① Для ідеального Бозе-газу знайти відносну долю частинок, що знаходяться у Бозе-конденсаті при температурі $T=0{,}5\,T_Б$ ($T_Б$ – температура Бозе-конденсації)

Розв'язок:

За низьких температур основний стан Бозе-газу має енергію $\varepsilon=0$ (тобто всі частинки сконденсовані в стан $\varepsilon_k=0$)

Розглядатимемо стан при $T<T_Б$, тоді:

Для частинок $\varepsilon>0$:

$$N_{\varepsilon>0} = N\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}$$ N – повна кількість частинок у газі

Сконденсовані у стан $\varepsilon=0$ частинки визначаються з нормування:

$$N_{\varepsilon=0} = N_0 = N\left(1-\left(\frac{T}{T_Б}\right)^{3/2}\right)$$

Відносна доля частинок:

$$\frac{N_{\varepsilon=0}}{N} = \left(1-\left(\frac{T}{T_Б}\right)^{3/2}\right) = 1-\left(\frac{0{,}5\,T_Б}{T_Б}\right)^{3/2} = \underline{0{,}65}$$

② В рамках дворідинної моделі обрахувати лондонівську глибину проникнення у надпровіднику при $T = 10 K$ – $\lambda(10K)$, за умов: $T_c = 20K$; концентрація електронів провідності в нормальному стані – $n = 10^{22} см^{-3}$, маса електрона $m \sim 10^{-27} г$; заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Розвʼязок:

Лондонівська глибина в залежності від температури описується емпіричною формулою:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{1/2}}$$

Знайдемо величину $\lambda(0)$.

За $T = 0$ всі електрони в металі надпровідні, тобто $n_s = n = 10^{22} см^{-3}$

Лондонівська глибина дорівнює:

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$$, в системі СГС: $m = 10^{-27}$ г

$c = 3\cdot 10^{10}$ см/с

$e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ абс.од.

$n_s = n = 10^{22}$ см$^{-3}$

$$\lambda = \sqrt{\frac{10^{-27}\text{г}\cdot(3\cdot 10^{10}\,\text{см/с})^2}{4\pi\cdot 10^{22}\,\text{см}^{-3}\cdot(4{,}8\cdot 10^{-10}\,\text{абс.од.})^2}} = 5{,}6\cdot 10^{-6}\,\text{см}$$

$$\lambda(10\,K) = \frac{\lambda}{\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{1/2}} = \frac{5{,}6\cdot 10^{-6}\,\text{см}}{\left[1-\left(\frac{10\,K}{20\,K}\right)^4\right]^{1/2}} = \underline{5{,}78\cdot 10^{-6}\,\text{см}}$$

3) У масивному надпровіднику є отвір діаметром 2мм, в якому захоплено 100 квантів магнітного потоку. Визначити магнітне поле всередині отвору.

Розв'язок:

Магнітний потік визначається з формули:

$$\Phi = \int \vec{H}\, d\vec{S}$$

Так як захоплено n квантів потоку, то:

$$\Phi = n\,\Phi_0$$

Φ_0 – квант магнітного потоку

$$\Phi = \int H\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} H \cdot r\, d\varphi\, dr = H\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r\,dr =$$

$$= H \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \left| R = \frac{d}{2} \right| = H \cdot 2\pi \cdot \frac{d^2}{4 \cdot 2} = \frac{H \cdot \pi d^2}{4}$$

Виразимо H:

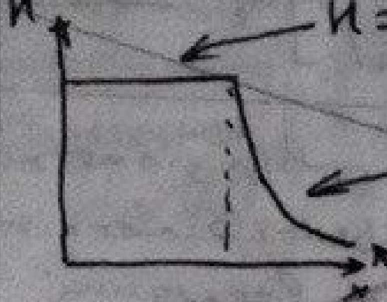
$$H = \frac{4 \cdot \Phi}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot n\,\Phi_0}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 2{,}07 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс} \cdot \text{см}^2}{3{,}14 \cdot (0{,}2)^2\ \text{см}^2} =$$

$$\underline{= 6{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{Э}}$$

Відповідь: $6{,}6 \cdot 10^{-4}$ Э.

④ Тонкостінний циліндр радіусом R з надпровідного матеріалу (товщина стінок $d \ll \lambda$) був охолоджений в магнітному полі H до температури $T < T_c$. Після цього магнітне поле було вимкнене. Визначити кінцевий розподіл магнітного поля (в стінках циліндра і ззовні).

Розв'язок:



$H = \frac{4\pi}{c} j_s d$

$H = H_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$?

$\xrightarrow{\text{СЧЗ}} H_j \sim e^{-\frac{x}{\lambda}} = 1 - \frac{x}{\lambda}$

так как тонкостенный

$j(x)\big|_{d \ll \lambda} \simeq const$

$rot\, H = \frac{dH}{dx} = j$ $\quad H = H_0 - jx$

У внутрішній частині тонкостінного циліндра магнітне поле буде однорідним, оскільки $d \ll \lambda$, тобто поле повністю проникне. Поле дорівнюватиме:

$$H = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$ за умовою задачі — просто H.

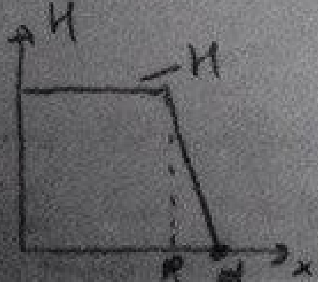
Ззовні поле спадає за експоненційним законом (тобто в стінці):

$H = H_0 \exp(-x/\lambda)$

Але так як $x \ll \lambda$, то можемо розкласти в ряд, обмежившись лише першими членами:

$H = H_0 \exp(-x/\lambda) = H_0\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$

Так як поле повністю проникає в товщину стінки, а ззовні дорівнює нулю, то спадає прямолінійно від H до 0 в точці $(R+d)$:



← розподіл магнітного поля (прямолінійний через те, що $x \ll \lambda$)

(5) Оцінити критичну швидкість конденсату і критичний струм розпарювання в теорії ГЛ для одновимірного надпровідного каналу. Довжина когерентності $\xi = 10$ нм, концентрація надпровідних електронів $n_s = 10^{21}$ см$^{-3}$, маса електрона $m \sim 10^{-27}$ г; заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Розв'язок:

Взаємозв'язок між густиною струму та швидкістю:
$$j_s = n_s e v_s$$
Критична швидкість дорівнює: $v_c = \frac{j_c}{n_s e}$

j_c – критичний струм

Критичний струм знаходиться за формулою:
$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{c H_{cm}}{\lambda}$$
H_{cm} можна знайти з формули для параметра теорії ГЛ:
$$\varkappa = 2\sqrt{2}\frac{e}{\hbar c}\lambda^2 H_{cm}$$
$$H_{cm} = \frac{\varkappa \hbar c}{2\sqrt{2} e \lambda^2}$$
Квадрат глибини проникнення: $\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}$
$$H_{cm} = \frac{\varkappa \hbar c \cdot 4\pi \cdot n_s e^2}{2\sqrt{2} e m c^2} = \frac{\sqrt{2}\varkappa \hbar n_s e \cdot \pi}{mc}$$
Підставимо H_{cm} в j_c:
$$j_c = \frac{\sqrt{2} c}{6\pi\sqrt{3} \cdot \lambda} \cdot \frac{\sqrt{2}\varkappa \hbar n_s e \pi}{mc} = \frac{\varkappa \hbar n_s e}{3\sqrt{3}\lambda m} = \underbrace{\frac{\varkappa}{\lambda}}_{=\frac{1}{\xi}} \cdot \frac{\hbar n_s e}{3\sqrt{3} m}$$
$$j_c = \frac{\hbar n_s e}{\xi \cdot 3\sqrt{3} m} = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-27}\,\text{ерг}\cdot\text{с} \cdot 10^{21}\,\text{см}^{-3} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{абс.од}}{10 \cdot 10^{-7}\,\text{см} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 10^{-27}\,\text{г}} =$$
$$= 9{,}7 \cdot 10^{16}\,\text{од.струму}/\text{см}^2 = 3{,}24 \cdot 10^{7}\,\text{А}/\text{см}^2$$
$$v_c = \frac{j_c}{n_s e} = \frac{9{,}7 \cdot 10^{16}\,\text{од.струму}/\text{см}^2}{10^{21}\,\text{см}^{-3} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{абс.од.}} = 202{,}8 \cdot 10^{3}\,\text{см}/\text{с}$$
Відповідь: $v_c = 202{,}8 \cdot 10^3$ см/с ; $j_c = 9{,}7 \cdot 10^{16}\,\frac{\text{од.струму СГС}}{\text{см}^2}$.

⑥ Визначити значення критичних магнітних полів: H_{c1}, H_{c2}, H_c для надпровідника, в якому довжина когерентності $\xi = 2$ нм; лондонівська глибина $\lambda = 200$ нм.

Розв'язок:

Перше критичне поле знаходиться за формулою:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\left(\ln \varkappa + 0{,}5\right); \qquad \varkappa = \frac{\lambda}{\xi} \text{ — відповідно}$$

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\left(\ln\frac{\lambda}{\xi} + 0{,}5\right) = \frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,Гс\cdot см^2}{4\pi\cdot(2\cdot10^{-6}\,см)^2}\left(\ln\frac{200\,нм}{2\,нм} + 0{,}5\right) =$$

$$= \underline{21023{,}8\ Е}$$

Друге критичне поле пов'язано з H_{cm} таким співвідношенням: $H_{c2} = \sqrt{2}\,\varkappa H_{cm}$

$$\sqrt{2}H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi} \Rightarrow H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\,\lambda\xi} = \frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,Гс\cdot см^2}{2\sqrt{2}\cdot2\cdot10^{-6}\,см\cdot2\cdot10^{-8}\,см} =$$

$$= \underline{1{,}83\cdot10^{6}\ Е}$$

$$H_{c2} = \sqrt{2}\,\varkappa H_{cm} = \sqrt{2}\cdot\frac{\lambda}{\xi}\cdot H_{cm} = \sqrt{2}\cdot\frac{200\,нм}{2\,нм}\cdot1{,}83\cdot10^{6}\,Е =$$

$$= \underline{2{,}6\cdot10^{8}\ Е}$$

Відповідь: $H_{c1} = 21023{,}8$ Е, $H_{c2} = 2{,}6\cdot10^{8}$ Е

$H_c = 1{,}83\cdot10^{6}$ Е

7 Розрахувати середню відстань і силу взаємодії між двома сусідніми вихрами у надпровіднику II роду в полі $B = 0,1$ Тл, $\lambda = 0,2$ мкм.

Розв'язок:

Якщо поле $B \sim H_{c2}$, то відстань між вихорами можна виразити у вигляді:

$$r = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}} = \cancel{\sqrt{\frac{2,07\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2}{0,1\ \text{Тл}}}} = \sqrt{\frac{2,07\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2}{1000\ \text{Гс}}} = \underline{1,44\cdot 10^{-5}\ \text{см}}$$

Сила взаємодії між двома вихорами:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\Phi_0}{4\pi}\cdot\frac{dH_{12}}{dr} \qquad H_{12} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda)$$

Так як $r \approx \lambda$, то використовуємо $K_0(r/\lambda) = \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)$

$$H_{12} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) \qquad \frac{dH_{12}}{dr} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot\frac{r}{\lambda}\cdot\left(-\frac{\lambda}{r^2}\right) = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot\frac{1}{r}$$

$$f = \frac{\Phi_0}{4\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot\frac{1}{r} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^2\cdot r} = \frac{(2,07\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2)^2}{8\pi^2\cdot(0,2\cdot 10^{-4})^2\cdot 1,44\cdot 10^{-5}} =$$

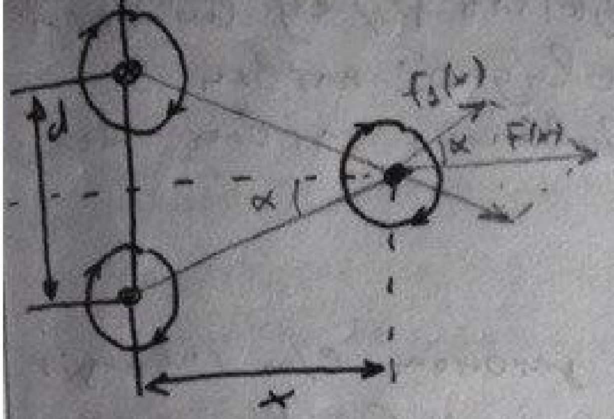
$$= \underline{0,094\ \text{дин}/\text{см}^2}$$

Відп: $f = 0,094$ дин/см^2, $r = 1,44\cdot 10^{-5}$ см

(8) Два абрикосовських вихори закріплені в точках a і b на поверхні надпровідної плівки на відстані d один від іншого. Третій вихор того ж знаку може рухатись вздовж лінії проведеної перпендикулярно відрізку ab крізь його середину. Знайти силу F(x), що діє на цей вихор в залежності від його координати x вздовж цієї лінії.

<u>Розв'язок:</u> Поле одиночного вихору можна знайти за формулою:

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \qquad K_0 \text{ - функція Макдональда}$$



$$K_0(z) = \begin{cases} \ln(1/z), & z \ll 1 \\ e^{-z}/z^{1/2}, & z \gg 1 \end{cases}$$

Густина струму, утворена цим вихором:

$$j = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{dH}{dr}$$

Сила від одного вихору:

$$f_1 = \frac{1}{c} j \Phi_0$$

За малюнком: $F(x) = 2 f_1(x)\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+(d/2)^2}} \Rightarrow F(x) = f_1(x)\frac{2x}{\sqrt{x^2+(d/2)^2}}$$

Перейдемо до знаходження $f_1(x)$.

Для цього розглянемо 2 випадки:

1) $z \ll 1$, $r \ll \lambda$

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right); \quad j = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{dH}{dr} = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot\frac{r}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{r^2}\right) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}$$

$$f_1 = \frac{1}{c}|j|\Phi_0 = \frac{\Phi_0^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\lambda^2 r} \qquad r = \sqrt{x^2+(d/2)^2}$$

$$F = \frac{\Phi_0^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\lambda^2 r}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+(d/2)^2}} = \boxed{\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\lambda^2}\cdot\frac{x}{x^2+(d/2)^2}}$$

2) $z \gg 1$, $r \gg \lambda$

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}\cdot\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-1/2}$$

$$j = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{dH}{dr} = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{r}{\lambda}}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-1/2} + e^{-\frac{r}{\lambda}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-3/2}\cdot\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{\Phi_0\cdot c}{8\pi^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-r/\lambda}\left(-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-3/2}\right) =$$

$$= \frac{\Phi_0\cdot c}{8\pi^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-r/\lambda}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-1/2}\left(-1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$f_1 = \frac{1}{c}|j|\Phi_0 = \frac{\Phi_0^2 c}{8\pi^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-r/\lambda}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$F = \frac{\Phi_0^2 c}{8\pi^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{\sqrt{x^2+(d/2)^2}}{\lambda}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+(d/2)^2}}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\lambda}{2\sqrt{x^2+(d/2)^2}}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+(d/2)^2}}$$

⑨ Верхнє критичне поле надпровідника $H_{c2} = 150$ кЕ, параметр Гінзбурга-Ландау $\varkappa = 100$. Знайти енергію вихору Абрикосова.

Розв'язок:

$$\Phi_0 = 2\pi \xi^2 H_{c2} \qquad \xi^2 = \frac{\Phi_0}{2\pi H_{c2}} \qquad \xi = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi H_{c2}}}$$

Довжина когерентності ξ:

$$\xi = \sqrt{\frac{2{,}07 \cdot 10^{-7}\, Гс \cdot см^2}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^3\, Е}} = 4{,}69 \cdot 10^{-7}\, см$$

Знайдемо глибину проникнення λ:

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\xi} \Rightarrow \lambda = \varkappa \cdot \xi = 4{,}69 \cdot 10^{-7}\, см \cdot 100 = 4{,}69 \cdot 10^{-5}\, см$$

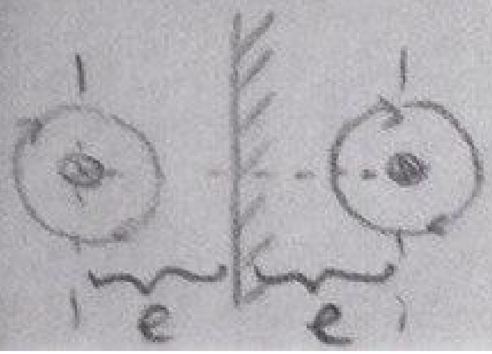
Енергія одиночного вихору:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 (\ln \varkappa + 0{,}5) = \left(\frac{2{,}07 \cdot 10^{-7}\, Гс \cdot см^2}{4\pi \cdot 4{,}69 \cdot 10^{-5}\, см}\right)^2 (\ln 100 + 0{,}5) =$$

$$= \underline{6{,}3 \cdot 10^{-7}\, ерг/см}$$

(10) Абрикосівський вихор розташований паралельно пласкій поверхні надпровідника на відстані $l = 40$ нм від неї; лондонівська глибина проникнення $\lambda = 100$ нм. Застосовуючи метод зображень, знайти силу взаємодії вихору з поверхнею надпровідн.

Розв'язок:



Метод зображень дозволяє розглядати взаємодію вихору з поверхнею як взаємодію двох вихорів.

Сила взаємодії двох вихорів:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \cdot \frac{dH_{12}}{dx}$$

$$H_{12} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Так як $x \sim \lambda$ (сумірні), то можемо використати наближення: $K_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \ln\frac{\lambda}{x}$

$$H_{12} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln\frac{\lambda}{x}$$

$$\frac{dH_{12}}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \cdot \frac{x}{\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda}{x^2}\right) = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \cdot \frac{dH_{12}}{dx} = +\frac{\Phi_0}{4\pi} \cdot \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \cdot \frac{1}{x} \qquad (x = 2e)$$

$$f = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^2} \cdot \frac{1}{2e} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \cdot \frac{1}{e} =$$

$$= \left(\frac{2{,}07 \cdot 10^{-7}\,\text{Гс} \cdot \text{см}^2}{4\pi \cdot 100 \cdot 10^{-7}\,\text{см}}\right)^2 \cdot \frac{1}{40 \cdot 10^{-7}\,\text{см}} = 0{,}678\ \text{дин}/\text{см}^2$$

Відповідь: $0{,}678$ дин/см^2.

(11) Оцінити питомий опір течії магнітного потоку ρ_f у надпровіднику в магнітному полі $H = 5$ кЕ при температурі $0{,}5 T_c$. Верхнє критичне поле $H_{c2}(0) = 150$ кЕ; питомий опір нормального стану $\rho_n = 30$ мкОм·см.

<u>Розв'язок</u>

$$\rho_f = \frac{\Phi_0 B}{c^2 \eta}$$

Коефіцієнт в'язкості в залежності від T:

$$\eta = \frac{H_{c2}(T)\,\Phi_0}{c^2 \rho_n}$$

$H_{c2}(T)$ наближено залежить від $H_{c2}(0)$:

$$H_{c2}(T) = H_{c2}(0)\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)$$

$$\rho_f = \frac{\cancel{\Phi_0} B \cdot \cancel{c^2} \cdot \rho_n}{\cancel{c^2} H_{c2}(T) \cdot \cancel{\Phi_0}} = \frac{B \cdot \rho_n}{H_{c2}(T)}.$$

В наближенні візьмемо: $B = H$, тоді:

$$\rho_f = \frac{H \cdot \rho_n}{H_{c2}(0)\left(1 - T^2/T_c^2\right)} = \frac{5 \cdot 10^3\,\text{Е} \cdot 30 \cdot 10^{-6}\,\text{Ом·см}}{150 \cdot 10^3\,\text{Е}\left(1 - (0{,}5)^2\right)} =$$

$$\underline{= 1{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{Ом·см}}$$

(12) Оцінити середню швидкість руху вихорів в резистивному стані надпровідної плівки в магнітному полі $B = 1$ Тл. Довжина плівки – 1 см; Напруга – 10 мкВ.

Розв'язок

Течія магнітного поля за законом е/м індукції Фарадея утворює електричне поле E. Виникає дисипація енергії E: $E \cdot j_{тр}$

Напрямок сили Лоренца співпадає з напрямком руху вихорів, тоді робота: $F_L v_L$.

$$F_L v_L = E \cdot j_{тр}$$

$$F_L = \frac{j_{тр} B}{c} \qquad E = \frac{B v_L}{c} \Rightarrow v_L = \frac{cE}{B}$$

Напруженість залежить від довжини та різниці потенціалів: $E = \frac{U}{l}$

$$v_L = \frac{cU}{lB} = \left| \begin{matrix} \text{В СГС} & B = 10^4 \text{ Гс} \\ & U = 3{,}3356 \text{ СГС} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2{,}997925 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \cdot 3{,}33564 \cdot 10^{-8} \text{ СГС}}{1 \text{ см} \cdot 1000 \text{ Гс}} = 1 \text{ см/с}$$

(13) В рамках резистивної моделі точкового джозефсонівського контакту з критичним струмом $I_c = 1$ мА, опором в нормальному стані $R = 2$ Ом, знайти середню напругу на контакті та частоту джозефсонівської генерації при протіканні крізь контакт струму $I = 1,2$ мА.

Розв'язок:

Якщо постійний струм $I > I_c$, тоді розглядається резистивна модель, де джозефсонівський перехід розглядається як паралельне підключення джозефсонівського контакту та нормальної ділянки:

$$I = I_c \cdot \sin\varphi + \frac{\hbar}{2eR} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

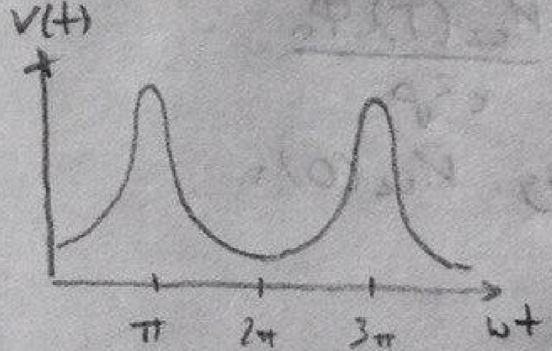
Фундаментальне співвідношення Джозефсона:

$$2eV = \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

підставимо сюди $\partial\varphi/\partial t$ з попереднього:

$$V(t) = R \frac{J^2 - J_c^2}{J + J_c \cdot \cos\omega t} \qquad (1)$$

$\omega = \frac{2e}{\hbar} R\sqrt{J^2 - J_c^2}$ – частота джозефсонівської генерації



Усереднення за часом формули (1) дає:

$$2e\bar{V} = \hbar\omega$$

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R\sqrt{J^2 - J_c^2} = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} Кл}{1{,}055 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с} \cdot 2 Ом \sqrt{(1{,}2 \cdot 10^{-3} А)^2 - (10^{-3} А)^2} =$$

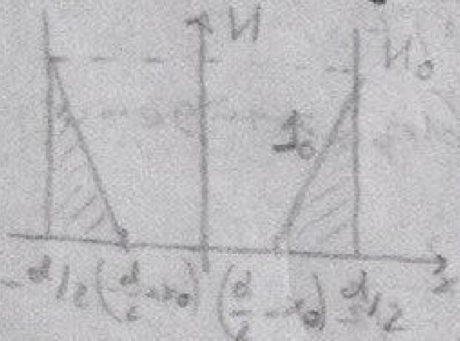
$$= 4{,}02 \cdot 10^{12} с^{-1}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}02 \cdot 10^{12}}{2\pi} = 640 \text{ ГГц}$$

$$\bar{V} = \frac{\hbar\omega}{2e} = \frac{1{,}055 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с \cdot 4{,}02 \cdot 10^{12} с^{-1}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} Кл} = 1{,}33 \text{ мВ}$$

Відповідь: $\bar{V} = 1{,}33$ мВ; $f = 640$ ГГц.

(14) Пластина надпровідника II роду товщиною 1 см знаходиться в паралельному магнітному полі, яке зростає від 0 до 5 кЕ. В рамках моделі критичного стану визначити глибину проникнення фронту магнітного потоку всередину пластини. Густина критичного струму $J_c = 10^6\ А/см^2$.



Розв'язок.

На графіку зображено глибину проникнення поля

Запишемо р-ня Максвела:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \frac{dH}{dx} = \frac{4\pi}{c} j_c$$

$$\frac{H_0}{x_0} = \frac{4\pi}{c} j_c \qquad x_0 = \frac{cH_0}{4\pi} j_c$$

В системі СІ: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$

$$\frac{dH}{dx} = j \qquad \frac{H_0}{x_0} = j_c \qquad x_0 = \frac{H_0}{j_c}$$

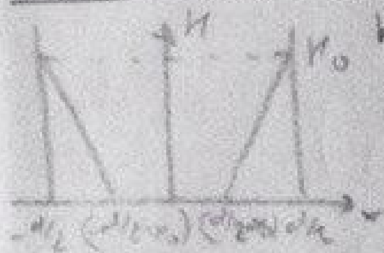
$H_0 = 5\ кЕ \qquad 1\ Е = 79{,}58\ А/м$

$H_0 = 5\ кЕ = 5 \cdot 79{,}58 \cdot 10^3\ А/м = 3{,}98 \cdot 10^5\ А/м$

$$x_0 = \frac{H_0}{j_c} = \frac{3{,}98 \cdot 10^5\ А/м}{10^6 \cdot 10^4\ А/м^2} = 3{,}98 \cdot 10^{-5}\ м = 3{,}98 \cdot 10^{-3}\ см$$

(15) Пластина надпровідника II роду товщиною 1см знаходиться в паралельному магнітному полі, яке зростає від 0 до 5кЕ, а потім знову зменшується до 0. В рамках моделі критичного стану визначити кінцеві профілі магнітного потоку і струму в середині пластини, максимальне магнітне поле всередині надпровідника і тишину проникнення фронту магнітного потоку.

Розв'язок:



На графіку зображено поле, яке виникає в надпровіднику при зростанні магн. поля від 0 до H_0

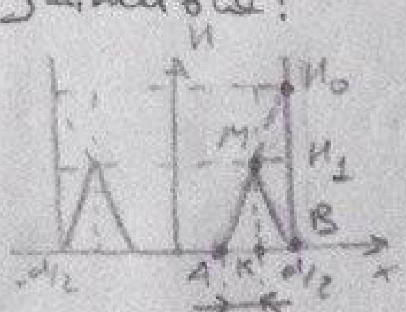
Рів-ня Максвела в СІ:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \qquad \frac{dH}{dx} = j$$

$$\frac{H_0}{x_0} = j_c \qquad x_0 = \frac{H_0}{j_c} \qquad H_0 = 5\,кЕ = 79{,}58 \cdot 5 \cdot 10^3\ A/m = 3{,}98 \cdot 10^5\ A/m$$

$$x_0 = \frac{H_0}{j_c} = \frac{3{,}98 \cdot 10^5\ A/m}{10^6 \cdot 10^4\ A/m^2} = 3{,}98 \cdot 10^{-5}\ m = \underbrace{3{,}98 \cdot 10^{-3}\ cm}$$

Після вимкнення поля зовнішнього внутрішнє зміниться:



Розглянемо трикутник: ΔH_0BA, в якому на стороні AB точка K ділить її навпіл, ~~тому~~ MK ∥ H_0B, тому точка M ділить сторону AH_0 навпіл, звідси рівень магнітного поля $H_1 = H_0/2$

Отже, максимальне магнітне поле буде:

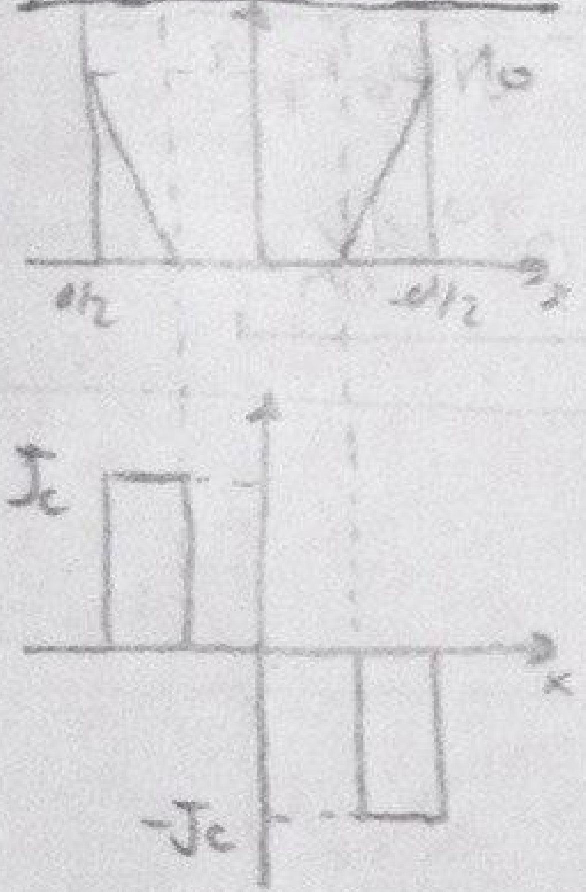
$$H_1 = \frac{H_0}{2} = \frac{5\,кЕ}{2} = \underbrace{2{,}5\ кЕ}$$

Розглянемо розподіл струму.

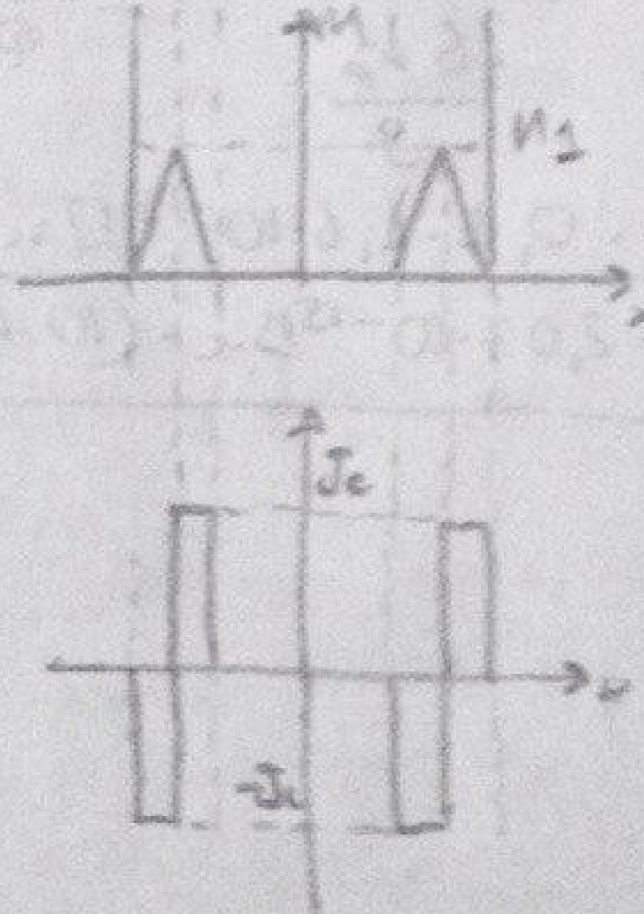
Так як $j_c = -\frac{dH}{dx}$, то j є похідною H по x зі зворотним знаком

Тому картинки такі!

Від 0 до 5 кЕ:



Від 5 до 0 кЕ:

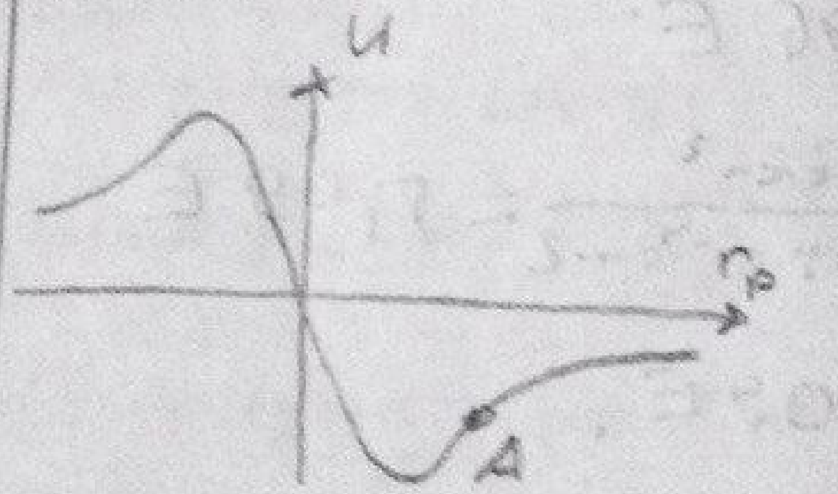


(16) Визначити густину критичного струму депінінгу (зриву) вихору з лінійного дефекту. Потенціальна яма сил пінінгу, що створюється лінійним дефектом, має вигляд:

$$U_p(s) = -\frac{U_0 r_p}{(r_p^2 + s^2)}$$ (s – зсув відносно вісі дефекту)

Зробити чисельну оцінку для значень параметрів: $U_0 = 0{,}1$ еВ; $r_p = 10$ нм.

Розв'язок:



Вигляд потенціалу на малюнку.

Депінінг – явище, коли сила Лоренца дорівнює максимальній силі пінінгу:

$$F_L = [\vec{j} \times \Phi_0] = F_{p\,max}$$

$$j_{c,d} = \frac{1}{\Phi_0}\max F_p = \frac{1}{\Phi_0}\max\frac{dU_p}{dr_p}$$

Знайдемо $\frac{dU_p}{dr_p} = \frac{d}{dr_p}\left(-\frac{U_0 r_p}{r_p^2+s^2}\right) =$

$$= -\frac{U_0}{r_p^2+s^2} + \frac{U_0 r_p\cdot 2r_p}{(r_p^2+s^2)^2} = \frac{2U_0 r_p^2}{(r_p^2+s^2)^2} - \frac{U_0}{r_p^2+s^2} =$$

$$= \frac{2U_0r_p^2 - U_0r_p^2 - U_0s^2}{(r_p^2+s^2)^2} = \frac{U_0(r_p^2-s^2)}{(r_p^2+s^2)^2}$$

Для того, щоб знайти max dU_p/dr_p знайдемо похідну:

$$\frac{d^2U_p}{dr_p^2} = \frac{d}{dr_p}\left(\frac{U_0r_p^2}{(r_p^2+s^2)^2}\right) - \frac{d}{dr_p}\left(\frac{U_0s^2}{(r_p^2+s^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{2U_0 r_p}{(r_p^2+s^2)^2} - \frac{2U_0r_p^2\cdot \cancel{2(r_p^2+s^2)}\cdot 2r_p}{(r_p^2+s^2)^3} + \frac{2U_0s^2\cdot 2r_p}{(r_p^2+s^2)^3} =$$

$$= \frac{2U_0r_p^3+2U_0r_ps^2-4U_0r_p^3+4U_0s^2r_p}{(r_p^2+s^2)^3} =$$

$$= \frac{6U_0r_ps^2-2U_0r_p^3}{(r_p^2+s^2)^3} = 0 \qquad 6U_0r_ps^2 = 2U_0r_p^3$$

$$3U_0s^2 = U_0r_p^2$$

$$s^2 = \frac{r_p^2}{3}$$

$$j_{c,d} = \frac{1}{\Phi_0}\cdot\frac{U_0(r_p^2-s^2)}{(r_p^2+s^2)^2}\Bigg|_{s^2=\frac{r_p^2}{3}} = \frac{1}{\Phi_0}\cdot\frac{U_0(r_p^2-r_p^2/3)}{\left(r_p^2+\frac{r_p^2}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\Phi_0}\cdot\frac{U_0\cdot\frac{2}{3}r_p^2}{\frac{16r_p^4}{9}} = \frac{U_0}{\Phi_0}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{r_p^2} = \frac{3U_0}{8\Phi_0r_p^2} =$$

$$= \frac{3\cdot 0{,}1\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{Дж}}{8\cdot 2{,}07\cdot10^{-15}\,\text{В}\cdot\text{с}\cdot(10\cdot10^{-9}\,\text{м})^2} = \underline{2{,}9\cdot10^{10}\,\text{А/м}^2}$$

(17) Критичний струм джозефсонівського контакту $J_c = 100$ мкА. Крізь контакт протікає постійний струм $J_0 = 70$ мкА та слабкий змінний струм з амплітудою $J_1 = 2$ мкА із частотою $f = 10$ МГц. Знайти напругу на контакті.

Розв'язок:

Струм, який проходить через джозефсонівський контакт можна записати у вигляді:

$$J = J_0 + J_1 \cdot \sin(2\pi f t)$$

Різниця фаз знаходиться у вигляді: $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$

φ_0 – різниця фаз, утворена постійним струмом.

~~Напруга на переході дорівнює:~~

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\cdot\frac{d(\varphi_0+\varphi_1)}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi_1}{dt}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \left(\frac{dI}{dt}\right)\left(\frac{dI}{d\varphi_1}\right)^{-1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_0 + I_1\cdot\sin(2\pi f t)\right) = 2\pi f\cdot I_1\cdot\cos(2\pi f t) =$$

$$= 2\pi f I_1\cdot\sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)$$

17

Струм через джозефсонівський перехід дорівнює: $I = I_c\cdot\sin\varphi(t)$

Одночасно за умовою:

$$I = I_0 + I_1\cdot\sin(\omega t)$$

$$I_c\cdot\sin\varphi(t) = I_0 + I_1\cdot\sin(\omega t)$$

Візьмемо похідну по t за умови $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1(t)$

$$I_c\cdot\cos\varphi_0\cdot\frac{d\varphi_1}{dt} = I_1\omega\cdot\cos(\omega t)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{I_1\omega\cdot\cos(\omega t)}{I_c\cdot\cos(\varphi_0)}$$

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{I_1\omega\cdot\cos(\omega t)}{I_c\cdot\cos(\varphi_0)} = \left|\omega = 2\pi f\right| =$$

$$= \frac{\Phi_0\cdot I_1\cdot f}{I_c\cdot\cos(\varphi_0)}\cdot\cos(2\pi f t)$$

Амплітуда дорівнює:

$$V = \frac{\Phi_0\cdot I_1\cdot f}{I_c\cdot\cos(\varphi_0)}$$

$\cos(\varphi_0)$ — неизвестно, похоже на то, что $\varphi_0 = 45$ или же

$$\cos\varphi_0 = \frac{I_0}{I_c} = 0,7$$

(18) Знайти критичне поле $H_{c1,J}$ проникнення вихору в джозефсонівський перехід та магнітне поле в центрі джозефсонівського вихору для тунельного контакту S-J-S типу. Лондонівська глибина проникнення для S: $\lambda = 0{,}1$ мкм; густина критичного струму контакту $J_c = 100$ А/см².

Розв'язок:

$$H_{c1} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\Phi_0}{\lambda_J d} \qquad H(0) = \frac{\Phi_0}{\pi\lambda_J d} \qquad \cancel{d \approx 2\lambda}$$

Для тунельного контакту розмір області d дорівнює: $d \approx 2\lambda$, так як товщина діелектричного прошарку дуже мала.

Знайдемо глибину проникнення слабкого магнітного поля в джозефсонівський перехід:

$$\lambda_J = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d}\right)^{1/2} \cancel{= \left(\frac{2{,}068\cdot10^{-15}\,\text{Вб}}{2\pi\cdot1{,}25\cdot10^{-6}\,\text{Н/А}^2\cdot100\cdot10^{4}\,\text{А/м}^2}\right)}$$

$$\lambda_J = \left(\frac{2{,}068\cdot10^{-15}\,\text{В}\cdot\text{с}}{2\pi\cdot1{,}26\cdot10^{-6}\,\text{Н/А}^2\cdot100\cdot10^{4}\,\text{А/м}^2\cdot2\cdot0{,}1\cdot10^{-6}\,\text{м}}\right)^{1/2} = 3{,}61\cdot10^{-5}\,\text{м}$$

Критичне поле проникнення вихору в перехід:

$$H_{c1} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\Phi_0}{\lambda_J d} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,\text{Гс}\cdot\text{см}^2}{3{,}61\cdot10^{-3}\,\text{см}\cdot\cancel{2}\cdot2\cdot0{,}1\cdot10^{-4}\,\text{см}} = 0{,}58\ \text{Е}$$

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{\pi\lambda_J d} = H_{c1}\cdot\frac{\pi}{2} = 0{,}58\ \text{Е}\cdot\frac{\pi}{2} = 0{,}911\ \text{Е}$$

Відповідь: $H_{c1} = 0{,}58$ Е, $H(0) = 0{,}911$ Е.

(19) Довжина джозефсонівського тунельного S-I-S контакту — $L = 0{,}1$ мм; лондонівська глибина проникнення — $\lambda = 0{,}05$ мкм. Знайти положення перших двох максимумів на залежності $I_c(H)$ критичного струму від магнітн. поля.

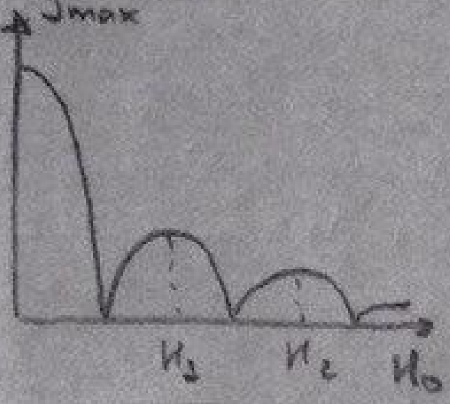
Розв'язок:

Максимум струму можна одержати з умови:

$$I_{max} = I_c \cdot \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0} \right|$$

Прикладене зовнішнє поле дорівнює:

$$H_0 = \frac{\Phi}{Ld}$$



Максимуми знаходяться з умови максимуму:

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\pi\Phi/\Phi_0}\right|, \text{~~тобто похідна~~}$$

$$\cancel{\left|\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right| = 1}$$

$$\cancel{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} = \frac{\pi}{2} + \pi n}\ \text{~~, де~~}\ \cancel{\Phi = H_0 L d}\text{~~, тому:~~}$$

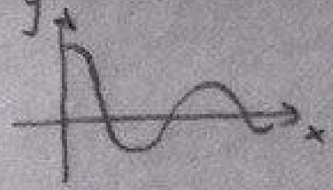
$$\cancel{\frac{\pi H_0 L d}{\Phi_0} = \frac{\pi}{2} + \pi n}, \quad \cancel{\frac{H_0 L d}{\Phi_0} = \frac{1}{2} + n}$$

~~$d \approx 2\lambda$, бо товщина діелектрика дуже мала~~

$$\cancel{H_1 = |n=1| = \frac{\Phi_0}{Ld}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\Phi_0}{L\,2\lambda} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,Гс\cdot см^2}{0{,}01\,см\cdot 0{,}05\cdot10^{-4}\,см} =}$$

$$\cancel{= 5{,}107\ Е}$$

Розглянемо функцію $\frac{\sin(x)}{x}$:



Знайдемо її точки екстремуму:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = 0 \qquad \frac{\cos x}{x} = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$x\cdot\cos x = \sin x \qquad \underbrace{tg\,x = x}$$ — для розв'язку цього рівняння потрібні чисельні методи:

$x_1 = 4{,}49$, $x_2 = 7{,}73$

$$\boxed{d \approx 2\lambda,\ \text{бо товщина діелектрику дуже мала}}$$

$$\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} = x_1 = 4{,}49 \qquad \Phi = H_1 L d$$

$$\frac{\pi H_1 L d}{\Phi_0} = 4{,}49 \qquad H_1 = \frac{4{,}49}{\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{Ld} = \frac{4{,}49}{\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{L\cdot 2\lambda}$$

$$H_1 = \frac{4{,}49}{\pi}\cdot\frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,Гс\cdot см^2}{0{,}01\,см\cdot 0{,}05\cdot10^{-4}\,см\cdot 2} = 2{,}96\ Е$$

$$H_2 = \frac{x_2}{\pi}\cdot\frac{\Phi_0}{L\cdot 2\lambda} = \frac{7{,}73}{\pi}\cdot\frac{2{,}07\cdot10^{-7}\,Гс\cdot см^2}{0{,}01\,см\cdot 0{,}05\cdot10^{-4}\,см\cdot 2} = 5{,}09\ Е$$

Відповідь: $H_1 = 2{,}96\ Е$, $H_2 = 5{,}09\ Е$.

(20) Два джозефсонівські переходи із критичними струмами $J_{c1} = 500$ мкА та $J_{c2} = 700$ мкА з'єднані паралельно. Крізь це з'єднання пропускається струм $J = 1$ мА. Знайти струми в кожному з переходів.

Розв'язок:

оскільки переходи підключені паралельно, то різниці фаз на них будуть рівні: $\varphi_1 = \varphi_2$

Тому струми по переходам розподіляються пропорційно їхнім критичним струмам:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{J_{c1} \cdot \sin\varphi_1}{J_{c2} \cdot \sin\varphi_2} = \left| \varphi_1 = \varphi_2 \right| = \frac{J_{c1}}{J_{c2}}$$

Так як паралельне з'єднання, то: $J_1 + J_2 = J$

$$\begin{cases} J_1 + J_2 = J \\ \dfrac{J_1}{J_2} = \dfrac{J_{c1}}{J_{c2}} = \dfrac{500\text{ мкА}}{700\text{ мкА}} = \dfrac{5}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} J_2 = \dfrac{7}{5} J_1 \\ J_1 + \dfrac{7}{5} J_1 = \dfrac{12}{5} J_1 = 10^{-3} A \end{cases}$$

$$J_1 = \frac{5}{12} \cdot 10^{-3} A = 0{,}417 \text{ мА}$$

$$J_2 = J - J_1 = 1 - 0{,}417 \text{ мА} = 0{,}583 \text{ мА}$$

Відповідь: $J_1 = 0{,}417$ мА, $J_2 = 0{,}583$ мА.