6.)

Двохступеневу реакцію практично неможливо розрахувати, тому треба вважати, що процес випромінювання кванту відбувається відразу після утворення літію.

Закон збереження імпульсу в скалярному вигляді, з урахуванням умови прикладу (кут між напрямками руху нейтрино та літію складає 90°) (див. Рис. 4.1) запишеться як:

$$p_{Li}^2 = p_\gamma^2 - p_\nu^2 \quad (4.6.2)$$

Врахуємо, що нейтрино та γ – квант рухаються зі швидкістю світла, тобто їх енергії відповідно складають $E_\nu = p_\nu c$ та $\hbar\omega = p_\gamma c$. Якщо помножити рівняння (4.6.2) на c^2 , то воно буде пов'язувати між собою енергії частинок:

$$2m_{Li}E_{\kappa Li}c^2 = (\hbar\omega)^2 - E_\nu^2. \quad (4.6.3)$$

З іншого боку, треба ще одне співвідношення, яке міститиме енергію нейтрино, щоб розрахувати шукану енергію ядра літію. Таким співвідношенням буде закон збереження енергії, записаний за умови, що материнське ядро знаходилося в стані спокою:

$$Q = \hbar\omega + E_\nu + E_{\kappa Li}, \quad (4.6.4)$$

де енергетичний вихід реакції можна виразити через дефекти мас ядер берилію Δ_{Be} та літію Δ_{Li} (див. приклад №4, розділ 1):

$$Q = (m_{Be} + m_e - m_{Li})c^2 = (\Delta_{Be} - \Delta_{Li} + m_e)c^2. \quad (4.6.5)$$

Підстановка числових значень до (4.6.5) дає

$$Q = (0,016931 - 0,016005 + 5,486 \cdot 10^{-4}) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 1,37 \text{ MeV}$$

Отже, квадратне рівняння відносно шуканої кінетичної енергії атома літію можна записати за допомогою (4.6.3) та (4.6.4):

$$E_{\kappa Li}^2 + 2E_{\kappa Li}(m_{Li}c^2 + \hbar\omega - Q) + Q(Q - 2\hbar\omega) = 0 \quad (4.6.6)$$

Єдиний фізичний розв'язання рівняння (4.6.6):

$$E_{\kappa Li} = Q - \hbar\omega - m_{Li}c^2 + \sqrt{(\hbar\omega + m_{Li}c^2)^2 - 2m_{Li}c^2Q}. \quad (4.6.7)$$

Окремо порахуємо масу спокою ядра літію:

$$m_{Li}c^2 = \Delta_{Li} + A_{Li} = 7,016005 \cdot 931,5 = 6535,41 \text{ MeV}.$$

Значення кінетичної енергії ядра віддачі дорівнюватиме

$$E_{\kappa Li} = \sqrt{(0,72 + 6535,41)^2 - 2 \cdot 6535,41 \cdot 1,37} + 1,37 - 0,72 - 6535,41 \approx 7,34 \text{ eV}. \quad (4.6.8)$$

Формулу (4.6.7) можна суттєво спростити, якщо знехтувати в (4.6.6) доданком $E_{\kappa Li}^2$ (правомірність цього є очевидною). В такому випадку кінетична енергія літію виражатиметься наступним чином:

$$E_{\kappa Li} \approx \frac{Q(2\hbar\omega - Q)}{2(m_{Li}c^2 + \hbar\omega - Q)}. \quad (4.6.9)$$

Числове значення енергії, розрахованої за формулою (4.6.10), становить:

$$E_{\kappa Li} = \frac{1,37(2 \cdot 0,72 - 1,37)}{2(6535,41 + 0,72 - 1,37)} = 7,338 \text{ eV}. \quad (4.6.11)$$

Як бачимо, ми отримали практично той самий результат, що й при обчисленні за точною формулою (4.6.7).

Якщо ж дочірнє ядро виникає безпосередньо в основному стані, то такому процесу відповідатиме реакція



При цьому закони збереження імпульсу та енергії виглядатимуть наступним чином: $p_{Li} = p_\nu$ та $Q = E_\nu + E_{\kappa Li}$. Розв'яжемо систему з цих двох рівнянь відносно $E_{\kappa Li}$:

$$Q = p_\nu c + \frac{p_\nu^2}{2m_{Li}} \Rightarrow p_\nu = m_{Li}c \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_{Li}c^2}} \right) \Rightarrow$$

$$E_{Li} = Q - p_\nu c = Q - m_{Li}c^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_{Li}c^2}} \right). \quad (4.6.13)$$

Розкладемо вираз (4.6.13) у ряд Тейлора з точністю до квадратичного доданку:

$$E_{Li} \approx Q - m_{Li}c^2 \left(\frac{Q}{m_{Li}c^2} - \frac{Q^2}{2m_{Li}^2c^4} \right) = \frac{Q^2}{2m_{Li}c^2}. \quad (4.6.14)$$

Підставивши числові значення, отримаємо кінетичну енергію віддачі при утворенні дочірнього ядра в основному стані:

$$E_{Li} = \frac{1,37^2 \text{ MeV}^2}{2 \cdot 7,016005 \cdot 931,5 \text{ MeV}} = 143,6 \text{ eV}. \quad (4.6.15)$$

Розрахунок показує, що кінетична енергія дочірнього ядра буде більшою у випадку утворення ядра в основному стані. При утворенні ядра в збудженому стані частина енергії „виноситься” електронним нейтрино та γ – квантом.

5. ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЕФЕКТ МЕСБАУЕРА

Приклад 1. Ізотропне ядро $^{109}\text{Ag}^m$ під час переходу до основного стану випромінює або γ -квант з енергією 87keV , або конверсійний К-електрон з параметром $B\rho = 860\text{ Гс} \cdot \text{см}$. Розрахувати енергію зв'язку К-електрона.

Розв'язання: Перетворення ізотропного ядра $^{109}\text{Ag}^m$ відбувається за двома можливими каналами, що конкурують між собою:

$$^{109}_{47}\text{Ag}^m \rightarrow ^{109}_{47}\text{Ag} + \gamma; \quad (5.1.1)$$

$$^{109}_{47}\text{Ag}^m \rightarrow ^{109}_{47}\text{Ag}^+ + \beta^-. \quad (5.1.2)$$

Для характеристики імовірності перетворення за каналом (5.1.2) вводиться коефіцієнт внутрішньої конверсії, що дорівнює відношенню імовірності випускання конверсійного електрона до імовірності випромінювання γ -кванта. Як правило, коефіцієнти внутрішньої конверсії є набагато меншими за одиницю (див. приклад 2).

Під час подальших розрахунків будемо вважати, що материнське ядро знаходиться у спокої. Запишемо закон збереження енергії для реакції (5.1.1):

$$E^* = E_{\text{KAg}} + \hbar\omega, \quad (5.1.3)$$

де E^* — енергія збудження ізотропного ядра $^{109}\text{Ag}^m$, E_{KAg} — кінетична енергія ядра віддачі. Приймаючи до уваги, що початковий імпульс ядра нульовий, виразимо зв'язок між енергіями γ -кванта та ядра віддачі:

$$E_{\text{KAg}} = \frac{p^2}{2m_{\text{Ag}}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{Ag}}c^2}, \quad (5.1.4)$$

де враховано, що $\hbar\omega = pc$, p — імпульс γ -кванта. З урахуванням (5.1.4), рівняння (5.1.3) перепишемо наступним чином:

$$E^* = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{Ag}}c^2} + \hbar\omega. \quad (5.1.5)$$

Закон збереження енергії для реакції (5.1.2) матиме вигляд:

$$E^* = E'_{\text{KAg}} + E_{\text{зв}} + E_{\beta}, \quad (5.1.6)$$

де E'_{KAg} — кінетична енергія ядра віддачі в реакції (5.1.2), $E_{\text{зв}}$, E_{β} — енергія зв'язку в дочірньому атомі та кінетична енергія конверсійного електрона. Зв'язок між кінетичною енергією релятивістського електрона та його імпульсом в загальному випадку записується так:

$$E_{\beta} = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2. \quad (5.1.7)$$

Враховуючи, що імпульс електрона, який рухається в однорідному магнітному полі з індукцією B в площині, перпендикулярній до силових ліній поля, дорівнює (в системі СІ):

$$p = eB\rho, \quad (5.1.8)$$

де ρ — радіус траєкторії електрона, перепишемо вираз (5.1.7):

$$E_{\beta} = \sqrt{(eB\rho c)^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2 = m_ec^2 \left(-1 + \sqrt{\left(\frac{eB\rho}{m_ec}\right)^2 + 1} \right). \quad (5.1.9)$$

Імпульси продуктів реакції (5.1.2) рівні, оскільки материнське ядро знаходилося у спокої. В такому разі можемо з (5.1.7) виразити імпульс електрона:

$$\begin{aligned} (E_{\beta} + m_ec^2)^2 &= p^2c^2 + m_e^2c^4 \Rightarrow \\ p^2 &= \frac{E_{\beta}^2 + 2m_ec^2E_{\beta}}{c^2} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

та підставити його у вираз для кінетичної енергії ядра віддачі:

$$E'_{kAg} = \frac{p^2}{2m_{Ag}} = \frac{E_{\beta}^2 + 2m_e c^2 E_{\beta}}{2m_{Ag} c^2}. \quad (5.1.11)$$

З урахуванням (5.1.11), закон збереження енергії (5.1.6) переписується так:

$$E^* = \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} + \left(1 + \frac{m_e}{m_{Ag}}\right) E_{\beta} + E_{ze} \approx \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} + E_{\beta} + E_{ze}, \quad (5.1.12)$$

оскільки виконується співвідношення $m_e \ll m_{Ag}$, причому E_{β} задається виразом (5.1.9). З (5.1.12) знаходимо енергію зв'язку конверсійного електрона:

$$E_{ze} = E^* - \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} - E_{\beta}, \quad (5.1.13)$$

або, приймаючи до уваги (5.1.5),

$$E_{ze} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{Ag} c^2} + \hbar\omega - \frac{E_{\beta}^2}{2m_{Ag} c^2} - E_{\beta}. \quad (5.1.14)$$

Вираз (5.1.14) можна суттєво спростити, якщо врахувати, що $(\hbar\omega)^2, E_{\beta}^2 \ll 2m_{Ag} c^2$; в такому разі отримаємо наближену формулу для розрахунку енергії зв'язку К-електрона:

$$E_{ze} \approx \hbar\omega - E_{\beta} = \hbar\omega + m_e c^2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{eB\rho}{m_e c}\right)^2 + 1}\right). \quad (5.1.15)$$

Підставивши в (5.1.15) дані з умови задачі, отримаємо:

$$E_{ze} \approx 87 \cdot 10^3 \text{ eV} - 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV} \left(\sqrt{\left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 860 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \right)^2 + 1} - 1 \right) =$$

$$= 25,8 \cdot 10^3 \text{ eV} \approx 26 \text{ кеВ}.$$

Точний розрахунок за формулою (5.1.14) приводить до наступного результату:

$$E_{ze} = 87 \cdot 10^3 - 61,2 \cdot 10^3 + \frac{(87)^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 109 \cdot 931,5 \cdot 10^6} - \frac{61,2^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 109 \cdot 931,5 \cdot 10^6} =$$

$$= 25,8 \cdot 10^3 + 1,88 \cdot 10^{-2} (\text{кеВ}).$$

Як бачимо, похибка внаслідок неврахуванням двох малих доданків у (5.1.14) складає лише $7 \cdot 10^{-5} \%$.

Приклад 2. Знайти кількість конверсійних електронів, що випускаються за $t = 1 \text{ с}$ препаратом ^{59}Fe , активність якого $3,7 \cdot 10^7 \text{ Бк}$. Схему β -розпаду ядер ^{59}Fe зображено на Рис. 5.2. Коефіцієнти внутрішньої конверсії відповідних γ -квантів дорівнюють: $\alpha_{\gamma_1} = 1,8 \cdot 10^{-4}$; $\alpha_{\gamma_2} = 1,4 \cdot 10^{-4}$; $\alpha_{\gamma_3} = 7 \cdot 10^{-3}$. Ймовірності випромінювання квантів γ_2 та γ_3 відносяться як 1:15.

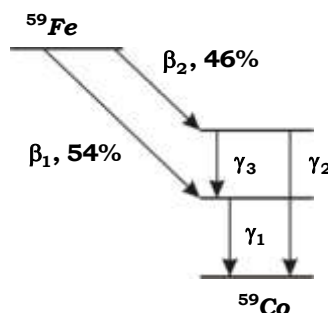
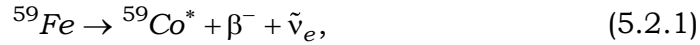


Рис. 5.2. Схema розпаду ізотопу ^{59}Fe

Розв'язання: Запишемо реакцію β – розпаду ядер ^{59}Fe :



Позначимо: $N_0 = 3,7 \cdot 10^7$ — кількість збуджених ядер $^{59}\text{Co}^*$, які утворюються щосекунди, $\eta = 0,46$ — відносна кількість ядер $^{59}\text{Co}^*$, що утворюються в другому збудженому стані, після чого відбувається випромінювання квантів γ_2 та γ_3 , $1 - \eta = 0,54$ — відносна кількість ядер $^{59}\text{Co}^*$, які утворюються в першому збудженому стані, причому збудження знімається шляхом випромінювання кванта γ_1 . Згідно визначення, коефіцієнти внутрішньої конверсії дорівнюють:

$$\alpha_1 = \frac{N_{K1}}{N_{\gamma 1}}; \alpha_2 = \frac{N_{K2}}{N_{\gamma 2}}; \alpha_3 = \frac{N_{K3}}{N_{\gamma 3}}, \quad (5.2.2)$$

де $N_{\gamma 1}, N_{\gamma 2}, N_{\gamma 3}$ — кількість γ – квантів γ_1, γ_2 та γ_3 , N_{K1}, N_{K2}, N_{K3} — кількість відповідних конверсійних електронів, що випромінюються за одиницю часу. Крім того, згідно умови, маємо відношення ймовірностей випромінювання квантів γ_2 та γ_3 :

$$\frac{w_{\gamma 2}}{w_{\gamma 3}} = \frac{N_{\gamma 2}}{N_{\gamma 3}} = \frac{1}{15} = \frac{1}{k}. \quad (5.2.3)$$

Будемо вважати, що переходи зі збуджених станів дочірнього ядра $^{59}\text{Co}^*$ відбуваються миттєво, тобто кількість ядер, що утворюються, дорівнює кількості ядер, що розпадаються (умова рівноваги). У випадку, коли ядро $^{59}\text{Co}^*$ утворюється на другому збудженому рівні, рівноважне рівняння запишеться так:

$$\eta N_0 = N_{\gamma 3} + N_{K3} + N_{\gamma 2} + N_{K2}, \quad (5.2.4)$$

аналогічно, у випадку утворення ядер $^{59}\text{Co}^*$ на першому збудженому рівні

$$(1 - \eta) N_0 + N_{\gamma 3} + N_{K3} = N_{\gamma 1} + N_{K1}. \quad (5.2.5)$$

У лівій частині (5.2.5) враховано, що ядра $^{59}\text{Co}^*$ перейшли з другого збудженого рівня на перший шляхом випромінювання квантів γ_3 та відповідних конверсійних електронів. Приймаючи до уваги (5.2.2), рівняння (5.2.4) та (5.2.5) перепишемо наступним чином:

$$\eta N_0 = N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3) + N_{\gamma 2} (1 + \alpha_2), \quad (5.2.6)$$

$$(1 - \eta) N_0 + N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3) = N_{\gamma 1} (1 + \alpha_1). \quad (5.2.7)$$

З рівняння (5.2.6), з урахуванням (5.2.3), виражаємо кількість квантів γ_2 :

$$\eta N_0 = N_{\gamma 2} (k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2) \Rightarrow N_{\gamma 2} = \frac{\eta N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}, \quad (5.2.8)$$

і відповідну кількість конверсійних електронів N_{K2} :

$$N_{K2} = \alpha_2 N_{\gamma 2} = \frac{\eta \alpha_2 N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}. \quad (5.2.9)$$

Кількість конверсійних електронів N_{K3} знайдемо з наступної рівності:

$$N_{K3} = \alpha_3 N_{\gamma 3} = \alpha_3 k N_{\gamma 2} = \frac{\eta \alpha_3 k N_0}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}. \quad (5.2.10)$$

Приймаючи до уваги (5.2.10), з (5.2.7) можемо знайти число квантів γ_1 , які щосекунди випромінюються радіоактивним препаратом:

$$\begin{aligned} N_{\gamma 1} &= \frac{(1 - \eta) N_0 + N_{\gamma 3} (1 + \alpha_3)}{1 + \alpha_1} = \frac{(1 - \eta) N_0 + \frac{\eta k N_0 (1 + \alpha_3)}{k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2}}{1 + \alpha_1} = \\ &= N_0 \frac{k(1 + \alpha_3) + (1 - \eta)(1 + \alpha_2)}{(1 + \alpha_1)(k(1 + \alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Кількість конверсійних електронів N_{K1} з (5.2.11)

$$N_{K1} = \alpha_1 N_{\gamma 1} = N_0 \alpha_1 \frac{k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \quad (5.2.12)$$

Таким чином, сумарна кількість конверсійних електронів, які випускаються щосекунди препаратом ^{59}Fe , становитиме:

$$\begin{aligned} N_K &= N_{K1} + N_{K2} + N_{K3} = N_0 \alpha_1 \frac{k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)} + \\ &+ \frac{\eta \alpha_2 N_0}{k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2} + \frac{\eta \alpha_3 k N_0}{k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2} = \\ &= N_0 \frac{\alpha_1 (k(1+\alpha_3) + (1-\eta)(1+\alpha_2)) + \eta(\alpha_2 + \alpha_3 k)(1+\alpha_1)}{(1+\alpha_1)(k(1+\alpha_3) + 1 + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Підставляючи у (5.2.13) дані з умови задачі, знаходимо:

$$\begin{aligned} N_K &= 3,7 \cdot 10^7 \left\{ \frac{1,8 \cdot 10^{-4} (15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 0,54(1+1,4 \cdot 10^{-4}))}{(1+1,8 \cdot 10^{-4})(15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 1+1,4 \cdot 10^{-4})} + \right. \\ &\left. + \frac{0,46(1,4 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 7 \cdot 10^{-3})(1+1,8 \cdot 10^{-4})}{(1+1,8 \cdot 10^{-4})(15(1+7 \cdot 10^{-3}) + 1+1,4 \cdot 10^{-4})} \right\} = 1,18 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Приклад 3. Вільне ядро масою M , що знаходилося у спокої, перейшло зі збудженого стану до основного, випроменивши γ -квант. Знайти: а) енергію випроміненого γ -кванта та енергію віддачі $E_{\text{від}}$ ядра, якщо енергія збудження складає E_{12} . Отримати числове значення для ядра ^{191}Ir , якщо $E_{12} = 129 \text{ кеВ}$; б) різницю енергій випроміненого та поглинутого γ -квантів у випадку вільних ядер. Порівняти цю різницю з природною (Γ) та доплерівською шириною ліній (доплерівська ширина дорівнює $E_d = E_{12} \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}$) при $T = 300 \text{ К}$; в) температуру T_0 , при якій доплерівська ширина дорівнюватиме різниці енергій для випромінювання та поглинання.

Розв'язання: а) позначимо: M' – маса ядра після випускання γ -кванта. Тоді енергія збудження $E_{12} = (M - M')c^2$, $\omega_0 = \frac{E_{12}}{\hbar}$ – частота резонансної лінії Месбауера, що відповідає випромінюванню квантів без ефекту віддачі ядер.

Для урахування ефекту віддачі γ -квант, що випроменився, будемо спостерігати в системі координат, де ядро до взаємодії знаходилося у спокої. Запишемо закони збереження енергії та імпульсу:

$$E_{12} = \hbar \omega_{\text{випр}} + \frac{p^2}{2M'}, \quad (5.3.1)$$

$$p = \frac{\hbar \omega_{\text{випр}}}{c}, \quad (5.3.2)$$

де p – імпульс віддачі ядра, $\frac{\hbar \omega_{\text{випр}}}{c}$ – імпульс γ -кванта. Підставивши в (5.3.1) вираз для імпульсу (5.3.2), отримаємо:

$$E_{12} = \hbar \omega_{\text{випр}} + \frac{(\hbar \omega_{\text{випр}})^2}{2M'c^2}. \quad (5.3.3)$$

Це рівняння легко розв'язати відносно $\hbar \omega$:

$$\hbar\omega_{\text{випр}} = E_{\gamma} = -M'c^2 + M'c^2 \sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{M'c^2}} = M'c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{M'c^2}} - 1 \right). \quad (5.3.4)$$

Очевидно, що $2E_{12} \ll M'c^2$, в такому разі можна розкласти підкореневий вираз у (5.3.4) в ряд Тейлора за малим параметром $\frac{2E_{12}}{M'c^2}$ й отримати наближений вираз для енергії γ – кванта:

$$\hbar\omega_{\text{випр}} \approx M'c^2 \left(\frac{E_{12}}{M'c^2} - \frac{E_{12}^2}{2M'^2c^4} \right) = E_{12} - \frac{E_{12}^2}{2M'c^2}, \quad (5.3.5)$$

Рівняння (5.3.5) можна переписати так:

$$E_{12} = \hbar\omega_{\text{випр}} + \frac{E_{12}^2}{2M'c^2}, \quad (5.3.6)$$

де враховано також, що $M' \approx M$. Таким чином, кінетична енергія ядра віддачі $E_{\text{від}} = \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}$, а енергія випроміненого γ – кванта $\hbar\omega_{\text{випр}} = \hbar\omega_0 - \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}$. Підставивши

параметри для ядра ^{191}Ir , знайдемо $E_{\text{від}}(^{191}\text{Ir}) = \frac{129^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} \approx 0,05 \text{ eV}$,

$\hbar\omega \approx E_{12} = 129 \text{ кеВ}$. Відносна зміна енергії γ – кванта під час випромінювання дорівнюватиме:

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{E_{\text{від}}}{E_{12}} = \frac{E_{12}}{2Mc^2} = \frac{129 \cdot 10^3}{2 \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} \approx 3,6 \cdot 10^{-7}. \quad (5.3.7)$$

б) Подивимось тепер, як змінюватиметься енергія γ – кванта за рахунок віддачі під час поглинання його таким самим вільним ядром з масою M . Очевидно, що в цьому випадку енергії γ – кванта, який поглинається, повинно вистачити для збудження ядра та компенсації енергії віддачі, що виникає під час поглинання:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = E_{12} + \frac{p^2}{2M'}, \quad (5.3.8)$$

де E_{12} – енергія збудження ядра, що поглинає γ – квант, $\frac{p^2}{2M'}$ – енергія віддачі ядра, $M' = M + \frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c^2}$ – маса ядра після поглинання кванта. Як і раніше, будемо вважати, що маса ядра практично не змінюється (маса фотона $\frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c^2} \ll M$), тому в (5.3.8) можемо покласти $M' \approx M$. Оскільки імпульси γ – кванта та ядра віддачі рівні: $\frac{\hbar\omega_{\text{погл}}}{c} = p$, вираз (5.3.8) перепишемо так:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = E_{12} + \frac{(\hbar\omega_{\text{погл}})^2}{2Mc^2}. \quad (5.3.9)$$

Розв'язуючи рівняння (5.3.9) відносно $\hbar\omega_{\text{погл}}$, знаходимо:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} = Mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2E_{12}}{Mc^2}} \right). \quad (5.3.10)$$

Аналогічно до вищевикладеного, знаходимо наближений вираз для енергії кванта, що поглинається, за умови $2E_{12} \ll Mc^2$:

$$\hbar\omega_{\text{погл}} \approx Mc^2 \left(\frac{E_{12}}{Mc^2} + \frac{E_{12}^2}{2M^2c^4} \right) = \hbar\omega_0 + \frac{E_{12}^2}{2Mc^2}, \quad (5.3.11)$$

де використано рівність $E_{12} = \hbar\omega_0$. Таким чином, лінія поглинання зсунута відносно мессбауерівської частоти ω_0 на величину $\frac{E_{12}^2}{2Mc^2}$, яка дорівнює кінетичній енергії віддачі.

Остаточно, різниця енергій випроміненого та поглинутого γ -квантів дорівнює:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{погл}} - \omega_{\text{випр}} = \frac{E_{12}^2}{Mc^2} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{Mc^2}. \quad (5.3.12)$$

Резонансне поглинання на вільних ядрах було б можливим, якби ширина збудженого рівня Γ ядра була більшою за зміну енергій квантів при поглинанні та випромінюванні: $\Gamma \geq \frac{E_{12}^2}{Mc^2}$.

Відносна природна ширина збудженого рівня з $E_{12} = 129 \text{ кеВ}$ у ядрі ^{191}Ir : $\frac{\Gamma}{E_{12}} = 4 \cdot 10^{-11}$. Бачимо, що ця величина є набагато меншою за відносну зміну енергій

γ -кванта: $\frac{E_{12}}{Mc^2} = 7,2 \cdot 10^{-7}$. Таким чином, резонансне поглинання γ -кванта на вільних ядрах неможливе.

Врахуємо тепер доплерівське уширення ліній випромінювання та поглинання, яке виникає під час теплового руху вільних атомів: $\frac{E_d}{E_{12}} = \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}}$, де T — термодинамічна температура джерела. Доплерівське уширення відіграє основну роль у випадку джерел, що містять багато вільних атомів або молекул. Підставляючи значення $T = 300 \text{ К}$, знайдемо відносну доплерівську ширину:

$$\frac{E_d}{E_{12}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 300 \text{ К}}{191 \cdot 931,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}}} \approx 0,04 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

в) Температура T_0 , при якій доплерівська ширина дорівнює різниці енергій випроміненого та поглинутого γ -кванта:

$$\sqrt{\frac{2kT_0}{Mc^2}} = \frac{E_{12}}{Mc^2} \Rightarrow T_0 = \frac{E_{12}^2}{2kMc^2}. \quad (5.3.13)$$

Для ядер ^{191}Ir ця температура дорівнюватиме $T_0 = \frac{129^2 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 191 \cdot 931,5 \cdot 10^6} = 542 \text{ К}$. При такій температурі стає можливим резонансне поглинання частини потоку квантів ядрами, що входять до складу вільних атомів або молекул (плазма, газ).

Приклад 4. Ефект Мессбауера полягає в тому, що в кристалах можуть реалізуватись процеси випромінювання та поглинання γ -квантів без передачі енергії віддачі, або «без віддачі ядер». В цьому випадку закон збереження імпульсу виконується за рахунок передачі імпульсу всьому кристалу (колективний процес). Лінії випромінювання та поглинання без віддачі мають природну ширину.

Кристал ^{191}Ir випромінює γ -кванти з енергією $\hbar\omega_0 = 129 \text{ кеВ}$. Лінія Мессбауера має ширину $\Gamma = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ еВ}$. Припустимо, що кристал, який випромінює γ -кванти, рухається зі швидкістю \vec{v} , а кристал, що поглинає, знаходиться у спокої. Знайти найменшу швидкість \vec{v} джерела, яку можна зареєструвати за зміною величини поглинання γ -квантів. Вважати, що з упевненістю можна зареєструвати доплерівську зміну частоти γ -квантів, яка дорівнює $\frac{1}{6}$ ширини мессбауерівської лінії.

Розв'язання: Зміна частоти кванта за рахунок ефекту Доплера (нерелятивістська формула): $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)$, де v – швидкість джерела, ϑ – кут між вектором швидкості джерела та напрямком спостереження. При повздовжньому ефекті $\cos \vartheta = 1$, тому відносна зміна частоти γ -кванта за рахунок руху джерела становитиме: $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{v}{c}$. Покладаючи, що $\hbar\Delta\omega = \frac{1}{6}\Gamma$, знаходимо мінімальну швидкість джерела, яку можна зафіксувати:

$$\frac{v}{c} \hbar\omega_0 = \frac{\Gamma}{6} \Rightarrow v = c \frac{\Gamma}{6\hbar\omega_0} = 3 \cdot 10^8 \frac{4,6 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 129 \cdot 10^3} = 1,7 \text{ мм/с}.$$

Приклад 5. Джерело γ -квантів розташоване над поглиначем на висоті 20 м. З якою швидкістю треба рухати вгору джерело, щоб у місці розташування поглинача повністю компенсувати гравітаційну зміну енергії γ -кванта, обумовлену гравітаційним полем Землі?

Розв'язання: Використаємо принцип еквівалентності, згідно якого рух фотона з масою $m = \frac{h\nu_0}{c^2}$ в гравітаційному полі еквівалентний до знаходження фотона в системі координат, що рухається з прискоренням \vec{g} . Відстань по вертикалі l фотон проходить за час $\Delta t = \frac{l}{c}$. При наявності прискорення це буде еквівалентне тому, що система відліку змінить свою швидкість на $\Delta v = g\Delta t$. За рахунок ефекту Доплера це призведе до зміни частоти фотона:

$$\Delta v = v \frac{\Delta v}{c} = v \frac{gl}{c^2}. \quad (5.5.1)$$

Такий ефект називається фіолетовим зміщенням частоти фотона. Під час руху фотона вгору частота його зменшується на таку саму величину (червоне зміщення).

Основним методом вимірювання гравітаційного зміщення частоти є резонансне месбауерівське поглинання. Для компенсації гравітаційного зміщення необхідно забезпечити доплерівське зміщення частоти за рахунок руху джерела γ -квантів або поглинача.

Нерелятивістська формула для доплерівської зміни частоти

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right), \quad (5.5.2)$$

де ϑ – кут між напрямком руху джерела та напрямком спостереження; при повздовжньому ефекті $\cos \vartheta = -1$, тоді

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \Delta v = v_0 - v = v_0 \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta E_d = h\nu_0 \frac{v}{c}. \quad (5.5.3)$$

У даному випадку джерело необхідно рухати вгору для компенсації гравітаційного збільшення частоти фотона.

Прирівнюючи (5.5.1) та (5.5.3), одержуємо швидкість руху джерела:

$$\frac{h\nu_0}{c^2} gl = h\nu_0 \frac{v}{c} \Rightarrow v = \frac{gl}{c}. \quad (5.5.4)$$

Підставивши числові значення в (5.5.4), для швидкості руху джерела отримаємо

$$v = \frac{9,8 \cdot 20}{3 \cdot 10^8} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с} = 0,65 \text{ мкм/с}. \quad (5.5.5)$$

Приклад 6. Під час випромінювання γ – квантів, які відповідають месбауерівській лінії, середній імпульс атома, що випромінює, не змінюється. Середня ж кінетична енергія такого атома, яка відповідає коливальному стану атома в матриці, зростає внаслідок зменшення його маси на величину $\frac{\hbar\omega_0}{c^2}$, де $\hbar\omega_0$ – енергія γ -кванта. Це призводить до того, що частота месбауерівської лінії виявляється дещо меншою за частоту переходу ω_0 , а саме: $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} \right)$, де $\langle v \rangle^2$ – квадрат середньої квадратичної швидкості атома.

а) Отримати цей вираз з енергетичних міркувань та пояснити, в якому випадку такий ефект можна спостерігати за допомогою звичайної техніки спостереження ефекту Месбауера.

б) На скільки градусів температура джерела повинна бути більшою за температуру поглинача, щоб температурне зміщення месбауерівської γ – лінії ^{57}Fe повністю компенсувало гравітаційне зміщення, якщо джерело знаходиться над поглиначем на відстані $l = 20 \text{ м}$? Вважати, що середня кінетична енергія атомів у кристалі дорівнює $\frac{3}{2}kT$.

Розв’язання: а) Середня кінетична енергія атома $\langle E_k \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2M}$, де $\langle p \rangle^2$ – квадрат середнього квадратичного імпульсу атома, M – його маса. Під час випромінювання γ – кванта, маса атома зменшується на величину $\frac{\hbar\omega_0}{c^2}$, а кінетична енергія зростає на $\delta\langle E_k \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2M^2} \delta M = \frac{\langle p \rangle^2}{2M^2} \frac{\hbar\omega_0}{c^2}$. Таким чином, енергія випроміненого фотона зменшується і становитиме:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 - \delta\langle E_k \rangle = \hbar\omega_0 \left(1 - \frac{\langle p \rangle^2}{2M} \frac{1}{Mc^2} \right). \quad (5.6.1)$$

Формулу (5.6.1) можна записати через середню квадратичну швидкість атома:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \left(1 - \frac{M\langle v \rangle^2}{2} \frac{1}{Mc^2} \right) = \hbar\omega_0 \left(1 - \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} \right). \quad (5.6.2)$$

Величину зміщення частоти фотона можемо оцінити, врахувавши, що квадрат середньої квадратичної швидкості атома $\langle v \rangle^2 \approx 1,73^2 \frac{kT}{M}$ [15], при $T = 300 \text{ К}$ для ядра ^{57}Fe її величина становитиме

$$\langle v \rangle^2 \approx 1,73^2 \frac{0,025 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} / \text{eV}}{57 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ з}} \approx 1,3 \cdot 10^9 \text{ см}^2 / \text{с}^2,$$

з (5.6.2) отримаємо відносно зміну енергії γ – кванта:

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_0} = \frac{\langle v \rangle^2}{2c^2} = \frac{1,3 \cdot 10^9}{2 \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 7 \cdot 10^{-13}. \text{ Як бачимо, величина такого зміщення має порядок}$$

ширини γ – лінії Месбауера (для ^{57}Fe $\frac{\Gamma}{\hbar\omega_0} = 3,0 \cdot 10^{-13}$).

Під час поглинання енергія γ – кванта також зменшується, оскільки зменшується кінетична енергія атома. Оскільки цей ефект діє однаково під час поглинання та випромінювання γ – квантів, спостерігати його можна лише в тому випадку, коли різними будуть температури випромінювача та поглинача. Відносне зміщення ліній випромінювання та поглинання становить:

$$\frac{\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2c^2} \left(\langle v_1 \rangle^2 - \langle v_2 \rangle^2 \right). \quad (5.6.3)$$

б) Вважаючи, що $\langle E_k \rangle = \frac{M \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, у формулі (5.6.2) виразимо зміну частоти γ – кванта через температуру джерела:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \left(1 - \frac{3kT}{2Mc^2} \right). \quad (5.6.4)$$

З урахуванням (5.6.4), відносна зміна частоти γ – кванта, яка виникає внаслідок зміни температури δT :

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{3k}{2Mc^2} \delta T. \quad (5.6.5)$$

Відносне гравітаційне зміщення частоти фотона, що рухається в полі сили тяжіння, з (5.5.1): $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{gl}{c^2}$, де l – відстань, яку пройшов фотон. Прирівнюючи цей вираз та (5.6.5), знаходимо різницю температур між джерелом та поглиначем:

$$\frac{3k}{2Mc^2} \delta T = \frac{gl}{c^2} \Rightarrow \delta T = \frac{2Mgl}{3k}. \quad (5.6.6)$$

підставивши у (5.6.6) параметри задачі, знайдемо:

$$\delta T = \frac{2 \cdot 57 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 20 \text{ м}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}} = 0,9 \text{ К}.$$

6. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ З ЗАРЯДЖЕНИМИ ЧАСТИНКАМИ

6.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Літієву мішень опромінюють пучком протонів з кінетичною енергією, яка в $\eta = 1,5$ рази перевищує порогове значення. Знайти енергію нейтронів, які вилітають в результаті реакції ${}^7\text{Li}(p,n){}^7\text{Be} - 1,65 \text{ MeV}$ під кутом 90° до пучка протонів.

Розв'язання: В умові прикладу використано еквівалентний запис ядерної реакції типу $A(a,b)B$, де A — ядро мішені (материнське); a — частинка, яка викликає ядерну реакцію; b — легка частинка, яка утворюється в результаті реакції; B — дочірнє ядро. Причому ядро A та частинка a складають вхідний канал реакції, вихідним каналом реакції є ядро B та частинка b . Цей запис ядерної реакції бомбардування протонами літію можна також представити у звичайному вигляді:



Для розв'язування задач такого типу записують закони збереження енергії та імпульсу.

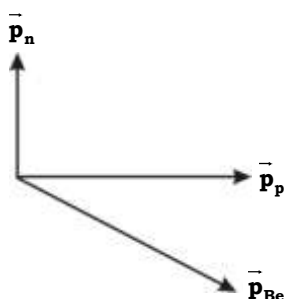


Рис. 6.1. Векторна діаграма імпульсів

Закон збереження імпульсу представимо у векторному вигляді з урахуванням того, що материнське ядро знаходилося в стані спокою:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_n + \vec{p}_{\text{Be}}. \quad (6.1.2)$$

Оскільки напрямок руху протонів та нейтронів утворюють кут, який дорівнює 90° (Рис. 6.1.), то за теоремою Піфагора закон (6.1.2) можна переписати в скалярному вигляді:

$$p_{\text{Be}}^2 = p_n^2 + p_p^2, \quad (6.1.3 \text{ а})$$

або в нерелятивістському наближенні, яке є справедливим для всіх частинок в даному випадку:

$$E_{\text{Be}} = \frac{m_n E_{\text{Kn}} + m_p E_{\text{Kp}}}{M_{\text{Be}}}, \quad (6.1.3 \text{ б})$$

де M_{Be} — маса ядра берилію, E_{Kn} , E_{Kp} та E_{Be} — кінетичні енергії нейтрона, протона та ядра берилію відповідно.

Кінетичну енергію протона можна представити через значення його порогової енергії E_p^{nop} :

$$E_{\text{Kp}} = \eta E_p^{\text{nop}} = \eta \frac{M_{\text{Li}} + m_p}{M_{\text{Li}}} |Q|, \quad (6.1.4)$$

де M_{Li} — маса ядра літію, $|Q|$ — енергія реакції (6.1.1).

Енергетичний вихід реакції (6.1.1) дорівнюватиме різниці сумарної кінетичної енергії $\sum E_{\text{Kf}}$ частинок, які утворилися в результаті реакції, та сумарної кінетичної енергії $\sum E_{\text{Ki}}$ частинок, які вступили до реакції, тобто закон збереження енергії виглядатиме наступним чином:

$$Q = \sum E_{\text{Kf}} - \sum E_{\text{Ki}} = E_{\text{Kn}} + E_{\text{Be}} - E_{\text{Kp}}. \quad (6.1.5)$$

Оскільки дана реакція є ендоенергетичною, це означає, що енергія реакції від'ємна, тому закон (6.1.5) слід переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} -|Q| &= E_{\kappa n} + E_{\kappa Be} - E_{\kappa p} \Rightarrow \\ E_{\kappa p} &= |Q| + E_{\kappa Be} + E_{\kappa n}. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

З формули (6.1.6) виразимо кінетичну енергію дочірнього ядра берилію $E_{\kappa Be}$ та прирівняємо отриманий вираз до (6.1.3 б):

$$\begin{aligned} \frac{m_n E_{\kappa n} + m_p E_{\kappa p}}{M_{Be}} &= E_{\kappa p} - |Q| - E_{\kappa n} \Rightarrow \\ E_{\kappa n} &= \frac{E_{\kappa p} (M_{Be} - m_p) - |Q| M_{Be}}{M_{Be} + m_n}. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Також треба взяти до уваги вираз (6.1.4) для кінетичної енергії протона. Тоді співвідношення (6.1.7) перетвориться на наступне:

$$E_{\kappa n} = \frac{|Q| \left[\eta (M_{Be} - m_p) (M_{Li} + m_p) - M_{Be} M_{Li} \right]}{(M_{Be} + m_n) M_{Li}}. \quad (6.1.8)$$

З довідкових таблиць [8] візьмемо значення мас ядер даних ізотопів берилію та літію: $M_{Be} = 7,016931 \text{ а.о.м.}$ та $M_{Li} = 7,016005 \text{ а.о.м.}$ Підставляючи числові значення до виразу (6.1.7), знайдемо кінетичну енергію нейтронів:

$$E_{\kappa n} = 0,68 \text{ MeV.}$$

Приклад 2. Обчислити енергію реакції $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$, якщо енергія α -частинок, які налітають на мішень, складає $E_{\kappa\alpha} = 4 \text{ MeV}$, а протон, який вилетів під кутом $\theta = 60^\circ$ до напрямку руху α -частинок, має кінетичну енергію $E_{\kappa p} = 2,08 \text{ MeV}$.

Розв'язання: Закон збереження імпульсу у векторному вигляді для реакції $^{14}\text{N} + ^4\text{He} \rightarrow p + ^{17}\text{O}$ записується так:

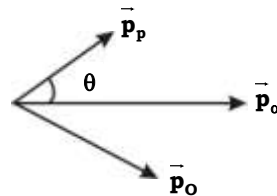


Рис. 6.2. Векторна діаграма імпульсів

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_O + \vec{p}_p. \quad (6.2.1)$$

Використовуючи векторну діаграму імпульсів (Рис. 6.2.), рівняння (6.2.1) за допомогою теореми косинусів розпишемо в скалярному вигляді:

$$p_O^2 = p_\alpha^2 + p_p^2 - 2p_\alpha p_p \cos \theta. \quad (6.2.2)$$

Енергетичний вихід даної реакції можна записати через кінетичні енергії частинок та ядер, що приймають в ній участь (враховуємо, що ядро азоту знаходилося в стані спокою):

$$Q = E_{\kappa p} + E_{\kappa O} - E_{\kappa\alpha}. \quad (6.2.3)$$

Рух всіх частинок та ядер в даному випадку можна розглядати в нерелятивістському наближенні, співвідношення (6.2.3) переписемо, врахувавши (6.2.2):

$$\begin{aligned} Q &= E_{\kappa p} - E_{\kappa\alpha} + \frac{p_\alpha^2 + p_p^2 - 2p_\alpha p_p \cos \theta}{2M_O} = E_{\kappa p} - E_{\kappa\alpha} + \\ &+ E_{\kappa\alpha} \frac{M_\alpha}{M_O} + E_{\kappa p} \frac{m_p}{M_O} - 2 \sqrt{\frac{m_p M_\alpha}{M_O^2}} \cdot E_{\kappa p} \cdot E_{\kappa\alpha} \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Спростимо вираз (6.2.4) та врахуємо, що $\cos 60^\circ = 1/2$:

$$Q = E_{\kappa p} \left(1 + \frac{m_p}{M_O} \right) - E_{\kappa \alpha} \left(1 - \frac{M_\alpha}{M_O} \right) - \frac{\sqrt{m_p M_\alpha}}{M_O} \sqrt{E_{\kappa p} \cdot E_{\kappa \alpha}}. \quad (6.2.5)$$

Підставляючи числові значення у (6.2.5), знайдемо енергію даної реакції: $Q = -1,2 \text{ MeV}$. Таким чином, реакція $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ є ендоенергетичною. Порогова енергія налітаючих частинок дорівнює:

$$E_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_N} \right) \approx 1,54 \text{ MeV}.$$

Приклад 3. Знайти енергію нейтронів, які вилітають при фоторозщепленні берилію за реакцією $^9\text{Be}(\gamma, n)^8\text{Be}$ γ -квантами з енергією $\hbar\omega = 1,78 \text{ MeV}$. Енергетичний вихід реакції складає $Q = -1,65 \text{ MeV}$.

Розв'язання: Реакції даного типу прийнято називати такими, що проходять через компаунд-ядро, або складене (проміжне) ядро. Компаунд-ядро утворюється внаслідок формування стану статистичної рівноваги системи. В результаті поглинання гамма-кванту ізотопом берилію ^9Be утворюється збуджене компаунд-ядро $^9\text{Be}^*$, тобто відбувається реакція:



Запишемо для реакції (6.3.1) закони збереження імпульсу та енергії:

$$\frac{\hbar\omega}{c} = M_{^9\text{Be}} v_{^9\text{Be}} \quad \text{та} \quad \hbar\omega = E_{\kappa \text{Be}} + E^*, \quad (6.3.2)$$

де $M_{^9\text{Be}}$ — маса ядра берилію, а $v_{^9\text{Be}}$ та $E_{\kappa \text{Be}}$ — його швидкість та кінетична енергія, E^* — енергія збудження ядра ^9Be .

З системи рівнянь (6.3.2) можна визначити енергію переходу ядра ^9Be з основного до збудженого стану:

$$E^* = \hbar\omega \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{^9\text{Be}}c^2} \right). \quad (6.3.3)$$

Збуджене ядро берилію-9 перетворюється на ядро берилію-8, випускаючи нейтрон:



Будемо вважати, що момент розпаду проміжного ядра $^9\text{Be}^*$ відбувається після його зупинки, це буде цілком справедливим припущенням, якщо час життя ядра $^9\text{Be}^*$ є досить великим, щоб воно встигло досягти теплової рівноваги з середовищем, в якому знаходиться. В протилежному випадку кінетична енергія ядра $^9\text{Be}^*$ є

достатньо малою величиною ($E_{\kappa \text{Be}} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2M_{^9\text{Be}}c^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}$), щоб нею можна було

знехтувати в законі збереження енергії для реакції (6.3.4).

Таким чином, нейтрон та ядро ^8Be , що народжуються в результаті розпаду збудженого ядра берилію $^9\text{Be}^*$, рухатимуться в протилежних напрямках, тому закон збереження імпульсу в скалярному вигляді виглядатиме наступним чином:

$$p_{^8\text{Be}} = p_n, \quad (6.3.5)$$

де $p_{^8\text{Be}}$ та p_n — відповідні імпульси ядра ^8Be та нейтрона.

Вихід ядерної реакції дорівнює різниці сумарної кінетичної енергії нейтрона і ядра ^8Be та енергії збудження нукліда $^9\text{Be}^*$, тобто закон збереження енергії матиме вигляд:

$$E^* = E_{\kappa n} + E_{\kappa ^8\text{Be}} + |Q|. \quad (6.3.6)$$

тут $E_{\kappa \text{ } ^8\text{Be}}$ та $E_{\kappa n}$ — кінетичні енергії продуктів реакції.

Використовуючи вираз (6.3.5), знайдемо кінетичну енергію ядра ^8Be , яке утворилося в результаті реакції (6.3.4):

$$E_{\kappa \text{ } ^8\text{Be}} = \frac{(p_{^8\text{Be}})^2}{2M_{^8\text{Be}}} = \frac{(p_n)^2}{2M_{^8\text{Be}}} = \frac{m_n E_{\kappa n}}{M_{^8\text{Be}}}, \quad (6.3.7)$$

де $M_{^8\text{Be}}$ та m_n — маси ядра ^8Be та нейтрона відповідно.

Перепишемо рівняння (6.3.6) з урахуванням виразів (6.3.3) та (6.3.7):

$$\hbar\omega \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{^9\text{Be}}c^2} \right) = E_{\kappa n} \left(1 + \frac{m_n}{M_{^8\text{Be}}} \right) + |Q|, \quad (6.3.8)$$

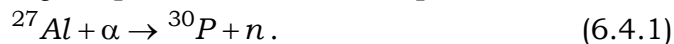
звідки знайдемо шукану кінетичну енергію нейтрона:

$$E_{\kappa n} = \left(1 + \frac{m_n}{M_{^8\text{Be}}} \right)^{-1} \left[\hbar\omega \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2M_{^9\text{Be}}c^2} \right) - |Q| \right]. \quad (6.3.9)$$

Підстановка числових значень до виразу (6.3.9) дає кінетичну енергію нейтрона $E_{\kappa n} = 0,115 \text{ MeV}$.

Приклад 4. Під час опромінювання товстої алюмінієвої мішені пучком α -частинок з кінетичною енергією $E_{\kappa\alpha} = 7 \text{ MeV}$ в результаті реакції (α, n) випромінюється потік нейтронів $J_n = 1,6 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$. Знайти вихід та середній переріз даної реакції, якщо струм α -частинок складає $I_\alpha = 50 \text{ мкА}$.

Розв'язання: Реакцію, яку ми розглядатимемо в прикладі, можна записати як



Середній переріз $\langle \sigma \rangle$ ядерної реакції, яка відбувається в товстій мішені, можна оцінити наступним чином:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{w}{n_0 R_\alpha^{\text{Al}}}, \quad (6.4.2)$$

де $n_0 = N_A \cdot \frac{\rho}{\mu}$ — концентрація ядер в мішені ($N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ — число Авогадро), R_α^{Al} — середній пробіг α -частинки в алюмінію, w — вихід ядерної реакції.

У реальних фізичних дослідах далеко не завжди вдається безпосередньо виміряти диференціальний $d\sigma$ або інтегральний σ ефективний перерізи реакції. Безпосередньо вимірюваною величиною є вихід реакції w — кількість частинок пучка ΔN , які зазнали ядерної взаємодії з частинками мішені за секунду в середньому, по відношенню до загальної кількості частинок N_0 :

$$w = \frac{\Delta N}{N_0} = n_0 \sigma d, \quad (6.4.3)$$

де d — товщина шару речовини мішені. Ця формула справедлива, якщо $w \ll 1$. Тобто, виходом ядерної реакції фактично є відносне число зареєстрованих вторинних частинок.

В даному випадку виходом реакції можна вважати відношення потоків нейтронів та α -частинок. Потік α -частинок виражається таким співвідношенням:

$J_\alpha = \frac{N_\alpha}{\Delta t}$, струм дорівнює $I_\alpha = \frac{q_\alpha N_\alpha}{\Delta t}$, де $q_\alpha = 2e$ — заряд α -частинки, таким чином вираз для потоку α -частинок через струм є таким:

$$J_\alpha = \frac{N_\alpha}{\Delta t} = \frac{I_\alpha}{q_\alpha} = \frac{I_\alpha}{2e}. \quad (6.4.4)$$

З урахуванням виразу (6.4.4), вихід (6.4.3) ядерної реакції перепишемо наступним чином:

$$w = \frac{J_n}{J_\alpha} = \frac{2eJ_n}{I_\alpha} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}}{50 \cdot 10^{-6} \text{ А}} = 1,024 \cdot 10^{-5}. \quad (6.4.5)$$

Емпірична формула для середнього пробігу α -частинки R_α^{pec} (см) в речовині з масовим числом A та густиною ρ_{pec} є такою [8]:

$$R_\alpha^{pec} = \frac{0,56 \cdot A^{1/3} R_\alpha^{nos} \cdot 10^{-3}}{\rho_{pec}}, \quad (6.4.6)$$

де $R_\alpha^{nos} = 0,31 \cdot (E_{\kappa\alpha})^{3/2}$ (см) — середній пробіг α -частинки з кінетичною енергією $E_{\kappa\alpha}$ в повітрі.

В даному випадку в повітрі α -частинка пролітає без зіткнень в середньому $R_\alpha^{nos} = 0,31 \cdot 7^{3/2} = 5,7$ (см).

Для α -частинки в алюмінію (масове число одноізотопного алюмінію рівне $A_{Al} = 27$) можна обрахувати середній пробіг таким чином:

$$R_\alpha^{Al} = \frac{0,56 \cdot A_{Al}^{1/3} \cdot R_\alpha^{nos} \cdot 10^{-3}}{\rho_{Al}} = \frac{0,56 \cdot 27^{1/3} \cdot 5,7 \text{ см} \cdot 10^{-3}}{2,7 \text{ г/см}^3} = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ см}. \quad (6.4.7)$$

Концентрація ядер алюмінію (густина $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$, молярна маса $\mu_{Al} = 27 \text{ г/моль}$) в мішені складатиме:

$$n_0 = N_A \cdot \frac{\rho_{Al}}{\mu_{Al}} = 6,023 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}. \quad (6.4.8)$$

Отже, величина середнього перерізу ядерної реакції (6.4.1) в барнах складатиме:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1,024 \cdot 10^{-5}}{6,023 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} \cdot 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ см}} \approx \\ &\approx 0,048 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 48 \text{ мбарн}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Приклад 5. Залізну мішень опромінюють пучком протонів з енергією $E_{\kappa p} = 22 \text{ МеВ}$. В результаті ядерної реакції (p, n) , вихід якої складає $w = 1,2 \cdot 10^{-3}$, утворюється радіонуклід ^{56}Co з періодом піврозпаду $T = 77,2$ доби. Визначити активність мішені через час $\tau = 2,5$ годин після початку опромінювання при струмі протонів $I_p = 21 \text{ мкА}$.

Розв'язання: Зміну кількості ядер кобальту N_{Co} з часом можна описати наступним неоднорідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN_{Co}}{dt} = \frac{I_p w}{e} - \lambda N_{Co}, \quad (6.5.1)$$

де e — заряд електрона, λ — стала розпаду ізотопу ^{56}Co . Перший доданок (6.5.1) враховує збільшення кількості ядер ^{56}Co за рахунок ядерної реакції, другий доданок — зменшення їх кількості за рахунок розпаду.

Розв'язання однорідного диференціального рівняння $\frac{dN_{Co \text{ одн}}}{N_{Co \text{ одн}}} = -\lambda dt$ є таким:

$$N_{Co \text{ одн}} = C(t) \cdot \exp(-\lambda t), \quad (6.5.2)$$

де $C(t)$ — величина поки що невідома.

Підстановка виразу (6.5.2) до вихідного неоднорідного рівняння (6.5.1) приводить до співвідношення:

$$\frac{dC}{dt} \exp(-\lambda t) = \frac{I_p w}{e}, \quad (6.5.3)$$

з якого можна знайти $C(t)$, проінтегрувавши (6.5.3):

$$C(t) = \frac{I_p w}{e} \int \exp(\lambda t) dt + B = \frac{I_p w}{e\lambda} \exp(\lambda t) + B, \quad (6.5.4)$$

де B — константа, яка виникає при інтегруванні.

Таким чином, співвідношення (6.5.2) перетвориться на наступне:

$$N_{Co}(t) = \left[\frac{I_p w}{e\lambda} \exp(\lambda t) + B \right] \cdot \exp(-\lambda t). \quad (6.5.5)$$

Для знаходження константи B скористаємося початковою умовою. В нульовий момент часу ядра кобальту ще не встигли утворитися, це значить, що

$$N_{Co}(0) = \left[\frac{I_p w}{e\lambda} + B \right] = 0, \Rightarrow B = -\frac{I_p w}{e\lambda}. \quad (6.5.6)$$

Остаточно маємо закон зміни кількості ядер кобальту в залежності від часу:

$$N_{Co}(t) = \frac{I_p w}{e\lambda} [\exp(\lambda t) - 1] \cdot \exp(-\lambda t) = \frac{I_p w}{e\lambda} [1 - \exp(-\lambda t)]. \quad (6.5.7)$$

Стала розпаду ізотопу ^{56}Co : $\lambda = \ln 2/T$, період піврозпаду цього ізотопу $T = 77,2$ діб. З (6.5.7) знайдемо вираз для активності мішені:

$$A_{Co}(\tau) = \lambda N_{Co}(\tau) = \frac{I_p w}{e} [1 - \exp(-\lambda \tau)] = \frac{I_p w}{e} \left[1 - 2^{-\tau/T} \right]. \quad (6.5.8)$$

Підставляючи числові значення в (6.5.8), знайдемо активність препарату через час $\tau = 2,5$ год після початку опромінювання:

$$A_{Co} = \frac{21 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} \cdot \left(1 - 2^{-2,5/(77,2 \cdot 24)} \right) = 1,47 \cdot 10^8 \text{ Бк} = 4 \text{ мКі}.$$

Приклад 6. У камеру, яка заповнена повітрям за нормальних умов, впускають пучок α -частинок з кінетичною енергією $E_\kappa = 7,8 \text{ МеВ}$. Довжина камери вздовж пучка більша за довжину пробігу α -частинок з даною енергією. Знайти середній переріз реакції $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O} - 1,2 \text{ МеВ}$, якщо вихід цієї реакції складає $w = 2 \cdot 10^{-6}$. Вміст азоту в повітрі складає $\eta = 78 \%$ за об'ємом.

Розв'язання: Середній переріз даної ядерної реакції $\langle \sigma \rangle$ можна визначити як

$$\langle \sigma \rangle = \frac{w}{n_0 d}, \quad (6.6.1)$$

де d — товщина мішені, в межах якої можлива ця ядерна реакція.

Пролітаючи шар повітря в камері, α -частинки поступово зменшують свою первісну кінетичну енергію. Оскільки довжина камери вздовж пучка більша за довжину пробігу α -частинок даної енергії, то деяка кількість частинок наприкінці проходження камери матиме кінетичну енергію, меншу за порогове значення. Для таких частинок реакція $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ не відбуватиметься. Тому довжину d , на якій відбувається ендоенергетична ядерна реакція, можна визначити через різницю довжин пробігу частинок з заданою кінетичною енергією $R(E_\kappa)$ та пороговою кінетичною енергією $R(E_\alpha^{nop})$:

$$d = R(E_\kappa) - R(E_\alpha^{nop}). \quad (6.6.2)$$

Тут порогове значення кінетичної енергії α -частинки $E_\alpha^{nop} = \frac{m_\alpha + M_N}{M_N} |Q| = 1,54 \text{ МеВ}$ (m_α — маса α -частинки, M_N — маса нукліда ^{14}N , $Q = -1,2 \text{ МеВ}$ — енергетичний вихід ядерної реакції).

За напівемпіричною формулою $R_{\alpha}^{nov} = 0,31 \cdot (E_{\kappa})^{3/2} (\text{см})$, де кінетична енергія E_{κ} підставляється в МеВ, порахуємо довжини пробігу α -частинок з заданою кінетичною енергією:

$$R(E_{\kappa}) = 0,31 \cdot 7,8^{3/2} = 6,75 (\text{см}) \quad (6.6.3 \text{ а})$$

та пороговою кінетичною енергією:

$$R(E_{\alpha}^{nop}) = 0,31 \cdot 1,54^{3/2} = 0,59 (\text{см}). \quad (6.6.3 \text{ б})$$

Отже, якщо вважати, що α -частинки втрачають свою енергію поступово, ендоенергетична ядерна реакція відбувається лише на перших 6,16 см шляху в камері.

Концентрація ядер азоту (густина повітря $\rho_{нов} = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, молярна маса $\mu_{нов} = 29 \text{ г/моль}$) в камері з урахуванням 78-відсоткового його вмісту в повітрі складатиме:

$$\begin{aligned} n_0 &= \eta N_A \cdot \frac{\rho_{нов}}{\mu_{нов}} = 0,78 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \cdot \frac{1,293 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3}{29 \text{ г/моль}} = \\ &= 2,09 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Остаточно середній переріз реакції складатиме:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{w}{n_0 [R(E_{\kappa}) - R(E_{\alpha}^{nop})]} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2,09 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \cdot 6,16 \text{ см}} = \\ &= 1,55 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \approx 15,5 \text{ мбарн}. \end{aligned}$$

Приклад 7. Визначити порогову енергію E_{nop} , яка потрібна для народження пари нуклон-антинуклон у випадку зіткнення двох протонів, та порівняти її з енергією реакції.

Розв'язання: Розглянемо реакцію народження пари (нуклон N) — (антинуклон \tilde{N}) при зіткненні двох протонів:



Вважатимемо, що реакція (6.7.1) відбувається за рахунок бомбардування пучком протонів протонної мішені (тобто розглядатимемо лабораторну систему координат).

Енергетичний вихід реакції (6.7.1) складатиме $|Q| = 2m_N c^2$, де m_N — маса нуклона.

Енергія, необхідна для народження пари нейтрон-антинейтрон, дорівнює:

$$|Q| = 2m_n c^2 = 2 \cdot 939,57 \text{ МеВ} = 1879,14 \text{ МеВ} \approx 1,879 \text{ ГеВ}. \quad (6.7.2)$$

Для протонів енергія реакції (6.7.1) складатиме:

$$|Q| = 2m_p c^2 = 2 \cdot 938,28 \text{ МеВ} = 1876,56 \text{ МеВ} \approx 1,877 \text{ ГеВ}. \quad (6.7.3)$$

Тобто для обох типів нуклонів енергія реакції (6.7.1) є практично однаковою.

Для знаходження порогової енергії скористаємось тим, що в будь-якій системі частинок з повною енергією E та імпульсом p величина $E^2 - p^2 c^2$ є інваріантною відносно вибору системи координат. В нашому випадку до взаємодії зручно взяти цей інваріант в лабораторній системі координат, а після взаємодії — в системі центра мас. Для реакції (6.7.1) інваріант матиме вигляд:

$$(E + m_p c^2)^2 - p^2 c^2 = (4m_p c^2)^2, \quad (6.7.4)$$

де E, p — повна енергія та імпульс налітаючого протона, m_p — маса спокою протона. В правій частині (6.7.4) враховано, що сумарний імпульс частинок, які

утворюються в результаті реакції, в системі центра мас дорівнює нулю. Для протона, що налітає на мішень, також можемо записати відповідний інваріант:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_p^2 c^4. \quad (6.7.5)$$

Порогова кінетична енергія протона дорівнює $E_{\text{пор}} = E - m_p c^2$. Виразимо з (6.7.5) імпульс, підставимо його до (6.7.4) й отримаємо повну енергію протона:

$$E = 7m_p c^2. \quad (6.7.6)$$

Остаточно, порогова кінетична енергія протона складатиме $E_{\text{пор}}^k = 6m_p c^2 = 5,63 \text{ Гев}$.

Якщо використати зустрічні пучки протонів, порогову енергію реакції (6.7.1) можна значно зменшити.

7. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ ЗА УЧАСТЮ НЕЙТРОНІВ

7.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для одержання потужних потоків швидких нейтронів в ядерному реакторі розташовують дейтерид літію LiD , в якому повільні нейтрони реактора збуджують реакцію ${}^6Li(n, \alpha){}^3H + 4,8 \text{ MeV}$. Ядра тритію, в свою чергу, збуджують реакції а) $D(t, n){}^4He + 17,6 \text{ MeV}$ та б) ${}^7Li(t, n){}^9Be + 10,4 \text{ MeV}$, які й є джерелом швидких нейтронів. Знайти максимальну та мінімальну енергію цих нейтронів.

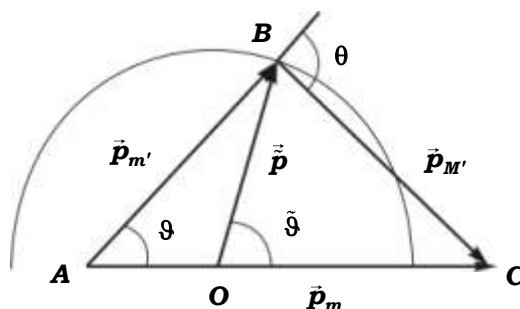


Рис.7.1. Векторна діаграма імпульсів для частинки, що приймає участь у реакції $M(m, m')M'$. \vec{p}_m , $\vec{p}_{m'}$ та $\vec{p}_{M'}$ — імпульси налітаючої частинки та продуктів реакції в Л-системі, О — центр кола з радіусом \tilde{p} , що дорівнює сумарному імпульсу частинки, що утворились, в Ц-системі, θ — кут розльоту продуктів реакції в Л-системі.

Розв'язання: Запишемо першу реакцію, в результаті якої виникають ядра тритію (t):



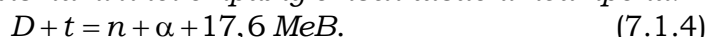
Нехтуючи кінетичною енергією повільних нейтронів у реакції (7.1.1), знайдемо кінетичну енергію ядер тритію в лабораторній системі координат (Л-системі):

$$E_t = \frac{m_\alpha}{m_t + m_\alpha} Q_1, \quad (7.1.2)$$

де Q_1 — енергетичний вихід реакції (7.1.1). Підставивши маси ядер у формулу (7.1.2), знайдемо

$$E_t \approx \frac{4}{7} Q_1 = 2,74 \text{ MeV}. \quad (7.1.3)$$

Друга реакція, в результаті якої отримуються швидкі нейтрони:



Скористаємось векторною діаграмою імпульсів (Рис.7.1.). В системі центра мас (Ц-системі) сумарний імпульс \tilde{p} частинки, що виникають в результаті реакції (7.1.4) знаходиться наступним чином [8]:

$$\tilde{p} = \sqrt{2\mu'(\tilde{E}_k + Q)}, \quad (7.1.5)$$

де μ' — зведена маса частинки, що виникають (нейтрона m' та α -частинки M'), Q — енергетичний вихід реакції, \tilde{E}_k — сумарна кінетична енергія частинки до реакції (в Ц-системі), в нашому випадку — це кінетична енергія тритонів в системі центра мас. На Рис. 7.1 точка О ділить відрізок АС на дві частини $AO:OC = m':M'$; $\tilde{\theta}$ — кут, під яким влітає частинка m' (в нашому випадку — нейтрон) в Ц-системі; θ — кут розльоту продуктів реакції в Л-системі.

Кінетична енергія частинки, що викликає ядерну реакцію (ядер тритію), в системі центра мас (Ц-системі) [2] записується наступним чином:

$$\tilde{E}_k = \tilde{E}_t = \frac{M}{m + M} E_k = \frac{m_d}{m_t + m_d} E_t = 0,4 E_t. \quad (7.1.6)$$

Врахувавши, що зведена маса частинок, утворених в результаті реакції (7.1.4),
 $\mu' = \frac{m'M'}{m' + M'} = \frac{m_n m_\alpha}{m_n + m_\alpha}$, виразимо імпульс \tilde{p} через імпульс ядер тритію $p_t = \sqrt{2m_t E_t}$ в Λ -системі:

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \sqrt{2\mu'(\tilde{E}_k + Q)} = \sqrt{2 \frac{m_n m_\alpha}{m_n + m_\alpha} (0,4E_t + Q_2)} = \sqrt{2m_t E_t} \sqrt{\frac{m_n m_\alpha}{m_t(m_n + m_\alpha)} \left(0,4 + \frac{Q_2}{E_t}\right)}, \\ \tilde{p} &= p_t \sqrt{\frac{m_n m_\alpha}{m_t(m_n + m_\alpha)} \left(0,4 + \frac{Q_2}{E_t}\right)}.\end{aligned}\quad (7.1.7)$$

Підставляючи в (7.1.7) маси ядер, енергію реакції (7.1.4) $Q_2 = 17,6 \text{ MeV}$ та кінетичну енергію тритонів в Λ -системі $E_t = 2,74 \text{ MeV}$, знайдемо сумарний імпульс продуктів реакції (7.1.4) в Ц-системі:

$$\tilde{p} = p_t \sqrt{\frac{4}{15} \left(0,4 + \frac{17,6}{2,74}\right)} \approx 1,35 p_t. \quad (7.1.8)$$

З векторної діаграми імпульсів (Рис. 7.1.), з використанням теореми косинусів для трикутника ABO , можемо знайти імпульс нейтронів в Λ -системі:

$$\tilde{p}^2 = AO^2 + p_{m'}^2 - 2p_{m'} \cdot AO \cdot \cos \vartheta = AO^2 + p_n^2 - 2p_n \cdot AO \cdot \cos \vartheta. \quad (7.1.9)$$

Довжина відрізка $AO = \frac{m'}{m' + M'} p_m = \frac{m_n}{m_n + m_\alpha} p_t$. Очевидно, що максимальне та мінімальне значення імпульсу нейтронів ми одержимо, якщо покладемо в (7.1.9) $\vartheta = 0^\circ$ та $\vartheta = 180^\circ$, відповідно. Таким чином, імпульс нейтронів дорівнюватиме

$$p_n = \tilde{p} \pm \frac{m_n}{m_n + m_\alpha} p_t = 1,35 p_t \pm 0,2 p_t. \quad (7.1.10)$$

Отже, максимальна кінетична енергія швидких нейтронів в Λ -системі

$$E_{n \max} = \frac{p_{n \max}^2}{2m_n} = \frac{(1,55 p_t)^2}{2m_n} = 1,55^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 19,7 \text{ MeV}, \quad (7.1.11)$$

а їх мінімальна кінетична енергія

$$E_{n \min} = \frac{p_{n \min}^2}{2m_n} = \frac{(1,15 p_t)^2}{2m_n} = 1,15^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 10,8 \text{ MeV}. \quad (7.1.12)$$

Другу реакцію

$${}^7\text{Li} + t = n + {}^9\text{Be} + 10,4 \text{ MeV}. \quad (7.1.13)$$

розрахуємо аналогічно. Згідно (7.1.6), Кінетична енергія ядер тритію в Ц-системі для реакції (7.1.13)

$$\tilde{E}_t = \frac{m_{\text{Li}}}{m_t + m_{\text{Li}}} E_t = 0,7 E_t \quad (7.1.14)$$

З (7.1.5) імпульс \tilde{p} частинок, що виникають в результаті реакції (7.1.13),

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p_t \sqrt{\frac{m_n m_{\text{Be}}}{m_t(m_n + m_{\text{Be}})} \left(0,7 + \frac{Q_3}{E_t}\right)} = \\ &= p_t \sqrt{\frac{9}{30} \left(0,7 + \frac{10,4}{2,75}\right)} = 1,16 p_t.\end{aligned}\quad (7.1.15)$$

Максимальне та мінімальне значення імпульсу нейтрона в реакції (7.1.13):

$$p_n = \tilde{p} \pm \frac{m_n}{m_n + m_{\text{Be}}} p_t = 1,16 p_t \pm 0,1 p_t. \quad (7.1.16)$$

З урахуванням (7.1.16), максимальна кінетична енергія нейтронів становитиме:

$$E_{n \max} = \frac{(1,26 p_t)^2}{2m_n} = 1,26^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 13,1 \text{ MeV},$$

а мінімальна —

$$E_{n \min} = 1,06^2 \frac{m_t}{m_n} E_t = 9,27 \text{ MeV}.$$

Приклад 2. Тонку платівку з фосфору з масовою товщиною $1,0 \text{ г/см}^2$ опромінювали протягом часу $\tau = 4,0 \text{ год}$ потоком нейтронів $j_n = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ з кінетичною енергією 2 MeV . Через час $t = 1,0 \text{ год}$ після закінчення опромінення активність пластинки становила $3,9 \cdot 10^6 \text{ Бк}$. Відомо, що активність обумовлена нуклідом ^{31}Si , який виникає в результаті реакції (n, p) . Визначити переріз даної реакції.

Розв'язання: Запишемо реакцію, в результаті якої виникає β -активний ізотоп ^{31}Si з періодом піврозпаду $T = 2,65 \text{ год}$:



У випадку тонкої мішені, зв'язок між виходом ядерної реакції w та перерізом σ є таким:

$$w = \sigma n_0 d, \quad (7.2.2)$$

де $n_0 d$ — концентрація ядер мішені на одиниці площі, її можна також виразити через масову товщину мішені ρd : $n_0 d = \frac{m}{m_{\text{я}}} \frac{d}{V} = \frac{\rho d}{m_{\text{я}}}$, де $m_{\text{я}}$ — маса ядер, з яких складається мішень, m — маса мішені. Таким чином, переріз реакції дорівнює:

$$\sigma = w \frac{m_{\text{я}}}{\rho d}. \quad (7.2.3)$$

Згідно визначенню, вихід реакції — це відношення кількості утворених ядер нукліда ^{31}Si до кількості падаючих на мішень нейтронів: $w = \frac{\Delta N_{\text{Si}}}{\Delta N_n}$. Оскільки нуклід ^{31}Si є радіоактивним, закон накопичення його кількості протягом часу опромінення фосфорної мішені нейтронами (див. приклад 2, розділ 2)

$$N(t) = \frac{q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad (7.2.4)$$

де q — швидкість утворення ядер ^{31}Si . Швидкість утворення пов'язана з виходом реакції наступним чином:

$$q = \frac{\Delta N_{\text{Si}}}{\Delta t} = w \frac{\Delta N_n}{\Delta t} = w j_n. \quad (7.2.5)$$

Таким чином, протягом часу τ в мішені накопичиться $N(\tau) = w \frac{j_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \tau})$ ядер ізотопу ^{31}Si .

Після закінчення опромінювання кількість ядер ^{31}Si лише зменшуватиметься за рахунок розпаду і через час t становитиме:

$$N(t) = w \frac{j_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \tau}) \cdot e^{-\lambda t}. \quad (7.2.6)$$

Отже, активність пластинки $A = N(t) \cdot \lambda = w j_n (1 - e^{-\lambda \tau}) \cdot e^{-\lambda t}$. Звідси знаходимо вихід реакції:

$$w = \frac{A e^{\lambda t}}{j_n (1 - e^{-\lambda \tau})}. \quad (7.2.7)$$

Остаточно, з (7.2.3) з урахуванням (7.2.7) отримаємо переріз реакції (7.2.1):

$$\sigma = \frac{Ae^{\lambda t}}{j_n(1-e^{-\lambda\tau})} \frac{m_{\text{я}}}{\rho d} = \frac{A \cdot 2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}{j_n \left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T_{1/2}}} \right)} \frac{m_{\text{я}}}{\rho d}. \quad (7.2.8)$$

Підставляючи в (7.2.8) параметри задачі, знаходимо переріз реакції (7.2.1) при енергії нейтронів $E_n = 2 \text{ MeV}$:

$$\sigma = \frac{3,9 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2,65}}}{2 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1} \left(1 - 2^{-\frac{4}{2,65}} \right)} \frac{31 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{1 \text{ г/см}^2} = 0,02 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 20 \text{ мбарн}.$$

Приклад 3. Берилієву платівку опромінюють потоком нейтронів з кінетичною енергією 14 MeV , який падає нормально до її поверхні. Оцінити товщину платівки, необхідну для 10% – го відтворення нейтронів за реакцією $(n, 2n)$, переріз якої при такій енергії нейтронів $\sigma = 0,50 \text{ барн}$. Вважати, що інших процесів немає і що вторинні нейтрони у платівці не поглинаються.

Розв'язання: Запишемо диференціальне рівняння для зміни кількості нейтронів після проходження шару речовини товщиною dx з концентрацією ядер n (Рис. 7.2):

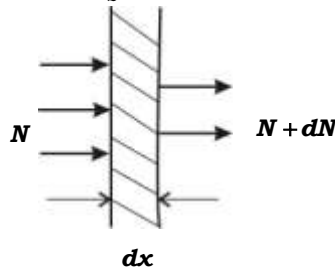


Рис. 7.2. Зміна кількості материнських нейтронів після проходження шару речовини товщиною dx .

$$dN = -Nn_0\sigma dx. \quad (7.3.1)$$

Інтегруючи (7.3.1), отримаємо закон зміни кількості материнських нейтронів з відстанню:

$$N = N_0 e^{-n_0\sigma x}. \quad (7.3.2)$$

Кожен материнський нейтрон, що вибув з пучка, в результаті реакції $(n, 2n)$ утворює 2 дочірніх нейтрони, тобто кількість дочірніх нейтронів, що виникають на довжині d (за умови, що вторинні нейтрони не поглинаються в речовині мішені), дорівнюватиме:

$$\Delta N_d = 2(N_0 - N) = 2N_0(1 - e^{-n_0\sigma d}). \quad (7.3.3)$$

Остаточно кількість нейтронів N_Σ , з урахуванням дочірніх нейтронів, на виході з платівки запишеться таким чином:

$$N_\Sigma = N_0 e^{-n_0\sigma d} + \Delta N_d = N_0(2 - e^{-n_0\sigma d}). \quad (7.3.4)$$

З (7.3.4) виразимо товщину платівки, необхідну для відтворення нейтронів у певній пропорції:

$$\frac{N}{N_0} = \eta = 2 - e^{-n_0\sigma d} \Rightarrow d = -\frac{\ln(2 - \eta)}{n_0\sigma}. \quad (7.3.5)$$

В нашому випадку $\frac{N}{N_0} = \eta = 1,1$, і з (7.3.5) знайдемо товщину берилієвої платівки, необхідну для 10%-го відтворення нейтронів:

$$d = -\frac{\ln 0,9}{n_0 \sigma}. \quad (7.3.6)$$

Концентрацію атомів мішені виразимо наступним чином: $n_0 = \frac{\rho}{A}$, де ρ — густина речовини, A — атомна вага. Враховуючи, що для берилію $\rho_{\text{Be}} = 1,85 \text{ г/см}^3$, $A = 9 \text{ а.о.м.} \approx 15 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, з (7.3.6) отримаємо числове значення товщини платівки:

$$d = -\frac{\ln 0,9 \cdot 15 \cdot 10^{-24} \text{ г}}{1,85 \text{ г/см}^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2} \approx 1,7 \text{ см}.$$

Приклад 4. Було досліджено, що під час взаємодії теплових нейтронів з енергією $0,025 \text{ eV}$ з ядрами ^{113}Cd переріз розсіювання складає $0,22\%$ від перерізу радіаційного захоплення. Визначити відношення ймовірності розпаду складного ядра з випромінюванням нейтронів до ймовірності випромінювання γ – квантів при резонансній енергії нейтронів $E_{n0} = 0,178 \text{ eV}$.

Розв'язання: У випадку, коли ядерні реакції за участю нейтронів є резонансними і відбуваються через утворення проміжного ядра, користуються формулою Брейта-Вігнера для перерізу утворення такого ядра:

$$\sigma_C = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.1)$$

причому

$$\Gamma_n \lambda_n = \Gamma_{n0} \lambda_0. \quad (7.4.2)$$

Переріз ядерної реакції розсіювання нейтронів (n, n) :

$$\sigma_{nn} = \sigma_C \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.3)$$

де $\frac{\Gamma_n}{\Gamma}$ — ймовірність розпаду проміжного ядра за каналом пружного розсіювання.

Переріз реакції радіаційного захоплення нейтрона:

$$\sigma_{n\gamma} = \sigma_C \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (7.4.4)$$

де $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}$ — ймовірність перетворення проміжного ядра з випромінюванням γ – кванту. У випадку, коли інших процесів немає, повна ширина енергетичного рівня проміжного ядра $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ (в загальному випадку, повна ширина рівня проміжного ядра дорівнює сумі парціальних ширин за всіма можливими каналами: $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$).

Знайдемо відношення перерізу розсіювання до перерізу радіаційного захоплення при енергії теплових нейтронів $0,025 \text{ eV}$:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \eta = 0,0022. \quad (7.4.5)$$

При резонансній енергії нейтронів це відношення становитиме:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_\gamma}. \quad (7.4.6)$$

Тут враховано той факт, що величина Γ_γ практично не залежить від енергії нейтронів. Використаємо співвідношення (7.4.2) і знайдемо резонансну нейтронну ширину рівня: $\Gamma_{n0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Gamma_n$. Довжина хвилі де Бройля нейтронів визначається формулою: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_n E_n}}$, оскільки нейтрони з малими енергіями ($E_n \ll m_n c^2$, де $m_n c^2$ — енергія спокою нейтрона) є нерелятивістськими. Таким чином, (7.4.6) набуде вигляду:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_n}} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} = \eta \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_n}}. \quad (7.4.7)$$

Підставимо в (7.4.7) параметри задачі й знайдемо відношення ймовірності розсіювання нейтронів до ймовірності їх захоплення з подальшим випромінюванням γ -квантів при резонансній енергії нейтронів:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_{n\gamma}} = 0,0022 \sqrt{\frac{0,178}{0,025}} \approx 0,006 \text{ або } 0,6\%.$$

Приклад 5. За допомогою формули Брейта-Вігнера визначити:

а) ширину Γ рівня проміжного ядра, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром ^{113}Cd , якщо переріз радіаційного захоплення при енергії нейтрона $E_n = 2E_{n0}$ у 50 разів менший за переріз цього процесу в резонансі (при $E_n = E_{n0}$), де $E_{n0} = 0,178 \text{ eV}$. Вважати, що Γ не залежить від енергії нейтронів ($\Gamma_\gamma \ll \Gamma_n$);

б) показати, що у випадку, коли ширина ΔE резонансного максимуму кривої $\sigma_{n\gamma}(E_n)$ на половині його висоти мала ($\Delta E \ll E_{n0}$), то $\Delta E \approx \Gamma$.

Розв'язання: а) Реакція радіаційного захоплення нейтрона ядром ^{113}Cd записується наступним чином:



Переріз такої реакції:

$$\sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (7.5.2)$$

Переріз радіаційного захоплення в резонансі знайдемо з (7.5.2), покладаючи $E_n = E_{n0}$:

$$\sigma_{n\gamma 0} = \pi \lambda_0^2 g \frac{4\Gamma_{n0}\Gamma_\gamma}{\Gamma^2}. \quad (7.5.3)$$

Розділимо (7.5.3) на (7.5.2):

$$\frac{\sigma_{n\gamma 0}}{\sigma_{n\gamma}} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{4\Gamma_{n0}}{\Gamma_n} \frac{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2}. \quad (7.5.4)$$

Скориставшись співвідношенням (7.4.2), знайдемо, що $\Gamma_{n0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Gamma_n$ та підставимо цей вираз у (7.5.4):

$$\frac{\sigma_{n\gamma 0}}{\sigma_{n\gamma}} = \eta = 4 \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{(E_n - E_{n0})^2 + (\Gamma/2)^2}{\Gamma^2}. \quad (7.5.5)$$

З (7.5.5) виразимо ширину рівня Γ проміжного ядра, використавши також співвідношення між енергіями нейтронів: $E_n = 2E_{n0}$:

$$\eta = 4 \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{E_{n0}^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\Gamma^2} = 4\sqrt{2} \frac{E_{n0}^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\Gamma^2} \Rightarrow \Gamma = 2E_{n0} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\eta - \sqrt{2}}}. \quad (7.5.6)$$

Користуючись формулою (7.5.6), знайдемо числове значення Γ :

$$\Gamma = 2 \cdot 0,178 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{50 - \sqrt{2}}} \approx 0,06 \text{ eV}.$$

б) Для відповіді на друге запитання дослідимо функцію (7.5.2) за умови, що $\Delta E \ll E_{n0}$. Будемо шукати ширину резонансного піку на половині висоти ΔE (Рис. 7.3).

Переріз радіаційного захоплення набуватиме максимального значення при $E_n = E_{n0}$, яке задається формулою (7.5.3).

Значення енергії нейтронів, при якому $\sigma_{n\gamma} = \frac{\sigma_{n\gamma 0}}{2}$ знайдемо з (7.5.2), покладаючи, що енергія нейтронів при цьому $E_n = E_{n1/2}$:

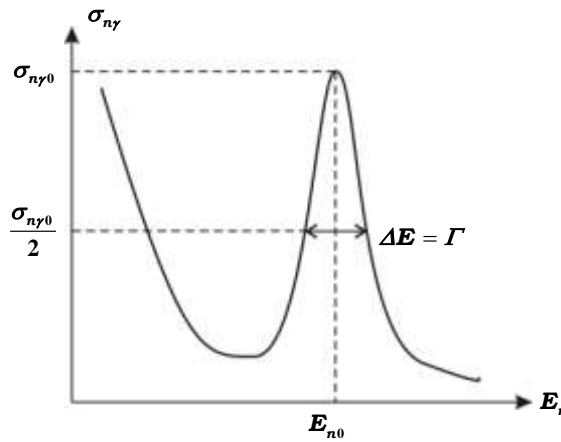


Рис. 7.3. Залежність перерізу радіаційного захоплення $\sigma_{n\gamma}$ від енергії нейтронів.

$$\begin{aligned} \sigma_{n\gamma} = \frac{\sigma_{n\gamma 0}}{2} &\Rightarrow \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = \pi \lambda_0^2 g \frac{2\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma^2} \Rightarrow \\ 2\lambda_0 \left(\left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \right) &= \lambda \Gamma^2, \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

де використано співвідношення $\Gamma_{n0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \Gamma_n$. З (7.5.7) виразимо різницю енергій $E_{n1/2} - E_{n0}$:

$$\begin{aligned} \left(E_{n1/2} - E_{n0}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} \Gamma^2, \\ \Rightarrow E_{n1/2} - E_{n0} &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma. \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

Врахувавши, що $\Delta E \ll E_{n0}$, наближено можемо записати, що $\sqrt{\frac{E_{n0}}{E_{n1/2}}} \approx 1$, в такому випадку (7.5.8) спроститься: $E_{n1/2} - E_{n0} \approx \frac{1}{2} \Gamma$. Таким чином, півширина резонансного

ніку (ширина на половині висоти) $\Delta E = 2 \left(E_{n\frac{1}{2}} - E_{n0} \right)$ наближено дорівнюватиме ширині рівня проміжного ядра: $\Delta E \approx \Gamma$.

Приклад 6. Знайти відношення резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів ядрами ^{55}Mn до геометричного перерізу даних ядер, якщо $E_{n0} = 337 \text{ eV}$, $\Gamma_{n0} \approx \Gamma \ll E_{n0}$ та спін рівня проміжного ядра, через яке відбувається процес, $J = 2$.

Розв'язання: Резонансний переріз пружного розсіювання нейтронів:

$$\sigma_{nn0} = \pi \lambda_0^2 g \frac{4\Gamma_{n0}^2}{\Gamma^2}, \quad (7.6.1)$$

де $\lambda_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m_n E_{n0}}$ — квадрат довжини хвилі де Бройля резонансних нейтронів,

$g = \frac{2J+1}{2(2I+1)}$ — статистичний множник. Спін ядра ^{55}Mn $I = 5/2$, спін проміжного ядра (^{56}Mn) $J = 2$, тому статистичний множник $g = \frac{5}{12}$. Врахувавши, що згідно умови, $\Gamma_{n0} \approx \Gamma$, з формули (7.6.1) отримаємо вираз для резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів:

$$\sigma_{nn0} \approx 4\pi \lambda_0^2 g. \quad (7.6.2)$$

Геометричний переріз ядра ^{55}Mn :

$$\sigma_g = \pi R^2 = \pi R_0^2 A^{2/3}, \quad (7.6.3)$$

де $R_0 = 1,22 \text{ фм} = 1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, $A = 55$. Розділимо (7.6.2) на (7.6.3):

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_g} = \frac{4\lambda_0^2 g}{R_0^2 A^{2/3}} = \frac{2\hbar^2 g}{m_n E_{n0} R_0^2 A^{2/3}}. \quad (7.6.4)$$

Підставивши в (7.6.4) дані, знайдемо відношення резонансного перерізу пружного розсіювання нейтронів ядрами ^{55}Mn до геометричного перерізу цих ядер:

$$\frac{\sigma_{nn0}}{\sigma_g} = \frac{2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-54} \text{ ерг}^2 \text{ с}^2 \cdot 5}{12,1,0087 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 2 \cdot 337 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \cdot 1,22^2 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \cdot 55^{2/3}} \approx 5 \cdot 10^3.$$

Приклад 7. Оцінити, у скільки разів послабиться вузький пучок швидких нейтронів з кінетичною енергією 10 MeV під час проходження через свинцеву платівку товщиною 4 см . Вважати, що ефективний переріз ядра $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$, де R — радіус ядра, λ — перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона.

Розв'язання: Під час взаємодії швидких нейтронів з ядрами ефективний переріз взаємодії розглядають як геометричний переріз ядра: $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$. Закон зміни кількості нейтронів після проходження ними шару середовища товщиною d записується так (див. приклад 7.3):

$$N = N_0 e^{-n_0 \sigma d}, \quad (7.7.1)$$

де σ — переріз взаємодії нейтронів з ядрами середовища, $\sigma = 2\pi(R + \lambda)^2$, $n_0 = N_A \frac{\rho}{\mu}$ — концентрація ядер в одиниці об'єму, N_A — число Авогадро, $\mu = 208 \text{ г/моль}$ — молярна маса ядер свинцю природного ізотопного складу. З (7.7.1) знаходимо відношення початкової кількості нейтронів N_0 до їх кількості N після проходження платівки:

$$\frac{N_0}{N} = \exp(n_0 \sigma d) = \exp\left(2\pi N_A \frac{\rho d}{\mu} (R + \lambda)^2\right). \quad (7.7.2)$$

Підставляючи в (7.7.2) вирази для радіуса ядра $R = R_0 A^{1/3}$ та довжини хвилі нейтрона $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}$, знаходимо остаточну формулу:

$$\eta = \frac{N_0}{N} = \exp\left(2\pi N_A \frac{\rho d}{\mu} \left(R_0 A^{1/3} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}\right)^2\right). \quad (7.7.3)$$

Густина свинцю $\rho = 11,3 \text{ г/см}^3$, $R_0 = 1,22 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, радіус ядра ^{208}Pb дорівнює $R = 1,22 \cdot 208^{1/3} \cdot 10^{-13} = 7,23 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, перенормована довжина хвилі де Бройля нейтрона

$$\lambda = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}}{\sqrt{2 \cdot 1,674 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}}} \approx 1,44 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Підставивши ці дані в (7.7.3), знайдемо коефіцієнт послаблення нейтронного пучка:

$$\eta = \frac{N_0}{N} = 1,86.$$

Приклад 8. Інтенсивність вузького пучка повільних моноенергетичних нейтронів зменшується у 20 разів під час проходження через платівку з бору природного ізотопного складу. Масова товщина платівки $1,0 \text{ г/см}^2$. Визначити енергію нейтронів, маючи на увазі, що в даному випадку є справедливим закон $\sigma \propto 1/v$, де v — швидкість нейтронів.

Розв'язання: Для знаходження перерізу захоплення нейтрона ядром бору скористаємось розв'язком (7.7.2) попереднього прикладу:

$$\frac{N_0}{N} = e^{n_0 \sigma d} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{n_0 d} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) = \frac{M}{\rho d} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right), \quad (7.8.3)$$

де ρd — масова товщина платівки, $M = 11 \text{ а.о.м.}$ — вага атома бору.

Оскільки виконується закон $1/v$, можемо записати наступне співвідношення:

$$\sigma v = \sigma_0 v_0, \quad (7.8.4)$$

де σ_0 , v_0 — табличні значення перерізу взаємодії та швидкості нейтронів для певної речовини [8]. В нашому випадку для бору ці значення є такими: $v_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, $\sigma_0 = 755 \text{ барн}$. З (7.8.4), приймаючи до уваги (7.8.3), знайдемо швидкість нейтронів:

$$v = \frac{\sigma_0 v_0}{\sigma} = \sigma_0 v_0 \frac{\rho d}{A \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)}, \quad (7.8.5)$$

та відповідну енергію:

$$E_n = \frac{m_n v^2}{2} = \frac{m_n}{2} \left(\sigma_0 v_0 \frac{\rho d}{A \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)} \right)^2. \quad (7.8.6)$$

Підставимо у (7.8.6) параметри задачі й отримаємо значення енергії нейтронів:

$$E_n = \frac{1,67 \cdot 10^{-24} z}{2} \left(755 \cdot 10^{-24} \text{см}^2 \cdot 2,2 \cdot 10^5 \text{см}/\text{с} \frac{1 \text{ з} / \text{см}^2}{11 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} z \cdot \ln(20)} \right)^2 =$$

$$= 7,7 \cdot 10^{-12} \text{ерг} \approx 4,7 \text{ eV}.$$

8. РЕАКЦІЇ ДІЛЕННЯ ВАЖКИХ ЯДЕР. ЯДЕРНІ РЕАКТОРИ.

8.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Кулонівське відштовхування протонів сприяє діленню атомного ядра, а сили поверхневого натягу протидіють цьому. Виразити умову енергетичної вигідності поділу ядра на два приблизно однакові уламки через параметр Z^2/A , користуючись формулою Вайцзеккера для кулонівської E_c та поверхневої E_σ енергій.

Розв'язання: Процес ділення ядра розглядають за допомогою моделі рідкої краплі. Різні стадії, які проходить форма ядра під час ділення на дві приблизно однакові частини, зображено на Рис. 8.1. При збільшенні поверхні ядра (в результаті внутрішніх коливань навколо рівноважної сферичної форми) зростає енергія поверхневого натягу, а кулонівська енергія відштовхування, навпаки, зменшується. Зрозуміло, що в цьому випадку зміною об'ємної енергії, енергії симетрії та енергії парності можна знехтувати.

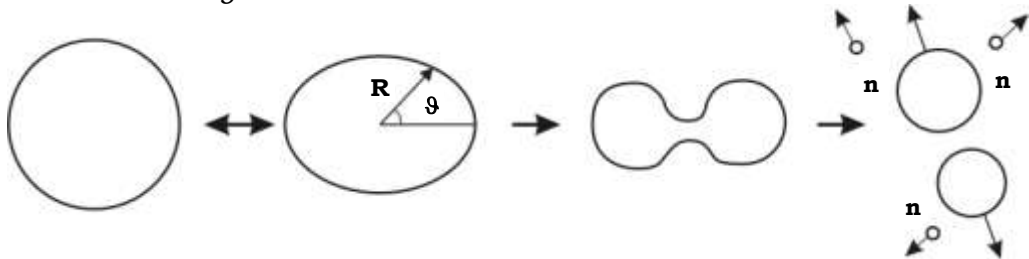


Рис. 8.1. Схема ділення ядра в моделі рідкої краплі.

Таким чином, сили поверхневого натягу прагнуть повернути деформоване ядро до попереднього стану, а сили кулонівської взаємодії сприяють його поділу. Подальша еволюція ядра залежатиме від співвідношення між цими силами. Для дослідження умов стійкості ядра при малих деформаціях необхідно встановити характер зміни потенціальної енергії $E = E_\sigma + E_c$, де E_σ — поверхнева енергія, E_c — кулонівська енергія ядра.

При малих деформаціях відносно сферичної форми рівняння поверхні ядра (Рис. 8.1) можна представити у вигляді:

$$R(\vartheta) = R_0 (1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \vartheta) + \alpha_3 P_3(\cos \vartheta) + \alpha_4 P_4(\cos \vartheta) + \dots), \quad (8.1.1)$$

де $R(\vartheta)$ — радіус-вектор, який проведено з початку координат (центру ядра) в точку на поверхні ядра, α_i — малий параметр деформації. В розкладі (8.1.1) $P_n(\cos \vartheta)$ — поліноми Лежандра, що утворюють повну і взаємно-ортогональну систему функцій. Згідно узагальненої формули Родріга, вони мають вигляд:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (8.1.2)$$

Кожен доданок у (8.1.1) враховує збурення певного типу. Поліному $P_n(\cos \vartheta)$ відповідає деформація, яка може призвести до поділу ядра на n рівних частин. Будемо розглядати симетричні деформації, які відбуваються у переважній більшості реакцій поділу ядер, при цьому в (8.1.1) залишаться тільки парні

поліноми Лежандра, причому обмежимося доданком з $n = 2$ (таке наближення буде вірним при невеликих деформаціях):

$$R(\vartheta) \approx R_0 (1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \vartheta) + \dots). \quad (8.1.3)$$

Остаточно (8.1.3) з урахуванням (8.1.2) можна переписати наступним чином:

$$R(\vartheta) \approx R_0 \left(1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{3 \cos^2 \vartheta - 1\} \right). \quad (8.1.4)$$

Об'єм ядра в сферичних координатах:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{R(\vartheta)} r^2 dr = \\ &= \frac{2}{3} \pi R_0^3 \int_0^\pi \left(1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{3 \cos^2 \vartheta - 1\} \right)^3 \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Спростимо інтеграл (8.1.5). Для цього розглянемо вираз, який стоїть під інтегралом:

$$\begin{aligned} \left(1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{3 \cos^2 \vartheta - 1\} \right)^3 &= \left(1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right)^3 + 3 \left(1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right)^2 \frac{3}{2} \alpha_2 \cos^2 \vartheta + \\ &+ 3 \left(1 + \alpha_0 - \frac{\alpha_2}{2} \right) \frac{9}{4} \alpha_2^2 \cos^4 \vartheta + \frac{27}{8} \alpha_2^3 \cos^6 \vartheta. \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

Розкриваючи дужки в (8.1.6) та нехтуючи малими доданками $3\alpha_0^2, \alpha_0^3, \alpha_2^3, \alpha_2\alpha_0^2, \alpha_2^2\alpha_0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \left(1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{3 \cos^2 \vartheta - 1\} \right)^3 &\approx 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{2} \alpha_2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \\ &+ 3\alpha_2\alpha_0 (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{3}{2} \alpha_2^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1) = (8.1.7) \\ &= 1 + 3\alpha_0 + 3(3 \cos^2 \vartheta - 1) \left(\frac{1}{2} \alpha_2 + \alpha_2\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \right) + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1); \end{aligned}$$

Підставляючи (8.1.7) у (8.1.5), знаходимо

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi R_0^3 \int_{-1}^1 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + 3(3 \cos^2 \vartheta - 1) \left(\frac{1}{2} \alpha_2 + \alpha_2\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \alpha_2^2 (9 \cos^4 \vartheta - 1) \right\} d(\cos \vartheta) = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{5} \alpha_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Оскільки ми вважаємо, що ядерна матерія практично не стискувана, об'єм ядра дорівнює об'єму сфери: $V = \frac{4}{3} \pi R_0^3$. З цієї умови можемо знайти співвідношення між коефіцієнтами α_0 та α_2 :

$$V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \left\{ 1 + 3\alpha_0 + \frac{3}{5} \alpha_2^2 \right\} \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{5} \alpha_2^2. \quad (8.1.9)$$

Знайдемо тепер площу поверхні ядра, яка є еліпсоїдом обертання. В нашому випадку площа дорівнює:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta R^2 \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\vartheta} \right)^2} d\vartheta. \quad (8.1.10)$$

Врахувавши, що $\frac{dR}{d\vartheta} = -3R_0\alpha_2 \cos \vartheta \sin \vartheta$, та знехтувавши в (8.1.10) доданками α_0^2, α_2^3 та $\alpha_2^2\alpha_0$, аналогічно до вищевикладеного отримаємо:

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + 2\alpha_0 + \frac{4}{5} \alpha_2^2 \right). \quad (8.1.11)$$

Приймаючи до уваги співвідношення між параметрами деформації (8.1.9), рівність (8.1.11) перепишемо наступним чином:

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 \right). \quad (8.1.12)$$

Для сферичного ядра енергія, обумовлена поверхневим натягом, має вигляд $E_\sigma^o = 4\pi R_0^2 \sigma = 4\pi R_0^2 \sigma A^{2/3}$, де σ — коефіцієнт поверхневого натягу, $R_0 = 1,22$ фм, A — масове число ядра. З іншого боку, згідно формули Вайцеккера, поверхнева енергія ядра $E_\sigma = \varepsilon_2 A^{2/3}$, де $\varepsilon_2 = 17,8$ МеВ. Поверхнева енергія деформованого ядра, з урахуванням (8.1.12):

$$E_\sigma^\partial = 4\pi R^2 \sigma \left(1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 \right). \quad (8.1.13)$$

Під час зростання площі поверхні за рахунок деформації зміна поверхневої енергії становитиме:

$$\Delta E_\sigma = E_\sigma^\partial - E_\sigma^o = \frac{2}{5} \alpha_2^2 \cdot 17,8 \cdot A^{2/3} \text{ МеВ}. \quad (8.1.14)$$

Знайдемо тепер зміну кулонівської енергії ядер під час малих деформацій. Відомо [1;4], що кулонівська енергія сферичного ядра (за умови рівномірного розподілу заряду по об'єму)

$$E_c^o = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0} Z^2 \cdot A^{-1/3}, \quad (8.1.15)$$

де Z — заряд ядра. Формулу (8.1.15) можна переписати в іншому вигляді:

$$E_c^o = \frac{2}{5} e^2 Z^2 \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o, \quad (8.1.16)$$

тут $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o$ — усереднене по об'єму значення, яке для сферичного ядра дорівнює $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_o = \frac{3}{2R}$. Беручи до уваги (8.1.4) та (8.1.9), для деформованого ядра значення $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial$ можемо знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{R(\vartheta)} \frac{1}{r} r^2 dr = \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \pi R^2 \int_{-1}^1 \left(1 + \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{2} \{ 3 \cos^2 \vartheta - 1 \} \right)^2 d(\cos \vartheta) \cdot \frac{3}{2R} \left\{ 1 - \frac{\alpha_2^2}{5} \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Тоді за аналогією з (8.1.16), кулонівська енергія такого ядра дорівнюватиме:

$$E_c^\partial = \frac{2}{5} e^2 Z^2 \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\partial = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R} \left\{ 1 - \frac{\alpha_2^2}{5} \right\}. \quad (8.1.18)$$

Зміна кулонівської енергії ядра під час малих деформацій становитиме:

$$\Delta E_c = E_c^\partial - E_c^o = -\frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_0 A^{1/3}} \frac{\alpha_2^2}{5}. \quad (8.1.19)$$

Згідно формули Вайцеккера, $E_c = \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$, $\varepsilon_3 = 0,712$ МеВ, тому (8.1.19) можна переписати наступним чином:

$$\Delta E_c = E_c^\partial - E_c^o = -\frac{\alpha_2^2}{5} \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (8.1.20)$$

Підсумовуючи, з (8.1.14) та (8.1.20) знаходимо сумарну зміну енергії ядра під час еліптичних деформацій:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_{\sigma} + \Delta E_c = \frac{2}{5} \alpha_2^2 \cdot \varepsilon_2 A^{2/3} - \frac{\alpha_2^2}{5} \varepsilon_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} = \\ &= \alpha_2^2 \frac{2}{5} A^{2/3} \varepsilon_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{Z^2}{A} \right).\end{aligned}\quad (8.1.21)$$

Очевидно, що при $\Delta E > 0$ деформація не призведе до поділу ядра (зміна поверхневої енергії перевищуватиме зміну кулонівської енергії відштовхування), а при $\Delta E < 0$ ядро зазнаватиме ділення. Таким чином, з (8.1.21) знаходимо критерій енергетичної вигідності реакції поділу ядер:

$$1 - \frac{\varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{Z^2}{A} < 0 \Rightarrow \frac{Z^2}{A} > \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_3}, \quad (8.1.22)$$

підставивши числові значення констант $\varepsilon_2 = 17,8 \text{ MeV}$, $\varepsilon_3 = 0,712 \text{ MeV}$, отримаємо $\frac{Z^2}{A} > 50$. У тому випадку, коли $\frac{Z^2}{A} < 50$, для реакції ділення існує так званий активаційний поріг – енергія, яку необхідно надати ядру, щоб воно зазнало поділу, відповідно, коли $\frac{Z^2}{A} \approx 50$ активаційний поріг відсутній, ядра, для яких виконується нерівність $\frac{Z^2}{A} \geq 50$, є абсолютно нестійкими по відношенню до реакції ділення.

Слід відзначити, що оскільки критерій порогу ділення $\frac{Z^2}{A} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$ залежить від вибору феноменологічних параметрів, то при іншому наборі величин ε_2 та ε_3 результат може бути децю іншим в межах $\frac{Z^2}{A} > (48 \div 50)$. Це не дуже істотно впливає на аналіз процесу ділення.

Приклад 2. Ядро, яке виникає під час захоплення нейтрона ядром ^{238}U , зазнає ділення, якщо кінетична енергія нейтрона є більшою за $1,4 \text{ MeV}$, а ядро ^{235}U зазнає ділення під час захоплювання теплових нейтронів. Знайти енергію активації ядер ^{238}U та ^{235}U по відношенню до реакції ділення.

Розв’язання: 1 с п о с і б. Ділення ядра ^{238}U після захоплення швидкого нейтрона відбувається через утворення проміжного непарно-парного ядра ^{239}U :



Запишемо закон збереження енергії для реакції (8.2.1):

$$m_{^{238}_{92}\text{U}}c^2 + m_{\text{n}}c^2 + E_{\text{kn}} = m_{^{239}_{92}\text{U}}c^2, \quad (8.2.2)$$

де під $m_{^{238}_{92}\text{U}}$, $m_{^{239}_{92}\text{U}}$ слід розуміти маси спокою ядер відповідних ізотопів урану.

Записуючи (8.2.2), ми знехтували кінетичною енергією віддачі ядра ^{239}U . Рівняння (8.2.2) можемо переписати через енергії зв’язку материнського та дочірнього ядер урану:

$$\begin{aligned}&\{92m_p + 146m_n + m_n\}c^2 - E_{\text{зв}}(92, 238) + E_{\text{kn}} = \\ &= \{92m_p + 147m_n\}c^2 - E_{\text{зв}}(92, 239).\end{aligned}\quad (8.2.3)$$

Реакція ділення ядра ^{238}U відбувається за рахунок енергії налітаючого нейтрона, з (8.2.3) знаходимо енергію активації ^{238}U по відношенню до реакції ділення, яка дорівнює сумі кінетичної енергії нейтрона та його енергії зв’язку в ядрі ^{239}U :

$$Q_a = E_{\text{kn}} + E_{\text{зв}}(92, 239) - E_{\text{зв}}(92, 238). \quad (8.2.4)$$

Скориставшись формулою Бете-Вайцзеккера, знайдемо різницю енергій зв'язку $E_{38}(92,239) - E_{38}(92,238)$:

$$\begin{aligned} E_{38}(92,239) &= \varepsilon_1 \cdot 239 - \varepsilon_2 239^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{239^{1/3}} - \varepsilon_4 \frac{(239-184)^2}{4 \cdot 239}; \\ E_{38}(92,238) &= \varepsilon_1 \cdot 238 - \varepsilon_2 \cdot 238^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{238^{1/3}} - \\ &\quad - \varepsilon_4 \frac{(238-184)^2}{4 \cdot 238} + \varepsilon_5 \frac{1}{238^{3/4}}, \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

де $\varepsilon_1 = 15,75 \text{ MeB}$; $\varepsilon_2 = 17,8 \text{ MeB}$; $\varepsilon_3 = 0,712 \text{ MeB}$; $\varepsilon_4 = 94,8 \text{ MeB}$; $\varepsilon_5 = 34 \text{ MeB}$.

Підставивши числові значення в (8.2.4), отримаємо:

$$E_{38}(92,239) = 1807,7 \text{ MeB}; \quad E_{38}(92,238) = 1802,6 \text{ MeB}.$$

Таким чином, енергія зв'язку нейтрона в ядрі $^{239}_{92}\text{U}$:

$$\Delta E_n(^{239}\text{U}) = E_{38}(92,239) - E_{38}(92,238) = 5,1 \text{ MeB}. \quad (8.2.6)$$

Остаточно, енергія активації, або поріг реакції ділення ядра ^{238}U становитиме:

$$Q_a = E_{kn} + E_{38}(92,239) - E_{38}(92,238) = 1,4 + 5,1 = 6,5 \text{ MeB}. \quad (8.2.7)$$

Розрахуємо тепер енергію зв'язку нейтрона в ядрі $^{236}_{92}\text{U}$, яке утворюється після захоплення нейтрона ядром $^{235}_{92}\text{U}$ згідно реакції



Аналогічно до вищевикладеного отримаємо енергії зв'язку відповідних ядер:

$$\begin{aligned} E_{38}(92,236) &= \varepsilon_1 \cdot 236 - \varepsilon_2 236^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{236^{1/3}} - \\ &\quad - \varepsilon_4 \frac{(236-184)^2}{4 \cdot 236} + \varepsilon_5 \frac{1}{236^{3/4}}; \\ E_{38}(92,235) &= \varepsilon_1 \cdot 235 - \varepsilon_2 \cdot 235^{2/3} - \varepsilon_3 \cdot \frac{92^2}{235^{1/3}} - \\ &\quad - \varepsilon_4 \frac{(235-184)^2}{4 \cdot 235}. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Підставляючи чисельні значення констант з формули Вайцзеккера, отримаємо:

$$E_{38}(92,236) = 1791,1 \text{ MeB}; \quad E_{38}(92,235) = 1784,5 \text{ MeB}.$$

Отже, енергія зв'язку нейтрона в ядрі $^{236}_{92}\text{U}$ дорівнює

$$\Delta E_n(^{236}\text{U}) = E_{38}(92,236) - E_{38}(92,235) = 6,6 \text{ MeB}. \quad (8.2.10)$$

Як бачимо, ізоотоп $^{235}_{92}\text{U}$ може зазнавати поділу навіть після захоплення теплових нейтронів.

2 с п о і б. Енергію реакції (8.2.1) запишемо через дефекти мас материнського ^{238}U та дочірнього ^{239}U ядер:

$$Q = m_{^{238}\text{U}}c^2 + m_{\text{n}}c^2 - m_{^{239}\text{U}}c^2 = (\Delta_{^{238}\text{U}} + \Delta_{\text{n}} - \Delta_{^{239}\text{U}})c^2. \quad (8.2.11)$$

Скористаємось табличними значеннями для дефектів мас нуклідів: $\Delta_{^{238}\text{U}} = 0,05076 \text{ а.о.м.}$; $\Delta_{^{239}\text{U}} = 0,05432 \text{ а.о.м.}$; $\Delta_{\text{n}} = 0,008665 \text{ а.о.м.}$ й обчислимо енергію (8.2.11):

$$Q = (0,05076 + 0,008665 - 0,05432)931,5 \text{ MeB} = 4,75 \text{ MeB}. \quad (8.2.12)$$

Енергія активації ядра ^{238}U по відношенню до реакції ділення дорівнюватиме сумі енергії (8.2.9) та кінетичної енергії нейтрона:

$$Q_a = E_{kn} + Q = 4,75 + 1,4 = 6,15 \text{ MeV.} \quad (8.2.13)$$

Як бачимо, цей результат не співпадає зі встановленим експериментально порогом активації ядра ^{238}U , оскільки таким методом ми ніяк не можемо врахувати енергію спаровування нуклонів в ядрах. Проте саме останній доданок у формулі Вайцзеккера визначає різницю активаційних порогів ділення ізотопів урану ^{238}U та ^{235}U .

Приклад 3. Під час захоплювання теплових нейтронів атомними ядрами конкурують два процеси:

- а) радіаційне захоплення з перерізом $\sigma_{n\gamma}$;
- б) ділення ядра з перерізом σ_f .

Під час одного акту поділу в середньому виділяється ν нейтронів. Знайти коефіцієнт η , який дорівнює кількості нейтронів на один акт ділення, які в подальшій ланцюговій реакції призвели б до поділу в чистих ізотопах ^{233}U , ^{235}U та ^{239}Pu , якби вони були нескінченими. Скористатись даними таблиці 1 для перерізів взаємодії нейтрона з енергією 0,025 еВ.

Порівняти значення коефіцієнта η_m на теплових нейтронах для природного та збагаченого (1,5% ^{235}U) урану.

Таблиця 8.1.

Ізотопи	$\sigma_f, 10^{-24} \text{ см}^2$	$\sigma_{n\gamma}, 10^{-24} \text{ см}^2$	ν
^{233}U	527	54	2,52
^{235}U	582	112	2,41
^{239}Pu	746	280	2,92

Розв'язання: Під час зіткнення нейтрона з важким ядром з процесом ділення завжди буде конкурувати процес радіаційного захоплення (n, γ). Якщо перерізи ділення та радіаційного захоплення позначити як σ_f та $\sigma_{n\gamma}$ відповідно, то ймовірність поділу ядра під час захоплення теплового нейтрону буде дорівнювати:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma}} \text{ (за умови, що інші процеси взаємодії відсутні).}$$

Для одночасного врахування як кількості миттєвих нейтронів на один акт поділу, так і ймовірності радіаційного захоплювання, вводять коефіцієнт η , який дорівнює середній кількості моноенергетичних нейтронів ділення на один акт захоплення нейтрона ядром, що зазнає поділу:

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma}}, \quad (8.3.1)$$

де ν — середня кількість нейтронів ділення, η — середня кількість нейтронів, здатних викликати реакцію ділення ядер наступного покоління. Очевидно, що ланцюгова реакція ділення можлива лише у випадку, коли $\eta > 1$.

Скориставшись даними таблиці 1, знайдемо з (8.3.1) коефіцієнт η для ізотопів ^{233}U , ^{235}U та ^{239}Pu . Результат представимо у вигляді таблиці 8.2.

Таблиця 8.2.

Ядро	ν	η
^{233}U	2,52	2,29
^{235}U	2,41	2,02
^{239}Pu	2,92	2,12

Щоб дати відповідь на друге запитання задачі, слід врахувати, що в природному урані міститься 99,28% ^{238}U , який здатний поглинати теплові нейтрони (переріз взаємодії σ_a) та 0,72% ^{235}U .

При такому співвідношенні ядер в суміші на одне ядро ^{235}U припадає 140 ядер ^{238}U . Зручно ввести поняття про середній переріз $\bar{\sigma}$ поглинання нейтрона в природній суміші, віднесений до одного ядра ізоотопу ^{235}U :

$$\bar{\sigma} = \sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a. \quad (8.3.2)$$

Імовірність того, що тепловий нейтрон, який поглинувся природною сумішшю, викличе реакцію ділення:

$$\frac{\sigma_f}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a}. \quad (8.3.3)$$

Тоді для природного урану значення середньої кількості нейтронів ділення на один поглинутий тепловий нейтрон становитиме:

$$\eta_{m1} = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_{n\gamma} + 140 \cdot \sigma_a}. \quad (8.3.4)$$

Табличне значення перерізу поглинання теплових нейтронів для ^{238}U є таким: $\sigma_a = 2,75$ барн. Підставивши ці дані, а також дані таблиці 1 для ^{235}U у (8.3.4), знайдемо:

$$\eta_{m1} = 2,47 \frac{582}{694 + 140 \cdot 2,75} = 1,33. \quad (8.3.5)$$

В збагаченому урані (1,5% ^{235}U) на одне ядро ^{235}U припадає 66 ядер ізоотопу ^{238}U і середнє значення кількості нейтронів ділення на один тепловий нейтрон становитиме:

$$\eta_{m2} = 2,47 \frac{582}{694 + 66 \cdot 2,75} = 1,64. \quad (8.3.6)$$

Приклад 4. Показати, що в природній суміші урану неможлива ланцюгова реакція ділення на швидких нейтронах. На кожен акт ділення ядер ^{235}U та ^{238}U під час взаємодії зі швидкими нейтронами виникає в середньому 2,5 нейтрони ділення. Переріз поділу ядра ^{238}U складає близько $\sigma_f^8 = 0,5$ барн, ядра ^{235}U — $\sigma_f^5 = 2$ барн, переріз непружного розсіювання нейтронів ядрами ^{238}U $\sigma_c^8 \approx 2$ барн, перерізи радіаційного захоплення швидких нейтронів ядрами ^{235}U та ^{238}U дорівнюють приблизно $\sigma_{n\gamma}^5 \approx \sigma_{n\gamma}^8 \approx 0,2$ барн. Врахувати також, що у спектрі ділення лише 60% нейтронів мають енергію вищу за ефективний поріг $E_{\text{пор}} \approx 1,4$ МеВ для ^{238}U .

Розв'язання: Позначимо $x = 0,0072$ — вміст ^{235}U в природній суміші ізоотопів. Як відомо, під час взаємодії зі швидкими нейтронами поділу зазнають обидва ізоотопи ^{238}U та ^{235}U , тому коефіцієнт $\eta_{\text{шв}}$, який характеризує ланцюгову реакцію на швидких нейтронах, буде складатись з двох доданків: $\eta_{\text{шв}} = \eta_{\text{шв}1} (^{235}\text{U}) + \eta_{\text{шв}2} (^{238}\text{U})$. Загальний вираз для нього буде таким:

$$\eta_{\text{шв}} = \nu \frac{x\sigma_f^5 + (1-x)\sigma_f^8 \cdot k}{x(\sigma_f^5 + \sigma_{n\gamma}^5) + (1-x)(\sigma_f^8 + \sigma_{n\gamma}^8 + \sigma_c^8)}, \quad (8.4.1)$$

де $k = 0,6$ — коефіцієнт, який враховує, що реакція на ^{238}U є пороговою.

Підставляючи числові значення у (8.4.1), знайдемо для природної суміші коефіцієнт $\eta_{\text{шв}}$:

$$\eta_{шв} = 2,5 \cdot \frac{0,0072 \cdot 2 + 0,9928 \cdot 0,6 \cdot 0,5}{0,0072 \cdot 2,2 + 0,9928 \cdot 2,7} \approx 0,3. \quad (8.4.2)$$

Таким чином, в природній суміші ізотопів урану ланцюгова реакція на швидких нейтронах неможлива.

З (8.4.1) виразимо x :

$$x = \frac{\nu k \sigma_f^8 - \eta_{шв} \sigma_\Sigma^8}{\eta_{шв} (\sigma_\Sigma^5 - \sigma_\Sigma^8) - \nu (\sigma_f^5 - k \sigma_f^8)}, \quad (8.4.3)$$

де введено позначення $\sigma_\Sigma^5 = \sigma_f^5 + \sigma_{n\gamma}^5$, $\sigma_\Sigma^8 = \sigma_f^8 + \sigma_{n\gamma}^8 + \sigma_c^8$. Для того, щоб здійснити ланцюгову реакцію поділу на швидких нейтронах в урановій суміші, слід збагатити її. При значенні $\eta_{шв} = 1,1$ вміст ^{235}U має складати $x = 0,46 = 46\%$.

Приклад 5. Оцінити проміжок часу, необхідний для поділу 1 кг речовини середовищі ^{235}U (без урахування виходу нейтронів за межі активної зони), якщо середня енергія нейтронів ділення 1,6 MeV, переріз ділення урану ^{235}U для цієї енергії становить близько 2 барн та коефіцієнт розмноження $k_\infty = 1,001$. Вважати, що в початковий момент розділилось одне ядро. Як зміниться результат, якщо $k_\infty = 1,01$? Прийняти, що середній час життя одного покоління нейтронів в ^{235}U $\tau_n = 10^{-7}$ с.

Розв'язання: Даний приклад є ідеалізованим і його буде розв'язано в припущенні, що середовище є однорідним та необмеженим, поглинання та сповільнення нейтронів в середовищі не відбувається. Це означає, що кожен нейтрон, який з'явився в результаті реакції ділення, рано чи пізно буде захоплений ядром ^{235}U й викличе реакцію поділу. Таким чином, загальна кількість ядер, що зазнають поділу в кінці n -го кроку ланцюгової реакції, становитиме:

$$1 + k_\infty + k_\infty^2 + \dots + k_\infty^n = \frac{k_\infty^{n+1} - 1}{k_\infty - 1} \approx \frac{k_\infty^{n+1}}{k_\infty - 1}. \quad (8.5.1)$$

З іншого боку, це число дорівнюватиме загальній кількості ядер в 1 кг речовини:

$$\frac{k_\infty^{n+1}}{k_\infty - 1} = \frac{M}{m_U}, \quad (8.5.2)$$

де M — загальна маса речовини, m_U — маса атома ^{235}U . З (8.5.2) виражаємо n :

$$k_\infty^{n+1} = \frac{M}{m_U} (k_\infty - 1) \Rightarrow n = \frac{\ln \left(\frac{M}{m_U} \left(1 - \frac{1}{k_\infty} \right) \right)}{\ln k_\infty}. \quad (8.5.3)$$

Проміжок часу, необхідний для поділу всієї маси ^{235}U знайдемо, помноживши кількість кроків ланцюгової реакції n на середній час життя одного покоління нейтронів:

$$t = n \tau_n = \frac{\ln \left(\frac{M}{m_U} \left(1 - \frac{1}{k_\infty} \right) \right)}{\ln k_\infty} \tau_n. \quad (8.5.4)$$

Підставляючи у (8.5.4) дані для коефіцієнту розмноження k_∞ , отримуємо для $k_\infty = 1,001$:

$$t_1 = \frac{\ln \left(\frac{10^3 \text{ г}}{235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}} \left(1 - \frac{1}{1,001} \right) \right)}{\ln 1,001} \cdot 10^{-7} = 4,93 \cdot 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad (8.5.5)$$

та для $k_\infty = 1,01$:

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{10^3 z}{235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} z} (1,01 - 1)\right)}{\ln 1,01} \cdot 10^{-7} = 5,18 \cdot 10^{-4} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.} \quad (8.5.6)$$

Приклад 6. Реактивністю реактора називається величина $\rho = \frac{k-1}{k}$, де k — коефіцієнт розмноження нейтронів. Якщо $|k-1| \ll 1$, то $\rho \approx k-1$. Знайти в цьому наближенні закон зміни потужності реактора $P(t)$ в надкритичному режимі, коли $k > 1$. Визначити період T реактора, тобто час, за який потужність зростає в e разів. Середній час життя одного покоління нейтронів дорівнює $\bar{\tau}$. Вважати, що під час однієї реакції поділу виділяється енергія Q_0 , кількість ядер в активній зоні, що зазнали поділу в початковий момент часу — N_0 .

Розв'язання: Сумарна кількість ядер, що зазнали поділу протягом часу t становитиме

$$N_1 = N_0 (1 + k + k^2 + \dots + k^n) = N_0 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \approx N_0 \frac{k}{k - 1} k^{n/\bar{\tau}}, \quad (8.6.1)$$

де n — кількість кроків ланцюгової реакції ділення, причому $n = \frac{t}{\bar{\tau}}$ (див. приклад 8.5), де $\bar{\tau}$ — середній час життя одного покоління нейтронів. У формулі (8.6.1) враховано, що $k^{n+1} \ll 1$. Згідно визначення, потужність ядерного реактора дорівнює енергії, виділеній в реакторі за одиницю часу: $P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Врахуємо, що сумарна енергія дорівнює $Q = N_1 \cdot Q_0$, де N_1 — кількість ядер, що зазнали поділу протягом часу t , Q_0 — енергія, яка виділяється в одній реакції поділу.

Тоді формулу для потужності реактора можемо переписати наступним чином:

$$P = \frac{dQ}{dt} = Q_0 N_0 \frac{k}{k - 1} \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{\bar{\tau}} \ln k} \right) = P(0) \frac{\ln k}{\rho} e^{\frac{t}{\bar{\tau}} \ln k}, \quad (8.6.2)$$

де введено позначення $P(0) = \frac{Q_0 N_0}{\bar{\tau}}$ та враховано явний вигляд величини реактивності ядерного реактора $\rho = \frac{k - 1}{k}$.

Використаємо розклад логарифма в (8.6.2) за малою величиною $k - 1 \ll 1$:

$$\ln k = \ln(1 + k - 1) = k - 1 - \frac{(k - 1)^2}{2} + \dots \approx k - 1. \quad (8.6.3)$$

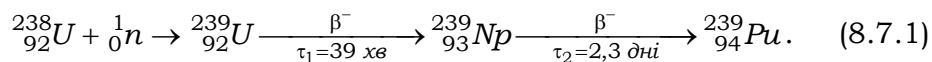
З урахуванням (8.6.3), з (8.6.2) отримаємо закон зміни потужності реактора $P(t)$ в слабо надкритичному режимі, коли $k - 1 \ll 1$:

$$P = P(0) \frac{k - 1}{\rho} e^{\frac{t}{\bar{\tau}} (k - 1)} \approx P(0) e^{\frac{t \rho}{\bar{\tau}}} = P(0) e^{\frac{t}{T}}, \quad (8.6.4)$$

тут використано наближену рівність $\rho \approx k - 1$ та введено позначення $T = \frac{\bar{\tau}}{\rho}$ — період реактора, тобто час, протягом якого потужність зростає в e разів.

Приклад 7. Під час радіаційного захоплювання нейтрона ядро ^{238}U в результаті ряду реакцій перетворюється в ядро ^{239}Pu . (Як і ^{235}U , ^{239}Pu ділиться тепловими нейтронами). В результаті такого процесу «неядерне паливо» ^{238}U перетворюється на «ядерне паливо» ^{239}Pu . Коефіцієнтом відтворення «ядерного палива» k_g називається відношення кількості атомів створеного «палива» до кількості атомів витраченого. Нехай в початковий момент часу у ТВЕЛах (ТВЕЛ – тепловиділяючий елемент) містилось 10% ^{239}Pu та 90% ^{238}U . При якому значенні $P_m(k_g - 1)$, де P_m – теплова потужність реактора, віднесена до одиниці ваги «палива», частина плутонію збільшиться удвічі за 10 років неперервної роботи реактора?

Розв’язання: Схема перетворення ізотопу ^{238}U в реакції відновлення ядерного пального виглядає наступним чином:



Знайдемо кількість атомів ^{239}Pu в одному грамі ядерного пального на початку роботи реактора:

$$\frac{N_0}{m} = N_{m0} = \eta \frac{1}{M_{\text{Pu}}}, \quad (8.7.2)$$

де m_{Pu} – маса атома ^{239}Pu , яка приблизно рівна (без урахування дефекту мас ядра та маси електронної оболонки) $M_{\text{Pu}} = 239 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, $\eta = 0,1$ – початковий вміст ядер ізотопу ^{239}Pu в ядерному пальному. Таким чином, початкова кількість ядер ^{239}Pu в 1 кг пального становить $N_{m0} = 2,52 \cdot 10^{23} \text{ кг}^{-1}$. Будемо вважати, що під час реакції поділу одного ядра виділяється енергія $Q_0 \approx 200 \text{ Мев} = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$. Для забезпечення заданої потужності реактора витрачається $N_1 = \frac{Pt}{Q_0}$ атомів плутонію. Кількість таких атомів на одиницю маси речовини: $N_{m1} = \frac{P_m t}{Q_0}$. Якщо потужність реактора виражено у $\text{МВт}/\text{кг}$, остання формула переписеться як:

$$N_{m1} = \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6, \quad (8.7.3)$$

де коефіцієнт 10^6 враховує переведення МВт у Вт , а $P_m = P/t$.

При заданій потужності реактора, вираженій у $\text{МВт}/\text{кг}$, за 10 років неперервної роботи ($t = 3,15 \cdot 10^8 \text{ с}$) утвориться

$$N_{m2} = k_g \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6 \quad (8.7.4)$$

атомів плутонію на кілограм ядерного палива. При виконанні умови, що за цей час кількість атомів плутонію на одиницю маси подвоїться, отримаємо наступне співвідношення:

$$N_{m0} + N_{m2} - N_{m1} = 2N_{m0}. \quad (8.7.5)$$

Враховуючи (8.7.2), (8.7.3) та (8.7.4), з (8.7.5) визначимо параметр $P_m(k_g - 1)$:

$$N_{m0} + (k_g - 1) \frac{P_m t}{Q_0} \cdot 10^6 = 2N_{m0} \Rightarrow$$

$$P_m (k_g - 1) = N_{m0} \frac{Q_0}{t} \cdot 10^{-6}. \quad (8.7.6)$$

Підставляючи у (8.7.6) дані задачі, знайдемо числове значення параметра $P_m(k_\infty - 1)$:

$$\begin{aligned} P_m(k_\infty - 1) &= 2,52 \cdot 10^{23} \text{ кг}^{-1} \frac{3,2 \cdot 10^{-11}}{3,15 \cdot 10^8} \cdot 10^{-6} = \\ &= 25,6 \cdot 10^{-3} \text{ МВт/кг} = 25,6 \text{ МВт/т}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Нехай $N(t)$ — кількість нейтронів в активній зоні ядерного реактора, $C(t)$ — кількість уламків ділення, які здатні випускати нейтрони із запізненням. Час життя покоління миттєвих нейтронів дорівнює $\tau = 10^{-3}$ с. Середній час запізнення нейтронів $\tau_s = 13$ с. Рівняння динаміки реактора записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} N + \frac{1}{\tau_s} C, \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta k}{\tau} N - \frac{1}{\tau_s} C, \end{aligned} \quad (8.8.1)$$

де β — відносна частина нейтронів, що запізнюються, k — коефіцієнт розмноження нейтронів.

а) Розглянути критичний режим реактора, при якому $k = 1$. Знайти стаціонарний розв'язання та час встановлення стаціонарного режиму.

б) Знайти період реактора T в слабо надкритичному режимі, коли $k - 1 \ll 1$.

Розв'язання: а) При $k = 1$ (критичний режим, при якому протікає стаціонарна ядерна реакція) рівняння (8.8.1) перепишуться так:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\beta}{\tau} N + \frac{1}{\tau_s} C, \quad \frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\tau} N - \frac{1}{\tau_s} C. \quad (8.8.2)$$

Система (8.8.2) має стаціонарний розв'язання:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0. \quad (8.8.3)$$

При цьому

$$\frac{\beta}{\tau} N_{кр} = \frac{1}{\tau_s} C_{кр} \Rightarrow N_{кр} = \frac{\tau}{\beta \tau_s} C_{кр}. \quad (8.8.4)$$

Покладаючи $\beta = 0,0064$ [1] (доля нейтронів, що запізнюються, змінюється в межах $(0,2 \div 0,7)\%$ для різних видів ядерного палива) та підставляючи дані з умови задачі, знайдемо співвідношення між критичними параметрами:

$$C_{кр} = \frac{0,0064 \cdot 13}{10^{-3}} N_{кр} = 83,2 \cdot N_{кр}. \quad (8.8.5)$$

В реальних системах виконується нерівність $\beta \tau_s \ll \tau$, так що $C_{кр} \gg N_{кр}$. Це пояснюється тим, що хоча нейтроноактивні ядра народжуються у сотні разів рідше, ніж нейтрони, живуть вони в десятки тисяч разів довше. Таким чином, роль нейтронів, що запізнюються, в кінетиці ланцюгової реакції є дуже значною.

Для знаходження часу встановлення стаціонарного режиму, необхідно знайти розв'язання системи рівнянь (8.8.2). Для цього виразимо з першого рівняння (8.8.2) кількість уламків ділення C та підставимо у друге рівняння (8.8.2), отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно N :

$$\begin{aligned} C &= \tau_s \left(\frac{dN}{dt} + \frac{\beta}{\tau} N \right), \quad \frac{dC}{dt} = \tau_s \left(\frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{\beta}{\tau} \frac{dN}{dt} \right) \Rightarrow \\ \tau_s \left(\frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{\beta}{\tau} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{\beta}{\tau} N - \frac{dN}{dt} - \frac{\beta}{\tau} N = -\frac{dN}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2 N}{dt^2} + \left(\frac{\beta}{\tau} + \frac{1}{\tau_s} \right) \frac{dN}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (8.8.6)$$

Позначимо $T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}$ — деякий характерний час (далі побачимо, що це і є час встановлення стаціонарного режиму в реакторі). Розв'язання рівняння (8.8.6) будемо шукати у вигляді:

$$N = A_1 + A_2 e^{-t/T}. \quad (8.8.7)$$

Коефіцієнти у (8.8.7) знайдемо з граничних умов: при $t = 0$ кількість нейтронів $N(0) = N_0$, при $t \rightarrow \infty$ кількість складе $N = N_{кр}$:

$$\begin{aligned} N(\infty) &= A_1 = N_{кр}, \\ N(0) &= N_{кр} + A_2 = N_0 \Rightarrow A_2 = N_0 - N_{кр}. \end{aligned} \quad (8.8.8)$$

З урахуванням (8.8.8), закон зміни кількості нейтронів запишеться так:

$$N(t) = N_{кр} + (N_0 - N_{кр}) e^{-t/T}, \quad T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}. \quad (8.8.9)$$

Дійсно, час $T = \frac{\tau\tau_3}{\beta\tau_3 + \tau}$ можна вважати часом встановлення стаціонарного режиму реактора. В нашому випадку він дорівнює

$$T = \frac{13 \cdot 10^{-3}}{13 \cdot 0,0064 + 10^{-3}} = 0,15 \text{ с.}$$

б) Якщо режим реактора відрізняється від критичного, розв'язання рівнянь (8.8.1) можна шукати у вигляді:

$$N = N_0 e^{t/T}, \quad C = C_0 e^{t/T}. \quad (8.8.10)$$

Підставимо (8.8.10) у (8.8.1):

$$\frac{N_0}{T} e^{t/T} = \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} N_0 e^{t/T} + \frac{1}{\tau_3} C_0 e^{t/T}, \quad (8.8.11 \text{ а})$$

$$\frac{C_0}{T} e^{t/T} = \frac{\beta k}{\tau} N_0 e^{t/T} - \frac{1}{\tau_3} C_0 e^{t/T}. \quad (8.8.11 \text{ б})$$

Виразивши з рівняння (8.8.11 б) C_0 ,

$$C_0 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau_3} \right) = \frac{\beta k}{\tau} N_0 \Rightarrow C_0 = \frac{\beta k \tau_3 T}{\tau(T + \tau_3)} N_0, \quad (8.8.12)$$

та підставивши його в рівняння (8.8.11 а), знаходимо рівняння відносно T :

$$\frac{1}{T} = \frac{k(1-\beta)-1}{\tau} + \frac{\beta k}{\tau \left(1 + \frac{\tau_3}{T} \right)} \Rightarrow \quad (8.8.13)$$

$$T^2(k-1) + T(\tau_3(k(1-\beta)-1) - \tau) - \tau\tau_3 = 0.$$

Розв'язання цього рівняння має вигляд:

$$T = \frac{\tau - \tau_3(k(1-\beta)-1) \pm \sqrt{(\tau_3(k(1-\beta)-1) - \tau)^2 + 4\tau\tau_3(k-1)}}{2(k-1)}. \quad (8.8.14)$$

Можна показати, що у випадку, коли $k < 1$, обидва корені рівняння (8.8.14) від'ємні, що відповідає згасанню реакції. В надкритичному режимі один корінь додатний, він і забезпечуватиме наростання ядерної реакції. Знайдемо наближений розв'язання (8.8.14) для випадку $k-1 \ll 1$ (слабо надкритичний режим):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\tau - \tau_3(k-1-k\beta) + \sqrt{(\tau_3(k-1-k\beta) - \tau)^2 + 4\tau\tau_3(k-1)}}{2(k-1)} \approx \\ &\approx \frac{\tau + \tau_3\beta k + \sqrt{(\tau_3 k\beta + \tau)^2 + 4\tau\tau_3(k-1)}}{2(k-1)} \approx \frac{\tau + \tau_3\beta k}{k-1}. \end{aligned} \quad (8.8.15)$$

З урахуванням нерівності $\beta\tau_3 \ll \tau$, (8.8.15) остаточно набуде вигляду:

$$T_1 \approx \frac{\tau_3\beta k}{k-1}, \quad (8.8.14)$$

тобто ми отримали, що в слабо надкритичному режимі швидкість наростання ядерної реакції визначається лише нейтронами, що запізнюються. Числове значення періоду реактора для випадку $k-1=10^{-3}$, $\tau_3\beta=13\cdot0,0064\approx8\cdot10^{-2}$ становить $T_1=80$ с.

9. РЕАКЦІЇ ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗУ.

9.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Основна реакція у водневому середовищі в центрах зірок



відбувається за рахунок слабкої взаємодії з дуже малим перерізом. Наприклад, при енергії протонів 1 MeV переріз реакції (9.1.1) $\sigma=10^{-47}\text{ см}^2$, а при енергії 1 keV $\sigma=10^{-51}\text{ см}^2$. Одна з можливостей здійснити цю реакцію в лабораторних умовах — бомбардування пучком протонів товстої мішені, що складається з води. Розрахувати, яким має бути струм протонів з енергією 1 MeV , які падають на таку мішень, щоб за 1 годину відбулась одна реакція синтезу. Масова довжина пробігу протона у воді $\rho l = 8\cdot10^{-4}\text{ з/см}^2$.

Розв'язання: Скористаємось формулою для виходу реакції, що відбувається в товстій мішені:

$$w = \langle \sigma \rangle n_0 l, \quad (9.1.2)$$

де $\langle \sigma \rangle$ — середній переріз ядерної реакції, n_0 — концентрація ядер мішені (в нашому випадку це ємність з водою), l — довжина пробігу частинок, що викликають ядерну реакцію. За визначенням, вихід реакції дорівнює відношенню кількості реакцій, що відбулись за одиницю часу, до кількості падаючих частинок, в нашому випадку це відношення дорівнює $w = \frac{N_d}{N_p}$, де N_d — кількість утворених дейтронів, N_p — кількість протонів, що потрапили на мішень.

Струм протонів виразимо через їх кількість:

$$I_p = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e N_p}{\Delta t}, \quad (9.1.3)$$

тут e — заряд протона. Враховуючи (9.1.3) та вираз для виходу реакції w , з (9.1.2) знаходимо формулу для струму протонів:

$$I_p = \frac{e N_d}{\langle \sigma \rangle n_0 l \Delta t}. \quad (9.1.4)$$

Концентрацію протонів у мішені можемо виразити так: $n_0 = 2N_A \left(\frac{\rho}{M} \right)_{\text{H}_2\text{O}}$, де $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$, $M_{\text{H}_2\text{O}}$ — густина та молярна маса води. Тоді (9.1.4) можна переписати таким чином:

$$I_p = \frac{e N_d M_{\text{H}_2\text{O}}}{2 \langle \sigma \rangle N_A \rho_{\text{H}_2\text{O}} l \Delta t}. \quad (9.1.5)$$

Згідно умови, протягом часу $\Delta t = 1\text{ год} = 3,6\cdot10^3\text{ с}$ повинна відбутись одна реакція, тобто $N_d = 1$. Використавши ці дані, знайдемо з (9.1.5) необхідну величину струму протонів з енергією 1 MeV :

$$I_p = \frac{4,8\cdot10^{-10}\text{ од. CGSE} \cdot 1\text{ з/моль}}{2\cdot10^{-47}\text{ см}^2 \cdot 6\cdot10^{23}\text{ моль}^{-1} \cdot 8\cdot10^{-4}\text{ з/см}^2 \cdot 3,6\cdot10^3\text{ с}} \approx 1,4\cdot10^{13}\text{ од. CGSE/с} \approx 4,7\text{ кА}.$$

Зрозуміло, що таким методом реалізувати термоядерні реакції абсолютно невигідно. На даний момент найбільш перспективними вважаються термоядерні установки «Токамаки», в яких плазма, нагріта до надвисоких температур

($\geq 10^7 - 10^8$), утримується магнітними полями та інерційні термоядерні реактори (лазерний термоядерний синтез).

Приклад 2. Відомо, що важка вода (D_2O) міститься в морській воді в кількості 1 молекули приблизно на кожні 6000 молекул звичайної води. Яка енергія виділиться в термоядерному реакторі під час спалювання всього дейтерію, який міститься в 1 л води? Реакції дейтерієвого синтезу при відносній енергії частинок $E \approx 1 \text{ MeV}$ відбуваються приблизно з рівною ймовірністю і проходять наступним чином:

$$\text{а) } d + d = t + p + Q_1; \quad (9.2.1)$$

$$\text{б) } d + d = {}^3_2\text{He} + n + Q_2; \quad (9.2.2)$$

Розв'язання: Слід зауважити, що існує третій канал реакції синтезу дейтерію:

$$d + d = {}^4_2\text{He} + \gamma + 23 \text{ MeV},$$

проте ймовірність такої реакції складає лише $10^{-3} \%$, тому в подальшому її не буде враховано.

Знайдемо енергії реакцій (9.2.1) та (9.2.2). Їх величину можна виразити, наприклад, через дефекти мас. Для першої реакції

$$Q_1 = 2\Delta({}^2_1D) - \Delta({}^3_1T) - \Delta({}^1_1p), \quad (9.2.3)$$

а для другої

$$Q_2 = 2\Delta({}^2_1D) - \Delta({}^3_2\text{He}) - \Delta({}^1_0n). \quad (9.2.4)$$

Табличні значення дефектів мас ядер дейтерію та продуктів реакції синтезу є такими (в а.о.м.) [8,9]:

$$\Delta({}^2_1D) = 0,014102; \quad \Delta({}^3_1T) = 0,0160049; \quad \Delta({}^3_2\text{He}) = 0,01603;$$

$$\Delta({}^1_1p) = 0,007825; \quad \Delta({}^1_0n) = 0,008665.$$

Підставивши числові значення та врахувавши, що $1 \text{ а.о.м.} = 931,5 \text{ MeV}$, отримаємо

$$Q_1 = (2 \cdot 0,014102 - 0,0160049 - 0,007825) \cdot 931,5 \approx 4,07 \text{ MeV},$$

$$Q_2 = (2 \cdot 0,014102 - 0,01603 - 0,008665) \cdot 931,5 \approx 3,27 \text{ MeV}.$$

Оскільки обидві реакції проходять з однаковою ймовірністю, можна вважати, що під час одного акту синтезу в середньому виділяється енергія $Q = 3,67 \text{ MeV}$.

Обрахуємо енергію, яку виносять продукти реакцій (9.2.1) та (9.2.2) з зони термоядерної реакції. Для спрощення розрахунків знехтуємо кінетичною енергією частинок до реакції. В такому випадку в реакції (9.2.1) на долю тритію припадає

$$Q_T = Q_1 \frac{m_p}{m_T + m_p} \approx 1,02 \text{ MeV}, \text{ а протон виносить енергію } Q_p = Q_1 \frac{m_T}{m_T + m_p} \approx 3,05 \text{ MeV}.$$

Аналогічним чином знайдемо енергію продуктів реакції (9.2.2):

$$Q_T = Q_2 \frac{m_n}{m_T + m_n} \approx 0,82 \text{ MeV}, \quad Q_n \approx 2,45 \text{ MeV}.$$

В реакції (9.2.2) на долю заряджених частинок припадає лише $0,82 \text{ MeV}$, решту енергії забирають нейтрони. Відомо, що енергія заряджених частинок може бути перетворена в електричну зі значно більшим ККД, ніж енергія нейтронів [1].

Розрахуємо тепер, яка кількість атомів дейтерію міститься в 1 л (10^3 см^3) води. Кількість молекул в 1 л води дорівнює

$$N_{H_2O} = \frac{m}{M_{H_2O}} N_A = \frac{10^3 \text{ г}}{18 \text{ г/моль}} 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \approx 3,35 \cdot 10^{25}.$$

Отже, кількість атомів водню в 1 л води дорівнює $6,7 \cdot 10^{25}$. Вміст молекул важкої води в одиниці об'єму морської води $\eta \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$. Таким чином, в 1 л води міститься $N_D \approx 10^{22}$ атомів дейтерію. Це значення є наближенням, оскільки ми не

враховували наявність інших елементів у морській воді, проте від нас не вимагається висока точність такої оцінки. Якщо припустити, що можна стовідсотково використати весь дейтерій, що міститься в 1 л води, то енергія, яка виділиться в термоядерному реакторі під час згоряння дейтерію, дорівнюватиме:

$$Q \cdot \frac{N_D}{2} = 3,67 \cdot 0,55 \cdot 10^{22} \approx 2 \cdot 10^{22} \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$$

Цю величину можна порівняти з енергією, яка виділяється, наприклад, при спалюванні 1 л бензину $Q_1 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ Дж/л}$. Видно, що в 1 л води міститься енергія, яка еквівалентна спалюванню 100 л бензину.

Приклад 3. Оцінити мінімальну температуру дейтерієвої плазми, при якій дейтрони з найбільш імовірною швидкістю відносного руху зможуть подолати висоту кулонівського бар'єра. Радіус дейтрона $R \approx 2,0 \text{ фм}$.

Розв'язання: Зазвичай термоядерний синтез є глибоко підбар'єрним процесом (див. наступний приклад). Проте при достатньо високій температурі відносна кінетична енергія частинок, що взаємодіють, досягне значення, яке дорівнює висоті кулонівського бар'єру. Оцінимо температуру дейтерієвої плазми, при якій цю умову буде виконано.

Кулонівський потенціал у випадку ядер дейтерію дорівнює (в системі CGSE):

$$U_{cul} = \frac{e^2}{R}, \quad (9.3.1)$$

де R — радіус дейтрона. Очевидно, що температура плазми має бути такою, щоб дейтрони з найбільш імовірною швидкістю відносного руху могли подолати такий бар'єр:

$$\theta = kT = \frac{e^2}{R}, \quad (9.3.2)$$

тут θ — температура плазми, виражена в енергетичних одиницях.

Підставивши в (9.3.2) радіус ядра дейтерію, знайдемо

$$\theta = \frac{4,8^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 10^{-13}} = 11,5 \cdot 10^{-7} \text{ ерг} \approx 0,72 \text{ MeV},$$

що відповідає температурі $T = 8,3 \cdot 10^9 \text{ К}$.

Приклад 4. Для однойменно заряджених частинок з кінетичною енергією відносного руху \tilde{T} , значно меншою за висоту кулонівського бар'єра, коефіцієнт прозорості бар'єра за відсутності екранування має вид:

$$D \approx \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{T}}}\right), \quad \alpha = \pi q_1 q_2 \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}, \quad (9.4.1)$$

де q_1, q_2 — заряди частинок, μ — їх зведена маса.

а) Отримати цю формулу за допомогою загального виразу для коефіцієнта прозорості тунельного бар'єра:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-T)} dx\right), \quad (9.4.2)$$

тут m, T — маса та кінетична енергія частинки, яка тунелює через бар'єр, x_1, x_2 — координати точок, між якими $U > T$;

б) Розрахувати значення D для дейтронів з найбільш імовірною швидкістю відносного руху в плазмі з температурою 1,0 кеВ та 10,0 кеВ.

Розв'язання: а) В реакціях синтезу приймають участь позитивно заряджені ядра, які повинні подолати кулонівський потенціал відштовхування. У випадку, коли кінетична енергія відносного руху частинок значно менша за висоту кулонівського бар'єру, має місце так званий «глибоко підбар'єрний» тунельний ефект.

Для розрахунку імовірності такого процесу скористаємось відомою формулою для коефіцієнту прозорості квантового бар'єра (9.4.2), де замість T слід взяти

кінетичну енергію \tilde{T} відносного руху частинок, що взаємодіють, а замість m — зведену масу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Кулонівський потенціал має вигляд:

$$U_{cul} = \frac{q_1 q_2}{r}, \quad (9.4.3)$$

де q_1, q_2 — заряди частинок (див. Розділ 3, Приклад 1). Координати класичних точок повороту x_1, x_2 є такими: $x_1 = R$, де $R = R_1 + R_2$ — сума радіусів частинок, що взаємодіють, x_2 знайдемо з умови рівності кінетичної енергії відносного руху та кулонівського потенціалу:

$$\frac{q_1 q_2}{x_2} = \tilde{T} \Rightarrow x_2 = \frac{q_1 q_2}{\tilde{T}}. \quad (9.4.4)$$

Запишемо вираз для коефіцієнту прозорості тунельного бар'єра:

$$D \approx \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\mu \left(\frac{q_1 q_2}{x} - \tilde{T} \right)} dx \right). \quad (9.4.5)$$

Перетворимо інтеграл в (9.4.5):

$$I = \sqrt{2\mu} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{q_1 q_2}{x} - \tilde{T}} dx = \sqrt{2\mu q_1 q_2} \int_R^{x_2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 - \frac{x}{x_2}} dx. \quad (9.4.6)$$

В (9.4.6) зробимо заміну змінних: $\frac{x}{x_2} = \cos^2 \varphi$, $dx = -2x_2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$ і отримаємо

$$I = \sqrt{2\mu q_1 q_2} 2\sqrt{x_2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{1}{\cos \varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 2\sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

тут $\varphi_1 = \arccos \left(\sqrt{\frac{R\tilde{T}}{q_1 q_2}} \right)$, $\varphi_2 = 0$. Останній інтеграл дорівнює

$$I = 2\sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \int_0^{\varphi_1} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \left(\varphi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 \right). \quad (9.4.7)$$

Щоб спростити вираз (9.4.7), скористаємось співвідношенням між кінетичною енергією \tilde{T} та висотою кулонівського бар'єру: $\tilde{T} \ll \frac{q_1 q_2}{R}$. В цьому випадку можна вважати, що $\varphi_1 \approx \frac{\pi}{2}$. Тоді (9.4.7) набуде вигляду:

$$I = \sqrt{2\mu} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \frac{\pi}{2}. \quad (9.4.8)$$

Остаточно, коефіцієнт прозорості тунельного бар'єру:

$$D \approx \exp \left(-\frac{\pi \sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{\tilde{T}}} \right) = \exp \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{T}}} \right), \alpha = \frac{\pi q_1 q_2 \sqrt{2\mu}}{\hbar}. \quad (9.4.9)$$

Це є гранична форма гамівської експоненти [6] $D \approx \exp \left(-\frac{2\pi \sqrt{2\mu}}{\hbar v} \right) \ll 1$, $v = \sqrt{\frac{2\tilde{T}}{\mu}}$ —

відносна швидкість руху частинок.

Загальний переріз реакції термоядерного синтезу визначається двома множниками, перший з яких ми отримали. Цей коефіцієнт характеризує імовірність тунелювання частинок через кулонівський бар'єр і є однаковим для всіх реакцій синтезу. Другий множник, який визначає імовірність самої ядерної реакції, є специфічним для кожної конкретної реакції.

б) Кінетична енергія дейтронів з найбільш імовірною швидкістю відносного руху в плазмі дорівнює $\tilde{T} = \theta$, де θ — енергетична температура плазми (див. Розділ 9,

Приклад 3). Таким чином, коефіцієнт прозорості бар'єру дорівнюватиме:

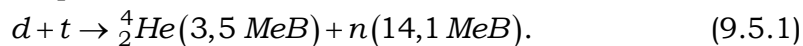
$D \approx \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\right)$, $\alpha = \frac{\pi q_1 q_2 \sqrt{2\mu}}{\hbar}$. Обрахуємо величину константи α для дейтронів:

$$\alpha = \frac{\pi e^2 \sqrt{m_D}}{\hbar} = \frac{3,14 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20} \sqrt{2,0141 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}}}{1,05 \cdot 10^{-27}} =$$

$$= 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ ерг}^{\frac{1}{2}} = 31,5 \text{ кеВ}^{\frac{1}{2}}.$$

Підставляючи параметри прикладу, отримаємо при температурі плазми $\theta = 1 \text{ кеВ}$ $D = \exp(-31,5) = 2,1 \cdot 10^{-14}$, а при $\theta = 10 \text{ кеВ}$ — $D = \exp\left(-\frac{31,5}{\sqrt{10}}\right) = 4,7 \cdot 10^{-5}$.

Приклад 5. У першому поколінні термоядерних реакторів планують використати реакцію дейтерію з тритієм:



Величина $\langle \sigma v \rangle$, де σ — переріз реакції, а v — відносна швидкість руху частинок, що реагують, усереднена за максвелівським розподілом швидкостей, дорівнює:

$$\langle \sigma v \rangle = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 1 \text{ кеВ},$$

$$\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \text{ при } \theta = 10 \text{ кеВ}.$$

Припускаючи, що плазма містить рівну кількість атомів дейтерію та тритію, розрахувати густину теплової потужності та повну потужність W термоядерної установки, якщо об'єм плазми 500 м^3 , а густина електронів $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Розв'язання: Кількість реакцій, що відбуваються в одиниці об'єму за одиницю часу визначається концентрацією ядер, що взаємодіють, перерізом реакції та середньою швидкістю відносного руху частинок:

$$\frac{N}{V \Delta t} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle, \quad (9.5.2)$$

де n_1, n_2 — концентрації ядер першого та другого сорту. Нехай n — кількість позитивних іонів (та рівну кількість електронів) в кубічному сантиметрі плазми. В нашому випадку кількість дейтерію та тритію однакові, тобто $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$.

Енергія, що виділяється під час одного акту синтезу, дорівнює $17,6 \text{ МеВ}$. Проте більша частина цієї енергії виноситься нейтронами. Раніше вже було відмічено, що теплову енергію заряджених частинок (в даному випадку — альфа-частинок) можна повністю перетворити на електричну. Це можна зробити, наприклад, за допомогою мігнітогідродинамічного генератора. Перетворити ж кінетичну енергію нейтронів можна лише використовуючи тепловий цикл, ККД якого обмежений теоремою Карно. Зазвичай припускають, що значення ККД рівне $1/3$. Слід також врахувати, що під час поглинання нейтронів речовиною, з якої зроблено захист реактора, виділяється енергія нейтронного споріднення у вигляді тепла. Для одного акту поглинання ця енергія становить приблизно 8 МеВ . Це тепло також може бути перетворене за допомогою теплового циклу.

Таким чином, тепловий ефект реакції (9.5.1) становить

$$Q = 3,5 + \frac{1}{3}(14,1 + 8) \approx 10,4 \text{ МеВ}. \quad (9.5.3)$$

Остаточно, густина теплової потужності термоядерної установки

$$P = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle Q, \quad (9.5.4)$$

а повна потужність

$$W = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle Q V. \quad (9.5.54)$$

Підставляючи параметри прикладу в (9.5.4) та (9.5.54), знайдемо для температури $\theta = 1 \text{ кеВ}$ густину потужності:

$$P = \frac{10^{28} \text{ см}^{-6}}{4} 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} \cdot 10,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/\text{см}^3,$$

та повну потужність:

$$W = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^8 = 11,5 \text{ кВт}.$$

При температурі $\theta = 10 \text{ кеВ}$ відповідні значення будуть такими:

$$P = \frac{10^{28} \text{ см}^{-6}}{4} 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \cdot 10,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0,46 \text{ Вт}/\text{см}^3,$$

$$W = 0,46 \cdot 5 \cdot 10^8 = 2,3 \cdot 10^5 \text{ кВт}.$$

Приклад 6. Яким був би радіус сферичного термоядерного реактора, заповненого дейтерієвою плазмою з концентрацією дейтронів n при температурі θ , якби тепло з активної зони відводилось лише у вигляді теплового випромінювання у відповідності до закону Стефана-Больцмана? Знайти температуру θ_m , при якій радіус реактора буде мінімальним та обрахувати його значення, якщо $n = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

Розв'язання: Відповідно до закону Стефана-Больцмана, повна енергія, яку випромінює нагріте до температури T тіло, що має форму сфери, за одиницю часу дорівнює

$$W_{\text{випр}} = 4\pi r^2 \sigma T^4, \quad (9.6.1)$$

де $4\pi r^2$ — площа поверхні тіла.

З іншого боку, потужність реактора дорівнює (див. Розділ 9, Приклад 5):

$$W = \frac{4}{3} \pi r^3 n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{dd} Q_{dd}, \quad (9.6.2)$$

тут $\frac{4}{3} \pi r^3$ — об'єм реактора, Q_{dd} — енергія реакції (dd), середнє значення якої $Q_{dd} = 3,67 \text{ МеВ}$ (див. Розділ 9, Приклад 2), $\langle \sigma v \rangle_{dd}$ — середнє значення добутку перерізу реакції (dd) на відносну швидкість руху частинок, що реагують, усереднену за максвелівським розподілом [8],

$$\langle \sigma v \rangle_{dd} = 3 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\theta^{2/3}} \exp\left(-\frac{19}{\theta^{1/3}}\right) \left[\text{см}^3/\text{с} \right], \quad (9.6.3)$$

тут θ — енергетична температура плазми, виражена в кеВ.

Оскільки в реакторі є лише йони дейтерію та електрони, замість добутку $n_1 n_2$ в (9.6.2) слід взяти величину $\frac{1}{2} n^2$, тому що в кожному акті синтезу приймають участь два дейтрони.

Прирівнюючи (9.6.1) та (9.6.2), знаходимо радіус реактора у випадку, коли тепло відводиться тільки за рахунок випромінювання:

$$r = \frac{6\sigma T^4}{n^2 \langle \sigma v \rangle_{dd} Q_{dd}}. \quad (9.6.4)$$

З урахуванням (9.6.3), формулу (9.6.4) запишемо через енергетичну температуру плазми:

$$r = \frac{2 \cdot 10^{14} \sigma \theta^{14/3}}{k^4 n^2 Q_{dd}} \exp\left(\frac{19}{\theta^{1/3}}\right). \quad (9.6.5)$$

Для знаходження мінімального розміру реактора дослідимо функцію $r(\theta)$ на екстремум:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2 \cdot 10^{14} \sigma}{k^4 n^2 Q_{dd}} \left\{ \frac{14}{3} \theta^{11/3} - \frac{19}{3} \theta^{10/3} \right\} \exp\left(\frac{19}{\theta^{1/3}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_m^{1/3} = \frac{19}{14} \Rightarrow \theta_m = 2,5 \text{ кеВ.}$$
(9.6.6)

Підставляючи значення θ_m в (9.6.5), отримаємо оптимальний радіус термоядерного реактора $r_{\min} = 3 \cdot 10^6$ км. Такий результат показує, що основним механізмом втрат є не поверхневе, а об'ємне випромінювання.

Приклад 7. Згідно критерію Лоусена, термоядерна реакція в суміші дейтерію та тритію буде самопідтримуваною при $\theta = 10$ кеВ, якщо $n\tau > 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, де n — концентрація електронів у плазмі, τ — енергетичний час життя плазми, який визначається її випромінюванням, теплопровідністю та дифузією. (Енергетичним часом життя плазми називають відношення енергії плазми до потужності втрат енергії з плазми P). Втрати енергії компенсуються зарядженими продуктами реакції, у даному випадку — ядрами гелію. Розрахувати при $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ та $n\tau = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ густину потужності P теплових втрат плазми (без урахування електромагнітного випромінювання).

Розв'язання: Реакція термоядерного синтезу буде самопідтримуваною, коли термоядерна енергія, що виділяється в реакторі, компенсує втрати енергії за рахунок електромагнітного випромінювання та виходу з зони реактора потоку заряджених частинок. Якщо ж термоядерна енергія перевищує втрати, реактор починає працювати як генератор.

Можна дати інше визначення енергетичного часу життя плазми: це проміжок часу, протягом якого за одиницю часу з одиниці об'єму плазми втрачається $\frac{n}{\tau}$ частинок кожного знаку. Кінетична енергія частинок, що містяться в одиниці об'єму плазми, дорівнює $2 \cdot \frac{3}{2} nkT = 3n\theta$, де двійка враховує наявність однакової кількості електронів та ядер-продуктів термоядерної реакції.

Таким чином, енергетична потужність частинок, що втрачаються одиницею об'єму плазми, становитиме:

$$P = \frac{3n\theta}{\tau} = \frac{3n^2\theta}{n\tau}. \quad (9.7.1)$$

Підставимо в (9.7.1) параметри прикладу й отримаємо числове значення:

$$P = \frac{3 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-6} \cdot 10^4 \text{ еВ}}{3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}} = 10^{18} \frac{\text{еВ}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} = 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

Приклад 8. В умовах попереднього прикладу перевірити, що критерій Лоусена для енергетично вигідної, але не самопідтримуваної термоядерної реакції при $\theta = 10$ кеВ та $n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ має вигляд:

$$n\tau > 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}.$$

Енергетично вигідною вважається реакція, при якій втрати енергії з плазми втричі менші, ніж повна термоядерна енергія, яка виділяється в реакторі.

Розв'язання: Згідно розв'язку Прикладу 5 (Розділ 9), густина потужності термоядерної установки, що працює на реакції (dt) , становить

$$P = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle Q. \quad (9.8.1)$$

У (9.8.1) в якості енергії Q слід взяти повну енергію реакції (dt) , яка становить 17,6 МеВ. Значення $\langle \sigma v \rangle$ при температурі $\theta = 10$ кеВ становить $\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3 / \text{с}$ (див. Розділ 9, Приклад 5). Таким чином, числове значення потужності при температурі $\theta = 10$ кеВ

$$P = \frac{10^{28}}{4} \cdot 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с} \cdot 17,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 0,77 \text{ Вт}/\text{см}^3.$$

З формули (9.7.1) оцінимо потужність теплових втрат плазми при $n\tau = 2,0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$:

$$P_{\text{втр}} = \frac{3n^2\theta}{n\tau} = \frac{3 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-6} \cdot 10^4 \text{ eB}}{2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}} = 1,5 \cdot 10^{18} \frac{\text{eB}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} = 0,24 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

Отже дійсно, $P/P_{\text{втр}} \approx 3$.

10. ПРИСКОРЮВАЧІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

10.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначити для електрона та протона, які рухаються по коловим орбітам в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 10 \text{ кГс}$, періоди обертання та радіуси орбіт, якщо кінетична енергія частинок становить $E_k = 10 \text{ МеВ}$.

Розв'язання: На частинку з зарядом q , що рухається в однорідному магнітному полі з індукцією B , діє сила Лоренца:

$$\vec{F}_\Lambda = \frac{q}{c} [\vec{v}\vec{B}], \quad (10.1.1)$$

де \vec{v} — вектор швидкості частинки. Якщо напрямок швидкості перпендикулярний до напрямку силових ліній магнітного поля, формула (10.1.1) запишеться таким чином:

$$F_\Lambda = \frac{qvB}{c}. \quad (10.1.2)$$

В той же час, сила Лоренца є доцентровою під час руху по колу з радіусом r , тому можна записати наступну рівність:

$$\frac{qvB}{c} = \frac{mv^2}{r}, \quad (10.1.3)$$

де m — маса частинки. Якщо відома швидкість руху частинки, а отже, її кінетична енергія, з (10.1.3) можна виразити радіус колової орбіти:

$$r = \frac{mvc}{qB} = \frac{pc}{qB}, \quad (10.1.4)$$

де p — імпульс частинки. Використаємо зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією в загальному випадку. Повна енергія частинки:

$$E = E_k + m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, \quad (10.1.5)$$

тут під m_0 розуміють масу спокою частинки. Піднесемо (10.1.5) до квадрата та виразимо імпульс p :

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0c^2} = \sqrt{2m_0E_k} \sqrt{1 + \frac{E_k}{2m_0c^2}}. \quad (10.1.6)$$

Формула (10.1.6) пов'язує між собою імпульс та кінетичну енергію релятивістської частинки. Для частинок нерелятивістських, тобто таких, для яких виконується співвідношення $E_k \ll m_0c^2$, в (10.1.6) квадратний корінь можна розкласти в біноміальний ряд за малим параметром $\varepsilon = \frac{E_k}{2m_0c^2} \ll 1$ й отримати наближену формулу:

$$p \approx \sqrt{2m_0 E_k} \left(1 + \frac{E_k}{4m_0 c^2} \right). \quad (10.1.7)$$

У випадку нерелятивістських частинок другим доданком в (10.1.7) нехтують, користуючись відомим виразом для імпульсу: $p = \sqrt{2m_0 E_k}$.

Період обертання T можна виразити через кутову частоту Ω : $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Оскільки $\Omega = \frac{v}{r}$, з (10.1.3) виразимо швидкість руху частинки на орбіті й підставимо у вираз для періоду обертання:

$$\Omega = \frac{v}{r} = \frac{qBc}{mc^2} \Rightarrow \quad (10.1.8 \text{ а})$$

$$T = 2\pi \frac{mc^2}{qBc}, \quad (10.1.8 \text{ б})$$

де mc^2 — повна енергія частинки. Очевидно, що при малих швидкостях період орбіти можна вважати величиною сталою, тоді як при великих швидкостях слід враховувати релятивістський ефект зростання маси частинки, а отже, й періоду обертання. Ця обставина є суттєвою і пояснює той факт, що в циклічних прискорювачах важкі частинки (протони, альфа-частинки, дейтрони тощо) неможливо розганяти до великих енергій. Про це йтиме мова далі під час розгляду принципу роботи циклотрону.

Одразу зауважимо, що циклотрони не застосовують для прискорення легких частинок, таких як електрон та позитрон, тому що для них вже при невеликих енергіях необхідно враховувати релятивістські поправки. Для прискорення електронів та позитронів використовують циклічні прискорювачі типу бетатрону або синхрофазотрону.

У нашому випадку для знаходження радіуса орбіти електрона з енергією $E_k = 10,0 \text{ MeV}$ слід скористатись формулами (10.1.4) та (10.1.6):

$$r_e = \frac{pc}{eB} = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{eB}. \quad (10.1.9)$$

Підставляючи в (10.1.9) параметри електрона, знайдемо радіус орбіти:

$$r_e = \frac{\sqrt{(10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12})^2 \text{ ерг}^2 + 2 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}^2}}{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ од. CGSE} \cdot 10^4 \text{ Гс}} = 3,5 \text{ см.}$$

Період обертання електрона знайдемо з (10.1.8 б):

$$T_e = 2\pi \frac{E_k + m_0 c^2}{eBc} = 7,34 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

Для знаходження радіуса орбіти протона з енергією $E_k = 10,0 \text{ MeV}$ можемо скористатись нерелятивістським виразом, оскільки $E_k \ll m_p c^2 = 938,28 \text{ MeV}$:

$$r_p = \frac{\sqrt{2E_k m_p c^2}}{eB}. \quad (10.1.10)$$

З (10.1.10) знайдемо для протона радіус траєкторії в однорідному магнітному полі:

$$r_p = \frac{\sqrt{2 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 938 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} \approx 45,7 \text{ см.}$$

та період обертання:

$$T_p = 2\pi \frac{(1,6 \cdot 10^{-5} + 938 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}) \text{ ерг}}{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ од. CGSE} \cdot 10^4 \text{ Гс} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Приклад 2. В циклотроні іони рухаються в однорідному магнітному полі й отримують прискорення в проміжку між двома прискорюючими електродами (дуантами). Для резонансного прискорення повинна виконуватись умова синфазності — частота обертання іона та частота електричного поля повинні співпадати. Проте частота обертання іона не лишається постійною, оскільки маса його зростає згідно співвідношенню $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. В циклотроні відбувається

порушення синфазності, тому іони не можуть досягти дуже великих енергій. Очевидно, що найбільшу енергію іонам можна надати, якщо розбалансування, тобто різниця між частотою прискорюючого поля та частотою обертання, буде найменшою. Яку треба вибрати частоту прискорюючого поля, необхідну для прискорення протнів в циклотроні з магнітом, який створює постійне поле з напруженістю 15 кГс та має радіус 65 см, щоб порушення синфазності циклотрону було найменшим?

Розв'язання: Для того, щоб порушення синфазності було мінімальним, частота обертання іона повинна співпадати з частотою прискорюючого поля, коли іон отримує половину кінцевої енергії. В такому випадку в центрі магніту частота обертання буде більшою за частоту електричного поля, а наприкінці прискорення — меншою за частоту електричного поля на таку саму величину.

Знайдемо енергію, що її отримує іон в циклотроні з параметрами, заданими в умові задачі. Для цього скористаємось формулою (10.1.4):

$$R = \frac{p_{\max} c}{qB}, \quad (10.2.1)$$

де R — радіус траєкторії іона наприкінці прискорення, що дорівнює радіусу магніту, p_{\max} — його кінцевий імпульс, B — напруженість постійного магнітного поля в циклотроні.

Імпульс в (10.2.1) виразимо через повну енергію частинки:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (10.2.2)$$

де E — повна енергія, $E = E_k + m_0 c^2$, p, m_0 — імпульс та маса спокою іона. Піднесемо (10.2.1) до квадрата та приймаючи до уваги (10.2.2), виразимо кінетичну енергію:

$$\begin{aligned} R^2 q^2 B^2 &= p_{\max}^2 c^2 = (E_k^{\max} + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 \Rightarrow \\ E_k^{\max} &= m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qBR}{m_0 c^2} \right)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

Формула (10.2.3) пов'язує кінетичну енергію іона, який рухається в однорідному магнітному полі з напруженістю B по орбіті з радіусом R . Так, з (10.2.3), кінетична енергія протона дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} E_k^{\max} &= 938,28 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot 65}{938,28 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \right)^2} - 1 \right) = \\ &= 7,13 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 44,5 \text{ МеВ}. \end{aligned}$$

Таким чином, на половині циклу прискорення кінетична енергія протона дорівнюватиме $W = E_k^{\max} / 2 = 22,27 \text{ МеВ}$. Циклотронну частоту для цієї енергії знайдемо з формули (10.1.8 а):

$$\Omega = \frac{eBc}{mc^2} = \frac{eBc}{W + m_0 c^2}. \quad (10.2.4)$$

Підставивши в (10.2.4) числові дані, отримаємо частоту, при якій порушення умови синфазності циклотрону буде найменшим:

$$\Omega = \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{(22,27+938,28) \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ рад/с}.$$

Приклад 3. Для того, щоб у циклотроні не виникало порушення синфазності (див. Розділ 10, Приклад 2), можна повільно змінювати з часом магнітне поле. В такому випадку частота обертання частинки залишатиметься постійною. Такий прискорювач називається синхротроном. Винахідником синхротрону, як і фазотрону (прискорювача, в якому повільно змінюється частота електричного поля), є В.І.Векслер. Знайти зміну радіуса орбіти в синхротроні в однорідному магнітному полі, що змінюється за законом $B(t) = B_0 \sin \omega_0 t$. Частота прискорюючого електричного поля дорівнює Ω , а енергія спокою частинки, що прискорюється, E_0 . В яких межах змінюється радіус орбіти електрона, який прискорюється від 2 до 100 МеВ, якщо частота електричного поля $\Omega = 7 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$, частота зміни магнітного поля $\omega_0 = 314 \text{ рад/с}$?

Розв'язання: З урахуванням закону зміни напруженості магнітного поля частота обертання частинки на коловій орбіті запишеться так:

$$\Omega = \frac{qBc}{mc^2} = \frac{qB_0}{mc^2} \sin \omega_0 t. \quad (10.3.1)$$

За умови, що частота (10.3.1) є незмінною, закон зміни повної енергії частинки запишеться наступним чином:

$$mc^2 = E_k + E_0 = \frac{qB_0}{\Omega} \sin \omega_0 t. \quad (10.3.2)$$

Радіус орбіти частинки в однорідному магнітному полі змінюватиметься за законом:

$$r(t) = \frac{pc}{qB_0 \sin \omega_0 t}. \quad (10.3.3)$$

Зв'язок між повною енергією та імпульсом релятивістської частинки має вигляд (10.2.2):

$$m^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \Rightarrow pc = \sqrt{m^2 c^4 - E_0^2}. \quad (10.3.4)$$

Підставивши (10.3.4) в (10.3.3) та врахувавши (10.3.2), знайдемо закон зміни радіуса орбіти:

$$r = \frac{\sqrt{m^2 c^4 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{1}{qB_0 \sin \omega_0 t} \sqrt{\left(\frac{qB_0}{\Omega} \sin \omega_0 t \right)^2 - E_0^2} \Rightarrow$$

$$r = \frac{c}{\Omega} \sqrt{1 - \left(\frac{E_0 \Omega}{qB_0} \right)^2} \frac{1}{\sin^2 \omega_0 t}. \quad (10.3.5)$$

Розрахуємо тепер межі зміни радіуса орбіти електрона при заданих числових значеннях кінетичної енергії. Для цього слід скористатись формулою, яка пов'язує радіус орбіти з енергією в даний момент часу:

$$r = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{\sqrt{(E_0 + E_k)^2 - E_0^2}}{qB_0 \sin \omega_0 t} = \frac{E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{qB_0 \sin \omega_0 t}. \quad (10.3.6)$$

Оскільки в умові задачі не задано індукцію магнітного поля, виразимо її з (10.3.2) через повну енергію електрона та підставимо у (10.3.6). Отримаємо остаточну формулу, за допомогою якої розрахуємо потрібні радіуси орбіти:

$$B_0 = \frac{mc^2 \Omega}{q \sin \omega_0 t} \Rightarrow r = \frac{c E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{mc^2 \Omega} = \frac{c}{\Omega} \cdot \frac{E_k \sqrt{1 + \frac{2E_0}{E_k}}}{(E_k + E_0)}. \quad (10.3.7)$$

Як бачимо, радіус орбіти в такому вигляді не залежить від частоти зміни магнітного поля, проте цей параметр враховується в законі зміни кінетичної енергії

частинки (10.3.2), що прискорюється в синхротроні. З формули (10.3.7), підставивши числові дані та врахувавши, що енергія спокою електрона $E_0 = 0,511 \text{ MeV}$, знаходимо початковий та кінцевий радіуси орбіти електрона:

$$r_1 = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^8} \cdot \frac{2 \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,511}{2}}}{2,511} = 41,96 \text{ см};$$

$$r_2 = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^8} \cdot \frac{100 \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,511}{100}}}{100,511} = 42,86 \text{ см}.$$

Приклад 4. Бетатроном називається установка для прискорення заряджених частинок до великих енергій. Між полюсами електромагніту, струм збудження якого можна змінювати з часом згідно заданого закону, розташовують вакуумну камеру, в якій частинка може вільно рухатись по колу. Прискорення здійснюється за рахунок вихрового електричного поля, яке виникає під час зміни магнітного поля. Довести, що у випадку, коли потік магнітної індукції $\Phi(r)$ через площу, обмежену контуром з радіусом r , в кожен момент часу вдвічі більший за $\pi r^2 B_{\text{орб}}$, де $B_{\text{орб}}$ — індукція магнітного поля на орбіті, то радіус орбіти електрона залишатиметься постійним (стаціонарна орбіта).

Розв'язання: Прискорення електронів в бетатроні досягається за рахунок вихрового електричного поля, що виникає під час зміни магнітного потоку через контур, обмежений траєкторією частинки. В такому прискорювачі електрон рухається по стаціонарній орбіті, що дозволяє уникнути проблем, пов'язаних з наявністю височастотного поля та виконанням умов синхронізму.

Знайдемо умови, необхідні для існування такої орбіти. При наявності вихрового електричного поля імпульс електрона буде зростати згідно другого закону Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = e E_{\text{вихр}}, \quad (10.4.1)$$

де e — заряд електрона, $E_{\text{вихр}}$ — напруженість вихрового електричного поля на стаціонарній орбіті. Вона визначається згідно закону електромагнітної індукції Фарадея:

$$2\pi r E_{\text{вихр}} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.4.2)$$

магнітний потік через площу, обмежену контуром з радіусом r стаціонарної орбіти $\Phi = \pi r^2 \bar{B}$, де \bar{B} — середня напруженість магнітного поля на цій площі. Об'єднавши (10.4.1) та (10.4.2), отримаємо наступний вираз:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt} = r \frac{e}{2c} \frac{d\bar{B}}{dt}. \quad (10.4.3)$$

З іншого боку, при будь-якій швидкості імпульс частинки визначається наступним співвідношенням:

$$p = \frac{e r B_{\text{орб}}}{c}. \quad (10.4.4)$$

Візьмемо похідну по часу від (10.4.4) та прирівняємо її до (10.4.3):

$$\frac{e r}{2c} \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{e r}{c} \frac{dB_{\text{орб}}}{dt} \Rightarrow B_{\text{орб}} = \bar{B} / 2. \quad (10.4.5)$$

Таким чином, для забезпечення руху електрона по стаціонарній орбіті необхідно, щоб середня напруженість магнітного поля на площі, обмеженій орбітою, була вдвічі більшою за напруженість поля на орбіті, причому магнітне поле повинне зростати з часом. Зауважимо, що в бетатроні електрони можуть прискорюватись до ультра релятивістських швидкостей.

Приклад 5. Нехай в бетатроні магнітний потік всередині рівноважної орбіти з радіусом $r = 25 \text{ см}$ зростає від нуля з постійною швидкістю $\frac{d\Phi}{dt} = 5 \cdot 10^9 \text{ Мкс}/\text{с}$.

Визначити: а) напруженість вихрового електричного поля на орбіті та енергію, що її отримує електрон за $5 \cdot 10^5$ обертів; б) пройдений електроном шлях протягом часу $\tau = 3$ нс та отриману ним за цей час енергію.

Розв'язання: а) напруженість вихрового електричного поля на орбіті знайдемо з формули (10.4.2):

$$E_{\text{вихр}} = \frac{1}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{5 \cdot 10^9 \text{ Мкс} / \text{с}}{2\pi \cdot 25 \text{ см} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см} / \text{с}} =$$

$$= 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ од. CGSE} / \text{см} = 0,33 \text{ В} / \text{см}.$$

Енергія, яку отримує електрон за один оберт:

$$\Delta E_k = \frac{dp}{dt} 2\pi r = 2\pi r e E_{\text{вихр}}. \quad (10.5.1)$$

Загальна кінетична енергія після повного циклу прискорення, що складається з N обертів, дорівнюватиме:

$$E_k = 2\pi N e E_{\text{вихр}} = 4,15 \cdot 10^{-5} \text{ ерг} = 25,9 \text{ МеВ}. \quad (10.5.2)$$

б) Запишемо рівняння руху електрона, який отримує прискорення за рахунок вихрового електричного поля:

$$\frac{dp}{dt} = e E_{\text{вихр}}. \quad (10.5.3)$$

Оскільки вихрове електричне поле в бетатроні є постійним, можемо проінтегрувати рівняння (10.5.3) й отримати вираз для імпульсу електрона в будь-який момент часу при умові, що в початковий момент його величина дорівнювала нулеві:

$$\int_0^p dp = e E_{\text{вихр}} \int_0^t dt \Rightarrow p = e E_{\text{вихр}} t. \quad (10.5.4)$$

Зв'язок між імпульсом та швидкістю задається релятивістською формулою:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (10.5.5)$$

де m_0 — маса спокою електрона, v — його лінійна швидкість. Підставимо (10.5.5) у (10.5.4) та виразимо швидкість електрона:

$$\left(\frac{m_0}{e E_{\text{вихр}}} \right)^2 v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t^2 \Rightarrow v = c t \left\{ \left(\frac{m_0 c}{e E_{\text{вихр}}} \right)^2 + t^2 \right\}^{-1/2}. \quad (10.5.6)$$

Для спрощення виразу (10.5.6) введемо позначення: $\frac{m_0 c}{e E_{\text{вихр}}} = \alpha$. Тоді (10.5.6) переписеться так:

$$v = \frac{c t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}. \quad (10.5.7)$$

Щоб знайти шлях, пройдений електроном протягом визначеного часу, врахуємо, що $v = dl/dt$. Тоді з (10.5.7) отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$dl = \frac{c t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} dt. \quad (10.5.8)$$

В початковий момент часу $l=0$, тому (10.5.8) можемо проінтегрувати у визначених межах:

$$l = \int_0^\tau \frac{c t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} dt = c \left(\sqrt{\alpha^2 + \tau^2} - \alpha \right) = c \alpha \left(\sqrt{1 + \tau^2/\alpha^2} - 1 \right). \quad (10.5.9)$$

Підставимо в (10.5.9) вираз для константи α та отримаємо остаточну формулу для шляху, пройденого електроном протягом загального часу прискорення τ :

$$l = \frac{m_0 c^2}{e E_{\text{вихр}}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{e E_{\text{вихр}}}{m_0 c} \right)^2 \tau^2} - 1 \right). \quad (10.5.10)$$

Числове значення для відстані знайдемо з (10.5.10):

$$l = \frac{0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 1,1 \cdot 10^{-3}}{0,511 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \cdot 3 \cdot 10^{10} \right)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) =$$

$$= 8,85 \cdot 10^7 \text{ см.}$$

Кінетична енергія, яку отримає електрон, пройшовши шлях l , дорівнюватиме:

$$E_k = e E_{\text{вихр}} l = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{e E_{\text{вихр}}}{m_e c} \right)^2 \tau^2} - 1 \right). \quad (10.5.11)$$

Числове значення кінетичної енергії електрона становить $E_k \approx 29 \text{ MeV}$.

Приклад 6. Під час руху по колу електрон випромінює електромагнітні хвилі і втрачає за один повний оберт енергію $\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4$, де r — радіус орбіти, m_0 — маса спокою електрона, E — його повна енергія. Ця формула є справедливою, якщо втрати енергії протягом одного оберту значно менші за повну енергію електрона. Розрахувати, яку енергію втрачатиме електрон за один оберт в бетатроні на 100 MeV наприкінці процесу прискорення, якщо радіус орбіти становить 80 см . Визначити, при якій енергії втрати на випромінювання за один оберт дорівнюватимуть енергії, що електрон отримує від вихрового електричного поля, якщо $\frac{dB_{\text{орб}}}{dt} = 2 \cdot 10^6 \text{ Гс/с}$ ($B_{\text{орб}}(t)$ — індукція магнітного поля на орбіті електрона).

Розв'язання: Для розрахунку втрат енергії електрона внаслідок випромінювання слід скористатись формулою з умови задачі:

$$\Delta E_{\text{випр}} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left(\frac{m_0 c^2 + E_k}{m_0 c^2} \right)^4 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left(1 + \frac{E_k}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (10.6.1)$$

Згідно умови, наприкінці процесу прискорення кінетична енергія електрона дорівнюватиме 100 MeV , тому з (10.6.1) знайдемо:

$$\Delta E_{\text{випр}} = \frac{4\pi}{3} \frac{4,8^2 \cdot 10^{-20} (\text{од. CGSE})^2}{80 \text{ см}} \left(1 + \frac{100}{0,511} \right)^4 = 1,81 \cdot 10^{-11} \text{ ерг} = 11,3 \text{ eV}.$$

Енергія, яку отримує електрон протягом одного оберту за рахунок прискорення:

$$\Delta E_k = 2\pi r \frac{dp}{dt}. \quad (10.6.2)$$

Імпульс електрона на орбіті виразимо через поле на орбіті з формули (10.1.4), продиференціюємо та підставимо у (10.6.2):

$$\Delta E_k = \frac{2\pi e r^2}{c} \frac{dB_{\text{орб}}}{dt}. \quad (10.6.3)$$

Орбіта електрона буде стаціонарною, коли втрати на випромінювання дорівнюватимуть енергії, що її отримує електрон за рахунок прискорення. З цієї умови знайдемо кінетичну енергію електрона:

$$\Delta E_k = \Delta E_{\text{випр}} \Rightarrow \frac{2\pi e r^2}{c} \frac{dB_{\text{орб}}}{dt} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r} \left(1 + \frac{E_k}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (10.6.4)$$

З рівняння (10.6.4) легко виразити кінетичну енергію:

$$E_k = m_0 c^2 \left\{ \left(\frac{3r^3}{2ec} \frac{dB_{\text{орб}}}{dt} \right)^{1/4} - 1 \right\}. \quad (10.6.5)$$

Підставивши в (10.6.5) числові значення, отримаємо:

$$E_k = 0,511 \cdot \left\{ \left(\frac{3 \cdot 80^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}} \cdot 2 \cdot 10^6 \right)^{1/4} - 1 \right\} = 291,5 \text{ MeV}.$$

Приклад 7. Лінійний прискорювач частинок побудовано наступним чином: пучок іонів проходить всередині трубок різної довжини, розташованих на одній лінії. Прискорення відбувається в проміжку між трубками (Рис.10.1). Трубки приєднано до протилежних клем генератора почергово, так що в кожен заданий момент часу різниця потенціалів в парних проміжках дорівнює $V_0 \cos \omega t$, а в непарних — $-V_0 \cos \omega t$. Припускаючи, що іони впускаються до прискорювача з початковою енергією $W_{\text{поч}}$ та що проміжки між трубками складають 25% від довжини трубок, знайти необхідну довжину трубок в лінійному прискорювачі. Розглянути прискорювач для протонів на 40 MeV: $W_{\text{поч}} = 4 \text{ MeV}$, $\Omega = 12,56 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$. Протон за один прохід через прискорюючий проміжок отримує енергію 1 MeV.

Розв'язання: На Рис. 10.1 відображено принцип дії найпростішого лінійного резонансного прискорювача — прискорювача Відерое. Для прискорення заряджених частинок застосовується високочастотне поле, частота якого має бути узгоджена зі швидкістю руху частинок.

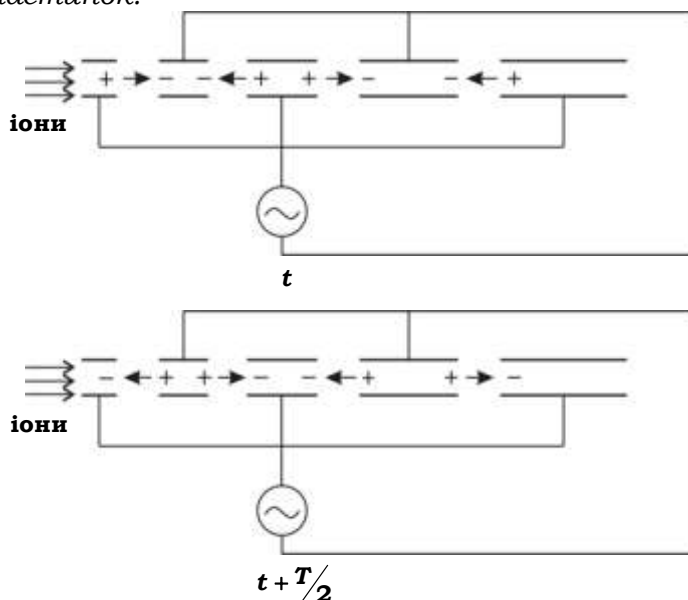


Рис.10.1. Принцип дії лінійного прискорювача Відерое.

На верхній частині рисунка показано знаки зарядів на дрейфових трубках та напрямок електричного поля в зазорах між ними в деякий момент часу t . На нижній частині ті ж величини вказані через проміжок часу, що дорівнює половині періоду змінної напруги генератора $t + T/2$.

Для того, щоб частинка потрапляла в прискорююче поле при одному й тому ж значенні різниці потенціалів, необхідно, щоб відстань між центрами сусідніх зазорів вона проходила протягом часу $\tau = T/2$. Оскільки в кожному проміжку енергія частинки збільшується, довжина прольотних трубок має збільшуватись пропорційно до швидкості частинки.

Відстань між центрами зазорів дорівнює

$$l_n = v_n \frac{T}{2}. \quad (10.7.1)$$

Швидкість частинки виразимо з формули:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v^2 = c^2 \left\{ 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right\}, \quad (10.7.2)$$

в якій $m_0 c^2$ — енергія спокою частинки, E — її повна енергія.

Враховуючи, що початкова кінетична енергія частинки дорівнює $W_{\text{поч}}$, в n -му зазорі її величина становитиме $E_{\text{кн}} = W_{\text{поч}} + n\Delta E$, де ΔE — кінетична енергія, що її отримує частинка під час проходження через прискорюючий проміжок. Отже, швидкість частинки після n -го зазору дорівнюватиме:

$$v_n = c \left\{ 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + n\Delta E} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (10.7.3)$$

З урахуванням тієї умови, що проміжки між трубками складають 25% від довжини трубок, знаходимо довжину n -ї прольотної трубки:

$$L_n = \frac{3}{4} \frac{cT}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + n\Delta E} \right)^2} = \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{1 - \left(1 + \frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \right)^{-2}}. \quad (10.7.4)$$

Слід відмітити, що ми розраховували задачу в припущенні, що фази прискорюючих напруг між сусідніми трубками змінюються синхронно. Це припущення є несправедливим у випадку, коли швидкість частинки наближується до швидкості світла, коли умови синхронізму виконуватись вже не будуть. Тому прискорювачі Відерое застосовують тільки для важких заряджених частинок (наприклад, протонів, як у нашому випадку), причому енергії становлять кілька десятків МеВ. В такому випадку формулу (10.7.4) можна спростити до нерелятивістської форми.

Враховуючи, що $\frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \ll 1$, у формулі (10.7.4) виконаємо біноміальний розклад за малим параметром й отримаємо наближений результат:

$$L_n \approx \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \left\{ 2 \frac{W_{\text{поч}} + n\Delta E}{m_0 c^2} \right\}^{1/2} = \frac{6}{8} \frac{\pi c}{\Omega} \sqrt{\frac{2W_{\text{поч}}}{m_0 c^2}} \sqrt{1 + \frac{n\Delta E}{W_{\text{поч}}}}. \quad (10.7.5)$$

Підставляючи в (10.7.5) дані для протона, знайдемо довжину n -ї дрейфової трубки:

$$L_n = \frac{6\pi}{8} \frac{3 \cdot 10^{10}}{12,56 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{938,3}} \sqrt{1 + \frac{n}{4}} = 5,2 \sqrt{1 + 0,25n} \text{ (см)} \quad (10.7.6)$$

Загальна кількість зазорів, які має пройти протон, щоб мати кінетичну енергію після прискорювача 40 МеВ, $n=36$. Довжина першої трубки $L_1=5,8$ см, а останньої — $L_{36}=16,4$ см.

Приклад 8. Лінійний прискорювач з біжучою хвилею являє собою циліндричний діафрагмований хвилевід, вздовж осі якого поширюється електромагнітна хвиля з осьовою складовою E_z . За допомогою кільцевих діафрагм з отворами досягається збільшення фазової швидкості хвилі вздовж хвилеводу, причому частинка, яка прискорюється, знаходиться весь час приблизно в одній і тій самій фазі хвилі (Рис. 10.2). Для прискорення електронів іноді фазову швидкість поширення хвилі обирають постійною і рівною швидкості світла.

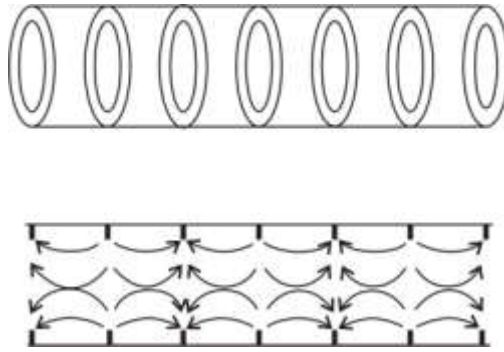


Рис.10.2. Схема будови лінійного прискорювача на біжучій хвилі.

Припустимо, що електрони потрапляють до прискорювача з енергією $W_{\text{поч}} = 4 \text{ MeV}$ і починають рухатись на горбі хвилі з амплітудою E_0 напруженості 20 кВ/см . Довжина хвилі дорівнює 1 м . Наскільки електрони запізняться по відношенню до хвилі за умови, що прискорення відбувається до енергії $W_{\text{к}} = 100 \text{ MeV}$? Для спрощення розрахунку припустити, що з часом напруженість поля у хвилі змінюється за «прямокутним» законом, тобто набуває лише двох значень: $E = \pm E_0$.

Розв'язання: Позначимо відстань від вхідного отвору хвилеводу z . Кінетична енергія, яку отримає електрон в електричному полі з напруженістю E_0 , дорівнює:

$$E_{\text{к}} = eE_0z, \quad (10.8.1)$$

де e — заряд електрона. Повна енергія електрона на відстані z :

$$E = m_e c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0z, \quad (10.8.2)$$

тут $W_{\text{поч}}$ — початкова кінетична енергія електрона, $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ — його енергія спокою. З іншого боку, зв'язок повної енергії зі швидкістю v електрона задається формулою (10.7.2). З формули (10.7.2) з урахуванням (10.8.2) можемо виразити швидкість:

$$v = c \frac{\sqrt{(m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0z)^2 - m_0^2 c^4}}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0z}. \quad (10.8.4)$$

Проаналізуємо формулу (10.8.4), децю змінивши форму її запису:

$$\frac{v}{c} = \left\{ 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0z} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (10.8.5)$$

Якщо кінетична енергія електрона дорівнює 4 MeV , відношення швидкості електрона до швидкості світла $v/c = 0,9936$, а вже при енергії 50 MeV $v/c = 0,9999$, тобто практично дорівнює швидкості c . Таким чином, електрони, які рухаються в такому прискорювачі, є ультрарелятивістськими. Проте незначна відміна їх швидкості на початковому етапі прискорення від швидкості світла призведе до відставання електрона від хвилі, що рухається в прискорювачі зі швидкістю c .

Шлях, пройдений електроном протягом всього процесу прискорення, знайдемо так:

$$W_{\text{к}} = W_{\text{поч}} + eE_0L \Rightarrow L = \frac{W_{\text{к}} - W_{\text{поч}}}{eE_0}, \quad (10.8.6)$$

де $W_{\text{к}}$ — енергія електрона наприкінці прискорення. В нашому випадку $L = \frac{96 \cdot 10^6 \text{ eV}}{2 \cdot 10^4 \text{ В/см} \cdot e} = 48 \text{ м}$. Для того, щоб знайти, наскільки електрон запізниться по відношенню до хвилі, спочатку необхідно визначити, який час витрачається ним на проходження шляху L . Якщо рух відбувається вздовж осі хвилеводу зі швидкістю v , можемо записати наступне:

$$v = \frac{dz}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dz}{v} . \quad (10.8.7)$$

Підставимо у (10.8.7) вираз для швидкості руху електрона (10.8.4) та проінтегруємо:

$$\int_0^{\tau} dt = \tau = \frac{1}{c} \int_0^L \frac{m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z}{\sqrt{(m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z)^2 - m_0^2 c^4}} dz. \quad (10.8.8)$$

Введемо заміну $x = m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 z$ й отримаємо:

$$c\tau = \frac{1}{eE_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - m_0^2 c^4}}, \quad (10.8.9)$$

де $x_1 = m_0 c^2 + W_{\text{поч}}$, $x_2 = m_0 c^2 + W_{\text{поч}} + eE_0 L$, $c\tau$ — шлях, що пройшла біжуча хвиля за той самий час, що прискорювався електрон. Інтеграл (10.8.9) дорівнює

$$c\tau = \frac{1}{eE_0} \left(\sqrt{x_2^2 - m_0^2 c^4} - \sqrt{x_1^2 - m_0^2 c^4} \right). \quad (10.8.10)$$

Підставимо у (10.8.10) межі інтегрування:

$$\begin{aligned} c\tau &= \frac{1}{eE_0} \left(\sqrt{(W_{\text{поч}} + eE_0 L)^2 + 2m_0 c^2 (W_{\text{поч}} + eE_0 L)} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} \right) = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left(\sqrt{W_{\text{к}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{к}}} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} \right). \end{aligned} \quad (10.8.11)$$

Таким чином, різниця пройдених шляхів хвилі та електрона дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta z &= c\tau - L = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left(\sqrt{W_{\text{к}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{к}}} - \sqrt{W_{\text{поч}}^2 + 2m_0 c^2 W_{\text{поч}}} - (W_{\text{к}} - W_{\text{поч}}) \right). \end{aligned} \quad (10.8.12)$$

Формулу (10.8.12) можна також записати через швидкості руху електрона на початку v_1 та наприкінці v_2 процесу прискорення:

$$\begin{aligned} \Delta z &= c\tau - L = \\ &= \frac{1}{eE_0} \left((W_{\text{к}} + m_0 c^2) \frac{v_2}{c} - (W_{\text{поч}} + m_0 c^2) \frac{v_1}{c} - (W_{\text{к}} - W_{\text{поч}}) \right). \end{aligned} \quad (10.8.13)$$

Підставляючи у (10.8.12) параметри задачі, знайдемо числове значення для Δz :

$$\Delta z = c\tau - L = \frac{10^6 \text{ eB}}{2 \cdot e \cdot 10^4 \text{ В/см}} \left(\sqrt{10^4 + 2 \cdot 0,511 \cdot 100} - \sqrt{16 + 2 \cdot 0,511 \cdot 4 \cdot 96} \right) \approx 1,39 \text{ см. Як бачимо,}$$

оскільки довжина біжучої хвилі в хвилеводі 1 м, таке мале «відставання» електрона від положення горба хвилі практично не впливає на процес його прискорення, тобто можна вважати, що електрон скрізь рухається зі швидкістю світла. Якщо виникне необхідність збільшити енергію електрона, слід просто збільшити довжину хвилеводу.

11. ГАЛЬМУВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ТА ГАММА-КВАНТІВ У СЕРЕДОВИЩІ. ВЗАЄМОДІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ.

11.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити іонізаційні втрати енергії дейтрона з кінетичною енергією 4 MeV на одиниці шляху в азоті за нормальних умов.

Розв'язання: Важка заряджена частинка взаємодіє з електричними полями електронів та атомних ядер. Вона або іонізує, або збуджує атоми. Також відбувається й суто ядерна взаємодія частинки з атомним ядром. За рахунок цих процесів енергія частинки зменшується та її рух уповільнюється.

Іонізаційні втрати енергії важкої зарядженої частинки в речовині на одиницю шляху в нерелятивістському наближенні описуються окремим випадком формули Бете-Блоха [1]:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{4\pi e^4}{m_e} \cdot \frac{nz^2}{v^2} \ln \frac{m_e v^2}{\langle I \rangle (1 - \beta^2)}, \quad (11.1.1)$$

де z — заряд частинки в одиницях заряду електрона, v — її початкова швидкість, $\beta = v/c$ — швидкість частинки в одиницях швидкості світла, n — концентрація електронів в речовині, $\langle I \rangle \approx 13,5Z, \text{eV}$ — середня енергія іонізації атома речовини, що складається з атомів з порядковим номером Z .

Якщо в формулу (11.1.1) в нерелятивістському випадку ввести кінетичну енергію частинки $E_{\kappa} = \frac{M}{2} v^2$, то отримаємо наступний вираз:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} = \frac{2\pi e^4}{m_e} \cdot \frac{nz^2 M}{E_{\kappa}} \ln \frac{2m_e E_{\kappa}}{M \langle I \rangle}. \quad (11.1.2)$$

Оскільки дейтрони заряджені позитивно, то в результаті свого уповільнення вони починають захоплювати електрони, відбираючи їх від атомів навколишнього середовища. За умовою задачі, речовиною, в якій гальмується дейтрон ($z = 1$), є азот, порядковий номер якого $Z = 7$.

Швидкість дейтрона можна обрахувати, знаючи його кінетичну енергію E_{κ} :

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\kappa}}{m_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{erg}}{3,344 \cdot 10^{-24}}} = 1,96 \cdot 10^9 \text{cm/s}, \quad (11.1.3)$$

Концентрація електронів в азоті визначається через густину ρ речовини, в якій рухаються частинки, сталу Авогадро N_A та молярну масу μ :

$$n = \frac{\rho Z N_A}{\mu} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 6,023 \cdot 10^{23}}{14} = 3,76 \cdot 10^{20} \text{cm}^{-3}. \quad (11.1.4)$$

З урахуванням вже знайдених величин можна підставити числові значення до формули (11.1.2):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} &= \frac{4\pi (4,8 \cdot 10^{-10})^4}{9,1 \cdot 10^{-28}} \cdot \frac{3,76 \cdot 10^{20} \cdot 1^2}{(1,96 \cdot 10^9)^2} \ln \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \cdot (1,96 \cdot 10^9)^2}{13,5 \cdot 7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 2,77 \cdot 10^{-7} \text{erg/cm} = 0,17 \text{MeV/cm}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти залежність радіаційної довжини $L_{\text{рад}}$ електрона від порядкового номера речовини Z . Обчислити $L_{\text{рад}}$ для електрона в азоті (за нормальних умов), в алюмінії та в свинці.

Розв'язання: Рухом легка заряджена частинка може втрачати енергію як за рахунок іонізації атомів, так і за рахунок гальмівного випромінювання під час

взаємодії з атомами. У випадку низької енергії частинки основним механізмом втрат енергії є іонізаційні втрати, а для високої — втрати на випромінювання.

Приблизна границя між цими механізмами визначається величиною $E_{кр} \approx \frac{800}{Z}$, MeV.

При $E < E_{кр}$ основними є іонізаційні втрати, а при $E > E_{кр}$ — радіаційні. Якщо втрати енергії електрона в основному є радіаційними, то кінетична енергія електрона в речовині зменшується за законом:

$$E_{\kappa} = E_{\kappa 0} \cdot \exp(-x / L_{рад}) \quad (11.2.1)$$

Тут $E_{\kappa 0}$ та E_{κ} — кінетична енергія частинки до входження в речовину та на глибині x , відповідно. Радіаційна довжина $L_{рад}$ — стала, що залежить від виду речовини, в якій рухається частинка. Фізичний зміст радіаційної довжини — довжина, на якій енергія частинки зменшується в e разів.

З іншого боку, напівемпіричний вираз для радіаційних втрат енергії електрона при $E_{\kappa} \ll m_0 c^2$ [8]:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{рад} = 2,32 \cdot 10^{-27} n E_{\kappa} Z \cdot \ln \frac{183}{Z^{1/3}}. \quad (11.2.2)$$

Одиницею вимірювання для $\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)$, як і в попередній задачі, є MeV/см.

Отримати ще одне співвідношення для радіаційних втрат енергії електрона на одиниці шляху дуже просто з формули (11.2.1), диференціюючи її по глибині шару проникнення електрона в речовину:

$$\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{рад} = -\frac{E_{\kappa 0}}{L_{рад}} \cdot \exp(-x / L_{рад}) = -\frac{E_{\kappa}}{L_{рад}}. \quad (11.2.3)$$

Порівнюючи вирази (11.2.2) та (11.2.3), отримуємо залежність радіаційної довжини $L_{рад}$ електрона від порядкового номера речовини Z :

$$L_{рад} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{n Z \cdot \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right)}. \quad (11.2.4)$$

Концентрація електронів в речовині визначається за формулою (11.1.4). Для розрахунку потрібні густини речовин ρ , їх зарядові Z та масові числа A . Ці параметри за нормальних умов складають відповідно:

1) для азоту $\rho_N = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $Z_N = 7$ та $A_N = 14$;

2) для алюмінію $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$, $Z_{Al} = 13$ та $A_{Al} = 27$;

3) для свинцю $\rho_{Pb} = 11,3 \text{ г/см}^3$, $Z_{Pb} = 82$ та $A_{Pb} = 207$.

Підставивши ці параметри у вираз (11.2.4), отримуємо для азоту $L_{рад}^N = 35862 \text{ см} \approx 360 \text{ м}$, для алюмінію $L_{рад}^{Al} = 9,7 \text{ см}$ та для свинцю $L_{рад}^{Pb} = 0,5 \text{ см}$.

Приклад 3. Знайти середній пробіг протонів з кінетичною енергією 3 MeV у свинці.

Розв'язання: Іонізаційні втрати енергії частинок (11.1.1) для частинок з різною масою та швидкістю, різним зарядовим числом, але з однаковою енергією, можна представити наступним чином:

$$-\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{іон} = z^2 f(n, \langle I \rangle, v), \quad (11.3.1)$$

де $f(n, \langle I \rangle, v)$ — функція, яка залежить тільки від концентрації електронів в речовині n , середньої енергії іонізації одного атома речовини $\langle I \rangle$ та швидкості частинки v .

Пробіг частинки в речовині можна знайти з (11.3.1) наступним чином:

$$dx = -\frac{dE_{\kappa}}{z^2 f(n, \langle I \rangle, v)}. \quad (11.3.2)$$

Проінтегруємо вираз (11.3.2)

$$R = -\int_{v_0}^0 \frac{m d(v^2)}{z^2 f(n, \langle I \rangle, v)} = \frac{m}{z^2} F(n, \langle I \rangle, v). \quad (11.3.3)$$

Очевидно, що середній пробіг для різних частинок в одній і тій самій речовині залежить тільки від їх маси та заряду за умови однакової швидкості частинок.

Середній пробіг α -частинки R_{α}^{Pb} (см) в свинці:

$$R_{\alpha}^{Pb} = \frac{0,56 \cdot A^{1/3} R_{\alpha} \cdot 10^{-3}}{\rho_{Pb}}, \quad (11.3.5)$$

де $R_{\alpha} = 0,31 \cdot E_{\kappa}^{3/2}$ (см) — середній пробіг α -частинки з кінетичною енергією E_{κ} (MeV) в повітрі, ρ_{Pb} — густина свинцю.

Таким чином, можна записати співвідношення між середніми пробігами у свинці для протона та α -частинки з рівними швидкостями $v_{\alpha} = v_p$ (нерелятивістське

наближення $E_{\kappa} = \frac{m}{2} v^2$):

$$R_p^{Pb}(m_p, E_{\kappa p}) = R_{\alpha}^{Pb}(m_{\alpha}, 4E_{\kappa p}). \quad (11.3.4)$$

Тут враховано співвідношення між масами та зарядом протона та α -частинки: $m_{\alpha} \cong 4m_p$ та $z_{\alpha} = 2z_p$.

Для протона з кінетичною енергією 3 MeV, середній пробіг у свинці дорівнюватиме з формули (11.3.4):

$$R_p^{Pb} = \frac{0,174 \cdot 207^{1/3} \cdot 12^{3/2} \cdot 10^{-3}}{11,3} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ (см)} \quad (11.3.5)$$

Приклад 4. Який відсоток β^- -частинок, що випромінюються ізотопом ^{32}P , поглинається в алюмінієвій фользі з масовою товщиною $20 \frac{\text{мг}}{\text{см}^2}$?

Розв'язання: Закон поглинання β^- -частинок в речовині має вигляд:

$$J = J_0 \cdot e^{-\mu d}, \quad (11.4.1)$$

де J_0 та J — початковий потік β -частинок та потік на глибині d відповідно, μ — лінійний коефіцієнт поглинання.

Відсоток β -частинок, які поглинаються шаром речовини товщиною d , складає:

$$\eta = \frac{J_0 - J}{J_0} = 1 - e^{-\mu d}. \quad (11.4.2)$$

Знайти лінійний коефіцієнт поглинання можна через масовий коефіцієнт поглинання $\frac{\mu}{\rho}$, який виражається через максимальну енергію β -спектра $E_{\kappa\beta}^{\max}$ (див. Розділ 4, Приклад 1) для конкретного ізотопу [8,9]:

$$\frac{\mu}{\rho} = 1,71 \cdot (E_{\kappa\beta}^{\max})^{-4/3}. \quad (11.4.3)$$

Тут масовий коефіцієнт поглинання вимірюється в $\frac{\text{см}^2}{\text{г}}$, а максимальна енергія β -спектра $E_{\kappa\beta}^{\max}$ — в MeV. Формула (11.4.3) справедлива для випадку $0,5 \text{ MeV} < E_{\kappa\beta}^{\max} < 7 \text{ MeV}$.

Для ізотопу ^{32}P величина максимальної енергії $E_{\kappa\beta}^{\max} = 1,71 \text{ MeV}$. Це значення можна взяти з таблиць, а можна розрахувати (див. Розділ 4, Приклад 1).

Отже, з урахуванням (11.4.3), формула (11.4.2) переписується наступним чином:

$$\eta = 1 - \exp\left[-\frac{\mu}{\rho}(\rho d)\right] = 1 - \exp\left[-22 \cdot \left(E_{\kappa\beta}^{\max}\right)^{-4/3} \cdot (\rho d)\right]. \quad (11.4.4)$$

Підстановкою числових даних у (11.4.4) отримаємо відсоток β -частинок, який поглинається в речовині згідно з умовою задачі:

$$\eta = 1 - \exp\left[-22 \cdot (1,71)^{-4/3} \cdot (20 \cdot 10^{-3})\right] \cong 0,2 \quad \text{або } \eta = 20\%. \quad (11.4.5)$$

Приклад 5. Оцінити кінетичну енергію електронів, за якої радіаційні втрати енергії в алюмінії складатимуть $\frac{3}{4}$ від всіх втрат. Обчислити величину критичної енергії електрона в цьому випадку та величину іонізаційних втрат для електрона з кінетичною енергією 9 MeV .

Розв'язання: Повні втрати енергії електрона з кінетичною енергією E_{κ} на одиницю шляху дорівнюють сумі іонізаційних (див. приклад №11.1) та радіаційних втрат:

$$\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{повн}} = \left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}} + \left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}. \quad (11.5.1)$$

В залежності від енергії самого електрона, один з видів втрат енергії переважатиме. А саме, при кінетичній енергії електрона, яка менша за його енергію спокою ($E_{\kappa} \ll m_e c^2$, де m_e — маса спокою електрона), електрон в речовині буде рухатися досить повільно та встигатиме на своєму шляху іонізувати атоми середовища, тому іонізаційні втрати переважатимуть над радіаційними. В протилежному випадку швидкого (релятивістського) електрона ($E_{\kappa} \gg m_e c^2$), переважають радіаційні втрати. Але оскільки електрон є легкою частинкою, то іонізаційні втрати є не дуже суттєвими.

Треба зауважити, що для електронів формула (11.1.2) для іонізаційних втрат децю ускладнюється. Це відбувається через відмінність у ефективних перерізах близьких зіткнень електронів та важких частинок, різниці у величині, яка передається під час зіткнення двох електронів з енергіями $E_{\kappa \max}$, яка в цьому випадку дорівнює половині кінетичної енергії електрона E_{κ} . Також існує відмінність через зменшення приведеної маси системи [13].

Існує наступне співвідношення між іонізаційними та радіаційними втратами частинки, яка рухається з кінетичною енергією E_{κ} в речовині з порядковим номером Z :

$$\frac{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}}{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}}} = \frac{E_{\kappa} Z}{800}. \quad (11.5.2)$$

Якщо радіаційні втрати енергії в алюмінії складатимуть $\frac{3}{4}$ від всіх втрат, то в цьому випадку формула (11.5.2) виглядатиме наступним чином:

$$\frac{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{рад}}}{\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial x}\right)_{\text{іон}}} = \frac{E_{\kappa} Z}{800} = \frac{3/4}{1/4} = 3, \quad (11.5.3)$$

звідки кінетична енергія електрона складатиме $E_{\kappa} = \frac{2400}{Z_{\text{Al}}} = \frac{2400}{13} = 184,6 \text{ MeV}$.

З (11.5.2) випливає, що радіаційні втрати дорівнюють іонізаційним при критичній енергії частинки $E_{кр} = \frac{800}{Z}, \text{MeV}$. Для алюмінію ця величина становить $E_{кр} = \frac{800}{13} = 61,5 \text{ MeV}$.

Швидкість електрона з кінетичною енергією $E_{\kappa} = 9 \text{ MeV} = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}$ визначатиметься в релятивістському випадку з формули:

$$v = c \frac{\sqrt{E_{\kappa} (E_{\kappa} + 2m_e c^2)}}{E_{\kappa} + m_e c^2} \quad (11.5.5)$$

Концентрація електронів в алюмінію визначається за формулою (11.1.4) та дорівнює $n = 7,83 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

На основі (11.5.4) після підстановки числових значень іонізаційні втрати енергії електрона з кінетичною енергією 9 MeV дорівнюватимуть:

$$-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{іон}}^e = 0,65 \text{ eB}/\text{см}.$$

Видно, що у випадку, коли електрон рухається з ультрарелятивістською швидкістю, іонізаційні втрати енергії складатимуть незначну частину загальних втрат.

Приклад 6. При гальмуванні електронів достатньо великих енергій в полі ядра переріз випромінювання γ -квантів в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$ поблизу максимальної частоти гальмівного випромінювання визначається формулою $d\sigma = \frac{1}{nL_{\text{рад}}} \frac{d\omega}{\omega}$, де n — кількість ядер в одиниці об'єму, а $L_{\text{рад}}$ — радіаційна

довжина. Знайти ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї початкової енергії під час проходження через цинкову пластинку товщиною $L = 1 \text{ мм}$.

Розв'язання: Енергія, яка втрачається частинкою, що рухається в речовині, за рахунок електромагнітного випромінювання, називається радіаційними втратами.

Випромінювання γ -квантів обумовлене розсіюванням частинок в кулонівському полі ядер. Кулонівське поле гальмує частинку, та вона втрачає енергію, випромінюючи γ -кванти. Випромінювання, яке виникає при цьому, називається гальмівним. Максимальна енергія γ -квантів визначається з умови: $E_0 = \hbar\omega_{\text{max}}$ де E_0 — початкова енергія електрона.

Імовірність випромінювання γ -квантів в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$ дорівнюватиме:

$$d\omega = nL d\sigma. \quad (11.6.1)$$

Врахуємо, що переріз випромінювання γ -квантів в даному випадку становить:

$$d\sigma = \frac{1}{nL_{\text{рад}}} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega}, \quad (11.6.2)$$

де $\hbar\omega$ — енергія γ -кванта.

Вимога, сформульована в умові прикладу, означає, що ми повинні знайти ймовірність того, що γ -кванти матимуть енергію в діапазоні від $0,9E_0$ до E_0 , де під E_0 слід розуміти початкову енергію електрона. Тоді ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї первісної енергії під час проходження через цинкову пластинку виражатиметься визначенням інтегралом від співвідношення (11.6.1) та запишеться, з урахуванням формули (11.6.2), таким чином:

$$\omega = \int_{0,9E_0}^{E_0} d\omega = \int_{0,9E_0}^{E_0} nL d\sigma = \frac{L}{L_{\text{рад}}} \int_{0,9E_0}^{E_0} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega}. \quad (11.6.3)$$

Для визначення радіаційної довжини в цинку скористаємося формулою (11.2.4):

$$L_{\text{рад}} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{nZ \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)}. \quad (11.6.4)$$

Заряд ядра цинку складає $Z_{\text{Zn}} = 30$, а концентрація електронів в речовині:

$$n = \frac{\rho Z N_A}{M} = \frac{7,0 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 30 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{65 \frac{\text{г}}{\text{моль}}} = 19,46 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}. \quad (11.6.5)$$

Тут використано значення густини цинку $\rho = 7,0 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ та його молярної маси $M = 65 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

Отже, радіаційна довжина електрона в цинку дорівнюватиме:

$$L_{\text{рад}} = \frac{4,31 \cdot 10^{26}}{19,46 \cdot 10^{23} \cdot 30 \cdot \ln\left(\frac{183}{30^{1/3}}\right)} = 1,81 \text{ см}. \quad (11.6.6)$$

Остаточно, шукану ймовірність з виразу (11.6.3) можна записати наступним чином:

$$w = \frac{L}{L_{\text{рад}}} \int_{0,9E_0}^{E_0} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar\omega} = \frac{0,1}{1,81} \cdot \ln\left(\frac{E_0}{0,9E_0}\right) = 5,8 \cdot 10^{-3}. \quad (11.6.7)$$

Як бачимо, ймовірність того, що електрон втратить більше 90% своєї первісної енергії під час проходження через цинкову пластинку товщиною $L = 1 \text{ мм}$, є досить малою, оскільки товщина платівки в цьому випадку майже в 20 разів менша за радіаційну довжину.

Приклад 7. Моноенергетичний пучок γ -квантів під час проходження алюмінієвої платівки товщиною 2,9 см послаблюється в 2,6 рази. Знайти відповідний масовий коефіцієнт розсіювання. Обчислити середню довжину пробігу такого пучка випромінювання.

Розв'язання: Закон послаблення вузького пучка моноенергетичного γ -випромінювання є експоненціальним:

$$J = J_0 e^{-\mu x}. \quad (11.7.1)$$

Тут J_0 та J — початкова та кінцева інтенсивність пучка, x — товщина платівки,

$$\mu = \tau + \sigma, \quad (11.7.2)$$

де μ , τ та σ — відповідні лінійні коефіцієнти послаблення, поглинання та розсіювання.

З умови задачі очевидно, що послаблення пучка випромінювання в 2,6 рази означатиме наступне співвідношення:

$$\frac{J_0}{J} = e^{\mu x} = 2,6. \quad (11.7.3)$$

Щоб знайти масовий коефіцієнт розсіювання σ/ρ , треба спочатку з довідкових даних дізнатися відповідні значення масових коефіцієнтів послаблення μ/ρ та поглинання τ/ρ для даної довжини хвилі γ -випромінювання.

Оскільки довжина хвилі квантів нам невідома, можемо зробити навпаки: за допомогою формули (11.7.3) дізнатися масовий коефіцієнт послаблення μ/ρ в алюмінію, а потім за його значенням знайти довжину хвилі пучка.

Отже, масовий коефіцієнт послаблення $\frac{\mu}{\rho}$ в алюмінії (густина якого складає $\rho = 2,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$) дорівнюватиме:

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\ln J_0/J}{\rho d} = \frac{\ln 2,6}{2,7 \cdot 2,9} = 0,122 \text{ см}^2/\text{г}, \quad (11.7.4)$$

що відповідає енергії γ -квантів $E_\gamma = 0,2 \text{ MeV}$ [8].

Для цієї енергії γ -випромінювання, яке поширюється в алюмінію, з довідкових таблиць можна визначити масовий коефіцієнт поглинання $\frac{\tau}{\rho} = 0,0275 \text{ см}^2/\text{г}$.

Тоді, згідно визначенню (11.7.2), масовий коефіцієнт розсіювання $\frac{\sigma}{\rho}$ дорівнюватиме:

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\tau}{\rho} = 0,122 - 0,0275 = 0,0945 \text{ см}^2/\text{г}.$$

Приклад 8. Для створення джерела монохроматичних фотонів з енергією, яка регулюється, можна використати комптонівське розсіювання лазерного випромінювання на прискорених електронах. Енергія E_γ фотона, що розсіявся, буде залежати від швидкості v прискореного пучка електронів, початкової енергії фотонів $E_{\gamma 0}$ та кута зіткнення ϑ фотонів лазерного випромінювання з пучком електронів, а також від кута φ між напрямками руху первісних та розсіяних фотонів: $E_\gamma = E_{\gamma 0} \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos(\vartheta - \varphi)}$, де $\beta = \frac{v}{c}$. Обчислити максимальну енергію отриманого монохроматичного випромінювання, якщо в якості джерела первісних фотонів використано випромінювання рубінового лазера ($E_{\gamma 0} = 1,78 \text{ eV}$), а електрони мають кінетичну енергію, яка дорівнює $E_{ke} = 1 \text{ GeV}$.

Розв'язання: Енергія E_γ фотона, що розсіявся, згідно умови задачі, дорівнює:

$$E_\gamma = E_{\gamma 0} \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos(\vartheta - \varphi)}. \quad (11.8.1)$$

З виразу (11.8.1) очевидно, що максимальною енергія фотона буде, коли $\cos \vartheta = -1$ та $\cos(\vartheta - \varphi) = 1$. Ця умова виконується при наступних значеннях кутів: $\vartheta = \varphi = \pi$.

Отже, максимальна енергія монохроматичного випромінювання дорівнюватиме:

$$E_{\gamma \max} = E_{\gamma 0} \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (11.8.2)$$

Запишемо повну енергію електрона:

$$E = E_{ke} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.8.3)$$

де m_0 — маса спокою електрона.

Зі співвідношення (11.8.3) можна виразити швидкість частинки в одиницях швидкості світла:

$$\beta = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + 2)}}{\alpha + 1}, \quad (11.8.4)$$

де відношення кінетичної енергії електрона до його енергії спокою позначено як $\alpha = \frac{E_{ke}}{m_0 c^2}$.

Оскільки електрони мають кінетичну енергію, яка дорівнює $E_{ke} = 1 \text{ GeV}$, то в даному випадку коефіцієнт α дорівнюватиме:

$$\alpha = \frac{E_{ke}}{m_e c^2} = \frac{10^3 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} = 1956,9. \quad (11.8.5)$$

Тоді підстановка числових значень до формули (11.8.4) дає швидкість електрона, яка дуже близька до швидкості світла:

$$\beta = \frac{\sqrt{1956,9(1956,9+2)}}{1956,9+1} = 0,999999869. \quad (11.8.6)$$

Остаточно, максимальна енергія монохроматичного γ – випромінювання дорівнюватиме:

$$E_{\gamma \max} = 1,78 \text{ eV} \cdot \frac{1+0,999999869}{1-0,999999869} = 27,2 \text{ MeV}. \quad (11.8.7)$$

12. АСТРОФІЗИКА

12.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Гравітаційний радіус об'єкта, який має масу M , або радіус Шварцшильда, визначається співвідношенням $r_G = \frac{2GM}{c^2}$, де

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ — гравітаційна стала. Визначити гравітаційний радіус для Землі, Сонця та Місяця.

Розв’язання: Гравітаційний радіус — це радіус сфери, на якій сила тяжіння, створена масою, що не обертається й що повністю лежить всередині цієї сфери, прямує до нескінченності. Якщо тіло стиснути до розмірів гравітаційного радіуса, то ніякі сили не зможуть зупинити його подальше стискання під дією сил тяжіння. Такий процес називається релятивістським гравітаційним колапсом. Вважалося, що при цьому зі сфери радіусом r_G не може виходити ніяке випромінювання, ніякі частинки. Але на сьогоднішній день теорія С.Хокінга спростовує це твердження, запропонувавши та дослідивши процес квантовомеханічного випаровування речовини (аналог тунельного ефекту). Детальніша інформація про це, наприклад, в [3].

Отже, розрахуємо гравітаційні радіуси деяких об’єктів.

Маса Землі складає $M_{\oplus} = 5,976 \cdot 10^{27} \text{ г}$, маса Сонця $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}$ та маса Місяця $M_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ г}$.

Гравітаційні радіуси дорівнюють відповідно для Землі, Сонця та Місяця:

$$r_{G\oplus} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 8,86 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,86 \text{ мм}, \quad (12.1.1)$$

$$r_{G\odot} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2,95 \cdot 10^3 \text{ м} = 2,95 \text{ км}, \quad (12.1.2)$$

$$r_{GM} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 7,35 \cdot 10^{19} \text{ кг}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 10,9 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 1,09 \text{ нм}. \quad (12.1.3)$$

Очевидним є той факт, що гравітаційний радіус реальних тіл в порівнянні з їх справжнім радіусом є мізерним.

Приклад 2. Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із водню масою M та радіусом R . Прийняти, що електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ однакової по об’єму густини. Визначити рівноважний стан зірки за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.

Розв’язання: На заключних стадіях еволюції (після припинення термоядерних реакцій в центрі зірки) подальша доля зірки визначається тим, чи можуть при температурі абсолютного нуля в речовині розвинутих сили, здатні протидіяти гравітаційному стисканню.

Силі гравітації, яка намагається стиснути зірку, протидіє кінетичний тиск газу електронів, точніше, градієнтний баланс цих двох сил і визначає механічну рівновагу зірки.

При високих густинах матерія зірки складається з «голих» ядер та електронів, причому роль кулонівської взаємодії частинок суттєво зменшується під час збільшення густини. Тому при великих густинах ($\rho \geq 10^3 \text{ г/см}^3$) електронний та ядерний газ є виродженими. Оскільки під дією тиску відбувається еволюція атомарного стану речовини в зірках, то при високих тисках будь-яка речовина набуває вигляду кубічної ґратки, де умовно „вузлами” ґратки можна вважати атомні ядра, а між ядрами рухається однорідний газ вільних електронів. В середньому все середовище є нейтральним. Можна вважати, що наявність ядер не впливає на ідеальність електронного газу, оскільки кінетична енергія електронів набагато більша за потенціальну енергію ядер. Для нерелятивістського

виродженого газу справджується умова: чим більша густина, тим більшою є ідеальність газу.

Під час подальших викладок ми не будемо враховувати кінетичний тиск ядерного газу, оскільки внаслідок великої маси швидкості ядер, а отже й тиск, що ними створюється, він є набагато меншим, ніж електронний.

Для стиснутого газу можна ввести поняття високої та низької температури, причому при низькій температурі це буде вироджений квантовий газ. В цьому газі частинками будуть заповнені всі квантові рівні нижче рівня Фермі, а вище енергії Фермі рівні залишатимуться порожніми.

Припущенням про сферичну симетрію зірки ми нехтуємо впливом наступних факторів: 1) осьового обертання; 2) приливних ефектів (якщо зірка не є поодиноким) та 3) крупномасштабних магнітних полів.

Для розв'язку задачі скористаємось моделлю виродженого Фермі-газу, наведеною в Розділі 1, Прикладі 7. Знайдемо кінетичний тиск газу електронів p_e . За законами термодинаміки тиск можна визначити диференціюванням повної енергії електронів у зірці E по повному об'єму V зірки:

$$p_e = - \left. \frac{\partial E(Z, N)}{\partial V} \right|_S, \quad (12.2.1)$$

де S — ентропія системи.

Вираз для середньої енергії $\langle E \rangle$, що припадає на один електрон можна отримати за аналогією до виразу (1.7.16) (Розділі 1, Приклад 7):

$$\langle E \rangle = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_e} n_e^{2/3}, \quad (12.2.2)$$

де m_e — маса спокою електрона, $n_e = N_e/V$ — концентрація електронів в системі. Повна енергія всіх електронів дорівнюватиме:

$$E = N_e \langle E \rangle = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_e} \frac{N_e^{5/3}}{V^{2/3}}. \quad (12.2.3)$$

Продиференціюємо попередній вираз по об'єму та отримаємо тиск електронного газу, який намагається розширити зірку зсередини:

$$p_e = - \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_e^{5/3}}{10m_e} \frac{\partial}{\partial V} (V^{-2/3}) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3}. \quad (12.2.4)$$

Для знаходження гравітаційного тиску спочатку визначимо енергію зірки масою M у власному гравітаційному полі (Рис. 12.1):

$$W_G = \int_0^M U dm = \int_0^M \frac{G}{r} m dm = \frac{GM^2}{2R} \left\langle \frac{R}{r} \right\rangle, \quad (12.2.5)$$

де $U = Gm/r$ — гравітаційний потенціал ($G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)$) — гравітаційна стала, m — маса елемента зірки всередині, r — радіус цього елемента, R — радіус зірки, $\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle$ — усереднене по масі зірки значення. Останній параметр знайдемо згідно визначенню середнього:

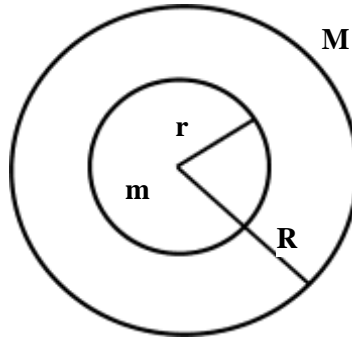


Рис. 12.1. Зірка масою M та радіусом R .

$$\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle = \frac{\int_0^R \frac{R}{r} m dm}{\int_0^R m dm} = \frac{2}{M^2} \int_0^R \frac{R}{r} m dm. \quad (12.2.6)$$

Якщо густина зірки є сталою по об'єму, можемо виразити масу таким чином:

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3, \quad dm = 4\pi \rho r^2 dr, \quad (12.2.7)$$

та підставити в (12.2.6), переходячи до іншої змінної:

$$\left\langle \frac{R}{r} \right\rangle = \frac{2R}{M^2} \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{M^2} \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 R^6 = \frac{6}{5}, \quad (12.2.8)$$

де враховано вираз для густини $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$.

Таким чином, гравітаційна енергія зірки становитиме:

$$W_G = \frac{3GM^2}{5R} = \frac{3GM^2}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} V^{-1/3}. \quad (12.2.9)$$

Диференціюючи вираз (12.2.9) за об'ємом, знайдемо гравітаційний тиск зірки:

$$P_G = - \frac{\partial W_G(M, R)}{\partial V} \Big|_S = \frac{3GM^2}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{1}{3} V^{-4/3} = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (12.2.10)$$

В останній формулі виразимо радіус зірки через інші параметри, а саме: густину та концентрацію електронів.

Для водневої зірки концентрація електронів виражається через молярну масу атома водню $\mu_H = 1$ з/моль, його зарядове число $Z_H = 1$ та сталу Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹:

$$n_e = \frac{N_A}{\mu_H} \rho Z_H = \frac{\rho Z_H}{m_p}, \quad (12.2.11)$$

де $\frac{N_A}{\mu_H} \approx \frac{1}{m_p}$, $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-24}$ г, в чому можна переконатися самостійно.

Радіус зірки виразимо через концентрацію електронів, врахувавши (12.2.11):

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{Z_H^{1/3} M^{1/3}}{m_p^{1/3} n_e^{1/3}}, \quad (12.2.12)$$

та підставимо у (12.2.10):

$$P_G = \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{G}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{m_p^{4/3} M^{2/3}}{Z_H^{4/3}} n_e^{4/3}. \quad (12.2.13)$$

Кінетичний тиск електронного газу намагається розширити зірку назовні („розірвати зсередини”), а гравітаційний тиск, навпаки, стискає її, в стані рівноваги ці тиски мають бути однаковими.

Тому рівність співвідношень (12.2.4) та (12.2.13) є умовою термодинамічної рівноваги зірки: $p_e = p_G, \Rightarrow$

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3} = \frac{G}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{m_p^{4/3} M^{2/3}}{Z_H^{4/3}} n_e^{4/3} \Rightarrow$$

$$n_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} (m_p)^{4/3} M^{2/3}, \quad (12.2.14)$$

де враховано, що $Z_H = 1$.

Цей вираз дає залежність між основними параметрами зірки (її масою та концентрацією електронного газу). Формулу (12.2.14) можна переписати через густину речовини, з якої складається зірка:

$$\rho_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} (m_p)^{5/3} M^{2/3}. \quad (12.2.15)$$

При заданій масі M зірки рівноважним її стан буде тоді, коли виконуються умови (12.2.14) та (12.2.15) для концентрації та густини електронного газу.

В загальному випадку нерелятивістської зірки рівність (12.2.14) буде мати вигляд:

$$n_e^{1/3} = G \frac{2^{2/3} m_e}{3\pi \hbar^2} \left(\frac{m_y}{Z} \right)^{4/3} M^{2/3}, \quad (12.2.16)$$

тут m_y — маса ядер, з яких складається зірка, Z — їх заряд.

Приклад 3. Зірка являє собою повністю іонізовану плазмову сферу із заліза масою M та радіусом R , причому електрони утворюють вироджений релятивістський газ однакової по об'єму густини. Визначити рівноважний стан зірки та її можливу еволюцію (стискання до виродженого стану ядер, стискання до проміжного стану, необмежений розліт, інше) в залежності від параметрів задачі (M та R) за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів. Взяти масу рівною 1 та 1,5 мас Сонця.

Розв'язання: Спочатку обрахуємо кінетичний тиск релятивістського електронного газу. Для спрощення розрахунків розглянемо ультрарелятивістський випадок, коли енергія частинки є пропорційною до її імпульсу: $E = pc$.

Кількість можливих станів одного ферміона дорівнюватиме по аналогії з формулою (12.1.6):

$$N = \frac{Vp^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{VE^3}{3\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (12.3.1)$$

Густина станів частинок складатиме:

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (12.3.2)$$

В системі можуть існувати частинки від нульової енергії до граничної енергії — енергії Фермі, загальна кількість ферміонів (в нашому випадку — електронів) в системі дорівнює:

$$N_e = \int_0^{E_F} \rho(E) dE = \frac{VE_F^3}{3\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (12.3.3)$$

Концентрація вироджених електронів визначатиметься наступним чином:

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{E_F^3}{3\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (12.3.4)$$

Повна енергія електронного газу обраховується як

$$E = N_e \langle E \rangle = \int_0^{E_F} E \rho(E) dE = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^{E_F} E^3 dE = \frac{V E_F^4}{4 \pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (12.3.5)$$

З формули (12.3.3) виразимо енергію Фермі електронів, враховуючи, що $n_e = N_e/V$:

$$E_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c n_e^{1/3}. \quad (12.3.6)$$

Підставимо енергію Фермі електронів у вигляді (12.3.6) до виразу (12.3.5) та отримаємо співвідношення для повної кінетичної енергії частинок:

$$E = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar c N_e^{4/3}}{4 V^{1/3}}. \quad (12.3.7)$$

Знайдемо кінетичний тиск релятивістського газу електронів, скориставшись виразом (12.2.1) та вважаючи число частинок в системі незмінним:

$$P_e = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_S = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{N_e^{4/3}}{V^{4/3}} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c n_e^{4/3}. \quad (12.3.8)$$

Концентрацію електронного газу можна виразити наступним чином:

$$n_e = \frac{Z N_A}{A} \cdot \frac{M}{V} = \frac{N_A}{\mu} \cdot \frac{M}{V}, \quad (12.3.9)$$

де N_A — число Авогадро, Z — зарядове число, A — масове число елемента, з якого складається зірка, $\mu = A/Z$ — кількість нуклонів в ядрі, що припадає на один електрон атома. Для заліза ця величина дорівнює: $\mu = 56/26 = 2,15$. Отже, кінетичний тиск електронного газу з двох попередніх виразів дорівнює:

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left(\frac{Z N_A}{A} \cdot \frac{M}{V} \right)^{4/3} = \frac{(3)^{5/3}}{4^{7/3} \pi^{2/3}} \hbar c \left(\frac{N_A}{\mu} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4}. \quad (12.3.10)$$

Гравітаційний тиск, який ззовні діє на сферичну зірку масою M та радіусом R , можна взяти у вигляді (12.2.10) з попереднього прикладу та, прирівнявши з кінетичним тиском, який протидіє гравітації, отримаємо умову рівноважного стану релятивістської зірки:

$$\frac{(3)^{5/3}}{4^{7/3} \pi^{2/3}} \hbar c \left(\frac{N_A}{\mu} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4} = \frac{3}{20\pi} \frac{G M^2}{R^4}. \quad (12.3.11)$$

Таким чином, маса рівноважної зірки (критична маса, або чандрасекарівська межа) буде залежати тільки від її матеріалу та світових констант:

$$M_{кр} = \frac{15}{16} \sqrt{5\pi} \left(\frac{N_A}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (12.3.12)$$

Для заліза зарядове число $Z = 26$, масове — $A = 56$. Обрахуємо числове значення маси (12.4.11):

$$M = \frac{15\sqrt{5\pi}}{16} \cdot \left(\frac{26 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{56} \right)^2 \times \left(\frac{1,05 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)} \right)^{3/2} = 2,77 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1,39 M_{\odot} \quad (12.3.13)$$

Приблизна оцінка чандрасекарівської межі проводиться за такою формулою [1]:

$$M_{кр} \approx \frac{5,75}{\mu} M_{\odot}. \quad (12.3.14)$$

Для заліза це приводить до співвідношення: $M_{кр} \approx 1,25 M_{\odot}$. Як бачимо, ми отримали результат, який досить добре співпадає з теоретичними розрахунками.

Розглянемо випадок, коли маса релятивістської зірки співпадає з масою Сонця: $M = M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$. В такому разі відношення гравітаційного тиску до кінетичного тиску виродженого електронного газу становитиме:

$$\frac{P_G}{P_e} = \frac{4 \cdot \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} G M^{2/3}}{5\hbar c \left(\frac{N_A}{\mu}\right)^{4/3}} = 5,07 \cdot 10^{-23} M^{2/3} \approx 0,8. \quad (12.3.15)$$

тобто $p_G < p_e$, відбувається процес розльоту зірки.

У випадку, коли маса залізної зірки $M = 1,5 M_{\odot} = 3 \cdot 10^{33} \text{ г}$, співвідношення між тисками буде таким:

$$\frac{P_G}{P_e} = 5,07 \cdot 10^{-23} M^{2/3} \approx 1,05. \quad (12.3.16)$$

тобто $p_G > p_e$, продовжує відбуватися процес стискання зірки.

Приклад 4. Визначити, за яких умов для зірки з масою Сонця в стисненому стані вироджених релятивістських електронів буде відбуватися процес нейтронізації кожного з типів ядер (наприклад, $p \rightarrow n$, $^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$, $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$). Енергії зв'язку для ядер ^{12}C , ^{12}B , ^{56}Fe та ^{56}Mn складають $92,2 \text{ MeV}$, $79,6 \text{ MeV}$, $492,2 \text{ MeV}$ та $489,3 \text{ MeV}$, відповідно. Для процесу $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$ записати другу реакцію нейтронізації та розрахувати її поріг (енергія зв'язку для нукліда ^{56}Cr дорівнює $488,44 \text{ MeV}$).

Розв'язання: Нейтронізація речовини — це перетворення протонів, які входять до складу зірок, на нейтрони на заключних етапах еволюції зірок. Молоді зірки складаються переважно з водню з домішкою гелію та дуже малим відсотком більш важких ядер. Тому на початку термоядерної еволюції зірок всі нейтрони в зоряній речовині зв'язані в атомних ядрах та на 6 протонів в середньому припадає приблизно один нейтрон. Наприкінці еволюції кількість нейтронів стрімко зростає, на що вказує існування нейтронних зірок. На заключних стадіях еволюції густина зоряної речовини в їх центральних областях сильно збільшується та електронний газ стає виродженим. Про це детальніше можна прочитати, наприклад в [13].

Отже, протонів, які входять до складу зірок, перетворюються на нейтрони за наступною схемою:

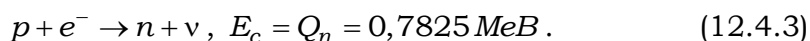


Це зворотний β^- -розпад. енергетичний поріг реакції (12.4.1) зазвичай є великим, тому тільки при високих густинах речовини енергія Фермі електронів E_F може перевищити критичну величину E_c — поріг нейтронізації:

$$E_F > E_c = E_{\text{зв}}(Z, A) - E_{\text{зв}}(Z-1, A) + Q_n, \quad (12.4.2)$$

де $Q_n = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 0,7825 \text{ MeV}$ — енергія β^- -розпаду нейтрона, $E_{\text{зв}}(Z, A)$ та $E_{\text{зв}}(Z-1, A)$ — енергії зв'язку материнського та дочірнього ядер, відповідно.

Розглянемо реакцію перетворення протона на нейтрон:



Умовою початку процесу нейтронізації є (12.4.2). Знайдемо випадок рівності енергії Фермі та порогу нейтронізації. Енергія Фермі релятивістських електронів виражається формулою (див. Розділ 12, Приклад 3):

$$E_c = E_F = \left(3\pi^2\right)^{1/3} \hbar c n^{1/3}, \quad (12.4.4)$$

де n — концентрація електронів. Звідси гранична концентрація дорівнюватиме:

$$n_{\text{кр}} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{E_c}{\hbar c}\right)^3. \quad (12.4.5)$$

Оцінімо величину n :

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{0,7825 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 2,46 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}. \quad (12.4.6)$$

Також можна обрахувати критичну густину $\rho_{кр}$ речовини зірки, при якій починається процес перетворення (12.4.3):

$$\rho_{кр} = \frac{A}{Z} \cdot n_{кр} \cdot m_p = 2,46 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ з} = 3,9 \cdot 10^6 \text{ з/см}^3. \quad (12.4.7)$$

Наступна реакція — перетворення ізотопу ^{12}C на ядро ^{12}B :



Поріг нейтронізації для реакції (12.4.8) складатиме:

$$E_c = E_{зв}(6,12) - E_{зв}(5,12) + Q_n = 92,2 - 79,6 + 0,7825 \approx 13,38 \text{ MeV}. \quad (12.4.9)$$

За формулами (12.4.5) та (12.4.7) критичні концентрація та густина електронного газу релятивістських частинок для випадку реакції (12.4.8) дорівнюватиме:

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{13,38 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 1,23 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}. \quad (12.4.10)$$

$$\rho_{кр} = \frac{12}{6} \cdot 1,23 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ з} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ з/см}^3$$

Аналогічні математичні викладки можна провести для реакції перетворення заліза на марганець:

$$\begin{aligned} ^{56}\text{Fe} + e^- &\rightarrow ^{56}\text{Mn} + \nu, \Rightarrow E_c = E_{зв}(26,56) - E_{зв}(25,56) + Q_n = \\ &= 492,2 - 489,3 + 0,7825 \approx 3,7 \text{ MeV}; \end{aligned}$$

$$n_{кр} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{3,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ ерг}}{10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \right)^3 = 2,6 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}, \quad (12.4.11)$$

$$\rho_{кр} = \frac{56}{26} \cdot 2,6 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ з} = 9,0 \cdot 10^6 \text{ з/см}^3.$$

За першою реакцією нейтронізації речовини може відбуватися друга, якщо продовжує виконуватися умова (12.4.2). Тоді реакція нейтронізації, до якої вступають електрони з енергією E_e в інтервалі $E_c < E_e < E_F$, стає енергетично вигідною. Енергія системи в кожному акті зменшується на величину $E_e - E_c$, яка уноситься електронним нейтрино.

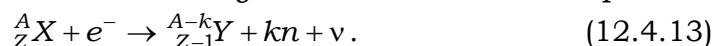
Друга реакція нейтронізації для ізотопу ^{56}Fe виглядатиме наступним чином:



Порогова енергія другого процесу нейтронізації складатиме:

$$E_c = E_{зв}(25,56) - E_{зв}(24,56) + Q_n = 489,3 - 488,44 + 0,7825 \approx 1,64 \text{ MeV}.$$

Ланцюжок реакцій нейтронізації призводить до утворення ядер, які перевантажені нейтронами. Як тільки ядро, що утворилося в процесі, стає нестійким по відношенню до випускання нейтронів, нейтронізація речовини продовжується з виділенням в кожному акті одного чи k нейтронів:



За рахунок нейтронізації речовини приблизно 99 % протонів в атомних ядрах перетворюються на нейтрони практично за час порядку секунди від початку гравітаційного колапсу. Внаслідок захоплення електронів тиск електронного газу зменшується, що призводить до подальшого стискання зірки. Таким чином утворюється нейтронна зірка густиною $\rho \approx 10^{14} \text{ з/см}^3$ та радіусом $R \approx (3 \div 10) \text{ км}$.

Всередині такої зірки залишається невелика кількість електронів, що компенсують протонний заряд.

Приклад 12.5. Зірка являє собою водневу повністю іонізовану плазмову сферу масою M та радіусом R , причому електрони утворюють вироджений нерелятивістський газ. В інтервалі $0 < r < R_1$ зірка складається з іонізованого вуглецю ^{12}C та має масу M_1 , а в інтервалі $R_1 < r < R$ — з іонізованого водню та має масу $M - M_1$ (див. Рис. 12.2). В кожному з шарів густина електронів однакова по об'єму. Визначити рівноважний стан зірки та двох її шарів за умови, що єдиною утримуючою силою, яка протидіє гравітації, є кінетичний тиск газу вироджених електронів.

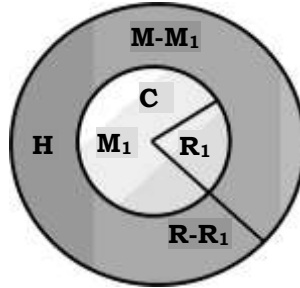


Рис.12.2. Двошарова зірка масою M та радіусом R .

Розв'язання: Формула для кінетичного тиску газу вироджених нерелятивістських електронів вже була виведено (див. формулу (12.2.4) з Розділу 12, Прикладу 2):

$$p_e = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} n_e^{5/3}. \quad (12.5.1)$$

Тоді тиск у внутрішньому (вуглецевому) шарі зірки дорівнює:

$$p_{e1} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} (n_{e1})^{5/3} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} \left(Z_C \cdot \frac{M_1}{V_1} \cdot \frac{N_A}{A_C} \right)^{5/3}, \quad (12.5.2)$$

де для вуглецю зарядове число $Z_C = 6$, масове — $A_C = 12$.

Або можна виразити (12.5.2) через заданий параметр задачі — радіус внутрішнього шару сферичної зірки:

$$p_{e1} = \frac{3^{7/3} \hbar^2}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \left(Z_C \cdot \frac{N_A}{A_C} \right)^{5/3} \frac{M_1^{5/3}}{R_1^5}. \quad (12.5.3)$$

Запишемо аналогічний вираз для кінетичного тиску електронного газу в зовнішній (водневій) частині зірки:

$$p_{e2} = \frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{(M - M_1)^{5/3}}{(R^3 - R_1^3)^{5/3}}. \quad (12.5.4)$$

В попередньому виразі враховано, що для водню зарядове та масове числа $Z_H = A_H = 1$.

Визначимо взаємний рівноважний стан двох шарів зірки, прирівнявши кінетичні тиски (12.5.3) та (12.5.4):

$$p_{e1} = p_{e2}, \Rightarrow \frac{M_1}{2R_1^3} = \frac{M - M_1}{R^3 - R_1^3}. \quad (12.5.5)$$

Звідси отримаємо рівноважне співвідношення радіусів внутрішнього та зовнішнього шарів зірки:

$$R_1 = R \left(\frac{M_1}{2M - M_1} \right)^{1/3}. \quad (12.5.6)$$

Гравітаційний енергія, яка виділяється при формуванні двошарової зірки, становитиме:

$$W_G = G \left[\int_0^{M_1} \frac{m_1}{r_1} dm_1 + \int_0^{M-M_1} \frac{(M_1+m_2)}{r_2} dm_2 \right]. \quad (12.5.7)$$

Виконуючи розрахунки аналогічно до наведених в Прикладі 1 (Розділ 12), знаходимо:

$$W_G = G \left[M_1^2 \frac{3}{5R_1} + \frac{3}{2} \frac{R^2 - R_1^2}{R^3 - R_1^3} M_1 (M - M_1) + \frac{3}{5} \frac{R^5 - R_1^5}{R^6 - R_1^6} (M - M_1)^2 \right]. \quad (12.5.8)$$

Використаємо рівноважне співвідношення (12.5.6) та перетворимо вираз для гравітаційної енергії (12.5.8):

$$W_G = \frac{3G}{5R} \left\{ M_1^2 \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{1/3} + \frac{5}{2} M_1 \left(M - \frac{M_1}{2} \right) \left[1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2/3} \right] + \right. \\ \left. + (M - M_1)^2 \frac{1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-5/3}}{1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2}} \right\} = \frac{3G}{5R} f(M, M_1), \quad (12.5.9)$$

де

$$f(M, M_1) = \left\{ M_1^2 \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{1/3} + \frac{5}{2} M_1 \left(M - \frac{M_1}{2} \right) \left[1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2/3} \right] + \right. \\ \left. + (M - M_1)^2 \frac{1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-5/3}}{1 - \left(2 \frac{M}{M_1} - 1 \right)^{-2}} \right\}. \quad (12.5.10)$$

Вираз для гравітаційного тиску отримаємо, диференціюючи (12.5.9) за об'ємом та виразивши радіус як $R = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} V^{1/3}$:

$$p_G = \frac{G}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} f(M, M_1) \frac{1}{V^{4/3}} = \frac{3G}{20\pi} \frac{f(M, M_1)}{R^4}. \quad (12.5.11)$$

Рівноважний стан двошарової зірки визначається з умови рівності кінетичного тиску зовнішнього шару (12.5.4) та гравітаційного тиску (12.5.11). Кінетичний тиск електронного газу зовнішньої частини зірки (12.5.4) перепишемо з урахуванням рівноважної умови (12.5.6):

$$p_{e2} = \frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{\left(M - \frac{M_1}{2} \right)^{5/3}}{R^5}. \quad (12.5.12)$$

Остаточно, умова рівноваги двошарової зірки $p_G = p_{e2} \Rightarrow$ запишеться так:

$$\frac{3^{7/3} \hbar^2 (N_A)^{5/3}}{5 \cdot 2^{10/3} \pi^{1/3} m_e} \cdot \frac{\left(M - \frac{M_1}{2} \right)^{5/3}}{R^5} = \frac{3G}{20\pi} \frac{f(M, M_1)}{R^4}. \quad (12.5.13)$$

З (12.5.13) можемо виразити рівноважний радіус зірки:

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2 (N_A)^{5/3}}{G m_e} \frac{\left(M - \frac{M_1}{2} \right)^{5/3}}{f(M, M_1)}. \quad (12.5.14)$$