

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
РАДІОФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«Електродинаміка»

(частина I)
Теорія поля



Creative Teamwork “WaSMP Group” & Co.

Київ 2006 рік

В даному виданні викладено конспект лекцій з курсу «Електродинаміка» **(частина I – Теорія поля)**. В даному посібнику зібрані відомості, які є узагальненням всього курсу, шляхом обробки різних джерел інформації, включаючи конспект кандидата фізико-математичних наук, доцента Шеки Д.Д.

Набір тексту: Сальніков Андрій, Бурий Максим, Кохановський Андрій, Танигін Богдан, Шапран Віталій, Слюсар Євген, Білоус Роман.

Корегування помилок: Бурий Максим, Сальніков Андрій.

Оформлено до друку: Сальніков Андрій.

1. Принципи відносності: Галілея та Ейнштейна. Спеціальне перетворення Лоренца.

Galilei, 1632 – принцип відносності:

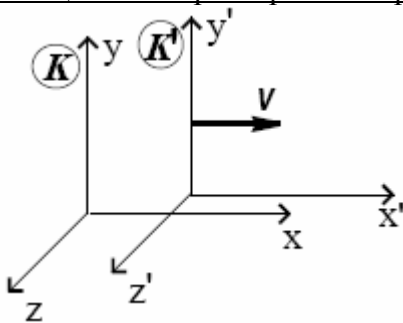
Всі закони механіки, що виконуються в одній інерціальній системі відліку, у тій самій формі справджуються і в іншій інерціальній системі

$$t = t' \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} \quad \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad m = m' \quad \vec{F} = \vec{F}'$$

Einstein, 1905 – релятивістський принцип відносності:

- 1) всі закони фізики, що виконуються для однієї інерціальної системи відліку, не змінюються при переході в іншу систему;
- 2) швидкість світла не залежить від швидкості руху спостерігача і у довільній системі відліку дорівнює $3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Спеціальне перетворення Лоренца



Нехай K' рухається відносно K рівномірно і прямолінійно із швидкістю V вздовж осі x , в момент часу $t = 0$ ($t' = 0$) початки координатних систем збігалися і в цей же момент із початку координат $\vec{r} = 0$ ($\vec{r}' = 0$) почала поширюватися сферична хвиля – спалах світла. У системі K фронт пройшов шлях ct , у системі K' – шлях ct' .

$$K: \quad c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$K': \quad c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Отже, при переході в іншу систему зберігається величина $S = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$. Вона є нульовою для світла, але може мати як додатний, так і від'ємний знак для інших випадків. Вона має назву *просторово-часовий інтервал* і визначає метрику простору-часу. Розглянемо перетворення координат чотиривимірного простору, що зберігають незмінним інтервал. Рух відбувається тільки вздовж ОХ, тому $y = y'$ і $z = z'$. Тоді перетворення x і t , що не змінює $S^2 = x^2 + (ict)^2 = \text{const}$, може бути записано як поворот осей навколо початку координат:

$$x' = x \cos \varphi + ict \sin \varphi \quad ict' = -x \sin \varphi + ict \cos \varphi$$

Скористаємось зв'язком тригонометричних та гіперболічних функцій:

$$\text{sh } iz = i \sin z \quad \text{ch } iz = \cos z$$

та введемо заміну $\psi = i\varphi$. Отримаємо наступні співвідношення:

$$x' = x \text{ch } \psi + ct \text{sh } \psi \quad ct' = x \text{sh } \psi + ct \text{ch } \psi$$

Оскільки ми розглядаємо рух вздовж осі x , то при цьому перетворюються лише координата x і час t . Потрібно визначити величину ψ . Розглянемо рух початку координат системи K' відносно системи K .

$$K': \quad x' = y' = z' = 0$$

$$K: \quad x = Vt \quad y = z = 0$$

Підставивши це у формулу раніше знайденого співвідношення (гіперболічного повороту), матимемо:

$$0 = Vt \text{ch } \psi + ct \text{sh } \psi \quad ct' = Vt \text{sh } \psi + ct \text{ch } \psi$$

Розв'язавши цю систему відносно $\text{ch } \psi$ та $\text{sh } \psi$, матимемо:

$$\text{th } \psi = -V/c \quad \text{sh } \psi = \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad \text{ch } \psi = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Підставивши ці результати у загальне співвідношення, одержимо перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

2. Загальне перетворення Лоренца. Основні властивості перетворення Лоренца.

Подію, що відбувається з деякою матеріальною частинкою, можна охарактеризувати її трьома координатами в просторі та моментом часу, коли відбувається подія. З міркувань наочності дуже часто користуються 4-простором.

Розглянемо дві події:

1. Зі швидкістю світла відправляється сигнал в момент часу t_1 з точки, що має координати x_1, y_1, z_1 .

2. Сигнал приходить в точку x_2, y_2, z_2 в момент часу t_2 .

Так як сигнал розповсюджується зі швидкістю світла, то пройдений їм шлях рівний $c(t_2 - t_1)$.

З іншого боку квадрат тієї самої відстані рівний $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Звідси: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$.

Величина $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2]^{1/2} = s_{12}$ називається інтервалом між двома подіями.

З інваріантності швидкості світла випливає: якщо інтервал дорівнює нулю в якійсь інерціальній системі відліку, то він буде рівний нулю і в будь-якій іншій.

Якщо дві події нескінченно близькі одне до одного, то для інтервала ds можемо записати:

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. Отже з наведених вище міркувань якщо $ds = 0$, то і в іншій системі відліку $ds' = 0$. З іншого боку ds та ds' нескінченно малі одного і того самого порядку, отже можемо сказати, що ds^2 та ds'^2 повинні бути пропорційні один одному, причому коефіцієнт пропорційності може залежати тільки від абсолютної величини відносної швидкості обох інерціальних систем. З міркувань однорідності простору і часу він не може залежати ані від координат, а ні від часу відповідно. А з міркувань ізотропності не може залежати від напрямку швидкості.

Щоб визначити цей коефіцієнт, розглянемо три системи відліку K_1, K_2, K . Нехай \vec{V}_1 та \vec{V}_2 – швидкості руху систем K_1 та K_2 відносно системи K . V_{12} – абсолютна величина швидкості руху K_2 відносно K_1 . Тоді з вищенаведених міркувань можемо записати:

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2$$

$$ds^2 = a(V_2) ds_2^2 \quad \text{Звідки будемо мати наступну рівність: } \frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12})$$

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$$

Але V_{12} залежить не тільки від абсолютних значень швидкостей V_1 та V_2 , але й від кута між ними. Це можливо, якщо значення функції $a(V)$ є константа, яка, як видно з наведеного співвідношення, рівна одиниці.

Отже $ds^2 = ds'^2$.

Загальними перетвореннями Лоренца називаються довільні, однорідні перетворення координат і часу, які зберігають незмінним релятивістський інтервал.

Шукане перетворення зводиться до трансляції (що фізично є тільки зміною початку відліку координат і часу) і повороту в чотирипросторі. Повороти в площинах xu, yz, xz – це звичайні повороти трьохвимірної системи координат. Розглянемо поворот в площині xt , координати y та z при цьому залишаються незмінними.

Можемо переписати інтервал у вигляді: $x^2 + (ict)^2 = inv$

$$\left\| \begin{array}{l} x' = x \cos \varphi + ict \sin \varphi \\ ict' = -x \sin \varphi + ict \cos \varphi \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} x' = x \operatorname{ch} \Psi + ct \operatorname{sh} \Psi \\ ct' = -x \operatorname{sh} \Psi + ct \operatorname{ch} \Psi \end{array} \right\| \quad - \text{Гіперболічний поворот, або boost.}$$

Визначимо значення кута: $\text{th } \Psi = -\frac{v}{c} \Rightarrow \text{ch } \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \text{sh } \Psi = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$

Отже можемо остаточно записати вираз для перетворень Лоренца, що фактично є гіперболічним поворотом в площині xt .

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Або вводячи наступні параметри: $\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad y' = y \quad z' = z \quad ct = \gamma(ct - \beta x)$$

3.Релятивістська кінематика. Власний час. Власна довжина. Релятивістське додавання швидкостей.

Працюючи з релятивістськими швидкостями, ми звертаємося до геометрії 4-простору, в якому:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct$$

Матриця переходу Лоренца виглядатиме таким чином:

$$\lambda^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Тобто $X^{i'} = \lambda^i_k X^k$

Як бачимо, четвертою змінною в перетвореннях Лоренца є ct , яка містить в собі час, отже час різний в різних системах відліку. Нехай τ – час у власній системі відліку, тоді згідно з перетвореннями Лоренца час у лабораторній системі відліку визначиться формулою:

$$t = \frac{\tau + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Нехай в системі відліку, яка рухається є годинник, відзначимо час двох подій, які сталися в одній і тій самій точці простору, в цій системі координат. Коли проміжок часу, який відділяє ці події в рухомій системі $\tau_2 - \tau_1$, в нерухомій системі події будуть відділені інтервалом часу:

$$t_2 - t_1 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Аналогічні розмірковування можна провести і для власної довжини:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Проаналізуємо, як додаються швидкості. Нехай всі величини в рухомій системі координат будемо позначати штрихованими, величини в лабораторній системі – відповідно не штрихованими. Тоді:

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad dz = dz' \quad dy = dy' \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Поділивши почленно три перші рівності на четверту і увівши швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ та $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ маємо:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{\sqrt{1 - \frac{v_x'^2}{c^2}}} \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$$

4.Геометрія 4-простору: метрика, ко- та контраваріантні величини.

Введемо такі позначення і потім, користуючись претвореннями Лоренца, знайдемо зв'язок між компонентами «штрихованої» і «нештрихованої» систем відліку.

$$\begin{aligned} x^1 &= x; & x'^1 &= \gamma \cdot (x^1 - \beta \cdot x^4); \\ x^2 &= y; & x'^2 &= x^2; \\ x^3 &= z; & x'^3 &= x^3; \\ x^4 &= c \cdot t; & x'^4 &= \gamma \cdot (x^4 - \beta \cdot x^1). \end{aligned}$$

Ці компоненти утворюють 4-простір.

Запишемо загальний вигляд для компонент 4-вектора, а разом і для інтервала:

$$\begin{aligned} x^i &= (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, c \cdot t) = (\vec{r}, c \cdot t); \\ (x)^2 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = inv. \end{aligned} \quad (*)$$

Можемо ввести базис по координатам:

$$\begin{aligned} x &= x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + x^3 \cdot e_3 + x^4 \cdot e_4 \\ (x)^2 &= x \cdot x = x^i \cdot e_i \cdot x^k \cdot e_k = x^i \cdot x^k \cdot e_i \cdot e_k \end{aligned} \quad (**)$$

Добуток $e_i \cdot e_k = g_{ik}$ називається метричним тензором. Загальний вигляд одержимо порівнявши вираз (*) із виразом (**), бо це по-суті і є скалярний добуток векторів тільки у випадку 4-простору.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1,1,1,-1)$$

Чотиривимірний простір, без урахування гравітації, називається простором Мінковського. Із вигляду метричного тензору робимо висновок – будь-який діагональний тензор є симетричним:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Можемо в загальному випадку виписати закон переходу між координатами «штрихованої» та «нештрихованої» систем (чисто з уявлень математики):

$$x'^i = \Lambda^i_k \cdot x^k, \quad (***)$$

$$\text{де } x^k = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}; \quad x'^i = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ x'^4 \end{pmatrix}$$

А тепер, користуючись перетвореннями Лоренца, конкретно до нашого випадку одержимо вигляд матриці переходу:

$$\Lambda_{special} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta \cdot \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta \cdot \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Вище було доведено про інваріантність величини «х», а тому можемо записати:

$x = x^i \cdot e_i = x'^i \cdot e'_i$. Підставляючи формулу (***) у тільки-що записаний вираз, одержимо:

$x^i \cdot e_i = \Lambda^i_k \cdot x^k \cdot e'_i$. Оскільки індекс «i» - німий, то ми його можемо поміняти на «k»:

$x^k \cdot e_k = \Lambda^i_k \cdot x^k \cdot e'_i$. Звідси, неважко побачити, що $e_k = \Lambda^i_k \cdot e'_i$, або навпаки $e'_i = (\Lambda^{-1})^k_i \cdot e_k$.

Тепер перейдімо власне до означень:

1. Чотири величини A^1, A^2, A^3, A^4 , які при перетвореннях Лоренца перетворюються як і 4-

радіус-вектори, називається контраваріантний 4-вектор. $A'^i = \Lambda^i_k \cdot A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot A^k$.

2. Чотири величини, які при перетворенні Лоренца змінюються за аналогічним законом як і 4-базис, утворюють компоненти коваріантного 4-вектора.

$$B'_i = (\Lambda^{-1})^k_i \cdot B_k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \cdot B_k.$$

3. Шістнадцять величин, які при перетвореннях Лоренца змінюються як 4-вектор, називається 4-тензором II-го рангу. Позначається T^{ik} .

5. Диференціальні операції в 4-просторі. 4-швидкість і 4-прискорення.

Гradient.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$$

Диференціал має бути скаляром, тому:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} dx^k$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = \left(\nabla \Phi, -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

4-дивергенція:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \nabla \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A^4}{\partial t}$$

4-ротор:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x_k} - \frac{\partial A^k}{\partial x_i}$$

Оператор Даламбера:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$$

4-швидкість:

$$x^k = (\vec{r}, ct)$$

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau} = \gamma \frac{dx^k}{dt} = (\vec{u}, u^4)$$

$$\vec{u} = \gamma \vec{v}$$

$u^4 = \gamma c$ – часова компонента;

$$u^k = (\gamma \vec{v}, \gamma c)$$

$$u^k u_k = (\gamma \vec{v})^2 - (\gamma c)^2 = -c^2 = inv$$

4-прискорення:

$$w^k = \frac{du^k}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx^k}{dt} \right)$$

$$w^k = (\vec{w}, w^4)$$

$$\vec{w} = \gamma^2 \dot{\vec{v}} + \frac{\gamma^4}{c^2} \vec{v} (\vec{v} \dot{\vec{v}})$$

$$u^k w_k = [u^k u_k = inv] = 0$$

Тобто 4-швидкість і 4-прискорення завжди ортогональні.

6. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської частинки.

Візьмемо дію у власній системі координат частинки: $S \sim \int_{(1)}^{(2)} d\tau$;

При переході до нерухомої системи маємо: $S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt$; де α – константа пропорційності;

Оскільки $S = \int_{(1)}^{(2)} L dt$, то $L = \alpha \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Для знаходження α розкладемо за малим параметром $\frac{V}{c} \ll 1$, тоді:

$$L \approx \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) = \alpha - \frac{\alpha}{2} \frac{V^2}{c^2}; \text{ враховуючи вид } L = \frac{mV^2}{2}, \text{ маємо } \alpha = -mc^2. \text{ Отже, остаточно:}$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Або, що те саме (не вносить поправки в варіацію дії): $L(\vec{r}, \vec{V}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - U(\vec{r})$

$$\text{Імпульс } \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \text{ енергія: } \varepsilon = \vec{p}\vec{V} - L = \frac{mV^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + U(\vec{r}) =$$

$$= \frac{mV^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + mc^2 \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + U(\vec{r}) = \frac{mV^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + m \frac{c^2 - V^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + U(\vec{r}) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + U(\vec{r}).$$

Функція Гамільтона: $H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + U(\vec{r})$.

7. Коваріантне рівняння руху.

Рівняння руху Ньютона не інваріантні відносно перетворень Лоренца і тому не можуть описувати рух зі швидкостями порівняними зі швидкістю світла. Виведемо рівняння, що застосовні в цьому випадку.

Введемо поняття 4-сили. $K^i = (\vec{K}, K^4)$ як

$$\begin{aligned} K^i &= m\vec{w}^i \\ u_i K^i &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Тому 4-сила ортогональна до чотири швидкості.

Компоненти 4-сили пов'язані з просторовими компонентами:

$$\vec{K} = m\vec{w} = \gamma m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}}$$

Підставляючи цей вираз в рівняння (1) одержимо:

$$u_i K^i = \frac{(\vec{u}\vec{F})}{1 + \frac{u^2}{c^2}} - \frac{cK^4}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}} = 0$$

Звідси визначаємо часову компоненту 4-сили:

$$K^4 = \frac{1}{c} \frac{(\vec{u}\vec{F})}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}}$$

Отже компоненти 4-сили (4-сили Мінковського) мають вигляд

$$K^i = (\gamma \vec{F}, \frac{\gamma}{c} (\vec{u}\vec{F}))$$

А рівняння руху набуває вигляд

$$\frac{dp_i}{dt} = K_i \quad - \text{це } i \text{ є коваріантне рівняння руху}$$

Просторові компоненти цього рівняння в граничному випадку (при малих швидкостях) переходить в рівняння Ньютона.

8. Загальні принципи побудови теорії поля. Елементарний заряд в класичній теорії поля.

Заряд і електричне поле — це два фізичні об'єкти, що нерозривно пов'язані один з одним. Заряд є джерелом поля, а поле, в свою чергу, має особливості (полюси) у вигляді зарядів. За сучасними уявленнями розміри протонів та нейтронів $\sim 10^{-13}$ см. Розміри електрона принаймні в 10^3 разів менші (експериментальні дані), тому є серйозне питання, пов'язане з масою спокою електрона.

- 1) Заряд існує у двох формах — позитивній та негативній.
- 2) Заряд квантується, будь-який заряд є кратний заряду електрона.

$$3) \text{ Відмінність у зарядах протона та електрона становить } \frac{|e^+|}{|e^-|} = 1.0 \pm 10^{-21}$$

- 4) Заряд зберігається, повний електричний заряд ізольованої системи є релятивістськи інваріантне число.

Власне теорію поля слід будувати виходячи з принципу найменшої дії. Еволюція поля здійснюється таким чином, що інтеграл дії набуває мінімального значення.

$\Phi(x^k)$ – скалярне поле.

$$S = \int [\Phi] = \int F(\Phi) d^4x$$

- 1) Принцип відносності – всі закони фізики діють так само у будь-якій системі ввідліку.

$$F(\Phi) = inv$$

- 2) Принцип локальності – інтеграл дії має бути одноточковою функцією поля.

$$F(\Phi(x^k)) \neq F(\Phi(x_1^k, x_2^i))$$

Принцип локальності – наслідок принципу близькодії(передача інформації зі скінченною швидкістю c)

3) $S \in \mathbb{R}$

9. Чотирипотенціал електромагнітного поля. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської зарядженої частинки в електромагнітному полі.

Дія для частинки, що рухається в електромагнітному полі складається з трьох частин: дія вільної частинки S_p ; дія, що описує зв'язок частинки з полем S_{pf} ; дія власне самого поля S_f . Будемо покищо розглядати, тільки перших 2 складові. Дія що характеризує частинку, вже відома і виражається як:

$$S_p = -mc^2 \int d\tau$$

Доданок, що характеризує взаємодію частинки з полем, не можна отримати тільки з міркувань інваріантності інтервалу. В результаті експериментальних даних приймають дію в вигляді:

$$S_{pf} = -\frac{e}{c} \int A_i dx^i, \text{ де } e - \text{заряд електрона, враховує властивості частинки, а } A_i - \text{так званий}$$

чотирипотенціал, характеризує властивості поля. Функції A_i беруться вздовж світової лінії («траєкторія» частинки в чотирипросторі). Три просторові компоненти 4-вектора A^i утворюють трьохвимірний вектор \vec{A} – векторний потенціал електромагнітного поля. Часова ж компонента є скалярним потенціалом φ . Таким чином $A^i = (\vec{A}, \varphi)$, $A_i = (\vec{A}, -\varphi)$

$$A_i dx^i = \vec{A} d\vec{r} - \varphi c dt = dt(\vec{A}\vec{v} - c\varphi)$$

Отже загальний вираз для дії, що враховує власне частинку та взаємодію її з полем:

$$S = \int dt \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{A}\vec{v} - c\varphi) \right]$$

Вираз, що стоїть під інтегралом дії є нічим іншим, як функцією Лагранжа:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}\vec{v} - e\varphi$$

Цей вираз відрізняється від виразу для функції Лагранжа вільної частинки тим, що він включає в себе доданки $\frac{e}{c} \vec{A}\vec{v} - e\varphi$, що враховують взаємодію заряду з полем.

Знаючи функцію Лагранжа можемо знайти імпульс:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

\vec{p} – імпульс власне частинки; $\frac{e}{c} \vec{A}$ – характеризує зміну імпульсу системи за рахунок взаємодії заряду з електро-магнітним полем;

Тепер можемо визначити функцію Гамільтона:

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$$

Але функція Гамільтона повинна бути виражена через імпульс, і таким чином остаточно будемо мати:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A})^2} + e\varphi,$$

де $e\varphi$ характеризує значення енергії системи за рахунок взаємодії заряду з електромагнітним полем.

10. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі.

Функція Лагранжа для електромагнітного поля:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e\varphi$$

Для малих швидкостей, тобто в класичній механіці, функція Лагранжа переходить в:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\varphi$$

Заряд, який знаходиться в полі не тільки піддається впливу зі сторони поля, але й сам змінює його. Але, коли заряд невеликий, впливом його на поле можна знехтувати. В даному випадку, розглядаючи рух в заданому полі можна вважати, що само поле не залежить ні від координат, ні від швидкості заряду. Точні умови, яким повинен задовольняти заряд для того, щоб він міг вважатися в указаному змісті малим, будуть виявлені надалі. Далі будемо виходити з рівнянь Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right] = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Похідна $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ є узагальненим імпульсом частинки. Далі пишемо:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c} \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \cdot \text{grad}\varphi$$

Використовуємо відому формулу векторного аналізу:

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \nabla) \vec{a} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b}$$

Використовуючи цю формулу до $\vec{A} \cdot \vec{v}$ і пам'ятаючи, що диференціювання по \vec{r} проходить при постійному \vec{v} , знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] - e \cdot \text{grad}\varphi.$$

Підставивши похідну в рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}] - e \cdot \text{grad}\varphi$$

Запишемо повну похідну вектор-потенціалу по часу:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}$$

Підставляючи формулу для повної похідної в рівняння Лагранжа, та провівши необхідні спрощення, отримаємо:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \nabla \varphi + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}]$$

Це рівняння руху частинки в електромагнітному полі. Зліва стоїть похідна від імпульсу по часу – сила, яка діє на заряд в електромагнітному полі, що складається з двох частин. Введемо напруженість електромагнітного поля \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}]$$

Множник при $\frac{\vec{v}}{c}$, у вищенаведеній формулі, діючий на одиничний заряд, називають напруженістю магнітного поля; позначимо її через \vec{H} .

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

Якщо в електромагнітному полі $\vec{E} \neq 0$, а $\vec{H} = 0$, то говорять про електричне поле. В протилежному випадку поле називають магнітним. Рівняння руху заряду в електромагнітному полі можна написати у вигляді:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]$$

Рівняння механіки інваріантні по відношенню до зміни знаку у часі, тобто до заміни майбутнього часу минулим. Це значить, що якщо можливий який-небудь рух, то можливий і обернений рух, при якому система проходить ті самі стани в оберненому напрямку. Але при заміні знаку у t потрібно змінити знак у \vec{H} .

Таким чином в електромагнітному полі якщо можливий рух в одному напрямку, то можливий і протилежний з протилежним полем.

11. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок. Фізичний зміст скалярного та векторного потенціала.

Ми знаємо, що електромагнітне поле є інваріантним відносно різних систем координат ($\vec{B} = \vec{B}'$). Нехай \vec{A} - векторний потенціал в «нештрихованій» системі координат. Тоді $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{f}(\vec{r}, t)$ - векторний потенціал у «штрихованій» системі відліку, де $\vec{f}(\vec{r}, t)$ - деяка векторна функція, вираз для якої буде знайдено нижче. Знаючи вираз поля через векторний потенціал і користуючись всім вищесказаним, можемо записати:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \vec{f}(\vec{r}, t)) \Rightarrow \text{rot}(\vec{f}(\vec{r}, t)) = 0$$

Для записаного виразу ротору функції $\vec{f}(\vec{r}, t)$ є тільки одне рішення: $\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \psi(\vec{r}, t)$, де $\psi(\vec{r}, t)$ - деяка скалярна функція.

Таким чином остаточно отримали вираз для перетворення векторного потенціалу:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \psi, \quad (*)$$

Для знаходження виразу скалярного потенціалу скористаємося співвідношенням для напруженості електричного поля

$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}' = -\text{grad} \Phi' - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \psi), \text{ а також формулою } (*) . \text{ Із написаного}$$

Тоді отримаємо:

$$-\vec{\nabla} \cdot \Phi = -\vec{\nabla} \cdot \Phi' - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \psi \Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Отже, як підсумок про потенціали, запишемо остаточні формули:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \psi$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Можна накласти на потенціали умову (оскільки вони визначені до певної довільної скалярної функції), тобто відкалібрувати потенціали.

Калібровка	Явний вигляд
Аксіальна	$A_k = 0; \vec{A} \perp \vec{B}$ (сим.)
Кулонова	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ Магнітостат.
Лоренцева	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
Гамільтонова	$\Phi' = 0$ Ел.поле відсут.

Слід відмітити, що калібровка $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$ – єдина калібровка, яка є інваріантом при переході до різних систем координат. Щодо зміни скалярного потенціалу, то його зміну будемо спостерігати лише в точці – так розумітимемо реальність поля.

Щодо фізичного змісту цих потенціалів, то тут можна сказати ось, що:

- векторний потенціал відповідає за зміну загального імпульсу системи і вираз для узагальненого імпульсу матиме вигляд: $\vec{P} = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \cdot \vec{A}$. Цей вираз отримується з дії

взаємодії частинки з полем - S_{PF} .

- Скалярний потенціал це є чисто енергетична характеристика електричного поля.

Одержується звідти, звідки ж і векторний потенціал. $E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e \cdot \phi$.

12. Тензор електромагнітного поля. Полярні і аксіальні вектори. Коваріантне рівняння руха заряду в електромагнітному полі.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$$

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left\{ -mc^2 d\tau + \frac{e}{c} A_k dx^k \right\}$$

$$\delta S = 0$$

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left\{ -mc^2 \delta d\tau + \frac{e}{c} \delta(A_k dx^k) \right\}$$

$$\text{інтервал: } ds = dx_k dx^k = -c^2 (d\tau)^2$$

$$\delta(dx_k dx^k) = -c^2 \delta(d\tau)^2$$

$$2dx_k \delta dx^k = -2c^2 d\tau \delta d\tau$$

$$\frac{dx_k}{d\tau} \delta dx^k = u_k \delta dx^k = -c^2 \delta d\tau$$

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m u_k \delta dx^k + \frac{e}{c} \delta A_k dx^k + \frac{e}{c} A_k \delta dx^k \right\} = \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m u_k + \frac{e}{c} A_k \right\} d\delta x^k +$$

$$+\int_{(1)}^{(2)} \frac{e}{c} A_k dx^k = \left\{ m u_k + \frac{e}{c} A_k \right\} \delta x^k \Big|_{(1)}^{(2)=0} - \int_{(1)}^{(2)} \delta x^k \left(m du_k + \frac{e}{c} dA_k \right) + \int_{(1)}^{(2)} \frac{e}{c} \delta A_k dx^k$$

Далі зробимо перепозначення усіх диференціалів і варіацій в останній формулі.

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m du_k \delta x^k + \frac{e}{c} dA_k \delta x^k - \frac{e}{c} \delta A_k dx^k \right\} = 0$$

помітимо, що

$$du_k = \frac{du_k}{d\tau} d\tau$$

$$dA_k = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\tau} d\tau = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} u_i d\tau$$

$$\delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$dx_k = u_k d\tau$$

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m du_k \delta x^k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} u_i d\tau \delta x^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \overset{i \leftrightarrow k, \uparrow}{u^k d\tau \delta x_i} \right\} = 0$$

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m du_k \delta x^k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} u_i d\tau \delta x^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k u^i d\tau \right\} = 0$$

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left\{ m du_k \delta x^k + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} u_i d\tau \delta x^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \delta x^k u_i d\tau \right\} = 0$$

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left\{ \frac{m du_k}{d\tau} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u_i - \frac{e}{c} \frac{\partial A^i}{\partial x^k} u_i \right\} \delta x^k d\tau = 0$$

$$\frac{m du_k}{d\tau} = \frac{e}{c} u_i \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right)$$

$$F^{ki} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right)$$

Отже, рівняння руху в коваріантному вигляді:

$$\frac{dp^k}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ki} u_i$$

Де тензор електромагнітного поля за класичним означенням електричного і магнітно полів:

$$| F^{ki} | = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$p^k = \left(\vec{p}, \frac{\mathcal{E}_k}{c} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Перший доданок останньої рівності змінює знак при інверсії координат. Другий – ні. Тому вектор електричного поля – **полярний вектор**, вектор магнітного (як і усі векторні добутки) – **аксіальний вектор**.

13. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля.

Розглянемо 4-вектор-потенціал е/м поля $A^k = (\vec{A}, \Phi)$. Він перетворюється як нормальний 4-вектор, згідно перетворень Лоренца для 4-векторів, тобто:

$$\begin{aligned} A'_x &= (A^1)' = \gamma(A^1 - \beta A^4) = \gamma(A_x - \beta\Phi); & A'_y &= A_y; \\ A'_z &= A_z; & (A^4)' &= \Phi' = \gamma(\Phi - \beta A_x). \end{aligned}$$

Або, у операторному представленні: $A'^k = \Lambda^k_i A^i$.

Тоді тензор е/м поля перетворюється за законом: $F'^{ki} = \Lambda^k_l \Lambda^i_m F^{lm}$. Тобто, для переходу між системами координат кожного разу треба множити три матриці 4x4. Отже:

$$\begin{aligned} B'_x &= F'^{23} = a'^2 b'^3 = a^2 b^3 = F^{23} = B_x & E'_x &= F'^{41} = a'^4 b'^1 = \gamma(a^4 - \beta a^1) \gamma(b^1 - \beta b^4) = \\ & & &= \gamma^2 (F^{41} - \beta F^{11} - \beta F^{44} + \beta^2 F^{14}) = \gamma^2 (F^{41} + \beta^2 F^{14}) \\ & & &= \gamma^2 (E_x + \beta^2 (-E_x)) = E_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_y &= F'^{31} = a'^3 b'^1 = a^3 \gamma(b^1 - \beta b^4) = \gamma(F^{31} - \beta F^{34}); & E'_y &= F'^{42} = \gamma(a^4 - \beta a^1) b^2 = \gamma(F^{42} - \beta F^{12}) = \\ &= \gamma(B_y + \beta E_y) & &= \gamma(E_y - \beta B_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_z &= F'^{12} = a'^1 b'^2 = \gamma(a^1 - \beta a^4) b^2 = \gamma(F^{12} - \beta F^{42}) & E'_z &= F'^{43} = \gamma(a^4 - \beta a^1) b^3 = \gamma(F^{43} - \beta F^{13}) = \\ &= \gamma(B_z - \beta E_y) & &= \gamma(E_z + \beta B_y) \end{aligned}$$

Тепер розглянемо швидкість таку, що $\vec{V} = (V, 0, 0)$ та розкладемо поля на компоненти – паралельні та перпендикулярні до напрямку руху: $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$, де $\vec{E}_{\parallel} = (E_x; 0; 0)$; $\vec{E}_{\perp} = (0; E_y; E_z)$; $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \dots$

$$\text{Тоді: } \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}; \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}; \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}]); \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{E}]).$$

Інваріанти об'єктів е/м поля:

- Об'єкт Φ є інваріантом сам по собі;
- Об'єкт A^k - інваріант $A^k A_k$;
- Об'єкт A^{ki} - інваріанти $A^k_k = A^{ki} g_{ki}$; $A^{ki} A_{ki}$; $A^{ki} A^{lm} \varepsilon_{kilm}$.

14. Чотири-вектор струму та рівняння неперервності.

Розглянемо систему з рухомих зарядів.

Запишемо густину заряду: $\rho(r, t) = \sum e_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t))$,

і відповідно густину струму:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \sum e_k v_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$



$$\begin{aligned} \text{Звідси: } \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial t} = \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}_k} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = - \sum e_k \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}_k} \vec{v}_k = - \sum e_k \vec{v}_k \nabla \delta = \\ &= |\nabla(\vec{v} f)| = \vec{v} \nabla f = - \sum e_k \nabla(\vec{v}_k \delta) = - \nabla \sum e_k \vec{v}_k \delta = - \nabla \vec{j} \end{aligned}$$

Отже $\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ – це і є рівняння неперервності.

В інтегральному вигляді: $\oint_S \vec{j} dS = -\frac{\partial}{\partial t} Q$ де $Q = \int_V \rho dV$

Рівняння неперервності можна записати у вигляді: $\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} = 0$

Тоді чотириривектор $j^k = (j_x, j_y, j_z, \rho c) = (\vec{j}, \rho c) = (\rho \vec{v}, \rho c) = \rho \frac{dx^k}{dt}$

Рівняння $\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$ або $j^k{}_{,k} = 0$ називається рівнянням неперервності в коваріантному вигляді.

15. Дія системи, що складається із зарядів і електромагнітного поля.

Нехай ми маємо систему, що складається з зарядів та електромагнітного поля.

Дія поля складається з S_p – дії заряду, S_{pf} – взаємодії заряду та поля, S_f – дії поля:

$$S = S_p + S_{pf} + S_f.$$

$$S_p = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau$$

$$S_{pf} = \sum_a \int \frac{e}{c} A_k dx^k = \frac{1}{c} \iint \rho dV A_k dx^k = \frac{1}{c^2} \int dV \int \rho A_k \frac{dx^k}{dt} c dt = \frac{1}{c^2} \int d^4x \rho A_k \frac{dx^k}{dt} = \frac{1}{c^2} \int d^4x A_k j^k$$

Залишилось знайти S_f . Дія повинна бути релятивістським інваріантом, локальною та дійснозначною.

$$S_f \sim \int_{(1)}^{(2)} d^4x \quad S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int_{(1)}^{(2)} d^4x F^{ik} F_{ik}$$

У теорії електромагнітного поля доданок S_p дії покладають рівним нулю. Це можна зробити завдяки тому, що дія визначена з точністю до константи. Отже, дія для окремої складової системи має вигляд:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} d^4x \left\{ \frac{1}{c^2} A_k j^k - \frac{1}{16\pi c} F^{ik} F_{ik} \right\} + \int_{(1)}^{(2)} mc^2 d\tau$$

Відповідно, для знаходження повної дії системи необхідно знайти суму по складовим.

16. Виведення рівнянь Максвелла в коваріантній формі з варіаційного принципу.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, якщо ми маємо систему, що задана дією

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(u_i, \dot{u}_i, \xi) d\xi, \text{ то виходячи з «принципу найменшої дії» (тобто знаходячи екстремум,}$$

прирівнюючи варіацію функціоналу до нуля $\delta S = 0$) отримаємо рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{u}_i} = 0$$

$$\text{Або, якщо } \vec{\xi} \text{ вектор, матимемо: } S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(u_i(\xi_k), \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}) d\vec{\xi}, \text{ звідки } \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{i,k}} = 0;$$

Для електромагнітного поля $S = \int_{(1)}^{(2)} \Lambda(A_i(x_k), \frac{\partial A_i}{\partial x_k}) d^4x$, і рівняння Лагранжа $\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} = 0$;

$\Lambda = \frac{1}{c^2} A_k j^k + \frac{1}{16\pi c} F_{lm} F^{lm}$, Знайдемо похідні, щоб записати рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} = \frac{1}{c^2} j^i$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} = \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} F_{lm} F^{lm} = \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ (A_{m,l} - A_{l,m}) \times (A^{m,l} - A^{l,m}) \} = \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ A_{m,l} A^{m,l} - A_{m,l} A^{l,m} - A_{l,m} A^{m,l} + A_{l,m} A^{l,m} \}$$

Так як m та l це німі індекси, то в 3 та 4 доданках можемо поміняти їх місцями:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_{i,k}} = 2 \frac{\partial}{\partial A_{i,k}} \{ A_{m,l} A^{m,l} - A_{m,l} A^{l,m} \} = 2 \{ 2 A^{i,k} - 2 A^{k,i} \} = -4 F^{ik}$$

Звідки рівняння Лагранжа: $\frac{1}{c^2} j^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{4\pi c} F^{ik} \right) = 0$, або $F^{ik}_{,k} = \frac{4\pi}{c} j^i$ – це рівняння в коваріантному вигляді являє собою пару рівнянь Максвелла.

Отримаємо іншу пару:

$e^{iklm} F_{ik,l} = e^{iklm} A_{k,il} - e^{iklm} A_{i,kl}$, роблячи 2 перестановки в другому доданку (отже значення тензору e^{iklm} не зміниться) $k \leftrightarrow i, i \leftrightarrow l$ отримаємо:

$$e^{iklm} F_{ik,l} = e^{iklm} A_{k,il} - e^{iklm} A_{k,li} = 0 \text{ – це і є друга пара рівнянь Максвелла.}$$

17. Виведення рівнянь Максвелла в трьохвимірній диференціальній формі з коваріантних рівнянь

Візьмемо тензор електромагнітного поля: $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Цей тензор – антисиметричний чотиритензор 2 рангу, отже, щоб його повністю визначити, достатньо вказати 10 компонент. Оскільки тензор антисиметричний, то діагональні компоненти дорівнюють 0. Визначимо ще 6 компонент:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \text{rot}_z \vec{A} = H_z & F_{13} &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\text{rot}_y \vec{A} = -H_y \\ F_{14} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{c \partial t} = E_x & F_{23} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \text{rot}_x \vec{A} = H_x \\ F_{24} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{c \partial t} = E_y & F_{34} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{c \partial t} = E_z \end{aligned}$$

Таким чином можна звести всі значення F_{ik} до таблиці:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Безпосередньою перевіркою (методом підстановки відповідних значень F_{ik}) можна переконатися, що для даного тензора виконується співвідношення:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

При чому дане співвідношення не є абсолютною тотожністю для довільного антисиметричного тензора F_{ik} лише тоді, коли $i \neq k \neq l$. Таким чином у даному виразі сховано 4 рівняння, для яких i, k, l набувають значень: (1,2,3); (1,2,4); (2,3,4); (1,3,4). Таким чином ми отримуємо першу пару рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Щоб отримати другу пару рівнянь скористаємося формулою: $F^{ik}_{,k} = \frac{4\pi}{c} j^i$

Будемо підставляти по черзі значення i та аналізувати результат. Нехай $i=1$:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j^x$$

Проробимо те саме для $i=2,3$. Отримані внаслідок таких дій три рівняння можна записати у векторній формі: $\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Підставивши $i=4$ отримаємо рівняння: $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$

Таким чином ми отримали систему:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

18. Інтегральна форма рівнянь Максвелла та її зв'язок з експериментальними законами електромагнетизма.

Запишемо $\nabla \vec{E} = 4 \cdot \pi \cdot \rho$, потім, домножимо ліву і праву частини рівності на елемент об'єму і проінтегруємо по всьому простору: $\int_V \nabla \vec{E} dV = 4 \cdot \pi \cdot \int_V \rho dV$. Скориставшись теоремою Остроградського – Гауса, одержимо $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4 \cdot \pi \cdot Q$. Аналогічно можемо одержати інтегральний вираз для магнітного поля: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$. Використаємо, так би мовити, динамічні

рівняння Максвелла: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Проробимо з ним подібну операцію, що й з попереднім записом тільки цього разу з площею:

$\iint_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \cdot \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ - магнітний потік через поверхню. Тепер, скориставшись

формулою Гріна перейдемо до інтеграла по контуру: $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, де

$$E_{ind} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} - \text{ЕРС.}$$

Таким чином отримали закон електромагнітної індукції Фарадея:

$$E_{ind} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Таким же чином можемо підійти до магнітної компоненти:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ робимо аналогічні операції, що й у випадку ел. компоненти:}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \iint \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \cdot \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Тепер, урахувавши, що інтеграл у прешому доданку з правої сторони є не що інше як вираз для струму, можемо впевнено сказати, що за відсутності зовнішніх полів, ми отримали закон повного струму: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot I.$

19. Межові умови для векторів електромагнітного поля.

З рівнянь Максвелла випливає, що:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \vec{n}_{12} = 4\pi\sigma$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \vec{n}_{12} = 0$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 4\pi \vec{j}$$

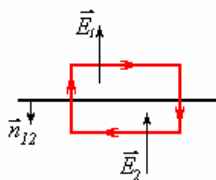
Наприклад, виведемо першу рівність:

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = 4\pi Q$$

Застосуємо теорему Стокса:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q$$



Можемо цей інтеграл розбити на 4 поверхні. По бокових поверхнях потік рівний нулю.

Залишиться:

$$\iint E_2 \vec{n}_{12} d\vec{S}_2 - \iint E_1 \vec{n}_{12} d\vec{S}_1 = 4\pi Q, \text{ і } S_1 = S_2 = S, \text{ а } \sigma = \frac{Q}{S}:$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \vec{n}_{12} = 4\pi\sigma$$

Аналогічним чином доводяться інші рівності.

20. Закон збереження енергії е/м поля. Теорема Умова-Пойнтінга.

Покажемо, що рівняння Максвелла містять навіть таку річ, як закон збереження енергії е/м поля. Для цього із системи рівнянь Максвелла виберемо два, які містять ротори:

$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ та $rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Скалярно помноживши перше рівняння на \vec{E} , друге на \vec{H} , віднімемо від першого друге:

$$\vec{E} \cdot rot\vec{H} - \vec{H} \cdot rot\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}). (*)$$

Використаємо той факт, що: $\vec{E} \cdot rot\vec{H} - \vec{H} \cdot rot\vec{E} = -div[\vec{E} \times \vec{H}]$.

Перетворимо другий доданок у правій частині(*) наступним чином: скористаємося тим, що $\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{D} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $\vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{B} \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ і тому $\frac{1}{c}(\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = \frac{1}{2c}(\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{D} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t})$, що можна записати у вигляді: $\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$.

Отже, $-div[\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, або, помноживши останнє рівняння на $\frac{c}{4\pi}$ і прийнявши до уваги вираз густини енергії е/м поля: $W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$:

$$\frac{\partial}{\partial t}W = -\vec{j} \cdot \vec{E} - div\vec{S},$$

де $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}]$ – вектор Умова-Пойнтінга, що виражає потік енергії е/м поля.

Виділивши певний об'єм V та провівши по ньому інтегрування отриманого рівняння балансу енергії, можна отримати остаточне формулювання теореми Умова-Пойнтінга:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_S \vec{S} d\vec{s} - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV,$$

що читається наступним чином: зміна е/м енергії в замкненому об'ємі може відбуватись за рахунок потоку енергії назовні або всередину, або за рахунок роботи над частинками, які знаходяться в цьому об'ємі.

21. Рівняння для електромагнітних потенціалів (рівняння д'Аламбера).

Запишемо рівняння яким задовільняють векторний і скалярний потенціали:

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

$$\vec{E} = -grad\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Підставляємо ці вирази в рівняння Максвела

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Виконавши перетворення одержимо

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - grad(div\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (1)$$

Лоренцова калібровка:

$$div\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Тоді рівняння (1) перепишеться у вигляді

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Підставивши вираз для \vec{E} в рівняння Максвела

$$div\vec{E} = 4\pi\rho$$

Одержимо

$$-\Delta\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = 4\pi\rho, \text{ або враховуючи Лоренцову калібровку:}$$

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

Остаточно ми одержали рівняння

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{або} \quad \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{і} \quad \square \phi = -4\pi\rho$$

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

\square – оператор Даламбера

Якщо скористатись 4-вимірними позначеннями де

$$A^k = (\vec{A}, \phi) \quad \text{а} \quad j^k = (\vec{j}, \rho c)$$

Одержимо

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i \partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j^k \quad \text{або} \quad \square A^k = -\frac{4\pi}{c} j^k$$

22. Стале електричне поле. Рівняння Лапласа та Пуассона та їх загальний розв'язок.

Ми будемо спиратись на два експериментальні закони, визначені для електростатичних полів.

Закон Кулона: сила взаємодії двох зарядів прямо пропорційна їх добутку, обернено пропорційна квадрату відстані між ними та направлена по лінії, що їх з'єднує. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$.

Принцип суперпозиції електростатичних полів: загальне поле дорівнює векторній сумі полів окремих частинок: $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = -\operatorname{grad} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \text{градієнт береться по } r, \text{ а не } r'$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} \phi(\vec{r})) = 0$$

Скористаємось деякими відомостями з курсу математичної фізики, а саме знаючи, що фундаментальний розв'язок оператора Лапласа задовільнює умові:

$$\Delta \varepsilon^{Ph}(x) = -4\pi\delta(x), \text{ де } \varepsilon^{Ph}(x) = \frac{1}{|x|}$$

В нашому випадку $x \equiv \vec{r} - \vec{r}'$, тоді:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\Delta \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\int_V \rho(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = 4\pi\rho(\vec{r})$$

Скалярний потенціал: $\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$. Уведений таким чином потенціал визначається з

точністю до довільної постійної величини, тому що для обчислення поля необхідно виконувати диференціювання. Рівняння $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ є умовою потенціальності поля, в такому полі робота з переміщення деякого заряду з точки 1 у точку 2 не залежить від шляху, по якому воно відбувалось. Підставивши вираз для потенціалу у рівняння $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, одержимо *рівняння Пуассона*: $\Delta\phi = -4\pi\rho$. Там де нема зарядів має місце *рівняння Лапласа*: $\Delta\phi = 0$.

23. Стале електричне поле на далеких відстанях. Дипольний і квадрупольний моменти.

Коли ми розглядаємо поле електростатичної системи на далеких відстанях, тобто де характерні розміри r_a системи значно менші за відстань до точки спостереження R , можемо вважати, що $r_a \ll R$.

Це дозволяє нам розкласти потенціал, що створюється деякою системою зарядів

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}'_i|} \text{ в ряд Тейлора.}$$

Для функції трьох змінних розклад в ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x_a - \Delta x_a) = f(x_a) + \sum_{a=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{1}{2} \sum_{a,\beta=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_\beta} \Delta x_a \Delta x_\beta + \dots$$

Розкладаючи таким чином обернене значення відстані до другого порядку отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}'|} &\approx \frac{1}{R} + \sum_{a=1}^3 \left(-\frac{x'_a}{R^3} \right) (-x'_a) + \frac{1}{2} \sum_{a,\beta=1}^3 \left(\frac{3x'_a x'_\beta}{R^5} - \frac{\delta_{a\beta}}{R^3} \right) (-x'_a)(-x'_\beta) = \\ &= \frac{1}{R} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}'}{R^3} + \frac{1}{2R^5} \sum (3x'_a x'_\beta - \delta_{a\beta} r'^2) x'_a x'_\beta \end{aligned}$$

Підставивши цей розклад в формулу для визначення потенціалу будемо мати:

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{q}{R} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}}{R^3} + \frac{1}{2R^5} \sum_{a,\beta=1}^3 Q_{a\beta} x'_a x'_\beta + \dots, \text{ де}$$

$$\vec{p} = q_i \vec{r}'_i - \text{дипольний момент;}$$

$$Q_{a\beta} = 3x'_a x'_\beta - \delta_{a\beta} r'^2 - \text{квадрупольний момент;}$$

При подальшому розкладанні отримаємо мультипольні моменти вищих порядків.

Для неперервно-розподілених зарядів необхідно власне не сумувати по частинках, а інтегрувати по всьому об'єму тіла:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

$$Q_{a\beta} = \int_V \rho(\vec{r}') (3x'_a x'_\beta - \delta_{a\beta} r'^2) dV'$$

24. Розклад електростатичного поля за мультиполями. Система зарядів у зовнішньому електростатичному полі

Розглянемо систему зарядів, яка знаходиться в зовнішньому електричному полі. Через $\varphi(\vec{r})$ тепер будемо позначати потенціал цього поля. Потенціальна енергія кожного з зарядів є $e_a \varphi_a(\vec{r}_a)$

Виберемо знову систему координат з початком де-небудь в середині системи зарядів, \vec{r}_a – радіус-вектор заряду e_a . Припустимо, що поле слабко змінюється в межах системи зарядів, тобто є по відношенню до цієї системи квазіоднорідним. Тоді ми можемо розкласти енергію U в ряд за степенями \vec{r}_a : $U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$

В цьому розкладі перший член: $U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a$, де φ_0 – значення потенціалу в початку координат. В даному наближенні енергія системи така, як ніби то всі заряди знаходяться в початку координат. Другий член розкладу: $U^{(1)} = (\text{grad} \varphi_0) \cdot \sum_a e_a \vec{r}_a$

Ввівши напруженість E_0 поля в початку координат і дипольний момент системи \vec{p} , маємо:

$$U^{(1)} = -\vec{p} \vec{E}_0$$

Повна сила, діюча на систему зарядів у зовнішньому полі є величина (з точністю до розглянутих членів):

$$\vec{F} = \vec{E}_0 \sum e_a + (\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_0))$$

Якщо повний заряд зникає, то 1-ий доданок зникає також і тоді:

$$\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}_0,$$

тобто сила визначається похідними напруженості поля (взятыми в початку координат). Повний же момент сил, діючий на систему є:

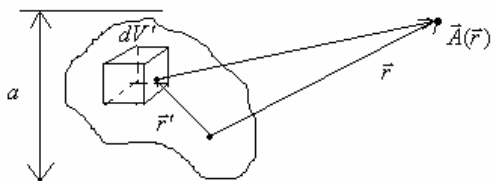
$$\vec{M} = \sum [\vec{r}_a \cdot e_a \vec{E}_a] = (\vec{p} \cdot \vec{E}_0)$$

тобто визначається самою напруженістю поля.

25. Стале магнітне поле. Рівняння Лапласа та Пуасона та їх загальний розв'язок.

Почнемо з того, що запишемо систему рівнянь Максвелла для маг. поля: $\nabla \vec{B} = 0$; $\nabla \times \vec{B} = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \vec{j}$. Знаючи вираз вектора магнітної індукції через векторний потенціал,

можемо записати $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, звідси - $\Delta \vec{A} = -\frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \vec{j}$. Це є рівняння Пуасона. Коли права частина рівняння зануляється, то це є рівняння Лапласа. Розв'язок рівняння Пуасона для магнітного поля знаходиться аналогічним способом, що й для електричного поля. З тією лиш відмінністю, що у ел. поля фігурують заряди, тут же фігуруватимуть контури зі струмом. Так як будь-який струм ми представляємо як потік зарядів, то порівняння з ел. полем – є цілком виправданим. Отже запишемо загальний розв'язок даного рівняння: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$. Всі необхідні, так би мовити, пояснення щодо формули на наведеному малюнку.



26. Векторний потенціал сталого магнітного поля. Магнітний момент у зовнішньому магнітному полі. Гіромагнітне відношення.

- $\text{div} \vec{B} = 0$, отже можна сказати, що $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, де \vec{A} – деяке векторне поле, що називається векторним потенціалом і, оскільки $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, то з рівнянь Максвелла $\vec{B} = \frac{1}{c} \oint \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$.

- Розглянемо *магнітостатичну* систему і знайдемо її поле на *великих* відстанях: \vec{r} – координата точки спостереження, \vec{r}' – координата всередині системи. На великих відстанях означає, що: $\frac{r'}{r} \ll 1$. Як завжди, $\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, але хто так інтегрує? Якщо вже на великій

відстані, то розкладемо: $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$. Тоді: $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int_V \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \vec{r}) dV'$.

Розглянемо ці інтеграли окремо.

Інтеграл векторної величини не береться, тому, як завжди, помножимо перший інтеграл на деякий сталий вектор \vec{b} і тоді проінтегруємо:

$\vec{b} \cdot \vec{I}_1 = \int_V \vec{b} \cdot \vec{j}' dV'$. Враховуючи статичність задачі ($\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \vec{j} = 0$), розглянемо вираз:

$$\nabla'(\vec{j}'(\vec{b} \cdot \vec{r}')) = (\nabla' \vec{j}')(\vec{b} \cdot \vec{r}') + \vec{j}' \cdot \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}') = \vec{j}' \cdot \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}') = \vec{j}' \cdot \vec{b}.$$

Тобто, $\vec{b} \cdot \vec{I}_1 = \int_V \vec{b} \cdot \vec{j}' dV' = - \int_V \nabla'(\vec{j}'(\vec{b} \cdot \vec{r}')) dV' = - \oint_S j'_n(\vec{b} \cdot \vec{r}') dS = 0$ бо $j'_n = 0$ на великих відстанях.

Отже, $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{cr^3} \int_V \vec{j}'(\vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{r}) dV'$. Розглянемо підінтегральний вираз:

$$\vec{j}'(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} + \frac{1}{2} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} = \frac{1}{2} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} + \frac{1}{2} [\vec{r}' \times [\vec{j}' \times \vec{r}]].$$

Інтеграл знову розбито на два, розглянемо перший з них:

$\vec{I}_2 = \frac{1}{2} \int_V \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} dV'$ - знову помножуємо на деякий сталий \vec{b} і розглядаємо підінтегральний вираз:

$$\vec{b} \{ \vec{j}'(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}'(\vec{r} \cdot \vec{j}') \} = (\vec{b} \cdot \vec{j}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{j}') = \vec{j}' \{ \vec{b}(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \vec{r}(\vec{b} \cdot \vec{r}') \} \rightarrow$$

Врахуємо, що: $\vec{b} = \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}')$ та $\vec{r} = \nabla'(\vec{r} \cdot \vec{r}')$, тоді:

$$\rightarrow \vec{j}' \{ \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \nabla'(\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{b} \cdot \vec{r}') \} = \vec{j}' \cdot \nabla' \{ (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') \} = \nabla' \{ \vec{j}' \cdot (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') \}, \text{ отже:}$$

$$\vec{b} \vec{I}_2 = \frac{1}{2} \int_V \nabla' \{ \vec{j}' \cdot (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') \} dV' = \oint_S j'_n \cdot (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') dS = 0 \text{ бо } j'_n = 0 \text{ на великих відстанях.}$$

Таким чином: $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{2cr^3} \int_V [\vec{r} \times [\vec{j}' \times \vec{r}']] dV' = \frac{- \left(\frac{1}{2c} \int_V [\vec{j}' \times \vec{r}] dV' \right) \times \vec{r}}{r^3}.$

Величину $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r} \times \vec{j}'] dV'$ називають дипольним магнітним моментом. $\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}.$

У постійному зовнішньому магнітному полі:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j}, \text{ звідки:}$$

$$W = - \sum_k \frac{e_k}{c} \vec{A} \cdot \vec{V}_k - \text{тобто заряди } e_k \text{ рухаються зі швидкостями } V_k \text{ у векторному потенціалі } \vec{A}.$$

Поле – магнітне і постійне, отже, з того, що $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ випливає, що $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B} \times \vec{r}]$

Тоді:

$$W = - \sum_k \frac{e_k}{c} \vec{A} \cdot \vec{V}_k = - \sum_k \frac{e_k}{2c} [\vec{B} \times \vec{r}_k] \cdot \vec{V}_k = - \sum_k \frac{e_k}{2c} [\vec{r}_k \times \vec{V}_k] \cdot \vec{B} = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad \text{Це енергія магнітного}$$

моменту у зовнішньому магнітному полі.

- Розглянемо деяку систему частинок, для яких $\frac{e_k}{m_k} = \text{const}$. Магнітний момент для неї:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_k e_k [\vec{r}_k \times \vec{V}_k] = \frac{e}{2cm} \sum_k m_k [\vec{r}_k \times \vec{V}_k] = \frac{e}{2cm} \vec{L}, \text{ де } \vec{L} - \text{момент к-ті руху системи.}$$

Число $\gamma = \frac{e}{2cm}$ називається гіромагнітним відношенням. Це коефіцієнт пропорційності між магнітним моментом та моментом імпульсу.

27. Плоскі електромагнітні хвилі. Загальний розв'язок хвильового рівняння.

Основні властивості.

Для плоских хвиль всі характеристики залежать лише від x . Під $u(x, t)$ будемо розуміти якусь характеристику поля: ϕ або A_i . Хвильове рівняння має вигляд: $\square u(x, t) = 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0$$

Виконаємо заміну: $\begin{matrix} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\xi - \eta}{2c} \end{matrix}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Тепер хвильове рівняння матиме вигляд: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Проінтегрувавши маємо: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\eta)$.

Проінтегрувавши ще раз, знаходимо, що:

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Розв'язок $u \equiv f$ описує хвилю, що біжить вздовж напрямку зростання x із швидкістю c , оскільки рівняння її хвильового фронту $x - ct = \text{const}$. Розв'язок $u \equiv g$ описує хвилю, що біжить у протилежному напрямку. Оберемо перший розв'язок і обчислимо поля у цій хвилі. Для цього запишемо рівняння Максвелла для вільного електромагнітного поля:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Врахуємо те, що всі величини залежать лише від $\xi = x - ct$. Тоді диференціальні операції будуть виглядати так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \vec{\nabla} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \vec{n} = (1; 0; 0)$$

Тепер отримаємо правила обчислення ротора та дивергенції векторної величини $\vec{f}(\xi)$:

$$\text{div } \vec{f} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{f}) \quad \text{rot } \vec{f} = [\vec{\nabla} \times \vec{f}] = \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{n} \times \vec{f}]$$

Застосуємо ці правила для системи рівнянь Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{B}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{E} - \vec{B}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{B} + \vec{E}) = 0$$

Оскільки ми шукаємо динамічний розв'язок, то вважаємо \vec{E} та \vec{B} змінними величинами (тобто такими, похідні яких не дорівнюють нулю: $\frac{\partial}{\partial \xi} \vec{E} \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \vec{B} \neq 0$). Тоді очевидні такі співвідношення (бо вектор \vec{n} сталий):

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{E} = \vec{B}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$$

Звідси видно, що електричне та магнітне поля ортогональні до напрямку поширення хвилі. Тому електромагнітні хвилі називають *поперечними*. Потік енергії плоскої хвилі (вектор Умова–Пойтінга) визначається так:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] = c \cdot w \cdot \vec{n} \quad w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi},$$

де w – густина енергії поля. Тепер отримаємо зв'язок між магнітним полем та векторним потенціалом. Для цього слід помітити, що виходячи із вище приведених правил координатне диференціювання може бути замінене на часове: $\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}$. Тоді

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{1}{c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\frac{[\vec{n} \times \dot{\vec{A}}]}{c} = \frac{[\dot{\vec{A}} \times \vec{n}]}{c}.$$

28. Чотиривимірний хвильовий вектор і поздовжній ефект Доплера

Рівняння фронту хвилі: $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const} = \text{inv}$. Розпишемо його: $k_x x + k_y y + k_z z + \frac{\omega}{c}(-ct) = \text{inv}$.

Якщо позначити $k^i = \left(k_x; k_y; k_z; \frac{\omega}{c}\right)$ як чотиривимірний хвильовий вектор, то рівняння фронту хвилі приймає вигляд: $k^i x_i = \text{const}$.

Тепер розглянемо зміну хвильового вектора при переході в іншу систему відліку. Для поздовжнього ефекту Доплера розглянемо поширення хвилі вздовж осі x і нехай система K' рухається відносно початкової системи K у тому ж напрямку із швидкістю V .

$$k^i = \left(\vec{k}, \frac{\omega}{c}\right); \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}; \quad \vec{n} \equiv \vec{e}_x$$

Застосуємо до хвильового вектора перетворення Лоренца:

$$k'^1 = \gamma \left(k^1 - \beta \frac{\omega}{c}\right)$$

$$k'^2 = k^2$$

$$k'^3 = k^3$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)' = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k^1\right)$$

Тепер врахуємо, що $\vec{k} \left(\frac{\omega}{c}; 0; 0\right)$. Тоді $\frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} (1 - \beta)$ або $\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} = \omega' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}$.

У нерелятивістському випадку $\frac{V}{c} \ll 1$: $\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{c}\right)$

Щоб отримати формули для руху у протилежному напрямі, потрібно лише замінити V на $-V$. Тоді отримаємо відповідні формули:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \quad \omega = \omega' \left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

29. Хвильовий 4-вектор і поперечний ефект Доплера

Розглянемо розповсюдження плоскої електромагнітної хвилі: $U_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, де U_0 - значення амплітуди вектора \vec{E} , або вектора \vec{H} .

Фронт хвилі описується рівнянням, яке характеризує сталість фази, а саме: $\omega t - \vec{k}\vec{r} = \text{const}$

Фаза є скаляром, і тому не залежить від системи відліку, тобто є інваріантом перетворення:

$$k_x x + k_y y + k_z z - \frac{\omega}{c} ct = \text{const}.$$

Цей вираз є добутком двох 4-векторів $x_i = (x, y, z, -ct)$ та $k^i = \left(k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c}\right)$ – хвильовий 4-вектор. Як і будь-який 4-вектор при переході до іншої інерціальної системи відліку, він перетворюється згідно перетворенням Лоренца.

Розглянемо перехід від системи K , до K' . Причому вектор \vec{k} напрямлений під кутом θ до осі OX (відповідно θ' до OX'), і $k_z = 0$; Тоді маємо:

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0, \frac{\omega}{c}\right)$$

$$k'^i = \left(\frac{\omega'}{c} \cos \theta', \frac{\omega'}{c} \sin \theta', 0, \frac{\omega'}{c}\right)$$

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} k_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ або переписавши в вигляді: } \omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

Ця формула і показує нам наявність ефекту Доплера.

Для випадку, коли $\theta = \frac{\pi}{2}$ ефект Доплера є поперечним. (Хвиля випромінюється

перпендикулярно), тоді формула для вираження частоти має вигляд: $\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$;

30. Червоний зсув

Для оцінки величини червоного зсуву скористаємося результатами зміни частоти внаслідок ефекту Доплера:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

Рівняння Хаббла:

$$\frac{dR}{dt} = HR, \text{ де } H - \text{ стала Хаббла. } R - \text{ масштабний параметр.}$$

Закон ілюструє розширення Всесвіту: чим далі об'єкти знаходяться від нас тим швидше вони віддаляються. Коли досліджуються об'єкти дуже віддалені від спостерігача $\cos \theta \approx 0$ і зсув по частотам:

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\text{Таким чином: } \frac{\Delta \omega}{\omega} \approx -\beta, \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \beta$$

$$\text{Використавши закон Хаббла маємо: } v = HR \Rightarrow R = \frac{v}{H} = \frac{c}{H} \frac{v}{c} = \frac{c}{H} \beta = \frac{c}{H} \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

Отже ми можемо оцінювати відстань до об'єктів, досліджуючи спектри випромінювання відомих елементів і порівнюючи з еталоном.

31. Сферичні хвилі. Потенціали спізнення та випередження.

Сферичною називається хвиля, потенціал якої та інші фізичні характеристики залежать лише від часу та відстані до точки спостереження. Запишемо хвильове рівняння: $u = u(r, t)$

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad u = u(r, t) \text{ - сферична хвиля. Виходячи з рівняння, запишемо}$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді $u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$.

Підставивши у рівняння одержимо: $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r, t)}{r} \right) \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{v(r, t)}{r} \right) = 0.$

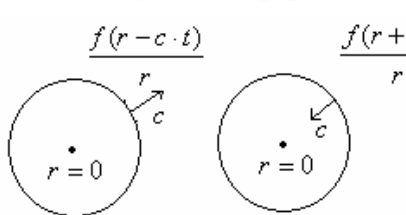
Провівши диференціювання та спростивши вираз, одержимо:

$$\frac{v_{rr}}{r} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{v_{tt}}{r} = 0;$$

Домноживши ліву і праву частини рівняння на r , отримаємо:

$$v_{rr} - \frac{1}{c^2} \cdot v_{tt} = 0. \text{ Це рівняння має такий же вигляд як і рівняння для плоскої хвилі, а тому}$$

скориставшись відомих виразом та вищевведеною заміною для хвильової функції, знайдемо повний вираз для сферичної хвилі:



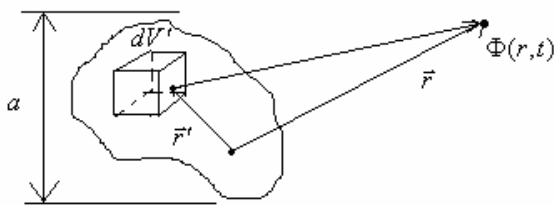
$$u(r, t) = \frac{f(r - c \cdot t)}{r} + \frac{f(r + c \cdot t)}{r}.$$

Загальний вираз матимемо:

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_0}{r} \cdot e^{i \cdot k \cdot r - i \cdot \omega \cdot t}.$$

Запишемо рівняння Д'Аламбера: $\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$ Як вище було доведено, функція, що

задовільняє цьому рівнянню має вигляд: $\Phi(r, t) = \frac{u(r - c \cdot t)}{r} = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$



Верхній вираз записаний для початку координат, якщо ж точка знаходиться не в початку коорд., то слід вищезаписану формулу переписати таким чином:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{f\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В дискретному випадку, коли потенціал створюється точковими зарядами, отримаємо

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_k \frac{f_k\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'_k|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|}. \text{ У випадку неперервного розподілу зарядів, отримаємо такий вигляд:}$$

$\Phi(\vec{r}, t) = \int_V dV' \frac{f\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Якщо записати розв'язок рівняння Д'Аламбера для плоскої хвилі

($\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$) та порівняти з виглядом вищезаписаного потенціала, то стане зрозумілим фізичний зміст функції f - густина ел. заряду(у випадку неперервного розподілу заряду). А тому можемо записати остаточну формулу:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Аналогічним способом отримаємо вираз для векторного потенціала:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \cdot \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \text{ Для оберненої хвилі одержимо подібні вирази:}$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \cdot \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Отримані вирази для потенціалів називають потенціалами спізнення та потенціалами випередження(у випадку оберненої хвилі). Очевидно віднімання від часу у потенціалі спізнення деякої величини призводить до його зменшення, а отже хвиля запізнюватиметься. Як видно з малюнка, що демонструє поширення сферичної хвилі, потенціал спізнення характеризує не що інше, як поширення від центру.

32. Потенціали Льєнара-Віхерта.

З міркувань, що в процесі руху заряду електромагнітному полю потрібен час на те, щоб досягти точки спостереження, вводять *потенціали Льєнара-Віхерта*.

Перепишемо радіус-вектор наступним чином:

$$R(t') = R\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

Беремо більш ранній момент часу і врахуємо, що відстань зменшилася:

$$R(t) = R(t') - \vec{v} \frac{\vec{R}(t')}{|\vec{R}(t')|} \Delta t' = R(t') - \vec{v} \frac{\vec{R}(t')}{|\vec{R}(t')|} \frac{|\vec{R}(t')|}{c} = R(t') - \frac{\vec{v} \vec{R}(t')}{c}$$

Підставляємо отримане значення у вираз для закон Кулона:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(t)} = \frac{q}{R - \frac{\vec{v} \vec{R}}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R}{c}}$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R - \frac{\vec{v} \vec{R}}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{R}{c}}$$

Вектор-потенціал пов'язаний зі скалярним потенціалом, очевидно з класичного означення вектору-потенціалу, наступним чином:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c} \Phi(\vec{r}, t)$$

Це і є *потенціали Льєнара-Віхерта*.

33. Електричне та магнітне поле точкового заряду, що рухається довільним чином.

Введемо наступні позначення: \bar{r} - розташування точки спостереження; $\bar{r}'_0(t)$ - координати заряду, $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'_0(t)$ - відстань від заряду до точки спостереження, t - час у системі координат частинки, t' - точки спостереження.

Для початку розглянемо: $\bar{R}^2 = R^2$, $\bar{R} \frac{\partial \bar{R}}{\partial t'} = R \frac{\partial R}{\partial t'}$;

крім того, $\frac{\partial \bar{R}}{\partial t'} = -\frac{\partial \bar{r}'_0}{\partial t'} = -\frac{d\bar{r}'_0}{dt} = -\bar{V}$, тоді, виражаючи із попереднього, отримуємо:

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\bar{R}}{R} \frac{\partial \bar{R}}{\partial t'} = -\bar{V} \frac{\bar{R}}{R} = -\bar{V} \cdot \bar{n}. (*)$$

Крім того, введемо до розгляду поняття ефективної відстані, що відрізняється від R на величину, що характеризуватиме відстань на яку частинка наближається до точки спостереження за час споглядання:

$$S = R - \frac{\bar{V} \cdot \bar{R}}{c} = R(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n}). (**)$$

Основна задача:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = -\nabla_t \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Big|_{t'}, \quad \bar{B}(\bar{r}, t) = \nabla_t \times \bar{A} \Big|_{t'}.$$

Для її розв'язку необхідно зв'язати між собою диференціальні операції в різних системах координат. Зробимо це:

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'_0(t), \quad R = c(t - t'). \quad \frac{\partial R}{\partial t} = c - c \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\bar{V} \cdot \bar{n} \frac{\partial t'}{\partial t}, \text{ де використано } (*). \text{ Із рівності } c - c \frac{\partial t'}{\partial t} = -\bar{V} \cdot \bar{n} \frac{\partial t'}{\partial t} \text{ отримаємо } \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{c}{c - \bar{V} \cdot \bar{n}} = \frac{1}{1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n}} \cdot \frac{R}{S} = \frac{R}{S}, \text{ де використано } (**). \text{ Отже}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{S} \frac{\partial}{\partial t'}}.$$

Крім цього, очевидно, $\nabla_t = \nabla_{t'} + \nabla t' \frac{\partial}{\partial t}$. Щоб визначити цей перехід, знайдемо $\nabla t'$:

$$-c \nabla t' = \nabla R = \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} + \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial \bar{R}} = \bar{n} + \nabla t' \frac{\partial R}{\partial t'} = \bar{n} - \nabla t' \cdot (\bar{V} \cdot \bar{n}). \text{ Із рівності першого і останнього виразів знаходимо } \nabla t' = -\frac{\bar{n}}{c(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n})} \cdot \frac{R}{R} = -\frac{\bar{R}}{cS}. \text{ Отже,}$$

$$\boxed{\nabla_t = \nabla_{t'} - \frac{\bar{R}}{cS} \frac{\partial}{\partial t}}.$$

Нами був знайдений зв'язок між диференціальними операторами у різних системах координат. Використовуючи цей зв'язок та враховуючи, що $\Phi = \frac{q}{S}$; $\bar{A} = \frac{\bar{\beta}q}{S}$, перетворимо розв'язок основної задачі до його вигляду у точці спостереження.

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}, t) &= -\nabla_t \left(\frac{q}{S} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\beta}q}{S} \right) = \frac{q}{S^2} \nabla_{t'} S - \frac{q}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\beta}}{S} \right) = \frac{q}{S^2} \left\{ \nabla_{t'} S - \frac{\bar{R}}{cS} \frac{\partial S}{\partial t'} \right\} - \frac{q}{c} \cdot \frac{R}{S} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\bar{\beta}}{S} \right) = \\ &= \frac{q}{S^2} \left\{ \nabla_{t'} S - \frac{\bar{R}}{cS} \dot{S} \right\} - \frac{q}{c} \cdot \frac{R}{S} \cdot \left\{ \frac{\dot{\bar{\beta}}}{S} - \frac{\bar{\beta} \dot{S}}{S^2} \right\} = \frac{q}{S^2} \left\{ \nabla_{t'} S - \frac{\bar{R}}{cS} \dot{S} - \frac{R}{c} \frac{\dot{\bar{\beta}}}{\bar{\beta}} + \frac{R}{c} \frac{\bar{\beta} \dot{S}}{S} \right\} = \frac{q}{S^2} \left\{ \nabla_{t'} S - \frac{R \dot{S}}{cS} (\bar{n} - \bar{\beta}) - \frac{R}{c} \frac{\dot{\bar{\beta}}}{\bar{\beta}} \right\} \\ \nabla_{t'} S &= \bar{n} - \bar{\beta} \quad (\text{використано } (**)); \end{aligned}$$

$\frac{\dot{S}}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t'} = \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} - \frac{1}{c} \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{R}} = -\frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{c} - \frac{\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}}{c} + \beta^2 = -\vec{\beta} \cdot \vec{n} - \frac{\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}}{c} + \beta^2$. Підставляючи ці два вирази у формулу для поля, отримуємо:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{S^2} \left\{ \vec{n} - \vec{\beta} - \frac{R}{S} (\vec{n} - \vec{\beta}) \left(-\vec{\beta} \cdot \vec{n} - \frac{\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}}{c} + \beta^2 \right) - \frac{R}{c} \dot{\vec{\beta}} \right\} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \text{ Тобто, розіб'ємо отриманий}$$

вираз на дві складові, що відповідатимуть квазістаціонарному полю (\vec{E}_1) та полю випромінювання (\vec{E}_2). У \vec{E}_1 увійдуть складові, що не містять похідної $\dot{\vec{\beta}}$, у \vec{E}_2 - складові з $\dot{\vec{\beta}}$. Отже,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{q}{S^2} \left\{ \vec{n} - \vec{\beta} - \frac{R}{S} (\vec{n} - \vec{\beta}) (\beta^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right\} = \frac{qR}{S^3} (\vec{n} - \vec{\beta}) \left\{ \frac{S}{R} - (\beta^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \right\} = \frac{qR}{S^3} (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \\ &\times \left\{ \frac{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})}{R} - \beta^2 + \vec{\beta} \cdot \vec{n} \right\} = \frac{qR}{S^3} (\vec{n} - \vec{\beta}) \{ 1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n} - \beta^2 + \vec{\beta} \cdot \vec{n} \} = \frac{qR}{S^3} (\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2) \\ \vec{E}_2 &= \frac{q}{S^2} \left\{ \frac{R}{cS} (\vec{n} - \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} - \frac{R}{c} \dot{\vec{\beta}} \right\} = \frac{qR}{cS^3} \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}) - S \dot{\vec{\beta}} \} = \frac{qR}{cS^3} \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) (\dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R}) - (R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) \dot{\vec{\beta}} \} = \\ &= \frac{qR}{cS^3} \left[\vec{R} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right] = \frac{q}{cR} \cdot \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \end{aligned}$$

Отже, остаточно:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{R^2} \cdot \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} + \frac{q}{c^2 R} \cdot \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3}$$

34. Електромагнітне поле точкового заряду, що рівномірно рухається.

Скористаємося формулами для значення електромагнітного поля, що створюється при русі зарядженої частинки довільним чином. (див. питання 34)

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \frac{v^2}{c^2})}{s^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 s^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) \times \dot{\vec{v}} \right] \right] \quad (1)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{R} [\vec{R} \times \vec{E}]$$

де q-заряд частинки, $s = R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}$

Якщо точковий заряд рухається рівномірно, тоді $\vec{v} = const$, а $\dot{\vec{v}} = 0$

Звідки другий доданок в формулі (1) рівний нулю і формулу (1) можна записати як

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \frac{v^2}{c^2})}{s^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right)$$

Отже електричне поле залежить лише від абсолютного значення швидкості і на великій відстані змінюється як $\frac{1}{R^2}$. Тобто у хвильовій зоні напруженості електричного і магнітного

полів пропорційні $\frac{1}{R^2}$. Це означає, що абсолютна величина вектора Умова-пойтінга

пропорційна $\frac{1}{R^4}$. Помноживши його на елемент поверхні $R^2 d\Omega$ і проінтегрувавши по тілесному кути $\Omega = 4\pi$ одержимо кількість енергії, яка щосекунди проходить через сферу радіуса R .

Зробивши наведені вище оцінки бачимо, що ця величина буде пропорційна $\frac{1}{R^2}$

Тобто чим більшого радіуса сферу ми візьмем, тим меншим буде загальне значення енергії, яка через неї пройшла.

А це суперечить закону збереження енергії. Тому ми маємо зробити висновок, що і перший доданок у формулі (1) внеску в поле випромінювання не дає.

35. Випромінювання електромагнітних хвиль точковим зарядом. Хвильова зона. Кутовий розподіл випромінювання.

На достатньо великих відстанях ми можемо розкласти поле по плоским хвилям, але для цього необхідно, щоб довжина хвилі випромінювання була значно меншою за відстань на яку поширюється хвиля. Цю область простору називають хвильовою зоною.

Підкріпимо це математичними викладками:

$$\vec{A} = \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{H}$$

$$H_\omega = \text{rot} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\vec{j} e^{i\omega t'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dt = \text{rot} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{\vec{j} e^{i\omega t} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dt$$

Якщо $k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| \gg 1$, то при розкладі знаменника підінтегрального виразу по малому параметру $\frac{r'}{r}$, і послідуєчій дії ротора, ми прийдемо до виразу поля плоскої хвилі.

Спираючись на закон збереження енергії, можемо сказати, що у хвильовій зоні ($\lambda \ll R$) першим доданком в виразі для напруженості поля можна знехтувати.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^3} - \text{поле випромінювання.}$$

$$dI = \frac{dI}{ds} ds = \frac{d^2 \varepsilon}{dtds} R^2 d\Omega = |\vec{S}| R^2 d\Omega; \quad \frac{dI}{d\Omega} = |\vec{S}| R^2; \quad \vec{S} = \frac{4\pi}{c} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n};$$

$$\text{Тоді } \frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2}{c^2 R^2} \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]]^2}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^6} R^2 = \frac{q^2}{4\pi c^2} \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]]^2}{(1 - \vec{\beta} \vec{n})^6} - \text{вираз для діаграми}$$

направленості випромінювання.

36. Випромінювання точкового заряду, що рухається прямолінійно. Формула Лармора. Діаграма направленості.

Якщо заряд, що рухається прискорено, спостерігати в системі відліку, в якій його швидкість можна вважати малою, порівняно зі швидкістю світла, то в цій системі відліку доданок поля, що залежить від прискорення набуває вигляду:

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{запізн}}, \quad \text{де } \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

Миттєвий потік енергії визначається вектором Умова-Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a|^2 \vec{n}$$

Звідси потужність, що випромінюється в одиницю тілесного кута:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2$$

Або, якщо позначити кут між прискоренням та напрямом як θ :

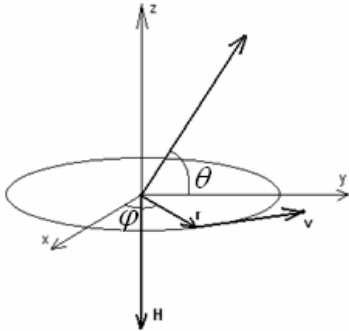
$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta$, отже маємо кутову залежність потужності на тілесний кут, що і характеризує діаграму направленості випромінювання (в нерелятивістському випадку). З цієї ж формули бачимо, що випромінювання поляризовано в площині векторів $\dot{\vec{v}}$ та \vec{n} .

Повна потужність випромінювання визначається шляхом інтегрування залежності по всім кутам:

$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}$ – це і є формула Лармора для нерелятивістського заряду, що рухається з прискоренням.

37. Циклотронне та синхротронне випромінювання точкового заряду. **Діаграма направленості**

За модель циклотронного і синхротронного випромінювання приймаємо рух частинки в постійному магнітному полі.



Радіус орбіти \vec{r} і циклічна частота ω_0 виражаться через напруженість поля \vec{H} і швидкість частинки \vec{v} формулами:

$$r = \frac{mc v}{e H \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{e H}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Повна інтенсивність випромінювання по всіх напрямках визначиться за формулою:

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \text{ впливає з загальної теорії випромінювання зарядженої частинки.}$$

Ми ставимо перед собою мету знайти кутовий розподіл інтенсивності, при цьому нас цікавить інтенсивність усереднена по періоду. Виберемо систему координат таким чином, щоб площина обертання співпадала з площиною OXY. \vec{k} -вектор – напрямок реєстрації випромінювання. Магнітне поле спрямоване в напрямку, протилежному до напрямку осі OZ. Прискорення \vec{a} виражаємо через поле \vec{H} і швидкість \vec{v} згідно з рівняннями руху:

$$\vec{a} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} [\vec{v} \times \vec{H}]$$

Ми знаємо формулу для кутового розподілу інтенсивності випромінювання, яка витікає з загальної теорії випромінювання рухомого заряду:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\vec{a}\vec{k})(\vec{v}\vec{a})}{c \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^5} + \frac{\vec{a}^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{k}\vec{a})^2}{\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{k}}{c}\right)^6} \right\} d\Omega$$

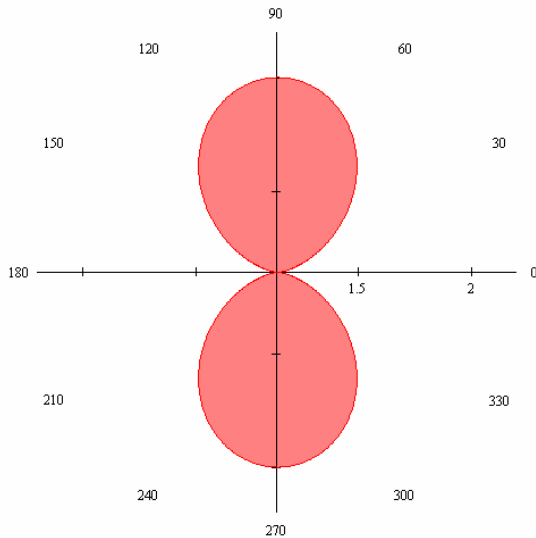
Підставивши \vec{a} та виконавши усереднення по періоду (інтегруємо по φ від 0 до 2π і ділимо на $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) отримаємо розподіл ігтенсивності по тілесних кутах, адаптований до нашої задачі:

$$dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \varphi\right)^5} d\varphi$$

Після інтегрування по φ отримаємо:

$$dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2 c^5} \frac{\left[2 - \cos^2 \theta - \frac{v^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right) \cos^4 \theta\right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}}$$

Діаграма напрямленості випромінювання матиме вигляд:



38. Потенціали електромагнітного поля в хвильовій зоні

Запишемо потенціали для системи зарядів та струмів (власне, у випромінювачі) :

$$\Phi(\vec{R}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{R} - \vec{r}'|} \Big|_{t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}'|}{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{R} - \vec{r}'|} \Big|_{t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}'|}{c}}$$

В хвильовій зоні (тобто при $R \gg a$, де a – характерна відстань випромінювача) має місце рівність:

$$r \ll R$$

$$|\vec{R} - \vec{r}'| \approx R - \vec{n}\vec{r}'$$

Слід зауважити, що більш суттєвим є значення струму в деякий момент часу, який визначається запізненням з деякого елемента об'єму dV , ніж зміна відстані $|\vec{R} - \vec{r}'|$. Це очевидно, бо перше будь-яке, а друге дуже мале в хвильовій зоні.

Тому потенціали в хвильовій зоні набувають вигляду:

$$\Phi(\vec{R}, t) \approx \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R} \Big|_{t' = t - \frac{R - \vec{n}\vec{r}'}{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) \approx \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R} \Big|_{t' = t - \frac{R - \vec{n}\vec{r}'}{c}}$$

39. Електричне дипольне випромінювання.

Працюватимемо у дипольному наближенні ($V \ll c$), за умови $a \ll \lambda$, де a - характерний розмір системи. В такому випадку формула для випромінювання системи заряджених частинок перетворюється на:

$$\vec{E} \approx \frac{\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \sum_k q_k \vec{\dot{V}}_k \right]}{c^2 r} \Big|_{t'}$$

, врахуємо, що $\sum_k q_k \vec{\dot{V}}_k = \frac{d^2}{dt^2} \sum_k q_k \vec{r}_k = \ddot{\vec{p}}$;

$$\vec{E} = \frac{\vec{n} \times [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}]}{c^2 r} \Big|_{t - \frac{r}{c}}, \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}}{c^2 r} \Big|_{t - \frac{r}{c}}.$$

Виведемо формулу для інтенсивності випромінювання:

$$dI = \frac{dI}{dS} dS = \frac{d^2 \varepsilon}{dt dS} r^2 d\Omega, \text{ отже } \frac{dI}{d\Omega} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt dS} r^2 = |\vec{S}| r^2,$$

$$\text{де } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n} - \text{вектор Умова-Пойтінга. Тоді } \frac{dI}{d\Omega} = \frac{cE^2}{4\pi} r^2 = \frac{cB^2}{4\pi} r^2.$$

Підставивши вираз для магнітного поля дипольного випромінювання у отриману формулу, отримаємо:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cB^2}{4\pi} r^2 = \frac{cr^2}{4\pi} \cdot \frac{[\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}]^2}{c^4 r^2} = \frac{[\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}]^2}{4\pi c^3}.$$

Проінтегрувавши отриману формулу по усім тілесним кутам, можна отримати вираз для повної інтенсивності дипольного випромінювання:

$$\boxed{I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{p}}^2}.$$

Індикатрисою називається $\frac{\langle dI/d\Omega \rangle}{\langle I \rangle}$. Усереднення береться по часу – для конкретної задачі.

Зміст

1. Принципи відносності: Галілея та Ейнштейна. Спеціальне перетворення Лоренца.....	3
2. Загальне перетворення Лоренца. Основні властивості перетворення Лоренца.....	4
3. Релятивістська кінематика. Власний час. Власна довжина. Релятивістське додавання швидкостей.	5
4. Геометрія 4-простору: метрика, ко- та контра- варіантні величини.....	6
5. Диференціальні операції в 4-просторі. 4-швидкість і 4-прискорення.....	7
6. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської частинки.	8
7. Коваріантне рівняння руха.	8
8. Загальні принципи побудови теорії поля. Елементарний заряд в класичній теорії поля...	9
9. 4-потенціал електромагнітного поля. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської зарядженої частинки в електромагнітному полі.	10
10. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі.....	11
11. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок. Фізичний зміст скалярного і векторного потенціала.....	12
12. Тензор електромагнітного поля. Полярні і аксіальні вектори. Коваріантне рівняння руху заряду в електромагнітному полі.....	13
13. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля.....	15
14. 4-вектор струму та рівняння неперервності.....	15
15. Дія системи, що складається із зарядів і електромагнітного поля. Загальні принципи побудови теорії поля.....	16
16. Виведення рівнянь Максвелла в коваріантній формі з варіаційного принципу.....	16
17. Виведення рівнянь Максвелла в трьохвимірній диференціальній формі з коваріантних рівнянь.....	17
18. Інтегральна форма рівнянь Максвелла та її зв'язок з експериментальними законами електромагнетизма.....	18
19. Межові умови для векторів електромагнітного поля.....	19
20. Закон збереження енергії електромагнітного поля. Теорема Умова-Пойнтінга.....	19
21. Рівняння для електромагнітних потенціалів (рівняння д'Аламбера).....	20
22. Стале електричне поле. Рівняння Лапласа та Пуассона та їх загальний розв'язок.....	21
23. Стале електричне поле на далеких відстанях. Дипольний і квадрупольний моменти.....	22
24. Розклад електростатичного поля за мультиполями. Система зарядів у зовнішньому електростатичному полі.....	22
25. Стале магнітне поле. Рівняння Лапласа та Пуассона та їх загальний розв'язок.....	23
26. Векторний потенціал сталого магнітного поля. Магнітний момент у зовнішньому магнітному поля. Гіромагнітне відношення.....	23
27. Плоскі електромагнітні хвилі. Загальний розв'язок хвильового рівняння. Основні властивості.....	25
28. Хвильовий 4-вектор і повздовжній ефект Доплера.....	26
29. Хвильовий 4-вектор і поперечний ефект Доплера.....	27
30. Червоний зсув.....	27
31. Сферичні хвилі. Потенціали спізнання і випередження.....	28
32. Потенціали Льєнара-Віхерта.....	29
33. Електричне та магнітне поле точкового заряду, що рухається довільним чином.....	30
34. Електромагнітне поле точкового заряду, що рівномірно рухається.....	31
35. Випромінювання електромагнітних хвиль точковим зарядом. Хвильова зона. Кутовий розподіл випромінювання.....	32
36. Випромінювання точкового заряду, що рухається прямолінійно. Формула Лармора. Діаграма направленості.....	32
37. Циклотронне та синхротронне випромінювання точкового заряду. Діаграма направленості.....	33
38. Потенціали електромагнітного поля в хвильовій зоні.....	34
39. Електричне дипольне випромінювання.....	35