

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
РАДІОФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

«Електродинаміка»

(частина II)

Електродинаміка суцільних середовищ



Creative Teamwork “WaSMP Group” & Co.

Київ 2006 рік

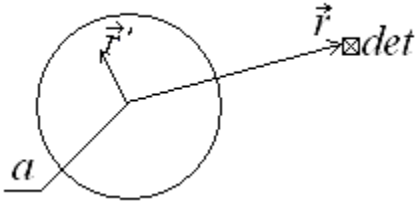
В даному виданні викладено конспект лекцій з курсу «Електродинаміка» (частина II – Електродинаміка суцільних середовищ). В даному посібнику зібрані відомості, які є узагальненням всього курсу, шляхом обробки різних джерел інформації, включаючи конспект доктора фізико-математичних наук, професора Обуховського В.В.

Набір тексту: Сальніков Андрій, Бурий Максим, Кохановський Андрій, Танигін Богдан, Шапран Віталій, Слюсар Євген, Гожик Ірина, Біленко Костянтин, Білоус Роман.

Корегування помилок: Бурий Максим, Сальніков Андрій.

Оформлено до друку: Сальніков Андрій.

1. Наддипольне випромінювання



Запишемо вираз для векторпотенціала:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Наближення хвильової зони: $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega\tau}, \quad \tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r})^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r}')^2} = |\vec{r}| \sqrt{1 - 2 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')}{|\vec{r}|} + \left(\frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|}\right)^2} \approx |\vec{r}| \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|}\right), \quad \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|} \ll 1$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)} e^{\frac{i\omega\alpha}{c}}.$$

$$\exp\left[-\frac{i\omega\alpha}{c}\right] = \exp\left[-i \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{a}{c}\right] = \exp\left[-2\pi i \frac{a}{\lambda}\right], \quad a \ll \lambda - \text{ умова хвильового наближення (можна}$$

перейти до дипольного випромінювання і знехтувати r' в знаменнику)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) (1 - \alpha) dV'$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) (1 - \alpha) = \vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) + \alpha \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial \alpha}\right) \Big|_{\alpha=0} + \dots$$

(розклали в ряд по $\alpha(r')$, але щоб розкласти лише праву частину, в лівій замінили \vec{r}' на \vec{r}'')

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \vec{j}\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) dV' + \frac{1}{c|\vec{r}|} \int \frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{|\vec{r}|} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}'', t_1)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} dV' \equiv \vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)}$$

$$t_1 = t - \frac{|\vec{r}|}{c} (1 - \alpha); \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha} = \frac{|\vec{r}|}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{1}{c^2 |\vec{r}|} \int (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}'', t_1)}{\partial t} \Big|_{\alpha=0} dV' = \frac{1}{c^2 |\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{j}(\vec{r}'', t_1) \Big|_{\alpha=0} dV'$$

(Складова $\vec{A}^{(2)}$ відповідає наддипольному випромінюванню)

Перейдемо до моделі точкових зарядів (від інтеграла до суми):

$$\vec{j}(\vec{r}', t_1) = \sum_p q_p \vec{v}_p \delta(\vec{r}' - \vec{r}'_p(t_1))$$

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{1}{c^2 |\vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \sum_p (\vec{r}'_p \cdot \vec{n}) q_p \frac{d\vec{r}'_p}{dt}$$

Перепишемо дану формулу через подвійний векторний добуток:

$$\vec{v}_p \cdot (\vec{r}'_p \cdot \vec{n}) = \vec{r}_p \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}_p) + [\vec{r}_p \times \vec{v}_p] \times \vec{n}$$

Введемо квадрупольний та магнітний моменти:

$$Q_{ij} = \sum_p q_p (\vec{r}'_p)_i (\vec{r}'_p)_j$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum_p q_p [\vec{r}'_p \times \vec{v}_p]$$

Тоді другу частину векторного потенціалу можна записати так:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c|\vec{r}|} \left[\dot{\vec{M}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \times \vec{n} \right] + \frac{1}{2c^2|\vec{r}|} \left(\ddot{\vec{Q}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) * \vec{n} \right)$$

Знаючи векторний потенціал можна визначити електричне та магнітне поле випромінювання. Запишемо їх окремо для квадрупольного та магнітодипольного випромінювання:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{мд}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2|\vec{r}|} \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \right] \\ \vec{H}_{\text{мд}} &= [\vec{E}_{\text{мд}} \times \vec{n}] = \frac{1}{c^2|\vec{r}|} \left[\left[\vec{n} \times \ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right) \right] \times \vec{n} \right] \\ \vec{E}_{\text{кв}} &= \frac{1}{2c^3|\vec{r}|} \left[\left[\left(\ddot{\vec{Q}} * \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right]_{t-\frac{|\vec{r}|}{c}} \\ \vec{H}_{\text{кв}} &= \frac{1}{2c^3|\vec{r}|} \left[\left(\ddot{\vec{Q}} * \vec{n} \right) \times \vec{n} \right]_{t-\frac{|\vec{r}|}{c}} \end{aligned}$$

2. Приклади наддипольного випромінювання.

Порівнюємо магнітодипольне та квадрупольне випромінювання з дипольним. Напруженість поля випромінювання записуємо в дальній зоні:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{дип}}(\vec{r}, t) &= \frac{[\vec{n} \times [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}]]}{rc^2} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}}{rc^2}, \\ \vec{E}_{\text{магн-дип}}(\vec{r}, t) &= \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{M}}(t - \frac{r}{c})]}{rc^2}, \\ \vec{E}_{\text{квадр}}(\vec{r}, t) &= \frac{[(\ddot{\vec{Q}} * \vec{n}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{2c^3r}. \end{aligned}$$

Проведемо оцінку значень вкладу в поле кожного випромінювання:

$$\begin{aligned} E_{\text{дипольне}} &\sim \frac{\ddot{p}}{c^2r} \sim N \frac{\omega^2 p_0}{c^2r} \sim N \frac{\omega^2 qa}{c^2r} \\ E_{\text{маг-дип}} &\sim N \frac{\omega^2 a q v_0}{2c^3r} \\ E_{\text{квадруп}} &\sim N \frac{\omega^2 q a^3}{2c^3r} \end{aligned}$$

Можемо записати співвідношення між абсолютними значеннями оцінених напруженостей. Невеликі коефіцієнти, які суттєво ні на що не впливають не враховуємо (двійки в знаменнику):

$$E_{\text{дип}} : E_{\text{м-дип}} : E_{\text{кв}} = 1 : \frac{v_0}{c} : \frac{a}{\lambda}$$

З цього співвідношення можемо зробити висновки:

Якщо розміри маленькі, порівняно з довжиною хвилі $a \ll \lambda$, то внесок квадрупольного випромінювання малий.

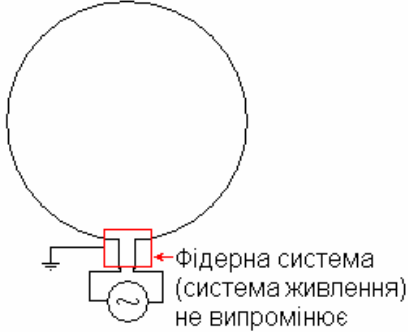
Якщо швидкість $v_0 \ll c$, то внесок магніто-дипольного випромінювання малий.

Параметр малості, при якому отримали значення \vec{M} і \vec{Q} :

$\alpha \sim \frac{|r'|}{|r|} \ll 1$, тобто в першому наближенні. Дипольний момент також отриманий в першому

наближенні. Тому вони однакові по порядку, тобто якщо квадрупольне мале, то і магнітодипольне також.

3. Виромінювання колового струму.



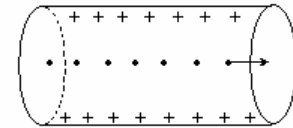
З теоретичної точки зору це коло зі струмом, амплітудою I_0 , частотою ω , та радіусом R_0 .

Наша задача знайти потужність випромінювання такої системи, вважаючи, що $R_0 \ll \lambda$.

У нас є фактично 3 типи випромінювання. Якщо є дипольне випромінювання, то воно саме сильне, атже є розкладом поля в першому наближенні, але в даному випадку $\vec{p} = 0$, бо в нас симетричне коло.

Квадрупольний момент такої системи також не враховуємо.

Середній заряд в статичному випадку 0. При наявності струму взагалі-то не 0, але ефект малий. Через хаотичну орієнтацію, усереднивши формулу для квадрупольного моменту, бачимо, що можемо його невраховувати.



Залишається тільки магнітодипольне випромінювання:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t')] dV$$

Щоб якось визначити \vec{j} , треба ввести певну модель, в рамках якої ми будемо працювати.

Виберемо дротину тонкою.

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{I}(\vec{r}', t') \delta(r' - R_0) \delta(z')$$

Добуток δ -функцій описує власне кільце. $\delta(z')$ – тільки в площині $z' = 0$ буде щось відмінне від нуля. $\delta(r' - R_0)$ – тільки на відстані R_0 (власне в дротині) буде струм.

Полярна система координат: $\vec{I} = \vec{e}_\alpha I_0 e^{-i\omega t'}$

Елемент об'єму $dV' = R' dR' d\alpha dz'$

Підставляючи все це в вираз для магніто-дипольного моменту і одразу беручи інтеграли по δ -функціям будемо мати:

$$\vec{M} = \frac{I_0 e^{-i\omega t'}}{2c} \int_0^{2\pi} d\alpha [\vec{R}_0 \times \vec{e}_\alpha] \cdot \vec{R}_0 = \frac{I_0 e^{-i\omega t'}}{2c} \cdot 2\pi R_0 \vec{e}_z \cdot \vec{R}_0$$

$$|\vec{M}| = \frac{|\vec{I}| S}{c}; \quad S = \pi R_0^2$$

Тепер можна визначити потужність магніто-дипольного випромінювання. Причому треба рахувати сукупну потужність у всіх напрямках.

$P_{\text{мод}}^\Sigma = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, де S_0 – поверхня, яка набагато більша за наше кільце;

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \langle [\vec{E} \times \vec{H}] \rangle$ – в реальності прилади усереднюють сигнал, а ми будемо теорію, яка б описувала дійсність, тому усереднюємо вектор Умова-Пойтінга.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \left[\dot{\vec{M}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right]$$

$$\vec{E}_{\text{мод}} = \frac{1}{c^2 r} \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

$$\vec{H}_{\text{мд}} = \frac{1}{c^2 r} \left[\left[\ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right]$$

Такий вигляд справедливий для хвильової зони. Звідки:

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\{ \left(\dot{\vec{A}} \right)^2 - \left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{A}} \right)^2 \right\}$$

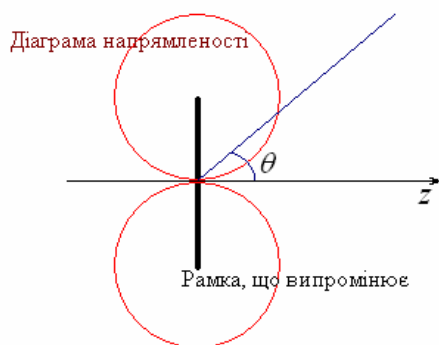
$$d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$$

$$\text{Потужність випромінювання: } P_{\text{мд}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{R_0 \omega}{c} \right)^4 \frac{I_0^2}{c}$$

$$\text{Значення електричного поля: } \vec{E}_{\text{мд}} = \vec{e}_\alpha E_{\text{мд}}^0 e^{-i\omega t'}, t' = t - \frac{r}{c}$$

Підставивши в формулу для знаходження $\vec{E}_{\text{мд}}$ модуль $|\vec{M}|$ отримавмо:

$$E_{\text{мд}}^0 = \frac{\pi}{c} I_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{R_0^2}{r} \right) \sin \theta.$$

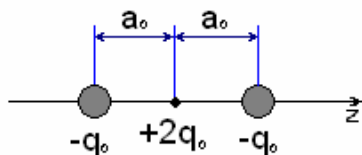


Дану властивість напрямленості використовують для пошуку передавачів (лісословлі). Ярко виражений мінімум інтенсивності вздовж осі z , дозволяє визначити напрямок в якому знаходиться передавач.

Магніто-дипольні антени використовують також в вигляді катушок з багатьма витками, що намотані на феритовий стрижень.

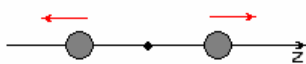
4. Випромінювання простих квадрупольних систем.

Розглянемо молекулу CO_2 :

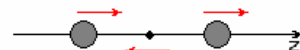


$2q_0 \neq 4e_0$ – присутні різні ефекти екранування, але для оцінки ми можемо так рахувати.

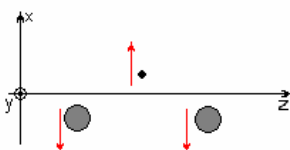
Для таких йонів можливі наступні схеми руху:



A_{1g} – повносиметричні коливання;



A_{1u} – антисиметричні коливання;



E – двічі вироджені (по x та по y) деформаційні коливання;

Для першого випадку повносиметричних коливань матимемо:

$$\vec{p} = 0, \vec{M} = 0, Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{xz} = 0, Q_{zz} \neq 0;$$

Антисиметричні:

$$Q_{zz} = 0, \vec{p}_z \neq 0$$

Деформаційні коливання:

$$\vec{p}_x \neq 0$$

Розглядаємо чисто квадрупольне випромінювання (тобто візьмемо повносиметричні коливання для яких ненульовим є квадрупольний момент):

$$Q_{zz} = -2q_0(a_0 + \Delta a(t))^2$$

Тепер можемо записати згортку:

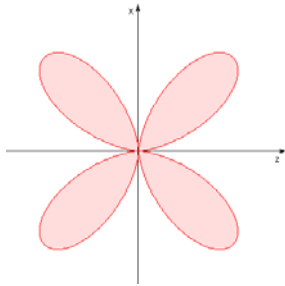
$$(\hat{Q} * \vec{n}) = \begin{pmatrix} \sum_i Q_{xi} n_i \\ \sum_i Q_{yi} n_i \\ \sum_i Q_{zi} n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{zz} n_z \end{pmatrix} \quad n_z = \cos \theta - \text{проекція } n \text{ на вісь } z$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2c^2 |\vec{r}|} (\ddot{\hat{Q}} * \vec{n})$$

Вектор Умова-Пойтинга $\vec{S} \sim \vec{n}$. В результаті підстановки нашого значення вектор-потенціалу, отримаємо кутовий розподіл:

$$\vec{S} \sim \vec{n} \sin^2(2\theta).$$

Фактично це означає, що індикатриса випромінювання квадруполь в випадку повносиметричних коливань матиме вигляд:



$E_{\kappa\kappa} \sim \ddot{Q} \sim \omega^3 \left\| S_{\kappa\kappa} \sim \omega^6 \right.$
 $E_d \sim \ddot{p} \sim \omega^2 \left\| S_d \sim \omega^4 \right.$ – нема універсальної формули для розрахунку індикатриса випромінювання, бо результат повністю залежить від частоти на якій розраховуємо.

Якщо маємо складну і велику систему, то внесок квадрупольного випромінювання може бути великий. Тобто дипольне випромінювання не завжди є самим сильним.

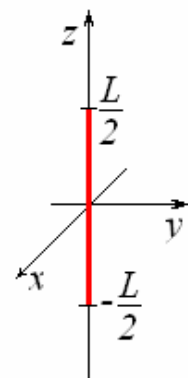
5. Випромінювання лінійних антен.

Використаємо модель нескінченно тонкої антени, що розташована так, як показано на малюнку:

$$\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{e}_z I(z', t') e^{-i\omega t'} \delta(x') \delta(y') \theta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)$$

Використовуючи умову $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$ можемо розкласти:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c |\vec{r}|} \iiint_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}\right) dx' dy' dz' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{e}_z}{c |\vec{r}|} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)\right) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' I(z', t') \exp\left(-i\frac{\omega}{c}(z' n_z)\right) = \\ &= \frac{\vec{e}_z}{c |\vec{r}|} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)\right) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' I(z', t') \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \cos \theta z'\right) \end{aligned}$$



На кінцях повинні бути вузли, інакше поле випромінювання мало б бути неперервним, що не можливо. Тому:

$$I\left(z' = \frac{L}{2}\right) = I\left(z' = -\frac{L}{2}\right) = 0$$

Це можливе в двох випадках – симетричному і асиметричному:

$$I(z') = +I(-z')$$

$$I(z') = -I(-z')$$

При цьому пере випромінювання не враховується. Отже,

$$kL = \pi m$$

$$I(z') = I_0 \cos kz', \quad m = 1, 3, 5 \dots$$

$$I(z') = I_0 \sin kz', \quad m = 2, 4, 6 \dots$$

$$L = m \left(\frac{\lambda_m}{2} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_z}{c|r|} I_0 \exp \left(-i\omega \left(t - \frac{|r|}{c} \right) \right) F_m$$

$$F_m = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \cos \left(\pi m \frac{z'}{L} \right) \exp \left(-\frac{i\omega}{c} \cos \theta z' \right)$$

$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos \left(m \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \sin \frac{m\pi}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

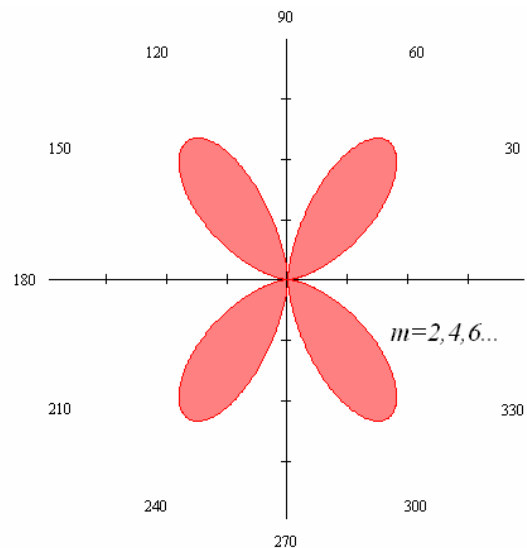
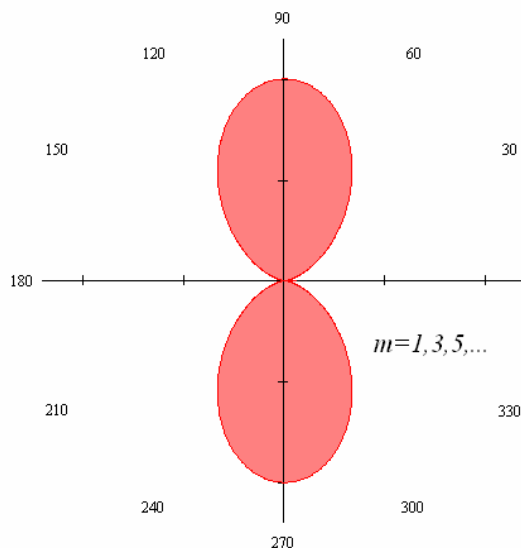
$$F_m = i \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sin \left(m \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \cos \frac{m\pi}{2}}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left(\langle \dot{\vec{A}}^2 \rangle - \langle (\vec{n} \dot{\vec{A}})^2 \rangle \right)$$

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\cos^2 \left(m \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\vec{S}_m = \vec{n} S_m^a \frac{\sin^2 \left(m \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta}, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Діаграма напрямленості матиме вигляд:



6. Випромінювання диполя у ближній зоні.

Вступні положення: по-перше, система розглядатиметься, звичайно, не в дальній зоні, тобто $a \ll r$ не виконуватиметься. Будемо знаходитись у деякій «перехідній» області – достатньо

далекій, щоб $|\vec{r}'| < |\vec{r}|$, де $|\vec{r}'|$ - координата в системі, $|\vec{r}|$ - координата точки спостереження. Тоді можна сказати, що $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cong \frac{1}{|\vec{r}| - (\vec{r}' \cdot \vec{n})}$, де \vec{n} - напрямок на точку спостереження.

По-друге, усі моменти системи, вищі за дипольний не враховуватимуться.

По-третє, в силу того, що $|\vec{r}'| < |\vec{r}|$ малий коефіцієнт розкладу величину $\alpha = \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{|\vec{r}|} \ll 1$.

Отже, $\bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{c}\right)}{|\vec{r}| - (\vec{r}' \cdot \vec{n})} dV'$. Розкладемо струм за параметром α :

$\bar{j}(\alpha) \approx \bar{j}(0) + \left(\frac{\partial \bar{j}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \sim q|\dot{\vec{r}}|$, тобто залишаємо лише нульовий член розкладу. Крім цього:

$\frac{1}{|\vec{r}| - (\vec{r}' \cdot \vec{n})} = \frac{1}{|\vec{r}|(1 - \alpha)} = \frac{1}{|\vec{r}|}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) \approx \frac{1}{|\vec{r}|}$. Тоді:

$$\bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{|\vec{r}|} dV' \cong \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{c|\vec{r}|}$$

Магнітне поле: $\bar{H}(\vec{r}, t) = \text{rot}(\bar{A}(\vec{r}, t))$. Як відомо з курсу векторного аналізу:

$\nabla(f \cdot \vec{F}) = [\nabla f \times \vec{F}] + f \cdot \text{rot} \vec{F}$, $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\frac{\vec{n}}{|\vec{r}|^2}$ тоді ($t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$):

$$\bar{H}(\vec{r}, t) = \text{rot}(\bar{A}(\vec{r}, t)) = \frac{[\dot{\vec{p}}(t') \times \vec{n}]}{c|\vec{r}|^2} + \frac{[\ddot{\vec{p}}(t') \times \vec{n}]}{c^2|\vec{r}|}. \text{ Перший доданок нагадує закон Біо-Савара-}$$

Лапласа, а другий – вираз поля в далекій зоні.

Для знаходження електричного поля необхідно знайти електричний потенціал, бо:

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad \phi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{1}{|\vec{r}| - (\vec{r}' \cdot \vec{n})} \cdot \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{c}\right) dV'.$$

Назвемо $\tau = t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{n})}{c}$ і порозкладаємо все, що можна за нашим улюбленим α :

$$\frac{1}{|\vec{r}| - (\vec{r}' \cdot \vec{n})} = \frac{(1 + \alpha + \dots)}{|\vec{r}|} \approx \frac{(1 + \alpha)}{|\vec{r}|}; \quad \rho \approx \rho(\alpha = 0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha = \rho(0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}\right) \alpha = \rho(0) + \dot{\rho} \frac{|\vec{r}|}{c} \alpha.$$

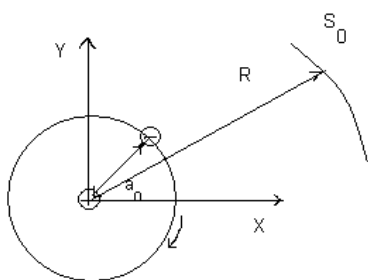
$$\text{Отже, } \phi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{(1 + \alpha)}{|\vec{r}|} \cdot \left(\rho(0) + \dot{\rho} \frac{|\vec{r}|}{c} \alpha\right) dV' \cong \frac{(\vec{n} \cdot \vec{p}(t'))}{|\vec{r}|^2} + \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t'))}{c|\vec{r}|}.$$

При обрахунку інтегралу знехтуємо членами порядку більше α і взято до уваги, те що:

$$\frac{1}{|\vec{r}|} \int \rho dV' = \frac{Q}{|\vec{r}|} = 0, \text{ оскільки повний заряд системи вважаємо нульовим.}$$

Взявши перший та четвертий виділені рамками вирази та підставивши їх до третього, можна отримати формулу електричного поля в «близькій» зоні. Якщо до цього додати закон коливання $\dot{\vec{p}}$, можна отримати більш ширший випадок.

7. Сила променевого тертя.



Розглянемо систему двох зарядів (атомарна модель водню):

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x r_x(t) + \vec{e}_y r_y(t)$$

$$r_x(t) = a_0 \cos \omega t$$

$$r_y(t) = -a_0 \sin \omega t$$

Вважаємо, що в моделі $a_0 = \text{const}$

Користуючись дипольним наближенням можемо записати:

$$\vec{S}(\vec{R}, t) = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 |\vec{R}|^2} \left\{ \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle - \langle (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}})^2 \rangle \right\}_{t - \frac{R}{c}}$$

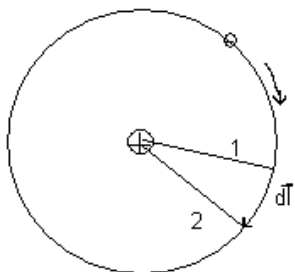
$P = \int_{S_0} \vec{S} d\vec{\sigma}$, де \vec{S} – вектор Умова-Пойтинга, а $d\vec{\sigma}$ – елемент поверхні, що значно більша за

характерні розміри системи.

$$P_x = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle}{c^3}$$

$$P = P_x + P_y + P_z \sim \langle (\ddot{p}_x)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_y)^2 \rangle + \langle (\ddot{p}_z)^2 \rangle = \langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle$$

Остаточню: $P(t) = \frac{2}{3} \frac{\langle (\ddot{\vec{p}})^2 \rangle}{c^3}$



$$dA = \vec{f} d\vec{l}$$

$$\frac{dA}{dt} = \vec{f} \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$P_A = (\vec{f} \cdot \vec{v}) = (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}})$$

$$\langle P_A \rangle = -P$$

$$\ddot{\vec{p}} = -e_0 \ddot{\vec{r}}$$

$$\langle (\vec{f} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = -\frac{2e_0^2 \langle (\ddot{\vec{r}})^2 \rangle}{3c^3}$$

Виразимо $\ddot{\vec{r}}$, застосовуючи наступну формулу:

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\dot{\vec{r}} = a_0 \omega (-\vec{e}_x \sin \omega t - \vec{e}_y \cos \omega t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = a_0 \omega^2 (-\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t)$$

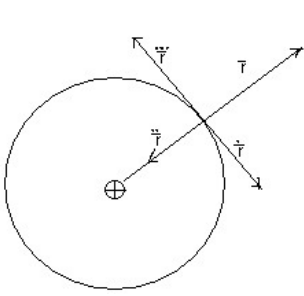
$$\ddot{\vec{r}} = a_0 \omega^3 (\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t)$$

Звідси $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \cong 0$

$$(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \approx -(\ddot{\vec{r}})^2$$

$$\left\langle \left\{ \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{2e_0^2}{3c^3} (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right\} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \left(\vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} \right) \cdot \dot{\vec{r}} \right\rangle = 0$$



$$\langle (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) \rangle = 0 \quad , \quad \text{де } \vec{F} = \vec{f} - \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Скалярний добуток $(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})$ має один знак, тому

$$(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0$$

Звідси слідує, що або $\vec{F} = 0$ або $\vec{F} \perp \dot{\vec{r}}$

Отже:

$$\vec{f} = \frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} + \vec{f}_\perp \quad \text{де } \vec{f}_\perp \text{ - перпендикулярна до } \dot{\vec{r}}$$

\vec{f}_\perp має смисл кулонівської сили.

Отже вираз для сили променевого тертя:

$$\vec{f}_{\text{пр.тертя}} = -\frac{2e_0^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}$$

8. Класичний час життя атома

Запишемо другий закон Ньютона, врахувавши як силу Кулонівської взаємодії, так і променеве тертя:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} + \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Перший доданок відповідає за кулонівську взаємодію, другий – за променеве тертя.

$|f_{\text{кул}}| \gg |f_{\text{пром.тертя}}|$. У розгляді обмежимося нульовим наближенням.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \Delta \vec{r}(t)$$

$$|\vec{r}_0| \gg |\Delta \vec{r}|$$

$$m\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}_0|^3} \vec{r}_0$$

Виражаючи з попередньої формули $\ddot{\vec{r}}_0$, та підставляючи в вираз для потужності випромінювання:

$$P \approx \frac{2e_0^2}{3c^3} \langle (\ddot{\vec{r}}_0)^2 \rangle = \frac{2e_0^6}{3c^3 m^2} \left\langle \left(\frac{1}{r_0} \right)^4 \right\rangle = \frac{2e_0^6}{3c^3 m^2} \frac{1}{|\vec{r}_0|^4}$$

Енергія кулонівської взаємодії: $E_{\text{кул.вз}} = -e_0 \phi = -\frac{e_0^2}{|\vec{r}|}$; $P \approx \frac{2E_{\text{кул.вз}}^4}{ec^3 m^2 e_0^2}$

Сумарна енергія: $E_s = T + U = \left\langle \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{e_0^2}{|\vec{r}|} \right\rangle$

Так як поле центральносиметричне, за теоремою Віріала: $E_s = \frac{1}{2} E_{\text{кул.вз}}$

$$P = -\frac{dE_s}{dt}$$

$$\frac{dE_{\text{кул.вз}}}{dt} + bE_{\text{кул.вз}}^4 = 0;$$

$$b = \frac{4}{3c^3 e_0^2 m^2}$$

$$\int_W^{\infty} \frac{dE_{\text{кул.вз}}}{E_{\text{кул.вз}}^4} = - \int_0^T b dt;$$

$$W = E_{\text{кул.вз}}(t=0) = -\frac{e_0^2}{a_0}$$

$$T = \frac{a_0^3 c^3 m^2}{4e_0^4} - \text{класичний час життя атома. Для } a_0 \sim 1\text{\AA} \quad T \sim 10^{-10}\text{с.}$$

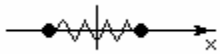
9. Ширина лінії випромінювання.

Коливання по колу завжди можна розкласти на два осцилятори (уявімо фігури Лісажу наприклад).

Знайдемо ширину ліній випромінювання для гармонічного осцилятора за наявності радіаційного тертя:

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}$$

Сила радіаційного тертя не є універсальною, тобто так гарно вона не завжди записується.



– в отакому випадку можливий нормальний запис формули для радіаційного тертя.

Перепишемо наше рівняння ввівши деякі позначення:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad Q = \frac{2e^2}{3mc^3}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Q \ddot{x}$$

Будемо вважати доданок $Q \ddot{x}$ малим впливом, і будемо шукати розв'язок методом збурень, тобто в вигляді:

$$x = x_0 + \delta x$$

Нульове наближення: $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$, і відповідно розв'язок – звичайні коливання.

Отже рівняння для δx : $\delta \ddot{x} + \omega_0^2 \delta x = Q \ddot{x}_0$, з рівняння в першому наближенні $\ddot{x}_0 = -\omega_0^2 x_0$, отже матимемо рівняння (також до лівої частини рівняння можна дописати рівняння в першому наближенні, і отримати рівняння для x):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 Q x_0, \text{ або позначивши } \gamma = \omega_0^2 Q$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Теорія справедлива, коли виконується умова $\gamma \ll \omega_0$, тобто інакшими словами, коли ми маємо право так застосовувати метод збурень.

Розв'язок цього рівняння добре відомий:

$$x(t) = U_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t, \quad \ddot{x}(t) = \tilde{U} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t$$

Поле в дипольному наближенні пропорційне $E(t) \sim \ddot{x} \sim \ddot{x}$, отже:

$$E(t) = \theta(t) E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t, \text{ де } \theta(t) - \text{функція Хевісайда.}$$

Отже внаслідок наявності радіаційного тертя, енергія в осциляторі експоненційно зменшується. Це означає, що випромінювання відбувається в вигляді цугів хвиль з ефективною довжиною порядку c/γ . Такі імпульси випромінювання скінченної тривалості, вже не будуть монохроматичними, а будуть характеризуватися спектром частот, що займають інтервал порядку γ . Точний вигляд спектру визначається Фур'є перетвором напруженості електричного поля:

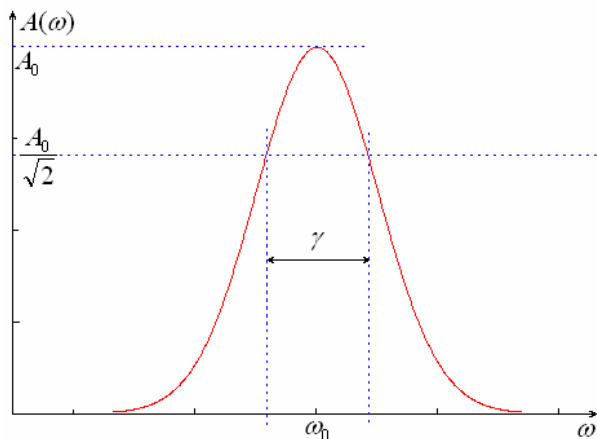
$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{2(\omega - \omega_0)}{\gamma}\right)$$

При зміні початкових умов змінюється тільки фаза.

Ширину лінії на рівні половини інтенсивності (або значення амплітуди поділити на $\sqrt{2}$), яка рівна γ (з формули для амплітуди елементарно отримаємо), прийнято називати шириною лінії. Наявність реакції випромінювання обумовлює розширення лінії.



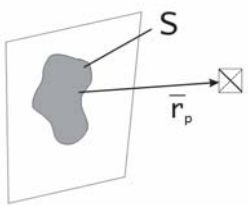
Маючи ширину лінії та частоту, можемо знайти значення величини затухання (обернена величина добротності):

$$d = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0} = \frac{2e^2 \omega_0}{3mc^3} = \frac{2e^2/\lambda}{3mc^2},$$

Значення енергії e^2/λ невелике, порівняно з mc^2 , тому величина затухання $d \ll 1$.

10. Теорія дифракції Кірхгофа

Формула Френеля-Гюйгенса справедлива далеко не завжди. І взагалі теорія дифракції дуже складна і далеко не прозора.



Формула Френеля-Гюйгенса : $U_p(\vec{r}) = a \int_{S_0} \frac{U(\vec{r}') \exp[ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$ (1), де $U_p(\vec{r})$ -

поле зображення, та $U(\vec{r}')$ - поле в площині (наприклад, площині діафрагми).

Тобто, кожна точка простору – є джерело сферичних хвиль.

За формулою Гріна

$$\iiint_{V_0} [U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1] dV = - \iint_{S_0} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] ds \quad (2) \quad (\text{знак “-” перед}$$

інтегралом по поверхні поставлений, бо ми беремо нормаль всередину області).

Причому ця формула справедлива не лише для однозв'язних областей.

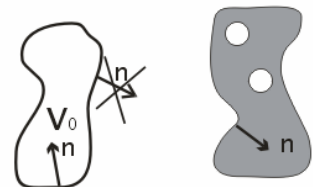
Умови на функцію U : гармонійна, диференційовна 2 порядку.

Вид функцій U_2 та U_1 був запропонований Кірхгофом.

Розглядаємо електромагнітне поле. Нехай U_1 та U_2 задовольняють одному і тому ж хвиловому рівнянню:

$$\Delta U_{1,2} = -k_0^2 U_{1,2} \quad (3),$$

$$\text{тоді } \iint_{S_0} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] ds = 0, \text{ де позначимо } F_0 = \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] \quad (4).$$

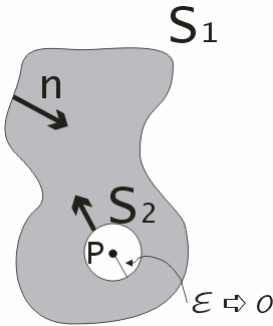


Запишемо U_2 у вигляді сферичної хвилі

$$U_2 = \frac{\exp[ik_0|\vec{r}|]}{|\vec{r}|} \quad (5)$$

Але в точці $|\vec{r}|=0$ маємо невизначеність, і тому математичним методом обійдемо її, розбивши поверхню на дві: що включає точку спостереження (коло нескінченно малого радіусу), і ту, що не включає.

Розглядаємо дві поверхні, S_1 і S_2 , та $S_0=S_1+S_2$.



$$\iint_{S_1} F_0 dS_1 + \iint_{S_2} F_0 dS_2 = 0 \quad (6) \quad (\text{це просто переписана формула (4) з}$$

урахуванням перепозначень).

Розглянемо інтеграл $\iint_{S_2} F_0 dS_2$:

$$\iint_{S_2} F_0 dS_2 = \iint_{S_2} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial r} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial r} \right] r^2 d\Phi, \text{ де}$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial n} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} U_m) = \vec{e}_r \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial U_m}{\partial r} \right) = \frac{\partial U_m}{\partial r}, \text{ де } \vec{n} = \vec{e}_r.$$

$$U_2 \text{ та } \frac{\partial U_m}{\partial r} - \text{відомі функції, причому } \frac{\partial U_m}{\partial r} = \frac{\exp[ik_0|\vec{r}|]}{|\vec{r}|} \left(ik_0 - \frac{1}{|\vec{r}|} \right).$$

На цій поверхні $|\vec{r}|=\epsilon$; також врахуємо, що $dS = r^2 d\Phi$, тоді це

$$\iint_{S_2} F_0 dS_2 = \iint_{S_2} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial r} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial r} \right] r^2 d\Phi = \iint_S \left\{ U_1 (ik_0\epsilon - 1) - \epsilon \frac{\partial U_1}{\partial r} \right\} \exp(ik_0\epsilon) d\Phi \quad (7)$$

Розглянемо цей інтеграл як $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$, врахувавши, що $ik_0\epsilon \rightarrow 0$, тоді $\exp(\dots) \rightarrow 1$,

Поле, що ми розглядаємо – фізичне поле, де нема ніяких полюсів, отже $\epsilon \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{|\vec{r}|=\epsilon} \rightarrow 0$

Тоді U_1 можна в маленькому околі вважати константою $\iint_{4\pi} -U_1 d\Phi = 4\pi U_1(0) \quad (8).$

$$4\pi U_1(0) = -\iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1 \quad (9), \text{ звідки:}$$

$$U_1(0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1 - \text{інтегральна теорема Гельмгольца-Кірхгофа}$$

Таким чином поле в вибраній точці “0” пов’язано з іншими точками на межі області і співвідношення, яким вони пов’язані – інтегральна теорема Гельмгольца-Кірхгофа.

11. Математичне формулювання принципу Гюйгенса

Функцію $U_1 \rightarrow E_p(\vec{r}_p)$ (розглядаємо поле як електричне поле) назвемо скалярним варіантом нашого поля.

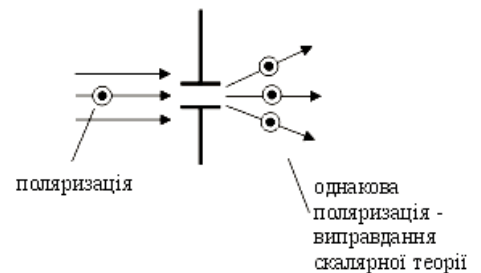
Світло буде дифрагувати, але поляризацію ми виберемо циркулярну.

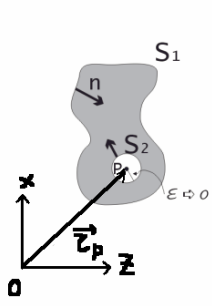
Але якщо поляризація не змінюється після дифракції, то ми можемо розглядати амплітуди.

Перемістимо систему координат далеко від попередньої.

За інтегральною теоремою Гельмгольца-Кірхгофа:

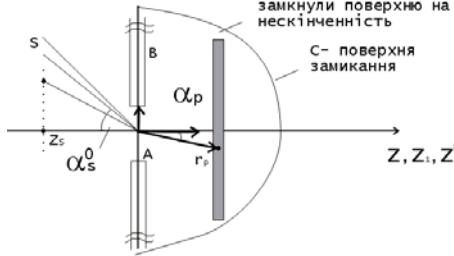
$$4\pi U_1(0) = -\iint_{S_1} \left[U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right] dS_1.$$





$$E(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ E(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) - \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \right\} dS_1 \quad (1)$$

Замикаємо поверхню на ∞ , це все буде S_1 . $S_1 = A + B + C$, де А-прозора поверхня, В-непрозора, С-частково непрозора. Але $E(\vec{r} \in C) \rightarrow 0$ та $E(\vec{r} \in B) \rightarrow 0$ (але на нескінченності внесок не нульовий, бо площа $\sim r^2$).



Тобто внесок даватиме лише інтеграл по А:

$$E(\vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ E(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) - \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \right\} dS_1$$

Необхідно знати не тільки поле на вхідній діафрагмі, але й похідну:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right) &= \left[ik_0 - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \right] \cdot \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial n_1} = \left\{ \text{нехтуємо} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}, n_1 = z_1 \right\} = \\ &= ik_0 \cdot \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial z_1} \end{aligned} \quad (2)$$

Скористаємося тим, що $|\vec{r}_1 - \vec{r}_p| \gg \lambda$ (3).

$$\text{Тоді } \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_p|}{\partial z_1} \bigg|_A = \frac{z_1 - z_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \bigg|_{z_1=0} = -\cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p) \quad (4) \quad (z_p > 0)$$

Як видно з малюнка, α_p є не що інше, як кут нахилу \vec{r}_p до осі OZ .

$$E(\vec{r}_1) = \sum_m E_m(\vec{r}_1, \vec{R}_m) \quad (5) \quad (\vec{R}_m - \text{координати всіх точок джерела})$$

Вважаючи джерела квазіточковими, одержимо:

$$E_m(\vec{r}_1) = A_m \frac{\exp[ik_0|\vec{R}_m - \vec{r}_1| + i\varphi_m]}{|\vec{R}_m - \vec{r}_1|} \quad (6).$$

Введемо гіпотезу: кутові розміри джерела маленькі (α_S^0 - середній кут)

$$\frac{\partial E(\vec{r}_1)}{\partial n_1} \cong ik_0 E(\vec{r}_1) \cos \alpha_S^0 \quad (7), \text{ підставляємо цю формулу до (1):}$$

$$E(\vec{r}_p) = -\frac{ik_0}{4\pi} \iint_A E(\vec{r}_1) \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} \Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) dS_1 \quad (10), \text{ де}$$

$$\Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = \cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p) + \cos \alpha_S^0 \quad (11).$$

Розглянемо 2 випадки:

1. Джерело на осі $\alpha_S^0 = 0$, тоді $\Phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = 1 + \cos \alpha_p(\vec{r}_1, \vec{r}_p)$

2. Діафрагма велика порівняно з довжиною хвилі $\alpha_p = \alpha_p^0 = 0$ (12), де α_p^0 - центральний кут.

$$\text{Тоді } \Phi_0 = 2, \text{ звідки } E(\vec{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \iint_A E(\vec{r}_1) \frac{\exp[ik_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_p|} dS_1 \quad (13).$$

Зауважимо, що в дифракції Гюйгенса пеле дійсна функція, а отримали комплексну (зсув на $\pi/2$);

Також бачимо, що вторинні хвилі не є сферичними.

Формула Гюйгенса застосовна для пояснення хвильових властивостей (в більш складних застосуваннях неможливе).

12. Дифракція електромагнітних хвиль на Гаусовій діафрагмі.

Гаусова діафрагма характеризується таким коефіцієнтом пропускання:

$$T(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2a_x^2} - \frac{y^2}{2a_y^2}}$$

Поле хвиль на виході:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Нехай дифракція суто в напрямку осі Ох (при тому, що поширення вздовж Oz).

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_0(\vec{k}) \delta(|\vec{k}| - k_0) \delta(k_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= e^{-i\omega t} \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(k_x, k_y, k_z) \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) \delta(|\vec{k}| - k_0) \delta(k_y) dk_x dk_y dk_z = \\ &= e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{E}_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta + z \cos \theta)} k_0 d\theta \quad (*) \end{aligned}$$

Запишемо крайові умови:

$$\vec{E}(x, y, +0, t) := \vec{e}_y A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - i\omega t}$$

$$\vec{e}_y A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - i\omega t} = e^{-i\omega t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{e}_y E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

$$A_0 e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

Візьмемо Фур'є перетвір по q :

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iqx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) e^{ik_0(x \sin \theta)} k_0 d\theta$$

Перший інтеграл береться, а в другому можна побачити означення дельта-функції у розумінні теорії узагальнених функцій:

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_0(\theta) 2\pi \delta(k_0 \sin \theta - q) k_0 d\theta$$

$$A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - iqx} dx = 2\pi k_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta E_0(\theta) \delta(\theta - \theta_m) \frac{1}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \Big|_{\theta=\theta_m}},$$

$$\partial_e \phi = k_0 \sin \theta - q; \quad \phi(\theta_m) = 0$$

$$E_0(\theta_m) = \frac{A_0}{2\pi} \cos \theta_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2} - ik_0 \sin \theta_m x} dx$$

$$E_0(\theta_m) = \frac{A_0 a_0}{\sqrt{2\pi}} \cos \theta_m \exp\left(-\frac{a_0^2 k_0^2 \sin^2 \theta_m}{2}\right)$$

$$a_0 k_0 \gg 1 \Rightarrow a_0 \gg \lambda \quad \sin \theta_m = \alpha$$

$$(*) \Rightarrow E(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \frac{A_0 a_0 k_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{(a_0 k_0 \alpha)^2}{2} + ik_0(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2} z)\right) d\alpha$$

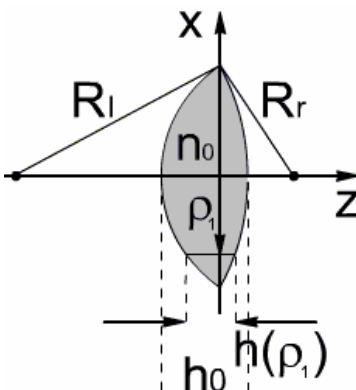
Це довгий інтеграл. Тому:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_y A_0 F_1(\vec{r}) \exp(i(k_0 z - \omega t))$$

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}\right)}{\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{1/4}} e^{i\Delta\Phi(\vec{r})}$$

$$z_r = k_0 a_0^2$$

13. Проходження світла крізь лінзу.



Відкладатимемо радіально від нуля змінну висоти ρ_1 і для початку виведемо зсув фази для променя, що проходить на висоті ρ_1 .

$$\Delta\phi(\rho_1) = \sum_m k_m \cdot l_m = \frac{\omega}{c} \sum_m n_m \cdot l_m \quad (\text{повітря-скло-повітря}).$$

У квадратичному наближенні $h(\rho_1) \cong h_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_r} \right) \rho_1^2$. Тоді

$$\Delta\phi(\rho_1) = \Delta\phi_{\max} - g_0 \rho_1^2, \quad \text{де } \Delta\phi_{\max} = \frac{\omega}{c} n_0 \cdot h_0;$$

$$g_0 = \frac{\omega}{2c} \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_r} \right) (n_0 - 1). \quad ((n_0 - 1) \text{ бо враховано проходження у}$$

повітрі).

Для проведення подальшого розгляду задачі замінимо лінзу на систему, що складатиметься з гаусової діафрагми, яка вирізатиме на вході системи параксіальну область радіусу a_0 та тонкого фазового транспаранту, єдина властивість якого полягатиме у повороті фази променя у певній

точці на величину, яка відповідає такому повороту у лінзи. Оптична система стає надтонкою і її коефіцієнт пропускання розраховується як

$$\tau(\rho_1) = \frac{E_{out}(\rho_1)}{E_{in}(\rho_1)} = \exp \left[-\frac{\rho_1^2}{2a_0^2} + i(\Delta\phi_{max} - g_0\rho_1^2) \right]$$

Як це легко зрозуміти, перша частина в експоненті вноситься гаусовою діафрагмою, а друга – фазовим транспарантом. Отримана оптична система називається амплітудно-фазовим транспарантом.

Далеко на осі z встановимо екран, на якому відображатиметься картинка. Координату, що проектується на екран, назвемо \bar{r}_p , координату на транспаранті - \bar{r}_1 . У від'ємній області z на досить далекій відстані встановимо точкове джерело світла, його координата - \bar{r}_s , джерело знаходиться на вісі. Знайдемо напруженість поля у точці \bar{r}_p :

$$E(\bar{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \int E(\bar{r}_1) \frac{\exp[ik_0|\bar{r}_1 - \bar{r}_p|]}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_p|} dS_1 \quad - \text{інтеграл усіх напруженостей поля на поверхні}$$

транспаранту. Екран встановлено настільки далеко, щоб $|x_1 - x_p|, |y_1 - y_p| \ll z_p$. Тоді:

$$|\bar{r}_1 - \bar{r}_p| = z_p \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}{z_p^2}} \approx z_p \left[1 + \frac{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}{2 \cdot z_p^2} \right].$$

Напруженість поля, що потрапляє на транспарант зліва від далекого джерела визначено як:

$$E_{in}(\bar{r}_1) = A_0 \frac{\exp[ik_0|\bar{r}_s - \bar{r}_1|]}{|\bar{r}_s - \bar{r}_1|} \approx \frac{A_0}{|z_s|} \exp \left[ik_0|z_s| \left(1 + \frac{\rho_1^2}{2|z_s|^2} \right) \right], \text{ оскільки } z_s \gg |x_1|, |y_1|.$$

Враховуючи дію транспаранту, записуємо напруженість поля на екрані:

$$E(\bar{r}_p) = -\frac{ik_0}{2\pi} \int \vec{E}_{in} \cdot \tau(\rho_1) \cdot \frac{\exp[ik_0|\bar{r}_1 - \bar{r}_p|]}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_p|} dS_1 = -\frac{ik_0}{2\pi \cdot z_p} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \frac{A_0}{|z_s|} \exp[ik_0 z_p + i\Phi_0] \exp \left[-\frac{x_1^2 + y_1^2}{2a_0^2} + ig_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{ik_0}{z_p} ((x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2) \right]$$

$$, \text{ де } \Phi_0 = \Delta\phi_{max} + k_0|z_s|; \quad g_1 = \frac{k_0}{2|z_s|} - g_0.$$

Виконавши інтегрування, можна отримати формули напруженості поля та інтенсивності на поверхні екрану. Вони матимуть наступний вигляд:

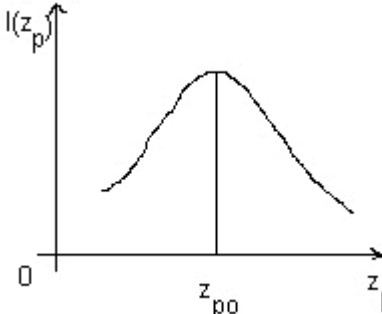
$$E(\bar{r}_p) = \frac{c_0}{r_p} \frac{\exp[i\Phi_1]}{\sqrt{\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2}} \exp \left[-\frac{\left(\frac{k_0}{2z_p}\right)(x_p^2 + y_p^2)}{2a_0^2 \left[\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2\right]} \right]$$

$$I(\bar{r}_p) = \frac{c_1}{r_p^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2} \exp \left[-\frac{\left(\frac{k_0}{2z_p}\right)(x_p^2 + y_p^2)}{a_0^2 \left[\left(\frac{1}{2a_0^2}\right)^2 + \left(g_1 + \frac{k_0}{2z_p}\right)^2\right]} \right]$$

14. Дифракційна теорія фокусної плями.

Викристанемо формулу з теорії лінзи, але зображення розглянемо на оптичній осі системи.

$$I(x_p = 0, y_p = 0, z_p) = \frac{C}{z_p^2 [1 + Q_1^2(z_p)]^{\frac{1}{2}}}$$



де $Q_1(z_p) = a_0^2 (2g_1 + \frac{k_0}{z_p})$

$I'(z_{p0}) = 0 \Rightarrow z_{p0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0^2 k_0}{1 + 2g_1 a_0^2}$

$z_R = k_0 a_0^2 = \frac{2\pi}{\lambda} a_0^2$

$z_{p0} \ll z_R$, де z_R - релеєвська довжина.

$z_p = z_{p0}$ — площина фокусування, адже на такій відстані знаходиться максимум інтенсивності.

Запишемо значення інтенсивності в площині фокусування:

$$I(x_p, y_p, z_{p0}) \sim \exp\left(-\frac{y_p^2 + x_p^2}{\rho_f^2}\right),$$

де $\rho_f = \frac{z_{p0}}{a_0 k_0} = a_0 \frac{z_{p0}}{z_R}$

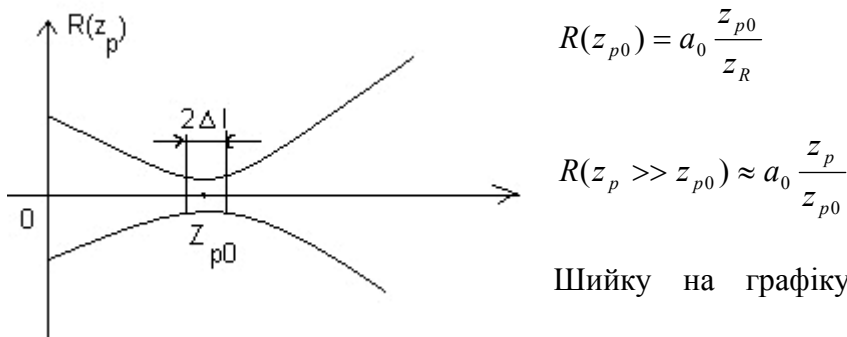
Замість Гаусової діафрагми розглянемо отвір шириною a_0 .

В такому наближенні маємо:

$$I(\vec{r}_p) = I_0 \left(\frac{a_0}{R(z_p)}\right)^2 \exp\left[-\frac{y_p^2 + x_p^2}{R^2(z_p)}\right],$$

де $R(z_p) = a_0 \sqrt{\left[1 - \frac{z_p}{z_{p0}}\right]^2 + \left[\frac{z_p}{z_R}\right]^2}$, $z_{p0} \ll z_R$

Графік залежності $R(z_p)$:



Шийку на графіку наближено вважають тонкою циліндричною трубкою.

Шийка формується виключно за рахунок дифракційних явищ.

Δl - напівдовжина шийки

$$R(z_{p0} \pm \Delta l) = \sqrt{2} R(z_{p0})$$

$$\Delta l \cdot z_R = (z_{p0})^2$$

$$\text{Звідки } \Delta l = \frac{(z_{p0})^2}{z_R}$$

15. Фотони і поляритони

Фотони

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}_0 \exp \left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right]$$

$$E = \hbar \omega; \vec{p} = \hbar \vec{k}; |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \text{ – із теорії вторинного квантування}$$

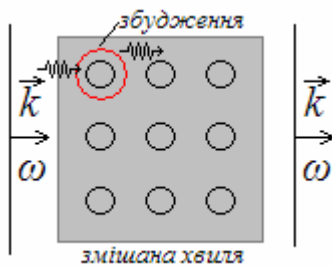
Спін фотона відповідає за поляризацію хвилі

$I = \hbar \omega \cdot n_f$ – інтенсивність, n_f – кількість елементарних збурень (фотонів), що перетинають одиницю поверхні в одиницю часу.

Співвідношення невизначеностей для фотона має вигляд: $\Delta n_f \cdot \Delta \phi \geq 2\pi$.

Якщо точно відома кількість фотонів, то їх фази невизначені. Отже, фаза – це характеристика не одного фотона, а фотонного поля.

Поляритони



Всередині кристалів має місце змішана хвиля – поєднання електромагнітної хвилі та збуджень ґратки кристала. Кванти змішаної хвилі – *поляритони* – фотони в речовині.

Дисперсійне рівняння для поляритонів має вигляд:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon(\omega)$$

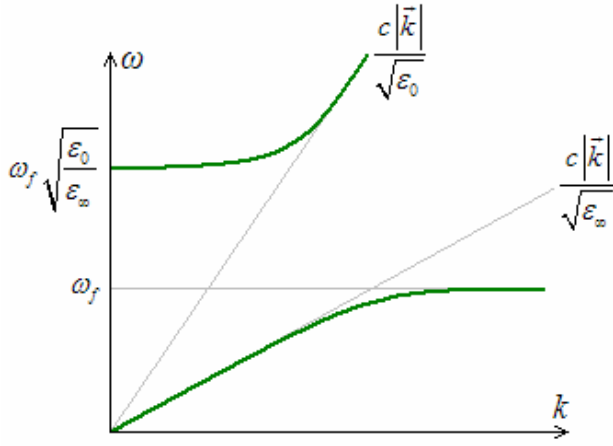
За модель речовини приймемо модель гармонічних осциляторів. Для неї діелектрична проникність представляється так:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \sum_m \frac{f_m \omega_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2}. \text{ До частот } \omega_m \text{ входять як електронні частоти } \omega_{el}, \text{ так і резонансна}$$

частота іонних коливань ω_f , при чому $\omega_{el} \gg \omega_f$. У нашому розгляді обмежимося лише залежністю від частоти ω_f . Для високих частот залежність від частоти дуже слабка, тому можемо вважати, що $\varepsilon(\omega = \infty) = \varepsilon_\infty$. Також позначимо $\varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_0$ – статична діелектрична проникність. Тоді формулу можемо переписати так:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2}. \text{ Тепер нашою метою є знаходження } k(\omega) \rightarrow \omega(k) \rightarrow E(k).$$

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \right].$$



Після перетворень маємо:

$$\omega_{1,2}^2(|\vec{k}|) = \frac{1}{2\varepsilon_\infty} \left\{ c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_0 \pm \sqrt{[c^2 k^2 + \omega_f^2 \varepsilon_0]^2 - 4\varepsilon_\infty \omega_f^2 c^2 k^2} \right\}, \quad \varepsilon_0 > \varepsilon_\infty$$

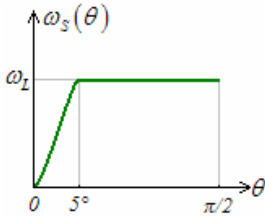
$$k \rightarrow 0: \quad k \ll \left(\frac{\omega_f}{c} \right) \varepsilon_{0,\infty}; \quad \omega_1(k) = \frac{c|\vec{k}|}{\sqrt{\varepsilon_0}}; \quad \omega_1(0) = 0; \quad \omega_2(0) = \omega_f \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}$$

$$k \rightarrow \infty: \quad \omega_1 = \omega_f; \quad \omega_2 = \frac{c|\vec{k}|}{\sqrt{\varepsilon_\infty}}.$$

Розглянемо збудження поляритонних хвиль при опроміненні лазером:

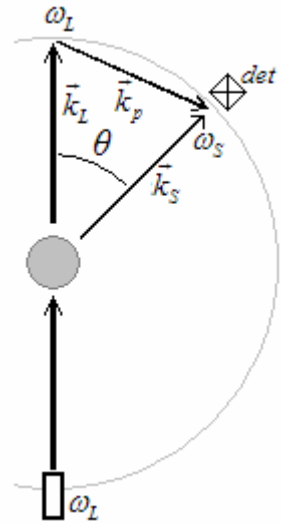
$$\begin{cases} \hbar\omega_L = \hbar\omega_s + \hbar\omega(k) \\ \hbar\vec{k}_L = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_p \end{cases}$$

Детектор уловлює стоксову частоту від кута розхилу $\omega_s(\theta)$.



Поляритони – розв'язки рівнянь Максвелла для речовин ($\mu=1, \rho=0$):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = 0 \end{cases}$$

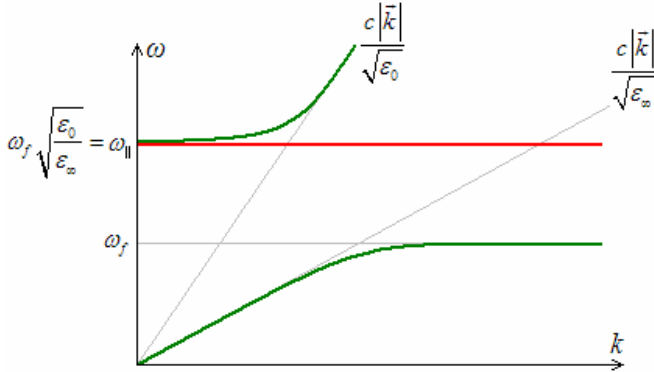


$$\text{В представленні плоских хвиль: } \vec{u} = \vec{u}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]: \begin{cases} [\vec{k} \times \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E} \\ [\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \\ \varepsilon(\omega)(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{cases}$$

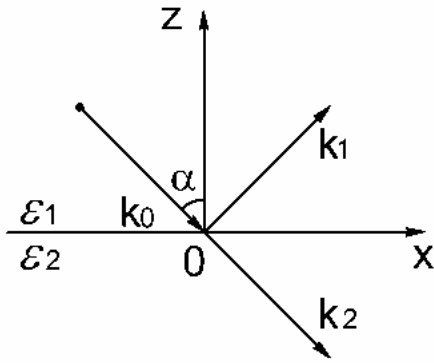
У цієї системи буде два розв'язки – поздовжні та поперечні поляритонні хвилі:

$$\omega_{\parallel} = \omega_f \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\infty}}} > \omega_f - \text{не залежить від } k, \text{ рівняння Саха-Теллера – поздовжня хвиля.}$$

$$\varepsilon(\omega_x) = \varepsilon_{\infty} + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty})\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega_x^2} - \text{поперечна хвиля.}$$



16. Повне внутрішнє відбивання. Ефект Гузе-Хенкеля.



Частина перша.

Розглядається ефект повного внутрішнього відбивання, який реалізується за умов $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ та $\alpha > \pi/2 - \Theta_{fir}$, де

$$\sin \Theta_{fir} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (\text{див. мал.}), \text{ тобто ковзне падіння пучка із}$$

більш оптично густого середовища на межу розділу з менш оптично густим. Цікавим ефектом у цьому випадку видається зміщення відбитого пучка на деяку величину Δx , яку в процесі розгляду необхідно визначити.

У першій частині задачі нами буде знайдений кут повороту поляризації відбитого променя відносно падаючого.

$$\mu = 1, \quad n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}.$$

$$k_{0z} = k_0 \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha;$$

$$|k_2|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_2 = k_{2z}^2 + k_{2x}^2; \quad k_{2x} = k_{0x} = k_0 \sin \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha;$$

$\Rightarrow |k_{2z}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha}$. Оскільки розглядається повне внутрішнє відбивання, то k_{2z} (променя, що пройшов межу розділу) має чисто уявний характер, тобто $k_{2z} = i|k_{2z}|$.

Застосовуючи одну з формул Френнеля: $A_1^{\perp} = \frac{k_{0z} - i|k_{2z}|}{k_{0z} + i|k_{2z}|} A_0^{\perp}$ та враховуючи, що $|A_1^{\perp}| = |A_0^{\perp}|$,

можна представити поворот у вигляді:

$$e^{i\Delta\phi} = \frac{k_{0z} - i|k_{2z}|}{k_{0z} + i|k_{2z}|} = \exp \left[-i \cdot \arctg \left(\frac{2k_{0z}|k_{2z}|}{k_{0z}^2 - |k_{2z}|^2} \right) \right], \text{ тобто:}$$

$$\begin{aligned}
tg(\Delta\phi) &= -2 \frac{k_{0z}|k_{2z}|}{k_{0z}^2 - |k_{2z}|^2} = -2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha \sqrt{-\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha} = -2 \frac{\cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^2 \Theta_{fir}} = \\
&= -2 \frac{\frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \left[-\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}}{\cos \alpha} \right]}{1 - \left[-\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}}{\cos \alpha} \right]^2} = \frac{2tg(\frac{\Delta\phi}{2})}{1 - tg^2(\frac{\Delta\phi}{2})}
\end{aligned}$$

Це означає, що:

$$\boxed{tg(\frac{\Delta\phi}{2}) = -\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \Theta_{fir}}}{\cos \alpha}}.$$

Частина друга.

Тепер, *знаючи* представлення падаючого та відбитого пучків у оберненому просторі – просторі хвильових чисел \bar{k} можна провести обернене Фур'є перетворення і отримати вигляд пучків у прямому просторі. Надалі застосовуватимемо модель ножеподібного пучка – тобто нульової товщини по y .

Розглянемо падаючий пучок:

$\bar{E}_0(\bar{r}, t) = \bar{e}_y \iiint E_0(\bar{k}) e^{i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)} d^3\bar{k}$, де $E_0(k_x, k_y, k_z) = E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \delta(k_y)$. Дельта-функції вказують на монохроматичність та ножеподібність пучка.

$$\begin{aligned}
\bar{E}_0(\bar{r}, t) &= \bar{e}_y \iiint E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \delta(k_y) \exp[i(k_x r_x + k_z r_z) - i\omega t] \cdot k \sin \Theta dk \cdot d\Theta \cdot dk_y = \\
&= \bar{e}_y \iint E_0(\Theta) \delta(|k| - k_0) \exp[i(k_x r_x + k_z r_z) - i\omega t] \cdot k \sin \Theta dk \cdot d\Theta = \\
&= \bar{e}_y \iint E_0(\Theta) \exp[i(k_x^0 x + k_z^0 z) - i\omega t] \cdot k_0 \sin \Theta d\Theta
\end{aligned}$$

де $k_x^0 = k_0 \sin \Theta$, $k_z^0 = k_0 \cos \Theta$, тоді

$$\bar{E}_0(\bar{r}, t) = \bar{e}_y e^{-i\omega t} \int E_0(\Theta) \exp[ik_0(\sin \Theta \cdot x + \cos \Theta \cdot z)] \cdot k_0 \sin \Theta d\Theta.$$

$$\phi_0(x, z) = k_0(\sin \Theta \cdot x + \cos \Theta \cdot z)$$

Нехай пучок падає під кутом Θ_0 до нормалі, тоді напрям \bar{k} визначається кутом $\Theta = \tilde{\Theta}_0 + \psi$, де $\tilde{\Theta}_0 = \pi - \Theta_0$ - напрям «середини» пучка, ψ - малий параметр інтегрування та подальшого розкладу. $|\psi| \ll \Theta_0$.

$$\sin(\tilde{\Theta}_0 - \psi) = \sin(\pi - \Theta_0 - \psi) = \sin(\Theta_0 - \psi);$$

$\phi_0(x, z)$ залежить також від Θ . Щоб перейти до нової змінної ψ введемо відповідну заміну та проведемо усереднення з розкладом по ψ . Тоді $\phi_0(x, z)$ набуває вигляду:

$$\phi_0(x, z) = k_0[x(\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0) - z(\cos \Theta_0 - \psi \sin \Theta_0)].$$

Розглянемо інтенсивність падаючого пучка на межі розділу, тобто $z = 0$. Тоді:

$$I_0(x, z = 0) = c_1 |E_0(x, z = 0)|^2 = c_1 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x(\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2.$$

Знайдемо середину падаючого пучка: $\frac{dI_0(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_0$. Інтенсивність в середині пучка:

$$\begin{aligned}
I_0(x_0) &= c_1 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x_0(\sin \Theta_0 + \psi \cos \Theta_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2 = \\
&= c_2 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[ik_0 x_0 \psi \cos \Theta_0] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2 = c_2 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi) \exp[i\psi \beta_0(x_0)] \sin(\Theta_0 + \psi) d\psi \right|^2,
\end{aligned}$$

де $\beta_0(x_0) = k_0 x_0 \cos \Theta_0$.

Для відбитого пучка ϕ_1 (аналог ϕ_0 падаючого пучка) матиме наступний вигляд:

$\phi_1(x, z=0) = k_0 x \sin \Theta_1 + \Delta\phi(\Theta_1)$, де Θ_1 вказує на напрямок розповсюдження відбитої хвилі і має вигляд $\Theta_1 = \Theta_0 + \psi'$, $|\psi'| \ll \Theta_0$ (кут падіння дорівнює куту відбивання + розклад по новому малому параметру).

Аналогічно проведенням викладкам для падаючого пучка записується інтенсивність відбитого у його центрі x_1 . А саме:

$$I_1(x_1) = c_3 \left| \int E_0(\Theta_0 + \psi') \exp[i\psi' \{\beta_0(x_1) + D\}] \sin(\Theta_0 + \psi') d\psi' \right|^2, \text{ де } D = \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \psi'} \Big|_{\Theta_0}.$$

Згідно закону збереження енергії, інтенсивність падаючого пучка має дорівнювати інтенсивності відбитого, а це свідчить про відповідність вигляду двох інтегралів, отриманих для падаючого і відбитого променя. Отже,

$$\psi'(\beta_0(x_1) + D) = \psi\beta_0(x_0), \quad \beta_0(x_1) + D = \beta_0(x_0), \quad k_0 \cos \Theta_0 x_0 = k_0 \cos \Theta_0 x_1 + D,$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = -\frac{D}{k_0 \cos \Theta_0}, \quad \frac{1}{k_0} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot n_1}.$$

Згідно результату першої частини задачі, D дорівнює наступній величині:

$$D = \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \psi} = -\frac{\sin \Theta_0}{\sqrt{\sin^2 \Theta_0 - \sin^2 \Theta_{fir}}},$$

Отже, зсув визначено як:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\lambda}{2\pi \cdot n_1} \frac{\operatorname{tg} \Theta_0}{\sqrt{\sin^2 \Theta_0 - \sin^2 \Theta_{fir}}}$$

17. Матеріальні рівняння

Рівняння Максвелла-Лоренца:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{h}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{мікро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}(\vec{e}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}(\vec{h}) = 0, \\ \operatorname{div}(\vec{e}) = 4\pi \rho_{\text{мікро}}; \end{cases} \quad (1), \text{ де } \langle \vec{e} \rangle = \vec{E}, \quad \langle \vec{h} \rangle = \vec{B}$$

А ці рівняння вже мають більш вузькі межі застосування:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0, \\ \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi \rho; \end{cases} \quad (2).$$

- 1) Вільні заряди
- 2) Зв'язані заряди
- 3) Магнітний момент

$\langle \vec{j}_{\text{мікроскопічний}} \rangle = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \operatorname{rot}(\vec{M})$ (3), де $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - струм зв'язаних зарядів, \vec{M} - магнітний момент.

$\langle \rho_{\text{мікро}} \rangle = \rho + \rho_{\text{зв}}$ (4), де ρ - густина вільних зарядів, $\rho_{\text{зв}}$ - густина зв'язаних зарядів, та $\rho_{\text{зв}} = -\operatorname{div}(\vec{P})$.

Як відомо $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{A})) = 0$, для $\forall \vec{A}$, тоді:

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{H})) = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div}(\vec{D})) = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi \rho), \text{ звідки } \operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 - \text{рівняння}$$

неперервності (5).

Вільні заряди – це такі заряди, які можуть бути переміщені е/м полем в будь-яку точку речовини.

Зв'язані – заряди, які можуть зміщуватись на відстань порівняно відстані між атомами (сусідніми).

Нехай є високочастотне поле з ω – оптичною частотою). При дії поля з такою частотою виникає внутрішня фотопровідність. домішкові заряди зв'язані, а інші – вільні.

Якщо зв'язаний заряд став вільним, то це не враховується в нашій моделі.



Струму тут не буде, бо точки еквіпотенціальні. Тоді $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ коли з'являється внутрішня фотопровідність. Перепишемо рівняння неперервності:

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\vec{r}, t) \quad (6), \text{ де } S(\vec{r}, t) - \text{функція джерела, що описує явище переходу}$$

зв'язаних зарядів у вільні.

$S(\vec{r}, t) = S_0(T) + \beta I(\vec{r}, t) - S_{\text{рек}}$ (7), де $S_0, \beta, S_{\text{рекомбінації}}$ залежать від конкретних речовин ($S_{\text{рек}}$ – якийсь процес, що йде навпаки – після того, як електрон став вільним, він знову має стати зв'язаним).

Рівняння Максвелла для таких випадків не застосовні, модель точкових частинок – основа рівняння Максвелла-Лоренца.

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{P} = \sum_n q_n \vec{r}_n \text{ (координати } n\text{-го заряду)}.$$

Якщо ми відмовляємося від точкових частинок, то і рівняння Максвелла-Лоренца не виконуються.

\vec{E}, \vec{H} – 12 змінних, але в системі Максвелла-Лоренца лише 8 рівнянь. Тобто кількість змінних перевищує кількість рівнянь.

Матеріальні рівняння:

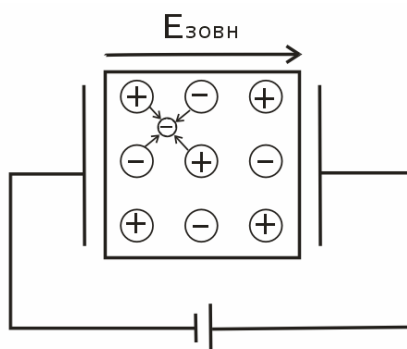
$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) \\ \vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}) \\ \rho = \rho(\vec{E}, \vec{H}) \\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{H}) \end{cases} \quad (8).$$

$$\vec{D}(\vec{E}) = \epsilon \vec{E},$$

$\vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) = \epsilon \vec{E} + \gamma \vec{H}$ (*), де \vec{D}, \vec{E} – полярні вектори, а \vec{H} – аксіальний, тобто γ не може бути константою

Покажемо це детальніше за допомогою оператора інверсії \hat{I} .

$$\hat{I}\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z) \quad (9),$$



$\hat{I}\vec{r} = -\vec{r}, \quad \hat{I}\vec{a} = \vec{a}$ (10), де \vec{a}, \vec{r} – довільні аксіальний та полярний вектори відповідно.

Якщо $j \neq \text{const}$, то рівняння (*) може бути правильним. Універсальних залежностей типу (8) не існує.

Зробимо розклад в ряд Тейлора $D_K(E_K)$. Розглянемо частковий випадок (речовина складається з йонів).

$$E_{am} \sim \frac{e_0}{a_0^2} \sim 10^7 \text{ В/см} - \text{за рахунок того, що заряди дуже близько}$$

один від одного, то поле велике.

$$|E_{зовн}| \ll E_{am}, \quad \alpha = \frac{E_{зовн}}{E_{am}} \ll 1 - \text{за цим параметром малості можна}$$

робити розклад.

$$D_x(E_x) = D_x(0) + C_1 \frac{E_x}{E_a} + C_2 \left(\frac{E_x}{E_a} \right)^2 + \dots \quad (11), \text{ тобто}$$

$D_x(E_x) = D_x^0 + \gamma_1 E_x + \gamma_1 E_x^2 + \dots$ (12), де $\gamma_1 E_x^2$ – доданок, що описує нелінійні явища, а вони виникають при достатньо великих полях і зараз ним можна знехтувати.

Є ряд речовин (сегнетоелектрики, піроелектрики, електретики), де $D_x^0 \neq 0$ (13)

Як приклад застосування таких речовин є мікрофон на електретиках: коли діафрагма рухається – змінюється потенціал, який ми знімаємо. Піроелектрики: турмалін при нагріванні змінює значення діелектричної сталості.

Ми поки що не розглядаємо полярні речовини: $D_x(E_x) = \gamma_1 E_x$.

$\vec{D}(\vec{E}) = \epsilon \vec{E}$, (14) – частковий випадок, що має місце в ізотропних речовинах;

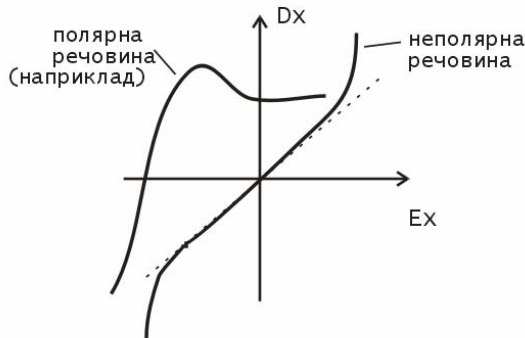
Коли речовина не є ізотропною, то вираз для D_x матиме такий вигляд:

$$D_x(E_x, E_y, E_z) = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \quad (15),$$

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (16),$$

$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ (17) – Буде лише 6 незалежних компонент.

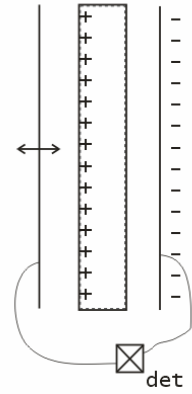
При великих полях:



$\vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$ – фізичний ефект, що ілюструє цю залежність:

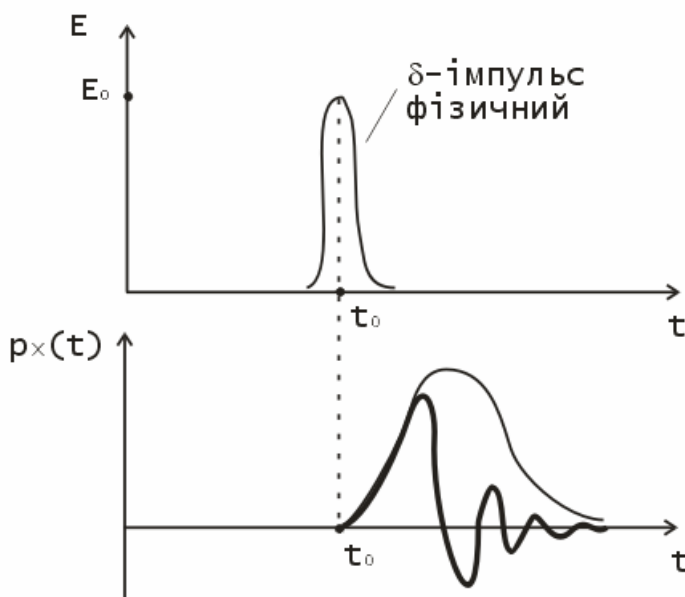
$$\text{rot}(\vec{H}(\vec{r}, \omega)) \sim \vec{H}(\vec{r}, \omega) \rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial x_j}, \text{ тоді } D_i = \epsilon_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \quad (19),$$

де $\gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}$ описує оптичну активність – це не сильне явище. Всі речовини мають діелектричну проникність ϵ , але не всім притаманна оптична активність.



18. Динамічні властивості. Границі застосування макроскопічних рівнянь Максвела

Запишемо вирази для P і D :



$$P = \chi E$$

$$D = \epsilon E$$

Штовхнули систему

$$P_x \sim \chi,$$

$$P_x(t) = E_0 \chi(t - t_0) \quad (1)$$

$$P_x(t) = \sum \chi(t - t_n) E_n \quad (2)$$

$$t_n \leq t, \quad t - t_1 = \tau$$

$$P_x(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{xx}(t - t_1) E_x(t_1) dt_1 \quad (3)$$

$$P_x(t) = \int_0^{\infty} \chi_{xx}(\tau) E_x(\tau - t) d\tau \quad (4)$$

(формули виражають принцип причинності)

$$\chi \rightarrow P \begin{cases} \chi(\tau = 0) = 0 \\ \chi(\tau \rightarrow \infty) = 0 \end{cases} \quad (5), \quad \text{де перший}$$

вираз в системі- математичний прояв

інерційності, а другий виражає те, що система з нескінченною пам'яттю не існує.

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{ij}(t-t_1) E_{jx}(t_1) dt_1 \quad (6) \\ P_i(t) = \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau) E_j(\tau-t) d\tau \quad (7) \end{array} \right. \quad \text{- узагальнення для анізотропних речовин.}$$

$$D_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ij}(\tau) E_j(\tau-t) d\tau \quad (9), \text{ причому } \varepsilon_{ij}(\tau < 0) = 0 \quad (10).$$

Не можна казати $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, $\vec{P} = \sum_n q_n \vec{r}_n$

Означення тензора діелектричної проникливості:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \delta(\tau) + 4\pi\chi_{ij}(\tau) \quad (11), \text{ де } \delta_{ij} \text{ – символи Кронекера.}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ E_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{array} \right\} \quad (12) \text{ інтеграли Фур'є}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) E_j(\tau-t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} \right] E_j(\omega) e^{-i\omega t} \quad (13), \text{ (див. формулу (9)), де}$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varepsilon_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (14).$$

Щоб інтеграли в (13) були рівні необхідно, щоб під інтегральні ф-ї були рівними:

$$D_i(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega), \quad \varepsilon_{ij} \text{ - безрозмірна величина.}$$

$$\vec{P} = \vec{P}^{(0)} + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \dots$$

$$P_i^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \chi_{ijk}(\tau_1, \tau_2) E_j(\tau - \tau_1) E_k(\tau - \tau_2) \quad (16)$$

$$P_i^{(2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{ijk}(\omega_1, \omega - \omega_1) E_j(\omega) E_k(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (17).$$

(ефекти другого порядку описуються нелінійною поляризацією)

χ_{ijk} - нелінійна поляризованість другого порядку.

19. Операції симетрії

Операції симетрії – алгоритм руху, при якому реалізуються тотожні перетворення системи.

Відповідно, група симетрії – сукупність усіх можливих операцій симетрії для даного об'єкту.

$$\hat{G} = \hat{G}(G_1, G_2, \dots)$$

Властивості груп:

$$1. \quad EG_N = G_N$$

$$2. \quad \text{Є асоціативний некомутативний добуток}$$

$$3. \quad G_N G_N^{-1} = E$$

Точкова група – така, що хоча б одна точна лишається нерухомою.

Основні приклади точкових груп:

1. Обертання C_n^u , $\phi = \frac{2\pi}{n}$, u – вісь
2. Відбивання: σ_h , σ_v , σ_d - horizontal, vertical and diagonal respectively.
3. Дзеркальне відбивання S_{2n} , добуток двох попередніх.
4. Інверсія \hat{I}

Піроелектрикам характерне таке перетворення симетрії

$$a_{ij}(G) = \delta_{iz}$$

Справді, при цьому не виконується перетворення симетрії і з'являються умову для спонтанної поляризації - виникнення сегнетоелектриків.

Теорема. Тензори, що описують матеріальні властивості речовини є інваріантами групи симетрії цієї речовини

Доведемо на прикладі діелектричної проникності.

$$a_{ii'}(C_4^z) a_{jj'}(C_4^z) \varepsilon_{ij'}^0 = \varepsilon_{ij}^0 \quad (*)$$

$$\varepsilon_{ij}(G) = \varepsilon_{ij}^0$$

В матричному вигляді:

$$a(G) \varepsilon^0 a^T(G) = \varepsilon^0 \quad (**)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(**) \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$$

доведено.

Ця теорема показує, що означення тензора операції симетрії узгоджується з означенням тензора (*).

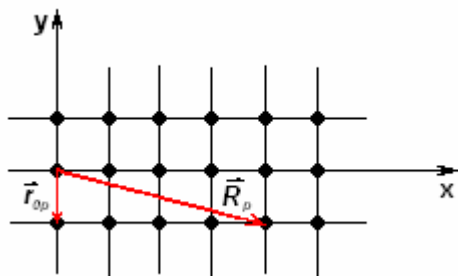
20. Класична теорія діелектричної проникності.

Інваріантної формули для діелектричної проникності практично немає.

$$\vec{P} = \sum_p q_p \vec{R}_p(t) \quad (1) \quad p - \text{номер частинки} \quad \text{Модель гарм. осцилятора}$$

$$\vec{P} = \sum_f N_f q_f \vec{R}_f(t) \quad (2) \quad f - \text{номер групи}$$

$$\text{NaCl} : m_p (\ddot{\vec{R}}_p + \Gamma \dot{\vec{R}}_p + \omega_p^2 \vec{R}_p) = q_p \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3)$$



$$\vec{r} = \vec{r}_{op} + \vec{R}_p$$

(r_{op} - координати центру, R_p - зміщення)

$$\vec{E} = \vec{E}_o \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] \quad (4) \quad (\text{для одночасного коливання})$$

$$(3) \Rightarrow \vec{R}_p \rightarrow (1) \Rightarrow (5)$$

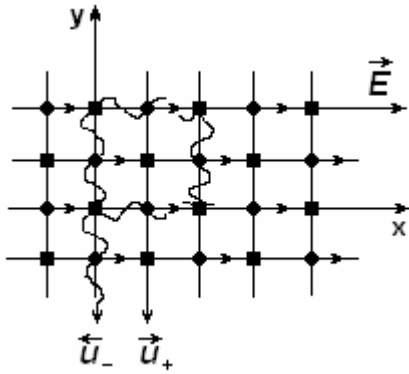
$$\vec{P} = \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (5) - \text{поляризація}$$

$$(\vec{P} = \chi(\omega) \vec{E}(\omega))$$

$$\chi(\omega) = \sum_f \frac{N_f q_f^2 / m_f}{\omega_p^2 - \omega^2 - i\Gamma_f \omega} \quad (6)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) \quad (7)$$

Маємо іонний кристал A^+B^-



ФНМО – фізично нескінченно-малий об'єм

$\lambda \gg a_0$ – період ґратки іону

$\lambda \gg L \gg a_0$

Всі атоми одного знаку зміщуватимуться однаково

(виділимо підґратки і будемо писати р-ня руху для одновимірного випадку)

(відносно жорстка конструкція)

В загальному випадку $\vec{u}(\vec{r})$ – функція від координат, бо в іншому фізично меншому об'єкті інший зсув, тому що інакше поле. Підґратки – елементи жорсткі, р-ня для їх зміщення :

$$M_+ \ddot{\vec{u}}_+ = -Q_0(\vec{u}_+ - \vec{u}_-) - b_0(\vec{u}_+ - \vec{u}_-)^2(\vec{u}_+ - \vec{u}_-) + q\vec{E}_g^+ \quad (8)$$

$$M_- \ddot{\vec{u}}_- = -Q_0(\vec{u}_- - \vec{u}_+) - b_0(\vec{u}_- - \vec{u}_+)^2(\vec{u}_- - \vec{u}_+) - q\vec{E}_g^- \quad (9)$$

$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ - потенціал взаємодії (функція координат, сила взаємодії від різниці координат)

(розклавши в ряд, взяли до кубічного члена ; квадрат пропаде, бо $(\vec{u}_- - \vec{u}_+)^2$ - не вектор, + врахування симетрії)

b_0 - константа ангармонізму



E_g^+ – одиночне поле на іон \oplus



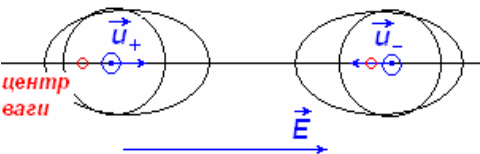
E_g^- – на іон \ominus

$$\vec{E}_g^+ = \vec{E}_g^- = \vec{E}_g \quad (10) \quad (\text{якщо скласти (8),(9) – середня сила} = 0, \text{ не рухає кристал})$$

$\vec{u} \equiv \vec{u}_+ - \vec{u}_-$, тоді, віднявши (9) від (8), отримаємо :

$$\mu_* \ddot{\vec{u}} = -Q_0 \vec{u} - b_0 (\vec{u})^2 \vec{u} + q\vec{E}_g \quad (11)$$

$$\frac{1}{\mu_*} = \frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-}, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{Q_0}{\mu}} \quad (12)$$



$$\vec{P}_{\text{іон}} = Nq(\vec{u}_+ - \vec{u}_-) = Nq\vec{u} \quad (13) \quad \text{– правильно, але тільки для іонного внеску}$$

(в загальному випадку необхідно врахувати електронний внесок, пов'язаний із зміною положення електрона)

$$\vec{P}_{\text{ел}} = N(\alpha_+ + \alpha_-)\vec{E}_g \quad (14)$$

(α_{\pm} – поляризованість атомів, \vec{E}_g – діюче поле)

$$\vec{E}_g = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} \quad (15) \quad (\text{E – зовнішнє поле})$$

(15) універсальним чином описує поле в кристалі

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{іон}} + \vec{P}_{\text{ел}} = Nq\vec{u} + N(\alpha_+ + \alpha_-)\vec{E}_g \quad (16)$$

(\vec{P} - загальна поляризація)

$$\begin{aligned}\vec{P} &= Nq\vec{u} + N(\alpha_+ + \alpha_-) \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) = Nq\vec{u} + (\alpha_+ + \alpha_-) \vec{E} + N(\alpha_+ + \alpha_-) \frac{4\pi}{3} \vec{P} \\ \vec{P} \left[1 - \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-) \right] &= Nq\vec{u} + N(\alpha_+ + \alpha_-) \vec{E} \\ \left. \begin{aligned} q_* &\equiv \frac{q}{1 - \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-)} \\ \chi_{el} &\equiv \frac{N(\alpha_+ + \alpha_-)}{1 - \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-)} \end{aligned} \right\} \quad (17)\end{aligned}$$

$$\vec{P} = Nq_*\vec{u} + \chi_{el}\vec{E} \quad (18)$$

$$\vec{E}_g = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} Nq\vec{u} + \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-) E_g$$

$$E_g = \frac{E + \frac{4\pi}{3} Nq\vec{u}}{1 - \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-)} \quad (19) \quad (\text{підставимо в (11)})$$

$$\mu_* \ddot{u} = -Q_0 \vec{u} - b_0 \vec{u}^2 \vec{u} + q \frac{\vec{E} + \frac{4\pi}{3} Nq\vec{u}}{1 - \frac{4\pi}{3} N(\alpha_+ + \alpha_-)} = -Q_0 \vec{u} - b_0 \vec{u}^2 \vec{u} + q_* \left(\vec{E} + \frac{4\pi}{3} Nq\vec{u} \right)$$

$$\mu_* \ddot{u} = -Q_1 \vec{u} - b_0 (\vec{u})^2 \vec{u} + q_* \vec{E} \quad (20)$$

$$Q_1 = Q_0 - \frac{4\pi}{3} q_* q$$

$$Q_1 = \mu_* (\omega_0^2 - \omega_q^2); \quad \omega_q^2 = \frac{4\pi N q q_*}{3\mu_*} \quad (21) - \text{узагальнена межова частота}$$

ω_0 – резонансна частота

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{3m}} \quad (22) - \text{плазмова частота}$$

Розглянемо 2 випадки :

- 1) $\omega_0 > \omega_q$ - нічого не буде, $Q_1 > 0$;
- 2) $\omega_0 < \omega_q$ - $Q_1 < 0$, $\mu_* \ddot{u} = -Q_1 \vec{u}$ (інші ефекти) .

$$E_g = \frac{E + \frac{4\pi}{3} Nq\vec{u}}{1 - \frac{4\pi N}{3} (\alpha_+ + \alpha_-)} - \text{поляризаційна катастрофа, знаменник} = 0$$

$$E_g \neq \infty, \text{ тому будемо розглядати випадки } \frac{4\pi N}{3} (\alpha_+ + \alpha_-) < 1 \quad (23)$$

$$\mu_* (\ddot{u} + \Gamma \dot{u}) = -Q_1 \vec{u} - b_0 (\vec{u})^2 \vec{u} + q_* \vec{E} \quad (24)$$

(колись к-нт Q_1 відповідав за резонанс)

$$Q_1 = \mu_* (\omega_0^2 - \omega_q^2), \omega_q = \sqrt{\frac{4\pi N q q_*}{3\mu_*}} \quad (25) - \text{схожа на плазмову частоту}$$

21. Сегнетоелектрики .

Розглядаємо речовини, в яких ω_0 та ω_q дуже малі. Може бути навіть $\omega_0 \approx \omega_q$

1) Нехай $Q_1 > 0$ ($\omega_0 > \omega_q$) (1)

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_q^2} \quad (2)$$

Параметричний стан ($b_0(\vec{u})^2 \vec{u} \ll 1$)

В лінійному наближенні може бути таке, що $\vec{u} \approx \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \chi_p(\omega) \vec{E}$ (3)

Якщо брати до уваги нелінійні члени з (24) :

$$\vec{P} = \chi_p(\omega) \vec{E} + \chi^{(3)} E^3$$

$$\chi_p(\omega) = \chi_{el} + \frac{Nq_*^2 / \mu_*}{\omega_p^2 - \omega^2} \quad (\Gamma \rightarrow 0) \quad (4) \quad (\text{всі величини перенормовані})$$

2) $Q_1 < 0$ ($\omega_0 < \omega_q$) (5)

$$\mu_* \ddot{\vec{u}} = |Q_1| \vec{u} - b_0(\vec{u})^2 \vec{u} + q_* \vec{E} \quad (6)$$

Розв'язок може мати вигляд $e^{\lambda t}$ (але ж при $\lambda \rightarrow \infty$ p-зок $\rightarrow \infty$, при $\lambda \rightarrow -\infty$ p-зок $\rightarrow -\infty$)

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_0 + \Delta \vec{u}(t) \quad (7)$$

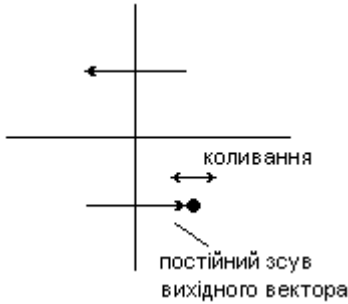
$$\mu_* \Delta \ddot{\vec{u}} = |Q_1| \vec{u}_0 + |Q_1| \Delta \vec{u} - b_0(\vec{u}_0 + \Delta \vec{u})^2 \vec{u}_0 - b_0(\vec{u}_0 + \Delta \vec{u})^2 \Delta \vec{u} + q_* \vec{E}(t) \quad (8)$$

Величина $\Delta \vec{u}(t)$ пов'язана з полем. Коли $\Delta \vec{u}$ - мале, ним нехтуємо :

$$(-|Q_1| + b_0(\vec{u}_0)^2) \vec{u}_0 = 0 \quad (9)$$

$$\vec{E} = \vec{e}_z E_z(t) \quad (10) \quad \text{— не обов'язково залежить від часу.}$$

Розглянемо одновимірний випадок.



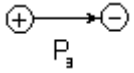
$$\mu_* \Delta \ddot{u}_z = [|Q_1| - 3b_0 u_{0z}^2] \Delta u_z + q_* E_z(t) \quad (11)$$

$$u_z = u_{0z} + \Delta u_z(t) \quad (u_{0z} \text{ — статична компонента})$$

$$u_{0z} = \sqrt{\frac{|Q_1|}{b_0}} \quad (12) \quad (\text{з (9)})$$

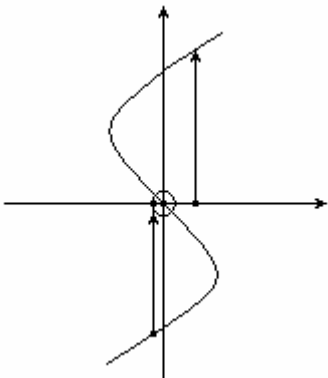
$$\vec{u} = \vec{u}_+ - \vec{u}_-$$

З'являється спонтанна поляризація (\rightarrow діелектричний стан)



Отже (5) : $Q_1 < 0$, $\omega_0 < \omega_q$: діелектричний стан

$$\mu_* \Delta \ddot{u} = [-2b_0 u_{0z}^2] \Delta u_z + q_* E_z(t)$$



$$\mu_* \Delta \ddot{u} = [-2|Q_1|] \Delta u_z + q_* E_z(t)$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \Delta \vec{P} \quad (13)$$

$$\Delta P = \chi_s(\omega) \vec{E} \quad (14)$$

$$\chi_f(\omega) = \chi_{el} + \frac{Nq_*^2 / \mu_*}{\omega_f^2 - \omega^2} \quad (15) \quad f = p, s$$

$$\omega_s = \sqrt{2(\omega_q^2 - \omega_0^2)} \quad (16)$$

Проблема поляризаційної катастрофи :

$$q_* = K_p q = \frac{q}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)}$$

$$\varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon_{zz}^\infty + \frac{(\varepsilon_{zz}^0 - \varepsilon_{zz}^\infty)\omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega^2} \quad (17)$$

$$\hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\hat{\chi} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{zz}^\infty = 1 + 4\pi\chi_{el} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = 1 + \frac{4\pi N q_*^2}{\mu_* \omega_f^2} \quad (20)$$

Проаналізуємо формулу (19): $\varepsilon_{zz}^\infty - 1 = \frac{1 - 3\frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)} = \frac{1 - 3x}{1 - x} \quad (21)$

$$x = \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-) = \frac{\varepsilon_{zz}^\infty - 1}{\varepsilon_{zz}^\infty + 2} \quad (22)$$

$$K_p = \frac{1}{1 - \frac{4\pi N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)} = \frac{\varepsilon_{zz}^\infty + 2}{3} > 0 \quad (23)$$

ε_{zz}^∞ – експериментально визначена величина

$$q_* = q \left(\frac{\varepsilon_{zz}^\infty + 2}{3} \right) \quad (24)$$

Інформацію можна записувати за допомогою сегнетоелектриків у об'ємі (розподіл P в об'ємі).

Наприклад : $LiNbO_3Fe$, SBN

Поки що невідомо, як її використати і «витягнути».

Самостійна робота студентів.

1. Циліндричні хвилеводи та резонатори. ТЕ, ТМ, та ТЕМ хвилі.

Збудження і поширення електромагнітних хвиль у циліндричних трубах має дуже велике практичне значення. Якщо труба має торцеві стінки, вона називається резонатором, якщо ні – хвилеводом. Рівняння Максвела для такої системи перепишеться таким чином:

$$\text{rot}\vec{E} = \frac{i\omega}{c}\vec{B} \quad \text{rot}\vec{B} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\vec{E} \quad \text{div}\vec{E} = 0 \quad \text{div}\vec{B} = 0$$

$$\left(\Delta + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0$$

З даних рівнянь випливає:

$$\left(\Delta + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{B} = 0$$

(В середині хвилеводу залежність полів від часу вважаємо синусоїдальною, що й обумовлює вигляд рівнянь Максвела). Завдяки циліндричній симетрії системи можна виділити залежність поля від координати “z”:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)e^{\pm i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y)e^{\pm i(kz - \omega t)}$$

Беручи відповідні лінійні комбінації можна отримати як біжучі, так і стоячі хвилі. Якщо врахувати вищенаведені залежності полів від “z”, то хвильові рівняння перепишуться у вигляді:

$$\left(\Delta_t + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right) \vec{E} = 0$$

$$\left(\Delta_t + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right) \vec{B} = 0$$

Δ_t - поперечна частина оператора Лапласа: $\Delta_t = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Поля ми також розбиваємо на прокольну і поперечну частини: $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$, де $\vec{E}_z = (\vec{E} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$, $\vec{E}_t = [\vec{e}_3 \times \vec{E}] \times \vec{e}_3$, де \vec{e}_3 - одиничний вектор, направлений паралельно осі Z. Аналогічно можна розкласти і вектор магнітної індукції. Перетворюючи рівняння Максвелла і використовуючи явну залежність полів від OZ можна зв'язати поперечні і поздовжні складові рівностями:

$$\vec{E}_t = \frac{1}{\mu \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) - k^2} \left(\text{grad}_t \frac{\partial E_z}{\partial z} + i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \vec{e}_3 \times \text{grad}_t B_z \right)$$

$$\vec{B}_t = \frac{1}{\mu \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) - k^2} \left(\text{grad}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \vec{e}_3 \times \text{grad}_t E_z \right)$$

З цих співвідношень слідує, що для повного опису полів достатньо знати лише складові E_z, B_z . В якості граничних умов на стінках запишемо рівняння: $\vec{n} \vec{B} = 0$, $\vec{n} \times \vec{E} = 0$. Як бачимо ці умови повністю узгоджуються з рівняннями Максвелла і потрібно задати лише умову для компоненти E_z : $E_z = 0$ на стінках хвилеводу. Для нормальної компоненти магнітного поля ми можемо математично записати умову, використовуючи зв'язок B_z з B_t : $\frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_s = 0$. Таким чином двовимірні хвильові рівняння разом з початковими умовами утворюють задачу на власні числа та функції, яка має розв'язки при заданих ω лише при певних k .

Оскільки умови для електричного і магнітного полів строго кажучи різні, вони можуть не виконуватися одночасно. Хвилі діляться на групи:

- Поперечно магнітні хвилі (ТМ) - $B_z = 0$ всюди з межевими умовами $E_z \Big|_s = 0$;
- Поперечно електричні хвилі (ТЕ) - $E_z = 0$ всюди з межевими умовами $\frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_s = 0$;
- ТЕМ хвилі, в яких і електрична і магнітна z-ові компоненти рівні 0 одночасно. З рівнянь зв'язку між поперечними та поздовжніми компонентами видно, що такі хвилі можуть існувати лише тоді, коли $k = \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{\omega}{c}$

2. Коефіцієнт затухання хвиль у однозв'язних хвилеводах.

Знаючи рівняння Максвелла, та для початку розглянувши ТЕ-хвилі, ми одержимо такі співвідношення $H_x = -\frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}$; $H_y = \frac{i\omega}{c\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$. Тепер випишемо вираз для тангенціальної складової магнітного поля:

$$\vec{H}_t = \vec{i} H_x + \vec{j} H_y. \chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2. \text{ - Впливає з рівняння Гельмгольца } \Delta_2 E_z + \chi^2 E_z = 0.$$

Межовою умовою буде така: $E_z = 0$ - на контурі перерізу(потік не виходить за межі хвилеводу). Враховуючи, що у нас металічний хвилевід, запишемо вираз для середнього значення вектора Умова-Пойнтінга:

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ [\vec{E} \times \vec{H}^*]_z \} = \frac{\omega k_z}{8\pi \chi^4} |\nabla_2 E_z|^2 - \text{ по осі } z, \text{ тому що розглядаємо поширення}$$

променів уздовж цієї осі. А тепер знайдемо повний потік енергії по контуру:

$$W = \int_{\Sigma} \langle S_z \rangle df.$$

Скористаємось відомим співвідношенням:

$$\int_{\Sigma} |\nabla_2 E_z|^2 df = \oint_{\Gamma} E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int_{\Sigma} E_z^* \Delta E_z df. \text{ Враховуючи межову умову, та рівняння Гельмгольца,}$$

остаточно отримаємо вираз:

$$W = \frac{\omega k_z}{8\pi \chi^2} \int_{\Sigma} |E_z|^2 df.$$

Для урахування омичного опору стінок хвилеводу проведемо ще деякі викладки.

Згадаємо співвідношення $\vec{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\vec{H}_t \times \vec{n}]$, де $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ - поверхневий імпеданс метала.

Запишемо вираз для середнього вектора Умова-Пойнтінга: $\langle \vec{S}_n \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_t \times \vec{H}_t] = \frac{c \xi'}{8\pi} |\vec{H}_t|^2 \vec{n}$.

Деякі пояснення: $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \xi' + i \xi'' = \xi$.

Аналогічно до виразу для потоку без втрат розрахуємо вираз для потоку енергії(на одиницю довжини) з втратами:

$$W' = \frac{c \xi'}{8\pi} \oint_{\Gamma} |\vec{H}_t|^2 dl. \text{ Або } W' = \frac{c \xi'}{8\pi \chi^4} \oint_{\Gamma} |\nabla_2 E_z|^2 dl.$$

Тепер уже можемо записати $\alpha = \frac{W'}{W}$.

$$\text{Отже, } \alpha = \frac{\omega \xi'}{2 \chi^2 k_z c} \frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2 dl}{\int |E_z|^2 df}$$

І для Н – хвилі:

$$\alpha = \frac{c \chi^2 \xi'}{2 k_z \omega} \frac{\oint \{ |H_z|^2 + (k_z^2 / \chi^4) |\nabla_2 H_z|^2 \} dl}{\int |H_z|^2 df}$$

$$\xi = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{8 \pi \sigma}}.$$

Але так можна писати лише для області частот, у якій провідність виражається через діелектричну проникність.

Для Н-хвилі аналогічно як і для Е-хвилі проводяться викладки.

3. Коефіцієнт затухання TEM хвиль у коаксіальних хвилеводах.

Розглянемо TEM хвилю – головна хвиля для коаксіальних хвилеводів. В такому випадку: $E_z, H_z = 0$ всюди, $\chi = 0$. Отже дана хвиля по своїм параметрам дуже схожа на хвилю, яка поширюється у вільному просторі. Зв'язок між поперечними компонентами залишається:

$$\vec{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\vec{H} \times \vec{n}]$$

Для полів також запишуться умови:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \Rightarrow \vec{E}_t = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}, \text{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \text{div}\vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

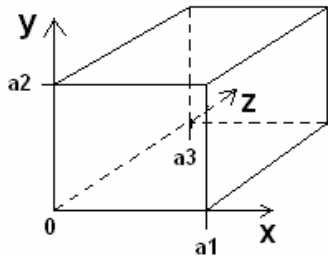
Нехай затухання буде невеликим. Тоді розглядаючи поля на стінках хвильоводу ми маємо право вважати, що $E_\varphi = 0$. Таким чином ми всі компоненти полів можемо переписати через похідні від потенціалу всередині хвильоводу і використовуємо ті ж самі формули:

$$W = \iint_S \vec{S} n d\sigma = \frac{c\xi'}{8\pi} \iint_S |H_t|^2 d\sigma \text{ та } W' = \frac{c\xi'}{8\pi} \oint_\Gamma |\vec{H}_t|^2 dl,$$

підставивши в них H_t отримаємо:

$$\alpha = \frac{\xi'}{2} \frac{\oint |\nabla_t \varphi|^2 dl}{\iint |\nabla_t \varphi|^2 df}$$

4. Електромагнітні коливання у прямокутному резонаторі.



Осі x, y, z , вибираємо по трьом ребрам паралелепіпеда, що мають довжини a_1, a_2, a_3 . Запишемо рівняння Гельмгольца для нашого випадку:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E} = 0;$$

Для початку розглянемо x -ову компоненту напруженості:

$$\Delta E_x - k^2 \cdot E_x = 0;$$

Розв'язуючи це з межевими умовами $E_t = 0$ (тангенц. складова),

одержимо:

$$E_x = A_1 \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}.$$

Аналогічний вираз отримаємо для інших ел. компонент, де

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{a_1}; k_y = \frac{n_2 \pi}{a_2}; k_z = \frac{n_3 \pi}{a_3}.$$

Тут n_1, n_2, n_3 - цілі позитивні числа. А тепер пам'ятаючи про вираз для дивергенції ел. поля і інші компоненти ел.поле поля, знайдемо $A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0$,* а власні частоти

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Компоненти магнітного поля вираховуються з вищезаписаної формули (запишемо вираз для x -ової координати) з допомогою роторного вигляду рівняння Максвелла :

$$H_x = -i \frac{c}{\omega} \cdot (A_3 k_y - A_2 k_z) \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \cdot \exp(-i\omega t).$$

Проведемо аналіз отриманих залежностей, помітимо, коли всі числа n_1, n_2, n_3 - нулі, то поле теж нульове. Таким чином першій (найменшій) частоті відповідає коливання, в якому одне з чисел рівне нулю, а два інших - одиниці. Враховуючи формулу *, бачимо, що кожна власна частота - двократно вироджена. Частоти, для яких одне з чисел рівне нулю - не вироджені.

5. Електромагнітні коливання у циліндричному резонаторі.

В якості моделі резонатора беремо круглий циліндр, запаяний з обох кінців металевими стінками з провідника. Оскільки ми хочемо аналізувати стоячі хвилі в резонаторі, то залежність полів від z повинна задаватися умовою:

$$A \sin kz + B \cos kz$$

Причому для ТЕ і ТМ хвиль коефіцієнти будуть різними. Нехай торцеві стінки розміщені в координатах $z = 0, z = d$. Тоді граничні умови виконуються лише при значеннях k , які задовольняють умовам:

$$k = \frac{n\pi}{d}, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots$$

Для ТМ коливань з умови перетворення компоненти E_z в нуль отримаємо:

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right), n \in N$$

Аналогічно для ТЕ коливань з умови перетворення B_z в нуль маємо:

$$B_z = \psi(x, y) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right)$$

Поперечні компоненти поля всередині хвилеводу (резонатора) виражаються через поздовжні (див. ТЕ, ТМ хвилі СРС №1).

ТМ хвилі:

$$E_t = -\frac{n\pi}{\chi^2 d} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \text{grad}_t \psi$$

$$B_t = \frac{i\mu\epsilon\omega}{\chi^2 c} \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) [\vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi]$$

ТЕ хвилі:

$$E_t = -\frac{i\omega}{\chi^2 c} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) [\vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi]$$

$$B_t = \frac{n\pi}{\chi^2 d} \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \text{grad}_t \psi$$

Граничні умови очевидно виконуються. $\chi^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$

Кожне значення χ задає власну частоту резонатора:

$$\omega_n = \frac{c^2}{\mu\epsilon} \left[\chi^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]$$

Таким чином резонатор характерний дискретним набором частот можливих коливань, які утворюють стоячі хвилі.

6. Добротність резонатора.

Як відомо резонатори мають дискретні резонансні частоти коливань, яким відповідають певні конфігурації полів. Тобто це значить, що яким би способом ми не намагались збудити коливання даного типу, ніяких полів правильної форми не виникне доти, поки частота збудження не буде в точності рівною резонансній. В дійсності резонансна крива немає вигляду δ -функції, а навколо резонансної частоти є деякий досить вузький інтервал частот, всередині якого можливе помітне збудження резонатора. Найбільш суттєвою причиною «розпливання» піку є втрати в стінках, а також в заповнюючому його діелектрику. Мірою гостроти резонанса по відношенню до зовнішнього впливу є добротність резонатора – Q , що визначається відношенням середньої енергії, запасеної в резонаторі, до енергії, що втрачається за період коливань:

$$Q = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\text{Запасена енергія}}{\text{Потужність втрат}}; \quad (1).$$

тут ω_0 - резонансна частота при відсутності втрат. Згідно закону збереження енергії, потужність омичних втрат рівна взятій з протилежним знаком похідній по часу запасеній енергії. Тому формулу (1). перепишемо у вигляді рівняння для U :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2 \cdot \pi \cdot Q} \cdot U,$$

звідки

$$U(t) = U_0 \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t / 2 \cdot \pi \cdot Q). \quad (2).$$

Запасена в початковий момент енергія U_0 експоненційно спадає зі швидкістю обернено-пропорційною Q . Часова залежність (2). означає, що коливання поля в резонаторі затухають по закону

$$E(t) = E_0 \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t / 4 \cdot \pi \cdot Q) \cdot \exp(-i \cdot \omega_0 \cdot t). \quad (3).$$

Такого роду затухаючі коливання мають не одну частоту, а являють собою суперпозицію частот, розміщених в околі $\omega = \omega_0$. Таким чином,

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) d\omega, \text{ де}$$

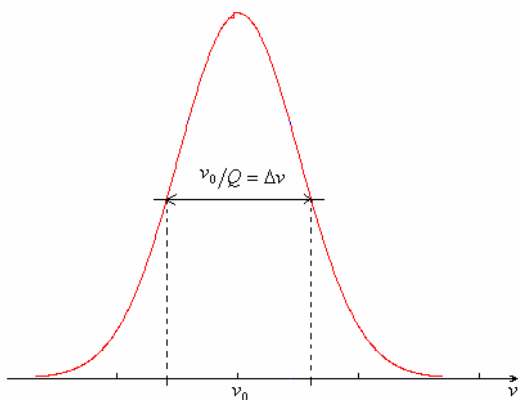
$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{\infty} E_0 \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t / 4 \cdot \pi \cdot Q) \cdot \exp(-i \cdot (\omega - \omega_0) \cdot t) dt. \quad (4).$$

Інтегрування (4). Приводить до частотного розподілу енергії в резонаторі, що має вигляд лоренцового піку:

$$|E(\nu)|^2 \sim \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\nu_0 / 2 \cdot Q)^2}. \quad (5).$$

Ну зрозуміло, що зробили преехід від кутової частоти до лінійної за всім відомою формулою. У резонансного піка (5)., зображеного на рисунку повна ширина на висоті, що рівна половині максимальної (яку часто називають півшириною), складає $\nu_0 / Q = \Delta \nu$. Звідси

знайдемо добротність резонатора $Q = \frac{\nu_0}{\Delta \nu}$.



Для визначення добротності необхідно розрахувати середню по часу енергію, накопичену в резонаторі, а потім знайти потужність, що поглинається в стінках. Обмежимося тут розглядом циліндричного резонатора. Слід відмітити, що викладки по знаходженню запасеного поля в резонаторі подібні до викладок по хвилеводу. А тому ми їх зараз і приведемо.

Для початку запишемо кінцеву формулу для енергії:

$$U = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \frac{d}{4} \left\{ \frac{\epsilon}{\mu} \right\} \left[1 + \left(\frac{\rho\pi}{\gamma_\lambda d} \right)^2 \right] \int_A |\psi|^2 da, \text{ це буде формула (6).}$$

Розглянемо хвильове рівняння для резонатора:

$(\Delta + \gamma^2) \cdot \psi = 0$. Маємо для z -ової компоненти задачу Штурма-Ліувіля з такими умовами – функція хвильова зануляється в на торцях резонатора. Скажімо тоді $z=0$ і $z=d$.

$$Z(z) = A \cdot \cos k \cdot z + B \cdot \sin k \cdot z;$$

Звідси:

$$k = \frac{p \cdot \pi}{d}, \text{ де } p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Слід сказати, що $\gamma^2 = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, де k - це є вищезаписаний вираз. Оце все впливає з рівнянь Максвелла (див. семінарські заняття).

Для омичних втрат потужності матимемо:

$$P_{BT} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2} \right] \frac{1}{2\sigma\delta\mu^2} \left[\oint_C dl \int_0^a dz |\vec{n} \times \vec{B}|_{бок}^2 + 2 \int_A da |\vec{n} \times \vec{B}|_{торц}^2 \right]$$

$$P_{BT} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2} \right] \frac{\varepsilon}{\sigma\delta\mu} \left[1 + \left(\frac{\rho\pi}{\gamma_\lambda d} \right)^2 \right] \left(1 + \xi_\lambda \frac{Cd}{4A} \right) \int_A |\psi|^2 da$$

Нижня формула записана для ТМ-мод ($p \neq 0$). Тут ξ_λ - безрозмірне число, C – довжина контура поперечного перерізу резонатора, A – площа поперечного перерізу, δ - товщина скіншару, рівна

$$\delta = \frac{1}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}$$

Тут σ, ω, μ - відповідно провідність, частота хвилі, магнітна проникність.

Користуючись вищевведеним означенням добротності, отримаємо остаточну відповідь на поставлене питання:

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1}{4\pi \left(1 + \xi_\lambda \frac{Cd}{4A} \right)}$$

де μ_c - магнітна проникність металічних стінок резонатора.

Зміст.

1. Наддипольне випромінювання	3
2. Приклади наддипольного випромінювання	4
3. Випромінювання колового струму	5
4. Випромінювання простих квадрупольних систем	6
5. Випромінювання лінійних антен	7
6. Випромінювання диполя в ближній зоні	8
7. Сила променевого тертя	10
8. Класичний час життя атома	11
9. Ширина лінії випромінювання	12
10. Теорія дифракції Кірхгофа	13
11. Математичне формулювання принципу Гюйгенса	14
12. Дифракція електромагнітних хвиль в Гаусовій діафрагмі	16
13. Проходження світла крізь лінзу	17
14. Дифракційна теорія фокусної плями	19
15. Фотони і полярони	20
16. Повне внутрішнє відбивання. Ефект Гуза-Хенкеля	22
17. Матеріальні рівняння	24
18. Динамічні властивості. Границі застосування макроскопічних рівнянь Максвелла	26
19. Операції симетрії	27
20. Класична теорія діелектричної проникності	28
21. Сегнетоелектрики	31

СРС

1. Хвилеводи та резонатори (прямокутний, круглий, хвилі типу ТМ, ТЕ, ТЕМ)	32
2. Коефіцієнт затухання хвиль у однозв'язних хвилеводах	33
3. Затухання хвиль ТЕМ у коаксіальному хвилеводі	34
4. Електромагнітні коливання у прямокутному резонаторі	35
5. Електромагнітні коливання у циліндричному резонаторі	35
6. Добротність резонатора	36