

**Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка  
Радіофізичний факультет  
Кафедра фізичної електроніки**

**І.О.Анісімов**

# **Синергетика**

**Підручник**



**Київ 2013**

У підручнику розглядаються процеси формування основних типів дисипативних структур (регулярних та стохастичних) у відкритих нелінійних дисипативних системах із розподіленими параметрами. Перша частина книги присвячена термодинаміці відкритих систем і передумовам порушення стійкості їхніх однорідних стаціонарних станів. У другій частині послідовно розглядаються основні класи відомих на сьогодні регулярних дисипативних структур: квазігармонічні автохвилі, біжучі автохвилі в сильнонелінійних середовищах, стаціонарні дисипативні структури, зумовлені розвитком аперіодичної нестійкості та розподіленим зворотним зв'язком. Нарешті, в третій частині розглядається турбулентність у гамільтонівських та дисипативних розподілених системах і показується, що в багатьох випадках вона зводиться до хаотичної динаміки систем із багатьма ступенями вільності.

Для студентів фізико-математичних та природничих спеціальностей, аспірантів, викладачів та науковців.

## ЗМІСТ

	Сторінки
<b>Передмова</b>	9
<b>ВСТУП</b>	10
В.1. Що вивчає синергетика? (10) В.2. Основні типи регулярних структур у нерівноважних середовищах (10). В.3. Турбулентність (12). В.4. Синергетика й термодинаміка (13). В.5. Практичне значення синергетики (14). В.6. Зміст та структура курсу (14).	
<b>Частина 1. ТЕРМОДИНАМІКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ</b>	16
<b>1.1. Ентропія та другий початок термодинаміки для замкнених систем</b>	16
<i>1.1.1. Достатня умова стійкості динамічної системи</i>	16
1.1.1.1. Функція Ляпунова і теорема Ляпунова (17). 1.1.1.2. Приклад застосування теореми Ляпунова (17).	
<i>1.1.2. Визначення та інтерпретація ентропії. Другий початок термодинаміки</i>	18
1.1.2.1. Феноменологічне визначення ентропії (18). 1.1.2.2. Больцманівська інтерпретація ентропії (18). 1.1.2.3. Другий початок термодинаміки (19).	
<i>1.1.3. Визначення ентропії для ідеального газу. Н-теорема Больцмана</i>	19
1.1.3.1. Одночастинкова функція розподілу (19). 1.1.3.2. Визначення ентропії для ідеального газу за Больцманом (20). 1.1.3.3. Н-теорема Больцмана (21).	
<i>1.1.4. Ентропія системи частинок, що взаємодіють між собою</i>	21
1.1.4.1. Ентропія Гіббса (22). 1.1.4.2. Теорема Гіббса (22).	
<i>1.1.5. Узагальнення поняття ентропії</i>	23
1.1.5.1. Ентропія Шеннона (23). 1.1.5.2. Ентропія Шеннона для ансамблю автогенераторів (24).	
<i>1.1.6. Структури в системах зі сталою температурою</i>	25
<i>Висновки до розділу 1.1</i>	25
<i>Контрольні питання до розділу 1.1</i>	25
<i>Задачі до розділу 1.1</i>	26
<b>1.2. Виробництво ентропії в нерівноважних системах</b>	28
<i>1.2.1. Ентропія у відкритих системах</i>	28
1.2.1.1. Узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи (28). 1.2.1.2. Диференціальні характеристики ентропії (28). 1.2.1.3. Рівняння балансу для ентропії (29).	
<i>1.2.2. Густина виробництва ентропії в системах із локальною рівновагою</i>	30
1.2.2.1. Поняття локальної рівноваги (30). 1.2.2.2. Локальне виробництво ентропії (30). 1.2.2.3. Формула Гіббса для ентропії (30). 1.2.2.4. Локальне виробництво ентропії при протіканні хімічної реакції (31).	
<i>1.2.3. Лінійна нерівноважна термодинаміка</i>	32
1.2.3.1. Виробництво ентропії при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги (32). 1.2.3.2. Нерівноважні стаціонарні стани. Теорема Пригожина (33).	
<i>Висновки до розділу 1.2</i>	34
<i>Контрольні питання до розділу 1.2</i>	34
<i>Задачі до розділу 1.2</i>	35
<b>1.3. Стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги</b>	36
<i>1.3.1. Теорія термодинамічної стійкості</i>	36
1.3.1.1. Умова стійкості стаціонарного стану для малих відхилень від положення рівноваги (36). 1.3.1.2. Другий диференціал ентропії поблизу точки термодинаміч-	

ної рівноваги при збуренні однієї змінної (37). 1.3.1.3. Умова термодинамічної стійкості стаціонарного стану при збуренні багатьох змінних (37). 1.3.1.4. Другий диференціал ентропії і виробництво ентропії при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги (37). 1.3.1.5. Стійкість стаціонарних станів відкритих систем, далеких від термодинамічної рівноваги (38).	
<i>1.3.2. Термодинамічна стійкість хімічних реакцій</i>	39
1.3.2.1. Стаціонарні стани й термодинамічна гілка (39). 1.3.2.2. Надлишкове виробництво ентропії при перетворенні однієї пари речовин в іншу пару речовин (40). 1.3.2.3. Надлишкове виробництво ентропії для реакції автокаталітичного типу (40).	
<i>1.3.3. Брюсселятор</i>	41
1.3.3.1. Опис моделі та вихідні рівняння (41). 1.3.3.2. Стаціонарний стан та його стійкість (41). 1.3.3.3. Характерні області стійкості-нестійкості та переходи між ними (42). 1.3.3.4. Зведення рівнянь брюсселятора до узагальненого рівняння Релея (43). 1.3.3.5. Нелінійна стадія динаміки брюсселятора (44).	
<i>1.3.4. Реакція Белоусова – Жаботинського</i>	45
1.3.4.1. Історія досліджень та феноменологічний опис (45). 1.3.4.2. Рівняння орегонатора (47). 1.3.4.3. Динаміка орегонатора (48).	
<i>Висновки до розділу 1.3</i>	49
<i>Контрольні питання до розділу 1.3</i>	49
<i>Задачі до розділу 1.3</i>	50
<b>1.4. Самоорганізація та еволюція термодинамічно нерівноважних систем</b>	52
<i>1.4.1. Кількісне порівняння ступеню самоорганізації для двох відмінних станів системи</i>	52
1.4.1.1. S-теорема Климонтовича (52). 1.4.1.2. Самоорганізація в ансамблі автогенераторів Ван-дер-Поля (53).	
<i>1.4.2. Принцип мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації</i>	55
<i>1.4.3. Роль флуктуацій у процесах самоорганізації</i>	56
1.4.3.1. Біфуркації та вибір (57). 1.4.3.2. Роль флуктуацій при проходженні системи через біфуркаційну точку (57).	
<i>Висновки до розділу 1.4</i>	58
<i>Контрольні питання до розділу 1.4</i>	58
<i>Задачі до розділу 1.4</i>	58
<b>Частина II. РЕГУЛЯРНІ ДИСИПАТИВНІ СТРУКТУРИ</b>	59
<b>2.1. Квазігармонічні автохвилі в слабконелінійних активних середовищах, збуджуваних гармонічними джерелами</b>	59
<i>2.1.1. Квазігармонічні хвилі в слабконелінійних активних лініях</i>	59
2.1.1.1. Формальна класифікація активних елементів (60). 2.1.1.2. Приклади активних ліній (60). 2.1.1.3. Опис еквівалентної схеми лінії та отримання хвильового рівняння (62). 2.1.1.4. Поширення гармонічних хвиль у слабконелінійній активній лінії (63). 2.1.1.5. Дослідження стійкості стаціонарної хвилі (64). 2.1.1.6. Взаємодія зустрічних хвиль у нелінійному середовищі (64).	
Контрольні питання до підрозділу 2.1.1	66
Задачі до підрозділу 2.1.1	66
<i>2.1.2. Фазові хвилі в автоколивних середовищах</i>	66
2.1.2.1. Отримання модельного рівняння (67). 2.1.2.2. $\lambda$ - $\omega$ модель автоколивного середовища (68). 2.1.2.3. Однорідний розв'язок рівняння $\lambda$ - $\omega$ моделі та його стійкість (69). 2.1.2.4. Рівняння для фазових хвиль (70). 2.1.2.5. Синфазні автоколивання (71). 2.1.2.6. Біжучі фазові хвилі (72). 2.1.2.7. Взаємодія двох біжучих фазо-	



вих хвиль (72). 2.1.2.8. Умови реалізації різних типів розв'язків (73).	
Контрольні питання до підрозділу 2.1.2	73
Задачі до підрозділу 2.1.2	73
<i>Висновки до розділу 2.1</i>	73
<i>Контрольні питання до розділу 2.1</i>	74
<b>2.2. Автохвилі в сильнонелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням</b>	75
<i>2.2.1. Біжучі фронти в бістабільних середовищах</i>	75
2.2.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників) (75). 2.2.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля) (77). 2.2.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом (78). 2.2.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу (79). 2.2.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикавання): фазовий портрет та швидкість (80). 2.2.1.6. Вигляд хвилі перемикавання для модельної кінетичної функції (83). 2.2.1.7. Еволюція початкового збурення в бістабільному середовищі (85). 2.2.1.8. Поширення хвиль перекидання в двовимірних середовищах (86). 2.2.1.9. Хвиля заселення (87).	
Контрольні питання до підрозділу 2.2.1	88
Задачі до підрозділу 2.2.1	89
<i>2.2.2. Біжучі імпульси в середовищах з відновленням</i>	91
2.2.2.1. Рівняння, що описують середовища з відновленням (91). 2.2.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (модель Фітц-Х'ю – Нагумо) (92). 2.2.2.3. Біжучий імпульс (якісний розгляд) (92). 2.2.2.4. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використанні наближення (93). 2.2.2.5. Імпульс горіння (95). 2.2.2.6. Довжина релаксації та фазовий портрет (96).	
Контрольні питання до підрозділу 2.2.2	97
Задачі до підрозділу 2.2.2	97
<i>2.2.3. Періодичні хвилі в середовищах із відновленням</i>	98
Контрольні питання до підрозділу 2.2.3	100
Задачі до підрозділу 2.2.3	100
<i>Висновки до розділу 2.2</i>	100
<i>Контрольні питання до розділу 2.2</i>	101
<b>2.3. Джерела періодичних автохвиль</b>	102
<i>2.3.1. Генератор квазігармонічних коливань на активній лінії передачі</i>	102
2.3.1.1. Схема автогенератора (102). 2.3.1.2. Розрахунок частоти генерації (103). 2.3.1.3. Розрахунок усталеної амплітуди сигналу (104).	
Контрольні питання до підрозділу 2.3.1	104
Задачі до підрозділу 2.3.1	105
<i>2.3.2. Ревербератори в середовищах із відновленням</i>	105
2.3.2.1. Розрахунок форми фронту спіральної хвилі (105). 2.3.2.2. Природа ядра спіральної хвилі (107). 2.3.2.3. Спіральні хвилі в неоднорідних та нестационарних середовищах (107). 2.3.2.4. Вихори (107).	
Контрольні питання до підрозділу 2.3.2	108
Задачі до підрозділу 2.3.2	108
<i>2.3.3. Ревербератори в автоколивних середовищах</i>	108
2.3.3.1. Базові рівняння, граничні умови та асимптотика (109). 2.3.3.2. Аналітичний розв'язок для модельних функцій $\omega(\rho)$ та $\lambda(\rho)$ (109).	
Контрольні питання до підрозділу 2.3.3	110
Задачі до підрозділу 2.3.3	110
<i>2.3.4. Пейсмекери в автоколивних середовищах</i>	111
2.3.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння (111). 2.3.4.2. Аналогія з частинкою в потенціальній ямі (113). 2.3.4.3. Умови виникнення та застосовність опису в рамках рівняння фазових хвиль (113).	

Контрольні питання до підрозділу 2.3.4	114
Задачі до підрозділу 2.3.4	114
2.3.5. <i>Автопейсмекери в середовищах із відновленням</i>	115
2.3.5.1. Вихідні рівняння (115). 2.3.5.2. Нерухомий фронт збудження: якісний розгляд та конкретизація вихідних рівнянь (116). 2.3.5.3. Дослідження просторових профілів температури в середовищі з однорідним розподілом концентрації інгібітору (118). 2.3.5.4. Дослідження профілів температури, що відповідають нерухомому фронту збудження (119). 2.3.5.5. Стійкість нерухомого фронту збудження (121). 2.3.5.6. Поділ нерухомого фронту збудження (122). 2.3.5.7. Джерело типу “луна” (123).	
Контрольні питання до підрозділу 2.3.5	124
Задачі до підрозділу 2.3.5	125
<i>Висновки до розділу 2.3</i>	125
<i>Контрольні питання до розділу 2.3</i>	126
<b>2.4. Стаціонарні дисипативні структури</b>	127
<i>2.4.1 Періодичні дисипативні структури: модель морфогенезу Тюрінга</i>	127
2.4.1.1. Якісний опис моделі Тюрінга (127). 2.4.1.2. Умови розвитку дифузійної нестійкості в двокомпонентній системі (128). 2.4.1.3. Утворення просторових структур у системі хижак – здобич (129).	
Контрольні питання до підрозділу 2.4.1	130
Задачі до підрозділу 2.4.1	130
<i>2.4.2. Періодичні дисипативні структури: конвекція Релея - Бенара</i>	131
2.4.2.1. Конвекція Релея – Бенара: опис моделі та вихідні рівняння (131). 2.4.2.2. Розв’язок рівнянь за відсутності конвекції (132). 2.4.2.3. Отримання та розв’язок рівнянь для малих збурень (133). 2.4.2.4. Умови виникнення конвекції (134). 2.4.2.5. Нелінійна теорія ефекту Релея – Бенара для конвективних валів: отримання системи рівнянь для $\phi$ (135). 2.4.2.6. Отримання системи Лоренца (136). 2.4.2.7. Стаціонарні точки системи Лоренца (137). 2.4.2.8. Стійкість стаціонарних точок системи Лоренца (138). 2.4.2.9. Властивості стаціонарних конвективних валів (139). 2.4.2.10. Експериментальне спостереження конвективних валів (140). 2.4.2.11. Розв’язок нелінійних рівнянь для шестикутних комірок (141). 2.4.2.12. Шестикутні комірки: модифікація моделі та отримання розв’язку (142).	
Контрольні питання до підрозділу 2.4.2	144
Задачі до підрозділу 2.4.2	144
<i>2.4.3. Аперіодичні стаціонарні дисипативні структури</i>	145
2.4.3.1. Баретер: принцип дії (146). 2.4.3.2. Розрахунок характеристик дисипативної структури в баретері (147). 2.4.3.3. Утворення вогнища горіння (148). 2.4.3.4. Нормальний режим жевріючого розряду (148). 2.4.3.5. Властивості дисипативних структур, обумовлених розподіленням зворотним зв’язком (149).	
Контрольні питання до підрозділу 2.4.3	150
Задачі до підрозділу 2.4.3	150
<i>Висновки до розділу 2.4</i>	151
<i>Контрольні питання до розділу 2.4</i>	152
<b>Частина III. ХАОС І ТУРБУЛЕНТНІСТЬ</b>	153
<b>3.1. Хаос у гамільтонівських системах</b>	153
<i>3.1.1. Інтегровні гамільтонівські системи</i>	153
3.1.1.1. Рівняння Гамільтона (153). 3.1.1.2. Теорема Ліувілля (154). 3.1.1.3. Канонічні перетворення (154). 3.1.1.4. Змінні дія-кут (155). 3.1.1.5. Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут (155). 3.1.1.6. Інтегровні системи з багатьма ступенями вільності (156). 3.1.1.7. Фазовий портрет інтегровної системи з	

двома ступенями вільності (156). 3.1.1.8. Резонансні та нерезонансні тори для системи з довільним числом ступенів вільності (157). 3.1.1.9. Умова невірності (157).	
Контрольні питання до підрозділу 3.1.1	157
Задачі до підрозділу 3.1.1	158
<i>3.1.2. Гамільтонівські системи, близькі до інтегрованих</i>	158
3.1.2.1. Канонічне перетворення для нелінійного осцилятора (158). 3.1.2.2. Рівняння Гамільтона – Якобі (159). 3.1.2.3. Знаходження елементів ряду для нового гамільтоніана (160). 3.1.2.4. Знаходження твірної функції (160). 3.1.2.5. Канонічна теорія збурень для систем із багатьма ступенями вільності (161). 3.1.2.6. Теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера (162). 3.1.2.7. Дифузія Арнольда (163). 3.1.2.8. Теорема Пуанкаре – Біркгофа (164). 3.1.2.9. Гомоклінічні структури (166). 3.1.2.10. Вуса та завитки (169). 3.1.2.11. Аналогія між магнітними силовими лініями тороїдальних пасток та фазовими траєкторіями півторавимірної гамільтонівської системи (169). 3.1.2.12. Теорема КАМ і магнітне утримання плазми (171).	
Контрольні питання до підрозділу 3.1.2	174
Задачі до підрозділу 3.1.2	175
<i>3.1.3. Глобальний хаос та його характеристики</i>	175
3.1.3.1. Ізольовані резонанси та інтегровність (176). 3.1.3.2. Виникнення глобального хаосу (177). 3.1.3.3. Критерій Чирікова (178). 3.1.3.4. Системи з перемішуванням (178). 3.1.3.5. Розчеплення часових кореляцій у системах із перемішуванням (180). 3.1.3.6. Показники Ляпунова (182). 3.1.3.7. Властивості показників Ляпунова (183). 3.1.3.8. Ентропія Колмогорова - Синає (184). 3.1.3.9. Властивості КС-ентропії (185). 3.1.3.10. Спектральні властивості хаосу (186). 3.1.3.11. Спектр потужності (186). 3.1.3.12. Спектр потужності хаотичного руху (187).	
Контрольні питання до підрозділу 3.1.3	187
Задачі до підрозділу 3.1.3	188
<i>3.1.4. Точкові відображення</i>	189
3.1.4.1. Відображення Пуанкаре (189). 3.1.4.2. Нерухомі точки та мультиплікатори (190). 3.1.4.3. Цикли для одновимірних відображень (191). 3.1.4.4. Властивості монотонно зростаючих відображень (192). 3.1.4.5. Властивості монотонно спадних відображень (193). 3.1.4.6. Немонотонні відображення (193). 3.1.4.7. Теорема Шарковського (195). 3.1.4.8. Більярди Синає (195). 3.1.4.9. Зв'язок між кутом падіння та кутом відбиття в більярді Синає (196). 3.1.4.10. Побудова модельного відображення для більярду Синає (197). 3.1.4.11. Розрахунок КС-ентропії для більярду Синає (197). 3.1.4.12. Розрахунок часу розчеплення кореляцій для більярду Синає (197).	
Контрольні питання до підрозділу 3.1.4	198
Задачі до підрозділу 3.1.4	198
<i>3.1.5. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора: побудова відображення та аналіз руху</i>	199
3.1.5.1. Опис моделі (199). 3.1.5.2. Побудова відображення (200). 3.1.5.3. Нерухомі точки та умови виникнення нестійкості (202). 3.1.5.4. Фазовий портрет (202). 3.1.5.5. Оцінка часу перемішування за кутом (204). 3.1.5.6. Спектральні властивості хаотичної динаміки, породжуваної стандартним відображенням (205).	
Контрольні питання до підрозділу 3.1.5	207
Задачі до підрозділу 3.1.5	207
<i>Висновки до розділу 3.1</i>	207
<i>Контрольні питання до розділу 3.1</i>	209
<b>3.2. Хаос у дисипативних системах</b>	210
<i>3.2.1. Загальні властивості хаотичного руху дисипативних систем</i>	210
3.2.1.1. Прості атрактори (210). 3.2.1.2. Дивні атрактори (211). 3.2.1.3. Квазіатрак-	

тори (212). 3.2.1.4. Сценарії переходу до хаосу (213).	
Контрольні питання до підрозділу 3.2.1	212
Задачі до підрозділу 3.2.1	213
3.2.2. Автогенератор із параметричним збудженням	213
3.2.2.1. Побудова моделі (213). 3.2.2.2. Побудова стандартного дисипативного відображення (214). 3.2.2.3. Нерухомі точки, мультиплікатори та умова виникнення стохастичності (215). 3.2.2.4. Структура дивного атрактора (216). 3.2.2.5. Оцінка фрактальної розмірності дивного атрактора (218).	
Контрольні питання до підрозділу 3.2.2	219
Задачі до підрозділу 3.2.2	219
3.2.3. Генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича	219
3.2.3.1. Схема та рівняння руху (220). 3.2.3.2. Ділянки швидкого та повільного руху (221). 3.2.3.3. Характерні режими роботи (222). 3.2.3.4. Робота схеми при малих коефіцієнтах зворотного зв'язку (222). 3.2.3.5. Мономодальний режим стохастичних коливань (223). 3.2.3.6. Статистика генератора КПП у мономодальному режимі (224). 3.2.3.7. Мультимодальні режими стохастичних коливань (226). 3.2.3.8. Перехід від мономодального до мультимодальних режимів (227). 3.2.3.9. Релаксаційні коливання (229). 3.2.3.10. Особливості біфуркацій (229).	
Контрольні питання до підрозділу 3.2.3	231
Задачі до підрозділу 3.2.3	231
Висновки до розділу 3.2	232
Контрольні питання до розділу 3.2	232
<b>3.3. Турбулентність у розподілених консервативних системах</b>	233
3.3.1. Слабка турбулентність у гамільтонівських системах: рівняння руху, побудова відображення та умови виникнення нестійкості	234
3.3.1.1. Гамільтонівський опис хвиль (234). 3.3.1.2. Опис моделі (235). 3.3.1.3. Рівняння для нелінійно зв'язаних мод (236). 3.3.1.4. Узагальнена неізохронність (236). 3.3.1.5. Зведення рівнянь руху до моделі вимушених коливань (237). 3.3.1.6. Перехід до змінних дія - кут (238). 3.3.1.7. Побудова відображення (239). 3.3.1.8. Локальна нестійкість фаз (239). 3.3.1.9. КС-ентропія (240). 3.3.1.10. Розчеплення кореляцій (241).	
Контрольні питання до підрозділу 3.3.1	242
3.3.2. Статистичний опис слабкої турбулентності	242
3.3.2.1. Багаточастинкова функція розподілу та рівняння Ліувілля (243). 3.3.2.2. Розв'язок рівняння Ліувілля в нульовому наближенні (243). 3.3.2.3. Отримання рівнянь для амплітуд ряду Фур'є функції розподілу (244). 3.3.2.4. Отримання редукованого рівняння для постійної складової функції розподілу (245). 3.3.2.5. Рівняння для усередненої за кутами функції розподілу (246). 3.3.2.6. Умови хаотизації фаз хвиль (247). 3.3.2.7. Кінетичне рівняння для кількості квантів (247). 3.3.2.8. Властивості розв'язку кінетичного рівняння для кількості квантів (249).	
Контрольні питання до підрозділу 3.3.2	250
Задачі до підрозділу 3.3.2	250
3.3.3. Солітонна турбулентність	250
3.3.3.1. Солітони та кноїдальні хвилі (251). 3.3.3.2. Взаємодія солітонів (252). 3.3.3.3. Гамільтонівський формалізм для сильнонелінійних хвиль (253). 3.3.3.4. Малий параметр взаємодії кноїдальних хвиль у двовимірному випадку (253). 3.3.3.5. Основне кінетичне рівняння для солітонної турбулентності (253).	
Контрольні питання до підрозділу 3.3.3	254
Висновки до розділу 3.3	255
Контрольні питання до розділу 3.3	255

<b>3.4. Турбулентність у розподілених дисипативних системах</b>	256
<i>3.4.1. Гідродинамічна турбулентність: загальні поняття</i>	256
3.4.1.1. Рівняння Нав'є – Стокса. Ламінарна та турбулентна течія (256). 3.4.1.2. Утворення дивного атрактора в функціональному просторі (259). 3.4.1.3. Різновиди гідродинамічної турбулентності (259).	
Контрольні питання до підрозділу 3.4.1	260
<i>3.4.2. Слабка гідродинамічна турбулентність</i>	261
3.4.2.1. Методи експериментального визначення розмірності вкладення (261).	
3.4.2.2. Слабка турбулентність у шарі рідини, який підігрівається знизу: аналіз системи Лоренца (264). 3.4.2.3. Перехід до просторово-часового хаосу (266).	
Контрольні питання до підрозділу 3.4.2	267
<i>3.4.3. Розвинена гідродинамічна турбулентність</i>	267
3.4.3.1. Пульсації різних масштабів у турбулентному потоці (268). 3.4.3.2. Роль дисипації для пульсацій різних масштабів (269). 3.4.3.3. Аналіз великомасштабних пульсацій методом розмірностей (269). 3.4.3.4. Локальні властивості розвиненої турбулентності (270). 3.4.3.5. Оцінка порогового масштабу дисипації (271). 3.4.3.6. Колмогорівські спектри (271). 3.4.3.7. Область масштабів, де в'язкість рідини стає суттєвою (272).	
Контрольні питання до підрозділу 3.4.3	273
Задачі до підрозділу 3.4.3	273
<i>3.4.4. Зв'язок між структурами та турбулентністю в активних середовищах</i>	273
3.4.4.1. Патерни та автопатерни (274). 3.4.4.2. Узагальнена класифікація турбулентного руху та дисипативних структур (274).	
Контрольні питання до підрозділу 3.4.4	276
<i>Висновки до розділу 3.4</i>	276
<i>Контрольні питання до розділу 3.4</i>	277
<b>ЛІТЕРАТУРА</b>	278

## Передмова

Пропонований підручник призначений для магістрантів першого року навчання за спеціальностями "радіофізика і електроніка" та "медична фізика" (напрямок підготовки – „прикладна фізика”), які вивчають курс „Синергетика” (IX семестр, 34 години лекцій, 34 години семінарських занять, іспит). Підручник містить тексти лекцій, а також контрольні питання та задачі. Задачі, відзначені зірочкою, характеризуються підвищеною складністю й призначені для самостійної індивідуальної роботи студентів.

Слід узяти до уваги, що частина матеріалу, викладеного в підручнику, виноситься на самостійне вивчення, а також служить основою для підготовки доповідей на семінарах. При цьому на іспит виноситься весь матеріал книги, включаючи контрольні питання та задачі. Вважаю, що, на відміну від студентів молодших курсів, слухачі магістратури здатні самостійно, спираючись на текст лекцій та користуючись консультаціями викладача, розібратись із задачами (тим більше з контрольними питаннями).

Для повноцінного сприйняття змісту підручника необхідно засвоїти матеріал курсів загальної та теоретичної фізики, а також курсів „Основи радіоелектроніки”, „Коливання та хвилі”, „Статистична радіофізика”.

В основу книги покладено лекції, які читалися автором спершу для студентів кафедри фізико-математичних наук (спеціальність – фізика біологічних систем) факультету природничих наук Національного університету „Києво-Могилянська Академія” (курси „Вступ до нелінійної фізики” та „Хаос у фізичних явищах”), потім для магістрантів спеціалізації „автоматизація наукових досліджень” радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (курс „Нелінійні хвилі. Структури. Хаос”), і, нарешті, для магістрантів спеціальностей "радіофізика і електроніка" та "медична фізика" радіофізичного факультету КНУ (курс „Синергетика”).

Вважаю своїм приємним обов’язком подякувати за допомогу в роботі над цим підручником своєму колезі О.І.Кельнику та численним студентам радіофізичного факультету КНУ, які слухали даний курс, розв’язували задачі до нього та робили доповіді на семінарах, а також вказали мені на окремі описки та помилки в електронній версії книги. Я особливо вдячний А.С.Лазареву та В.В.Тицькому, які безпосередньо підштовхнули мене до підготовки цього підручника та дуже допомогли в роботі над першим варіантом його тексту.

Усвідомлюючи недосконалість даної книги, звертаюся з проханням до всіх її читачів надсилати мені свої зауваження та побажання електронною поштою на адресу [ioa@univ.kiev.ua](mailto:ioa@univ.kiev.ua), за що буду дуже вдячний.

І.Анісімов

## ВСТУП

### *В.1. Що вивчає синергетика?*

Синергетика (від грецьких слів  $\sigma\upsilon\nu$  – спільний та  $\epsilon\rho\omega\nu$  – діяльність) – це міждисциплінарний напрямок, що вивчає процеси в нелінійних дисипативних системах із розподіленими параметрами<sup>1</sup>, причому ці системи є відкритими (тобто можуть обмінюватися з іншими системами енергією та речовиною) та далекими від термодинамічної рівноваги. Такі системи (середовища) ми надалі будемо називати активними. Їхня термодинамічна нерівноважність може забезпечуватись або за рахунок надходження енергії ззовні (протягом довільного часу), або за рахунок початкових умов (протягом обмеженого проміжку часу).

Загальновідомим аналогом подібних систем, але із зосередженими параметрами, є автогенератори. В автогенераторах за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати та встановлюватися періодичні коливання, основні властивості яких (форма, амплітуда, період) визначаються властивостями автогенератора і не залежать від початкових умов. При цьому енергія на збудження коливань береться ззовні (за рахунок того, що система відкрита) або в самій системі (якщо вона в початковий момент часу далека від стану рівноваги). Прикладом системи першого типу може служити генератор електричних коливань, що живиться від зовнішньої батареї чи мережі, прикладом системи другого типу – годинник, що приводиться в дію гирею або деформованою пружиною. В обох випадках системи віддають назовні тепло, тобто в цьому сенсі обидві вони є відкритими.

Якщо кількість ступенів вільності автогенератора буде більшою за одиницю, то в ньому, крім періодичних коливань, можливі також стохастичні коливання (непередбачувана поведінка). Для виникнення стохастичних коливань необхідне поєднання фінитності руху системи та його нестійкості за Ляпуновим: як завгодно мала зміна початкових умов (а вони в реальному житті завжди відомі з обмеженою точністю) з часом призводить до значної зміни руху системи<sup>2</sup>.

Синергетика вивчає ефекти такого самого типу, але для систем із розподіленими параметрами. Тому відповідні явища є значно складнішими та різноманітнішими. Загалом можна говорити про виникнення в активних дисипативних нелінійних середовищах структур (інколи в літературі їх називають також патернами), які в загальному випадку змінюються з часом, причому властивості таких структур слабо залежать від початкових та граничних<sup>3</sup> умов і визначаються переважно властивостями самого середовища. Такі структури прийнято називати дисипативними. Названі структури можуть бути й нерегулярними в просторі та в часі – в такому випадку говорять про турбулентний рух.

Механізм виникнення дисипативних структур зводиться до того, що при значних відхиленнях від термодинамічної рівноваги стаціонарний однорідний стан відкритої системи втрачає стійкість, і від рівня флуктуацій починають наростати збурення. На нелінійній стадії процесу зростання амплітуди збурень припиняється, і формується регулярна (стаціонарна чи нестаціонарна) або турбулентна дисипативна структура. Відзначимо, що різкої межі між регулярними та турбулентними структурами не існує – вони можуть плавно переходити одна в одну при зміні параметрів системи.

### *В.2. Основні типи регулярних дисипативних структур у нерівноважних середовищах*

Регулярні (невипадкові) дисипативні структури можуть бути динамічними (такими, що змінюються в часі) та стаціонарними (незмінними в часі). З іншого боку, дисипативні структури можуть бути періодичними (в часі та/або в просторі) чи аперіодичними. Нарешті,

<sup>1</sup> Нагадаємо, що системи з розподіленими параметрами формально мають континуум ступенів вільності та описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

<sup>2</sup> В загальному випадку причиною непередбачуваної поведінки системи може бути також дія флуктуацій (шумів), поява яких обумовлена або неможливістю точно описати динаміку системи з дуже великою кількістю ступенів вільності (наприклад, рух усіх молекул у газі чи всіх заряджених частинок у провіднику), або наявністю випадкового зовнішнього впливу.

<sup>3</sup> У випадку, коли розміри системи значно більші за характерні розміри дисипативних структур.

динамічні дисипативні структури можуть ініціюватися зовнішнім впливом або виникати в активних системах спонтанно.

В багатьох випадках динамічні дисипативні структури належать до класу так званих автохвиль. Автохвилі – це хвилі, що можуть поширюватися в активних дисипативних середовищах без зміни своєї форми, причому основні характеристики таких хвиль (амплітуда, форма, швидкість) не залежать від початкових та граничних умов і визначаються лише властивостями середовища, в якому вони поширюються.

Найпростішим прикладом періодичної динамічної дисипативної структури може служити стаціонарна квазігармонічна хвиля в слабконелінійній активній лінії передачі, збуджуваній генератором із заданою частотою. В такій лінії хвиля малої амплітуди спочатку експоненціально зростає в просторі, а потім за рахунок нелінійності її амплітуда встановлюється на деякому фіксованому рівні (як у генераторі Ван-дер-Поля<sup>4</sup>). Квазігармонічні автохвилі під дією зовнішнього джерела виникають і в так званих середовищах автоколивного типу. Такі середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних автогенераторів.

Прикладами динамічних аперіодичних дисипативних структур є біжучі фронти (наприклад, лісова пожежа або будь-яка інша хвиля запалювання) та біжучі імпульси (наприклад, поширення імпульсу в нервовому волокні), що також можуть служити зразками автохвиль. Виникнення таких автохвиль, як і в попередніх прикладах, ініціюється зовнішнім впливом.

Особливе місце посідають автономні джерела періодичних автохвиль. До цього класу динамічних дисипативних структур належать, зокрема, джерела спіральних хвиль, або ревербератори, та джерела концентричних хвиль, які в залежності від механізму функціонування відомі як пейсмерери (провідні центри) або автопейсмерери.

Найвідомішим прикладом стаціонарних періодичних (у просторі) дисипативних структур є, напевне, конвективні вали та комірки Бенара<sup>5</sup> – просторово-періодичні течії типу вихорів, що за певних умов можуть виникнути в шарі в'язкої рідини, який підігрівається знизу. Процеси такого типу, що відбуваються в атмосфері, відіграють важливу роль у метеорології (їхнім наслідком є, зокрема, утворення періодичних структур у хмарах – рис. В.1).



*Рис. В.1. Просторово періодичні структури в хмарах.*

Інший зразок періодичної стаціонарної дисипативної структури – це розшарування первісно однорідного потоку електронів, що рухається в плазмі, на окремі нитки. Вважається, що саме цей ефект визначає смугасту структуру полярних сьйв (рис. В.2).

<sup>4</sup> Б. Ван-дер-Поль (Balthasar van der Pol, 1889-1959) – голландський дослідник та інженер. Найбільш відомий своїми піонерськими дослідженнями автогенераторів.

<sup>5</sup> А. Бенар (Henri Bénard, 1874 - 1939) – французький фізик, лауреат премії Бурдена Французької академії наук (1929), найбільш відомий дослідженням конвекції в рідинах (конвекція Релея – Бенара).



Можливі й аперіодичні стаціонарні дисипативні структури, коли середовище спонтанно розпадається на області з відмінними властивостями. Прикладом таких структур може служити виникнення низькоомних та високоомних областей у баретері (залізна нитка, вміщена в атмосферу водню, крізь яку пропускається струм) або вогнища горіння в реакторі з перемішуванням та обмеженим надходженням пального.

Ми обмежимося нижче розглядом лише тих дисипативних структур, що виникають у первісно однорідних середовищах. Однак у реальних ситуаціях виникнення структур може бути пов'язане з неоднорідністю системи. Так, при зустрічі повітряних мас із різною температурою в атмосфері утворюються циклони та антициклони – гігантські вихори, що обертаються в горизонтальній площині (рис. В.3). В центрі циклону повітря піднімається вгору, в центрі антициклону – навпаки, опускається вниз. Вихори меншого масштабу в атмосфері, що мають аналогічну природу, відомі як смерчі. Подібні за механізмом виникнення й вихори, що супроводжують турбулентну течію рідини.



*Рис. В.2. Полярне сяйво зі смугастою структурою.*



*Рис. В.3. Циклон.*

### *В.3. Турбулентність*

Турбулентністю прийнято називати хаотичну динаміку в системах із розподіленими параметрами. Можна сказати, що турбулентність так само виникає в результаті руйнування регулярних (стаціонарних або нестаціонарних) дисипативних структур у нерівноважних розподілених системах, як хаотична динаміка виникає в результаті руйнування регулярних автоколивань у генераторах із зосередженими параметрами.

Історично найбільш відомою і, напевне, найбільш дослідженою є гідродинамічна турбулентність. Вона виявляється в тому, що при великих швидкостях у течії виникають вихори різних масштабів, поле швидкостей течії набуває надзвичайно складного, зовні випадкового в просторі та часі характеру.

Сьогодні поняття турбулентності широко використовується для опису не тільки руху рідин та газів, а також динаміки плазми та деяких інших об'єктів, поведінка яких визначається електромагнітними полями.

Турбулентний рух насправді характеризується значним ступенем упорядкованості, що, зокрема, виявляється в не випадковому характері спектрів турбулентності. З іншого боку, не існує різкої межі між турбулентністю та регулярними дисипативними структурами (рис. В.4).

Слід прямо вказати, що турбулентність на сьогоднішній день залишається одним з найменш зрозумілих явищ у межах класичної фізики. Механізми виникнення стохастичної динаміки можна вважати достатньою мірою розробленими лише для консервативних систем.



Рис. В.4. Турбулентна течія диму.

#### *В.4. Синергетика й термодинаміка*

На перший погляд, виникнення регулярних та нерегулярних структур у первісно однорідному середовищі суперечить другому початку термодинаміки, згідно з яким системи спонтанно прямують до стану з найбільшою ентропією, тобто з найбільшим ступенем безладдя. Насправді треба пам'ятати, що другий початок термодинаміки в традиційному його формулюванні справедливий лише для замкнених систем. Більш того, класична термодинаміка взагалі розглядає лише системи, що перебувають у стані термодинамічної рівноваги або, принаймні, близькі до такого стану. Синергетика ж вивчає системи, які є відкритими і далекими від термодинамічної рівноваги. Таким чином, другий початок термодинаміки в традиційній формі до них незастосовний.

По суті, синергетику можна розглядати як нерівноважну (точніше, сильно нерівноважну) термодинаміку. Визначні результати в цьому напрямку були отримані відомим бельгійським дослідником, Нобелівським лауреатом І.Р. Пригожиним<sup>6</sup>. Він, зокрема, показав, що стаціонарний стан, який є стійким для термодинамічно рівноважної системи, при великих відхиленнях від стану термодинамічної рівноваги може втратити свою стійкість, що є першим кроком до виникнення дисипативних структур. Простим прикладом такого роду є втрата стійкості стану спокою в підсилувачі, охопленому позитивним зворотним зв'язком, при виконанні амплітудної умови самозбудження.

<sup>6</sup>І.Р. Пригожин (Puя, Viscount Prigogine; Илья Романович Приго́жин, 1917 –2003) – бельгійський та американський фізик та хімік російського походження, Нобелівський лауреат з хімії (1977). Основні роботи присвячені нерівноважній термодинаміці та статистичній механіці необоротних процесів.

Ентропія, як міра безладу, та деякі її локальні характеристики можуть бути використані для кількісної характеристики ступеню самоорганізації. Так Ю.Л. Климонтovich<sup>7</sup> вдалося, зокрема, продемонструвати, що перехід течії в турбулентний режим приводить до зростання ступеню самоорганізації системи.

### *В.5. Практичне значення синергетики*

Дослідження регулярних автохвильових процесів, дисипативних структур та турбулентності має велике практичне значення.

Слід сказати, що біологічні об'єкти різної природи та різних рівнів (від клітини до екологічної системи) в багатьох випадках можуть розглядатися саме як нерівноважні нелінійні розподілені дисипативні системи, а процеси, що відбуваються в них, відповідно можуть бути описані в термінах синергетики. Так, проблема виникнення життя може бути розглянута як процес самоорганізації речовини. Багато біологічних та екологічних процесів мають автохвильову природу (поширення збуджень у нервовому волокні, робота серця, поширення популяцій у просторі та інше).

Приклад біологічних об'єктів нашо́вхує на думку, що, коли сьогодні передача та обробка сигналів значною мірою базується на теорії лінійних та нелінійних хвиль у пасивних системах, то завтра її основою стануть процеси в активних системах із розподіленими параметрами. Уже сьогодні для генерації коливань широко використовуються відкриті системи з розподіленими параметрами (лазери, лампи біжучої хвилі, діоди Ганна<sup>8</sup>, лазери на вільних електронах та багато інших). Активно ведуться роботи, спрямовані на створення синергетичних комп'ютерів, принципи роботи яких носять аналоговий характер (типу пристроїв функціональної електроніки) та нагадують роботу людського мозку й інших біологічних систем. Можна уявити собі, що формування стаціонарних просторово неоднорідних дисипативних структур також може знайти технологічні застосування.

Окремо хочеться підкреслити величезне практичне значення вивчення турбулентності. Досить нагадати, що майже завжди рух рідин, газів та плазми, що спостерігається на практиці, має турбулентний характер (від турбулентної течії води в річках, крові в судинах та нафти в нафтопроводах до руху повітряних мас в атмосфері Землі, течії рідких та газоподібних реагентів у технологічних установках хімічної промисловості та турбулентної дифузії плазми в магнітних пастках для керованого термоядерного синтезу).

### *В.6. Зміст та структура курсу*

При викладенні матеріалу автор намагався, з одного боку, розбирати реальні задачі, що досліджуються в рамках синергетики, а з іншого – викладати ці задачі як реалізацію деяких загальних принципів або ілюстрацію до них. Нові методи досліджень, специфічні для даної галузі науки, на зразок методу точкових відображень, викладалися лише тоді, коли без них неможливо було обійтися. По можливості (але не завжди) хід аналітичних розрахунків розбирався достатньо детально.

Матеріал курсу розбитий на три частини.

Перша частина присвячена термодинаміці відкритих (нерівноважних) систем. У ній розглядаються питання про виробництво ентропії в нерівноважних системах, про стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги, про еволюцію та самоорганізацію таких систем.

Друга частина курсу присвячена регулярним дисипативним структурам. Тут спочатку розглядаються автохвильові процеси періодичного та аперіодичного характеру в типових активних середовищах, ініційовані зовнішнім впливом. Далі розглядаються автономні джерела

---

<sup>7</sup> Ю.Л.Климонтovich (Юрій Львович Климонтovich, 1924-2002) – російський фізик-теоретик, професор Московського державного університету. Працював у галузі нерівноважної статистичної фізики та кінетичної теорії плазми.

<sup>8</sup> Дж.Б. Ганн (John Battiscombe Gunn, 1928-2008) – англійський та американський фізик. В 1963 році, працюючи у фірмі ІВМ, винайшов діод Ганна.

автохвиль. Наприкінці аналізуються основні механізми виникнення стаціонарних дисипативних структур (на прикладі моделі морфогенезу Тюрінга<sup>9</sup>, виникнення конвективних валів та комірок і ефекту баретування).

Нарешті, третя частина курсу присвячена хаосу та турбулентності. Спочатку розглядається виникнення хаотичної динаміки та її ускладнення при переході від інтегровних гамільтонівських систем до систем, близьких до інтегровних, а потім – до неінтегровних систем. Тут же розбирається метод точкових відображень та основні кількісні характеристики хаотичного руху. Потім розглядаються властивості хаотичної динаміки в дисипативних системах, що пов'язані з виникненням дивних атракторів. Нарешті, два останні розділи третьої частини присвячені турбулентності в консервативних системах (на прикладі турбулентності хвильових полів) та турбулентності в дисипативних системах (на прикладі гідродинамічної турбулентності).

---

<sup>9</sup> А.М. Тюрінг (Alan Mathison Turing; 1912 –1954) – англійський математик, логік, криптограф, один з розробників перших комп'ютерів.

## Частина 1. ТЕРМОДИНАМІКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ

Другий початок термодинаміки підводив перших його дослідників до думки, що Всесвіт (а, отже, й Земля, як його частина) поступово еволюціонує в напрямку встановлення термодинамічної рівноваги, яка характеризується максимальною невпорядкованістю (концепція „теплової смерті Всесвіту”, висунута В.Томсоном<sup>1</sup>). З іншого боку, спостереження за біосферою Землі привели до появи еволюційної теорії Дарвіна<sup>2</sup>. Остання стверджувала, що життя розвивається від простіших форм до складніших, тобто в процесі еволюції ступінь упорядкованості біологічних систем зростає. Склалося враження, що біологія та фізика вступили між собою в гостру суперечність.

Ця суперечність була розв’язана лише дослідниками ХХ століття (зокрема, І.Р.Пригожиним), які створили нерівноважну термодинаміку і продемонстрували, що в системах, далеких від термодинамічної рівноваги, можуть спонтанно виникати різного роду стаціонарні та нестаціонарні структури. Відповідно й другий початок термодинаміки, який первісно формулювався для замкнених систем, був узагальнений на випадок відкритих систем.

Саме про термодинаміку відкритих систем піде мова у першій частині цього курсу.

### Розділ 1.1. Ентропія та другий початок термодинаміки для замкнених систем

Перш ніж безпосередньо розглядати відкриті системи, нагадаємо необхідні для подальшого викладу відомості зі статистичної фізики та термодинаміки, що стосуються замкнених систем та їхньої рівноваги. Дослідження рівноваги термодинамічних систем спирається на метод функцій Ляпунова<sup>3</sup>, який викладено на початку розділу. Далі обговорюється статистичне визначення ентропії за Больцманом<sup>4</sup> (для ідеального газу), за Гіббсом<sup>5</sup> (для набору частинок із довільним законом взаємодії) та за Шенноном<sup>6</sup> (для системи, описуваної набором змінних довільної природи). Розглядаються  $H$ -теорема Больцмана та теорема Гіббса, які за своїм змістом аналогічні другому початку термодинаміки (в рамках відповідних моделей). Наприкінці розділу коротко обговорюється природа утворення структур у системах зі сталою температурою (такі системи вже не можна вважати замкненими) – саме таким структурам присвячено основну частину даного курсу.

#### 1.1.1. Достатня умова стійкості динамічної системи

З курсу теоретичної фізики добре відома процедура дослідження стійкості положення рівноваги (або стійкості руху) для систем із невеликою кількістю ступенів вільності, яка зводиться до лінеаризації рівнянь руху за малими відхиленнями та наступного дослідження коренів отриманого таким чином характеристичного рівняння<sup>7</sup>. Але такий метод, очевидно, дуже ускладнюється для систем з великою кількістю ступенів вільності. В останньому випадку інколи зручніше користуватися методом так званих функцій Ляпунова, який і розглядається в цьому підрозділі.

<sup>1</sup>В. Томсон, лорд Кельвін (William Thomson, 1st Baron Kelvin; 1824 – 1907) – великий англійський фізик, залишив видатні роботи в галузі термодинаміки, електрики, теорії газів.

<sup>2</sup> Ч. Дарвін (Charles Robert Darwin; 1809 – 1882) – англійський натураліст та мандрівник, автор еволюційної теорії походження живих організмів.

<sup>3</sup> О.М. Ляпунов (Александр Михайлович Ляпунов, 1857 – 1918) – видатний російський математик, академік Петербурзької академії наук, творець сучасної теорії стійкості систем із зосередженими параметрами. У 1885-1902 роках працював у Харківському університеті, у 1918 році – в Новоросійському університеті (м. Одеса).

<sup>4</sup> Л. Больцман (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844 – 1906) – австрійський фізик-теоретик, творець статистичної механіки та молекулярно-кінетичної теорії.

<sup>5</sup> Дж. Гіббс (Josiah Willard Gibbs; 1839 – 1903) – американський математик, фізик і фізико-хімік, один з творців векторного аналізу і математичної теорії термодинаміки. Працював у Йельському університеті.

<sup>6</sup> К. Шеннон (Claude Elwood Shannon; 1916 – 2001) – американський математик та електротехнік, один з творців математичної теорії інформації.

<sup>7</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.

### 1.1.1.1. Функція Ляпунова і теорема Ляпунова

Розглянемо динамічну систему, що описується набором диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\vec{x}), \quad \vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.1.1)$$

Нехай при  $\vec{x} = \vec{x}_0$  виконано умову

$$F_i(\vec{x}_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1.2)$$

Тоді точка  $\vec{x} = \vec{x}_0$  є точкою рівноваги для аналізованої динамічної системи.

Нехай при  $t = 0$  система характеризується станом  $\vec{x} = \vec{x}_1$ . Чи буде ця система з часом еволюціонувати до точки рівноваги  $\vec{x} = \vec{x}_0$ ? Іншими словами, чи буде точка  $\vec{x} = \vec{x}_0$  аттрактором?

Щоб відповісти на це питання, введемо деяку функцію  $V = V(\vec{x})$ , таку, що вона є позитивною при всіх  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$  і перетворюється в нуль у точці  $\vec{x} = \vec{x}_0$ . Називатимемо її функцією Ляпунова.

Розглянемо, як функція Ляпунова  $V(\vec{x})$  змінюється з часом:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(\vec{x}) = (\nabla V \cdot \vec{F}). \quad (1.1.3)$$

Теорема Ляпунова стверджує, що точка  $\vec{x} = \vec{x}_0$  є аттрактором, якщо похідна  $dV/dt$  має знак, протилежний знаку  $V(\vec{x})$  (в нашому випадку  $dV/dt < 0$ ).

Щоб пояснити зміст теореми Ляпунова, розглянемо візок, що рухається в одновимірній потенціальній ямі. Достатньою умовою того, щоб візок опинився саме в мінімумі потенціалу, є вимога, щоб із часом його потенціальна енергія монотонно зменшувалася. Теорему Ляпунова можна розглядати як узагальнення цього твердження на випадок, коли потенціал є функцією багатьох координат (або інших змінних, аналогічних до координат). Аналогом потенціалу виступає функція Ляпунова.

Підкреслимо, що теорема Ляпунова дає достатню, але не необхідну умову переходу системи до стану стійкої рівноваги. Крім того, вона не дає рецепту побудови функції Ляпунова, що ускладнює її застосування. Але у випадках, коли таку функцію вдається вгадати, теорема Ляпунова виявляється зручним інструментом дослідження стану рівноваги.

### 1.1.1.2. Приклад застосування теореми Ляпунова

Проілюструємо застосування теореми Ляпунова на прикладі задачі про теплопровідність, описуваної рівнянням Фур'є<sup>8</sup>:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.1.4)$$

де  $T$  – температура,  $\kappa$  – коефіцієнт теплопровідності.

Розглядатимемо проміжок  $[0, L]$  з граничними умовами  $T(0) = T(L) = T_0$  (температура на кінцях проміжку підтримується незмінною). Функцію Ляпунова оберемо у вигляді:

$$V(T) = \int_0^L \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \geq 0. \quad (1.1.5)$$

Для заданих граничних умов вона перетворюється на нуль лише тоді, коли в усіх точках

---

<sup>8</sup> Ж.Б. Фур'є (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768 – 1830) – великий французький математик і фізик, член Французької Академії. Запропонував ряди та інтеграли Фур'є, записав та дослідив рівняння теплопровідності в твердому тілі.



проміжку  $T = T_0$ . Тоді з урахуванням рівняння (1.1.4)

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = 2\kappa \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} dx. \quad (1.1.6)$$

Інтегруючи по частинах, отримуємо:

$$\frac{dV}{dt} = 2\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_0^L - 2\kappa \int_0^L \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (1.1.7)$$

З рівняння Фур'є (1.1.4) випливає, що  $\kappa \partial^2 T / \partial x^2 = \partial T / \partial t$ . Але на кінцях відрізка  $T = T_0$  і, відповідно,  $\partial T / \partial t = 0$ . Тому в цих точках  $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$ , тобто перший доданок у правій частині (1.1.7) зникає, і

$$\frac{dV}{dt} = -2\kappa \int_0^L \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 dx \leq 0. \quad (1.1.8)$$

Як бачимо, знак  $dV/dt$  справді протилежний знаку  $V(T)$ , а при  $T = T_0$  маємо  $dV/dt = 0$ . Отже, стан  $T = T_0$  є атрактором.

Відзначимо, що в розібраному прикладі теорема Ляпунова застосована не для динамічної системи вигляду (1.1.1), яка має скінчену кількість змінних, а для системи з розподіленими параметрами, де кількість змінних складає континуум.

### 1.1.2. Визначення та інтерпретація ентропії. Другий початок термодинаміки

У фізиці ентропія (від грецького слова  $\epsilon\nu\tau\rho\omicron\pi\acute{\alpha}$  – поворот, перетворення) виступає як міра безпорядку системи, складеної з багатьох елементів. Зокрема, в статистичній фізиці ентропія є мірою ймовірності реалізації деякого макроскопічного стану. Якщо цей стан упорядкований, йому відповідає один єдиний мікроскопічний стан (або невелика кількість таких станів). Навпаки, неупорядкованому макроскопічному стану (хаосу) відповідає велика кількість мікроскопічних станів, тому ймовірність його реалізації більша. Таким чином, коли ми переходимо від упорядкованої системи до неупорядкованої, ентропія зростає.

Детальніше питання про зв'язок між ентропією та впорядкованістю системи (для відкритих систем) буде розглядатися в пп.1.4.1-1.4.2.

#### 1.1.2.1. Феноменологічне визначення ентропії

Поняття ентропії було вперше запропоноване в 1865 році Р.Клаузіусом<sup>9</sup>. Він дав феноменологічне визначення цієї величини: зміна ентропії при оборотному ізотермічному процесі складає величину  $\Delta S = \Delta Q/T$ . У більш загальному випадку довільного квазістатичного процесу ця формула набуває вигляду

$$dS = \delta Q/T. \quad (1.1.9)$$

Ентропія системи повністю визначається її станом, тому в лівій частині (1.1.9) стоїть повний диференціал. Навпаки, в правій частині величина  $\delta Q$  залежить від процесу передачі тепла, тому вона, взагалі кажучи, не є повним диференціалом.

Ентропія визначає ту частину енергії системи, яка не може бути використана для виконання роботи. Через неї виражається вільна енергія Гельмгольца<sup>10</sup>  $F = E - TS$ , де  $E$  – внутрішня енергія системи. Для теплових машин вільна енергія Гельмгольца визначає ту частину внутрішньої енергії газу, яку можна відібрати й перетворити на роботу.

Ентропія є екстенсивною величиною: якщо система складається з кількох частин, то

<sup>9</sup> Р. Клаузіус (Rudolf Julius Emanuel Clausius; 1822 – 1888) – німецький фізик та математик. Найвідоміші його роботи присвячені теоретичній термодинаміці.

<sup>10</sup> Г. фон Гельмгольц (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz; 1821 – 1894) – видатний німецький фізик, фізіолог і психолог. Основні роботи в галузі фізики присвячені закону збереження енергії, введенню поняття вільної енергії, проблемам акустики та гідродинаміки.

повна ентропія дорівнює сумі ентропії цих частин.

Відзначимо, що ентропія за Клаузіусом визначається з точністю до константи. Ця константа знаходиться з третього початку термодинаміки. Останнє стверджує, що при прямуванні температури системи до нуля ентропія цієї системи також прямує до нуля.

### 1.1.2.2. Больцманівська інтерпретація ентропії

Л. Больцман запропонував інтерпретацію ентропії як міри молекулярного хаосу. Відповідно закон зростання ентропії слід розуміти як вияв зростання дезорганізації замкненої системи.

Для ілюстрації поняття ентропії розглянемо скриньку, розділену на два однакові відділення (рис. 1.1.1).

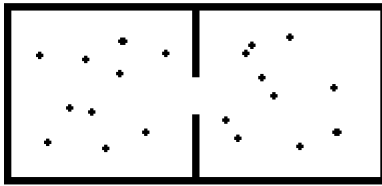


Рис. 1.1.1. До больцманівської інтерпретації ентропії

Нехай у скриньці знаходяться  $N$  молекул. Їх можна розбити на дві частини,  $N_1$  та  $N_2$  ( $N_1 + N_2 = N$ ), причому число можливих способів такого розбиття буде

$$p = \frac{N!}{N_1!N_2!} \quad (1.1.10)$$

Легко бачити, що це число досягає максимуму, коли  $N_1 = N_2$  (або  $N_1 = N_2 \pm 1$ , якщо  $N$  – непарне число). Саме стан з найбільшим  $p$  (найбільшою ймовірністю) і буде реалізуватися. Больцман пов'язав число  $p$  – по суті, ймовірність реалізації даного макроскопічного стану – з ентропією  $S$  співвідношенням

$$S = k_B \ln p, \quad (1.1.11)$$

де  $k_B$  – стала Больцмана.

Отже, зростання ентропії відповідає еволюції системи до «найбільш імовірного» (або найменш упорядкованого) стану.

### 1.1.2.3. Другий початок термодинаміки

Другий початок термодинаміки, сформульований Р.Клаузіусом (1850) та в іншій формі В.Томсоном (1851) – це постулат, який узагальнює весь масив експериментальних даних. Він виражає фізичний принцип, що накладає обмеження на напрямок передачі тепла між тілами: неможлива спонтанна передача тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

Як показав Клаузіус у 1865 році, для замкнених систем, які не обмінюються з іншими ні енергією, ні речовиною, з другого початку термодинаміки випливає існування деякої функції  $S$  (ентропії), яка монотонно зростає з часом доти, доки не досягне свого максимального значення  $S_{\max}$  у стані термодинамічної рівноваги, так, що  $dS/dt \geq 0$ .

Як бачимо, поведінка величини  $S_{\max} - S$  нагадує функцію Ляпунова:  $S_{\max} - S \geq 0$ ,  $d(S_{\max} - S)/dt \leq 0$ .

Будемо називати величину  $dS/dt$  виробництвом ентропії. Внесок у виробництво ентропії дають лише необоротні процеси (хімічні реакції, теплопровідність, дифузія та ін.), тоді як в оборотних процесах ентропія зберігається. Як і сама ентропія, виробництво ентропії є екстенсивною величиною.

Відзначимо, що в статистичній фізиці можливі флуктуації – перехід від більш ймовірних станів до менш ймовірних. Таким чином, закон зростання ентропії в замкнених системах



виконується лише статистично – на великих проміжках часу.

### 1.1.3. Визначення ентропії для ідеального газу. *H*-теорема Больцмана

Як відомо, другий початок термодинаміки визначає напрямок еволюції систем у часі. З другим початком термодинаміки тісно пов'язане поняття ентропії. Обговоримо ці питання спочатку для ідеального газу, точніше, для ансамблю однакових частинок, що взаємодіють між собою лише за рахунок пружних зіткнень.

#### 1.1.3.1. Одночастинкова функція розподілу

Динамічний (макроскопічний) розподіл системи з  $N$  частинок у шестивимірному просторі координат та імпульсів частинок  $x = (\vec{r}, \vec{p})$  має вигляд

$$N(x, t) \equiv \sum_{i=1}^N f_{dyn}(x_i, t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \quad (1.1.12)$$

і задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(x, t) dx = N. \quad (1.1.13)$$

Величина  $N(x, t) dx$  визначає точне число частинок в околі  $dx$  точки  $x$  у момент часу  $t$ .

Визначимо ансамбль Гіббса як сукупність систем з однаковими макроскопічними характеристиками, які, однак, відрізняються значенням мікроскопічних змінних  $x_i$ . Для такого ансамблю функція  $N(x, t)$  є випадковою. Її усереднення за ансамблем Гіббса (ця операція нижче позначена кутовими дужками) визначає одночастинкову функцію розподілу  $f(x, t)$ :

$$f(x, t) \equiv \frac{1}{N} \langle N(x, t) \rangle. \quad (1.1.14)$$

Функція  $f(x, t)$  задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x, t) = 1. \quad (1.1.15)$$

Величина  $f(x, t) dx$  визначає ймовірність перебування частинки в околі розміром  $dx$  точки  $x$  у момент часу  $t$ .

#### 1.1.3.2. Визначення ентропії для ідеального газу за Больцманом

Розглянемо тепер ідеальний газ – ансамбль однакових безструктурних частинок, взаємодія яких зводиться лише до пружних зіткнень. В загальному випадку ентропія Больцмана  $S_B$  для ідеального газу записується через одночастинкову функцію розподілу  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ :

$$S_B = -k_B N \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \ln [f(\vec{r}, \vec{p}, t)] + S_0, \quad (1.1.16)$$

де  $N$  – повна кількість частинок у системі,  $S_0$  – константа інтегрування. Остання неістотна, оскільки фізичний інтерес являє зміна ентропії при переході системи з одного стану в інший.

Відзначимо, що інтеграл в (1.1.16) відповідно до правила знаходження статистичних середніх має зміст середнього за ансамблем значення величини  $\ln f$ . Збільшення ентропії означає, що функція розподілу  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  стає більш «розмазаною», в результаті чого середнє за ансамблем значення  $\ln f$  зменшується. Оскільки воно від'ємне, ентропія при цьому відповідно зростає.

Проілюструємо останнє твердження для простого дискретного аналога розглянутої системи, де замість неперервної функції  $f(x)$  фігурує дискретний набір значень

$f_i$  ( $i = 1 \dots N$ ), що задовольняє умові нормування

$$\sum_{i=1}^N f_i = 1. \quad (1.1.15 \text{ a})$$

Якщо всі  $f_i$ , крім одного, дорівнюють нулю, а останнє, відповідно – одиниці, то аналог ентропії Больцмана (за умови  $S_0 = 0$ ) буде також дорівнювати нулеві. У протилежному ж випадку, коли  $f_i = 1/N$  для будь-якого  $i$ , отримаємо значення

$$S_B = -k_B N \ln \frac{1}{N} = k_B N \ln N > 0. \quad (1.1.17)$$

Суттєво, що як одночастинкова функція розподілу, так і, відповідно, ентропія Больцмана не враховують кореляційного зв'язку між різними частинками. Таким чином, вони відповідають саме моделі ідеального газу, де взаємодія між частинками відсутня.

### 1.1.3.3. *H*-теорема Больцмана

Як уже згадувалося (див. вище п.1.1.2.3), другий початок термодинаміки був сформульований на основі узагальнення експериментальних даних як постулат. Больцман уперше аналітично довів твердження, аналогічне до нього за змістом, для моделі ідеального газу. Це твердження увійшло в літературу як *H*-теорема Больцмана (назва походить від англійського слова heat – тепло).

*H*-теорема стверджує, що в замкненій (для частинок) системі в процесі еволюції до рівноваги ентропія зростає і залишається незмінною при досягненні рівноважного стану.

Для доведення цієї теореми використовується відоме з курсу статистичної фізики кінетичне рівняння Больцмана для одночастинкової функції розподілу  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}(\vec{r}, t) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_B(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (1.1.18)$$

де  $\vec{F}$  – зовнішня сила (для розрідженого газу), а  $I_B$  – так званий інтеграл зіткнень Больцмана, який описує процеси дисипації. Саме наявність інтегралу зіткнень робить рівняння Больцмана необоротним. У явному вигляді інтеграл зіткнень Больцмана записується так:

$$I_B(\vec{r}, \vec{p}, t) = n \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\vec{p}_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left[ f(\vec{r}, \vec{p}_1', t) f(\vec{r}, \vec{p}_2', t) - f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f(\vec{r}, \vec{p}_2, t) \right]. \quad (1.1.19)$$

Тут  $n$  – кількість частинок в одиниці об'єму,  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  – відносна швидкість частинок 1 та 2 перед їхнім зіткненням,  $\varphi$  та  $\rho$  – кут та радіус циліндричної системи координат, вісь якої спрямована вздовж відносної швидкості  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ,  $\vec{p}_1 \equiv \vec{p}$  та  $\vec{p}_2$ ,  $\vec{p}_1'$  та  $\vec{p}_2'$  – імпульси цих частинок відповідно перед зіткненням та після нього. Вони пов'язані між собою законами збереження імпульсу та енергії:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \quad \frac{(\vec{p}_1)^2}{2m} + \frac{(\vec{p}_2)^2}{2m} = \frac{(\vec{p}_1')^2}{2m} + \frac{(\vec{p}_2')^2}{2m}. \quad (1.1.20)$$

З урахуванням уведених вище позначень математичне формулювання *H*-теореми має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = -k_B N \int I_B \ln f d\vec{p} d\vec{r} \geq 0, \quad (1.1.21)$$

де, як уже зазначалося, величина  $S_{\max} - S$  виступає в ролі функції Ляпунова. Слід звернути увагу, що під знаком інтегрування у виразі для густини виробництва ентропії фігурує інтеграл зіткнень  $I_B$ , що описує необоротні процеси. Справді, як підкреслювалося вище (п.1.1.2.1), виробництво ентропії пов'язане саме з необоротними процесами.

Відзначимо, що для розрідженого газу, описуваного рівнянням Больцмана, середня енергія (на одну частинку) зберігається.

Як уже вказувалося,  $H$ -теорема Больцмана доведена для ідеального газу. Для неідеального газу довести аналогічне твердження в загальному випадку не вдається. Тим не менше, і в таких системах, і навіть у значно складніших для аналізу різновидах замкнених систем ентропія також може служити характеристикою ступеню впорядкованості.

#### 1.1.4. Ентропія системи частинок, що взаємодіють між собою

Хоча узагальнити  $H$ -теорему на випадок системи частинок, що взаємодіють між собою, не вдається, але можна сформулювати інше твердження, аналогічне за змістом до другого початку термодинаміки – так звану теорему Гіббса. Для цього доведеться розглянути інше визначення ентропії – так звану ентропію Гіббса.

##### 1.1.4.1. Ентропія Гіббса

Як уже вказувалося, ентропія Больцмана введена для системи частинок, що не взаємодіють між собою (точніше, взаємодіють тільки через пружні зіткнення). Для розгляду системи частинок, між якими можлива взаємодія на відстані, користуються іншим визначенням ентропії – так званою ентропією Гіббса.

Розглянемо  $6N$ -вимірний фазовий простір  $X = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\}$ . Кожна точка такого простору відповідає певному стану системи з  $N$  частинок. При статистичному описі точки розташовуються в просторі  $X$  випадковим чином, і можна ввести відповідну функцію розподілу  $f_N(X, t)$ , що в загальному випадку залежить від часу. Величина  $f_N(X, t)dX$  означає ймовірність того, що в момент часу  $t$  система перебуватиме в стані  $X$  (точніше, в околі точки  $X$  розміром  $dX$ ). Функція  $f_N(X, t)$  задовольняє звичайній умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(X, t)dX = 1. \quad (1.1.22)$$

Тоді ентропія Гіббса задається співвідношенням

$$S_G(t) = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} f_N(X, t) \ln[f_N(X, t)]dX + S_0. \quad (1.1.23)$$

Константу  $S_0$  у формулі (1.1.23) слід обрати такою самою, як у визначенні ентропії Больцмана (1.1.17). Тоді за відсутності кореляцій, коли рух кожної з частинок системи можна вважати незалежним від руху всіх інших частинок, багаточастинковий розподіл записується просто як добуток  $N$  одночастинкових:

$$f_N(X, t) = \prod_{i=1}^N f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t). \quad (1.1.24)$$

В цьому випадку ентропія Гіббса збігається з ентропією Больцмана:

$$\begin{aligned} S_G(t) &= -k_B \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N f(\vec{r}_j, \vec{p}_j, t) \ln \left[ \prod_{i=1}^N f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t) \right] dX + S_0 = \\ &= -k_B \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t) \ln[f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t)] d\vec{r}_i d\vec{p}_i \prod_{j \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}_j, \vec{p}_j, t) d\vec{r}_j d\vec{p}_j + S_0 = \\ &= -k_B \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t) \ln[f(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t)] d\vec{r}_i d\vec{p}_i + S_0 = \\ &= -k_B N \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \ln[f(\vec{r}, \vec{p}, t)] d\vec{r} d\vec{p} + S_0 = S_B \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

(враховано, що всі частинки мають однакові одночастинкові функції розподілу).

В загальному випадку, коли рівність (1.1.24) не справджується, виконується умова

$$S_G \leq S_B. \quad (1.1.26)$$

Справді, максимум ентропії повинен відповідати максимальній неупорядкованості системи, а

взаємодія між частинками, навпаки, повинна спричиняти до появи деякої впорядкованості.

Як і ентропія Больцмана, ентропія Гіббса виступає мірою невизначеності системи. Збільшення ентропії Гіббса означає збільшення невизначеності (або хаосу) в поведінці макроскопічної системи.

#### 1.1.4.2. Теорема Гіббса

Узагальненням Н-теорема Больцмана на випадок системи частинок із довільною взаємодією є теорема Гіббса. Але Гіббс не розглядав еволюцію системи в часі, й відповідно теорема Гіббса не стверджує, що при переході до рівноважного стану ентропія монотонно зростає. Гіббс лише порівнював ентропію довільного стану з ентропією рівноважного стану, але за однієї додаткової умови: середня енергія довільного стану має дорівнювати середній енергії рівноважного стану (для Н-теорема Больцмана ця умова, як уже відзначалося, виконується автоматично).

Розглядатимемо систему, що характеризується довільною функцією Гамільтона<sup>11</sup>  $H(X)$ , а набір змінних  $X$  визначений вище (нагадаємо, що в класичній механіці функцією Гамільтона, або гамільтоніаном називають повну енергію системи, подану через набір її координат та імпульсів). Рівноважний стан цієї системи описується відомим з курсу статистичної фізики канонічним розподілом Гіббса

$$f_c(X) = \exp\left[\frac{F - H(X)}{k_B T}\right], \quad (1.1.27)$$

де  $F$  – вільна енергія рівноважного стану. Цей розподіл задовольняє умові нормування (1.1.22), з якої й можна знайти вільну енергію  $F$  за відомими гамільтоніаном  $H(X)$  та температурою  $T$ .

Нехай  $f(X)$  – розподіл, що відповідає деякому довільному стану системи, задовольняє умові нормування (1.1.22) і для якого середнє значення функції Гамільтона  $H(X)$  таке саме, як для канонічного розподілу (1.1.27):

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(X) f_c(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} H(X) f(X) dX. \quad (1.1.28)$$

Позначимо відповідно через  $S_c$  та  $S$  ентропію, що відповідає станам із розподілами  $f_c(X)$  та  $f(X)$ . Тоді відповідно до теорема Гіббса

$$S_c - S = k_B \int_{-\infty}^{\infty} f(X) \ln \frac{f(X)}{f_c(X)} dX \geq 0. \quad (1.1.29)$$

Слід підкреслити, що інтеграл у співвідношенні (1.1.29) дорівнює різниці ентропії лише за виконання додаткової умови (1.1.28).

#### 1.1.5. Узагальнення поняття ентропії

Поняття ентропії Больцмана та Гіббса характеризують статистичний підхід до опису системи частинок, так що мікроскопічний стан системи характеризується набором координат та імпульсів частинок, які її складають. Виявляється, що це поняття можна узагальнити на випадок статистичного ансамблю будь-якої фізичної природи.

##### 1.1.5.1. Ентропія Шеннона

Розглянемо тепер довільний статистичний ансамбль, стан якого характеризується де-

<sup>11</sup> В. Гамільтон (William Rowan Hamilton; 1806 – 1865) – видатний ірландський математик. Отримав фундаментальні результати в теорії інтегрування диференціальних рівнянь, запропонував поняття векторного поля і зробив основи векторного аналізу, запропонував новий спосіб отримання рівнянь руху механічних систем на основі принципу найменшої дії.

яким набором змінних  $X$ . Нехай ці змінні характеризуються функцією розподілу  $f(X, t)$ , яка задовольняє умові нормування (1.1.22).

Величина

$$S_s(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(X, t) \ln [f(X, t)] dX + S_0 \quad (1.1.30)$$

називається ентропією Шеннона (в одиницях  $k_B$ ). Ентропія Шеннона виступає узагальненням поняття ентропії на статистичні ансамблі довільної природи. Вона може розглядатися як міра невизначеності при статистичному описі.

З визначення ентропії Шеннона зрозуміло, що при розгляді ансамблю частинок вона зводиться до ентропії Гіббса.

#### 1.1.5.2. Ентропія Шеннона для ансамблю автогенераторів

Для прикладу подивимось, як вводиться поняття ентропії для ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля (вони ж – автогенератори томсонівського типу, або LC-генератори).

Для зручності подальших розрахунків запишемо рівняння для такого автогенератора у формі симетризованої системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)x = y; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)y + \omega_0^2 x = 0, \end{cases} \quad (1.1.31)$$

де використано позначення:  $x$  – узагальнена координата (це може бути, наприклад, заряд на конденсаторі в контурі автогенератора),  $y = dx/dt$  – узагальнена швидкість,  $E = (\omega_0^2 x^2 + y^2)/2$  – енергія коливань,  $\alpha$  – параметр лінійного тертя (додатні  $\alpha$  відповідають від'ємній дисипації),  $\gamma$  – параметр нелінійного тертя.

Якщо  $\alpha$  та  $\gamma$  можна вважати малими порівняно з  $\omega_0$  (це характерно для квазігармонічного режиму коливань), то систему (1.1.31) можна звести до рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha - \gamma E) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1.32)$$

– узагальненого рівняння Релея<sup>12</sup> – Ван-дер-Поля.

З іншого боку, система (1.1.31) зводиться до одного рівняння для енергії

$$\frac{dE}{dt} + (-\alpha + \gamma E)E = 0, \quad (1.1.33)$$

яке має стійкий стаціонарний розв'язок  $E = \gamma/\alpha$ , що відповідає усталеним коливанням.

Як відомо з курсу статистичної радіофізики<sup>13</sup>, реальний автогенератор томсонівського типу описується неоднорідним рівнянням Релея (або Ван-дер-Поля), в правій частині якого стоїть випадкова сила, обумовлена внутрішніми шумами. Цю силу визначають, головним чином, теплові та дробові шуми. В результаті дії вказаної сили поведінка автогенератора набуває випадкового характеру.

Нагадаємо також, що ширина лінії автогенератора визначається двома процесами – флуктуаціями амплітуди, які можна характеризувати шириною спектру, та флуктуаціями фази, які можна вважати дифузійним випадковим процесом і характеризувати коефіцієнтом дифузії фази.

З урахуванням згаданих процесів рівняння (1.1.33) для енергії коливань набуває ви-

<sup>12</sup> Дж.В. Стретт, третій барон Релей, або лорд Релей (Рейлі) (John Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842 – 1919) - видатний англійський фізик, Нобелівський лауреат (1904, за відкриття аргону). Один з творців теорії коливань та хвиль. Отримав також відомі результати в галузі теплового випромінювання та розсіювання світла.

<sup>13</sup> Див., наприклад: Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., Наука, 1984.

гляду

$$\frac{dE}{dt} = (\alpha - \gamma E)E + \frac{1}{2} \frac{d}{dE} [D(E)E] + \xi(t) \sqrt{D(E)E}, \quad (1.1.34)$$

де  $D(E)$  – інтенсивність шуму, що в загальному випадку залежить від інтенсивності коливань,  $\xi(t)$  – випадкова зовнішня сила, що задовольняє умовам  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = 2\delta(t)$ . Другий доданок у правій частині (1.1.34) враховує, що наявність шумів приводить до додаткового зменшення інтенсивності сигналу<sup>14</sup>.

Отже, з урахуванням дії випадкових шумів можна розглянути статистичний ансамбль (ансамбль Гіббса – див. п.1.1.3.1) автогенераторів і охарактеризувати його деякою функцією розподілу – наприклад, функцією розподілу по енергіях  $f(E, t)$ .

За відомим стохастичним диференціальним рівнянням можна записати так зване рівняння Фоккера<sup>15</sup> - Планка<sup>16</sup> для густини розподілу ймовірності (функції розподілу).

Нехай стохастичне диференціальне рівняння для випадкової величини  $x$  має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x)\xi(t), \quad (1.1.35)$$

де  $a(x)$  та  $b(x)$  – довільні функції випадкової змінної  $x$ , а випадкова функція часу  $\xi(t)$  має нульове середнє і є  $\delta$ -корельованою, тобто задовольняє умовам

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \delta(t), \quad (1.1.36)$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія випадкового процесу  $\xi(t)$ . Тоді рівняння Фоккера - Планка для густини розподілу ймовірності  $w(x, t)$  має вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x)w] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x)w], \quad (1.1.37)$$

де використані позначення

$$K_1(x) = a(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 b(x) \frac{db(x)}{dx}, \quad K_2(x) = \sigma^2 b^2(x). \quad (1.1.38)$$

Стационарний розв'язок рівняння Фоккера - Планка (який досягається при  $t \rightarrow \infty$ ) можна записати у вигляді:

$$w(x) = \frac{C}{b(x)} \exp \left[ \frac{2}{\sigma^2} \int \frac{a(x) dx}{b^2(x)} \right], \quad (1.1.39)$$

де константу  $C$  можна знайти з умови нормування.

Знаючи стохастичне диференціальне рівняння (в нашому випадку – рівняння (1.1.34) з випадковою зовнішньою силою), можна записати рівняння Фоккера - Планка для функції розподілу. Зокрема, для функції розподілу за енергією  $f(E, t)$  у припущенні, що шуми характеризуються сталою інтенсивністю  $D$ , воно має вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} [(-\alpha + \gamma E)Ef] + D \frac{\partial}{\partial E} \left( E \frac{\partial f}{\partial E} \right). \quad (1.1.40)$$

Стационарний розв'язок рівняння (1.1.40) відповідно до формули (1.1.39) може бути поданий у формі канонічного розподілу Гіббса:

<sup>14</sup> Детальне виведення рівняння, аналогічного (1.1.34), можна знайти в книзі: Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., Наука, 1984.

<sup>15</sup> А. Фоккер (Adriaan Daniël Fokker, 1887 – 1972) – нідерландський фізик, теоретично досліджував статистику броунівського руху.

<sup>16</sup> М Планк (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858 – 1947) – великий німецький фізик, один з фундаторів квантової механіки. Займався проблемами термодинаміки, теорією дифузії.

$$f(E) = \exp\left[\frac{F + \alpha E - 0.5\gamma E^2}{D}\right], \quad (1.1.41)$$

де  $F$  – вільна енергія, яку можна знайти з умови нормування (1.1.22):

$$F = \frac{\alpha^2}{2\gamma} - D \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\pi\gamma}{2D} + \ln \left( 1 + \operatorname{Erf} \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma D}} \right) \right]. \quad (1.1.42)$$

Тут використано позначення

$$\operatorname{Erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

– інтеграл ймовірностей (функція похибок).

Знаючи розподіл  $f(E)$ , можна розрахувати ентропію Шеннона за формулою (1.1.30):

$$S = - \int_0^{\infty} f(E) \ln[f(E)] dE + S_0. \quad (1.1.43)$$

Зокрема, для найпростішого випадку  $-\alpha = \delta$  (зворотний зв'язок відсутній) та  $\gamma = 0$  (нелінійність відсутня), коли  $f(E) = (\delta/D) \exp(-\delta E/D)$ , поклавши  $S_0 = 0$ , отримаємо  $S = 1 + \ln(D/\delta)$ .

### 1.1.6. Структури в системах зі сталою температурою

Другий початок термодинаміки, а також  $H$ -теорема Больцмана та теорема Гіббса стосуються систем зі сталою енергією, поведінка яких визначається зростанням ентропії  $S$  до її максимального значення. Такі системи, очевидно, повинні бути строго замкненими, і реалізувати їх майже неможливо.

Більш реалістичною є модель систем, у яких підтримується стала температура. Для опису таких систем потрібно користуватися вже не ентропією, а вільною енергією Гельмгольца  $F = E - TS$  (див. вище п. 1.1.2.1). Для ізотермічних систем замість закону зростання ентропії діє закон зменшення вільної енергії.

Структура формули для  $F$  відбиває конкуренцію між енергією  $E$  та ентропією  $S$ . При низьких температурах  $TS \rightarrow 0$ , і мінімум вільної енергії  $F$  відповідає мінімуму енергії  $E$  (і, як правило, невеликим значенням  $S$ ). При зростанні температури стан системи з мінімумом  $F$  зсувається в бік зростання ентропії  $S$  і вже не відповідає мінімуму енергії  $E$ .

Справді, при низьких температурах речовина звичайно набуває форми кристалів, що мають упорядковану структуру і, відповідно, малу ентропію. При зростанні температури кристалічні структури поступово руйнуються. При достатньо високих температурах реалізується газоподібний стан речовини з високою ентропією.

Таким чином, на перший погляд, обов'язковою умовою існування структур з високим ступенем упорядкованості є низька температура системи. Проте насправді в природі існує також принципово інший тип упорядкованих структур, які породжуються нерівноважним станом системи. Для їх виникнення низька температура, взагалі кажучи, не потрібна. Механізм їхнього формування пов'язаний із втратою стійкості систем при великих відхиленнях від термодинамічної рівноваги. Саме такі структури (вони, як уже вказувалося у Вступі, називаються дисипативними) будуть розглядатися в цьому курсі.

### Висновки до розділу 1.1

1. Ентропія в замкнених багаточастинкових системах (для яких повна енергія ансамблю частинок зберігається) може служити мірою їхньої впорядкованості.
2. Замкнені системи з часом еволюціонують до стану з максимальною ентропією.
3. Поняття ентропії можна узагальнити на статистичний ансамбль об'єктів довільної природи.

4. Більшість реальних систем не можуть розглядатись як замкнені через їхню взаємодію з іншими системами.

### *Контрольні питання до розділу 1.1.*

1. На чому ґрунтується доведення  $H$ -теорема Больцмана?
2. Чому виробництво ентропії в замкненій системі частинок, які взаємодіють між собою лише через зіткнення, пов'язане з необоротними процесами?
3. Як співвідносяться між собою другий початок термодинаміки,  $H$ -теорема Больцмана та теорема Гіббса?
4. Як співвідносяться між собою ентропія Больцмана, ентропія Гіббса та ентропія Шеннона?
5. Порівняйте між собою структури, що виникають у системах при низьких температурах, та дисипативні структури.

### *Задачі до розділу 1.1.*

1.1.1. Посудина розділена на два сполучені між собою відділення з однаковими об'ємами, в яких знаходиться відповідно  $N_1$  та  $N_2$  частинок ( $N_1 + N_2 = N$ ). Ймовірність потрапляння частинки до кожного з відділень пропорційна його об'єму. Покажіть, що визначення ентропії  $S = k_B \ln p$ , де  $p = N! / (N_1! N_2!)$ , для такої системи еквівалентне до загального визначення ентропії Больцмана.

1.1.2. Посудина розділена на два сполучені між собою відділення об'ємами  $V_1$  та  $V_2$ . Ймовірність потрапляння частинки до кожного з відділень пропорційна до його об'єму. Запишіть ймовірність того, що  $N$  частинок розподіляться по відділеннях у кількості  $N_1$  та  $N_2$  відповідно. Запишіть ентропію, що відповідає стану термодинамічної рівноваги.

1.1.3. Розв'яжіть задачу 1.1.2 для випадку, коли посудина розділена

а) на три відділення з об'ємами  $V_1$ ,  $V_2$  та  $V_3$ ;

б) на  $n$  однакових відділень.

1.1.4. З'ясуйте, за яких умов система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \left( -\alpha + \gamma \frac{\omega_0^2 x^2 + y^2}{2} \right) x - y = 0; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \left( -\alpha + \gamma \frac{\omega_0^2 x^2 + y^2}{2} \right) y + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

зводиться до узагальненого рівняння Релея - Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[ -\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} (\omega_0^2 x^2 + y^2) \right] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$



## Розділ 1.2. Виробництво ентропії в нерівноважних системах

Обговоривши визначення та властивості ентропії для замкнених систем, перейдемо тепер безпосередньо до розгляду відкритих систем. У цьому розділі буде розглянуте узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи. Суть його полягає в тому, що у відкритих системах можуть існувати потоки ентропії як всередину системи, так і назовні. Потім будуть записані загальні співвідношення для густини виробництва ентропії у термодинамічно нерівноважних системах. Виробництво ентропії якраз і пов'язане з відхиленням від термодинамічної рівноваги. Наприкінці розділу отримані співвідношення будуть конкретизовані для випадку малих відхилень системи від положення термодинамічної рівноваги (випадок лінійної нерівноважної термодинаміки). Вплив великих відхилень від термодинамічної рівноваги на поведінку системи розглядатиметься в наступному розділі 1.3.

### 1.2.1. Ентропія у відкритих системах

Нагадаємо, що відкритими називають такі системи, які можуть обмінюватись із зовнішнім світом речовиною та енергією. Очевидно, для таких систем другий початок термодинаміки в традиційній формі вже не буде справджуватися. Подивимося, як його можна узагальнити на відкриті системи, і спробуємо написати рівняння для балансу ентропії в диференціальній формі.

#### 1.2.1.1. Узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи

Другий початок термодинаміки може бути узагальнений і на відкриті системи. У цьому випадку повний приріст ентропії системи  $dS$  за малий проміжок часу  $dt$  можна розбити на дві частини:  $d_i S$ , що описує ентропію, вироблену безпосередньо в системі, та  $d_e S$ , що описує перенесення ентропії через межі системи:

$$dS = d_i S + d_e S, \quad (1.2.1)$$

причому, як і в замкнених системах,

$$d_i S \geq 0. \quad (1.2.2)$$

Як бачимо, для відкритих систем повний приріст ентропії може бути як додатним, так і від'ємним. Приріст ентропії буде від'ємним, коли потік ентропії за межі системи перевищує виробництво ентропії всередині системи. Виробництво ентропії в системі завжди залишається додатним.

Із феноменологічного означення ентропії ( $dS = \delta Q/T$ ) зрозуміло, що потік ентропії (принаймні, за відсутності перенесення речовини) пов'язаний із потоком тепла. Зокрема, зменшення ентропії (а, отже, і самоорганізація) в системі за відсутності перенесення речовини можливе лише за умови, що ця система віддає тепло назовні.

#### 1.2.1.2. Диференціальні характеристики ентропії

Враховуючи адитивність ентропії (значення ентропії для всієї системи дорівнює сумі її значень для окремих макроскопічних частин цієї системи), можна ввести поняття об'ємної густини ентропії:

$$s = \frac{dS}{dV}. \quad (1.2.3)$$

Тоді ентропію в об'ємі  $V$  можна записати як інтеграл по цьому об'єму від густини ентропії  $s$ :

$$S = \int_{(V)} s dV. \quad (1.2.4)$$

Назвемо густиною виробництва ентропії кількість ентропії, що виробляється за одиницю часу в одиниці об'єму досліджуваної системи:

$$\sigma = \frac{d_i^2 S}{dt dV} = \frac{d_i s}{dt}. \quad (1.2.5)$$

Оскільки нерівність (1.2.2) справедлива для будь-якого об'єму, то

$$\sigma \geq 0. \quad (1.2.6)$$

Тоді повне виробництво ентропії в системі можна записати як інтеграл по її об'єму:

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{(V)} \sigma dV. \quad (1.2.7)$$

Потік ентропії через деяку замкнену поверхню  $\Omega$ , що охоплює об'єм  $V$ , визначається як

$$\Phi(\Omega) = \frac{d_e S}{dt}, \quad (1.2.8)$$

де  $d_e S$  – це кількість ентропії, що вноситься в об'єм  $V$  за час  $dt$ . Потік ентропії, як і, наприклад, потік рідини або потік енергії через деяку поверхню, можна записати у формі інтегралу:

$$\Phi(\Omega) = - \int_{(\Omega)} \varphi_n d\Omega, \quad (1.2.9)$$

де  $\varphi_n$  – компонента густини потоку ентропії  $\vec{\varphi}$  вздовж зовнішньої нормалі до поверхні  $\Omega$ . Знак потоку може бути довільним.

В свою чергу, густину потоку ентропії можна подати як добуток густини ентропії на швидкість потоку:

$$\vec{\varphi} = s\vec{v}. \quad (1.2.10)$$

Як уже згадувалося, потік ентропії в найпростішому випадку пов'язаний із потоком тепла.

### 1.2.1.3. Рівняння балансу для ентропії

Тепер формально поділимо всі доданки у співвідношенні (1.2.1) на  $dt$  і замінимо  $S$  у лівій частині за допомогою співвідношення (1.2.4), а доданки в правій частині – за допомогою співвідношень (1.2.7) та (1.2.8)-(1.2.9), перетворивши інтеграл по поверхні в (1.2.9) на інтеграл по об'єму за допомогою теореми Остроградського<sup>1</sup> - Гаусса<sup>2</sup>. Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} s dV = \int_{(V)} \sigma dV - \int_{(V)} \text{div } \vec{\varphi} dV \quad (1.2.11)$$

Оскільки співвідношення (1.2.11) залишається справедливим при довільному виборі об'єму інтегрування, то з рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних виразів:

$$\sigma = \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{\varphi}. \quad (1.2.12)$$

Співвідношення (1.2.12) має зміст рівняння балансу ентропії в малому елементі об'єму: зміна об'ємної густини ентропії  $s$  обумовлена локальним виробництвом ентропії  $\sigma$  та потоками ентропії з густиною  $\vec{\varphi}$ . Зрозуміло, що обидві частини рівності (1.2.12) в силу умови (1.2.6) є невід'ємними.

<sup>1</sup> М.В. Остроградський (Михайло Васильович Остроградський, 1801-1861) – видатний український та російський математик і механік, академік Петербурзької АН, лідер математиків Російської імперії середини XIX ст. Народився на Полтавщині, похований там же. Основні результати отримав у галузі математичного аналізу, теорії пружності, теорії ймовірностей, а також алгебри, теорії чисел та ін.

<sup>2</sup> К.Ф. Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauß; 1777 - 1855) – великий німецький математик, фізик та астроном, засновник всесвітньо відомої математичної школи в Геттінгені. Основні наукові результати пов'язані з алгеброю, диференціальною та неевклідовою геометрією, математичним аналізом, теорією функцій комплексної змінної, теорією ймовірностей, а також астрономією, геодезією та механікою.

### 1.2.2. Густина виробництва ентропії в системах із локальною рівновагою

З'ясуємо тепер, якими факторами визначається густина виробництва ентропії у нерівноважних системах, спираючись головним чином на модель хімічної реакції. При цьому розглядатимемо системи з довільним відхиленням від положення рівноваги.

#### 1.2.2.1. Поняття локальної рівноваги

Ми будемо далі розглядати лише випадки, коли виробництво та потоки ентропії можна розрахувати макроскопічними методами. Припустимо, що в кожному малому елементі об'єму існує стан локальної рівноваги, для якого локальна густина ентропії  $s = dS/dV$  є функцією тих самих локальних макроскопічних змінних, що й для рівноважної системи, і не залежить від градієнтів.

Припущення про локальну рівновагу не суперечить тому, що система в цілому може бути нерівноважною. Можливість локальної рівноваги для нерівноважних систем обумовлена тим, що у великій системі встановлення термодинамічної рівноваги відбувається значно повільніше, ніж у її малих частинах. Так, при розширенні газу в трубці (нерівноважний процес) локальний зв'язок між тиском, густиною і температурою дається тим самим рівнянням стану  $p/\rho T = const$ , що й у стані рівноваги.

Припущення про локальну рівновагу означає, що дисипативні процеси є суттєвими, тому великі відхилення від статистичної рівноваги виключаються. В багатьох випадках це означає наявність достатньої кількості зіткнень.

Таким чином, припущення про локальну рівновагу справедливе для газів середньої густини, тим більше для рідин та твердих тіл, і несправдливе, наприклад, для сильно розріджених газів.

#### 1.2.2.2. Локальне виробництво ентропії

Як уже відзначалося, внесок до виробництва ентропії можуть давати лише необоротні процеси – наприклад, хімічні реакції, в'язке тертя, теплопередача, дифузія, перемішування багатокомпонентної суміші.

Для систем із локальною рівновагою густину виробництва ентропії можна записати через узагальнені термодинамічні сили  $X_\alpha$  та відповідні потоки, або швидкості необоротних процесів  $J_\alpha$ :

$$\sigma = \sum_{\alpha} J_{\alpha} X_{\alpha} \geq 0 \quad (1.2.13)$$

(сума береться по всіх необоротних процесах, що йдуть у системі). В ролі узагальнених термодинамічних сил виступають причини, що породжують необоротний процес (наприклад, градієнт концентрації у випадку дифузії або градієнт температури у випадку теплопередачі), в ролі потоків, або швидкостей необоротних процесів – густини потоків, обумовлених відповідними узагальненими силами (відповідно потік частинок та потік тепла у згаданих вище випадках).

В рівновазі  $X_\alpha = 0$  та  $J_\alpha = 0$ , відповідно й  $\sigma = 0$ .

Далі ми конкретизуємо вигляд формули (1.2.13) на прикладі системи, що обмінюється з іншими лише енергією і в якій протікає необоротна хімічна реакція. Але, перш ніж це зробити, отримаємо вираз для варіації ентропії, спричиненої збуренням параметрів даної системи.

#### 1.2.2.3. Формула Гіббса для ентропії

Нехай до складу деякої системи входить  $n_1, n_2, \dots$  молів речовин відповідного сорту. Енергія системи –  $E$ , її об'єм –  $V$ . Тоді ентропія буде функцією зазначених величин:  $S = S(E, V, n_\nu)$ . Відповідно, її збурення можна подати у формі

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \sum_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial n_{\gamma}} dn_{\gamma}. \quad (1.2.14)$$

Але, як відомо з курсу термодинаміки,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial n_{\gamma}} = -\frac{\mu_{\gamma}}{T}, \quad (1.2.15)$$

де  $T$  – температура,  $P$  – тиск,  $\mu_{\gamma}$  – хімічні потенціали, введені Гіббсом, що визначають зміну термодинамічного потенціалу  $TS$  при зміні кількості молів відповідної речовини в суміші на одиницю. Для так званих ідеальних систем (ідеальні гази, розріджені розчини) хімічні потенціали задаються співвідношенням

$$\mu_{\gamma} = \zeta_{\gamma}(P, T) + RT \ln N_{\gamma}, \quad (1.2.16)$$

де

$$N_{\gamma} = \frac{n_{\gamma}}{\sum_{\gamma} n_{\gamma}} \quad (1.2.17)$$

– молярні частки,  $\zeta_{\gamma}(P, T)$  – деякі функції тиску та температури. Таким чином, хімічні потенціали визначаються не хімічними властивостями молекул певного сорту, а, в першу чергу, їхніми відносними концентраціями (молярними частками) та температурою.

Підставивши (1.2.15) до (1.2.14), можна отримати:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{P}{T} dV - \sum_{\gamma} \frac{\mu_{\gamma}}{T} dn_{\gamma}. \quad (1.2.18)$$

Це так звана формула Гіббса для ентропії (точніше, для збурення ентропії). Перший доданок у правій частині цієї формули описує зміну ентропії при зміні енергії системи (наприклад, при її нагріванні), другий – при зміні її об'єму (внаслідок встановлення однорідного стану в зміненому об'ємі – пор. із больцманівською інтерпретацією ентропії, див. вище п. 1.1.2.2), третій – при зміні складу суміші (наприклад, в результаті дифузії компонент або при протіканні хімічної реакції).

#### 1.2.2.4. Локальне виробництво ентропії при протіканні хімічної реакції<sup>3</sup>

Тепер розглянемо деяку оборотну хімічну реакцію:



що протікає в описаній вище системі. Нехай зміна кількості молів компонент у реакторі за час  $dt$  буде

$$dn_x = dn_y = -dn_A = -dn_B = -d\xi.$$

У більш загальному випадку можна записати

$$dn_{\gamma} = \nu_{\gamma} d\xi, \quad (1.2.20)$$

де величина  $\nu_{\gamma}$  вказує, скільки молекул сорту  $\gamma$  виникають ( $\nu_{\gamma} > 0$ ) або зникають ( $\nu_{\gamma} < 0$ ) в елементарному акті реакції. Ціле число  $\nu_{\gamma}$  називається стехіометричним коефіцієнтом компоненти  $\gamma$  в хімічній реакції. В нашому прикладі всі  $\nu_{\gamma} = \pm 1$ . Величина  $\xi$  називається ступенем перетворення хімічної реакції. Зміна ступеню перетворення хімічної реакції на одиницю відповідає, очевидно, кількості елементарних актів реакції, яка дорівнює числу Авогадро<sup>3</sup>  $N_A$ .

Швидкістю хімічної реакції називається величина

<sup>3</sup> А. Авогадро (Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro di Quaregna e Cerreto; 1776 – 1856) – італійський фізик та хімік. Висловив гіпотезу про те, що однакові об'єми газів при однакових температурах і тисках містять однакову кількість молекул (закон Авогадро), яка пізніше була покладена в основу теоретичної хімії.

$$v = \frac{d\xi}{dt}. \quad (1.2.21)$$

Вона визначає кількість елементарних актів реакції за одиницю часу, нормовану на число Авогадро.

Замінивши  $dn_\gamma$  у формулі Гіббса через  $d\xi$ , отримаємо:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{PdV}{T} - \frac{d\xi}{T} \sum_\gamma \mu_\gamma \nu_\gamma. \quad (1.2.22)$$

Величина

$$A = -\sum_\gamma \nu_\gamma \mu_\gamma \quad (1.2.23)$$

називається спорідненістю хімічної реакції. Вона визначає зміну термодинамічного потенціалу  $TS$  при зміні ступеню перетворення хімічної реакції на одиницю, тобто при протіканні  $N_A$  елементарних актів реакції.

Виявляється, що спорідненість хімічної реакції  $A$  характеризує відхилення даної системи від стану термодинамічної рівноваги, при якому швидкості прямої та оберненої реакції (1.2.19) будуть однаковими. Якщо  $A > 0$ , в системі є надлишок початкових реагентів, і переважує пряма реакція. При  $A < 0$ , навпаки, є надлишок продуктів реакції, тому вона йде в зворотному напрямку.

Для ілюстрації цього твердження знайдемо спорідненість хімічної реакції (1.2.19). Для цієї реакції  $\nu_X = \nu_Y = -1$ ,  $\nu_A = \nu_B = 1$ , тому згідно (1.2.23)

$$A = \mu_X + \mu_Y - \mu_A - \mu_B. \quad (1.2.23 \text{ а})$$

Вважатимемо систему ідеальною, тому відповідно до (1.2.23 а) та (1.2.16)

$$A = f(P, T) + RT \ln \frac{n_X n_Y}{n_A n_B}. \quad (1.2.23 \text{ б})$$

Вважатимемо для спрощення фізичні властивості (маси, перерізи зіткнень та ін.) молекул усіх реагентів однаковими. Тоді  $f(P, T) = 0$ , і

$$A = RT \ln \frac{n_X n_Y}{n_A n_B}. \quad (1.2.23 \text{ в})$$

Формула (1.2.23 в) допускає просту фізичну інтерпретацію. Швидкість протікання прямої реакції (1.2.19) пропорційна частоті зіткнень молекул сорту  $X$  та  $Y$ , тобто добутку  $n_X n_Y$ . Відповідно швидкість оберненої реакції пропорційна добутку  $n_A n_B$ . Як впливає  $f$  формули (1.2.23 в), у стані термодинамічної рівноваги, коли  $A = 0$ , повинна виконуватись умова  $n_X n_Y = n_A n_B$ , тобто швидкості протікання прямої та оберненої реакцій мають бути однаковими.

З урахуванням (1.2.23) формулу Гіббса можна переписати у формі

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{PdV}{T} + \frac{A}{T} d\xi. \quad (1.2.24)$$

Як відомо, згідно першого початку термодинаміки

$$dE = \delta Q - PdV. \quad (1.2.25)$$

Тоді з формули Гіббса отримаємо:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \frac{A d\xi}{T}. \quad (1.2.26)$$

Співвідношення (1.2.26), по суті, аналогічне до узагальненого другого початку термодинаміки (1.2.1). Справді, перший доданок у правій частині (1.2.26) якраз відповідає потоку ентропії  $d_e S$ , а другий – її виробництву  $d_i S$ . Тоді

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{A}{T} \frac{d\xi}{dt} = \frac{A}{T} v \geq 0. \quad (1.2.27)$$

Перейшовши від інтегральних величин  $S$  і  $v$  до об'ємних густин  $s$  і  $w = dv/dV$  ( $w$  – об'ємна густина швидкості реакції, тобто кількість елементарних актів реакції в одиниці об'єму системи за одиницю часу, нормована на число Авогадро) та врахувавши співвідношення (1.2.5), перепишемо (1.2.27) у формі:

$$\sigma = \frac{A}{T} w \geq 0. \quad (1.2.27 \text{ а})$$

Співвідношення (1.2.27 а) є частинним випадком записаної раніше формули (1.2.13) для виробництва ентропії, де в ролі узагальненої термодинамічної сили  $X$  виступає відношення  $A/T$  спорідненості реакції до температури, а в ролі швидкості необоротного процесу (поток)  $J$  – об'ємна густина швидкості хімічної реакції  $w$ .

Відзначимо принагідно, що при  $A = 0$  реакція не йде, тому її швидкість  $w$  обертається на нуль.

### 1.2.3. Лінійна нерівноважна термодинаміка

Тепер конкретизуємо співвідношення для густини виробництва ентропії, отримані в попередньому підрозділі, для систем, стан яких мало відрізняється від рівноважного, і проаналізуємо стійкість стаціонарних станів таких систем.

#### 1.2.3.1. Виробництво ентропії при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги

В загальному випадку зв'язок між узагальненими термодинамічними силами та спричиненими ними потоками є складним. З іншого боку, як уже вказувалося, в стані термодинамічної рівноваги  $J_i = 0$  та  $X_i = 0$ . Тому для малих відхилень від положення рівноваги природно припустити, що між цими величинами існує лінійний зв'язок:

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j. \quad (1.2.28)$$

Припущення, виражене формулою (1.2.28), відповідає лінійній термодинаміці нерівноважних процесів. Частинними випадками (1.2.28) є, наприклад, закон Фур'є про пропорційність потоку теплоти градієнтові температури або закон Фіка<sup>4</sup> про пропорційність потоку дифузії градієнтові концентрації. Подібна ж закономірність для хімічних реакцій відзначена наприкінці п. 1.2.2.4.

З урахуванням (1.2.28) формулу для густини виробництва ентропії (1.2.13) можна подати у вигляді

$$\sigma = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j \geq 0. \quad (1.2.29)$$

В лінійній термодинаміці необоротних процесів має місце співвідношення взаємності Онсагера<sup>5</sup> (1931):

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (1.2.30)$$

Прикладом застосування теореми Онсагера є теплопровідність кристалів. Як і вимагає ця теорема, тензор теплопровідності повинен бути симетричним незалежно від симетрії кристалу. Цей факт було експериментально встановлено В.Фойгтом<sup>6</sup> ще в XIX ст.

Заміною змінних  $X_i$  на  $X'_i$  можна діагоналізувати матрицю  $L_{ij}$  і переписати (1.2.29) у формі:

$$\sigma = \sum_i L'_{ii} (X'_i)^2, \quad L'_{ii} > 0. \quad (1.2.31)$$

<sup>4</sup> А. Фік (Adolf Fick, 1829 – 1901) – видатний німецький фізіолог. Намагався описати діяльність живих організмів з позицій фізики та математики. Вивчав, зокрема, явище дифузії.

<sup>5</sup> Л. Онсагер (Lars Onsager, 1903 – 1976) – норвезький та американський фізик і хімік, Нобелівський лауреат з хімії (1968). Найбільш відома його теорія необоротних реакцій.

<sup>6</sup> В. Фойгт (Woldemar Voigt, 1850 – 1919) – німецький фізик. Працював у галузі фізики кристалів, термодинаміки та електрооптики.

### 1.2.3.2. Нерівноважні стаціонарні стани. Теорема Пригожина

В деяких випадках граничні умови, накладені на систему, не дозволяють їй досягти стану термодинамічної рівноваги, але може бути досягнутий деякий стаціонарний стан.

Для прикладу розглянемо систему з двох посудин, сполучених капіляром чи мембраною, причому між посудинами підтримується різниця температур  $X_T$  і різниця хімічних потенціалів  $X_m$ . Ці величини виступають у ролі узагальнених термодинамічних сил. Під дією цих сил виникають тепловий потік  $J_T$  і потік речовини  $J_m$ .

В стаціонарному стані потік речовини  $J_m$  зникає, але потік тепла  $J_T$  і, відповідно, виробництво ентропії зберігаються:

$$J_m = L_{21}X_T + L_{22}X_m = 0, \quad (1.2.32)$$

$$J_T = L_{11}X_T + L_{12}X_m.$$

Але перше зі співвідношень (1.2.32) разом з умовою взаємності  $L_{12} = L_{21}$  еквівалентне умові мінімуму густини виробництва ентропії при заданій сталій силі  $X_T$  (яка й справді підтримується незмінною):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_m} = \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} X_i X_j \right) = 2(L_{12}X_T + L_{22}X_m) = 2J_m = 0. \quad (1.2.33)$$

Отже, якщо задані граничні умови заважають системі досягти стану термодинамічної рівноваги, то вона з часом переходить у стан найменшого виробництва ентропії, тобто найменшої дисипації. Наведене вище твердження складає зміст так званої теорема Пригожина (1945).

Математичне формулювання теорема Пригожина можна подати у вигляді співвідношення  $\sigma_{st} \leq \sigma(t)$ , де  $\sigma(t)$  – поточне значення густини виробництва ентропії,

$$\sigma_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) \quad (1.2.34)$$

– усталене значення густини виробництва ентропії, яке відповідає стаціонарному стану системи. Іншими словами, для будь-якого моменту часу виконується умова

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq 0, \quad (1.2.35)$$

яку після інтегрування по об'єму системи можна переписати у формі

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d_i S}{dt} \right) \leq 0. \quad (1.2.36)$$

Бачимо, що величина  $\sigma(t) - \sigma_{st}$  відіграє роль функції Ляпунова, тобто стаціонарний стан системи з мінімальним виробництвом ентропії є стійким (атрактором).

Оскільки аналізована система перебуває в стаціонарному стані, то її ентропія повинна зберігатися. Це означає, що виробництво ентропії повинне компенсуватися потоком ентропії назовні. В розглянутому прикладі цей потік, очевидно, пов'язаний із потоком тепла.

Слід підкреслити, що теорема про мінімальне виробництво ентропії виконується, строго кажучи, тільки поблизу стану термодинамічної рівноваги. Як показали проведені дослідження, узагальнення теорема Пригожина у формі (1.2.35) або (1.2.36) на випадок нелінійних термодинамічних систем (тобто великих відхилень від термодинамічно рівноважного стану) в принципі неможливе. В системах, далеких від термодинамічної рівноваги, поведінка системи може бути зовсім іншою і навіть протилежною до того, що передбачає теорема Пригожина. Зокрема, стаціонарний стан, якому відповідає мінімальне виробництво ентропії, може виявитися нестійким.

### **Висновки до розділу 1.2**

1. Узагальненням другого початку термодинаміки на відкриті системи є рівняння балансу ентропії, що враховує не лише виробництво ентропії (яке завжди невід'ємне) та зміну ентропії системи, але й можливість виникнення потоків ентропії через межі системи. В результаті ентропія відкритої системи з часом може як зростати, так і зменшуватись.
2. Виробництво ентропії зумовлене необоротними процесами, що протікають у системі. Густина виробництва ентропії може бути розрахована як сума добутоків узагальнених термодинамічних сил на спричинені ними потоки (швидкості необоротних процесів).
3. У відкритих системах, стан яких мало відрізняється від термодинамічної рівноваги і які не можуть прийти до такої рівноваги в силу граничних умов, з часом встановлюється стійкий стаціонарний стан, що відповідає мінімальному виробництву ентропії.

### **Контрольні питання до розділу 1.2**

1. У чому полягає узагальнення другого початку термодинаміки для відкритих систем?
2. Утворення структур у первісно однорідному середовищі може привести до зменшення ентропії. Як це узгоджується з другим початком термодинаміки?
3. Який фізичний зміст рівняння балансу для ентропії?
4. Порівняйте між собою рівняння неперервності в електродинаміці та рівняння балансу ентропії. Що в них спільне і що – відмінне?
5. Запишіть рівняння балансу ентропії в інтегральній формі.
6. Наведіть кілька прикладів систем, де має місце локальна рівновага.
7. Наведіть кілька прикладів систем, де локальна рівновага порушується.
8. Наведіть кілька прикладів узагальнених термодинамічних сил та спричинених ними потоків для різних необоротних процесів.
9. Чи застосовна формула для густини виробництва ентропії через узагальнені термодинамічні сили та відповідні потоки для великих відхилень від стану термодинамічної рівноваги?
10. Чому утворення дисипативних структур можливе тільки при значних відхиленнях від термодинамічної рівноваги?
11. Чи можливий граничний перехід від теореми Пригожина до другого початку термодинаміки в традиційній формі?

### **Задачі до розділу 1.2**

- 1.2.1. Для реакції  $H_2S + Cl_2 \rightleftharpoons S + 2HCl$ , що протікає в розрідженому розчині, запишіть залежність спорідненості реакції від концентрацій реагентів.
- 1.2.2. Запишіть залежність спорідненості реакції від концентрацій реагентів для реакції  $2H_2 + O_2 \rightleftharpoons 2H_2O$ , що протікає в ідеальному газі.
- 1.2.3. Між двома посудинами підтримується різниця температур  $X_T = X_1$  і різниця хімічних потенціалів  $X_m = X_2$ . Яку заміну змінних треба здійснити, щоб діагоналізувати матрицю коефіцієнтів перенесення  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )? Запишіть елементи діагоналізованої матриці. Якими вони мають бути, щоб задовольнявся узагальнений другий початок термодинаміки?



### Розділ 1.3. Стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги

Як уже відзначалося, теорема Пригожина, відповідно до якої стаціонарний стан відкритої нерівноважної системи відповідає мінімуму виробництва ентропії і є стійким, справедлива лише при малих відхиленнях від положення рівноваги. При великих відхиленнях від термодинамічної рівноваги стійкість такого стану може порушитися – це й буде передумовою виникнення дисипативних структур.

Для того, щоб відповісти на питання про стійкість стаціонарного стану, далекого від термодинамічної рівноваги, необхідно провести спеціальний аналіз. Такий аналіз зроблений у даному розділі. Виявляється, що стійкість такого стану щодо малих збурень визначається другим диференціалом ентропії, зміна якого в часі пов'язана з так званим надлишковим виробництвом ентропії. Якщо воно додатне, то другий диференціал ентропії відіграє роль функції Ляпунова, гарантуючи стійкість стаціонарного стану. В протилежному випадку стійкість системи може й порушитися.

Результати загального аналізу ілюструються на прикладі різних типів хімічних реакцій, включаючи Брюсселятор – модель просторово обмеженої системи, в якій ідуть хімічні реакції автокаталітичного типу, а також орегонатор – більш реалістичну модель так званих реакцій Белоусова<sup>1</sup> - Жаботинського<sup>2</sup> (хімічних реакцій коливного типу).

#### 1.3.1. Теорія термодинамічної стійкості

Як уже відзначалося, в області лінійної нерівноважної термодинаміки виробництво ентропії може розглядатися як функція Ляпунова: після збурень така нерівноважна система повертається в стаціонарний стан з найменшим виробництвом ентропії.

Для розгляду систем, далеких від стану рівноваги, зручно ввести ще одну функцію Ляпунова. В ролі такої функції виступає другий диференціал ентропії. Похідна від цієї величини за часом визначає так зване надлишкове (в порівнянні з відповідним стаціонарним станом) виробництво ентропії, яке може бути як додатним, так і від'ємним.

##### 1.3.1.1. Умова стійкості стану термодинамічної рівноваги ізольованої системи для малих відхилень від положення рівноваги

Як впливає з другого початку термодинаміки, стан рівноваги ізольованої системи є стійким, якщо він відповідає максимальній ентропії  $S_{eq}$ <sup>3</sup>. Задавши в системі мале збурення  $\Delta\mu$  деякого керувального параметра  $\mu$  і розклавши ентропію в ряд Тейлора за цим збуренням, отримаємо з точністю до доданків другого порядку включно:

$$S = S_{eq} + \frac{\partial S}{\partial \mu} \Delta\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \mu^2} (\Delta\mu)^2 \equiv S_{eq} + \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S. \quad (1.3.1)$$

Але в точці максимуму  $\delta S = 0$ , тому стійкість стану рівноваги визначається доданком другого порядку  $\delta^2 S$ . Умова стійкості в цьому випадку має вигляд  $\delta^2 S < 0$ . Справді, в замкненій системі збурення термодинамічно рівноважного стану повинні приводити до зменшення ентропії.

Подивимося, як виглядатиме ця умова при підстановці конкретних виразів для другого диференціалу  $\delta^2 S$  у різних випадках.

<sup>1</sup> Б.П. Белоусов (Борис Павлович Белоусов, 1893 - 1970) – російський військовий хімік, комбриг (генерал-майор), лауреат Ленінської премії (посмертно, 1980). Уславився експериментальним відкриттям хімічних реакцій коливного типу.

<sup>2</sup> А.М. Жаботинський (Анатолий Маркович Жаботинский, 1938 – 2008) – російський та американський (з 1991 р. до смерті працював у США) фізикохімік та біофізик, лауреат Ленінської премії (1980). Дослідив механізм реакції Белоусова – Жаботинського.

<sup>3</sup> Індекс від англ. equilibrium – рівновага.

1.3.1.2. Другий диференціал ентропії поблизу точки термодинамічної рівноваги при збуренні однієї змінної

Формула Гіббса (1.2.18) пов'язує збурення ентропії системи зі збуренням її енергії, об'єму та молярних часток (тобто хімічного складу). Розглянемо спочатку збурення  $\delta E$  однієї незалежної змінної – енергії, тобто врахуємо лише залежність  $S = S(E)$ . Тоді з формули Гіббса (1.2.18) випливає, що  $\delta S = \delta E/T$ , і

$$\begin{aligned} \delta^2 S &= \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} (\delta E)^2 = \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right) (\delta E)^2 = \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{1}{T} \right) (\delta E)^2 = -\frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_V (\delta E)^2 = \\ &= -\frac{(\delta E)^2}{C_V T^2} = -C_V \frac{(\delta T)^2}{T^2} < 0. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Тут враховано, що

$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = C_V > 0, \quad (1.3.3)$$

де  $C_V$  – питома теплоємність при сталому об'ємі.

Отже, умовою стійкості рівноважного стану в даному випадку є невід'ємність теплоємності  $C_V$ .

1.3.1.3. Умова стійкості стану термодинамічної рівноваги при збуренні багатьох змінних

У загальному випадку збурення багатьох незалежних змінних, користуючись формулою Гіббса (1.2.18) та виконуючи перетворення, аналогічні застосованим вище при отриманні співвідношення (1.3.2), можна записати:

$$T \delta^2 S = - \left[ \frac{C_V}{T} (\delta T)^2 + \frac{1}{\chi V} (\delta V)_{n_j}^2 + \sum_{j,j'} \mu_{jj'} \delta n_j \delta n_{j'} \right] < 0, \quad (1.3.4)$$

де

$$\mu_{jj'} = \left( \frac{\partial \mu_j}{\partial n_{j'}} \right)_{P,T}, \quad \chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1.3.5)$$

– ізотермічна стисливість, індекс  $n_j$  у другого доданку в правій частині (1.3.4) вказує на те, що при варіації  $\delta V$  склад речовини залишається незмінним.

Основні умови стійкості класичної термодинаміки такі:

$$C_V > 0 \quad (1.3.6)$$

(теплова стійкість – при збільшенні енергії температура системи має зростати);

$$\chi > 0 \quad (1.3.7)$$

(механічна стійкість – при зменшенні об'єму має зростати тиск);

$$\sum_{jj'} \mu_{jj'} \delta n_j \delta n_{j'} > 0 \quad (1.3.8)$$

(стійкість щодо дифузії в суміші – в результаті такої дифузії склад суміші повинен ставати однорідним).

Так, при порушенні умови (1.3.6) флуктуації температури будуть не розсмоктуватись, а зростати; при порушенні умови (1.3.7) зростатимуть флуктуації густини. При порушенні умови (1.3.8) у рівноважній однорідній багатокомпонентній суміші буде відбуватися спонтанне розділення компонент.

Умови (1.3.6)-(1.3.8) відомі як умови стійкості Гіббса – Дюгема<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> П. Дюгем (Pierre Maurice Marie Duhem, 1861–1916) – французький фізик (працював у галузі термодинаміки), математик, займався також філософією та історією науки.

Якщо всі умови стійкості виконані, то  $\delta^2 S$  буде негативно визначеною величиною.

#### 1.3.1.4. Другий диференціал ентропії і виробництво ентропії при малих відхиленнях від стану термодинамічної рівноваги

Знайдемо, як буде змінюватися з часом другий диференціал від ентропії при малих відхиленнях від стану термодинамічної рівноваги. Для цього в інтегральне рівняння для балансу ентропії (1.2.12) підставимо співвідношення для густини виробництва ентропії (1.2.13) і проінтегруємо по об'єму системи. Отримаємо:

$$\int dV \sum_p J_p X_p = \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(\Omega), \quad (1.3.9)$$

де  $\Phi(\Omega)$  (див. формулу (1.2.9)) – потік ентропії з аналізованого об'єму назовні (для замкненої системи він відсутній). Тепер візьмемо похідну за часом від формули (1.3.1), врахувавши, що поблизу максимуму  $\delta S = 0$ , а величина  $S_{eq}$  не змінюється з часом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S. \quad (1.3.10)$$

Тепер ліву частину цього співвідношення замінимо за допомогою (1.3.9) і врахуємо, що в стані термодинамічної рівноваги потік ентропії дорівнює нулеві, а при збуреннях замкненої системи граничні умови зберігаються, так що збурення потоку ентропії відсутні. В результаті з (1.3.9) впливає такий вираз для похідної від  $\delta^2 S$  за часом:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \int dV \sum_p J_p X_p = \frac{d_i S}{dt} \geq 0. \quad (1.3.11)$$

Таким чином, зміна  $\delta^2 S$  із часом пов'язана з виробництвом ентропії в системі: наслідком збурення термодинамічної рівноваги системи є виникнення узагальнених термодинамічних сил, завдяки яким виникають і відповідні потоки.

Відзначимо, що при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги величини  $J_p$  та  $X_p$  мають перший порядок мализни (див. формулу (1.2.28)), так що обидві сторони співвідношення (1.3.11) є величинами другого порядку мализни.

Із формул (1.3.4) та (1.3.11) впливає, що величина  $\delta^2 S$  є функцією Ляпунова. Справді, ця величина менша або дорівнює нулеві, перетворюється в нуль лише в стані рівноваги, а її похідна за часом невід'ємна. Отже, її існування забезпечує згасання всіх флуктуацій з часом.

Ще раз підкреслимо, що отримані результати справедливі лише поблизу стану термодинамічної рівноваги.

#### 1.3.1.5. Стійкість стаціонарних станів відкритих систем, далеких від термодинамічної рівноваги

Досі ми розглядали замкнені системи. Перейдемо тепер до аналізу відкритих систем. Ми вже знаємо, що вони також можуть мати стаціонарні стани, які при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги, коли виконані умови теореми Пригожина, є стійкими (див. п. 1.2.3.2).

Для того, щоб з'ясувати, чи буде стійким стаціонарний стан системи, далекий від термодинамічної рівноваги, слід розрахувати величину  $\delta^2 S$  для малих відхилень від такого стану. Тепер стаціонарний стан уже не відповідає максимуму ентропії. Розрахунок показує, що й у цьому випадку співвідношення (1.3.10) зберігається всюди, де застосовний макроскопічний опис. Але похідна  $\partial(\delta^2 S)/\partial t$  виявляється пов'язаною не з повним виробництвом ентропії, як у замкнутих системах (див. формулу (1.3.11)), а лише з виробництвом ентропії, спричиненим збуренням стаціонарного стану:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta^2 S) = \int dV \sum_p \delta J_p \delta X_p. \quad (1.3.12)$$

Величину в правій частині (1.3.12) можна назвати надлишковим виробництвом ентропії. Фактично (1.3.12) збігається з (1.3.11), бо в (1.3.11) сили й потоки являють собою малі збурення (стаціонарному стану замкненої системи відповідає нульове виробництво ентропії). Але, оскільки в нерівноважному стані зв'язок між  $\delta J_p$  і  $\delta X_p$  в загальному випадку буде нелінійним, вираз (1.3.12), на відміну від (1.3.11), не обов'язково буде невід'ємним. Іншими словами, в сильно нерівноважному стані надлишкове виробництво ентропії може бути як додатним, так і від'ємним.

Сформульоване вище твердження не суперечить співвідношенню (1.2.13): від'ємним може бути лише надлишкове виробництво ентропії, тоді як повне виробництво ентропії в системі залишається невід'ємним.

Отже, при великих відхиленнях від положення термодинамічної рівноваги стаціонарний стан відкритої системи може, в принципі, виявитися нестійким.

### 1.3.2. Термодинамічна стійкість хімічних реакцій

У цьому підрозділі ми покажемо, як можна розрахувати надлишкове виробництво ентропії, на прикладі системи, в якій відбувається деяка хімічна реакція, і продемонструємо принципову можливість від'ємного надлишкового виробництва ентропії на прикладі реакцій автокаталітичного типу.

#### 1.3.2.1. Стаціонарні стани й термодинамічна гілка

Розглянемо спершу хімічну реакцію типу



де  $\{A\}$  – множина початкових речовин,  $\{X\}$  – множина проміжних продуктів,  $\{F\}$  – множина кінцевих продуктів.

Нехай спочатку реакція йде в замкненій системі. Тоді з часом там встановиться термодинамічна рівновага, якій відповідають концентрації реагентів  $A_0, X_0, F_0$ .

Тепер припустимо, що в системі підтримуються фіксовані концентрації початкових речовин  $A$  та кінцевих продуктів  $F$  (це можливо, якщо початкові речовини надходять до системи, а продукти реакції видаляються назовні, тобто система є відкритою). В цьому разі відповідний стаціонарний стан уже не відповідатиме термодинамічній рівновазі, оскільки в системі постійно протікає необоротна хімічна реакція, яка супроводжується виробництвом ентропії.

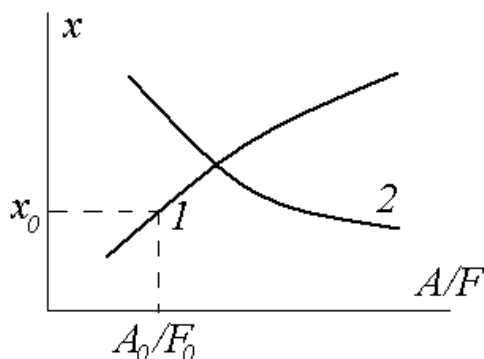


Рис. 1.3.1. Стаціонарні стани, що відповідають однаковим концентраціям початкових та кінцевих продуктів; 1 – термодинамічна гілка;  $x_0$  – стан термодинамічної рівноваги.

Рівняння хімічних реакцій звичайно є нелінійними щодо концентрацій реагентів, тому в аналізованому випадку для концентрацій проміжних речовин  $X$  існуватиме не один єдиний розв'язок, а деякий набір розв'язків. Той з розв'язків, який проходить через точку  $A_0, X_0, F_0$ , будемо називати термодинамічною гілкою (крива 1 на рис. 1.3.1). Виявляється, що далеко від

точки рівноваги  $A_0, X_0, F_0$  ця гілка може стати нестійкою.

Аналогом термодинамічної гілки в задачі іншого змісту може служити стан відсутності генерації в автогенераторі Ван-дер-Поля. При збільшенні напруги живлення (тобто при збільшенні відхилення системи від стану термодинамічної рівноваги) цей стан втрачає стійкість, наслідком чого стає самозбудження автогенератора.

*1.3.2.2. Надлишкове виробництво ентропії при перетворенні однієї пари речовин в іншу пару речовин*

Тепер спробуємо розрахувати надлишкове виробництво ентропії для хімічної реакції

$$X + Y \rightarrow A + B, \quad (1.3.14)$$

підтримуючи концентрації речовин  $X$  та  $Y$  сталими (як уже вказувалося, це означає, що досліджувана система є відкритою).

В стані, далекому від термодинамічної рівноваги, знехтуємо зворотною реакцією (вважаємо, наприклад, що продукти  $A$  і  $B$  швидко видаляються з реактора, завдяки чому  $n_{A,B} \ll n_{X,Y}$ ). Тоді швидкість реакції (в цьому випадку вона пропорційна частоті зіткнень молекул сортів  $X$  та  $Y$ ) можна записати у формі

$$v = \alpha n_X n_Y \quad (1.3.15)$$

(коефіцієнт  $\alpha$  залежить від температури). Як було показано вище (п. 1.2.2.4), для ідеальної системи

$$A = f(P, T) + RT \ln \frac{n_X n_Y}{n_A n_B}$$

(див. формулу (1.2.23 б)).

Варіюємо  $n_X$ . Тоді

$$\delta J \equiv \delta v = \alpha n_Y \delta n_X, \quad (1.3.16)$$

$$\delta X \equiv \frac{\delta A}{T} = R \left( \frac{n_A n_B}{n_X n_Y} \frac{n_Y \delta n_X}{n_A n_B} \right) = R \frac{\delta n_X}{n_X}. \quad (1.3.17)$$

Підставляючи (1.3.16)-(1.3.17) до (1.3.12), отримуємо остаточно:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \int dV \delta J \delta X = \int dV \alpha R \frac{n_Y}{n_X} (\delta n_X)^2 > 0. \quad (1.3.18)$$

Отже, флуктуація  $\delta n_X$  (або  $\delta n_Y$ ) не може порушити стійкість системи. Іншими словами, якщо концентрації  $n_X$  та  $n_Y$  речовин  $X$  та  $Y$  підтримуються сталими, а продукти реакції відразу ж видаляються, то мала зміна концентрацій речовин  $X$  або  $Y$  мало змінить стан системи.

*1.3.2.3. Надлишкове виробництво ентропії для реакції автокаталітичного типу*

Розглянемо тепер деяку хімічну реакцію так званого автокаталітичного типу, коли продукт реакції одночасно виступає й каталізатором цієї реакції:



Справді, рівняння (1.3.19) означає, що речовина  $Y$  перетворюється на речовину  $X$  під дією тієї самої речовини  $X$ , тобто остання є і продуктом реакції, і її каталізатором (бо швидкість виробництва речовини  $X$  пропорційна її концентрації).

Як і раніше, вважатимемо, що зворотна реакція не йде, а концентрації речовин  $X$  та  $Y$  підтримуються сталими.

Тепер  $v_X = v_Y = 1$ , і хімічна спорідненість буде записуватись у формі

$$A = f(P, T) + RT \ln \frac{n_X n_Y}{n_X^2} = f(P, T) + RT \ln \frac{n_Y}{n_X}, \quad (1.3.20)$$

а вираз (1.3.13) для швидкості реакції збережеться. Тоді при варіюванні  $n_X$  отримуємо:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta^2 S) = \int dV \alpha n_Y \delta n_X R \left[ \frac{n_X}{n_Y} \left( -\frac{n_Y}{n_X} \right) \delta n_X \right] = -\alpha R \int dV \frac{n_Y}{n_X} (\delta n_X)^2 < 0. \quad (1.3.21)$$

Як бачимо, надлишкове виробництво ентропії виявилось негативним. Це означає, що величина  $\delta^2 S$  уже не буде функцією Ляпунова. Таким чином, відповідний стаціонарний стан може виявитися нестійким.

Існування функції Ляпунова є, як уже вказувалося, лише достатньою (але не необхідною) умовою стійкості положення рівноваги, тому отриманий результат іще не означає, що умова стійкості обов'язково порушиться. Але така можливість в принципі існує.

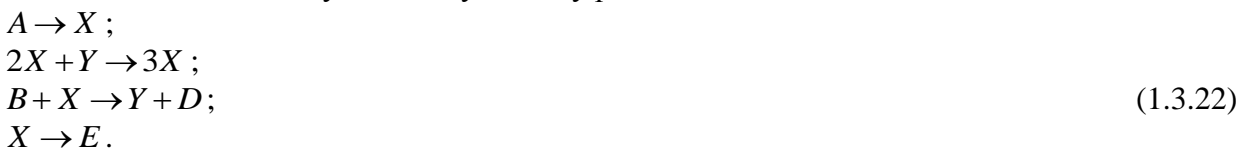
Можна сказати, що у випадку хімічних реакцій нестійкість термодинамічної гілки породжується саме реакціями автокаталітичного типу. До цього класу належить, наприклад, більшість біохімічних реакцій.

### 1.3.3. Брюсселятор

Одним із широко відомих модельних об'єктів нерівноважної термодинаміки є так званий брюсселятор – реактор, у якому протікає деяка гіпотетична реакція автокаталітичного типу. Він був запропонований І.Р.Пригожиным зі співробітниками і названий на честь Брюсселя – міста, де Пригожін працював більшу частину життя і де він створив всесвітньо відому школу з нерівноважної термодинаміки.

#### 1.3.3.1. Опис моделі та вихідні рівняння

Розглянемо деяку модельну хімічну реакцію:



Ця реакція протікає в деякій розподіленій системі, відомій у літературі як брюсселятор. Вважатимемо, що концентрації початкових речовин  $A, B$  та продуктів реакції  $D, E$  підтримуються сталими, тоді як концентрації проміжних продуктів  $X, Y$  можуть змінюватися з часом. Тоді, позначивши концентрації тими ж літерами, що й хімічні речовини, і вважаючи, що всі константи швидкостей реакцій дорівнюють одиниці, можна записати (для одновимірної моделі з урахуванням дифузії) кінетичні рівняння для концентрацій проміжних продуктів реакції в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = A + X^2 Y - BX - X + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = -X^2 Y + BX + D_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \end{cases} \quad (1.3.23)$$

де  $D_X$  і  $D_Y$  – коефіцієнти дифузії відповідних компонент.

Ще раз підкреслимо, що в брюсселяторі концентрації початкових речовин  $A, B$  та продуктів реакції  $D, E$  підтримуються сталими. Це означає, як уже неодноразово вказувалося, що речовини  $D, E$  весь час відбираються від системи, а речовини  $A, B$ , навпаки, постійно вводяться ззовні. Таким чином, розглянута система є відкритою. Наявність потоків речовини означає, що в системі будуть існувати й потоки ентропії.

#### 1.3.3.2. Стаціонарний однорідний стан та його стійкість

Стаціонарний однорідний стан системи відповідає термодинамічній гілці. Для нього

$$\begin{cases} A + X(XY - B - 1) = 0; \\ X(XY - B) = 0, \end{cases} \quad (1.3.24)$$

звідки

$$X_0 = A, \quad Y_0 = \frac{B}{A}. \quad (1.3.25)$$

Можна було б, як це робилося вище, підрахувати надлишкове виробництво ентропії і дослідити його знак. Але, як уже згадувалося, негативне надлишкове виробництво ентропії є лише необхідною, але не достатньою умовою порушення стійкості стану рівноваги. Тому ми підемо більш прямолінійним шляхом – безпосередньо проаналізуємо стійкість стаціонарного однорідного розв'язку (1.3.25) системи (1.3.23).

Для того, щоб з'ясувати стійкість розв'язку (1.3.25), розглянемо малі відхилення від нього:

$$X = X_0 + \Delta X, \quad Y = Y_0 + \Delta Y, \quad |\Delta X| \ll X_0, \quad |\Delta Y| \ll Y_0. \quad (1.3.26)$$

Тоді з (1.3.23) можна отримати:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta X}{\partial t} = 2B\Delta X + A^2\Delta Y - B\Delta X - \Delta X + D_x \frac{\partial^2 \Delta X}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial \Delta Y}{\partial t} = B\Delta X - 2B\Delta X - A^2\Delta Y + D_y \frac{\partial^2 \Delta Y}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (1.3.27)$$

Оскільки рівняння (1.3.27) лінійні, їхній розв'язок можна шукати у формі експонент:

$$\Delta X, \Delta Y \sim \exp(\lambda t - ikz). \quad (1.3.28)$$

Підставивши (1.3.28) до (1.3.27), можна отримати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд відхилень:

$$\begin{cases} (B - 1 - \lambda - k^2 D_x) \Delta X + A^2 \Delta Y = 0; \\ -B \Delta X + (-\lambda - A^2 - k^2 D_y) \Delta Y = 0. \end{cases} \quad (1.3.29)$$

Прирівнявши до нуля визначник системи (1.3.29), отримаємо квадратне рівняння щодо  $\lambda$ . Його корені можна подати у формі

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}, \quad (1.3.30)$$

$$2b = A^2 - B + 1 + k^2 (D_x + D_y), \quad c = A^2 + k^2 [A^2 D_x + (1 - B) D_y] + k^4 D_x D_y.$$

Зрозуміло, що стаціонарний однорідний розв'язок (1.3.25) системи (1.3.23) буде стійким щодо збурення із заданим значенням  $k$  лише за виконання умови  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ .

### 1.3.3.3. Характерні області стійкості-нестійкості та переходи між ними

Розіб'ємо площину  $\{b, c\}$  на характерні області з різними значеннями  $\text{Re } \lambda_{1,2}$  та  $\text{Im } \lambda_{1,2}$  (рис. 1.3.2).

В області I маємо  $\lambda_{1,2} < 0$  ( $\text{Im } \lambda_{1,2} = 0$ ). Тут малі відхилення від розв'язку (1.3.25) будуть експоненціально згасати з часом.

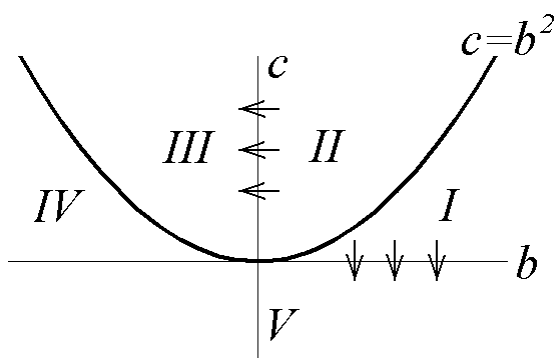


Рис. 1.3.2. Характерні області стійкості та нестійкості стаціонарного однорідного розв'язку для бруселятора. Области I, II є стійкими, області III-V – нестійкими.

В області II маємо  $\text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0, \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ . Тут згасання малих відхилень від однорідного стаціонарного розв'язку матиме осциляторний характер.

Отже, I і II – це області стійкості однорідного стаціонарного розв'язку. В усіх інших областях цей розв'язок буде нестійким.

В області III маємо  $\text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0, \text{Re } \lambda_{1,2} > 0$ . Іншими словами, в цій області відхилення від положення рівноваги матиме характер біжучої хвилі, амплітуда якої з часом зростає, або суперпозиції таких хвиль. Випадок  $k = 0$  (або  $D_X = D_Y = 0$ ) дає синфазні коливання, амплітуда яких зростає з часом. Перехід з області II в область III відповідає (при  $k = 0$ ) відомій біфуркації Андронова<sup>5</sup> – Хопфа<sup>6</sup>, або м'якому самозбудженню коливань.

В області IV маємо  $\text{Im } \lambda_{1,2} = 0, \lambda_{1,2} > 0$ . Відхилення від положення рівноваги являє собою просторово періодичне збурення, що монотонно зростає з часом (так звана аперіодична нестійкість), або набір таких збурень.

Нарешті, в області V буде  $\text{Im } \lambda_{1,2} = 0, \lambda_1 \lambda_2 < 0$ , тобто поведінка відхилень від рівноваги буде приблизно такою самою, як і в області IV. Перехід з області I в область V відповідає так званій біфуркації Тюрінга.

#### 1.3.3.4. Зведення рівнянь бруселятора до узагальненого рівняння Релея

Проведений аналіз поведінки відхилень бруселятора від однорідного стаціонарного стану стосується (за наявності нестійкості) лише початкових моментів часу, поки відхилення залишаються малими.

Покажемо, що в частинному випадку просторово однорідної системи (що може бути досягнуто, наприклад, штучним перемішуванням реагентів) система рівнянь (1.3.23) може бути зведена до узагальненого рівняння Релея<sup>7</sup>.

Справді, якщо система є просторово однорідною, просторові похідні в рівняннях (1.3.23) зникають, і ця система перетворюється на систему рівнянь у повних похідних:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A + X^2 Y - BX - X; \\ \frac{dY}{dt} = -X^2 Y + BX. \end{cases} \quad (1.3.23 \text{ а})$$

Перейдемо від змінних  $X, Y$  до нових змінних  $U = X + Y$  (повна концентрація реагентів) та  $V = A - X$ . Заміни  $X = A - V$  та  $Y = U + V - A$  в першому рівнянні системи (1.3.23 а) надають йому вигляду

$$\frac{dV}{dt} = A(B + A^2) - (1 + B + 3A^2)V + 3AV^2 - V^3 - U(A - V)^2. \quad (1.3.31)$$

Додавання рівнянь (1.3.23 а) дає в нових змінних:

$$\frac{dU}{dt} = V. \quad (1.3.32)$$

Система (1.3.31)-(1.3.32) має стаціонарні точки  $U_0 = A + B/A, V_0 = 0$ . У змінних  $u = U - U_0, v = V - V_0$  вона набуває вигляду

<sup>5</sup> О.О. Андронов (Александр Александрович Андронов, 1901- 1952) – видатний російський фізик, академік АН СРСР, фахівець у галузі електротехніки, радіофізики, теорії коливань, динаміки машин.

<sup>6</sup> Е. Хопф (Eberhard Frederich Ferdinand Hopf, 1902 - 1983) – австрійський, німецький і американський математик, один із засновників теорії біфуркацій.

<sup>7</sup> Див.: А.И.Лаврова, Е.Б.Постников, Ю.М.Романовский. Брюсселятор – абстрактная химическая реакция? // УФН, 2009, т.179, №12, с.1327-1332.



$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (B-1-A^2)v + \left(2A - \frac{B}{A}\right)v^2 - v^3 - u(A-v)^2; \\ \frac{du}{dt} = v. \end{cases} \quad (1.3.33)$$

Систему (1.3.33) легко звести до одного рівняння щодо змінної  $u$ :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[ \alpha + \beta \frac{du}{dt} - \gamma \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right] \frac{du}{dt} + \left( \omega_0 - \lambda \frac{du}{dt} \right)^2 u = 0, \quad (1.3.34)$$

де використані позначення  $\alpha = B-1-A^2$ ,  $\beta = 2A - B/A$ ,  $\omega_0 = A$ ,  $\gamma = \lambda = 1$ .

При  $\beta = 0$  та  $\lambda = 0$  рівняння (1.3.34) зводиться до відомого рівняння Релея, що описує, зокрема, автоколивання автогенератора Ван-дер-Поля<sup>8</sup>. Доданок, пропорційний параметру  $\beta$ , відповідає врахуванню квадратичної нелінійності прохідної характеристики активного елемента (лампи або транзистора). В режимі квазігармонічних коливань, коли їхню амплітуду в певному сенсі можна вважати малою, він взагалі не впливає на основну гармоніку коливань, але приводить до появи другої гармоніки в спектрі коливань. В режимі релаксаційних коливань він впливає на форму граничного циклу. Доданок, пропорційний  $\lambda$ , описує ефект неізохронності – вплив амплітуди коливань на їхню частоту.

Як впливає з рівняння (1.3.34), збудження автоколивань можливе за умови  $\alpha > 0$ . Легко переконатись у тому, що ця умова для просторово однорідних розв'язків ( $k=0$ ) відповідає областям III-IV на рис.1.3.2 (в аналізованому випадку  $2b = -\alpha < 0$ ,  $c = \omega_0^2 > 0$ , див. формули (1.3.20)).

Таким чином, у бруселяторі з переміщенням за певних значень параметрів можуть виникати і встановлюватися періодичні автоколивання.

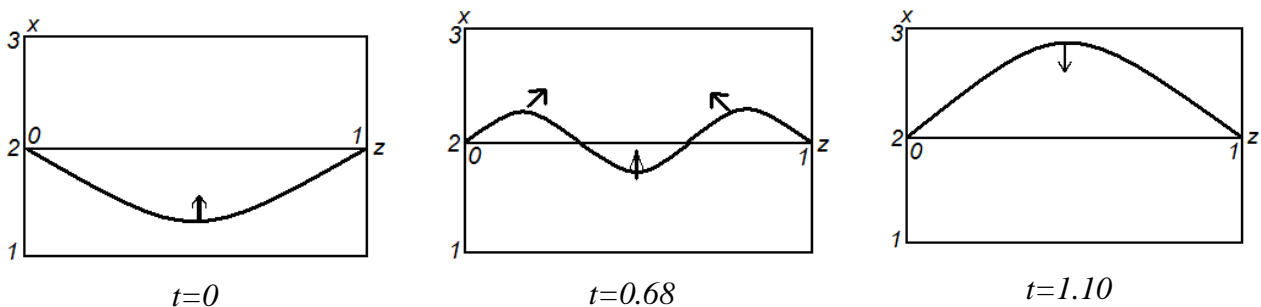
### 1.3.3.5. Нелінійна стадія динаміки бруселятора

Крім найпростіших автоколивань, у бруселяторі на нелінійній стадії його динаміки можуть виникати й інші типи стаціонарних та динамічних дисипативних структур.

Для дослідження поведінки бруселятора в пізні моменти часу можна скористатися відомими наближеними методами розв'язання нелінійних рівнянь. Це, зокрема, вдається зробити, якщо форма коливань (у часі) або форма структури (в просторі) близька до гармонічної. Але найбільш зручно досліджувати нелінійну стадію нестійкості числовими методами.

В залежності від параметрів моделі А, В структури, що виникають у бруселяторі, характеризуються дуже великою різноманітністю. Крім того, вони суттєво залежить від граничних умов. Так, у найпростіших одновимірних випадках граничні умови можуть, наприклад, дискретизувати спектр можливих значень  $k$ .

При  $k=0$  (точніше, при  $D_x=D_y=0$ ) в області III система, як було щойно показано (п.1.3.3.4), поводить себе як розподілений автогенератор – відбуваються синфазні коливання в усьому просторі. При  $k \neq 0$  може спостерігатися щось схоже на стоячу хвилю (рис. 1.3.3).



<sup>8</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.

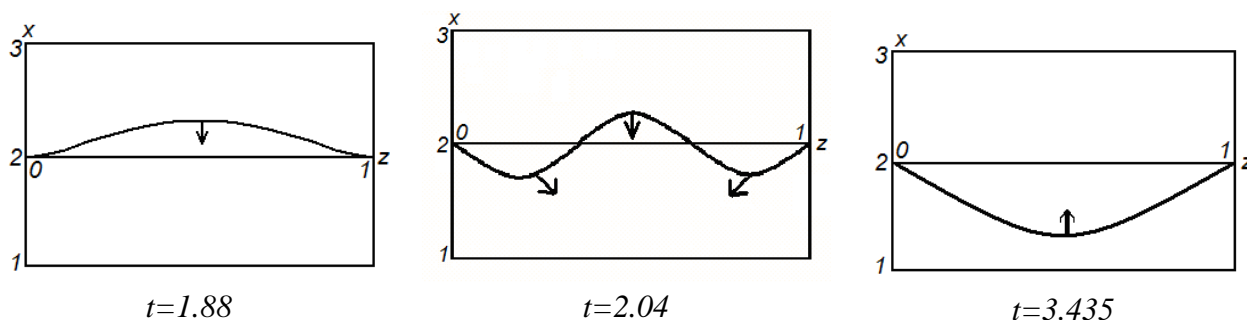


Рис. 1.3.3. Часова еволюція розподілу  $X(z)$  в одновимірному бруселяторі при  $D_x=8 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_y=4 \cdot 10^{-3}$ ,  $A=2$ ,  $B=5.45$ .

В областях IV-V можливе утворення стаціонарних просторово-періодичних структур (рис. 1.3.4). Такі структури можуть виникати лише при достатньо великих значеннях параметра  $D/L^2$  ( $L$  – довжина системи).

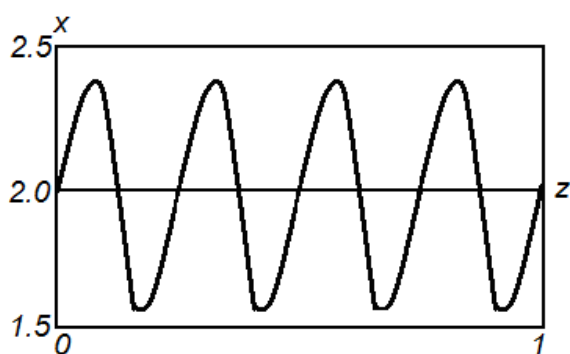


Рис. 1.3.4. Стаціонарна структура  $X(z)$  в одновимірному бруселяторі при  $D_x=1.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_y=8 \cdot 10^{-3}$ ,  $A=2$ ,  $B=4.47$

Кількість та складність можливих структур у бруселяторі різко зростає при переході до дво- та тривимірних моделей.

### 1.3.4. Реакція Белоусова – Жаботинського

Бруселятор є, звичайно, лише зручною моделлю нерівноважної системи. Але схожа поведінка спостерігається й у реальних системах, де протікають хімічні реакції автокаталітичного типу (наприклад, так звана реакція Белоусова - Жаботинського).

#### 1.3.4.1. Історія досліджень та феноменологічний опис

Перші спостереження хімічних реакцій коливного типу належать ще до 1828 року (Г.Фехнер<sup>9</sup>, коливна електрохімічна реакція). Після цього коливання концентрацій реагентів та утворення просторово-періодичних структур у хімічних реакціях спостерігалися неодноразово, але не привертали особливої уваги та не знаходили раціонального пояснення аж до середини ХХ століття.

У 1951 році Б.П.Белоусов відкрив коливну хімічну реакцію в однорідному розчині – окислення лимонної кислоти броматом калію, причому в ролі каталізатора виступають іони  $Ce^{4+}$  та  $Ce^{3+}$ . У процесі цієї реакції розчин періодично змінює своє забарвлення – стає то безбарвним, то жовтим. Це пов'язано зі зміною концентрації іонів  $Br^{-}$  та відношення концентрацій іонів  $Ce^{4+}$  (жовтий колір) та  $Ce^{3+}$  (безбарвні). Період коливань складає (в залежності від умов, у першу чергу – кислотності та температури) від 10 до 100 с. Коливання тривають приблизно протягом години і з часом згасають. Згасання пов'язане з тим, що система

<sup>9</sup> Г. Фехнер (Gustav Theodor Fechner, 1801 – 1887) – німецький учений, відомий в першу чергу роботами з експериментальної психології. Займався також дослідженнями в галузі фізики (дослідження гальванічного елемента) та математики.

замкнена, і в неї не надходять речовини, необхідні для протікання реакції. Форма коливань може бути як квазігармонічною, так і суттєво несинусоїдальною (рис. 1.3.5 а-г). Інколи спостерігаються стохастичні коливання (рис. 1.3.5 д).

Якщо проводити реакцію в довгій тонкій трубці, розташованій вертикально, то можна спостерігати виникнення горизонтальних зон, що відповідають різним концентраціям реагентів. Вважається, що ці зони швидше всього виникають за рахунок зовнішніх градієнтів температури та густини. Коли реакція протікає в тонкому шарі рідини без перемішування (наприклад, у чашці Петрі), звичайно виникають концентричні хвилі з циліндричною симетрією (рис. 1.3.6) або спіральні хвилі, що обертаються (рис.1.3.7). Ці структури вперше спостерігав у 1974 році А.Т.Вінфрі<sup>10</sup> (США). Можливі й інші варіанти поведінки.

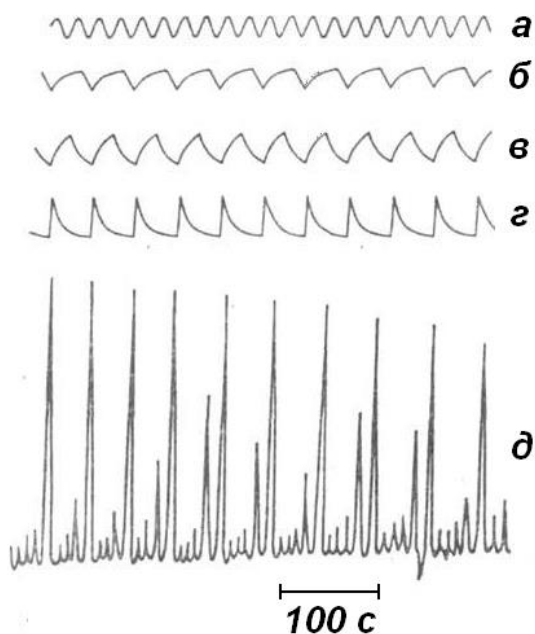


Рис. 1.3.5. Коливання концентрації іонів  $Ce^{4+}$  у реакції Белоусова - Жаботинського: а – гармонічні коливання; б-г – пилкоподібні коливання; д – стохастичні коливання.

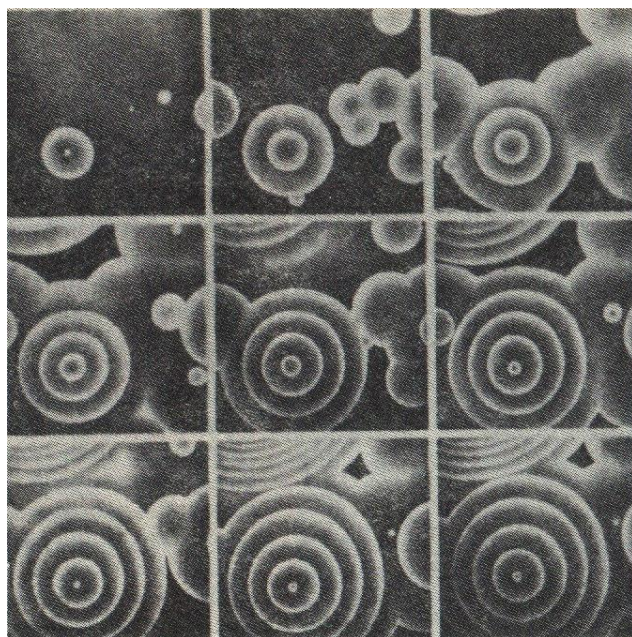


Рис. 1.3.6. Провідні центри в тонкому шарі рідини з реакцією Белоусова - Жаботинського. Інтервал між кадрами – 30 с.

Статтю Белоусова з описом цієї реакції двічі відхиляли редакції академічних хімічних

<sup>10</sup> А. Вінфрі (Arthur Taylor Winfree, 1942 - 2002) – американський біолог, займався математичним моделюванням біологічних процесів, зокрема, періодичних процесів у найпростіших організмах (біологічні годинники), тривимірними режимами поширення електрохімічних хвиль.

журналів, і вона була надрукована лише в 1958 році у вузьковідомчому збірнику. Неприйняття робіт Белоусова пов'язане з тим, що, на думку більшості тогочасних дослідників, вони суперечили другому початку термодинаміки, як його тоді розуміли. Коли ж у середині 1950х років з'явилися роботи І.Р.Пригожина з нерівноважної термодинаміки, які, зокрема, передбачали можливість хімічних реакцій коливного типу в системах, далеких від термодинамічної рівноваги, інтерес до робіт Белоусова стрімко зріс.

Пізніше (з 1961 року) дослідження коливних хімічних реакцій продовжив А.М.Жаботинський. Саме за його провідної участі було з'ясовано механізм реакції. Він же запропонував інші варіанти окислювачів та каталізаторів, які давали ефектніші кольори (фіолково-червоний – яскраво синій).

В загальному вигляді реакцію Белоусова - Жаботинського можна уявити собі як набір двох частин – окислення іонів церію,  $Ce^{3+} \rightarrow Ce^{4+}$ , та їх наступного відновлення,  $Ce^{4+} \rightarrow Ce^{3+}$ . Обидві ці реакції відбуваються в присутності каталізаторів та окислювачів. Серед проміжних реакцій є й автокаталітичні. Але питання про те, які саме речовини забезпечують автокаталіз, досі залишається нез'ясованим. Це пов'язано зі складністю реальної системи, яка містить не один десяток проміжних компонентів. Тому було запропоновано ряд спрощених моделей, які дають якісно подібний результат. Однією з таких моделей є запропонована Р.Філдом<sup>11</sup>, Е.Кересом<sup>12</sup> та Р.Нойесом<sup>13</sup> (1972) модель орегонатора<sup>14</sup>.

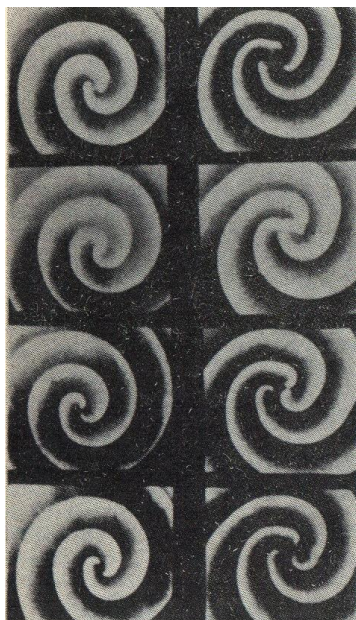
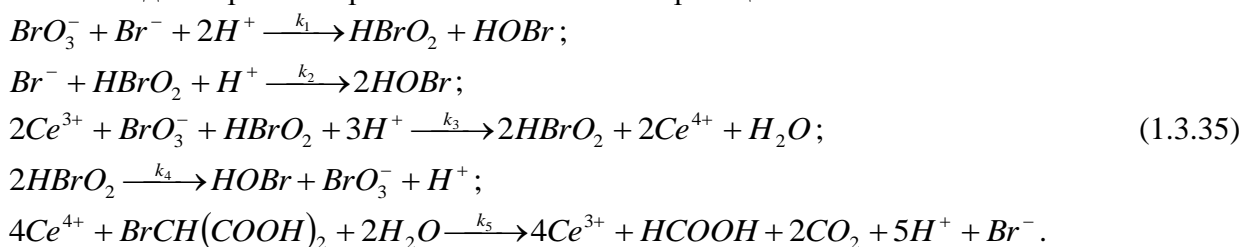


Рис. 1.3.7. Багаторукавні спіральні хвилі в тонкому шарі рідини з реакцією Белоусова - Жаботинського. Інтервал між кадрами – 15 с.

#### 1.3.4.2. Рівняння орегонатора

Модель орегонатора включає такі хімічні реакції:



Третя з реакцій (1.3.35) включає окислення іону церію  $Ce^{3+}$  бромнуватою кислотою

<sup>11</sup> Р. Філд (Richard J. Field) – американський хімік, професор університету Монтана (США).

<sup>12</sup> Е. Керес (E.Koros) – американський хімік та фармаколог.

<sup>13</sup> Р.Нойес (Richard Masy Noyes, 1919 – 1997) – американський фізико-хімік.

<sup>14</sup> Назва походить від штату Орегон (США), де працювали дослідники. Запропонована за аналогією з брусселатором.

$HBrO_3$ , п'ята – відновлення іону  $Ce^{4+}$ . До того ж, третя з реакцій (1.3.35) належить до автокаталітичного типу – виробництво бромистої кислоти  $HBrO_2$  пропорційне її початковій концентрації.

Позначимо концентрації  $BrO_3^-$  через  $A$ ,  $BrCH(COOH)_2$  – через  $B$ ,  $HOBr$  – через  $P$ ,  $HBrO_2$  – через  $X$ ,  $Br^-$  – через  $Y$ ,  $Ce^{4+}$  – через  $Z$ . За змістом задачі всі ці величини мають бути невід'ємними. Тоді, нехтуючи несуттєвими компонентами, систему реакцій (1.3.35) можна переписати у формі:



Вважатимемо величини  $A$ ,  $B$  та  $P$  сталими, а  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – змінними. Тоді на основі (1.3.36) для них можна записати такі кінетичні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2; \\ \frac{dY}{dt} &= -k_1AY - k_2XY + k_5BZ; \\ \frac{dZ}{dt} &= 2k_3AX - 4k_5BZ \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

(для спрощення в двох останніх рівняннях у правих частинах степеневі залежності від  $Z$  замінено на лінійні). Рівняння (1.3.37) якраз і відповідають моделі орегонатора.

Рівняння (1.3.37) записано в припущенні, що в системі має місце перемішування, так що концентрації всіх компонент не залежать від координат. В дійсності ж так буває не завжди, й тоді треба брати до уваги процеси дифузії. З урахуванням дифузії система (1.3.37) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2 + D_x \Delta X; \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= -k_1AY - k_2XY + k_5BZ + D_y \Delta Y; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= k_3AX - 4K_5BZ + D_z \Delta Z. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

#### 1.3.4.3. Динаміка орегонатора

Обговоримо поведінку орегонатора за наявності перемішування.

Перейшовши до безрозмірних змінних

$$\begin{aligned} x &= \frac{k_2X}{k_1A}, & y &= \frac{k_2Y}{k_3A}, & z &= \frac{k_2k_5BZ}{2k_1k_3A^2}, & \tau &= k_1At, \\ \varepsilon &= \frac{k_1}{k_3}, & p &= \frac{k_1A}{k_5B}, & q &= \frac{2k_1k_4}{k_2k_3}, \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

рівняння орегонатора (1.3.37) можна переписати у формі:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= x + y - xy - qx^2; \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y + 2z - xy; \\ p \frac{dz}{d\tau} &= x - 4z. \end{aligned} \quad (1.3.37 \text{ a})$$



Для стаціонарного стану системи (1.3.37 а) легко отримати співвідношення

$$x = 4z, \quad y = \frac{2z}{1+4z}, \quad 2z[32qz^2 + 4(2q-1)z - 3] = 0. \quad (1.3.40)$$

З трьох коренів останнього з рівнянь (1.3.40) фізичний зміст має лише один –

$$z_0 = \frac{1-2q + \sqrt{(2q-1)^2 + 24q}}{16q} \quad (1.3.40 \text{ а})$$

( $x_0$  та  $y_0$  визначаються через  $z_0$  за формулами (1.3.40)).

Якщо лінеаризувати систему (1.3.37 а) по малих відхиленнях від стаціонарного стану (1.3.40 а), а потім підставити для всіх змінних розв'язок у формі  $\exp(\lambda\tau)$ , неважко отримати характеристичне рівняння для  $\lambda$  у формі

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (1.3.41)$$

де

$$a = x_0 + 1 + \frac{1}{\varepsilon}(2qx_0 + y_0 - 1) + \frac{4}{p},$$

$$b = \frac{4}{p} \left[ (1+x_0) + \frac{1}{\varepsilon}(2qx_0 + y_0 - 1) \right] + \frac{1}{\varepsilon} [(2qx_0 - 1)(1+x_0) + 2y_0], \quad (1.3.42)$$

$$c = \frac{2}{\varepsilon p} \{ 4[qx_0(x_0 + 1) + y_0] - x_0 - 3 \}.$$

Відповідно до критерію Рауса<sup>15</sup> - Гурвіца<sup>16</sup>, всі корені  $\lambda$  мають від'ємні дійсні частини за одночасного виконання умов

$$a > 0, \quad ab > c > 0. \quad (1.3.43)$$

Очевидно, при варіюванні параметрів моделі  $\varepsilon$ ,  $p$  та  $q$  в діапазоні від нуля до нескінченності обов'язково знайдеться область, де хоча б одна з умов (1.3.43) порушиться. В цій області положення стаціонарної рівноваги втратить стійкість (пор. з пп. 1.3.3.2-1.3.3.3).

Реально система рівнянь (1.3.37 а) розв'язується числовими методами і в деякій області значень параметрів справді має розв'язки типу релаксаційних автоколивань.

Система (1.3.37 а) має півтора ступені вільності. Отже, в принципі вона може описувати не тільки регулярні коливання, але й стохастичний режим. Такий режим, як уже вказувалося, справді спостерігається в реакціях Белоусова – Жаботинського.

В загальному випадку, тобто за наявності дифузії, орегонатор може в залежності від значень параметрів відповідати середовищам із відновленням або середовищам автоколивного типу (див. нижче пп. 2.1.2, 2.2.2 - 2.2.3).

### **Висновки до розділу 1.3**

1. Стійкість стаціонарного стану для широкого класу систем, починаючи від стану термодинамічної рівноваги замкнених систем і закінчуючи стаціонарним станом відкритих систем, далеким від термодинамічної рівноваги, визначається другим диференціалом ентропії. Зміна цієї величини з часом для замкнених систем поблизу стану термодинамічної рівноваги визначається виробництвом ентропії, зумовленим збуренням термодинамічно рівноважного стану. Для відкритих систем, далеких від термодинамічної рівноваги, зміна другого диференціалу ентропії з часом при збуренні стаціонарного стану визначається надлишковим виробництвом ентропії, зумовленим згаданим збуренням.

<sup>15</sup> Е. Раус (Edward John Routh, 1831 - 1907) – англійський математик, член Королівського товариства. Займався, зокрема, систематизацією математичного апарату механіки, виконав ряд робіт, що лягли в основу сучасної теорії систем управління.

<sup>16</sup> А. Гурвіц (Adolf Hurwitz, 1859 - 1919) – один з найвидатніших німецьких математиків другої половини XIX століття. Отримав, зокрема, ряд фундаментальних результатів у теорії алгебраїчних кривих та в теорії чисел.

- Для деяких процесів (зокрема, для хімічних реакцій автокаталітичного типу) надлишкове виробництво ентропії може стати від'ємним, що вказує на можливу втрату стійкості відповідного однорідного стаціонарного стану відкритої системи. Така втрата є, в свою чергу, передумовою формування в системі дисипативних структур.
- Прикладом відкритих систем, де однорідний стаціонарний стан виявляється нестійким, можуть бути хімічні системи, в яких протікають хімічні реакції коливного типу, або реакції Белоусова - Жаботинського. В таких системах справді спостерігається формування різноманітних за характером дисипативних структур. Спрощеною математичною моделлю таких систем є орегонатор.

### *Контрольні питання до розділу 1.3*

- Чи можливе в принципі порушення умов стійкості положення термодинамічної рівноваги?
- Який з можливих станів рівноваги системи називають термодинамічною гілкою? Наведіть кілька прикладів.
- За яких умов термодинамічна гілка може стати нестійкою? Наведіть кілька прикладів.
- Поясніть якісно, чому в реакціях автокаталітичного типу надлишкове виробництво ентропії виявляється від'ємним. Як це узгоджується з другим початком термодинаміки?
- Порівняйте між собою характер втрати стійкості системи при біфуркації Андронова - Хопфа та при біфуркації Тюрінга.
- До якого класу належать хімічні реакції, що протікають у брюсселяторі? Які реальні аналоги брюсселятора?
- Чому брюсселятор зараховують до реакцій автокаталітичного типу?
- Який характер може носити втрата стійкості в орегонаторі?

### *Задачі до розділу 1.3*

- 1.3.1. Розрахувати надлишкове виробництво ентропії в хімічній реакції  $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ , що протікає в ідеальному газі. Чи може воно бути від'ємним?
- 1.3.2. Хімічна реакція (так звана модель Шльогля<sup>17</sup>) має вигляд
 
$$\begin{cases} A + 2X \rightarrow 3X; \\ X \rightarrow B. \end{cases}$$
- Вважаючи, що концентрації речовин  $A$  і  $B$  підтримуються сталими, розрахуйте надлишкове виробництво ентропії в цій реакції.
- 1.3.3. За яких умов просторово однорідний стан брюсселятора буде стійким за відсутності дифузії? Який характер може мати втрата стійкості такого стану?
- 1.3.4. Дослідіть режим періодичних квазігармонічних коливань у брюсселяторі без дифузії, користуючись узагальненим рівнянням Релея. Запишіть частоту малих коливань та умову квазігармонічності. Знайдіть закон неізохронності та усталену амплітуду коливань.
- 1.3.5. Дослідіть релаксаційні автоколивання брюсселятора без дифузії, користуючись узагальненим рівнянням Релея. Побудуйте їхній фазовий портрет.
- 1.3.6. Побудуйте фазові портрети узагальненого рівняння Релея для різних значень параметрів брюсселятора, користуючись числовими методами.
- 1.3.7\*. За аналогією з розв'язанням задачі 1.3.6 знайдіть амплітуду стаціонарної структури в одновимірному брюсселяторі завдовжки  $L$ , вважаючи її форму квазігармонічною та поклавши  $D_x = D$ ,  $D_y = 2D$ . Вважайте, що на межах брюсселятора виконані умови  $u = 0$ . При яких значеннях параметрів  $A, B, D$  та  $L$  вона може існувати? Коли буде чинним побудований таким методом розв'язок?
- 1.3.8\*. Розрахувати надлишкове виробництво ентропії в брюсселяторі за відсутності дифузії.
- 1.3.9\*. Характеристичне рівняння для параметра  $\lambda$ , який характеризує стійкість положення

<sup>17</sup> Ф. Шльогль (Friedrich Schlögl, нар. 1917) – німецький фізик, професор університету в Аахені. Найвідоміші роботи присвячені статистичній фізиці та хімічній кінетиці відкритих систем.

рівноваги системи щодо малих відхилень, має вигляд  $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . В тривимірному просторі  $\{a, b, c\}$  виділіть характерні області стійкості та нестійкості й дослідіть можливі переходи між ними.

1.3.10\*. Для одновимірної моделі бруселятора, користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає формуванню періодичної структури. Дослідити залежність поведінки розв'язку від параметрів моделі, зокрема, від довжини системи. Порівняйте результати числового розрахунку з аналітичним розв'язком задачі 1.3.9.

1.3.11\*. Для двовимірної моделі бруселятора (колова область), користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає

а) розподіленним автоколиванням системи;

б) формуванню періодичної структури.

Дослідити залежність поведінки розв'язку від параметрів системи, зокрема, від її радіусу.

1.3.12. Характеристичне рівняння для декрементів (інкрементів)  $\lambda$ , що характеризують малі відхилення від стану рівноваги в орегонаторі, має форму

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

де коефіцієнти визначаються параметрами моделі. Знайдіть, при яких значеннях цих коефіцієнтів в орегонаторі матиме місце

а) бифуркація Андронова - Хопфа;

б) бифуркація Тюрінга.



## Розділ 1.4. Самоорганізація та еволюція термодинамічно нерівноважних систем

Коли говорять про еволюцію системи, то звичайно мають на увазі зміну її властивостей із часом. Коли йдеться про процеси самоорганізації, то мають на увазі такі процеси, що ведуть до створення більш складних та досконаліх структур. Звичайно, далеко не всякий процес еволюції веде до самоорганізації. Наприклад, у замкнених системах еволюція супроводжується збільшенням ентропії, тобто зменшенням ступеню впорядкованості. Отже, самоорганізація – лише один з можливих шляхів еволюції.

З іншого боку, збільшення ентропії безпосередньо вказує на зменшення ступеню впорядкованості лише для замкнених систем. У відкритих системах зв'язок між цими величинами складніший – зростання ентропії може бути зумовлене збільшенням енергії системи при виникненні дисипативної структури і переході до більш упорядкованого стану.

У цьому розділі буде з'ясовано, як можна кількісно порівняти ступінь самоорганізації двох відмінних станів системи, обговорена проблема еволюції систем, далеких від термодинамічної рівноваги, а також виявлена роль флуктуацій у процесах еволюції систем при зміні деякого керувального параметра (або набору таких параметрів).

### *1.4.1. Кількісне порівняння ступеню самоорганізації для двох відмінних станів системи*

Будемо розглядати відкриті системи, в яких неможливе встановлення термодинамічної рівноваги (пор. з п. 1.2.3.2). Нехай стан такої системи характеризується деяким набором керувальних параметрів  $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Зміна керувального параметра  $\vec{a}$  може супроводжуватися як збільшенням, так і зменшенням ступеню самоорганізації системи. На практиці нерідко важливо з'ясувати, який із двох станів системи характеризується вищим рівнем самоорганізації.

#### *1.4.1.1. S-теорема Климонтovichа*

*H*-теорема Больцмана (див. п. 1.1.3.3) передбачає для замкнених систем монотонне зростання ентропії з часом. Але, як уже вказувалося, вона справедлива лише для ансамблю частинок, що не взаємодіють між собою. Узагальненням *H*-теорема Больцмана на ансамбль частинок із довільним характером взаємодії є теорема Гіббса (див. п. 1.1.4.2). Остання нічого не говорить про поведінку системи в часі, але стверджує, що стану термодинамічної рівноваги відповідає максимальна ентропія (за додаткової умови збереження середньої енергії системи). Втім, теорема Гіббса, як і *H*-теорема Больцмана, стосується лише замкнених систем.

Таким чином, для замкненої системи ентропія може служити кількісною мірою її неупорядкованості.

Однак при розгляді відкритих систем ентропія, як уже вказувалося, вже не буде мірою неупорядкованості, оскільки зміна стану такої системи буде, взагалі кажучи, супроводжуватися зміною її енергії, а, отже, й відповідною зміною ентропії. Таким чином, зростання впорядкованості відкритої системи може супроводжуватися зростанням її ентропії через збільшення енергії відповідного стану.

Російський дослідник Ю.Л.Климонтovich<sup>1</sup> сформулював (1983) та довів (1987) так звану *S-теорему* (від англійського слова self-organization – самоорганізація), яка пропонує спеціальну процедуру перенормування ентропії до стану з фіксованим значенням енергії. Така перенормована ентропія може служити кількісною мірою впорядкованості відповідного стану відкритої системи і дозволяє з цієї точки зору порівнювати між собою різні стани. Розберемо зміст цієї теореми більш докладно.

Будемо розглядати статистичний ансамбль довільної природи, який характеризується набором випадкових змінних  $X$  та керувальним параметром  $\vec{a}$ . Будемо порівнювати між собою стани з  $\vec{a} = \vec{a}_0$  та  $\vec{a} = \vec{a}_0 + \Delta\vec{a}$ , які характеризуються відповідно функціями розподілу

<sup>1</sup> Див., наприклад: Ю.Л.Климонтovich. Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.

$f_0(X, \vec{a}_0)$  та  $f(X, \vec{a}_0 + \Delta\vec{a})$ . Подамо їх у формі канонічного розподілу Гіббса:

$$f_0(X, \vec{a}_0) = \exp\left[\frac{F_0 - H(X, \vec{a}_0)}{D}\right], \quad (1.4.1)$$

$$f(X, \vec{a}_0 + \Delta\vec{a}) = \exp\left[\frac{F - H(X, \vec{a}_0 + \Delta\vec{a})}{D}\right], \quad (1.4.2)$$

де  $H(X, \vec{a})$  – функція Гамільтона,  $F$  – вільна енергія, а параметр  $D$  відіграє роль температури. Функції розподілу (1.4.1)-(1.4.2) задовольняють звичайній умові нормування:

$$\int f dX = \int f_0 dX = 1, \quad (1.4.3)$$

яка для заданого гамільтоніана  $H(X, \vec{a})$  дозволяє знайти зв'язок між вільною енергією  $F$  та температурою  $D$  (про це вже йшлося в п. 1.1.4.2).

Подібно до того, як це було зроблено в теоремі Гіббса, накладемо додаткову умову сталості середньої енергії (тобто середнього значення функції Гамільтона) системи. В зв'язку з цим функцію  $f_0$  необхідно перенормувати:  $f_0 \rightarrow f_1$ , змінивши вільну енергію та температуру. Перенормований розподіл також має канонічну форму,

$$f_1(X, \vec{a}_0, \Delta\vec{a}) = \exp\left[\frac{F_1 - H(X, \vec{a}_0)}{D_1(\Delta\vec{a})}\right], \quad (1.4.4)$$

і задовольняє умові нормування (1.4.3), з якої й визначається перенормована вільна енергія  $F_1$ .

Умова, з якої знаходиться перенормована температура  $D_1(\Delta\vec{a})$ , якраз і являє собою вимогу незмінності середньої енергії системи:

$$\int H(X, \vec{a}_0) f_1(X, \vec{a}_0, \Delta\vec{a}) dX = \int H(X, \vec{a}_0 + \Delta\vec{a}) f(X, \vec{a}_0 + \Delta\vec{a}) dX. \quad (1.4.5)$$

Далі безпосередньо за функціями розподілу  $f_1$  та  $f$  необхідно розрахувати відповідні значення  $S_1$  та  $S$  ентропії Шеннона (1.1.30). Менше значення ентропії відповідає більш упорядкованому стану.

Підкреслимо, що  $S$ -теорема Климонтовича стосується стаціонарного стану відкритих систем, тобто стану, в якому середні за ансамблем величини зберігаються (в цьому сенсі режим усталених коливань автогенератора теж можна вважати стаціонарним, див. нижче). Сталість ентропії таких систем забезпечується балансом між виробництвом ентропії всередині системи і її потоком назовні (як і для стаціонарних станів слабо нерівноважних систем, див. вище п. 1.2.3.2).

Проілюструємо ці загальні твердження на прикладі автогенератора Ван-дер-Поля. Саме для цієї задачі була вперше сформульована  $S$ -теорема Климонтовича.

#### 1.4.1.2. Самоорганізація в ансамблі автогенераторів Ван-дер-Поля

Розглянемо статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля з урахуванням їхніх внутрішніх шумів, описаний у п. 1.1.5.2. Він характеризується функцією розподілу (1.1.41)

$$f(E) = \exp\left[\frac{F + \alpha E - 0.5\gamma E^2}{D}\right]$$

з вільною енергією (1.1.42)

$$F = \frac{\alpha^2}{2\gamma} - D \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\pi\gamma}{2D} + \ln \left( 1 + \operatorname{Erf} \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma D}} \right) \right].$$

Нагадаємо, що параметр  $\alpha$  визначає дисипацію (його додатні значення відповідають від'ємній дисипації), параметр  $\gamma$  – нелінійність, а параметр  $D$  – інтенсивність шуму (шум

вважається тепловим, тому  $D$  одночасно відіграє роль ефективної температури).

Розглянемо три характерні стани ансамблю – відсутність зворотного зв'язку, поріг самозбудження та розвинену генерацію.

Будемо вважати, що за відсутності зворотного зв'язку ( $-\alpha = \delta > 0$ ) нелінійністю при заданій інтенсивності шумів можна знехтувати. Інтенсивність вимушених коливань у контурі буде порядку  $D/\delta^2$ , поріг нелінійності – порядку  $\delta/\gamma^3$ , тобто має бути виконана умова  $\gamma D/\delta^2 \ll 1$ . Тоді розподіл (1.1.41) з урахуванням асимптотики інтегралу ймовірностей набуває вигляду

$$f^{(1)}(E) = \frac{\delta}{D} \exp\left(-\frac{\delta}{D} E\right). \quad (1.4.6)$$

Він характеризується вільною енергією  $F = D \ln(D/\delta)$ , середньою енергією  $\langle E^{(1)} \rangle = D/\delta$  та ентропією Шеннона

$$S^{(1)} = 1 + \ln \frac{D}{\delta} \quad (1.4.7)$$

(тут і нижче вважатимемо, що  $S_0 = 0$ ).

На порозі самозбудження  $\alpha = 0$ , звідки

$$f^{(2)}(E) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi D}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2D} E^2\right). \quad (1.4.8)$$

Стан, що відповідає розподілу (1.4.8), характеризується вільною енергією  $F = (D/2) \ln(2\gamma/\pi D)$ , середньою енергією  $\langle E^{(2)} \rangle = (2D/\pi\gamma)^{1/2}$  та ентропією

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \ln \frac{\pi D}{2\gamma} \right). \quad (1.4.9)$$

Вважатимемо, що режим розвиненої генерації характеризується умовами  $\gamma D/\alpha^2 \ll 1$  (інтенсивність вимушених коливань за рахунок шуму  $D/\alpha$  значно менша від амплітуди автоколивань  $\alpha/\gamma$ ) та  $\alpha \ll \delta$  (перевищення порогу самозбудження незначне, тобто реалізується режим квазігармонічних коливань). Виділяючи в показнику експоненти в (1.1.41) повний квадрат суми, можна записати:

$$f^{(3)}(E) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2D} \left(E - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2\right]. \quad (1.4.10)$$

Відповідно значення вільної енергії складає  $F = (D/2) \ln(\gamma/2\pi D) - \alpha/2\gamma^2$ , середньої енергії –  $\langle E^{(3)} \rangle = \alpha/\gamma$ , ентропії –

$$S^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \ln \frac{2\pi D}{\gamma} \right). \quad (1.4.11)$$

Як бачимо, виконуються співвідношення

$$\langle E^{(1)} \rangle < \langle E^{(2)} \rangle < \langle E^{(3)} \rangle \quad (1.4.12)$$

та

$$S^{(1)} < S^{(2)} < S^{(3)} \quad (1.4.13)$$

(враховано умову  $\gamma D/\alpha^2 = (\gamma D/\alpha)(\alpha/D)^2 \ll 1$ ), тобто при зростанні зворотного зв'язку як середня енергія коливань, так і ентропія ансамблю автогенераторів монотонно зростають.

<sup>2</sup> Якщо зовнішня сила на резонансній частоті осцилятора має амплітуду  $f$ , то амплітуда усталених коливань буде порядку  $f/\delta$ . Тоді повна інтенсивність шумів у смузі пропускання буде  $(f/\delta)^2 \delta \sim D/\delta$ .

<sup>3</sup> Це впливає з порівняння нелінійного доданка  $\gamma \chi^3$  та дисипативного доданка  $\delta \chi$ .

Тепер необхідно перенормувати ентропію до однакових значень середньої енергії. Прийmemo за стан з  $\vec{a} = \vec{a}_0$  стан розвиненої генерації. Тоді умова перенормування (1.4.5) для функцій розподілу

$$\tilde{f}^{(1)}(E) = \frac{\delta}{D_1} \exp\left(-\frac{\delta}{D_1} E\right) \quad (1.4.14)$$

та

$$\tilde{f}^{(2)}(E) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi D_2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2D_2} E^2\right) \quad (1.4.15)$$

набуває вигляду

$$\int E \tilde{f}^{(1,2)}(E) dE = \int E f^{(3)}(E) dE = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (1.4.16)$$

звідки

$$D_1 = \frac{\alpha\delta}{\gamma}, \quad D_2 = \frac{\pi\alpha^2}{2\gamma}, \quad D_3 = D. \quad (1.4.17)$$

Підставивши значення  $D_{1,2,3}$  відповідно до формул (1.4.7), (1.4.9) та (1.4.11), можна отримати значення перенормованої ентропії (тепер вони, як і значення  $D$  (1.4.17), залежать від параметрів не лише аналізованих станів, але й того стану, щодо якого здійснюється перенормування):

$$\tilde{S}^{(1)} = 1 + \ln \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \tilde{S}^{(2)} = \frac{1}{2} + \ln \frac{\pi\alpha}{2\gamma}, \quad \tilde{S}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{2\pi D}{\gamma}\right). \quad (1.4.18)$$

Врахувавши, що  $\ln(\pi/2) \approx 0.45$  та  $\gamma D/\alpha^2 \ll 1$ , можна пересвідчитися, що

$$\tilde{S}^{(1)} > \tilde{S}^{(2)} > \tilde{S}^{(3)}. \quad (1.4.19)$$

Таким чином, в автогенераторі Ван-дер-Поля стан, що відповідає відсутності зворотного зв'язку, є найбільш хаотичним, а стан розвиненої генерації – більш упорядкованим, ніж стан, що відповідає порогу самозбудження.

#### **1.4.2. Принцип мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації**

Як стверджує  $S$ -теорема Климонтовича, мірою ступеня впорядкованості станів відкритих систем виступає ентропія (точніше, нормована ентропія, що враховує відмінність енергії різних станів). Але густина виробництва ентропії теж може виступати в такій ролі. Це можна пов'язати з тим, що, як уже відзначалося наприкінці п.1.4.1.1, ентропія, що відповідає стаціонарному стану відкритої системи, формується в результаті балансу між виробництвом ентропії всередині системи та її потоком назовні. Таким чином, ентропія, що відповідає стаціонарному стану відкритої системи, і виробництво ентропії, що відповідає цьому стану, певним чином пов'язані між собою.

Вище (п.1.2.3.2) вже обговорювалася теорема Пригожина. Вона стверджує, що в стаціонарних нерівноважних станах густина виробництва ентропії досягає свого мінімуму, а при наближенні до таких станів вона зменшується з часом. Нагадаємо, що теорема Пригожина справедлива лише для малих відхилень від положення рівноваги і не може бути безпосередньо узагальнена на нелінійні термодинамічні системи (тобто на випадок великих відхилень від положення термодинамічної рівноваги).

Однак, як і у випадку з  $H$ -теоремою Больцмана, узагальнення теореми Пригожина в принципі можливе, якщо розглядати еволюцію системи не в часі, а в просторі керувальних параметрів. Таке гіпотетичне узагальнення було виконане Ю.Л.Климонтовичем і підтвер-

джене на прикладах течії Куетта<sup>4</sup> в плоскому каналі та течії Пуазейля<sup>5</sup> в трубі. Воно було назване принципом мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації.

Особливістю названого принципу в тому вигляді, в якому його сформулював автор, є порівняння станів системи по різні боки від біфуркаційної точки. Ця обставина сама по собі вказує на те, що система знаходиться далеко від стану термодинамічної рівноваги – при малих відхиленнях від цього стану, як ми знаємо, біфуркації не відбуваються.

Отже, розглянемо еволюцію деякої відкритої системи в просторі керувальних параметрів  $\vec{a}$ . Нехай їхній набір  $\vec{a}_{cr}$  відповідає деякій біфуркаційній точці, при переході через яку в системі встановлюється новий стійкий стаціонарний розв'язок. Позначимо густину виробництва ентропії в цьому новому стані при  $\vec{a} = \vec{a}_{cr} + \Delta\vec{a}$  через  $\sigma_s$ .

Подумки продовжимо в точку  $\vec{a} = \vec{a}_{cr} + \Delta\vec{a}$  розв'язок, який реалізувався при  $\vec{a} = \vec{a}_{cr} - \Delta\vec{a}$ , а в точці  $\vec{a} = \vec{a}_{cr} + \Delta\vec{a}$  є нестійким. Відповідну густину виробництва ентропії позначимо через  $\sigma_u$ . Подібно до того, як це було зроблено в теоремі Гіббса та  $S$ -теоремі Климонтовича, на систему необхідно накласти деяку додаткову умову (уточнення цієї умови в загальному випадку, очевидно, має бути предметом подальших досліджень). Вибір такої умови визначається структурою виразу, який описує виробництво ентропії. Наприклад, у згаданих вище розрахунках течій вважалось незмінним напруження<sup>6</sup> на стінках каналу або труби. Тоді виробництво ентропії в новому стійкому стані, що виник після чергової біфуркації, буде меншим, ніж для старого стану, продовженого в нестійку для цього стану область:

$$\sigma_s \leq \sigma_u. \quad (1.4.20)$$

Сформульоване вище твердження Климонтович назвав принципом мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації. Суть його полягає в тому, що коли перехід через біфуркаційну точку відбувається в бік подальшого відхилення від положення рівноваги, якісна зміна поведінки системи проходить таким чином, що ступінь самоорганізації цієї системи зростає. В результаті після біфуркації реалізується такий стан, якому відповідає менша густина виробництва ентропії (за деяких додаткових умов, накладених на систему).

Як показали виконані на основі цього принципу розрахунки, перехід течії з ламінарного режиму в турбулентний відповідає переходу в стан з меншим (у викладеному вище розумінні) виробництвом ентропії.

Відзначимо принципову відмінність розглянутого принципу мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації від теореми Пригожина (п. 1.2.3.2). В обох випадках ідеться про досягнення стану з мінімальним виробництвом ентропії. Але теорема Пригожина застосовна тоді, коли аналізований стан є, по-перше, стаціонарним, і, по-друге, характеризується малим відхиленням від стану термодинамічної рівноваги (тобто відповідає термодинамічній гілці розв'язку). Що ж до принципу мінімуму виробництва ентропії, то він застосовується для порівняння дисипативних структур різного типу, що виникають внаслідок руйнування термодинамічної гілки розв'язку при великих відхиленнях стану системи від термодинамічної рівноваги.

Слід підкреслити, що для загального випадку принцип мінімуму виробництва ентропії

<sup>4</sup> Течія Куетта в плоскому каналі – це рух рідини в плоскому шарі між двома паралельними пластинами, одна з яких нерухома, а інша рухається зі сталою швидкістю, вектор якої лежить у її площині. М. Куетт (Maurice Marie Alfred Couette, 1858 – 1943) – французький фізик, займався дослідженням течій.

<sup>5</sup> Течія Пуазейля в трубі – це рух рідини в трубі, між двома кінцями якої підтримується задана різниця тисків. Ж.Л.М. Пуазейль (Jean Leonard Marie Poiseuille, 1799–1869) – французький фізіолог та фізик, член Французької медичної академії. Досліджував, зокрема, течію рідин у капілярах, температурну залежність в'язкості рідин.

<sup>6</sup> Механічне напруження – це міра внутрішніх сил, що виникають у суцільному середовищі в результаті зовнішнього впливу. Це тензорна величина, компоненти якої визначаються формулою  $\sigma_{ij} = \Delta F_i / \Delta S_j$ , де  $\Delta F_i$  –  $i$ -та компонента сили, а  $\Delta S_j$  –  $j$ -та компонента орієнтованого елемента поверхні. Таким чином, за відсутності об'ємних сил сила, що діє на елемент об'єму, визначається інтегралом від тензора напруження по замкненій поверхні, що охоплює цей об'єм:  $F_i = \oint_S \sigma_{ij} dS_j$ .

в процесах самоорганізації досі залишається недоведеним.

### 1.4.3. Роль флуктуацій у процесах самоорганізації

Як ми бачили на прикладі брюсселятора, перехід від термодинамічної гілки до формування структури проходить через точку біфуркації (одну або декілька), після чого в системі розвивається нестійкість, а на нелінійній стадії розвитку цієї нестійкості формується структура (стаціонарна або нестаціонарна). Зародком формування вказаної структури виступають флуктуації, рівень яких в околі біфуркаційної точки зростає. З іншого боку, перехід через біфуркаційну точку супроводжується вибором серед кількох можливих варіантів формування структур. Цей вибір якраз і здійснюється за рахунок флуктуацій.

#### 1.4.3.1. Біфуркації та вибір

Нагадаємо, що під біфуркацією розуміють якісну зміну поведінки системи (або вигляду її фазового портрету) при переході керувального параметра через деяке критичне (так зване біфуркаційне) значення. Зокрема, в цьому курсі вже згадувалися біфуркація Андронова - Хопфа та біфуркація Тюрінга (див. п. 1.3.3.3).

Біфуркація звичайно супроводжується вибором одного з кількох можливих варіантів розвитку системи (первісний зміст англійського слова bifurcation – роздвоєння, розгалуження).

Так, у дисипативному осциляторі з потенціалом вигляду

$$\Phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^4 \quad (\beta > 0), \quad (1.4.21)$$

який при додатних  $\alpha$  має єдину стійку точку рівноваги  $x_1 = 0$ , при від'ємних  $\alpha$  виникають дві стійкі точки рівноваги –  $x_{2,3} = \pm(|\alpha|/2\beta)^{1/2}$ , а точка рівноваги  $x_1$  втрачає стійкість (рис. 1.4.1 а-б). Яку з точок рівноваги  $x_{2,3}$  обере система при переході керувального параметра  $\alpha$  від додатних значень до від'ємних через біфуркаційну точку  $\alpha = 0$ , визначає початкове відхилення від попередньої точки рівноваги  $x_1$ .

При збудженні автогенератора також виникає вибір – формально усталена амплітуда може бути як додатною, так і від'ємною (можуть встановлюватися режими, що відрізняються зсувом фази на  $\pi$ ). Схожа ситуація має місце і при формуванні конвективних валів при конвекції Релея - Бенара (див. нижче пп. 2.4.2.1-2.4.2.9).

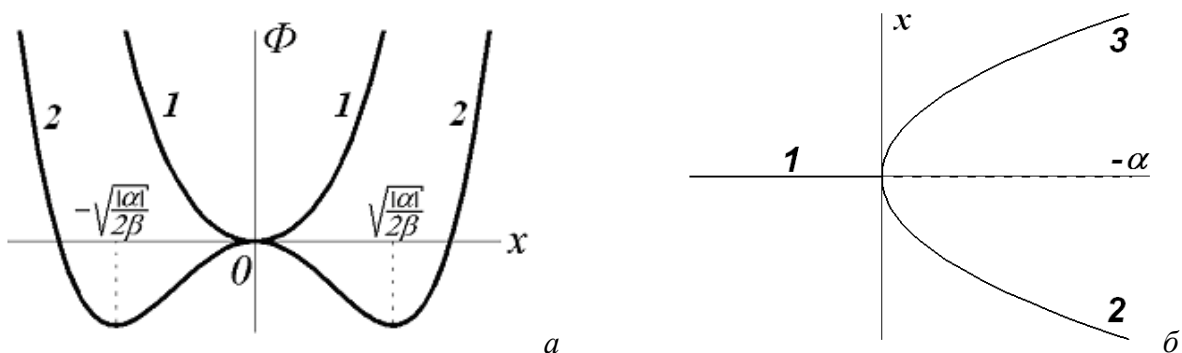


Рис. 1.4.1. Поява нових положень рівноваги при проходженні системи через біфуркаційну точку: а – розподіл потенціалу при  $\alpha > 0$  (1) та  $\alpha < 0$  (2); б – відповідна біфуркаційна діаграма; розв'язок 1 втрачає стійкість при переході через біфуркаційну точку, натомість народжуються стійкі розв'язки 2-3, між якими й здійснюється вибір

#### 1.4.3.2. Роль флуктуацій при проходженні системи через біфуркаційну точку

Фактично відхилення системи від положення рівноваги в момент її проходження через біфуркаційну точку визначається флуктуаціями. Отже, саме флуктуації визначають той шлях, яким розвиватиметься система після біфуркації.

Можна показати, що в біфуркаційних точках, де термодинамічна гілка втрачає стійкість, спостерігається зростання рівня флуктуацій. Саме така ситуація, зокрема, має місце в автогенераторі Ван-дер-Поля при переході через точку, що відповідає порогу самозбудження<sup>7</sup>.

Після того, як керувальний параметр перейшов через біфуркаційне значення, роль флуктуацій знову стає незначною, і розвиток системи протікає еволюційним шляхом.

#### ***Висновки до розділу 1.4***

1. Для відкритих систем звичайна ентропія не може служити мірою впорядкованості, оскільки її зміна може спричинитися не тільки впорядкуванням чи розупорядкуванням, але й зміною енергії системи. Мірою впорядкованості може бути ентропія, перенормована до сталого значення повної енергії системи. Це твердження складає зміст  $S$ -теореми Климонтовича.
2. Мірою ступеню впорядкування системи по різні боки від біфуркаційної точки може гіпотетично також служити виробництво ентропії, розраховане для дійсного (стійкого) стану та деякого гіпотетичного (нестійкого) стану з тими самими значеннями керувальних параметрів. Останній є продовженням стійкого стану по інший бік біфуркаційної точки. При розрахунку необхідно накласти деякі додаткові умови, вигляд яких визначається виразом для виробництва ентропії в досліджуваній системі.
3. Еволюція системи при зміні керувального параметра за Пригожином відбувається таким чином. На ділянці, де система є грубою (стійкою за Андроном - Понтрягіном), зміна керувального параметра спричиняє до еволюційних змін системи. При переході керувального параметра через біфуркаційне значення система опиняється перед вибором одного з кількох можливих варіантів подальшого розвитку. Вибір варіанту відбувається за рахунок флуктуацій, рівень яких в околі біфуркаційної точки зростає. Після цього система переходить на чергову ділянку еволюційного розвитку.

#### ***Контрольні питання до розділу 1.4***

1. В яких випадках поняття еволюції та самоорганізації збігаються, а в яких – ні? Наведіть кілька прикладів.
2. Про який тип ентропії йдеться в  $S$ -теоремі Климонтовича? Обґрунтуйте свою думку.
3. В якому сенсі можна говорити про статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля?
4. Порівняйте між собою формулювання  $S$ -теореми Климонтовича та її застосування до ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля.
5. Порівняйте між собою теорему Пригожина та принцип мінімуму виробництва ентропії Климонтовича.
6. В чому полягає відмінність між  $S$ -теоремою Климонтовича та принципом мінімуму виробництва ентропії?
7. Чи завжди утворення дисипативних структур приводить до зменшення ентропії відповідної системи?
8. Наведіть кілька прикладів біфуркацій і вкажіть, які варіанти подальшого розвитку системи при цьому виникають.
9. Які варіанти подальшого розвитку системи можуть реалізуватися після біфуркації Тюрінга?
10. Яку роль відіграють флуктуації при проходженні системи через біфуркаційну точку?
11. Які висновки щодо поведінки системи можна зробити, досліджуючи її ентропію?

#### ***Задачі до розділу 1.4***

1.4.1. Порівняйте нормовану ентропію ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля в стані, що відповідає відсутності зворотного зв'язку, та в стані, що відповідає порогу самозбудження,

---

<sup>7</sup> Див., наприклад: Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., Наука, 1984.

вважаючи фіксованою енергію, яка відповідає

а) першому

б) другому

з названих станів.

1.4.2\*. Порівняйте нормовану ентропію (при фіксованому значенні енергії) для двох близьких станів ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля, що відрізняються величиною коефіцієнту позитивного зворотного зв'язку (тобто величиною коефіцієнту  $\alpha$ ).

1.4.3\*. Числовими методами дослідіть зміну нормованої ентропії ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля (при фіксованому значенні енергії) при монотонному зростанні коефіцієнту позитивного зворотного зв'язку (тобто коефіцієнту  $\alpha$ ).



## Частина II. РЕГУЛЯРНІ ДИСИПАТИВНІ СТРУКТУРИ

Аналіз дисипативних структур із застосуванням понять ентропії та методів статистичної фізики, який обговорювався в першій частині цього курсу, досить рідко застосовується на практиці при розв'язанні конкретних задач синергетики. Значно частіше застосовується підхід, описаний у п. 1.3.3 на прикладі брусселлятора – запис та розв'язання рівнянь руху, що описують розподілену нелінійну дисипативну систему. Рівняння руху, що їх отримують таким чином, звичайно мають вигляд так званих нелінійних кінетичних рівнянь із дифузиею. При цьому той факт, що система є відкритою (нерівноважною), не акцентується, хоча за бажання в цьому можна переконатися. Саме такі методи будуть використані в другій частині даного курсу для дослідження регулярних дисипативних структур (про них див. вище п. В.2).

Нижче будуть послідовно розглянуті різні типи дисипативних структур. Ми почнемо з аналізу хвиль у слабконелінійних активних середовищах – квазігармонічних хвиль в активних лініях та фазових хвиль у середовищах автоколивного типу, збуджених заданим джерелом. Далі будуть розглянуті автохвилі в сильнонелінійних середовищах, також ініційовані зовнішнім збудженням – біжучі фронти та біжучі імпульси. Потім будуть розглянуті джерела спіральних та концентричних автохвиль. Нарешті, наприкінці розділу будуть проаналізовані механізми виникнення стаціонарних дисипативних структур.

### Розділ 2.1. Квазігармонічні автохвилі в слабконелінійних активних середовищах, збуджуваних гармонічними джерелами

Як уже вказувалося у вступі, автохвилями називають хвилі, що поширюються в розподілених активних нелінійних дисипативних середовищах без зміни своєї форми<sup>1</sup>, причому основні властивості цих хвиль (амплітуда, форма, швидкість, а для періодичних хвиль – частота або довжина хвилі) не залежать (чи слабо залежать) від початкових або граничних умов і визначаються властивостями середовища. Термін «автохвилі» (за аналогією з автоколиваннями, властивості яких також практично повністю визначаються властивостями автогенератора і майже не залежать від початкових умов) був запропонований Р.В.Хохловим<sup>2</sup>.

Із сказаного зрозуміло, що тип автохвилі визначається властивостями середовища, в якому вона поширюється. Напевне, найпростішими є слабконелінійні середовища. До цього класу належать активні лінії (для достатньо високочастотних хвиль) та середовища автоколивного типу. Складнішими для аналізу є сильнонелінійні середовища, зокрема, бістабільні середовища та середовища з відновленням (збудливі середовища). Очевидно, ці моделі (як і будь-які моделі в принципі) не вичерпують всієї різноманітності реальних активних середовищ, тим більше що це питання не можна вважати до кінця вивченим. Разом із тим, розгляд основних моделей дає уявлення про найбільш поширені й досліджені типи автохвильових процесів.

У даному розділі йтиметься про найпростіші моделі слабконелінійних середовищ та основні типи автохвиль у них, а саме квазігармонічні хвилі в довгих лініях, ініційовані зовнішнім збудженням, і синфазні автоколивання та ініційовані зовнішнім збудженням фазові хвилі в середовищах автоколивного типу.

#### 2.1.1. Квазігармонічні хвилі в слабконелінійних активних лініях

У цьому підрозділі ми спершу розглянемо основні типи нелінійних активних елементів, які визначають специфіку активних ліній. Потім будуть проаналізовані деякі приклади активних ліній. Нарешті, буде розібране поширення в такій лінії квазігармонічних хвиль.

<sup>1</sup> Йдеться про усталені хвилі в однорідних середовищах.

<sup>2</sup> Р.В.Хохлов (Рэм Викторович Хохлов, 1926 - 1977) – видатний російський фізик, академік АН СРСР, лауреат Ленінської премії (1970), у 1973-1977 рр. – ректор Московського державного університету. Один з творців нелінійної оптики. Зробив значний внесок також у розвиток теорії коливальних, акустики, радіофізики, квантової електроніки.

Поширення квазігармонічних хвиль у слабконелінійній активній лінії є найпростішою ілюстрацією тези про формування дисипативних структур в результаті розвитку нестійкості. В даному разі йдеться про конвективну нестійкість, тобто підсилення сигналу в просторі<sup>3</sup>. На нелінійному етапі розвитку нестійкості амплітуда хвилі встановлюється на фіксованому рівні, який не залежить від граничних умов і визначається лише властивостями системи (як це має місце в квазігармонічному режимі автогенератора Ван-дер-Поля).

### 2.1.1. 1. Формальна класифікація активних елементів

Як уже вказувалося, той факт, лінія є активною, має своїм наслідком наявність від'ємних опорів або провідностей у її еквівалентній схемі. Резистивний елемент, вольт-амперна характеристика якого має ділянку, де  $dv/di < 0$ , належить звичайно до одного з типів, показаних на рис. 2.1.1.

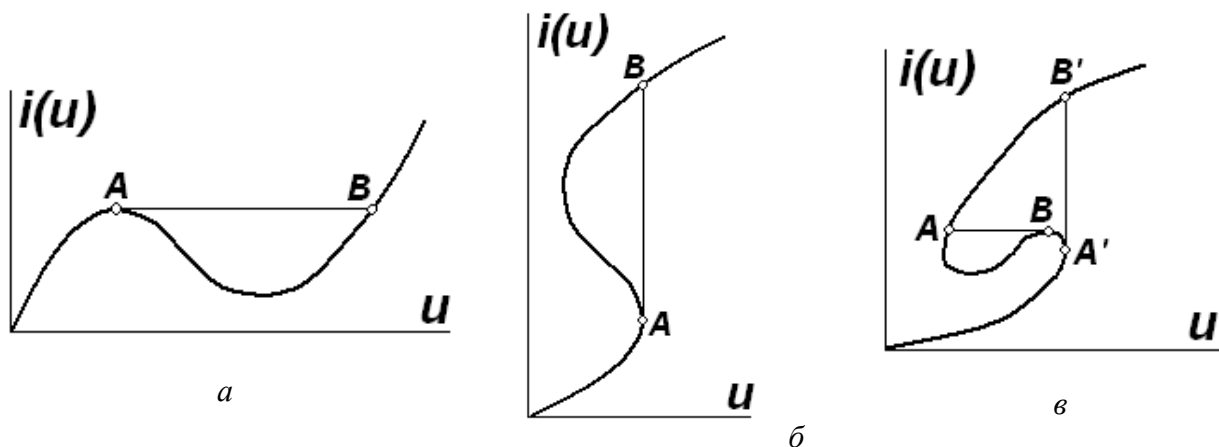


Рис. 2.1.1. Типові вольт-амперні характеристики (ВАХ): а – нелінійна провідність; б – нелінійний опір; в – елемент з ВАХ, яка є неоднозначною функцією як струму, так і напруги

Рис. 2.1.1 а демонструє так звану  $N$ -подібну вольт-амперну характеристику нелінійного елемента. Тут струм через нелінійний елемент є однозначною функцією прикладеної напруги. Такі елементи прийнято називати нелінійними провідностями. Для коректного опису нелінійних провідностей треба враховувати, що паралельно до них увімкнено деяку паразитну ємність. Ігнорування цієї обставини зробило б можливим миттєвий перехід з точки  $A$  в точку  $B$  (такий перехід супроводжується стрибкоподібною зміною напруги).

Прикладом нелінійної провідності може служити тунельний діод.

Рис. 2.1.1 б служить прикладом так званої  $S$ -подібної вольт-амперної характеристики. Тут напруга на нелінійному елементі є однозначною функцією струму, який через нього протікає. Такі елементи відомі в літературі як нелінійні опори. Для коректного опису нелінійного опору треба враховувати його паразитну індуктивність, увімкнену послідовно з опором. Врахування паразитної індуктивності унеможливорює миттєвий перехід з точки  $A$  в точку  $B$ , який має супроводжуватися стрибком струму.

Прикладом нелінійного опору може служити тиристор.

Нарешті, вольт-амперна характеристика, подана на рис. 2.1.1 в, не може бути описана ні як однозначна функція струму, ні як однозначна функція напруги. Для коректного опису поведінки такого елемента треба враховувати як паралельну ємність, так і послідовну індуктивність.

<sup>3</sup> Детальніше про конвективну нестійкість див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.339-342.

### 2.1.1.2. Приклади активних ліній

Прикладами активних нелінійних середовищ можуть служити лампи біжучої та зворотної хвилі, численні плазмово-пучкові пристрої, квантові парамагнітні підсилювачі НВЧ діапазону, оптичні квантові підсилювачі та генератори, передавальні лінії на основі напівпровідникових та надпровідних тунельних діодів або діодів Ганна та інші.

У багатьох випадках активні середовища (зокрема, передавальні лінії) зручно подати у вигляді деяких еквівалентних схем (такий підхід, що використовується для отримання телеграфних рівнянь, добре відомий для звичайної пасивної двопровідної лінії). Розглянемо два приклади такого роду – розподілений тунельний діод на основі контакту метал-напівпровідник та нервово волокно, вздовж якого може поширюватись імпульс збудження.

Смушковий тунельний діод Есакі<sup>4</sup>. Вигляд ділянки такої лінії поданий на рис. 2.1.2 а, еквівалентна схема – на рис. 2.1.2 б. У цій схемі р-n перехід моделюється паралельним сполученням погонної ємності  $C$  та негативної погонної провідності  $g$ . Об'ємний опір напівпровідника враховується резистором  $r$ . Нагадаємо, що тунельний діод має  $N$ -подібну вольт-амперну характеристику (див. рис. 2.1.1 а) зі спадною ділянкою, якій відповідає від'ємний диференціальний опір, тобто є прикладом нелінійної провідності. Якщо робоча точка вибрана на цій ділянці, то для невеликих відхилень від неї тунельний діод можна замінити елементом з негативною провідністю, як це показано на рис. 2.1.2 б.

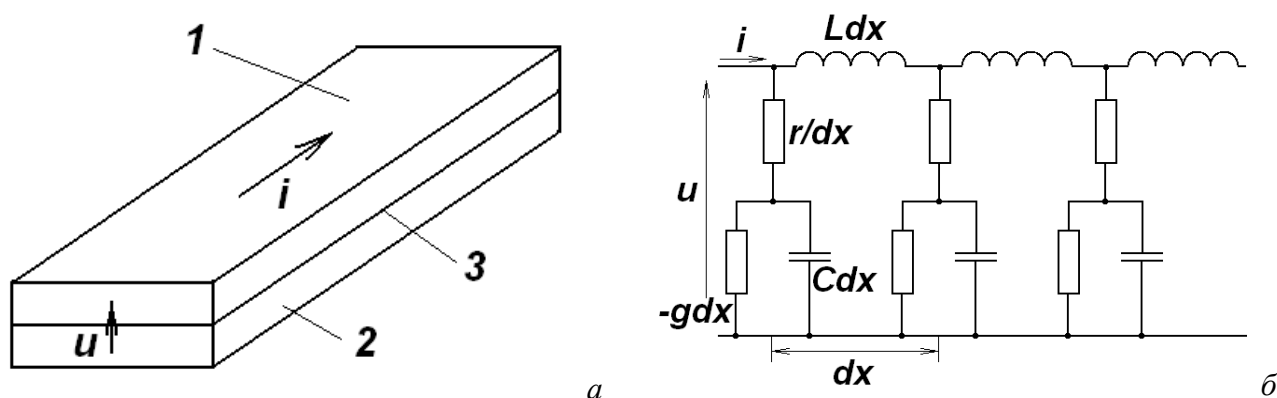


Рис.2.1.2. Смушковий тунельний діод Есакі: а – зовнішній вигляд (1 – металева підкладка, 2 – напівпровідник, 3 – тунельний перехід); б – еквівалентна схема.

Поширення імпульсу збудження вздовж нервового волокна. Центральна нервова система складається з нервових клітин, або нейронів. Типовий нейрон складається з дендритів, які приймають імпульси від інших нейронів або чутливих клітин, тіла клітини, яке підтримує її життя, та аксона (відгалуження нервової клітини), який передає імпульси збудження іншим нейронам або клітинам м'язів (рис. 2.1.3 а). Аксон вкритий мембраною, чутливою до зміни прикладеної напруги. Вольт-амперна характеристика цієї мембрани нагадує ВАХ тунельного діода (рис. 2.1.3 в). Крім того, в струмі через мембрану можна виділити ємнісну та індуктивну складові. Нарешті, сама мембрана має деякий активний опір (рис. 2.1.3 б). Модель нервового волокна, яка вперше дозволила описати поширення в ньому нервових збуджень була запропонована в 1930-х – 1950-х рр. А. Ходжкін<sup>5</sup> та Е. Хакслі<sup>6</sup>. Цю модель можна розглядати як деякий частинний випадок середовища з відновленням (див. нижче п. 2.2.2). Але якщо в моделі середовища з відновленням еквівалентні тунельні діоди працюють, як ми пере-

<sup>4</sup> Леона Есакі (Esaki Reona, нар. 1925) – японський фізик, Нобелівський лауреат (1973). Досліджував електронне тунелювання, винайшов тунельний діод.

<sup>5</sup> А. Ходжкін (Sir Alan Lloyd Hodgkin, 1914 - 1998) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963). В роки Другої світової війни займався розробкою радарів.

<sup>6</sup> Е. Хакслі (Sir Andrew Fielding Huxley, 1917 - 2012) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963).

конаємось, у ключовому режимі, то на даному етапі нас цікавитиме робота на ділянці вольт-амперної характеристики з від'ємним диференціальним опором.

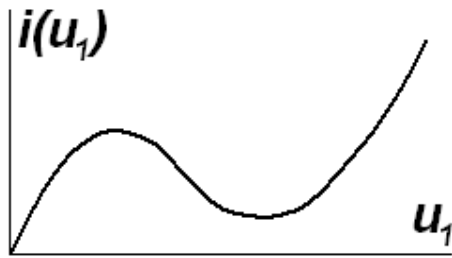
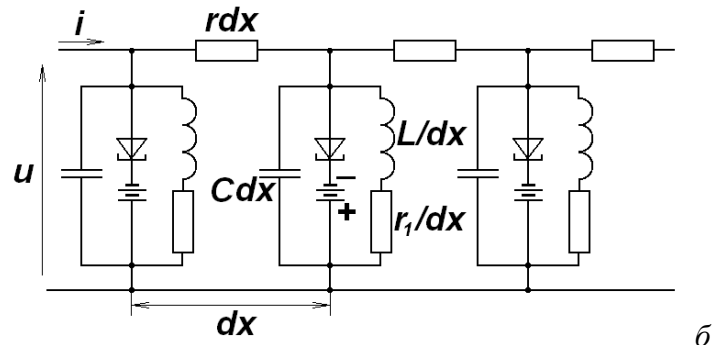
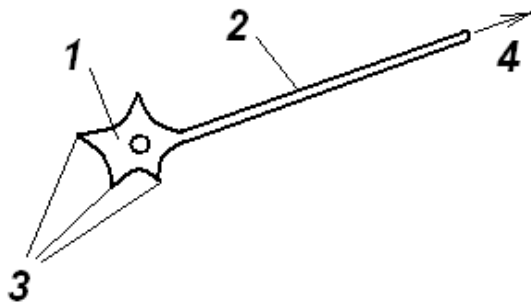


Рис. 2.1.3. Модель нервового волокна (аксона): а – зовнішній вигляд (1 – нервова клітина, 2 – аксон, 3 – входи, 4 – вихід); б – еквівалентна схема; в – вольт-амперна характеристика еквівалентного діода.

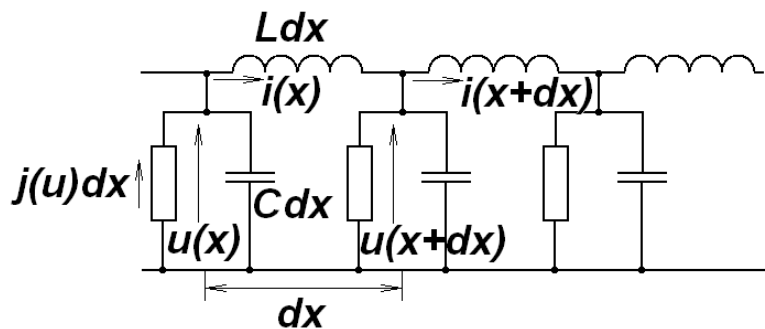
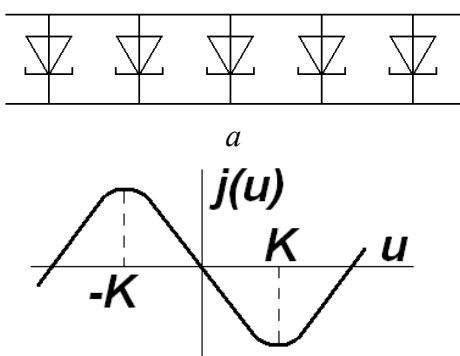
в

### 2.1.1.3. Опис еквівалентної схеми лінії та отримання хвильового рівняння

Розглянемо поширення хвиль, збуджуваних гармонічним джерелом, уздовж найпростішої слабконелінійної активної лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 а. Реально в ролі нелінійних елементів (точніше, нелінійних провідностей) виступають, наприклад, тунельні діоди, вольт-амперні характеристики яких мають вигляд, показаний на рис. 2.1.3 в. Вважаючи, що робоча точка вибрана на середині ділянки з від'ємною провідністю, і цікавлячись лише змінною складовою струму, апроксимуємо вольт-амперну характеристику нелінійної провідності кубічним поліномом:

$$j(u) = -Su + \frac{Su^3}{3K^2}, \quad (2.1.1)$$

де параметр  $K$  визначає півширину ділянки з від'ємною провідністю (рис. 2.1.4 в).



б

Рис. 2.1.4. Слабконелінійна активна лінія: а – принципова схема; б – еквівалентна схема; в – вольт-амперна характеристика активного елемента.

Аналог телеграфних рівнянь для лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 б, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = -j(u) - C \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

(позначення зрозумілі з рис. 2.1.4 б).

Виключаючи струм за допомогою першого з рівнянь (2.1.2) і враховуючи явний вигляд залежності  $j(u)$  (2.1.1), можна отримати таке хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \left( 1 - \frac{u^2}{K^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.1.3)$$

де використані позначення

$$c^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = LS. \quad (2.1.4)$$

#### 2.1.1.4. Поширення гармонічних хвиль у слабконелінійній активній лінії

Вважатимемо, що лінія збуджується джерелом гармонічного сигналу з частотою  $\omega$ . Параметр  $\alpha$  вважатимемо малим. Тоді рівняння (2.1.3) мало відрізняється від найпростішого хвильового рівняння із законом дисперсії  $\omega^2 = k^2 c^2$ . Маючи на увазі граничну задачу, тобто вважаючи, що джерело сигналу знаходиться на кінці лінії, а еволюція сигналу відбувається в просторі (усталений режим), шукатимемо розв'язок (2.1.3) у формі

$$u(x, t) = A(x) \exp(i\omega t - ikx) + \text{к.с.}, \quad k \equiv \frac{\omega}{c}, \quad (2.1.5)$$

де  $A(x)$  – повільна амплітуда, що задовольняє звичайним умовам

$$k^2 |A| \gg k \left| \frac{dA}{dx} \right| \gg \left| \frac{d^2 A}{dx^2} \right|. \quad (2.1.6)$$

Строго кажучи, кубічна нелінійність, що міститься в рівнянні (2.1.3), приведе до появи третьої та інших вищих гармонік частоти  $\omega$ . Однак мализна параметра  $\alpha$  забезпечує мализну нелінійного доданка, а, отже, й мализну амплітуд цих вищих гармонік порівняно з амплітудою основної гармоніки. Тому в першому наближенні ефектом ангармонізму можна знехтувати.

Підставляючи (2.1.5) до (2.1.3), неважко отримати вкорочене рівняння для повільної амплітуди у формі

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\alpha c}{2} A \left( 1 - \frac{AA^*}{K^2} \right). \quad (2.1.7)$$

Відзначимо, що рівняння (2.1.7) з точністю до позначень збігається з укороченим рівнянням, яке можна отримати для генератора Ван-дер-Поля в квазігармонічному режимі<sup>7</sup>.

Перейдемо від комплексної амплітуди  $A$  до дійсних амплітуди й фази:  $A(x) = a(x) \exp[i\varphi(x)]$ . Тоді замість (2.1.7) можна записати:

$$\varphi(x) = \varphi(x=0) \equiv \varphi_0; \quad \frac{da}{dx} = \frac{\alpha c}{2} a \left( 1 - \frac{a^2}{K^2} \right). \quad (2.1.8)$$

Інтегруючи друге рівняння (2.1.8) із граничною умовою  $a(0) = a_0$ , неважко отримати:

$$a(x) = \frac{K}{\sqrt{1 + \left( \frac{K^2}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-\alpha c x)}}. \quad (2.1.9)$$

<sup>7</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.153

Сім'я залежностей  $a(x)$  для різних значень параметра  $a_0$  подана на рис. 2.1.5. Як бачимо, при  $a_0 \ll K$  амплітуда хвилі на невеликих відстанях від джерела сигналу експоненціально зростає. На великих відстанях вона набуває значення  $a(x) = K$  незалежно від значення параметра  $a_0$ . Іншими словами, просторова залежність  $a(x)$  цілком аналогічна часовій залежності амплітуди коливань у процесі їх встановлення в автогенераторі Ван-дер-Поля (в квазігармонічному режимі).

Таким чином, на великій віддалі від джерела сигналу в лінії встановлюється квазігармонічна біжуча хвиля, частота та початкова фаза якої задаються джерелом, а амплітуда визначається лише властивостями середовища. Така хвиля є стаціонарною: вона поширюється зі сталою швидкістю без зміни своєї форми.

Отримані результати справедливі за виконання умови (2.1.6), яка з урахуванням явно-го вигляду розв'язку (2.1.5), (2.1.9) набуває вигляду  $\alpha c/2 \ll k$ . Отже, квазігармонічні хвилі в лініях поширюватимуться лише на достатньо високих частотах:

$$\omega \gg \frac{\alpha c^2}{2}. \quad (2.1.10)$$

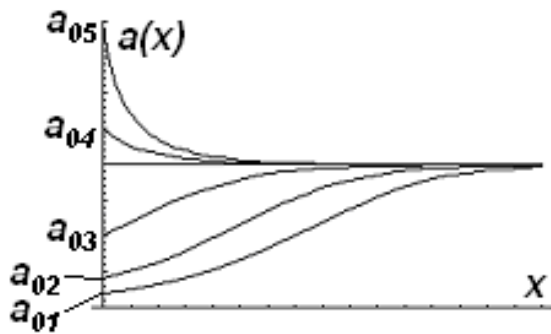


Рис. 2.1.5. Просторова залежність амплітуди квазігармонічної хвилі в слабконелінійній активній лінії для різних значень цієї амплітуди на початку системи.

#### 2.1.1.5. Дослідження стійкості стаціонарної хвилі

Щоб дослідити стійкість стаціонарної хвилі, підставимо в рівняння (2.1.3) розв'язок у вигляді суми стаціонарної хвилі та малого збурення:

$$u(x, t) = u_{st}(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad |\tilde{u}| \ll |u_{st}|, \quad (2.1.11)$$

де, відповідно до (2.1.5), (2.1.8)-(2.1.9),

$$u_{st}(x, t) = 2K \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.1.9 \text{ а})$$

Тоді для малого збурення можна отримати лінеаризоване рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -\alpha \left( 1 - \frac{u_{st}^2}{K^2} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{2}{K^2} u_{st} \frac{\partial u_{st}}{\partial t} \tilde{u}. \quad (2.1.12)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1.12) у вигляді гармонічної хвилі,  $\exp(i\Omega t - ikx)$ , частота  $\Omega$  та хвильове число  $k$  якої відмінні від  $\omega$  та  $k$ , відповідно. Тоді доданки в правій частині матимуть часову та просторову періодичність збурення лише в тому випадку, якщо від доданків, що містять  $u_{st}$ , залишити тільки постійну складову. З урахуванням (2.1.9 а) замість (2.1.12) отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}. \quad (2.1.12 \text{ а})$$

Підставимо до (2.1.12 а) залежність від координати в обраній раніше формі  $\exp(-ikx)$ . Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + \alpha c^2 \frac{d\tilde{u}}{dt} + c^2 k^2 \tilde{u} = 0. \quad (2.1.13)$$

За критерієм Рауса – Гурвиця розв’язки цього рівняння не будуть зростати за умов  $\kappa^2 > 0$ ,  $\alpha > 0$ , які в даному випадку вважаються виконаними.

Відзначимо, однак, що при дослідженні стійкості ми використовували стаціонарний розв’язок, який справедливий лише за умови (2.1.10).

### 2.1.1.6. Взаємодія зустрічних хвиль у слабконелінійній активній лінії

Як уже відзначалося, обмеження довжини активної лінії може привести до відбиття хвиль від її кінців. Саме така ситуація реалізується в розподіленому автогенераторі (див. нижче п. 2.3.1). Тому цікаво розглянути взаємодію прямої та зворотної хвилі в активній лінії. Зробимо це на прикладі лінії, описуваної рівнянням (2.1.3).

Будемо шукати розв’язок рівняння (2.1.3) у вигляді суперпозиції прямої та зворотної гармонічних хвиль, амплітуди яких повільно змінюються в просторі (тим самим ми обмежуємося лише випадком стаціонарного розподілу амплітуд хвиль у просторі):

$$u(x, t) = u_1(x) \exp(i\omega t - ikx) + u_2(x) \exp(i\omega t + ikx) + \text{к.с.}, \quad (2.1.14)$$

де, як і раніше,  $k = \omega/c$ .

Підставивши цей розв’язок до (2.1.3) і відкинувши треті гармоніки, можна отримати систему вкорочених рівнянь для повільних амплітуд  $u_{1,2}$ :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = \frac{\alpha c}{2} u_1 \left( 1 - \frac{u_1 u_1^* + 2u_2 u_2^*}{K^2} \right); \\ \frac{du_2}{dx} = -\frac{\alpha c}{2} u_2 \left( 1 - \frac{u_2 u_2^* + 2u_1 u_1^*}{K^2} \right). \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Помножимо перше з рівнянь на  $u_1^*$ , а потім додамо до отриманого таким чином рівняння комплексно спряжене до нього. Таку саму процедуру проробимо з другим рівнянням. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{d\xi} = -m_1 (1 - m_1 - 2m_2); \\ \frac{dm_2}{d\xi} = m_2 (1 - m_2 - 2m_1). \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Тут використано позначення

$$m_{1,2} = \left| \frac{u_{1,2}}{K} \right|^2, \quad \xi = \alpha c x. \quad (2.1.17)$$

Просторово однорідні розв’язки системи (2.1.16) мають вигляд:

$$\begin{cases} m_{10} = m_{20} = 0; \\ m_{10} = m_{20} = 1/3, \end{cases} \quad (2.1.18)$$

причому перший з них, очевидно, є нестійким.

Покладемо в першому з рівнянь (2.1.16)  $m_1 = 0$ , а в другому –  $m_2 = 0$ . Тоді кожне з рівнянь описує хвилю, подібну до розглянутої в п. 2.1.1.4, що зростає в напрямку свого поширення (хвиля 1 рухається у від’ємному напрямку осі  $x$ , тому в правій частині першого рівняння стоїть мінус). В загальному випадку система (2.1.16) нагадує відомі в теорії коливань рівняння для конкуренції мод у двочастотному автогенераторі<sup>8</sup>. Для неї можна побудувати аналог фазового портрету в координатах  $(m_1, m_2)$ . Він наведений на рис. 2.1.6. Роль часу в рівняннях (2.1.17) відіграє координата  $\xi$ , тому рух уздовж фазових траєкторій у напрямку, вказаному стрілками, відповідає зростанню  $\xi$ , а в протилежному напрямку – зменшенню  $\xi$ .

<sup>8</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.237.

Як видно з рис. 2.1.6, при невеликих початкових значеннях  $m_1$  та  $m_2$  спостерігається періодична зміна амплітуд зустрічних хвиль у просторі. Зокрема, при  $m_1 = m_2 = 1/3$  обидві хвилі мають амплітуди, незалежні від координати. Навпаки, при великих початкових значеннях  $m_1$  та  $m_2$  півпростір  $x < 0$  займає пряма хвиля (з амплітудою  $u_1$ ), а півпростір  $x > 0$  – зворотна (з амплітудою  $u_2$ ).

\* \* \*

За порушення умови (2.1.10) втрачає чинність припущення про поширення в лінії хвилі з малим згасанням, яке компенсується малою енергією, що надходить від активних елементів. Припущення про квазігармонічність хвиль також стає несправедливим. В результаті діапазон можливої поведінки хвиль у такій лінії значно розширюється. Зростає, відповідно, й складність аналізу процесів у таких лініях.

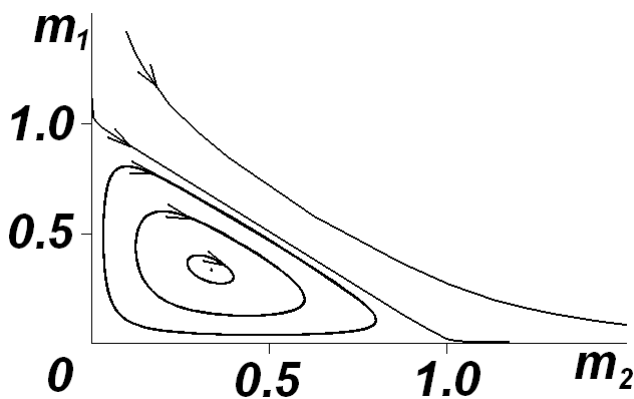


Рис. 2.1.6. Аналог фазового портрету взаємодії зустрічних хвиль в активній лінії.

На сьогодні розроблений аналіз лише деякого частинного випадку поведінки активних ліній (або активних середовищ), а саме стаціонарних хвиль у таких лініях, які поширюються без зміни своєї форми. Про хвилі такого типу йтиметься в наступному розділі 2.2.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.1.1

1. Користуючись системою електромеханічних аналогій, запропонуйте механічні аналоги нелінійного опору та нелінійної провідності.
2. Чим, на Вашу думку, відрізняються активні лінії на базі активних провідностей та активних опорів?
3. Поясніть якісно, чому на високих частотах нелінійність активних ліній можна вважати слабкою.
4. Намалюйте миттєвий розподіл напруги вздовж активної лінії, в якій збуджені дві зустрічні хвилі, для різних початкових співвідношень між їхніми інтенсивностями. Як вони змінюватимуться з часом?

#### Задачі до підрозділу 2.1.1

2.1.1.1. Побудуйте розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \left( 1 - \frac{u^2}{K^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

для задачі з початковими умовами (початкове збурення вважати гармонічним).

2.1.1.2\*. Запропонуйте модель активної лінії з нелійними опорами. Отримайте для неї хвильове рівняння. Побудуйте розв'язок цього рівняння для початкової та граничної задач, користуючись методом повільних амплітуд.

#### 2.1.2. Фазові хвилі в автоколивних середовищах

Ознайомимося тепер зі ще одним типом (точніше, моделлю) слабконелінійних активних середовищ – середовищами автоколивного типу.



Автоколивні середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних між собою автогенераторів. Основна відмінність автоколивних середовищ від раніше розглянутих активних ліній – це наявність власної частоти, на якій (за відсутності зовнішнього впливу) відбуваються автоколивання. Прикладами таких середовищ можуть бути тонкі шари розчинів, у яких протікають реакції Білоусова - Жаботинського (див. п. 1.3.4), або серцевий м'яз, що зазнає регулярних скорочень.

Для кожного "елементарного генератора" стаціонарний стан (стан відсутності коливань) є нестійким. Від рівня флуктуацій або початкового збурення в ньому зростають квазігармонічні коливання на власній частоті. В усталеному режимі амплітуда цих коливань встановлюється на фіксованому рівні, який не залежить від початкових умов і визначається лише властивостями системи (як це має місце в квазігармонічному режимі автогенератора Ван-дер-Поля). Надалі ми будемо розглядати саме усталений режим "елементарних генераторів".

Якщо всі "елементарні генератори" коливаються з однаковою фазою, в автоколивному середовищі спостерігаються синфазні коливання в усьому просторі. Якщо фаза коливань змінюється в просторі, утворюються так звані фазові хвилі. Вони нагадують біжучий рядок світлової реклами, коли зміна кольору нерухомих локальних елементів рекламного щита створює ілюзію руху зображення як цілого.

Автоколивні середовища зовні дещо нагадують активні лінії, розглянуті в п. 2.1.1. В обох цих системах, наприклад, у певному діапазоні частот можуть існувати стаціонарні квазігармонічні хвилі, збуджувані деяким зовнішнім джерелом. Але за відсутності такого збудження в автоколивних середовищах відбуваються синфазні автоколивання, чого не буде в активних лініях. З іншого боку, для автоколивних середовищ можливий як м'який, так і жорсткий режим самозбудження (в останньому випадку стаціонарний однорідний стан залишається стійким щодо малих відхилень).

Як і у випадку активних ліній, ми обмежимося розглядом автохвильових середовищ зі слабкою нелінійністю, коли форму коливань можна вважати квазігармонічною.

Піонерські дослідження середовищ автоколивного типу були виконані в 1970-х – 1980-х роках Й. Курамото<sup>9</sup>.

### 2.1.2.1. Отримання модельного рівняння

Користуючись згаданою вище моделлю автоколивного середовища як мережі зв'язаних автогенераторів, спробуємо отримати модельне рівняння, що описує хвилі в такому середовищі.

Розглянемо спочатку окремих автогенератор. Будемо описувати його симетризованою системою двох рівнянь першого порядку (див. п. 1.1.5.2, рівняння (1.1.31)):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)x - y = 0; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)y + \omega_0^2 x = 0, \end{cases}$$

де, як і раніше,  $E = (\omega_0^2 x^2 + y^2)/2$ . Нагадаємо, що при малих  $\alpha$  та  $\gamma$  ця система зводиться до узагальненого рівняння Релея – Ван-дер-Поля (1.1.32):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha - \gamma E) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Введемо комплексну змінну  $\eta = \omega_0 x - iy$ . Тоді, помноживши перше з рівнянь на  $\omega_0$ , друге – на  $i$  та додавши їх, легко отримати рівняння для  $\eta$ :

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)\eta - i\omega_0\eta = 0. \quad (2.1.19)$$

<sup>9</sup> Й. Курамото (Kuramoto Yoshiki, нар. 1940) – японський фізик, професор університету Кіото, фахівець у галузі нелінійної динаміки.

де тепер можна вважати, що  $E = |\eta|^2 / 2$ .

Тепер розглянемо одновимірний ланцюжок зв'язаних автогенераторів, описуваних рівняннями типу (2.1.19). Природно припустити, що на автогенератор з номером  $n$  вливають лише його найближчі сусіди, причому однаковим чином. З урахуванням цієї обставини рівняння (2.1.19) можна переписати у формі

$$\frac{d\eta_n}{dt} + \frac{1}{2} \left( -\alpha + \gamma \frac{|\eta_n|^2}{2} \right) \eta_n - i\omega_0 \eta_n = \beta (\eta_{n-1} + \eta_{n+1}). \quad (2.1.19 \text{ а})$$

Нехай відстань між сусідніми автогенераторами дорівнює  $a$ . Перейдемо до моделі неперервного середовища, в якому  $\eta = \eta(z, t)$ , де  $z$  – координата. Тоді, розклавши залежність  $\eta(z \pm a, t)$  в ряд Тейлора за малим параметром  $a$ , отримаємо:

$$\eta_{n\pm 1} \equiv \eta(z \pm a, t) \approx \eta(z, t) \pm \frac{\partial \eta}{\partial z} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} a^2. \quad (2.1.20)$$

З урахуванням (2.1.20) перепишемо (2.1.19 а) у формі

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} \left( \tilde{\alpha} - \gamma \frac{|\eta|^2}{2} \right) + i\omega_0 \right] \eta + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \quad (2.1.21)$$

де використані позначення

$$\tilde{\alpha} = \alpha + 4\beta, \quad D = \beta a^2. \quad (2.1.22)$$

Рівняння (2.1.21) має форму нелінійного кінетичного рівняння з дифузиею (див. нижче п. 2.2.1.4). Оскільки функція  $\eta = \eta(z, t)$  є комплексною, рівняння (2.1.21) еквівалентне до системи двох дійсних рівнянь такого самого типу.

### 2.1.2.2. $\lambda$ - $\omega$ модель автоколивного середовища

Розглянемо середовище, яке описується змінними  $u = u(\vec{r}, t)$ ,  $v = v(\vec{r}, t)$ . Введемо замість них одну комплексну змінну  $\eta = u + iv$ . Нехай вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta, \quad \rho = |\eta|. \quad (2.1.23)$$

Функція  $\lambda(\rho)$  повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу  $\rho = \rho_0$  (рис. 2.1.7). Функцію  $\omega(\rho)$  вважатимемо додатною.

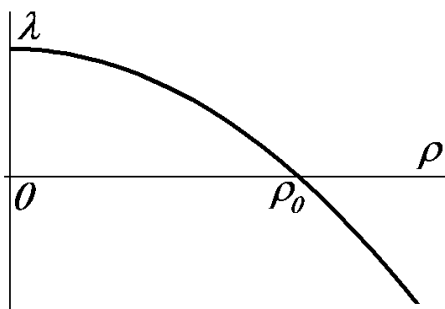


Рис. 2.1.7. Вигляд функції  $\lambda(\rho)$ .

Рівняння (2.1.23), яке можна розглядати як безпосереднє узагальнення отриманого вище рівняння (2.1.21), відповідає  $\lambda$ - $\omega$  моделі, що описує широкий клас автоколивних середовищ.

Частинним випадком  $\lambda$ - $\omega$  моделі є також відоме в літературі узагальнене рівняння Гі-нзбурга – Ландау (це рівняння для хвильової функції, запропоноване в 1950 році

В.Л. Гінзбургом<sup>10</sup> та Л.Д. Ландау<sup>11</sup>, описує поведінку надпровідника в магнітному полі в області температур поблизу точки переходу в надпровідний стан):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta. \quad (2.1.24)$$

Воно зводиться до рівняння  $\lambda$ - $\omega$  моделі, якщо покласти  $\lambda(\rho) = \alpha_1 - \beta_1\rho^2$ ,  $\omega(\rho) = \alpha_2 - \beta_2\rho^2$ .

Щоб з'ясувати властивості середовища, описуваного рівнянням (2.1.23), перейдемо від комплексної змінної  $\eta$  до дійсних змінних  $\rho$  та  $\varphi$ , які вводяться із співвідношення  $\eta = \rho \exp(i\varphi)$ .

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \exp(i\varphi) + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rho \exp(i\varphi), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \exp(i\varphi) + 2i \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \exp(i\varphi) - \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \exp(i\varphi) + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rho \exp(i\varphi), \end{aligned}$$

і, отже,

$$\Delta [\rho \exp(i\varphi)] = [(\Delta\rho) + 2i(\nabla\rho \cdot \nabla\varphi) - \rho(\nabla\varphi)^2 + i\rho(\Delta\varphi)] \exp(i\varphi). \quad (2.1.25)$$

Підставимо співвідношення  $\eta = \rho \exp(i\varphi)$  з урахуванням (2.1.25) до (2.1.23), скоротимо на  $\exp(i\varphi)$  і окремо прирівняємо до нуля дійсну та уявну частини отриманого виразу. Таким чином початкове комплексне рівняння (2.1.23) зводиться до системи двох дійсних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda(\rho)\rho + D_1 [\Delta\rho - \rho(\nabla\varphi)^2] + D_2 [2(\nabla\rho \cdot \nabla\varphi) + \rho\Delta\varphi]; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(\rho) + D_1 \left[ \frac{2}{\rho}(\nabla\rho \cdot \nabla\varphi) + \Delta\varphi \right] + D_2 \left[ -\frac{\Delta\rho}{\rho} + (\nabla\varphi)^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.26)$$

### 2.1.2.3. Однорідний розв'язок рівняння $\lambda$ - $\omega$ моделі та його стійкість

Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (2.1.26). За умов  $\partial\rho/\partial t = 0$ ,  $\partial\rho/\partial x_i = 0$ ,  $\partial\varphi/\partial x_i = 0$  воно зводиться до вигляду  $\rho\lambda(\rho) = 0$ , звідки  $\rho_1 = 0$  або  $\rho_2 = \rho_0$ .

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (2.1.26) розв'язок у формі  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_{1,2} + \delta\rho \exp[\alpha_{1,2}t - i(\vec{k}\vec{r})]$ , вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови  $\partial\varphi/\partial x_i = 0$  можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \quad (2.1.27)$$

та

$$\alpha_2 = \rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1 \quad (2.1.28)$$

<sup>10</sup> В.Л. Гінзбург (Виталий Лазаревич Гінзбург, 1916 - 2009) – видатний російський фізик, академік АН СРСР та РАН, Нобелівський лауреат (2003). Основні роботи присвячені радіофізиці, фізиці плазми, астрофізиці.

<sup>11</sup> Л.Д. Ландау (Лев Давидович Ландау, 1908 - 1968) – геніальний російський фізик-теоретик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської (1946, 1949, 1953), Ленінської (1962) та Нобелівської (1962) премій. Створив наукову школу світового рівня. Автор фундаментального курсу теоретичної фізики (разом з Є.М.Ліфшицем). Власні роботи характеризуються надзвичайно широкою тематикою. Зробив видатний внесок у квантову механіку (теорія надплинності), магнетизм, фізику плазми, теорію фазових переходів та ряд інших областей.

(враховано, що  $\lambda(\rho_0) = 0$ ). Оскільки  $\lambda(0) > 0$ , перший корінь буде нестійким ( $\alpha_1 > 0$ ), принаймні при невеликих  $k$ . Функція  $\lambda(\rho)$  є монотонно спадною, тобто  $d\lambda(\rho)/d\rho < 0$ , отже, другий корінь завжди буде стійким ( $\alpha_2 < 0$ ). Система релаксуватиме до стану  $\rho = \rho_0$  за час

$$\tau_\rho = - \left[ \rho_0 \frac{d\lambda}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \right]^{-1} \quad (2.1.29)$$

(при  $k = 0$ ).

Підставимо тепер корінь  $\rho = \rho_0$  до другого рівняння системи (2.1.22). Оскільки  $\omega(\rho_0) \neq 0$ , то це рівняння взагалі не має однорідного стаціонарного розв'язку. За умови  $\partial\varphi/\partial x_i = 0$  воно набуває вигляду  $\partial\varphi/\partial t = \omega(\rho_0) \equiv \omega_0$ , звідки  $\varphi(t) = \omega_0 t + \psi$ . Відповідно комплексна змінна  $\eta$  набуває вигляду  $\eta = \rho_0 \exp[i(\omega_0 t + \psi)]$ .

Очевидно, цей розв'язок описує синфазні автоколивання аналізованого середовища.

Відзначимо, що використана при побудові цього розв'язку умова однорідності еквівалентна відсутності зв'язку між сусідніми елементами середовища ( $D_1 = D_2 = 0$ ). Отже, окремі елементи середовища являють собою автогенератори. Залежність  $\omega(\rho)$  виражає закон неізохронності таких автогенераторів.

#### 2.1.2.4. Рівняння для фазових хвиль

Будемо тепер шукати розв'язок рівняння (2.1.23) у формі

$$\eta(\vec{r}, t) = [\rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t)] \exp\{i[\omega_0 t + \psi(\vec{r}, t)]\}, \quad (2.1.30)$$

тобто вважати, що  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\varphi(\vec{r}, t) = \omega_0 t + \psi(\vec{r}, t)$ . Тоді система (2.1.26) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = \lambda(\rho_0 + \delta\rho)(\rho_0 + \delta\rho) + D_1 [\Delta\delta\rho - (\rho_0 + \delta\rho)(\nabla\psi)^2] + D_2 [2(\nabla\delta\rho \cdot \nabla\psi) + (\rho_0 + \delta\rho)\Delta\psi]; \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = [\omega(\rho_0 + \delta\rho) - \omega_0] + D_1 \left[ \frac{2}{\rho_0 + \delta\rho} (\nabla\delta\rho \cdot \nabla\psi) + \Delta\psi \right] + D_2 \left[ \frac{\Delta\delta\rho}{\rho_0 + \delta\rho} + (\nabla\psi)^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.31)$$

Вважаючи, що  $|\delta\rho| \ll \rho_0$ , знехтуємо  $\delta\rho$  всюди в першому з рівнянь системи (2.1.31), крім першого доданку в правій частині. Тут функцію  $\lambda(\rho_0 + \delta\rho)$  розкладемо в ряд Тейлора і скористаємося позначенням (2.1.29). Отримаємо:

$$-\frac{\delta\rho}{\tau_\rho} - D_1 \rho_0 (\nabla\psi)^2 + D_2 \rho_0 \Delta\psi = 0 \quad (2.1.32)$$

(отримане рівняння справедливе, якщо формально вважати величину  $\tau_\rho$  малою того ж порядку, що й  $\delta\rho$ , тобто припустити, що час релаксації амплітуди коливань є малим). Тоді з (2.1.32) можна записати  $\delta\rho$  як функцію  $\psi$ :

$$\delta\rho = \rho_0 \tau_\rho \left[ -D_1 (\nabla\psi)^2 + D_2 \Delta\psi \right]. \quad (2.1.32 \text{ а})$$

У другому рівнянні системи (2.1.31) в першому доданку у правій частині розкладемо  $\omega(\rho_0 + \delta\rho)$  в ряд Тейлора, а всіма іншими доданками, пропорційними  $\delta\rho$ , знехтуємо. Отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\omega}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \delta\rho + D_1 \Delta\psi + D_2 (\nabla\psi)^2 \quad (2.1.33)$$

(виконані дії є законними, якщо вважати величину  $d\omega/d\rho$  великим параметром; це означає, що автогенератори, які є елементарними комірками досліджуваного активного середовища, характеризуються сильною неізохронністю). Нарешті, підставимо вираз (2.1.32 а) для  $\delta\rho$  до (2.1.33) і остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi, \quad (2.1.34)$$

де введено позначення

$$a = D_2 + D_1 \left. \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}, \quad b = D_1 - D_2 \left. \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (2.1.35)$$

(в силу зроблених вище припущень і чисельник, і знаменник других доданків у правих частинах формул (2.1.35) є великими параметрами, так що в результаті ці доданки сумірні з першими доданками).

Можна показати, що для рівняння Гінзбурга – Ландау (2.1.24) коефіцієнти  $a$  та  $b$  мають вигляд  $a = D_2 + \beta_2 D_1 / \beta_1$ ,  $b = -\beta_2 D_2 / \beta_1 + D_1$ .

Рівняння (2.1.34) відоме як рівняння для фазових хвиль в автоколивному середовищі. Воно в деяких випадках є навіть більш загальним у порівнянні з початковим рівнянням (2.1.23).

Користуючись (2.1.34), оцінимо час релаксації фази  $\psi$ . Припустимо, що  $|\nabla\psi| \sim |\psi|/L$ ,  $\Delta\psi \sim \psi/L^2$ , де  $L$  – характерний розмір, на якому фаза  $\psi$  помітно змінюється. Припустимо також, що  $|\psi| \ll 1$ . Тоді (2.1.34) можна переписати у формі

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx a \frac{\psi^2}{L^2} + b \frac{\psi}{L^2} \approx b \frac{\psi}{L^2} \quad (2.1.34 \text{ а})$$

(ми відкинули доданок другого порядку мализни за  $\psi$ ). Тоді час релаксації фази можна оцінити як

$$\tau_\psi = \frac{L^2}{b}. \quad (2.1.36)$$

Рівняння (2.1.34) отримане за умови, що час релаксації амплітуди  $\tau_\rho$  є малим. Фактично це означає, що  $\tau_\rho \ll \tau_\psi$ , або

$$L \gg \sqrt{b\tau_\rho} \quad (2.1.37)$$

(у правій частині нерівності стоїть довжина дифузії фази  $\psi$  за час  $\tau_\rho$  для лінеаризованого рівняння (2.1.34)).

Таким чином, у рамках  $\lambda$ - $\omega$  моделі рівнянням (2.1.34) можна користуватися лише для опису достатньо довгих хвиль.

#### 2.1.2.5. Синфазні автоколивання

Перейдемо тепер до аналізу ефектів, описуваних рівнянням для фазових хвиль (2.1.34). Перейдемо від фази  $\psi$  до нової функції  $Q$ , пов'язаної з фазою співвідношенням

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{b}{a} \ln Q(\vec{r}, t). \quad (2.1.38)$$

Маємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (2.1.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln Q \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{Q^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

тому

$$\nabla\psi = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q, \quad \Delta\psi = \frac{b}{a} \left[ -\frac{1}{Q^2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right]. \quad (2.1.40)$$

Підставивши (2.1.39) та (2.1.40) до (2.1.34), можна отримати:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} = a \left( \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q \right)^2 + \frac{b^2}{a} \left[ -\frac{1}{Q^2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right], \quad (2.1.41)$$

і остаточно

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b \Delta Q. \quad (2.1.41 \text{ a})$$

При  $b > 0$  (2.1.41 a) являє собою звичайне рівняння дифузії. Будь-яка локальна неоднорідність з масштабом  $L$  розсмоктується і зникає за час порядку  $L^2/b$ . В середовищі встановлюється режим  $Q = const$ , або  $\psi = const$ , якому відповідають синфазні автоколивання (див. вище п. 2.1.2.3).

### 2.1.2.6. Біжучі фазові хвилі

Розглянемо тепер функцію

$$\psi(\vec{r}, t) = -(\vec{k} \cdot \vec{r}) + ak^2 t. \quad (2.1.42)$$

Безпосередня підстановка показує, що вона задовольняє рівняння (2.1.34). Тоді комплексна функція  $\eta$  матиме вигляд:

$$\eta(\vec{r}, t) = \rho_0 \exp(i\omega_0 t - i\vec{k}\vec{r} + iak^2 t) = \rho_0 \exp\left\{i\left[(\omega_0 + ak^2)t - \vec{k}\vec{r}\right]\right\}, \quad (2.1.43)$$

тобто в автоколивному середовищі поширюється фазова хвиля, що характеризується законом дисперсії

$$\omega(k) = \omega_0 + ak^2 \quad (2.1.44)$$

та фазовою швидкістю  $v_{ph} \equiv \omega/k = \omega_0/k + ak$ . Таким чином, частота фазової хвилі завжди вища від частоти синфазних автоколивань у тому самому середовищі.

Розв'язок (2.1.42) стійкий, якщо  $b > 0$ .

### 2.1.2.7. Взаємодія двох біжучих фазових хвиль

Проаналізуємо взаємодію двох фазових хвиль у найпростішій одновимірній моделі. Будемо вважати, що обидві хвилі поширюються в зустрічних напрямках уздовж осі  $x$ , причому  $\psi(x, t) \rightarrow ak_1^2 t - k_1 x$  при  $x \rightarrow -\infty$  і  $\psi(x, t) \rightarrow ak_2^2 t + k_2 x$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Знову скористаємося змінною  $Q$ , введеною співвідношенням (2.1.38). Рівнянню (2.1.41 a) для цієї змінної для таких граничних умов відповідає розв'язок у вигляді:

$$Q(x, t) = A_1 \exp\left[-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t\right] + A_2 \exp\left[\frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t\right]. \quad (2.1.45)$$

Покажемо, що він справді задовольняє записаним вище граничним умовам. Справді, якщо показник першої експоненти в (2.1.45) значно більший від показника другої експоненти, тобто

$$-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t \gg \frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t, \quad (2.1.46)$$

то другою експонентою взагалі можна знехтувати, і для фази  $\psi$  можна записати вираз

$$\psi(x, t) \approx -k_1 x + ak_1^2 t, \quad (2.1.47)$$

що буде справедливим в області

$$x \ll at(k_1 - k_2). \quad (2.1.46 \text{ a})$$

Отже, в цій області (ліва піввісь  $x$ ) існує фазова хвиля з хвильовим числом  $k_1$  і частотою  $\omega(k_1)$ , яка біжить праворуч. В протилежному випадку, тобто при  $x \gg at(k_1 - k_2)$ ,

$$(2.1.48)$$

можна записати, що

$$\psi(x, t) \approx k_2 x + ak_2^2 t. \quad (2.1.49)$$

Таким чином, в області, що задовольняє умові (2.1.48), тобто на правій півосі  $x$ , існує фазова хвиля з хвильовим числом  $k_2$  і частотою  $\omega(k_2)$ , яка біжить ліворуч.

За межу між областями, зайнятими різними хвилями, природно прийняти точку  $x = at(k_1 - k_2)$ . Ширина перехідної області може бути визначена з умови, щоб у цій області зміна різниці показників експонент в (2.1.45) при фіксованому  $t$  склала величину порядку одиниці:

$$\delta x \sim \frac{b}{a(k_1 + k_2)}. \quad (2.1.50)$$

Межа між областями, зайнятими різними хвилями, рухається зі швидкістю

$$V = \frac{dx}{dt} = a(k_1 - k_2) \quad (2.1.51)$$

праворуч, якщо  $k_1 > k_2$ , чи ліворуч, якщо  $k_1 < k_2$ . Іншими словами, коротші фазові хвилі поступово витісняють довші хвилі.

Цей результат неодноразово спостерігався в числових та натурних експериментах.

#### 2.1.2.8. Умови реалізації різних типів розв'язків

Очевидно, за відсутності зовнішнього впливу в автоколивних середовищах реалізується режим синфазних автоколивань.

Якщо ж в автоколивному середовищі є джерело гармонічних коливань з частотою, вищою від частоти синфазних автоколивань  $\omega_0$ , від нього побіжить фазова хвиля з хвильовим числом, яке визначається законом дисперсії (2.1.44). Як впливає з результатів п. 2.1.2.7, ця хвиля буде поступово витісняти синфазні автоколивання, які мають нижчу частоту.

Фактично в ролі джерел фазових хвиль виступають специфічні утворення в самих автоколивних середовищах – ревербератори та пейсмейкери (див. нижче пп.2.3.3-2.3.4).

#### Контрольні питання до підрозділу 2.1.2

1. Коли синхронні коливання у середовищах, описуваних  $\lambda$ - $\omega$  моделлю, є стійкими щодо збурень?
2. Який фізичний зміст функцій  $\lambda(\rho)$  та  $\omega(\rho)$  в рівнянні для  $\lambda$ - $\omega$  моделі?
3. Які припущення використовуються при виведенні рівняння для фазових хвиль?
4. Чи можна описувати короткі хвилі в автоколивному середовищі за допомогою рівняння для фазових хвиль?
5. Дайте фізичну інтерпретацію фазовим хвилям.
6. Чи існують фізичні обмеження на швидкість фазових хвиль?
7. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до фазових хвиль.

#### Задачі до підрозділу 2.1.2

2.1.2.1. Узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау має вигляд:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2 \eta + (D_1 - iD_2)\Delta \eta$$

(функція  $\eta$  комплексна, всі параметри дійсні). Знайти рівноважні значення амплітуди та частоти локальних автоколивань і характерний час релаксації амплітуди. Побудувати графік неізохронності локальних автоколивань.

2.1.2.2. Знайти нелінійне дисперсійне рівняння для гармонічних фазових хвиль безпосередньо з нелінійного кінетичного рівняння з дифузиею для  $\lambda$ - $\omega$  моделі. При якій мінімальній довжині ці хвилі ще можуть існувати?

2.1.2.3. Дослідити, за яких умов розв'язок рівняння для фазових хвиль у формі

$$\psi(\vec{r}, t) = -(\vec{k} \cdot \vec{r}) + ak^2t$$

є стійким.

2.1.2.4. Користуючись рівнянням для фазових хвиль у двовимірному автоколивному середовищі, дослідити взаємодію двох зустрічних фазових хвиль, хвильові вектори яких не є паралельними. Якими будуть величина та напрямок швидкості руху межі між областями, зайнятими кожною з хвиль?

2.1.2.5\*. Користуючись рівнянням Гінзбурга – Ландау, дослідити числовими методами плоскі фазові хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

### ***Висновки до розділу 2.1***

1. Найпростішою моделлю активного середовища є слабконелінійна активна лінія. Ця модель описує поширення квазігармонічних хвиль у діоді Есакі (розподілений тунельний діод) та інших подібних системах за наявності джерела збудження на кінці лінії. На великих відстанях від джерела амплітуда хвилі набуває сталого значення, яке визначається властивостями лінії і не залежить від амплітуди сигналу на виході генератора.
2. Взаємодія двох зустрічних хвиль з однаковими частотами в такій лінії при малих амплітудах приводить до періодичних у просторі пульсацій амплітуд кожною з хвиль. При великих амплітудах кожна із хвиль існує лише в області, що межує з відповідним джерелом сигналу.
3. Модель слабконелінійного автохвильового середовища відрізняється від моделі слабконелінійної активної лінії тим, що кожен елемент середовища характеризується частотою та амплітудою автоколивань. Таке середовище можна уявити собі як мережу зв'язаних автогенераторів. Власні коливання такого середовища являють собою синфазні квазігармонічні автоколивання в усьому просторі. Прикладом автохвильового середовища може служити розчин, у якому протікає хімічна реакція коливного типу (реакція Белоусова - Жаботинського).
4. В автоколивному середовищі зовнішнє джерело з частотою, що перевищує частоту автоколивань, породжує фазові хвилі. Ці хвилі не супроводжуються перенесенням енергії в просторі, а зумовлені лише зсувом фази нав'язаних зовнішнім джерелом коливань елементів середовища в просторі внаслідок зв'язку між ними.
5. Конкуренція двох зустрічних фазових хвиль приводить до придушення хвилі з більшою довжиною (нижчою частотою).

### ***Контрольні питання до розділу 2.1***

1. В чому полягає умова слабкої нелінійності для активних середовищ? Коли вона задовольняється?
2. Порівняйте між собою хвилі в активних лініях та фазові хвилі в середовищах автоколивного типу. Що в них спільного і що – відмінного?



## Розділ 2.2. Автохвилі в сильнелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням

Розглянувши ініційовані зовнішнім збудженням автохвилі в слабконелінійних середовищах, перейдемо тепер до аналізу аналогічних автохвиль у сильнелінійних середовищах.

В загальному випадку питання про характер хвиль у таких середовищах залишається відкритим. Достатньо вивченими можуть вважатися лише автохвилі, що поширюються без зміни своєї форми, яка тепер, як і амплітуда, не залежить від граничних чи початкових умов, а визначається властивостями середовища (нагадаємо, що в слабконелінійних середовищах високочастотні хвилі, збуджувані зовнішнім джерелом, були квазігармонічними, і лише їхня усталена амплітуда визначалася властивостями середовища).

Ми обмежимося розглядом двох моделей сильнелінійних середовищ, які найбільш поширені в літературі і можуть вважатися найбільш дослідженими. Це бістабільні середовища і збудливі середовища (середовища з відновленням).

У цьому розділі йтиметься про біжучі автохвилі в бістабільних середовищах та в середовищах із відновленням (збудливих середовищах) – відповідно хвилі перекидання, або біжучі фронти, та біжучі імпульси чи періодичні послідовності таких імпульсів.

### 2.2.1. Біжучі фронти

Як уже говорилося, біжучі фронти спостерігаються в бістабільних середовищах. Бістабільні середовища – це такі середовища, які характеризуються двома стійкими однорідними стаціонарними станами рівноваги. Відповідно автохвилі в таких середовищах являють собою хвилі перемикання (фазових переходів) з одного стійкого стаціонарного стану в інший (у певному сенсі більш "енергетично вигідний"), тобто їх можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості.

Користуючись поняттями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне бістабільне середовище можна грубо уявити собі як ланцюжок тригерів, які знаходяться в однаковому стані. Під дією зовнішнього сигналу – імпульсу запуску – тригер на кінці ланцюжка переходить в інший стан і одночасно формує (наприклад, за допомогою RC-ланки) імпульс запуску для наступного елемента ланцюжка. Таким чином, уздовж ланцюжка може бігти хвиля перекидання.

Розглянемо спершу кілька прикладів бістабільних середовищ і запишемо для кожного з них рівняння руху.

#### 2.2.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників)

Розглянемо деяку комірку (пальник), всередині якої може протікати процес горіння. Запас горючої суміші підтримується постійним за рахунок надходження від зовнішнього джерела. Нехай за одиницю часу при горінні виділяється кількість теплоти  $q(T)$ , залежність якої від температури горіння  $T$  має ступінчатий характер (рис. 2.2.1).

Якщо комірка ізольована, то вся виділена теплота йде на її нагрівання. Тому зміна температури (за умови, що надходження пального до комірки стало) визначатиметься рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C}, \quad (2.2.1)$$

де  $C$  – теплоємність пальника. Рівняння (2.2.1) описує необмежене зростання температури пальника з часом після його запалювання, оскільки  $q(T) > 0$  при  $T > T_c$ .

Але в реальності температура комірки, зрозуміло, не буде необмежено зростати, оскільки існує теплообмін із навколишнім середовищем. Якщо навколишнє середовище має температуру  $T_0$ , то рівняння для температури пальника з урахуванням теплообміну можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C} - \gamma(T - T_0) \equiv f(T), \quad (2.2.2)$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт теплообміну, а права частина –  $f(T)$  – носить назву кінетичної функції. Побудова графіка кінетичної функції показана на рис. 2.2.2.

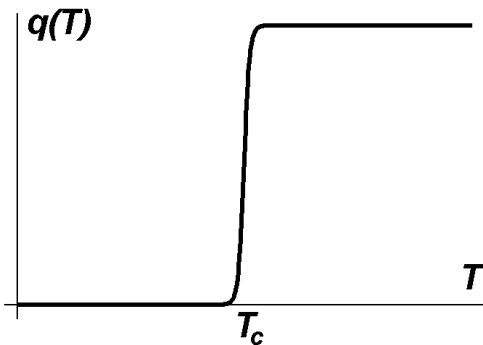


Рис. 2.2.1. Кількість теплоти, що виділяється в пальнику за одиницю часу, як функція його температури ( $T_c$  – температура запалювання).

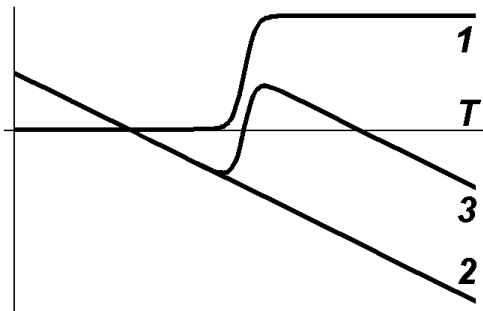


Рис. 2.2.2. Температурні залежності тепло-виділення (крива 1), втрат на теплообмін (крива 2) та сумарної кінетичної функції (крива 3).

Вигляд кінетичної функції для різних значень параметрів моделі показано на рис. 2.2.3 а-в. Якщо температура навколишнього середовища дуже низька, запалювання взагалі неможливе (рис. 2.2.3 а). Якщо температура навколишнього середовища перевищує температуру запалювання, то єдиний можливий стаціонарний стан – горіння (рис. 2.2.3 б). Нарешті, в деякому проміжному діапазоні значень система формально має три стаціонарні однорідні стани –  $T_0$ ,  $T_c$  та  $T_1$  (рис. 2.2.3 в).

Для дослідження стійкості однорідних стаціонарних станів лінеаризуємо рівняння (2.2.2) поблизу відповідних точок  $T_i$ :

$$\frac{dT}{dt} = (T - T_i) f'(T_i), \quad f'(T_i) \equiv \left. \frac{df(T)}{dT} \right|_{T=T_i} \equiv \frac{1}{\tau_i}. \quad (2.2.3)$$

Якщо  $f'(T_i) < 0$ , то, як випливає з (2.2.3), малі відхилення від стаціонарних станів експоненціально згасатимуть із характерним часом  $\tau_i$ , тобто відповідні точки ( $T_0$  та  $T_1$  на рис. 2.2.3 в) є стійкими. Навпаки, при  $f'(T_i) > 0$  малі відхилення експоненціально зростатимуть, тобто відповідна точка ( $T_c$  на рис. 2.2.3 в) є нестійкою.

Точка  $T_0$  відповідає відсутності горіння, коли температура комірки збігається з температурою навколишнього середовища. Точка  $T_1$  відповідає стаціонарному горінню, коли все виділене за одиницю часу тепло відходить у навколишнє середовище внаслідок теплообміну. Нарешті, точка  $T_c$ , яка відповідає температурі запалювання, служить межею областей притягання точок  $T_0$  та  $T_1$ . Справді, при  $f(T) > 0$  температура системи з часом зростатиме, при

$f(T) < 0$  – навпаки, спадатиме. Таким чином, якщо в початковий момент часу виконана умова  $T < T_c$ , то в системі встановлюється температура  $T_0$ , в протилежному випадку – температура  $T_1$  (це видно з рис. 2.2.3 в).

Зазначимо, що відкритий характер досліджуваної системи зумовлений неперервним надходженням до неї палива ззовні. Очевидно, величина  $q(T)$  при  $T > T_c$  пропорційна кількості палива, що надходить у систему за одиницю часу (принаймні, в стаціонарному режимі горіння). Тому, якщо надходження палива припиниться, крива 1 на рис. 2.2.2 зіллється з віссю абсцис, а крива 3 – відповідно з кривою 2. В результаті в системі залишиться єдиний стаціонарний стан – стан відсутності горіння. Отже, саме цей стан відповідає термодинамічній гілці розв'язку (див. п. 1.3.2.1). Стан же стаціонарного горіння принципово зумовлений нерівноважністю системи.

Якщо тепер замість відокремленого пальника розглядати ланцюжок таких пальників, розташованих на малих віддальх один від одного, то в рівнянні (2.2.2) необхідно врахувати теплопровідність. Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.4)$$

( $D$  – коефіцієнт теплопровідності).

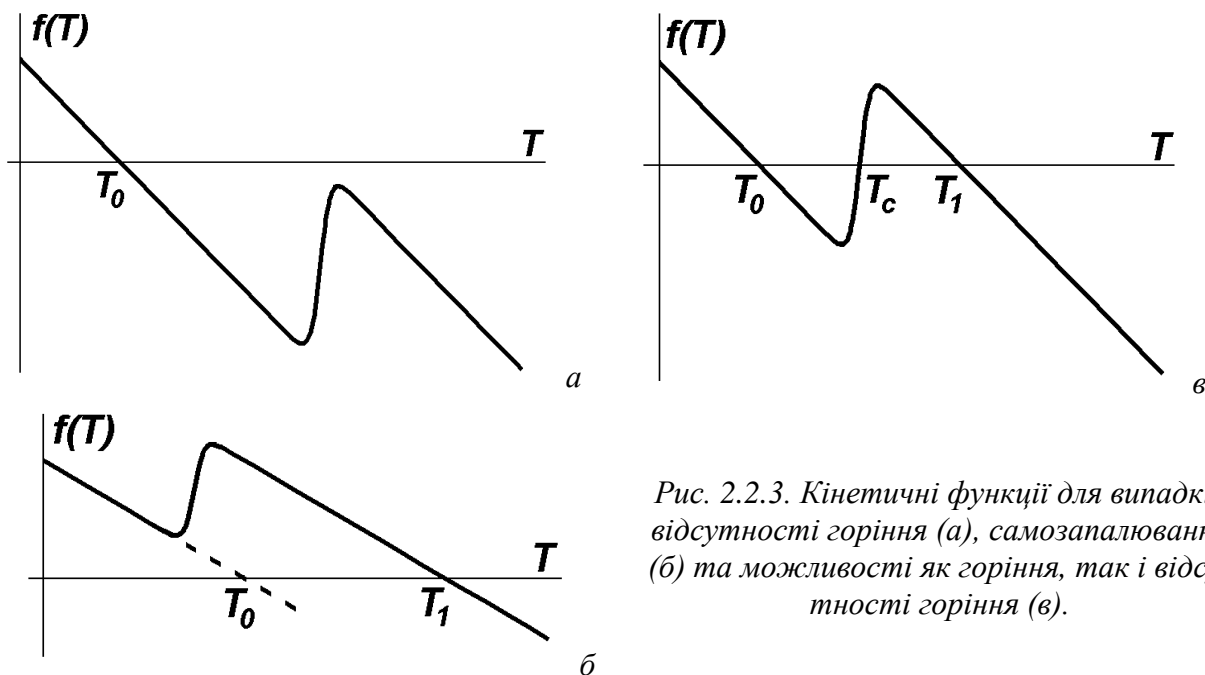


Рис. 2.2.3. Кінетичні функції для випадків відсутності горіння (а), самозапалювання (б) та можливості як горіння, так і відсутності горіння (в).

Звернемо увагу на те, що в рівнянні (2.2.4) теплопровідність, по суті, врахована двічі: один раз – у явному вигляді (останній, дифузійний доданок у правій частині), і ще раз – у неявному вигляді, в кінетичній функції (доданок  $-\gamma(T - T_0)$  у рівнянні (2.2.2), що описує теплообмін з навколишнім середовищем). Для однорідних станів системи дифузійний доданок зникає, а теплообмінний доданок у кінетичній функції зберігається. Це означає, що рівняння (2.2.4) фактично описує горіння в деякому стрижні або ланцюжку. Дифузійний доданок описує теплообмін у напрямку  $x$  уздовж цього ланцюжка, а теплообмінний доданок – у поперечному напрямку.

### 2.2.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля)

Розглянемо деяку гіпотетичну хімічну реакцію автокаталітичного типу (див. вище п. 1.3.2.3), відому як модель Шльогля (див. вище задачу 1.3.2):



Відзначимо, що ця реакція належить до автокаталітичного типу (пор. з п. 1.3.2.3) – пряма реакція, описувана першим із рівнянь (2.2.5), зводиться до перетворення речовини  $A$  в речовину  $X$ , причому остання служить і каталізатором цієї реакції.

Нехай спершу реакція протікає в реакторі з перемішуванням, де концентрації реагентів підтримуються однорідними в усьому об'ємі.

Для протікання першої з реакцій (2.2.5) у прямому напрямку необхідне зіткнення однієї молекули сорту  $A$  та двох молекул сорту  $X$ . Ймовірність такого процесу пропорційна добутку  $AX^2$ , де літери позначають концентрації відповідних речовин. Елементарний акт даної реакції приводить до народження однієї молекули сорту  $X$ . Тоді внесок у зміну концентрації речовини  $X$  за одиницю часу буде  $K_1AX^2$ . Врахувавши подібним чином внески трьох інших реакцій, можна записати кінетичне рівняння для концентрації речовини  $X$  у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = K_1AX^2 - K_2X^3 - K_3X + K_4B \equiv f(X). \quad (2.2.6)$$

Якщо величини  $K_1A$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  та  $K_4B$  приблизно однакові за величиною, то графік кінетичної функції  $f(x)$  (рис. 2.2.4) матиме якісно ту саму форму, що й у попередньому прикладі.

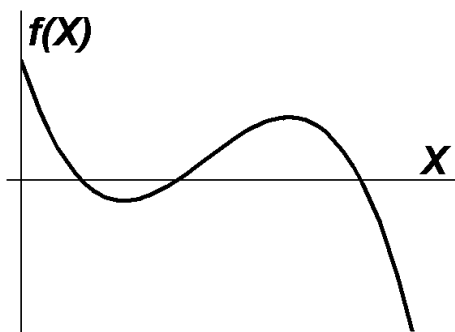


Рис. 2.2.4. Кінетична функція для концентрації речовини  $X$  у реакції Шльогля.

Ми розглядали концентрації речовин  $A$  та  $B$  як задані. Це можливо тоді, коли вони підтримуються штучно, тобто "сировина"  $A$  надходить ззовні, а "кінцевий продукт"  $B$ , навпаки, виводиться з реактора. Така система є відкритою.

В ізольованій системі з часом встановиться стан термодинамічної рівноваги, коли швидкості прямих і зворотних реакцій, описуваних кожним з рівнянь (2.2.5), однакові. Це можливо лише тоді, коли концентрації "сировини" і "кінцевого продукту" пов'язані співвідношенням  $K_1A/K_2 = K_4B/K_3$ . Тоді рівняння (2.2.6) має єдиний однорідний стаціонарний розв'язок  $X = K_1A/K_2 = K_4B/K_3$ , що прямує до нуля при малих значеннях  $B$ . Отже, він відповідає меншому стійкому стаціонарному розв'язку на рис. 2.2.4, і останній може розглядатися як термодинамічна гілка. Більший стійкий стаціонарний розв'язок, якщо він існує, породжується відкритим характером досліджуваної системи.

Нехай тепер реакція протікає в одновимірному реакторі без перемішування, так що концентрація реагентів змінюється вздовж реактора (в напрямку  $x$ ). Якщо врахувати дифузію молекул у реакторі, то замість (2.2.6) отримаємо:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (2.2.7)$$

### 2.2.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом

Нехай густина розселення деяких тварин –  $n$ . Нехай вони розмножуються статевим шляхом, тобто приріст кількості особин пропорційний до ймовірності їхніх зустрічей ( $\sim n^2$ ). Тоді з урахуванням смертності і територіального розростання популяції можна записати рівняння для густини розселення у формі

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n^2 - \gamma n + D\Delta n. \quad (2.2.8)$$

Тут враховано, що швидкість розмноження пропорційна масі їжі  $m(n)$ , яка надходить у систему за одиницю часу в розрахунку на одну особину. Очевидно,  $m(n)$  зменшується із зростанням густини розселення  $n$ . Нехай, наприклад,

$$m(n) = m_0 \exp(-n/n_0). \quad (2.2.9)$$

Вигляд кінетичної функції

$$f(n) = \alpha m_0 n^2 \exp(-n/n_0) - \gamma n \quad (2.2.10)$$

при деякому наборі параметрів подано на рис. 2.2.5. Він якісно подібний до кінетичних функцій для розглянутих раніше випадків (рис. 2.2.3 в, рис. 2.2.4). Точки  $n=0$  та  $n=n_1$  відповідають стійким стаціонарним станам, точка  $n=n_c$  – нестійкому. При малих  $n$  майже не відбуваються зустрічі тварин, популяція не зростає. При  $n=n_1$  зростання популяції обмежується вичерпанням харчових ресурсів.

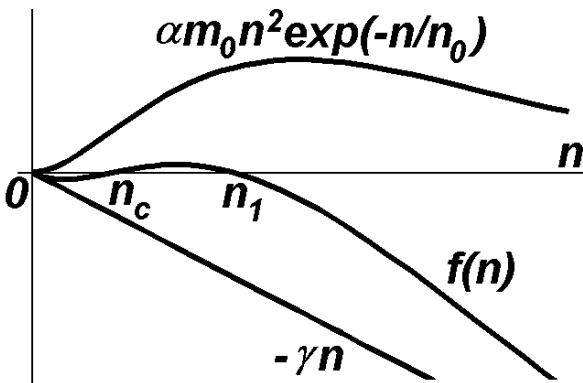


Рис. 2.2.5. Побудова кінетичної функції для популяції, що розмножується статевим шляхом в умовах обмежених харчових ресурсів.

Нерівноважність аналізованої екологічної системи зумовлена надходженням до неї харчових ресурсів. Тому розв'язок  $n=0$ , що зберігається при  $m(n)=0$ , є термодинамічною гілкою, а розв'язок  $n=n_1$  зумовлений відкритим характером системи.

Таким чином, в усіх розглянутих нами вище (п.п. 2.2.1-2.2.3) прикладах бістабільних систем кінетична функція має вигляд, аналогічний поданому на рис. 2.2.3 в. В усіх випадках маємо дві стійкі стаціонарні точки, а між ними – нестійку. Менше значення змінної в стійкому стаціонарному стані відповідає термодинамічній гілці, більше зумовлене нерівноважністю (відкритим характером) системи. Таким чином, бістабільність розглянутих систем є наслідком їхньої відкритості.

### 2.2.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу

Всі розібрані вище приклади (як і розглянута раніше  $\lambda - \omega$  модель – див. вище пп.2.1.2.1-2.1.2.2) приводять до рівнянь (у більш загальному випадку – систем рівнянь) вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + D_i \Delta u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (2.2.11)$$

– нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Назва пов'язана з тим, що при  $D_i = 0$

рівняння (2.2.11) переходять у рівняння, що описують зміну величин  $u_i$  в часі – так зване кінетичне рівняння з нелінійною кінетичною функцією  $f_i(\vec{u})$ . Навпаки, при  $f_i(\vec{u}) = 0$  рівняння (2.2.11) переходять у звичайні рівняння дифузії. В загальному випадку дифузія є нелінійною, тобто коефіцієнти дифузії залежать від змінної  $\vec{u}$ . В анізотропних середовищах замість скалярних коефіцієнтів дифузії  $D_i$  матимемо тензор  $D_{ij}$ .

Рівняння типу (2.2.11) можна розглядати як узагальнення рівняння неперервності для величини  $u$  за наявності джерел. В цьому сенсі воно аналогічне до рівняння балансу ентропії в диференціальній формі (1.2.12). Додаткове припущення полягає в тому, що потоки  $\vec{J}_i$  досліджуваних величин  $u_i$  пропорційні їхнім градієнтам,  $\vec{J}_i = -D_i \nabla u_i$ , де  $\nabla u_i$  виступають у ролі узагальнених термодинамічних сил (див. п. 1.2.3.1). Ця підстановка в найпростішому випадку, коли  $D_i$  не залежать від  $\vec{u}$ , перетворює дивергенцію потоку  $u_i$  на відповідний лапласіан. У найбільш загальному випадку нелінійної дифузії в анізотропних середовищах отримаємо:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + \nabla \left( \sum_j D_{ij}(\vec{u}) \nabla u_j \right) \quad (2.2.11 \text{ a})$$

(враховано, що потік компоненти  $u_j$  може бути зумовлений не лише градієнтом цієї компоненти, але й градієнтами інших компонент  $u_j$ ).

Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу – одна з універсальних моделей для опису автоколивних процесів. Саме такими рівняннями описуються процеси в активних середовищах найрізноманітнішої природи. Наприклад, таку форму мають рівняння, що описують динаміку брюсселятора (див. рівняння (1.3.23)) та орегонатора (див. рівняння (1.3.38)). Втім, слід відзначити, що в деяких задачах про самоорганізацію в рівняннях може фігурувати не перша, а друга похідна за часом. В цьому випадку, очевидно, слід говорити не про рівняння дифузійного типу, а про нелінійні хвильові рівняння (прикладом може бути розглянуте раніше рівняння для хвиль в активній лінії, див. п.2.1.1.3).

Для опису бістабільних середовищ досить одного рівняння вигляду (2.2.11). В усіх розглянутих прикладах бістабільних середовищ рівняння такого типу має два стійкі стаціонарні однорідні розв'язки (див. п. 2.2.1.1).

Рівняння такого вигляду вперше було запропоноване в 1937 році незалежно Р. Фішером<sup>1</sup> і А.М. Колмогоровим<sup>2</sup>, І.Г. Петровським<sup>3</sup> та М.С. Піскуновим<sup>4</sup> при розгляді задач про поширення біологічних популяцій, або так звану генетичну дифузію (див. нижче п.2.2.1.9). У 1938 році це рівняння застосували Я.Б. Зельдович<sup>5</sup> та Д.А. Франк-Каменецький<sup>6</sup> для опису поширення полум'я (коли кінетична функція має форму полінома). Відтоді його називають рівнянням Фішера – Колмогорова – Петровського – Піскунова або рівнянням Зельдовича – Франк-Каменецького.

<sup>1</sup> Р. Фішер (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890 - 1962) – великий англійський та австралійський учений, статистик, біолог-еволюціоніст, евгенік та генетик. Член Королівського товариства.

<sup>2</sup> А.М. Коломогоров (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903 - 1987) – геніальний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, Герой Соціалістичної Праці. Один з творців сучасної теорії ймовірностей. Отримав ряд визначних результатів у топології, математичній логіці, теорії складності алгоритмів. Один з творців теорії турбулентності та теорії динамічного хаосу.

<sup>3</sup> І.Г. Петровський (Іван Георгієвич Петровський, 1901 - 1973) – визначний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, ректор Московського державного університету (1951-1973). Займався, зокрема, теорією ймовірностей, теорією диференціальних рівнянь, математичною фізикою.

<sup>4</sup> М.С. Піскунов (Николай Семенович Пискунов, 1908 - 1977) – російський математик і механік.

<sup>5</sup> Я.Б. Зельдович (Яков Борисович Зельдович, 1914 - 1987) – російський фізик-теоретик та фізико-хімік, академік АН СРСР, лауреат Сталінських (1943, 1949, 1951, 1953) та Ленінської (1957) премії, тричі Герой Соціалістичної Праці. Один з творців атомної та водневої бомби (в СРСР). Найвідоміші роботи присвячені горінню, детонації, ядерній фізиці та астрофізиці.

<sup>6</sup> Д.А. Франк-Каменецький (Давид Альбертович Франк-Каменецький, 1910 - 1970) – російський фізик-теоретик, тричі лауреат Державної премії СРСР. Основні роботи присвячені теорії горіння та вибуху, хімічній кінетиці та технології, астрофізиці, фізиці плазми. Брав участь у розробці ядерної зброї.

### 2.2.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикання): якісний вигляд і швидкість

Розглянемо одновимірне нелінійне кінетичне рівняння з дифузиею для бістабільного середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.2.12)$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, тобто хвилі, що поширюється в просторі з постійною швидкістю без зміни своєї форми:  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x - V_0 t$  (так званий автомодельний розв'язок). Оскільки ні форма, ні величина швидкості такої хвилі не залежать від початкових чи граничних умов, її можна зарахувати до автохвиль. Автохвилю такого типу називають біжучим фронтом, або хвилею перемикання (чи хвилею перекидання). Стосовно горіння, коли мова йде про перехід з низькотемпературного стану у високотемпературний, говорять про хвилю запалювання. Коли, навпаки, йдеться про перехід від високотемпературного стану до низькотемпературного, говорять про хвилю гасіння.

Після підстановки автомодельного розв'язку рівняння (2.2.12) зводиться до вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + f(u) = 0. \quad (2.2.13)$$

Перш ніж розв'язувати рівняння (2.2.13), обговоримо гаданий вигляд цього розв'язку якісно. Нехай в області  $\xi \rightarrow +\infty$  реалізується стійкий стан  $u = u_3$ , а в області  $\xi \rightarrow -\infty$  – стан  $u = u_1$  (рис. 2.2.6 а). У випадку горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1)  $u = u_3$  – це стан горіння (висока температура),  $u = u_1$  – відповідно, відсутність горіння (низька температура). Тоді в перехідній області температура поступово зростатиме при зростанні  $\xi$ . Відзначимо ще, що при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  реалізуються стаціонарні однорідні стани, тому в цих областях кожен з доданків у рівнянні (2.2.13) окремо дорівнює нулю. Зокрема, в області горіння все тепло, що виділяється, витрачається на теплообмін із навколишнім середовищем. Навпаки, в перехідній області, де значення  $u$  відмінне як від  $u_1$  та  $u_3$ , так і від  $u_2$  (крім однієї єдиної точки), кінетична функція відмінна від нуля. Там, де вона додатна, тобто ближче до області горіння, тепло виділяється; там, де вона від'ємна, тобто ближче до області, де горіння немає, – навпаки, поглинається (рис. 2.2.6).

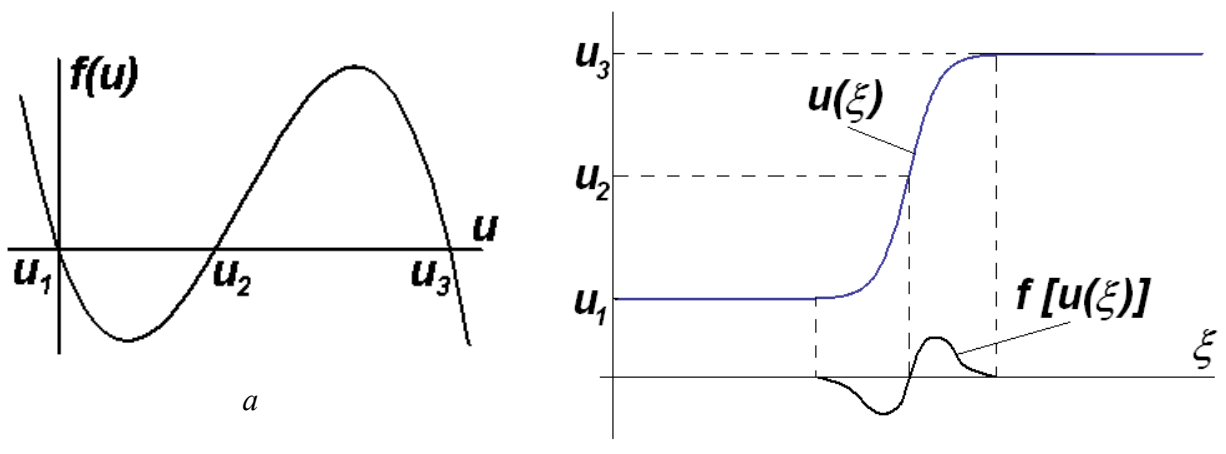


Рис. 2.2.6. До аналізу стаціонарної хвилі перемикання: а – вигляд кінетичної функції, б – гаданий профіль хвилі та виділення й поглинання тепла на фронті хвилі перемикання.

Тепер повернемося до рівняння (2.2.13). Помноживши його на  $(du/d\xi)^n$ , отримаємо:

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n + V_0 \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f[u(\xi)] \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n = 0,$$

або

$$\frac{D}{n+1} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + V_0 \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f(u) \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n = 0. \quad (2.2.14)$$

Тут використане очевидне співвідношення

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} = (n+1) \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n \frac{d^2 u}{d\xi^2}.$$

Тепер проінтегруємо рівняння (2.2.14) по  $\xi$  в нескінченних межах:

$$\frac{D}{2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0. \quad (2.2.15)$$

З урахуванням накладених вище граничних умов перший доданок у цьому рівнянні дорівнює нулю, оскільки при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  стан системи є однорідним. Тому рівняння (2.2.15) набуває вигляду

$$V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0, \quad (2.2.16)$$

і з нього можна знайти швидкість стаціонарної хвилі:

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

Хоча формула (2.2.17) не дозволяє безпосередньо розрахувати швидкість біжучого фронту, вона, тим не менше, дозволяє зробити деякі якісні висновки.

Перш за все, в обидва інтеграли (як у чисельнику, так і в знаменнику) дає внесок тільки область фронту хвилі перемикання (лише в цій області величини  $f(u)$  та  $du/d\xi$  відмінні від нуля). Таким чином, швидкість хвилі перемикання (як за величиною, так і за напрямком) повністю визначається процесами на її фронті. Можна також відзначити, що функція  $du/d\xi$  має бути такою, щоб інтеграл у чисельнику (2.2.17) перетворювався на нуль одночасно для всіх можливих значень  $n$ .

Найпростішого вигляду формула (2.2.17) набуває при  $n = 0$ :

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{d\xi} d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{u_3 - u_1}. \quad (2.2.17 \text{ а})$$

У цьому випадку вона допускає наочну інтерпретацію.

Для бістабільних середовищ завжди виконана умова  $u_3 > u_1$ , тому знак швидкості визначається знаком чисельника формули (2.2.17 а). Нагадаємо, що в моделі горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1) кінетична функція  $f(u)$  визначає кількість теплоти на одиницю довжини системи, яка виділяється (або зникає) в результаті горіння та теплообміну з навколишнім середовищем (у напрямку  $y$ ). Тоді інтеграл у чисельнику (2.2.17 а) – це повна кількість теплоти, що виділяється (зникає внаслідок теплообміну в напрямку  $y$ ) на фронті ударної хвилі. Якщо ця величина дорівнює нулеві, то потік тепла в напрямку  $x$  за межами фронту відсутній, швидкість хвилі також перетворюється на нуль, і утворюється стаціонарна



дисипативна структура (див. нижче п. 2.4.3). Якщо на фронті переважає тепловиділення, виникає потік тепла в бік низькотемпературної області, і отримуємо хвилю запалювання (область горіння зростає). В протилежному випадку виникає потік тепла від високотемпературної області, в результаті отримуємо хвилю гасіння (область горіння зменшується).

В результаті поширення хвилі перемикавання (супроводжуваної потоком тепла) температура середовища змінюється на величину  $\Delta u = u_3 - u_1$ , яку можна ототожнити з густиною тепла в потоці (з точністю до погонної теплоємності). Тоді добуток  $V_0 \Delta u$  визначає густину теплового потоку, що супроводжує хвилю перемикавання.

Запропонована інтерпретація легко переноситься на інші типи бістабільних середовищ – треба лише говорити не про кількість теплоти, а про фізичну величину, кількість якої визначається змінною  $u$ .

Інколи формулою (2.2.17) користуються при  $n = 1$ . У цьому випадку її можна записати у формі

$$V_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{du}{d\xi} d\xi}{\int_{u_1}^{u_3} \frac{du}{d\xi} du} = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi}. \quad (2.2.17 \text{ б})$$

Для інтерпретації формули (2.2.17 б) знову звернемося до рівняння (2.2.13). Його можна формально розглядати як рівняння дисипативного нелінійного осцилятора, в якому  $\xi$  відіграє роль часу,  $u$  – роль координати, «нелінійна сила»  $f(u)$  визначається потенціалом

$$\Phi(u) = \int f(u) du, \quad (2.2.18)$$

а швидкість хвилі  $V_0$  відіграє роль параметра дисипації. Вважатимемо надалі, що  $\Phi(u_3) > \Phi(u_1)$ , тобто “різниця потенціалів” між точками  $u_1$  та  $u_3$  додатна:

$$\Delta\Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du > 0. \quad (2.2.18 \text{ а})$$

Для випадку  $V_0 = 0$  неважко, знаючи вигляд “нелінійної сили”  $f(u)$  (рис. 2.2.7 а), а, отже, й “потенціалу”  $\Phi(u)$  (рис. 2.2.7 б), побудувати „фазовий портрет” системи (рис. 2.2.7 в).

Нас цікавить випадок, коли система переходить зі стану  $u_1$  до стану  $u_3$ . Це можливо лише тоді, коли тертя від’ємне, а енергія, що виділяється в результаті такого тертя при переході між точками  $u_1$  і  $u_3$ , точно дорівнює відповідній «різниці потенціалів»:

$$\int_{u_2}^{u_2} V_0 \frac{du}{d\xi} du = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du, \quad (2.2.19)$$

де враховано, що аналогом сила тертя є величина  $V_0 du/d\xi$ . Тоді з (2.2.19) можна знайти швидкість стаціонарної хвилі. В результаті приходимо до формули (2.2.17 б).

„Фазовий портрет” системи з урахуванням від’ємного тертя поданий на рис. 2.2.7 г. Біжучому фронту на ньому відповідає сепаратриса, що йде із сідла в сідло.

Дана інтерпретація носить досить формальний характер і не є цілком вдалою. Незрозуміло, наприклад, чому станам стійкої рівноваги відповідають не мінімуми, а максимуми потенціалу і, відповідно, сідлові точки на „фазовому портреті”. Тим не менше, вона часто використовується в літературі. Можливо, це зумовлено її універсальним характером – вона не пов’язана з конкретними властивостями моделі бістабільного середовища, в якому поширюється стаціонарна автохвиля, описувана нелінійним кінетичним рівнянням із дифузиею (2.2.12).

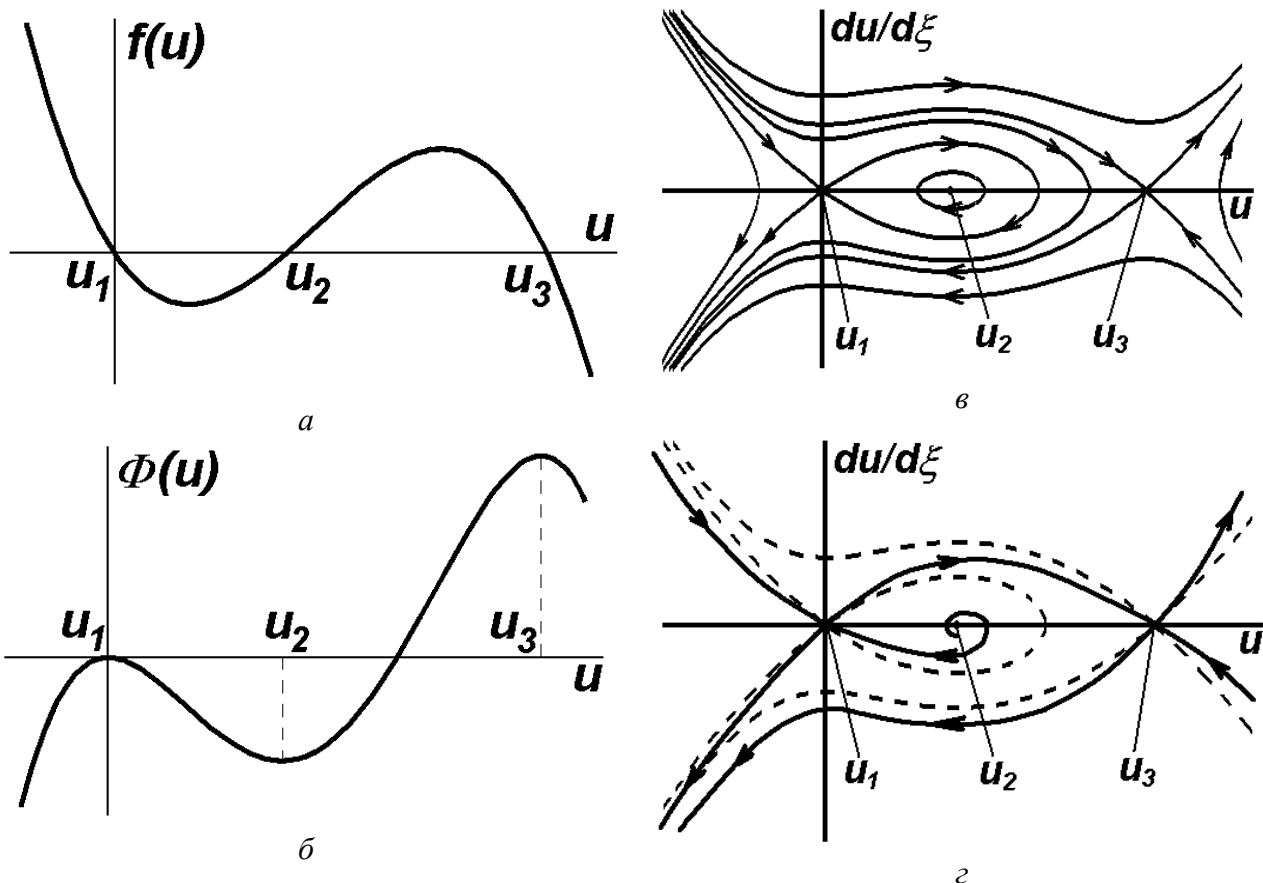


Рис. 2.2.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання: а – вигляд кінетичної функції; б – хід потенціалу; в – фазовий портрет без урахування дисипації; г – фазовий портрет з урахуванням від'ємної дисипації.

### 2.2.1.6. Вигляд хвилі перемикавання для модельної кінетичної функції

Рівняння (2.2.13) вдається проінтегрувати, якщо обрати модельну функцію  $f(u)$  у формі полінома

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u), \quad 0 < u_0 < 1 \quad (2.2.20)$$

(пор. з формулою (2.2.6)). Тоді задачу можна аналітично розв'язати до кінця.

Рівняння для стаціонарної хвилі (2.2.13) з урахуванням (2.2.19) набуває вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ а})$$

У фазових змінних ( $w = du/d\xi$ ) це рівняння записується у формі

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ б})$$

Вільний доданок у рівнянні (2.2.13 б) є поліномом третього ступеню. Тому його розв'язок можна також шукати у формі полінома. Порівняння першого доданку з останнім показує, що це має бути поліном другого ступеню.

Шукаємо розв'язок (2.2.13 б) у вигляді:

$$w(u) = \sigma u(1 - u). \quad (2.2.21)$$

Після підстановки (2.2.21) до (2.2.13 б) отримаємо:

$$D\sigma^2 u(1 - u)(1 - 2u) + \sigma V_0 u(1 - u) + u(u - u_0)(1 - u) = 0, \quad (2.2.13 \text{ в})$$

або

$$u(-2D\sigma^2 + 1) + (D\sigma^2 + \sigma V_0 - u_0) = 0. \quad (2.2.13 \text{ г})$$

Це – поліном першого ступеню. Для того, щоб він дорівнював нулеві, повинні дорів-

новати нулеві коефіцієнти при  $(u)^1$  та  $(u)^0$ . Отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь, розв'язавши які, легко записати вирази для введених вище параметрів  $\sigma$  та  $V_0$ :

$$\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{2D}}; \quad (2.2.22)$$

$$V_0 = \frac{u_0 - \frac{1}{2}}{\sigma} = \mp \frac{1 - 2u_0}{2} \sqrt{2D} = \mp \sqrt{\frac{D}{2}} (1 - 2u_0). \quad (2.2.22 \text{ а})$$

Формула (2.2.22 а) дає явний вигляд швидкості хвилі перекидання. Як бачимо, названа швидкість зростає зі збільшенням коефіцієнту дифузії. Зміна знаку швидкості відбувається при  $u_0 = 1/2$ . Легко переконатися, що це значення  $u$  якраз відповідає зміні знаку різниці потенціалів (2.2.18 а) для кінетичної функції вигляду (2.2.20), тобто формула (2.2.22 а) узгоджується з раніше отриманою загальною формулою (2.2.17 б).

Тепер співвідношення (2.2.21), яке з урахуванням явного вигляду функції  $w(u)$  має вигляд

$$\frac{du}{d\xi} = \sigma u(1-u), \quad (2.2.21 \text{ а})$$

можна проінтегрувати. Маємо:

$$\int \left( \frac{du}{u} + \frac{du}{1-u} \right) = \int \sigma d\xi,$$

звідки

$$\ln \left| \frac{u}{1-u} \right| = \sigma (\xi - \xi_0),$$

де  $\xi_0$  – стала інтегрування. Врахувавши, що за змістом задачі  $0 < u < 1$ , остаточно отримаємо:

$$u(\xi) = \frac{\exp[\sigma(\xi - \xi_0)]}{1 + \exp[\sigma(\xi - \xi_0)]} = \frac{1}{1 + \exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \frac{\sigma(\xi - \xi_0)}{2} \right]. \quad (2.2.23)$$

Якщо у формулі (2.2.21) обрати верхній знак, то розв'язок (2.2.23) відповідає граничним умовам

$$u(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad u(\xi \rightarrow -\infty) = 0. \quad (2.2.24)$$

Графік розв'язку (2.2.23), який описує форму хвилі перекидання (біжучого фронту), поданий на рис. 2.2.8. Він узгоджується з побудованою раніше фазовою траєкторією цього процесу – сепаратрисою, що йде із сідла в сідло (рис. 2.8.7 г).

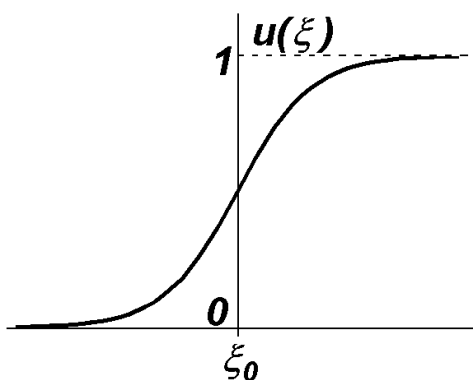


Рис. 2.2.8. Профіль хвилі перекидання.

Ширина фронту хвилі перекидання може бути оцінена з (2.2.23) як

$$\Delta\xi \sim \frac{1}{\sigma} = \sqrt{2D}, \quad (2.2.25)$$

тобто чим сильніша дифузія, тим більш розмитим буде фронт хвилі перекидання. Характерний час переходу з одного стійкого стаціонарного стану в інший у даній точці простору легко визначити із співвідношення

$$\Delta t = \frac{\Delta\xi}{V_0} = \left(u_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1}. \quad (2.2.26)$$

У даній моделі він не залежить від коефіцієнта дифузії, оскільки більш розмитому фронту відповідає більша швидкість хвилі перекидання.

### 2.2.1.7. Еволюція початкового збурення в бістабільному середовищі

Тепер, знаючи розв'язок рівняння (2.2.12) у вигляді стаціонарної хвилі, поставимо питання про те, як виглядатиме його розв'язок для довільних початкових умов.

Будемо вважати, що часи релаксації  $\tau_{1,3}$  (2.2.3) до обох стійких стаціонарних станів  $u_1, u_3$  значно менші від характерного часу проходження хвилі перекидання  $\Delta t$  (2.2.26). Тоді за довільних початкових умов система спершу в кожній точці простору за малі часи порядку  $\tau_{1,3}$  буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови.

Якщо в початковий момент часу всюди  $u(x) < u_2$ , система за час порядку  $\tau_1$  еволюціонує до однорідного стаціонарного стану  $u_1$ . Якщо в початковий момент часу всюди  $u(x) > u_2$ , система за час порядку  $\tau_3$  еволюціонує до однорідного стаціонарного стану  $u_3$ .

Якщо в початковий момент часу в середовищі співіснують області з  $u(x) < u_2$  та  $u(x) > u_2$ , то воно спершу в кожній точці простору за малі часи порядку  $\tau_{1,3}$  буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови (рис. 2.2.9). Після цього в середовищі побіжить хвиля перекидання, напрямком якої визначається "різницею потенціалів"  $\Delta\Phi$  (2.2.18 а), і в середовищі врешті рещт встановиться той зі стійких стаціонарних станів ( $u_1$  або  $u_3$ ), якому відповідає більше значення потенціалу  $\Phi(u)$ . Зокрема, дві зустрічні хвилі перекидання загасять одна одну.

Якщо  $\Delta\Phi = 0$ , то, як випливає з (2.2.17),  $V_0 = 0$ , тобто в середовищі можливе співіснування областей  $u = u_1$  і  $u = u_3$ . Це – найпростіший випадок формування стаціонарної дисипативної структури.

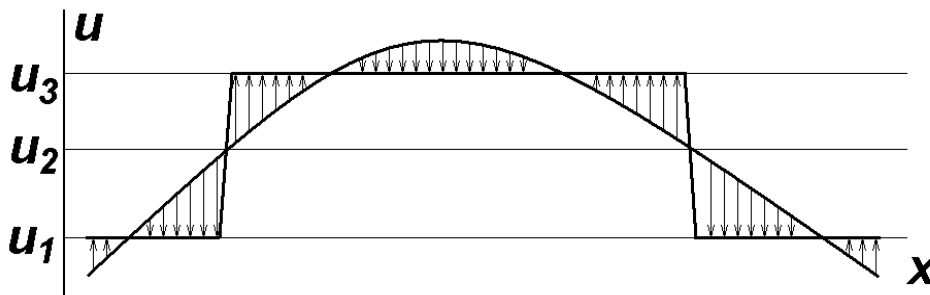


Рис. 2.2.9. Швидка релаксація бістабільного середовища до стаціонарних однорідних станів.

### 2.2.1.8. Поширення хвиль перекидання в двовимірних середовищах

Досі розглядалися одновимірні моделі бістабільних середовищ. У двовимірному середовищі побудовані вище розв'язки описують плоскі хвилі. Цікаво з'ясувати, як будуть поширюватися хвилі перекидання з криволінійним фронтом.

Щоб відповісти на це питання, перепишемо рівняння (2.2.12) у полярній системі ко-

ординат, вважаючи хвилю аксіально-симетричною:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.2.27)$$

Рівняння (2.2.27) мало зміниться, якщо в знаменнику другого доданку в правій частині замінити координату точки спостереження  $r$  на  $R(t)$  – радіус, що описує положення фронту в момент часу  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{R} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.2.28)$$

Справді, похідна  $\partial u / \partial r$  відмінна від нуля лише в шарі  $r \approx R$  завтовшки  $\Delta \xi$  (2.2.25), який можна вважати вузьким ( $\Delta \xi \ll R$ ). Тому в цьому шарі зроблена заміна є правомірною, а в інших точках простору похідна  $\partial u / \partial r$  обертається на нуль, і змінений доданок не дає внеску до рівняння.

Підставимо до (2.2.28) розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, швидкість якої тепер залежить від радіусу кривини фронту:

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - V(R)t.$$

Отримаємо:

$$-V(R)u' = f(u) + \frac{D}{R} u' + Du'', \quad (2.2.29)$$

або

$$Du'' + \left[ V(R) + \frac{D}{R} \right] u' + f(u) = 0. \quad (2.2.29 \text{ a})$$

Рівняння (2.2.29 a) за формою збігається з одновимірним рівнянням (2.2.13), якщо замінити  $V(R) + D/R$  на  $V_0$ . Отже, залежність швидкості фронту від радіусу його кривини має вигляд

$$V(R) = V_0 - \frac{D}{R}, \quad (2.2.30)$$

тобто опуклий фронт має меншу швидкість.

При  $R < R_{cr} = D/V_0$  напрямок поширення хвилі змінюється на протилежний. Отже, якщо область  $u = u_3$  має розмір  $R < R_{cr}$ , вона з часом зникне. Лише при  $R > R_{cr}$  вона почне розростатися.

Цей ефект можна інтерпретувати на прикладі хвилі запалювання (гасіння). Обговоримо два варіанти такої інтерпретації.

Як уже вказувалося, напрямок і величина швидкості хвилі запалювання визначаються балансом між виділенням та поглинанням тепла на її фронті (див. вище п. 2.2.1.5). Якщо область горіння обмежена колом, треба розглядати баланс процесів у деякому його секторі. В порівнянні з випадком прямолінійної межі площа області тепловиділення, розташованої з боку вогнища горіння, зменшується, а площа області поглинання тепла, розташована із зовнішнього боку, зростає. В результаті баланс зсувається в бік зменшення сумарного тепловиділення, що й спричиняє зменшення швидкості хвилі запалювання. Зрозуміло, що цей ефект ставатиме помітнішим зі зменшенням  $R$ . Однак наведений вище розрахунок справедливий лише у випадку  $R \gg \Delta \xi$ , де, як і раніше,  $\Delta \xi$  – ширина фронту хвилі. Таким чином, у даному наближенні обговорюваний ефект буде малопомітним.

Альтернативне пояснення полягає в тому, що дифузія в обговорюваній моделі відбувається лише в радіальному напрямку. Це означає, що довжина „фронту” дифузії, тобто довжина лінії сталої температури, буде зростати при віддаленні від межі області горіння. Це,

очевидно, приведе до зростання швидкості винесення тепла з межі області горіння<sup>7</sup>. Вплив даного ефекту еквівалентний зменшенню тепловиділення на фронті хвилі перемикавання, тобто він має привести до зменшення швидкості цієї хвилі. Це пояснення добре узгоджується з тим, що поправка до швидкості, обумовлена кривиною фронту, пропорційна коефіцієнту дифузії (див. формулу (2.2.30)).

Якщо на плоскому фронті хвилі перекидання виникне опуклість, вона буде загальмовуватись, і, навпаки, западина на фронті буде прискорюватися (рис. 2.2.10). В результаті форма фронту автоматично підтримуватиметься плоскою.

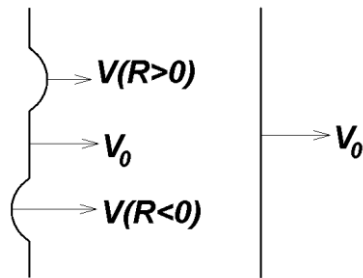


Рис. 2.2.10. Еволюція збурень плоского фронту перекидання в бістабільному середовищі.

### 2.2.1.9. Хвиля заселення

Досі для бістабільних середовищ розглядалися лише хвилі переходу між стійкими стаціонарними однорідними станами  $u_1$  та  $u_3$ .

Проаналізуємо тепер хвилю, яка відповідає переходу з нестійкого стану рівноваги  $u_2$  в стійкий ( $u_1$  або  $u_3$ ). Для більшості систем фізичної природи така хвиля неможлива, оскільки нестійкий стан  $u = u_2$  буде руйнуватися флуктуаціями. Але існує ситуація, коли флуктуації неможливі в принципі – це поширення біологічної популяції.

Розглянемо поширення популяції, яка розмножується діленням. Тоді швидкість зростання популяції (з урахуванням смертності) буде пропорційна першому ступеню концентрації особин  $n$  ( $n \geq 0$ ), і відповідне нелінійне кінетичне рівняння з дифузією можна подати у формі (пор. з рівнянням (2.2.8), п. 2.2.1):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n + D\Delta n, \quad (2.2.31)$$

де  $m(n)$  – обсяг продовольства, що надходить у систему за одиницю часу на одну особину. В найпростішому випадку можна покласти

$$m(n) = \begin{cases} m_0 - \beta n, & n < n_0; \\ 0, & n \geq n_0, \end{cases} \quad n_0 = \frac{m_0}{\beta}. \quad (2.2.32)$$

Графік кінетичної функції  $f(n) = nm(n)$  та відповідного потенціалу (див. формулу (2.2.14)) поданий на рис. 2.2.11 а-б, а відповідний фазовий портрет – на рис. 2.2.11 в. Стаціонарній хвилі відповідає сепаратриса, що йде з нестійкого вузла в сідло.

Рівняння (2.2.31) з урахуванням (2.2.32) має два стаціонарні однорідні розв'язки –  $n = 0$  та  $n = n_0$ . Формально стан  $n = 0$  – нестійкий, але, оскільки флуктуації неможливі, він буде підтримуватися, доки не з'явиться зародок популяції.

Хвиля переходу зі стану до стану відома в літературі як хвиля заселення.

Систему (2.2.31)-(2.2.32) можна проінтегрувати за аналогією з тим, як це було зроблено в п. 2.2.1.6. В результаті вдається показати, що швидкість хвилі заселення визначається формулою

<sup>7</sup> Справді, в двовимірному випадку неоднорідність у формі кола буде, очевидно, розсмоктуватися швидше, ніж така сама неоднорідність у вигляді нескінченної смуги.

$$V_0 = \frac{5}{\sqrt{6}} \sqrt{m_0 D} \quad (2.2.33)$$

і не залежить від параметра  $\beta$ .

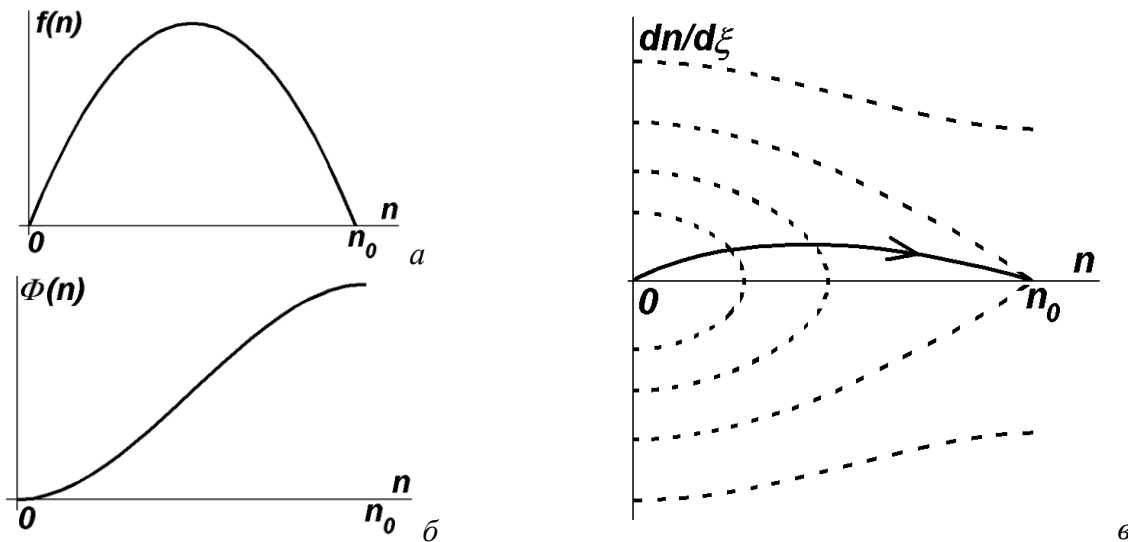


Рис. 2.2.11. До аналізу хвилі заселення: а – кінетична функція, б – хід потенціалу, в – фазовий портрет (штрихові лінії відповідають умові  $V_0 = 0$ ).

#### Контрольні питання до підрозділу 2.2.1

1. Чи можна впливати на кінетику відкритих (нерівноважних) систем шляхом зміни зовнішніх параметрів? Відповідь дати на прикладі горіння в комірці та моделі Шльогля.
2. Чому з трьох стаціонарних станів бістабільного середовища один виявляється нестійким?
3. Якими процесами визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в середовищі, де протікає хімічна реакція, описувана моделлю Шльогля?
4. Якими процесами визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в середовищі, де відбувається експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом (з урахуванням їхньої смертності)?
5. Якісно намалюйте «фазовий портрет» для хвилі гасіння.
6. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих фронтів.
7. Від чого залежить ширина фронту хвилі запалювання?
8. Якісно охарактеризуйте еволюцію довільного початкового збурення в бістабільному середовищі.
9. Чи залежать біжучі фронти від початкових і граничних умов? Як саме?
10. Чому фронт лісової пожежі звичайно буває плоским?
11. Намалюйте кінетичну функцію для середовища, в якому можливі хвилі заселення.
12. Порівняйте між собою біжучий фронт (хвилю запалювання) та хвилю заселення в бістабільному середовищі.
13. Знак швидкості біжучого фронту може змінюватися в залежності від параметрів моделі. Чи можливо таке для хвилі заселення?
14. Як швидкість хвилі заселення залежить від кривини її фронту?

#### Задачі до підрозділу 2.2.1

2.2.1.1. Побудуйте фазовий портрет для хвилі гасіння.

2.2.1.2. Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u)(u-u_0),$$

де  $0 < u_0 < 1$  і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціона-

рним хвилям системи.

2.2.1.3. Показати, що рівняння для хвилі збудження в нервовому волокні

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u)(u-u_0)$$

( $0 < u_0 < 1$  і всі параметри позитивні) задовольняє автомодельний розв'язок у вигляді хвилі збудження  $du/d\xi = \sigma u(1-u)$ , де  $\xi = z - Vt$ . Знайти швидкість поширення збудження по волокну

$V$ . Отримати функцію  $u(\xi)$  і зобразити профіль хвилі.

2.2.1.4. Хвиля перекидання в одновимірному середовищі описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

де

$$f(u) = \begin{cases} -\gamma(T - T_0), & T < T_c; \\ -\gamma(T - T_1), & T > T_c, \end{cases}$$

причому  $T_0 < T_c < T_1$ ,  $\gamma > 0$ .

а) За яких умов у середовищі побіжить хвиля запалювання? Побудуйте її фазовий портрет.

б) Знайдіть залежність  $T(\xi)$ , де  $\xi = z - Vt$ , а також швидкість  $V$  хвилі перекидання та ширину фронту цієї хвилі.

2.2.1.5. За якої заміни змінної кінетична функція рівняння

$$\frac{\partial X}{\partial t} = K_1 A X^2 - K_2 X^3 - K_3 X + K_4 B + D \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

набуває вигляду

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u)?$$

2.2.1.6. Дослідіть, чи є розв'язок вигляду

$$w(u) = \sigma u(1 - u)$$

єдиним для рівняння

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0.$$

Якщо існують інші розв'язки, знайдіть їх та з'ясуйте їхній фізичний зміст.

2.2.1.7. На осі  $u_0$  виділіть області стійкості кожного з однорідних стаціонарних розв'язків рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(u - u_0)(1 - u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

щодо гармонічних у просторі збурень із хвильовим числом  $k$ . Які біфуркації можливі в системі при зміні значення  $u_0$ ?

2.2.1.8. Переконайтеся шляхом безпосередньої підстановки розв'язку  $u(\xi)$ , що для стаціонарної хвилі, описуваної рівнянням

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0,$$

інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi \quad \text{та} \quad \int_0^1 f(u) du,$$

які визначають знак швидкості цієї хвилі, справді перетворюються в нуль при однакових



значеннях параметра  $u_0$ .

2.2.1.9. На плоскому фронті хвилі перекидання утворилося викривлення з радіусом кривини  $R$ . Оцініть час його релаксації.

2.2.1.10. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси. Розрахувати швидкість та форму профілю хвилі переходу з одного стаціонарного стану в інший (хвилі заселення).

2.2.1.11. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи.

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.12. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується (з урахуванням природної смертності) модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 - \alpha n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. До якого типу вони належать?

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.13\*. Для двовимірного бістабільного середовища побудуйте числовий розв'язок, що відповідає поширенню хвилі перекидання від колового джерела. Побудуйте залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняйте її з результатом аналітичного розрахунку.

### 2.2.2. Біжучі імпульси

Перейдемо тепер до розгляду автохвиль у середовищах із відновленням.

Середовища з відновленням (інакше їх називають збудливими середовищами) схожі на бістабільні, але в них один із стаціонарних станів є метастабільним, так що через деякий скінчений проміжок часу після збудження середовища спонтанно переходять в основний стан. Автохвилі в таких середовищах можна уявити собі як послідовність двох хвиль перекидання. Перша з них переводить систему з основного стану в метастабільний, а друга – знову в основний. Такі автохвилі дістали назву біжучих імпульсів.

Відзначимо, що в початковий момент часу (на передньому фронті біжучого імпульсу)

метастабільний стан є більш "енергетично вигідним". Тому перехід у цей стан можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості. Однак із часом метастабільний стан змінює свій характер, так що тепер більш "енергетично вигідним" стає основний стан. В результаті знову розвивається нестійкість, і система повертається до основного стану, після чого цей стан поступово відновлює свій первісний характер.

Прикладами середовищ із відновленням можуть служити, наприклад, ліс, що знову виростає після лісової пожежі, нервово волокно, що може збуджуватись зовнішнім подразником, а потім спонтанно переходити в стан спокою, та інші.

Користуючись уявленнями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне середовище з відновленням можна уявити собі як ланцюжок мультивібраторів у режимі очікування. Імпульс запуску, що надходить на вхід крайнього в ланцюжку мультивібратора, переводить його з основного стану в збуджений (метастабільний). При цьому на його виході одночасно формується імпульс запуску, що надходить на вхід наступного мультивібратора. В результаті вздовж ланцюжка біжить хвиля перекидання. Через деякий час мультивібратори починають спонтанно переходити в основний стан. В результаті вздовж ланцюжка біжить нова хвиля перекидання. Після завершення відповідних перехідних процесів ланцюжок може реагувати на новий імпульс запуску.

Історично перше дослідження біжучих імпульсів у середовищі з відновленням було виконане, як уже згадувалося (п. 2.1.1.2), А. Ходжкіном та Е. Хакслі – вони експериментально дослідили поширення імпульсу збудження в гігантському аксоні (нервовому волокні) кальмара, запропонувавши математичну модель цього процесу (модель Ходжкіна – Хакслі)<sup>8</sup>.

Ми почнемо наш розгляд з найпростішого типу автохвиль у середовищах із відновленням, а саме одиночних біжучих імпульсів, а в наступному підрозділі розглянемо періодичні послідовності таких імпульсів.

### 2.2.2.1. Рівняння, що описують середовища з відновленням

Середовища з відновленням описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузиею:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v. \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Для стаціонарного однорідного випадку система (2.2.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0; \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ а})$$

Нас цікавитиме випадок, коли система (2.2.34 а) має єдиний стійкий розв'язок  $u = u_0, v = v_0$ .

Аналітичне дослідження системи (2.2.34) можливе тоді, коли характерні часи зміни величин  $u$  і  $v$  істотно відмінні. Нехай, наприклад, величина  $u$  змінюється швидко, а величина  $v$  – повільно. Тоді для останньої дифузиею можна знехтувати, вважаючи, що помітні градієнти цієї величини не виникають. У результаті система (2.2.34) набирає вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu f_2(u, v), \quad \mu \ll 1. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ б})$$

Систему рівнянь (2.2.34 б) можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого і повільного руху.

<sup>8</sup> Hodgkin, A., and Huxley, A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**, 500–544. (1952).

### 2.2.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (модель Фітц-Х'ю – Нагумо)

Конкретизуємо модель середовища з відновленням. Розглянемо знову середовище, в якому можливий процес горіння (див. п. 2.2.1.1). Нехай тепер горіння супроводжується виділенням інгібітору. Інгібітор – це речовина, що пригнічує процес горіння (зокрема, зменшує тепловиділення при горінні). Якщо інгібітор, який виділяється, буде накопичуватися, то через деякий час горіння стане неможливим. Щоб забезпечити відновлення середовища, вважаємо, що за відсутності горіння інгібітор з часом може розпадатись (або вивітрюватися), так що його рівноважна концентрація, яка встановлюється в результаті балансу між виділенням і розпадом, є монотонно зростаючою функцією температури.

Виділення інгібітору при горінні робить метастабільним стаціонарний стан горіння, який у моделі без інгібітору був стійким. Справді, поступове накопичення інгібітору при горінні з часом робить горіння неможливим, тобто бістабільність зникає, і система спонтанно переходить у стан відсутності горіння. Але через деякий час після цього інгібітор розпадається, і система знову набуває властивості бістабільності.

Поведінка середовища, де горіння супроводжується виділенням такого інгібітору, описується системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34). Апроксимуючи кінетичну функцію для температури кубічним поліномом, як це було зроблено вище (п. 2.2.1.6), і вважаючи, що рівноважна концентрація інгібітору прямо пропорційна температурі, відрахованій від температури навколишнього середовища (вона відповідає відсутності горіння і, відповідно, нульовій концентрації інгібітору), ці рівняння можна подати у формі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (2.2.35)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де  $n$  – концентрація інгібітору, а параметр  $T_0$  задовольняє умові  $0 < T_0 < 1/2$  (за виконання цієї умови при  $n = 0$  "енергетично вигідним" є поширення хвилі запалювання).

Рівняння (2.2.35) відповідають широко відомій у літературі моделі Фітц-Х'ю – Нагумо<sup>9</sup>, запропонованій для опису поширення імпульсів збудження в нервових волокнах. З математичної точки зору вона є спрощеним варіантом згаданої вище моделі Ходжкіна – Хакслі.

### 2.2.2.3. Біжучий імпульс (якісний розгляд)

Розглянемо тепер якісно біжучий імпульс у середовищі, описуваному рівняннями (2.2.35), де горіння супроводжується виділенням інгібітору.

Нехай при  $n = 0$  „різниця потенціалів”

$$\Delta\Phi \equiv \int_{T_1}^{T_3} f_1(T, n) dT, \quad f_1(T, n) = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n, \quad (2.2.36)$$

між станами  $T = 0$  і  $T = 1$  додатна,  $\Delta\Phi > 0$ , так що середовище може перейти зі стану  $T = 0$  у стан  $T = 1$ . Тоді, якщо на межі активного середовища є область горіння, від неї побіжить хвиля запалювання. Іншими словами, при  $n = 0$  на фронті хвилі перекидання виділяється теплота, в результаті чого область горіння розширюється. Але за фронтом хвилі запалювання почнеться виділення інгібітору. Зростання концентрації інгібітору спричинить „опускання” графіка кінетичної функції  $f_1(T, n) = f_1(T, n = 0) - \beta n$  (рис. 2.2.12 а). Коли концентрація інгібітору перевищить деяке порогове значення, знак „різниць потенціалів” зміниться, в результаті чого стан горіння перестане бути „енергетично вигідним”, і за хвилиною запалювання по-

<sup>9</sup> Див.: FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve. // Biological Engineering. Ed. by H.P.Schwan. N.Y. Mc.Graw-Hill, 1965. Pp.1-85. Р. Фітц-Х'ю (Richard FitzHugh, 1922 - 2007) – американський біофізик. Й. Нагумо (Jin-Ichi Nagumo, 1926-1999) – японський фізик і електроінженер, професор Токійського університету. Модель Фітц-Х'ю – Нагумо запропонована першим з авторів для опису біологічної системи (1961), а другим – для електронної схеми (1962).

біжить хвиля гасіння. Це означає, що тепловиділення на фронті зміниться поглинанням тепла (за рахунок теплопередачі в напрямку, перпендикулярному до напрямку хвилі перекидання). Таким чином, на певній віддалі від біжучого фронту запалювання горіння припиниться, і сформується біжучий фронт гасіння.

Легко зрозуміти, що швидкість хвилі гасіння  $v_e$  в усталеному режимі має дорівнювати швидкості хвилі запалювання  $v_i$ <sup>10</sup>. Нехай, наприклад,  $v_e < v_i$ . Тоді довжина імпульсу горіння буде збільшуватися. В результаті на його задньому фронті зростатиме концентрація інгібітору, збільшуватиметься „негативна різниця потенціалів” і, відповідно до формули (2.2.17),  $v_e$  зростатиме. Якщо ж  $v_e > v_i$ , імпульс горіння буде вкорочуватися, що спричинить зменшення швидкості його заднього фронту.

Як видно з рис. 2.2.12 а, в моделі Фітц-Х'ю – Нагумо зростання концентрації інгібітору приводить до зменшення як температури горіння, так і температури, що відповідає стаціонарному стану відсутності горіння. Тому температура в кінці імпульсу горіння буде дещо меншою, ніж на його початку, а температура за заднім фронтом імпульсу горіння – нижчою, ніж перед переднім.

Крім того, за заднім фронтом горіння буде висока концентрація інгібітору, який розкладається протягом деякого часу релаксації (в біофізиці його називають часом рефрактерності).

В результаті формується так званий біжучий імпульс, профіль якого (в нерухомій точці спостереження) якісно зображено на рис. 2.2.12 б. По суті, він являє собою пару хвиль перекидання, що йдуть одна за одною.

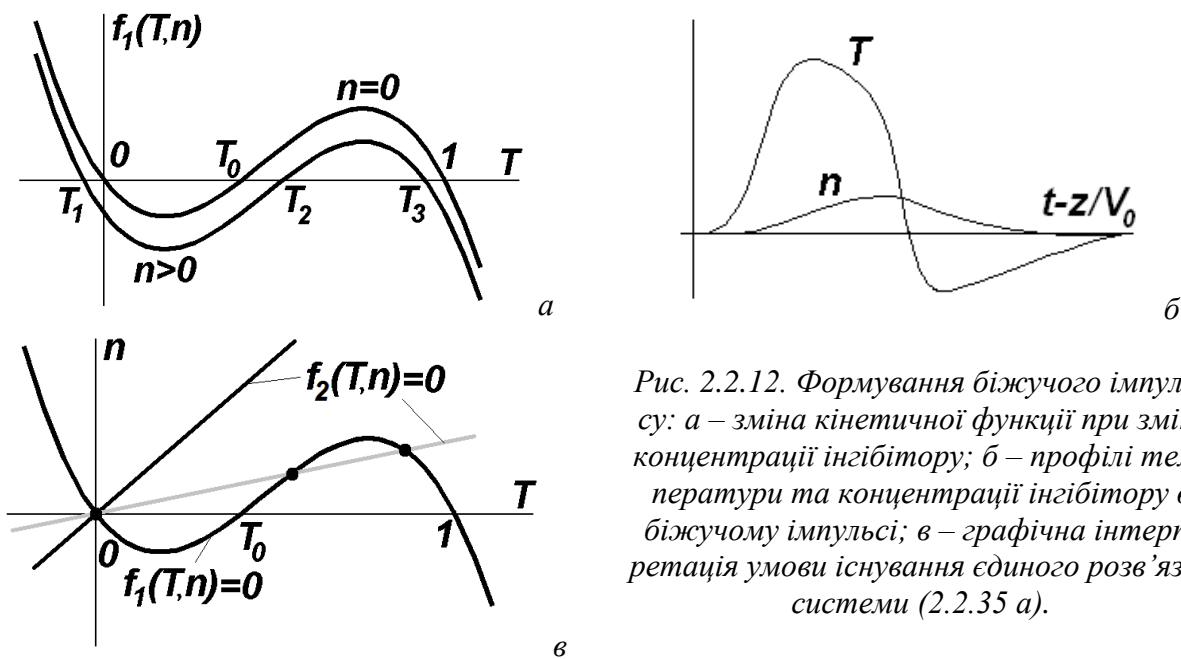


Рис. 2.2.12. Формування біжучого імпульсу: а – зміна кінетичної функції при зміні концентрації інгібітору; б – профілі температури та концентрації інгібітору в біжучому імпульсі; в – графічна інтерпретація умови існування єдиного розв’язку системи (2.2.35 а).

#### 2.2.2.4. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використані наближення

Перш за все з’ясуємо, чи має середовище, описуване рівняннями (2.2.35), єдиний стаціонарний однорідний стан. Система рівнянь для параметрів однорідного стаціонарного стану (2.2.34 а) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n = 0; \\ n - \gamma T = 0. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ а})$$

Вона зводиться до рівняння

<sup>10</sup> Індокси походять від англійських слів ignition (запалювання) та extinction (гасіння).

$$\alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta\gamma T = 0, \quad (2.2.36)$$

яке має єдиний дійсний корінь  $T = 0$  (і, відповідно,  $n = 0$ ) за виконання умови

$$(1-T_0)^2 < 4\beta\gamma/\alpha \quad (2.2.37)$$

(див. рис. 2.2.12 в; нахил світлої лінії відповідає існуванню трьох коренів, нахил темної лінії, що задовольняє умову (2.2.37) – існуванню лише одного кореня).

Систему (2.2.35) вдається розв'язати аналітично в тому випадку, якщо дифузією інгібітору можна знехтувати, а характерний час зміни концентрації інгібітору (за порядком величини він визначається параметром  $\tau$ ) значно перевищує характерний час зміни температури  $\Delta t$  (2.2.26). В цьому випадку можна вважати, що – просторова зміна концентрації інгібітору є настільки плавною, що його дифузією можна знехтувати;

– в областях фронтів імпульсу горіння концентрація інгібітору залишається незмінною, а в усіх інших областях просторова і часова зміна температури є настільки плавною, що похідними в першому рівнянні системи (2.2.35) можна знехтувати.

З урахуванням першого з висловлених припущень після переходу до автотомельної змінної  $\xi = z - V_0 t$  система (2.2.35) набуває вигляду

$$\begin{cases} \chi \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V_0 \frac{dT}{d\xi} + \alpha T(T-T_0)(1-T) - \beta n = 0; \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ б})$$

Фронти біжучого імпульсу описуються першим рівнянням системи (2.2.35 б) при  $n = \text{const}$ . Проміжки між фронтами, де просторова та часова зміна температури є повільною, описуються редукованою системою (2.2.35 б):

$$\begin{cases} \beta n = \alpha T(T-T_0)(1-T); \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ в})$$

Зазначимо, що описаний вище підхід відповідає відомому методу розв'язання диференціальних рівнянь чи систем таких рівнянь методом виділення ділянок швидкого та повільного руху. На ділянках швидкого руху старші похідні в рівнянні суттєві, на ділянках же повільного руху ними можна знехтувати (пор. системи (2.2.35 б) та (2.2.35 в)).

Розв'язок першого рівняння системи (2.2.35 б) при  $n = 0$  нам уже відомий – це хвиля перекидання вигляду (2.2.23),

$$T(\xi) = \frac{\exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}{1 + \exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2\chi}} \quad (2.2.38)$$

( $\xi_0$  – константа інтегрування), що рухається зі швидкістю (див. (2.2.22 а))

$$V_0 = \sqrt{\frac{\alpha\chi}{2}} (1 - 2T_0). \quad (2.2.39)$$

Тепер, знаючи ширину фронту хвилі запалювання  $1/\sigma$  та швидкість цієї хвилі  $V_0$ , можна конкретизувати умову чинності даного розрахунку:

$$\tau \gg \Delta t \equiv \frac{1}{\sigma V_0} = \frac{1}{\alpha(1/2 - T_0)} \quad (2.2.40)$$

(характерний час зміни концентрації інгібітору  $\tau$  значно більший від тривалості фронту біжучого імпульсу  $\Delta t$ ).

#### 2.2.2.5. Імпульс горіння

Перейдемо тепер до аналізу імпульсу горіння. Лінеаризуємо праву частину першого

рівняння системи (2.2.35 в), вважаючи, що  $T = 1 - \delta T$ ,  $0 < \delta T \ll 1$  (ця умова може бути забезпечена малим значенням параметра  $\beta$ ):

$$\beta n \approx \alpha(1 - T_0)\delta T = \alpha(1 - T_0)(1 - T), \quad (2.2.41)$$

звідки

$$T = 1 - \frac{\beta n}{\alpha(1 - T_0)}. \quad (2.2.41 \text{ а})$$

Тоді друге рівняння системи (2.2.35 в) набуває вигляду:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n - n_\infty}{\theta_1 V_0}, \quad (2.2.42)$$

де використано позначення

$$n_\infty = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1 - T_0)}}, \quad \theta_1 = \frac{\tau}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1 - T_0)}}. \quad (2.2.43)$$

Інтегруючи рівняння (2.2.42) з граничною умовою  $n(\xi = 0) = 0$ , де точка  $\xi = 0$  відповідає передньому фронту імпульсу горіння, отримуємо:

$$n(\xi) = n_\infty [1 - \exp(\xi/\theta_1 V_0)], \quad \xi < 0. \quad (2.2.44)$$

Для визначення тривалості імпульсу горіння слід використати умову рівності швидкостей його переднього та заднього фронтів. Це, в свою чергу, означає, що в кінці імпульсу горіння „різниця потенціалів” (2.2.36) між точкою горіння і точкою відсутності горіння повинна бути такою самою за величиною і протилежною за знаком щодо „різниці потенціалів” між цими точками перед початком імпульсу горіння (рис. 2.2.13). Додаткове припущення, яке неважко підтвердити безпосереднім розрахунком, полягає в тому, що залежність  $T(\xi)$  на передньому та задньому фронтах імпульсу горіння однакова (з точністю до константи).

Нехай  $f_1(T)$  – кінетична функція першого рівняння системи (2.2.35), що відповідає відсутності інгібітору,  $n = 0$ , а  $f_{2,3}(T)$  – кінетичні функції, що відповідають ненульовим концентраціям інгібітору і задовольняють умовам

$$\int_{T_c - \Delta T}^{T_c + \Delta T} f_2(T) dT = 0, \quad \int_{T_1}^{T_3} f_3(T) dT = - \int_0^1 f_1(T) dT$$

(див. рис. 2.2.13). Очевидно, для отримання кривої  $f_3(T)$  криву  $f_1(T)$  необхідно опустити на величину  $2\Delta f$ , де  $\Delta f$  – величина на яку треба опустити криву  $f_1(T)$ , щоб отримати криву  $f_2(T)$ .

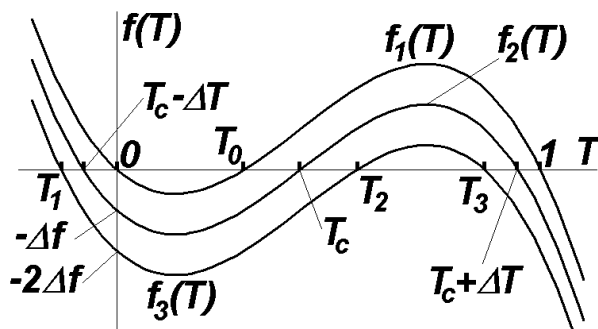


Рис. 2.2.13. До визначення тривалості імпульсу горіння

Крива  $f_2(T)$  є непарною функцією щодо аргументу, який відраховується від її середньої стаціонарної точки  $T_c$ :

$$f_2(T) = -\alpha(T - T_c) \left[ (T - T_c)^2 - (\Delta T)^2 \right]. \quad (2.2.45)$$

Тоді з рівності

$$f_2(T) = f_1(T) - \Delta f, \quad (2.2.46)$$

приврівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях  $T$ , можна знайти параметри  $T_c$ ,  $\Delta T$  і  $\Delta f$ :

$$T_c = \frac{1+T_0}{3}, \quad (\Delta T)^2 = \frac{1-T_0+T_0^2}{3}, \quad \Delta f = \alpha \frac{(1-2T_0)(1+T_0)(2-T_0)}{27}. \quad (2.2.47)$$

Тепер максимальна концентрація інгібітору знаходиться з умови, що  $f_3(T) = f_1(T) - 2\Delta f$ :

$$n_{\max} = \frac{2\Delta f}{\beta} = \frac{2\alpha}{27\beta} (1-2T_0)(1+T_0)(2-T_0). \quad (2.2.48)$$

Відповідно довжину імпульсу горіння  $L_1$  визначаємо з умови

$$n_\infty \left[ 1 - \exp(-L_1/\theta_1 V_0) \right] = n_{\max}. \quad (2.2.49)$$

Таким чином,

$$L_1 = \theta_1 V_0 \ln \frac{n_{\max}}{n_\infty - n_{\max}}. \quad (2.2.49 \text{ a})$$

#### 2.2.2.6. Довжина релаксації та фазовий портрет

Хвиля гасіння, що завершує імпульс горіння, буде цілком подібна до хвилі запалювання. Відмінність лише в тому, що відбуватиметься перехід зі стану  $T_3$  в стан  $T_1$ . Величини  $T_3$  та  $T_1$  неважко визначити з рис. 2.2.13 (точки  $T_1$ ,  $T_2$  та  $T_3$  дзеркально симетричні відповідно точкам  $T=1$ ,  $T_0$  та  $T=0$  щодо точки  $T_c$ ):

$$T_1 = \frac{1-2T_0}{3}, \quad T_3 = \frac{2(T_0-1)}{3}. \quad (2.2.50)$$

Для опису процесу релаксації після проходження імпульсу горіння знову скористаємося системою (2.2.35 в). Вважаючи тепер, що  $T = -\delta T$ ,  $\delta T \ll 1$ , запишемо її перше рівняння у формі

$$\beta n \approx \alpha T_0 \delta T = -\alpha T_0 T, \quad (2.2.51)$$

звідки

$$T = -\frac{\beta n}{\alpha T_0}. \quad (2.2.51 \text{ a})$$

Підставивши (2.2.51 а) до другого рівняння системи (2.2.35 в), можна отримати:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n}{\theta_2 V_0}, \quad (2.2.52)$$

де використане позначення

$$\theta_2 = \frac{\tau}{1 + \gamma\beta/\alpha T_0}. \quad (2.2.53)$$

Вважаючи тепер, що точка  $\xi = 0$  відповідає задньому фронту імпульсу горіння, і враховуючи, що  $n(\xi = 0) = n_{\max}$ , після інтегрування рівняння (2.2.52) можна отримати:

$$n(\xi) = n_{\max} \exp(\xi/\theta_2 V_0). \quad (2.2.54)$$

Середовище набуде здатності до запалювання при  $n \leq n_{\max}/2$ , тому за (мінімальну) довжину релаксації (рефрактерності) можна прийняти величину

$$L_2 = \theta_2 V_0 \ln 2. \quad (2.2.55)$$

Профілі температури та концентрації інгібітору, що відповідають виконаному розрахунку, подані на рис. 2.2.14 а.

Оскільки система (2.2.35 б), яка використовувалася для аналізу біжучого імпульсу, відповідає системі з півтора ступенями вільності, то відповідний фазовий простір буде тривимірним. За координати можна, наприклад, узяти змінні  $n$ ,  $T$  та  $dT/d\xi$ . Фазовий портрет біжучого імпульсу в цих координатах поданий на рис. 2.2.14 б. Ділянки АВ та CD, що лежать у площинах  $n=0$  та  $n=n_{max}$  – це сепаратиси, що йдуть із сідла в сідло (пор. з рис. 2.2.7 г). Вони відповідають ділянкам швидкого руху – хвилі запалювання (АВ) та хвилі гасіння (CD). Ділянки ВС та DA відповідають повільному руху (BC – імпульс горіння, DA – час релаксації).

Біжучі імпульси, подібні до розглянутого, характерні й для інших середовищ із відновленням (наприклад, імпульс збудження в нервовому волокні або домен сильного поля в діоді Ганна).

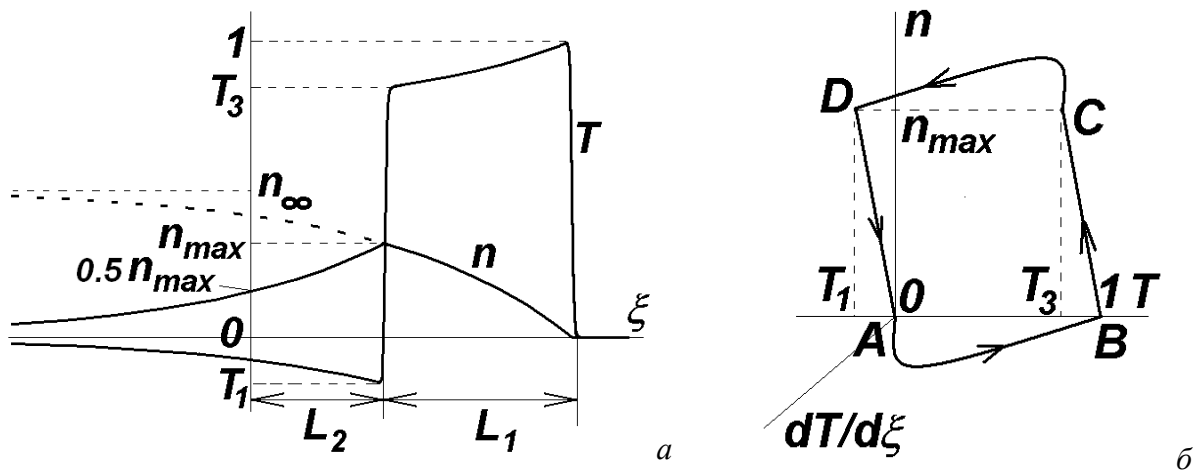


Рис. 2.2.14. Профілі (а) та фазовий портрет (б) біжучого імпульсу.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.2.2

1. Якісно поясніть вигляд профілю температури для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням.
2. Чим визначається максимальна концентрація інгібітору при поширенні біжучого імпульсу в середовищі з відновленням?
3. Як будується фазовий портрет для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням у випадку, коли дифузиею інгібітору можна знехтувати?
4. Чому в середовищі з відновленням хвиля запалювання та хвиля гасіння, що формують біжучий імпульс, мають однакову швидкість?
5. Як зміниться профіль біжучого імпульсу при врахуванні дифузії інгібітору?
6. Чим визначається тривалість біжучого імпульсу?
7. У чому полягає якісна відмінність між солітонами Кортевега – де Вріза та біжучими імпульсами?
8. Порівняйте між собою залежності швидкостей хвилі запалювання в бістабільному середовищі та біжучого імпульсу горіння в середовищі з відновленням від навколишньої температури.
9. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих імпульсів.
10. Опишіть еволюцію в часі середовища з відновленням, яке в початковий момент характеризувалося довільними розподілами концентрації інгібітору та температури.

#### Задачі до підрозділу 2.2.2

2.2.2.1. Отримайте профілі температури на передньому та задньому фронтах імпульсу горіння в середовищі, описуваному рівняннями Фітц-Х'ю – Нагумо. Чим вони відрізняються?



2.2.2.2. Процес горіння, що супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau}, \quad 0 < T_0 < 1,$$

де  $T$  – безрозмірна температура (відраховується від температури навколишнього середовища),  $n$  – концентрація інгібітору. Параметри рівняння відповідають розв’язку у вигляді біжучого імпульсу. Час релаксації інгібітору  $\tau$  вважати великим.

а) Як буде залежати швидкість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

б) Як буде залежати тривалість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

2.2.2.3\*. Підібрати числові значення коефіцієнтів і побудувати числовий розв’язок системи рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Порівняти з результатом аналітичного розрахунку при  $\tau \gg 1$ ,  $D \rightarrow 0$ .

2.2.2.4\*. Система рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням, має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Числовими методами розрахувати швидкість стаціонарної хвилі в залежності від параметрів моделі.

2.2.2.5\*. Для двовимірного середовища з відновленням побудувати числовий розв’язок, що відповідає поширенню біжучого імпульсу від колового джерела. Побудувати залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняти її з результатом аналітичного розрахунку.

2.2.2.6\*. Дослідити поширення імпульсу горіння в середовищі, описуваному рівняннями

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0 - \lambda n)(1 - T);$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau}.$$

Вважати час релаксації інгібітору великим. Порівняти результати з розрахунком за моделлю Фітц-Х’ю – Нагумо.

### 2.2.3. Періодичні хвилі в середовищах із відновленням

Раніше (п.2.1.1) ми розглядали високочастотні періодичні хвилі в слабконелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням, на прикладі активних ліній передач. Як уже вказувалося, при зниженні частоти зовнішнього збудження умова слабкої нелінійності перестає виконуватись. Одна з можливостей полягає в тому, що лінія в такому режимі може перетворитися на середовище з відновленням. Саме така ситуація реалізується, наприклад, для довгої лінії, поданої на рис. 2.1.3 (активна лінія, що відповідає моделі нервового волокна Ходжкіна – Хакслі). Опис цієї моделі, як уже вказувалося, зводиться до системи двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузиею вигляду (2.2.34) або (2.2.34 б).

Поведінка активних ліній, збуджуваних зовнішнім періодичним джерелом, на високих та низьких частотах нагадує режими автогенератора Ван-дер-Поля. На високих частотах

хвилі в активній лінії схожі на квазігармонічних режим автогенератора, який реалізується при малих інкрементах. На низьких частотах, коли реалізується сильна нелінійність, хвилі в такій лінії стають подібними до релаксаційних коливань автогенератора – вони так само стають суттєво ангармонічними.

Розберемо режим періодичних автохвиль у середовищі з відновленням на о моделі Фітц-Х'ю – Нагумо. Періодичну хвилю в такому середовищі можна уявити як послідовність одиночних біжучих імпульсів (див. п. 2.2.2) – рис. 2.2.15 а-б. Якщо просторовий період цієї послідовності (довжина хвилі)  $\lambda$  задовольняє умову  $\lambda \gg L$ , де  $L = L_1 + L_2$  – повна довжина біжучого імпульсу (з урахуванням довжини релаксації), то швидкість періодичної хвилі буде такою самою, як у одиночного імпульсу. Зі зменшенням  $\lambda$  швидкість спадає (поширення фронту йде на фоні залишкової концентрації інгібітору, через це і швидкість менша, бо зменшується різниця потенціалів, див. рис. 2.2.12 а).

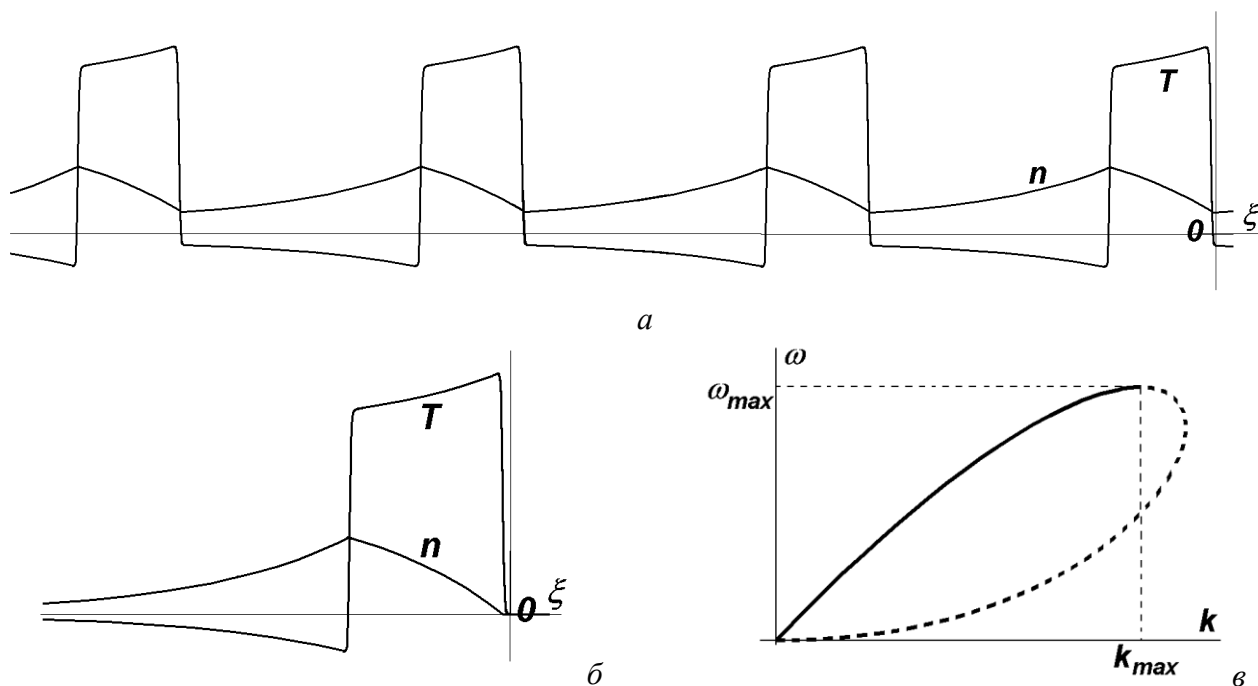


Рис. 2.2.15. Періодичні хвилі в середовищі з відновленням: а – профілі температури та концентрації інгібітору; б – одиночний біжучий імпульс у тому самому середовищі (для порівняння); в – нелінійна дисперсійна крива для таких хвиль (итриховою лінією показана частина, що відповідає нестійким розв'язкам)

Періодична послідовність імпульсів описується розв'язками вигляду  $u = u(\theta)$ ,  $v = v(\theta)$ , де  $\theta = \omega t - kz$  – фаза хвилі, причому  $u(\theta + 2\pi) = u(\theta)$ ,  $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$ . Вони задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \omega \frac{du}{d\theta} = f_1(u, v) + Dk^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}; \\ \omega \frac{dv}{d\theta} = \mu f_2(u, v), \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ в})$$

яку можна отримати з (2.2.34 б), і відповідають її граничному циклу. При довільних значеннях параметрів  $\omega, k$  період руху вздовж граничного циклу – довільний. Вимагаючи, щоб він дорівнював  $2\pi$ , можна отримати деякий зв'язок між  $\omega$  і  $k$  – нелінійний закон дисперсії. При  $k > k_{\max} \geq 2\pi/L$  розв'язки виявляються нестійкими. Нелінійна дисперсійна крива для періодичних хвиль подана на рис. 2.2.15 в. Видно, що максимальному значенню хвильового

числа  $k_{\max}$ , при якому розв'язки ще залишаються стійкими, відповідає максимально можливе значення частоти.

Таким чином, у конкретному випадку середовища, описуваного моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо, періодичні автохвилі реалізуються лише на низьких частотах.

Підкреслимо ще раз, що для збудження періодичної автохвилі в середовищі з відновленням необхідно мати періодичне джерело збудження.

### *Контрольні питання до підрозділу 2.2.3*

1. Як можна збудити періодичну хвилю в середовищі з відновленням?
2. Чому періодичні хвилі в середовищах із відновленням мають обмеження зверху на величину хвильового числа?
3. Чому зі зростанням хвильового числа швидкість періодичної хвилі в середовищі з відновленням зменшується?
4. Джерело періодичних коливань, вміщене на початку одновимірної активної лінії, яка описується моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо, вмикається в початковий момент часу. Опишіть поведінку кількох перших імпульсів, що поширюються вздовж лінії.

### *Задачі до підрозділу 2.2.3*

2.2.2.1. Для активної лінії, що відповідає моделі нервового волокна Ходжкіна – Хакслі, отримайте систему двох нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Знайдіть стаціонарні однорідні стани цієї системи. За яких умов вона описуватиме середовище з відновленням?

2.2.2.2\*. Користуючись результатами розв'язання задачі 2.2.2.1, побудуйте числовий розв'язок, що відповідає

а) одиночному імпульсу збудження;

б) періодичній послідовності імпульсів збудження

в нервовому волокні, описуваному моделлю Ходжкіна – Хакслі.

2.2.2.3\*. Побудувати числовий розв'язок системи рівнянь для середовища з відновленням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

який відповідає періодичним хвилям. Скористатися періодичними за часом граничними умовами.

2.2.2.4\*. Для середовища з відновленням, описуваного системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1 - T)(T - T_0) - \beta n + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}, \end{cases}$$

побудувати нелінійну дисперсійну криву для періодичних коливань, користуючись числовими методами.

### *Висновки до розділу 2.2*

1. Найпростішою моделлю сильнонелінійного активного середовища є бістабільне середовище, яке характеризується наявністю двох стійких стаціонарних однорідних станів рівноваги і одного нестійкого стану, який розділяє області притягання стійких. Прикладами таких середовищ можуть бути системи, де можливе горіння, середовища, де протікає хімічна реакція за моделлю Шльогля та інші. Бістабільне середовище можна описати одним нелінійним кінетичним рівнянням із дифузиею.

2. Хвиля перекидання (біжучий фронт) у бістабільному середовищі – це хвиля, проходження якої переводить середовище з одного стійкого стаціонарного однорідного стану в інший. Хвиля перекидання поширюється від деякого джерела. На прикладі моделі середовища, в якому можливе горіння, можна сказати, що напрямком хвилі перекидання (хвиля запалювання чи хвиля гасіння) визначається балансом між виділенням тепла та його втратами (крім теплопередачі в поздовжньому напрямку) на фронті хвилі. Формально знак швидкості хвилі перекидання визначається інтегралом від кінетичної функції по проміжку між двома стаціонарними однорідними станами системи. У двовимірних середовищах величина швидкості біжучого фронту залежить від його кривини.
3. В екологічних популяціях, де в незаселеній області флуктуації принципово неможливі, спостерігається інший тип хвиль перекидання – хвилі заселення, що відповідають переходу з формально нестійкого стану в стійкий.
4. Середовища з відновленням, або збудливі середовища відрізняються від бістабільних тим, що один зі стійких станів системи виявляється метастабільним: після перебування в ньому протягом деякого часу елемент середовища спонтанно переходить до основного стану. Такі середовища описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією. Прикладом середовища з відновленням може служити середовище, де можливе горіння з виділенням інгібітору, або нервово волокно.
5. У середовищах із відновленням можливе поширення біжучих імпульсів. Для моделі середовища з горінням, що супроводжується виділенням інгібітору, такий імпульс являє собою послідовність хвиль запалювання та гасіння, які рухаються одна за одною з однаковою швидкістю. Протягом проходження імпульсу горіння (проміжку між хвилями запалювання та гасіння) в середовищі відбувається накопичення інгібітору, після проходження хвилі гасіння – розпад інгібітору, після завершення якого середовище переходить до основного стану.
6. Періодичне джерело в середовищі з відновленням може породжувати періодичну послідовність біжучих імпульсів. Часовий і просторовий періоди такої послідовності обмежені знизу.

### ***Контрольні питання до розділу 2.2***

1. Назвіть особливості автохвильових процесів порівняно з іншими відомими Вам типами хвиль.
2. Назвіть загальні властивості середовищ, у яких можуть мати місце автохвильові процеси.
3. Які автохвильові процеси можливі, на Вашу думку, в активному середовищі, що має три стійкі стани рівноваги?
4. Чи буде стійким плоский фронт біжучого імпульсу в двовимірній моделі?
5. Як пов'язані властивості середовищ із типами автохвильових процесів, що можливі в цих середовищах?
6. До якого типу активних середовищ належить, на Вашу думку, необмежений бруселятор?

### 2.3. Джерела періодичних автохвиль

Досі ми розглянули різні типи періодичних автохвиль, збуджуваних в активних середовищах зовнішніми періодичними джерелами (високочастотні хвилі в активних лініях, фазові хвилі в автоколивних середовищах, періодичні хвилі в середовищах із відновленням). Перейдемо тепер до розгляду автономних періодичних автохвиль, які збуджуються за відсутності таких джерел.

Найпростіша система, в якій можуть виникнути такі хвилі – це відрізок активної лінії. Відбиття від кінців такого відрізка може породити позитивний зворотний зв'язок, який перетворює підсилювач на автогенератор. Однак, крім згаданих систем, можуть існувати локалізовані джерела автохвиль у безмежних активних середовищах. Від таких джерел можуть поширюватися спіральні або концентричні автохвилі.

Джерела спіральних автохвиль – так звані ревербератори – можуть існувати як у середовищах із відновленням, так і в середовищах автоколивного типу. Вони виникають у первісно однорідному середовищі за рахунок певного підбору початкових умов.

Натомість джерела концентричних автохвиль можуть мати різну природу. В автоколивних середовищах такі джерела, відомі як провідні центри, або пейсмейкери, виникають за рахунок локальних неоднорідностей середовища, причому такі області характеризуються підвищеною частотою автоколивань “елементарних автогенераторів”. У середовищах із відновленням джерела концентричних автохвиль можуть виникнути в однорідному середовищі за рахунок відповідного підбору початкових умов. Вони відомі як автопейсмейкери.

#### 2.3.1. Генератор квазігармонічних коливань на активній лінії передачі

Уявимо собі ділянку звичайного хвилеводу, обмежену з двох боків провідними поверхнями. Така система являтиме собою резонатор. Коливання в такому резонаторі з часом згасатимуть через наявність дисипації. Якщо один з кінців резонатора зробити відкритим, з'явиться додатковий механізм втрат, пов'язаний з випромінюванням.

Тепер замість хвилеводу візьмемо ділянку активної лінії. Як ми вже знаємо (див. п. 2.1.1), в таких лініях сигнал підсилюється. Відбиття від кінців відрізка забезпечує позитивний (на певній частоті) зворотний зв'язок, який і перетворює підсилювач на генератор. В усталеному режимі енергія, що надходить в активну лінію ззовні (від джерела живлення) за одиницю часу, витрачається на випромінювання сигналу за межі відрізка лінії.

Фактично саме за таким механізмом працюють оптичні квантові генератори (лазери). Розглянемо тепер роботу автогенератора на відрізку активної лінії більш детально.

##### 2.3.1.1. Схема автогенератора

Розглянемо відрізок активної лінії, описаної вище в п. 2.1.1.3. Хвиля, що поширюється в такій лінії, здатна відбиватися від її кінців. Оскільки в такій лінії хвиля підсилюється в напрямку поширення, то в результаті ми отримаємо зростання сигналу в часі за рахунок розвитку осциляторної нестійкості<sup>1</sup>. За рахунок нелінійності зростання сигналу в такому генераторі обмежиться на певному рівні. Саме таким шляхом виникає генерація в лампі біжучої хвилі, лазері та ряді інших приладів.

Одна з найпростіших можливих схем автогенератора на відрізку активної лінії подана на рис. 2.3.1 а. Сама активна лінія моделюється ланцюжком індуктивностей  $Ldx$ , провідностей  $gdx$  та ємностей  $Cdx$  (пор. з рис. 2.1.4 б).

Лівий кінець активної лінії сполучений із джерелом напруги зміщення, прикладеної до нелінійних провідностей  $gdx$ , що входять до складу довгої лінії. Це зміщення  $I_B R_B$ <sup>2</sup> ство-

<sup>1</sup> Нагадаємо, що осциляторна нестійкість реалізується в просторово обмежених областях середовища з конвективною нестійкістю. При цьому конвективна нестійкість забезпечує підсилення сигналу в просторі, а відбиття хвиль від меж області – позитивний зворотний зв'язок. Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 339-341.

<sup>2</sup> Індекс від англ. bias – зміщення (напруги).

рюється джерелом струму  $I_B$  та паралельним до нього внутрішнім опором  $R_B$ , який ми нижче вважатимемо значно меншим від характеристичного опору активної лінії. Іншими словами, в цьому наближенні лівий кінець лінії можна вважати замкненим накоротко. В результаті хвиля відбиватиметься від лівого кінця лінії без помітної зміни амплітуди. На практиці нерідко необхідно враховувати також паразитну індуктивність  $L_B$  опору  $R_B$ .

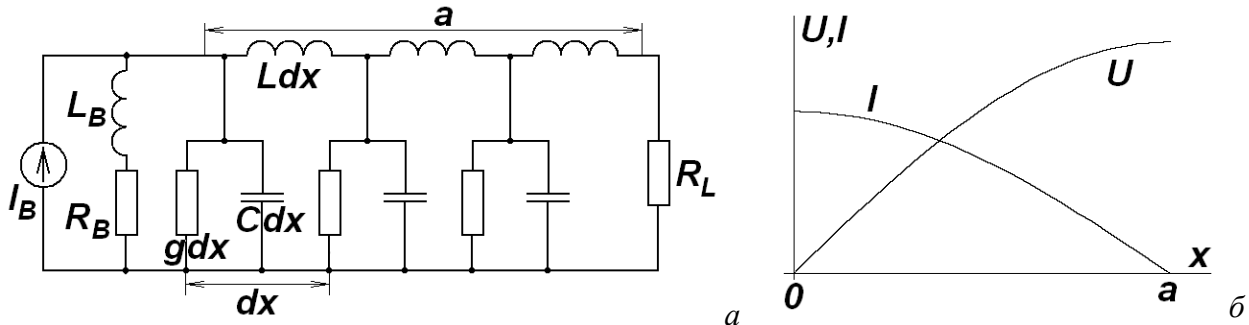


Рис. 2.3.1. Найпростіший автогенератор на відрізку активної лінії: а – схема; б – розподіл струму та напруги вздовж активної лінії.

На правому кінці активної лінії вміщений опір навантаження  $R_L$ <sup>3</sup>. Його ми вважатимемо значно більшим від характеристичного опору лінії. Тоді в лінії встановиться стояча хвиля, причому на лівому її кінці буде максимум струму, а на правому – максимум напруги (рис. 2.3.1 б).

### 2.3.1.2. Розрахунок частоти генерації

В нульовому наближенні для розрахунку частоти генератора можна взяти до уваги лише реактивні елементи кола, наближено поклавши  $g = 0$ ,  $R_B = 0$ ,  $R_L \rightarrow \infty$ . Тоді характеристичний опір лінії буде

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.3.1)$$

а хвильове число для хвилі з частотою  $\omega$  –

$$k(\omega) = \omega\sqrt{LC}, \quad (2.3.2)$$

де  $L$  та  $C$  – відповідно погонна індуктивність та погонна ємність. Оскільки лінія на правому кінці розімкнута, то її вхідний опір на лівому кінці буде  $-i\rho \operatorname{ctg} ka$ , де  $a$  – довжина лінії. На власній частоті цей опір повинен дорівнювати за величиною реактивному опору джерела  $i\omega L_B$  і бути протилежним до нього за знаком. Таки чином, частота генерації визначається з трансцендентного рівняння

$$\omega L_B = \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{ctg}(\omega\sqrt{LC}a), \quad (2.3.3)$$

або

$$\frac{aL}{L_B} = \varphi \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \omega\sqrt{LC}a. \quad (2.3.3 \text{ а})$$

Для крайніх випадків  $aL/L_B \ll 1$  та  $aL/L_B \gg 1$  маємо відповідно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_B C a}} \quad (2.3.4 \text{ а})$$

та

<sup>3</sup> Індекс від англ. load – (опір) навантаження.

$$\omega = \frac{\pi}{2a\sqrt{LC}}. \quad (2.3.4 \text{ б})$$

У першому з цих випадків генератор виступає як система із зосередженими параметрами (коливну систему формують розподілена ємність та зосереджена індуктивність зміщення), в другому – як система з розподіленими параметрами (довжина лінії в цьому випадку дорівнює точно чверті довжини генерованої хвилі).

### 2.3.1.3. Розрахунок усталеної амплітуди сигналу

Найпростіший шлях знаходження усталеної амплітуди сигналу розподіленого автогенератора – це використання умови балансу між потужністю, що виділяється активними елементами, та потужністю, що розсіюється на опорі навантаження.

Потужність, що виділяється в лінії, складає величину

$$P_+ = -\int_0^a I(x)U(x)dx = \int_0^a SU^2(x) \left[ 1 - \frac{U^2(x)}{3K^2} \right] dx \quad (2.3.5)$$

(використано явний вигляд вольт-амперної характеристики нелінійної провідності (2.1.1)). Вважаючи просторовий інкремент хвилі в лінії малим, можна покласти

$$U(x) = U_m \sin kx$$

(див. рис. 2.3.1 б), де хвильове число  $k$  визначається співвідношеннями (2.3.2)-(2.3.3). Вважаючи умову  $aL/L_B \gg 1$  виконаною, отримуємо, що  $k = \pi/2a$ . Тоді інтегрування дає:

$$P_+ = \frac{2a}{\pi} SU_m^2 \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{U_m^2}{3K^2} \sin^2 \varphi \right) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a}{2} SU_m^2 \left( 1 - \frac{U_m^2}{4K^2} \right). \quad (2.3.6)$$

З іншого боку, на опорі навантаження розсіюється потужність

$$P_- = \frac{U_m^2}{2R_L}. \quad (2.3.7)$$

Прирівнюючи праві частини (2.3.6) та (2.3.7), легко отримати:

$$U_m = 2K \sqrt{1 - \frac{1}{aSR_L}}. \quad (2.3.8)$$

Умова позитивності підкореневого виразу  $aSR_L > 1$  – це, по суті, амплітудна умова генерації. Справді, величина  $aS$  – це повна негативна провідність лінії (при малих відхиленнях від обраної робочої точки), паралельно до якої увімкнено опір навантаження  $R_L$ . Для того, щоб розподілена коливна система з таким резистивним елементом могла самозбудитися, його еквівалентна провідність (або еквівалентний опір) повинна бути від'ємною.

Підставивши (2.3.8) до (2.3.7) або до (2.3.6), легко знайти вихідну потужність розподіленого генератора в усталеному режимі:

$$P = \frac{2K^2}{R_L} \left( 1 - \frac{1}{aSR_L} \right). \quad (2.3.9)$$

Нагадаємо, що результати наведеного розрахунку справедливі за умов  $R_B \ll \rho \ll R_L$  та  $aL/L_B \gg 1$ .

Як впливає з (2.3.9), потужність генерації зростає зі зростанням довжини лінії. Але, як впливає з формули (2.3.4 б), при цьому одночасно спадає частота генерації, що врешті рещт приведе до порушення умови квазігармонічності сигналу (2.1.10). Підставивши значення частоти (2.3.4 б), цю умову можна переписати у формі

$$a \ll \frac{\pi}{\rho S}. \quad (2.1.10 \text{ а})$$

### Контрольні питання до підрозділу 2.3.1

1. Як, на Вашу думку, вплине врахування активних опорів на розраховану частоту генерації автогенератора на активній лінії?
2. Чи можливе самозбудження автогенератора на активній лінії на частоті, коли довжина цієї лінії дорівнює  $(n/2 + 1/4)\lambda$  ( $\lambda$  – довжина хвилі в лінії, що відповідає частоті самозбудження)?
3. Чому за умови  $aSR_L \gg 1$  потужність автогенератора на активній лінії перестає залежати від довжини цієї лінії?

### Задачі до підрозділу 2.3.1

2.3.2.1. Користуючись числовими методами, побудуйте залежність нормованої частоти  $\varphi$  генерації автогенератора на активній лінії від параметра  $aL/L_B$ .

### 2.3.2. Ревербератори в середовищах із відновленням

Щоб зрозуміти механізм виникнення ревербератора в однорідному середовищі з відновленням (див. вище п.2.2.2-2.2.3), розглянемо спочатку поширення біжучого імпульсу вздовж тонкого кільця радіуса  $R$ . Якщо кільце тонке, задачу можна вважати одновимірною. Їй відповідає той самий розв'язок, що й періодичній послідовності імпульсів із просторовим періодом  $L = 2\pi R$ . Швидкість імпульсів зростає із збільшенням  $L$  і прямує до граничного значення  $V_0$ , коли  $L$  стає значно більшим від довжини одиночного біжучого імпульсу.

Тепер будемо збільшувати зовнішній радіус кільця, спрямовуючи його до нескінченності. В результаті ми прийдемо до задачі про біжучий імпульс, що обертається навколо отвору радіусу  $R$ . На перший погляд, фронт такого імпульсу являтиме собою промінь, що обертається з частотою  $\omega$ . Але насправді це не так, бо в такому випадку далеко від кільця швидкість фронту необмежено зростатиме, тоді як вона має дорівнювати певній скінченній величині  $V_0$  (тут і нижче залежністю швидкості фронту від його кривини нехтуємо). Отже, віддалені ділянки фронту відстають, в результаті чого сам фронт скручується в спіраль.

Спіральна хвиля в середовищі з відновленням, що обертається навколо кільця, була вперше розглянута в роботі Н. Вінера та А. Розенблюта<sup>4</sup>.

#### 2.3.2.1. Розрахунок форми фронту спіральної хвилі

Наведені вище міркування мають якісний характер. Розглянемо питання про форму спіральної хвилі більш акуратно.

Нехай у стаціонарному режимі спіраль незмінної форми обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Положення її фронту визначається співвідношенням  $\varphi(r, t) = \omega t - \chi(r)$ , де функція  $\chi(r)$  визначає форму спіралі (рис. 2.3.2 а). Як видно з рис. 2.3.2 б, швидкість  $V_r$  точки перетину спіралі з кільцем  $r = const$  складає величину  $V_0/\cos\alpha$ , де  $\alpha$  – кут між нормаллю до хвильового фронту і дотичною до кільця.

Як видно з того ж рис. 2.3.2 б, кут  $\pi/2 - \alpha$  можна записати через похідну функції, що описує форму фронту:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{d[r(\varphi)]}{d(r\varphi)} = \frac{1}{r} \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{r} \left[ \frac{d\chi(r)}{dr} \right]^{-1} \quad (2.3.10)$$

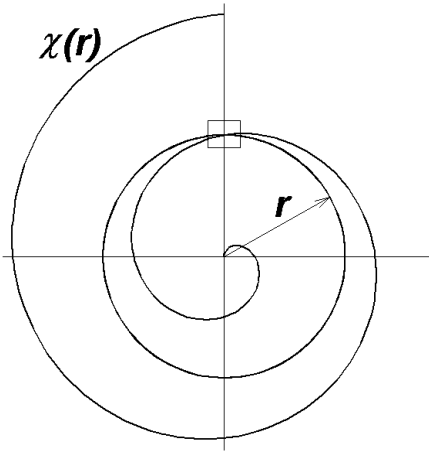
(враховано, що на рис. 2.3.2 б по осі абсцис відкладена величина  $r\varphi$ , по осі ординат –  $r$ ).

<sup>4</sup> Див.: Н. Вінер, А. Розенблют. Кибернетический сборник, вып.3, М., Иностранная литература, 1961, с.3-56. Н. Вінер (Norbert Wiener, 1894 - 1964) – видатний американський математик, засновник кібернетики та теорії штучного інтелекту. Отримав також яскраві результати в галузі теорії ймовірностей, статистики, зв'язку та теорії управління. А. Розенблют (Arturo Rosenblueth Stearns, 1900 - 1970) – мексиканський фізик та фізіолог, один з піонерів кібернетики.

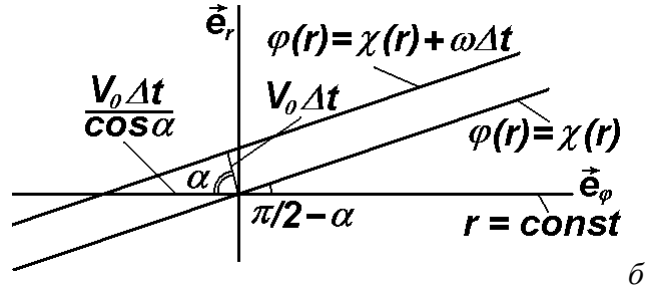


Тоді з (2.3.10) можна знайти  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}}. \quad (2.3.11)$$



a



б

Рис. 2.3.2. Форма фронту спіральної хвилі  $\chi(r)$  та її перетин з лінією  $r = \text{const}$  (рисунок праворуч є збільшеним фрагментом лівого рисунку).

Таким чином,

$$V_r = \frac{V_0}{\cos \alpha} = V_0 \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.12)$$

З іншого боку, оскільки спіраль обертається як ціле з частотою  $\omega$ , то  $V_r = \omega r$ . Підставивши останнє співвідношення до (2.3.12), отримуємо рівняння щодо невідомої функції  $d\chi(r)/dr$  у формі

$$\omega r = V_0 \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.13)$$

Частоту  $\omega$  обертання спіралі визначимо з умови, що до центрального отвору радіусу  $R$  фронт підходить під прямим кутом ( $\alpha = \pi/2$ ), тобто  $V_0 = \omega R$ . Тоді (2.3.13) набуває вигляду:

$$r = R \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.14)$$

Розв'язавши (2.3.14) щодо  $d\chi(r)/dr$ , отримаємо диференціальне рівняння, яке визначає форму фронту спіральної хвилі:

$$\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.3.15)$$

Таким чином, форма спіралі визначається співвідношенням

$$\chi(r) = \int_R^r \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}} dr. \quad (2.3.16)$$

При  $r \gg R$  (2.3.16) набуває вигляду:

$$\chi(r) = \chi_0 + r/R, \quad (2.3.16 \text{ а})$$

тобто на великих віддальх від ядра спіраль є архімедовою (зі сталим кроком). Крок  $h$  такої спіралі визначається співвідношенням  $\chi(r+h) - \chi(r) = 2\pi$ , звідки  $h = 2\pi R$ .

Слід відзначити, що формула (2.3.16), яка описує форму спіральної хвилі, дає помилку при  $r \rightarrow R$ , оскільки в цій області слід, строго кажучи, брати до уваги залежність швидкості фронту хвилі від його кривини.

Крім однорукавних спіралей, у яких зміна азимутального кута на  $2\pi$  відповідає одному періоду хвилі, у середовищах із відновленням можуть існувати (реально спостерігаються в експериментах) і багатурукавні спіралі, у яких зміна азимутального кута на  $2\pi$  від-

повідляє цілому числу періодів (рис. 2.3.3).

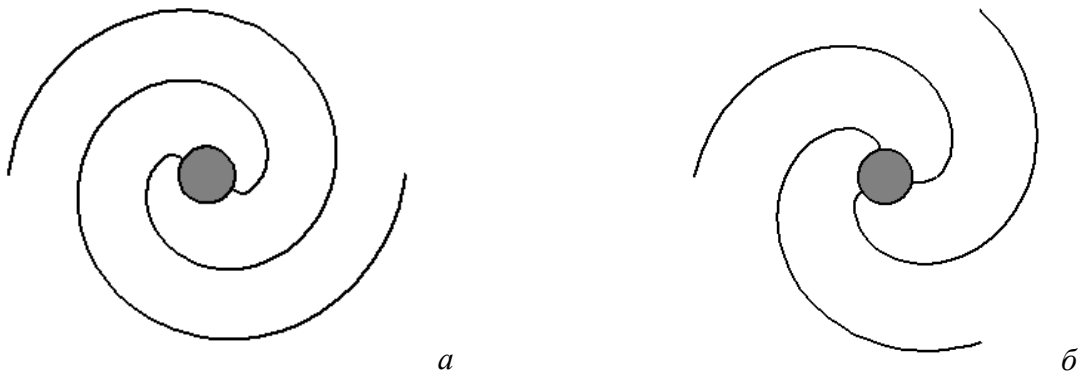


Рис. 2.3.3. Дворукавна (а) та трирукавна (б) спіралі.

### 2.3.2.2. Природа ядра спіральної хвилі

В експериментах спіральні хвилі спостерігаються й за відсутності центрального отвору. Всередині ядра при цьому зберігається стан спокою (рефрактерності).

Фізично існування ядра спіралі (в рамках моделі горіння з виділенням інгібітору) можна пояснити тим, що кінець спіралі, що обертається навколо її ядра, безперервно виділяє інгібітор. В результаті дифузії інгібітору його концентрація в ядрі весь час підтримується на рівні, який робить неможливим запалювання.

Знехтувавши тепер для спрощення дифузією інгібітору, оцінимо розмір ядра спіральної хвилі. У стаціонарному режимі довжина кола, що обмежує ядро, не може бути меншою від мінімального періоду повторення імпульсів  $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$  (див. п. 2.2.3). Отже, мінімальний радіус ядра, навколо якого бігтиме спіральна хвиля, складає величину  $R_{\min}$ . Йому відповідає максимальна частота спіральної хвилі  $\omega_{\max} = V_0/R_{\min}$  (впливом кривини фронту на його швидкість, як і раніше, нехтуємо) та мінімальний крок спіралі  $h_{\min} = 2\pi R_{\min} = L_{\min}$ .

Зроблені оцінки задовільно узгоджуються з експериментом.

### 2.3.2.3. Спіральні хвилі в неоднорідних та нестационарних середовищах

У неоднорідному середовищі з відновленням спостерігається ефект дрейфу спіральної хвилі: за певних умов її центр рухається по прямій лінії в напрямку, який визначається напрямком зміни властивостей середовища та деякими параметрами цього середовища. Швидкість такого дрейфу прямо пропорційна до швидкості поширення біжучого імпульсу та обернено пропорційна до характерного розміру неоднорідності.

Якщо властивості активного середовища з часом змінюються – наприклад, модулюються за періодичним законом із деякою частотою, то центр спіральної хвилі буде рухатися по колу, радіус якого пропорційний до глибини модуляції та обернено пропорційний до різниці частот спіральної хвилі та модуляції. Коли ця різниця дорівнює нулеві (випадок резонансу), центр спіралі рухатиметься по прямій. Швидкість руху в обох випадках пропорційна добутку швидкості поширення біжучого імпульсу на глибину модуляції. Описане явище спостерігалось в експерименті, коли шар розчину, в якому відбувалася світлочутлива реакція Белоусова – Жаботинського, піддавали періодичному освітленню.

Природа обох згаданих ефектів пов'язана з тим, що радіус ядра спіральної хвилі складним чином (в загальному випадку – із запізненням) залежить від властивостей активного середовища. В результаті внутрішній край спіралі рухатиметься вже не по колу, а по деякій незамкненій кривій (в найпростішому випадку дрейфу та резонансу – по кривій типу трохойди; траєкторії такого типу виходять при накладанні обертового та поступального руху).

#### 2.3.2.4. Вихори

У тривимірних середовищах в принципі можливі джерела автохвиль у вигляді вихорів. У них хвильовий фронт являє собою прямий циліндр, твірною якого є спіраль (рис. 2.3.4).

Але фронти автохвиль можуть мати й значно складнішу форму – наприклад, вісь вихору може бути скручена в кільце (так зване вихрове кільце). На великих відстанях від вихрового кільця фронт породженої ним хвилі буде сферичним.

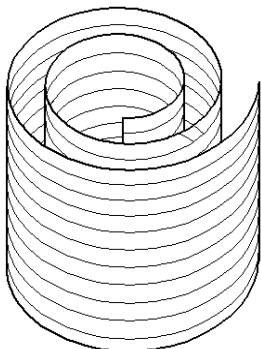


Рис.2.3.4. Хвильовий фронт вихору.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.3.2

1. Як співвідносяться максимальні частоти хвиль у вигляді одиночної та потрійної спіралі в середовищах із відновленням?
2. У середовищі з відновленням навколо однакових отворів обертаються хвилі у вигляді одиночної та подвійної спіралей. Порівняйте частоти їхнього обертання.
3. За яких початкових умов у середовищі з відновленням збуджуватиметься спіральна хвиля?
4. В однорідному середовищі, де можливе горіння з виділенням інгібітору, збуджена спіральна хвиля. Як залежать розміри її ядра від температури навколишнього середовища? Дайте якісне пояснення.
5. Як, на вашу думку, вплине врахування дифузії інгібітору на оцінку розміру ядра спіральної хвилі в порівнянні з моделлю, де така дифузія відсутня?

#### Задачі до підрозділу 2.3.2

2.3.2.1. Дворукавна спіральна хвиля в середовищі з відновленням обертається навколо отвору радіусу  $R$ . При якому мінімальному значенні  $R$  така спіраль ще буде прив'язана до отвору? Залежністю швидкості хвилі від кривини її фронту знехтувати. З якою частотою відбуваються коливання в точках за межами ядра спіралі?

#### 2.3.3. Ревербератори в автоколивних середовищах

Джерела спіральних хвиль – ревербератори – можуть виникати не тільки в середовищах із відновленням (див. п. 2.3.1), але й в автоколивних середовищах (див. п. 2.1.2).

Зовні спіральні хвилі в автоколивних середовищах нагадують спіральні хвилі в середовищах із відновленням: у них також можна виділити ядро, а на великих відстанях від нього фронт хвилі має форму архімедової спіралі (зі сталим кроком). Амплітуда збурення при поширенні такої хвилі дорівнює нулеві в центрі і прямує до сталої величини при віддаленні від нього. Але розміри ядра (тобто області, де амплітуда ще не досягла граничної величини) тепер будуть малими – порядку дифузійної довжини  $\sqrt{b\tau_p}$ , де коефіцієнт  $b$  визначається формулою (2.1.35), а час релаксації амплітуди  $\tau_p$  – формулою (2.1.29). Таким чином, для аналізу спіральних хвиль в автоколивному середовищі не можна користуватися рівнянням для фазових хвиль (2.1.34), а необхідно звертатися безпосередньо до базового рівняння  $\lambda - \omega$  моделі автоколивних середовищ (2.1.23).

Ще одна особливість спіральних хвиль в автоколивних середовищах полягає в тому, що швидкість їхніх фронтів в принципі може бути якою завгодно.

Перший розрахунок спіральних хвиль в автоколивних середовищах був виконаний П. Хаганом<sup>5</sup>.

### 2.3.3.1. Базові рівняння, граничні умови та асимптотика

Для простоти обмежимося випадком, коли в рівнянні для  $\lambda - \omega$  моделі (2.1.23)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta, \quad \rho = |\eta|$$

(нагадаємо, що  $\eta = u + iv$ ) можна покласти  $D_2 = 0$  (нижче позначатимемо  $D_1 \equiv D$ ). Тоді в полярних координатах  $r, \theta$  шукатимемо розв'язок цього рівняння у формі:

$$\eta = \rho(r) \exp[i\varphi(r, \theta, t)], \quad \varphi(r, \theta, t) = \omega t + \theta - \chi(r), \quad (2.3.17)$$

де  $\omega$  – частота спіральної хвилі, а функція  $\chi(r)$  визначає форму спіралі.

Підставивши (2.3.17) до (2.1.23) та прирівнявши до нуля окремо дійсну та уявну частини отриманого виразу, можна отримати систему двох рівнянь для невідомих функцій  $\rho(r)$  та  $\chi(r)$ :

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[ \frac{\lambda(\rho)}{D} - \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right] = 0; \quad (2.3.18)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left( \frac{1}{r} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{\omega - \omega(\rho)}{D} = 0. \quad (2.3.19)$$

З умови скінченності величин  $\rho$  та  $d\chi/dr$  при  $r \rightarrow 0$  можна записати граничні умови для цих функцій:

$$\rho(r \rightarrow 0) \sim r, \quad \left. \frac{d\chi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.3.20)$$

Крім того, слід вимагати виконання умови

$$\rho(r \rightarrow \infty) = \text{const} \equiv \rho_\infty \quad (2.3.21)$$

(на нескінченості амплітуда хвилі повинна залишатися обмеженою). Тоді з (2.3.18) відразу випливає, що при  $r \rightarrow \infty$  виконуватиметься співвідношення

$$\chi(r \rightarrow \infty) = k_\infty r, \quad k_\infty = \pm \sqrt{\frac{\lambda(\rho_\infty)}{D}}, \quad (2.3.22)$$

тобто на великих віддальх від ядра спіраль справді буде архімедовою. Два знаки в (2.3.22) відповідають двом різним напрямкам закручування спіралі. В свою чергу, з (2.3.19) випливає, що частота спіральної хвилі визначається співвідношенням

$$\omega = \omega(\rho_\infty). \quad (2.3.23)$$

### 2.3.3.2. Аналітичний розв'язок для модельних функцій $\omega(\rho)$ та $\lambda(\rho)$

Щоб знайти величину  $\rho_\infty$ , необхідно розв'язати систему рівнянь (2.3.18)-(2.3.19). Це вдається зробити аналітично, якщо залежність  $\omega(\rho)$  є слабкою. Запишемо її у формі

$$\omega(\rho) = \omega_0 + \varepsilon(\rho_0 - \rho), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (2.3.24)$$

де, як і в п. 2.1.2, величина  $\rho_0$  задовольняє умові  $\lambda(\rho_0) = 0$  (рис. 2.1.7), і  $\omega_0 \equiv \omega(\rho_0)$ .

<sup>5</sup> Див.: P.S.Hagan. SIAM J. Appl. Math. 1982. Vol.42. Pp.762-781. П. Хаган (Patrick S. Hagan) – американський дослідник, автор праць у галузі електроніки, фізичної хімії та біофізики. Останнім часом займається фінансовою математикою.

В нульовому наближенні за малим параметром  $\varepsilon$  частота спіральної хвилі  $\omega = \omega_0$ . Тоді з (2.3.23) випливає, що  $\rho_\infty = \rho_0$ , а з (2.3.12) – що  $k_\infty = 0$  (взагалі, з (2.3.19) випливає, що в цьому наближенні  $d\chi/dr = 0$ ). Отже, відповідно до (2.3.20), у даному випадку спіраль вироджується в промінь, що обертається навколо деякої точки з частотою  $\omega_0$ .

Тоді залежність  $\rho(r)$  можна знайти з рівняння (2.3.18), яке тепер набуває вигляду

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[ \frac{\lambda(\rho)}{D} - \frac{1}{r^2} \right] = 0. \quad (2.3.25)$$

Його можна розв'язати аналітично, задавши модельну функцію  $\lambda(\rho)$ :

$$\lambda(\rho) = \frac{D(\rho_0^2 - \rho^2)(4\rho_0^2 - \rho^2)}{\rho_0^4} \quad (2.3.26)$$

(рис. 2.3.5 а). Видно, що ця апроксимація якісно правильно описує поведінку функції  $\lambda(\rho)$  на проміжку  $0 < \rho < 2\rho_0$  (пор. з рис. 2.1.7).

Безпосередня підстановка показує, що рівнянню (2.3.25) з граничними умовами (2.3.20)-(2.3.21) та функцією  $\lambda(\rho)$  (2.3.26) задовольняє розв'язок

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (2.3.27)$$

(рис. 2.3.5 б).

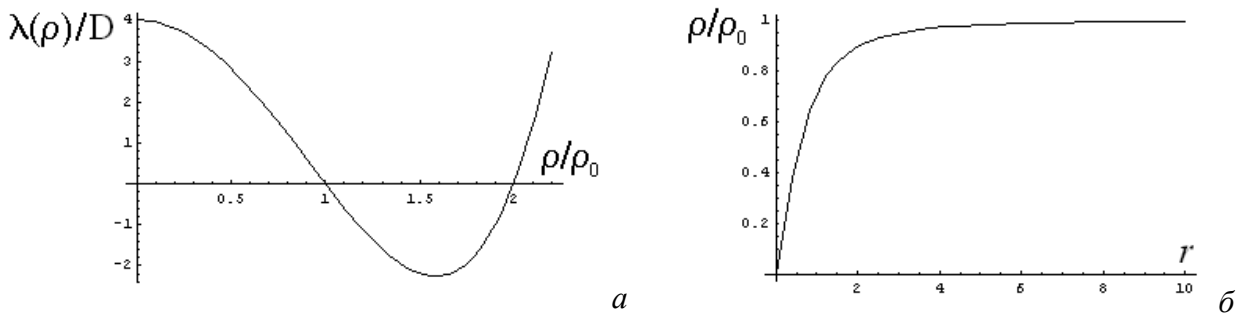


Рис. 2.3.5. Графіки модельної функції  $\lambda(\rho)$  (а) та відповідного їй розв'язку  $\rho(r)$  (б).

Врахування наступних наближень дозволяє в явному вигляді знайти невідомі величини  $\rho_\infty$ ,  $k_\infty$  та  $\omega$ .

Відзначимо, що в автоколивних середовищах, на відміну від середовищ із відновленням, багаторукавні спіральні хвилі виявляються нестійкими.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.3.3

1. Чи потрібне локальне збурення властивостей середовища автоколивного типу для збудження в ньому спіральної хвилі?
2. Яка природа ядра спіральної хвилі в автоколивних середовищах?
3. Чому в автоколивному середовищі можливий частинний випадок спіральної хвилі у формі променя, що обертається навколо ядра, а в середовищі з відновленням – неможливий?

#### Задачі до підрозділу 2.3.3

2.3.3.1\* Для рівняння Гінзбурга-Ландау числовими методами побудувати розв'язок, що відповідає спіральній хвилі. Дослідити поведінку багаторукавних спіралей.

2.3.3.2\*. Побудувати клітинний автомат із елементарними комірками правильної

а) трикутної;

б) чотирикутної;

в) шестикутної форми. Для автоколивного середовища змоделювати на ньому спіральну хвилю.

### 2.3.4. Пейсмекери в автоколивних середовищах

Як уже згадувалося, пейсмекерами, або провідними центрами називають джерела концентричних хвиль у середовищах автоколивного типу, що виникають на локальних неоднорідностях, причому ці неоднорідності характеризуються підвищеною частотою автоколивань. Справді, в лабораторних експериментах пейсмекери, придушені за рахунок впливу коротших фазових хвиль, після припинення впливу знову виникали на тому самому місці. Це дає підстави вважати, що причиною виникнення пейсмекерів є деякі локальні неоднорідності середовища. З іншого боку, якісно зрозуміло, що такі неоднорідності якраз і можуть служити джерелами фазових хвиль, якщо їхня частота перевищує частоту синфазних коливань навколишнього середовища (див. п. 2.1.2.8).

Експериментально пейсмекери в середовищі з реакцією Белоусова - Жаботинського вперше дослідив, як уже згадувалося, А. Вінфрі (див. п. 1.3.4.1). Теорія пейсмекерів, заснована на рівнянні для фазових хвиль, побудована Й. Курамото<sup>6</sup>.

#### 2.3.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння

Спробуємо описати виникнення пейсмекера в рамках  $\lambda - \omega$  моделі. Для цього розглянемо плоский центральносиметричний шар, в якому  $\omega_0 = \omega_0(r)$  ( $r$  – радіус у полярній системі координат, початок відліку якої суміщений із центром симетрії). Нехай неоднорідність зосереджена в області з характерними розмірами  $r_0$  поблизу початку координат, так що  $\omega_0(r \rightarrow \infty) = \omega_\infty$  і  $\omega_0(r \leq r_0) = \omega_\infty + \delta\omega$  (рис. 2.3.6). Тоді, врахувавши в базовому рівнянні  $\lambda - \omega$  моделі (2.1.23) залежність  $\omega_0(r)$ , поклавши  $\varphi(r, t) = \omega_\infty t + \psi(r, t)$  і виконавши перетворення, аналогічні до розглянутих у пп. 2.1.2.2 та 2.1.2.4, можна отримати аналог рівняння для фазових хвиль (2.1.34), що враховує неоднорідність середовища:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0(r) - \omega_\infty + a(\nabla \psi)^2 + b\Delta \psi. \quad (2.3.28)$$

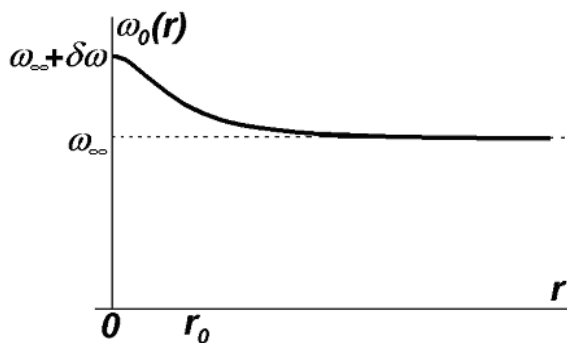


Рис. 2.3.6. Радіальна залежність частоти автоколивань в області виникнення пейсмекера.

Рівняння (2.3.28) еквівалентне до рівняння для  $\lambda - \omega$  моделі (2.1.23) за умови  $r_0 \gg \sqrt{b\tau_p}$  (2.3.29)

(пор. з (2.1.37)).

Знову скористаємося заміною (2.1.38)

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln Q(r, t).$$

Тоді з (2.3.28) можна отримати аналог рівняння (2.1.41 а) для  $Q(r, t)$  у формі

<sup>6</sup> Y. Kuramoto. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b\Delta Q + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]Q. \quad (2.3.30)$$

#### 2.3.4.2. Аналогія з частинкою в потенціальній ямі

Формально рівняння (2.3.30) для пейсмейкера еквівалентне нестационарному рівнянню Шрьодінгера<sup>7</sup>

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U(r)\Psi, \quad (2.3.30 \text{ а})$$

яке описує рух частинки в полі із заданим потенціалом  $U(r)$ . Рівняння (2.3.30 а) переходить у (2.3.30), якщо зробити заміни

$$\Psi \rightarrow Q, \quad -\frac{t}{i\hbar} \rightarrow t, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U(r) = -\frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]. \quad (2.3.31)$$

У розглядуваній моделі в області  $r \leq r_0$  маємо  $\omega_0(r) > \omega_\infty$ . В термінах квантової механіки це означає виникнення потенціальної ями – області, в якій  $U(r) < 0$ .

Рівняння (2.3.30) – лінійне (на відміну від рівняння (2.3.28)) диференціальне рівняння в частинних похідних, але його коефіцієнти залежать від координат. Якщо спробувати шукати розв'язок цього рівняння за методом розділення змінних, то рівняння для функції, залежної від часу, буде не тільки лінійним, але й зі стаціонарними коефіцієнтами. Отже, залежність від часу можна шукати в експоненціальній формі. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.3.30) можна шукати у формі

$$Q(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \mu_n(r) \exp(\lambda_n t), \quad (2.3.32)$$

де  $\lambda_n$  і  $\mu_n(r)$  – відповідно власні числа і власні функції для рівняння

$$b\Delta \mu_n + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n, \quad (2.3.33)$$

яке легко отримати підстановкою (2.3.32) до (2.3.30).

Додатні значення  $\lambda_n$  у квантовомеханічній задачі відповідають зв'язаним станам частинки в потенціальній ямі. Від'ємні значення, що відповідають інфінітному рухові частинки, утворюють суцільний спектр, але вони неістотні, бо відповідні експоненти в (2.3.32) швидко згасають.

Оскільки в аналізованому випадку  $U(r \rightarrow \infty) = 0$ , то в розв'язку (2.3.32) існує власне значення  $\lambda_0 = 0$  і відповідна власна функція  $\mu_0(r)$ .

Умова  $U(r \rightarrow \infty) = 0$  дає змогу знайти асимптотику функцій  $\mu_n(r)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Справді, з урахуванням аксіальної симетрії задачі рівняння (2.3.33) набуває вигляду

$$b \left( \frac{d^2 \mu_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \mu_n}{dr} \right) + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ а})$$

При  $r \rightarrow \infty$  замість (2.3.33 а) отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$b \frac{d^2 \mu_n}{dr^2} = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ б})$$

Розв'язок рівняння (2.3.33 б) при  $\lambda_n > 0$  з урахуванням того, що при  $r \rightarrow \infty$  він має залишатись обмеженим, за умови  $r \gg r_n$  може бути записаний у формі

<sup>7</sup> Е. Шрьодінгер (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887 - 1961) – великий австрійський фізик-теоретик, один з творців квантової механіки. Лауреат Нобелівської премії з фізики (1933), професор університетів у Берліні, Оксфорді, Граці й Генті, з 1939 року – директор заснованого ним Інституту вищих досліджень (Institute for advanced studies) в Дубліні.

$$\mu_n(r) = \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad r_n = \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}. \quad (2.3.34)$$

З урахуванням тієї самої умови для  $\lambda_0 = 0$  при  $r \gg r_0$  можна покласти  $\mu_0 \approx 1$  (нагадаємо, що  $r_0$  – це розмір потенціальної ями).

Нехай у потенціальній ямі є всього один зв'язаний стан, тобто існує лише одне додатне власне значення  $\lambda_1$ , якому відповідає власна функція  $\mu_1$ . Тоді, нехтуючи згасаючим внеском від суцільного спектру, отримаємо при  $r \gg r_0$ :

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left[ C_0 + C_1 \exp \left( \lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right) \right]. \quad (2.3.35)$$

Цей розв'язок описує пейсмеркер, що народжується (див. рис. 2.3.7 а, б). Справді, якщо

$$\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \gg 1, \quad (2.3.36)$$

або

$$r < R(t) = \sqrt{\lambda_1 b} t, \quad (2.3.37)$$

то константою  $C_0$  можна знехтувати поруч із експонентою, і (2.3.35) набуває вигляду:

$$\psi(r, t) \approx \frac{b\lambda_1 t}{a} - \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a} r. \quad (2.3.35 \text{ а})$$

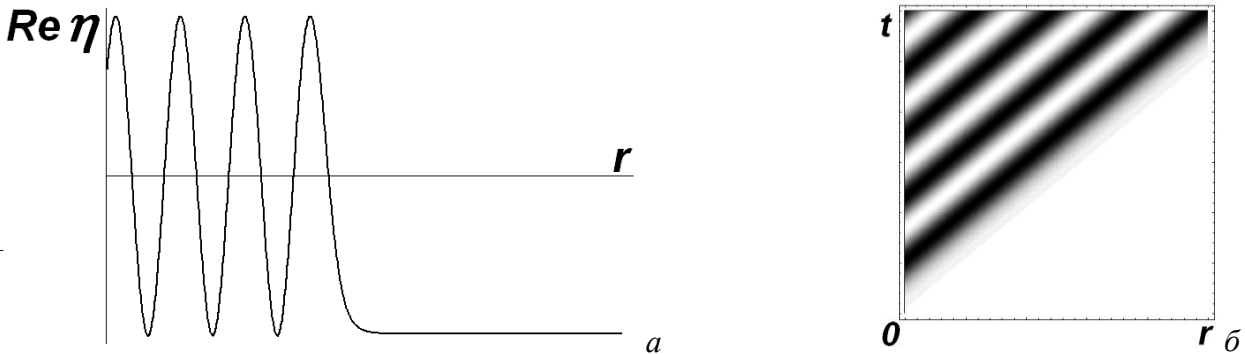


Рис. 2.3.7. Графік функції  $\text{Re } \eta(r, t)$  при  $t = \text{const}$  (а) та контурний графік цієї функції (б), де  $\eta(r, t) = \exp\{i[\omega_\infty t + \psi(r, t)]\}$ , а залежність  $\psi(r, t)$  визначається формулою (2.3.35)

Розв'язок (2.3.35 а) описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_\infty + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad (2.3.38)$$

і хвильовим числом

$$k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad (2.3.39)$$

що розходяться від центру (рис. 2.3.7). Чим глибша яма, тим більша  $\lambda_1$  і, як випливає з (2.3.38)-(2.3.39), тим вища частота і менша довжина хвилі.

Навпаки, при  $r > R(t)$  маємо  $\varphi \approx \text{const}$ , тобто ця область залишається незбуреною (в ній існують синфазні автоколивання з частотою  $\omega_\infty$ ).

Область, зайнята фазовими хвилями, розширюється з радіальною швидкістю

$$V_R = \frac{dR(t)}{dt} = \sqrt{\lambda_1 b}. \quad (2.3.40)$$

Якщо в потенціальній ямі, що відповідає збуренню  $\omega_0(r)$ , існує кілька зв'язаних ста-



нів, картина істотно не зміниться. Треба лише замінити  $\lambda_1$  на максимальне власне число  $\lambda_n$ .

### 2.3.4.3. Умови виникнення та застосовність опису в рамках рівняння фазових хвиль

В одно- і двовимірному випадку будь-яка яма (навіть дуже неглибока) містить хоча б один зв'язаний стан. Отже, як завгодно мале додатне збурення  $\delta\omega$  породжує пейскекер. У тривимірному випадку зв'язаний стан з'являється лише для достатньо глибоких потенціальних ям, тобто за виконання умови

$$\delta\omega \gg \frac{b^2}{ar_0^2} \quad (2.3.41)$$

(чим більший радіус ями  $r_0$ , тим менша „критична глибина”  $\delta\omega_{cr}$ , необхідна для виникнення пейскекера). При невиконанні умови (2.3.41) пейскекер не виникає.

Виконаний розрахунок справедливий лише тоді, коли радіус локалізації  $r_n$  (2.3.34) задовольняє умові (2.3.29), тобто при  $\lambda_n \ll 1/\tau_\rho$ , інакше рівняння для  $\lambda - \omega$  моделі не зводиться до рівняння для фазових хвиль. Оскільки завжди

$$\lambda_n \leq \frac{a}{b} \delta\omega, \quad (2.3.42)$$

(максимальне власне значення  $\lambda_n$  обмежене глибиною потенціальної ями), отримаємо:

$$\delta\omega_{\max} \ll \frac{b}{a\tau_\rho}, \quad (2.3.43)$$

тобто виконаний розрахунок справедливий лише для помірних збурень автоколивного середовища.

Як уже говорилося, при зіткненні двох фазових хвиль із різними хвильовими числами відбувається їх повне взаємне погашення, а межа рухається в напрямку області, заповненої довшими хвилями. Це означає, що за наявності кількох пейскекерів у результаті конкуренції між ними врешті-решт переможе той, якому відповідають найкоротші хвилі (найглибша потенціальна яма).

### Контрольні питання до підрозділу 2.3.4

1. Якісно опишіть механізм виникнення пейскекерів.
2. Опишіть часову еволюцію фазових хвиль в автоколивному середовищі, яке має два локальні максимуми для частоти локальних автоколивань.
3. Як, на Вашу думку, зміняться властивості пейскекера, якщо збурення в середовищі, яке його породило, не буде аксіально-симетричним?
4. Як властивості локального збурення впливають на характеристики відповідного пейскекера?

### Задачі до підрозділу 2.3.4

2.3.4.1. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузиею для середовищ автоколивного типу ( $\lambda - \omega$  модель) має вигляд

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta,$$

де  $\rho = |\eta|$ ,  $\lambda(\rho)$  – монотонно спадна функція, така, що  $\lambda(\rho_0) = 0$ ,  $\omega(\rho)$  – довільна функція,  $D_1$  та  $D_2$  – сталі. Середовище неоднорідне:  $\rho_0 = \rho_0(r)$ , причому виконується умова  $\rho_0(r \rightarrow \infty) = \rho_\infty$ . Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

2.3.4.2. Побудувати графік залежності  $\text{Re } \eta(r, t)$  для випадку, коли в потенціальній ямі, що відповідає збуренню  $\omega_0(r)$ , існує кілька зв'язаних станів. Чим він відрізняється від випадку, коли в цій ямі існує лише один зв'язаний стан?

2.3.4.3\*. Користуючись рівнянням Гінзбурга-Ландау, дослідити числовими методами поведінку

нку пейсмейкера, який породжує хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

2.3.4.4\*. Побудувати клітинний автомат із елементарними комірками правильної

а) трикутної;

б) чотирикутної;

в) шестикутної

форми. Для автоколивного середовища змоделювати на ньому пейсмейкер.

### 2.3.5. Автопейсмейкери в середовищах із відновленням

Джерела концентричних автохвиль, як уже згадувалося, можуть існувати не тільки в автоколивних середовищах, але й у середовищах із відновленням. Такі експерименти відомі, зокрема, для плівок розчинів, у яких протікає реакція Белоусова – Жаботинського<sup>8</sup>.

В літературі існує дві точки зору на механізм виникнення джерел концентричних автохвиль у середовищах із відновленням. Одна з них полягає в тому, що виникнення пейсмейкерів пов'язане з локальними неоднорідностями середовища (домішки, бульбашки газу). В околі таких сторонніх включень елементи середовища спонтанно переходять в автоколивний режим.

Інша точка зору полягає в тому, що джерелом концентричних хвиль є пара елементів середовища, які коливаються в протифазі та періодично збуджують один одного. Така ситуація в принципі можлива, якщо час рефрактерності буде меншим від часу перебування в збудженому стані. Джерела такого типу дістали в літературі назву автопейсмейкерів.

Механізм роботи автопейсмейкера можна порівняти з парою мультівібраторів у режимі очікування (ми вже відзначали, що такий мультівібратор є моделлю елемента середовища з відновленням, див. вище п. 2.2.2), пов'язаних між собою через диференціувальний ланцюжок. Нехай перший з мультівібраторів перейшов у стан збудження. Тоді через деякий час, що дорівнює тривалості імпульсу на його виході, він повернеться в стан спокою. Але стрибок напруги з його виходу, пройшовши через диференціувальний ланцюжок, утворить імпульс запуску для другого мультівібратора, в результаті чого той перейде в стан збудження. Через відповідний час другий мультівібратор, перейшовши в стан спокою, згенерує імпульс запуску для першого мультівібратора, після чого процес буде періодично повторюватися.

Ми розглянемо нижче два типи автопейсмейкерів – джерело, засноване на діленні фронту, та джерело типу «луна». У найпростіших моделях перше з них досліджувалося В.Г.Яхном<sup>9</sup> зі співробітниками, друге – В.І.Кринським<sup>10</sup>.

#### 2.3.5.1. Вихідні рівняння

Для опису автопейсмейкера скористаємося двокомпонентною моделлю (див. пп. 2.2.2.1 - 2.2.2.2), описуваною системою рівнянь вигляду (2.2.34)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v, \end{cases}$$

або вигляду (2.2.35), якщо скористатися моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо та конкретизувати вигляд кінетичних функцій:

<sup>8</sup> В залежності від режиму реакції такі розчини можуть відповідати як моделі середовища з відновленням, так і моделі автоколивного середовища (див. п. 1.3.4).

<sup>9</sup> В.Г.Яхно (Владимир Григорьевич Яхно, нар. 1948) – сучасний російський біофізик (м. Нижній Новгород).

<sup>10</sup> В.І.Кринський (Кринский Валентин Израилевич, нар. 1938) – російський біофізик, лауреат Ленінської премії (1980). Зараз працює у Франції.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Така модель дозволяє отримати результати, які узгоджуються (принаймні, якісно) з експериментальними даними.

Строго кажучи, розв'язки в рамках цієї моделі є нестійкими. Тому для коректного опису роботи автопейсмейкера необхідна трикомпонентна модель, аналіз якої виходить за рамки даного курсу. Тим не менше і двокомпонентна модель дає уявлення про механізми функціонування автопейсмейкерів, тому її варто розібрати більш детально.

Для того, щоб описати процес виникнення джерела періодичних автохвиль в однорідному середовищі з відновленням, обмежимося одновимірною геометрією. В цій моделі для формування джерела біжучих імпульсів необхідно задати початкову умову у формі так званого нерухомого фронту збудження. Тому, перш ніж говорити про джерело біжучих імпульсів, розглянемо спочатку такий нерухомий фронт.

### 2.3.5.2. Нерухомий фронт збудження: якісний розгляд та конкретизація вихідних рівнянь

Як уже вказувалося (див. вище п.2.2.3), швидкість хвилі запалювання залежить від концентрації інгібітору  $n$  у середовищі. Якісно вигляд цієї залежності поданий на рис. 2.3.8. При переході  $n$  через деяке критичне значення ця швидкість змінює свій знак – замість хвилі запалювання починає поширюватися хвиля гасіння. Іншими словами, при  $n < n_{cr}$  "енергетично вигідним" є стан горіння, а при  $n > n_{cr}$  – стан відсутності горіння.

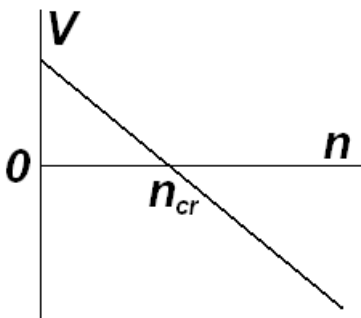


Рис. 2.3.8. Залежність швидкості хвилі запалювання (гасіння) від концентрації інгібітору.

Нехай коефіцієнт дифузії інгібітору настільки малий, що ним можна знехтувати. Розглянемо межу двох однорідних областей з концентраціями інгібітору  $n_1$  та  $n_2$ . Для визначеності вважатимемо, що концентрація  $n_1$  реалізується в області  $x < 0$ , а концентрація  $n_2$  – в області  $x > 0$ , причому  $n_2 > n_{cr} > n_1$ . Виявляється, що на такій межі може існувати так званий нерухомий фронт збудження – область просторової зміни температури, яка з часом залишається нерухомою. При цьому принаймні в одній з розглядуваних областей відбувається процес горіння, який супроводжується плавною зміною просторових розподілів концентрації інгібітору та температури з часом. Такі самі зміни можуть відбуватись і в області, де горіння відсутнє.

Можуть існувати різні типи нерухомих фронтів збудження. Наприклад, в області з низькою концентрацією інгібітору може відбуватися горіння, а в області з високою концентрацією, навпаки, горіння може не бути. Просторові розподіли температури та концентрації інгібітору для цього випадку подані на рис. 2.3.9 в. Розподіл такого типу протягом певного часу є стійким.

Може бути й навпаки, коли в області з низькою концентрацією інгібітору горіння відсутнє, а в області з високою концентрацією воно відбувається. Один з можливих варіантів

просторового розподілу температури та концентрації інгібітору для цього випадку поданий на рис. 2.3.9 г. Він виявляється нестійким.

Оскільки в процесі горіння інгібітор з часом накопичується, а за відсутності горіння – навпаки, розпадається, то стійкий розв’язок (рис. 2.3.9 в) з часом переходить у нестійкий (дзеркально симетричний щодо точки  $x = 0$  до зображеного на рис. 2.3.9 г). Останній врешті решт тим чи іншим способом руйнується, і на його місці знову виникає стійкий розв’язок (дзеркально симетричний щодо точки  $x = 0$  до зображеного на рис. 2.3.9 в). Це руйнування супроводжується поширенням хвиль перекидання в обидва боки від межі областей. В результаті нерухомий фронт збудження виступає як періодичне джерело хвиль запалювання та гасіння, тобто біжучих імпульсів.

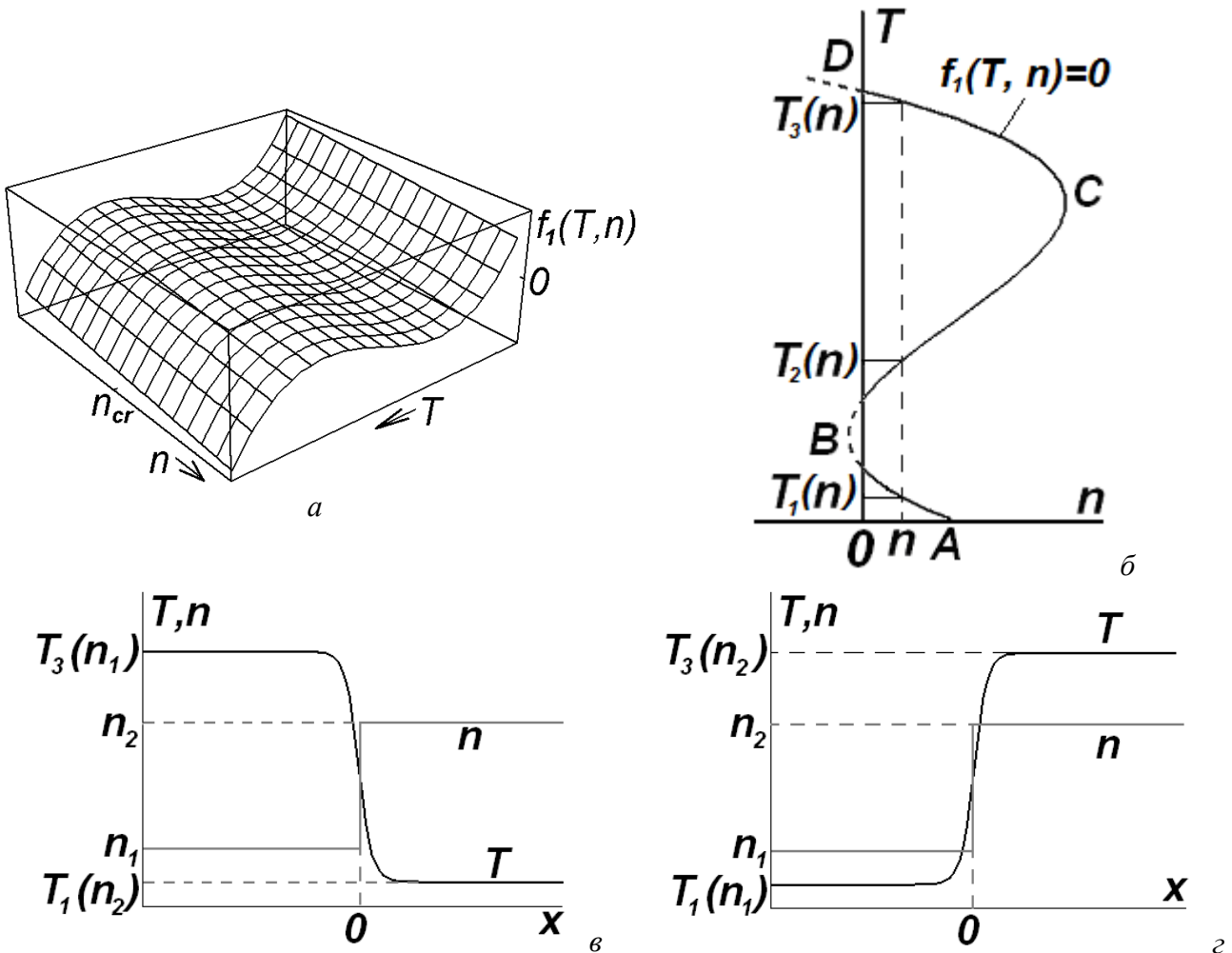


Рис. 2.3.9. До аналізу нерухомого фронту збудження: а – залежність  $f_1(T, n)$ ; б – графік залежності  $f_1(T, n) = 0$  (ділянки АВ, ВС та CD відповідають стаціонарним розв’язкам  $T_1(n)$ ,  $T_2(n)$  та  $T_3(n)$ ); в, з – вигляд стійкого (в) та нестійкого (з) нерухомого фронту збудження при заданому профілі концентрації інгібітору

Підкреслимо ще раз, що умовою існування нерухомого фронту збудження є мализна коефіцієнту дифузії інгібітору – лише в цьому випадку концентрація може змінюватися в просторі швидше від температури.

Тепер спробуємо акуратніше побудувати можливі залежності  $T(x)$ , вважаючи стрибкоподібний розподіл  $n(x)$  заданим ( $n(x < 0) = n_1, n(x > 0) = n_2$ ). Залежності  $T(x)$  можна отримати, використовуючи перше з рівнянь (2.2.34) за умови  $\partial/\partial t = 0$ :

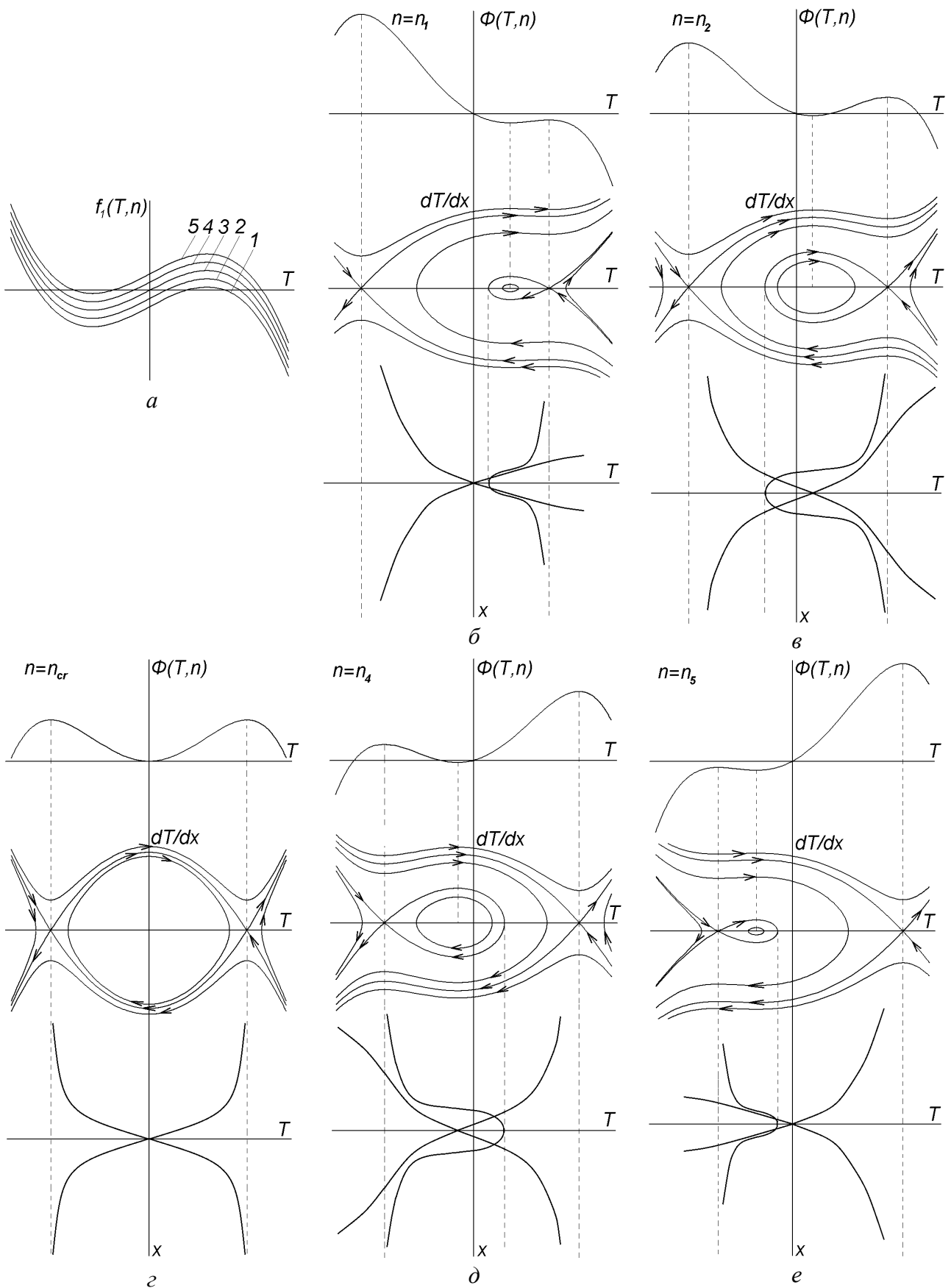


Рис. 2.3.10. До аналізу еволюції нерухомого фронту збудження: а – кінетична функція при різних значеннях концентрації інгібітору ( $n_1 > n_2 > n_3 = n_{cr} > n_4 > n_5$ ); б-е – профілі "потенціалу", "фазові портрети" та просторові розподіли температури для відповідних концентрацій інгібітору

$$D \frac{d^2 T}{dx^2} + f_1(T, n) = 0. \quad (2.3.44)$$

Це рівняння слід доповнити граничними умовами. Очевидно, на нескінченності температура повинна прямувати до відповідних сталих значень, що відповідають даним концентраціям інгібітору, а на стрибку концентрації інгібітору температура має бути неперервною разом зі своєю похідною:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0; \quad T(x \rightarrow -\infty) = T_1(n_1); \quad T(x \rightarrow \infty) = T_3(n_2);$$

$$T(x = -0) = T(x = +0); \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-0} = \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=+0}. \quad (2.3.45)$$

Таким чином, ми вважаємо, що горіння відбувається в області  $x > 0$  і відсутнє в області  $x < 0$ .

### 2.3.5.3. Дослідження просторових профілів температури в середовищі з однорідним розподілом концентрації інгібітору

Перш ніж будувати розв'язки рівняння (2.3.44) з граничними умовами (2.3.45) на стрибку концентрації інгібітору, розглянемо спершу такі розв'язки в середовищі з однорідним розподілом концентрації інгібітору.

Рівняння типу (2.3.44), яке можна формально інтерпретувати як рівняння нелінійного консервативного осцилятора, детально розглядалося в п.2.2.1.5. Тому відразу можна намалювати його "фазові портрети" для однорідного середовища (де замість похідних за часом фігурують похідні за координатою) для випадків  $n = n_1$  та  $n = n_2$ . Разом з відповідними профілями "потенціалу" вони подані на рис. 2.3.10, де показано також "профіль потенціалу" та "фазовий портрет" для випадку  $n = n_{cr}$ .

Кожній з фазових траєкторій, показаних на рис. 2.3.10 б-е, відповідає деякий стаціонарний просторовий профіль температури  $T(x)$ , який може бути реалізований при відповідному значенні концентрації інгібітору  $n$ . Зокрема, сепаратрисам відповідають просторово обмежені або напівобмежені неоднорідності температури.

"Фазові портрети" на рис. 2.3.10 побудовані в припущенні  $n = const$ . В дійсності в результаті накопичення інгібітору при горінні та його розпаду за відсутності горіння і відповідних змін температури ця умова порушується. Через те "фазові портрети" однорідного середовища мають бути тривимірними (зміну концентрації інгібітору вважаємо плавною, тому похідну від концентрації інгібітору в першому наближенні можна прийняти нульовою).

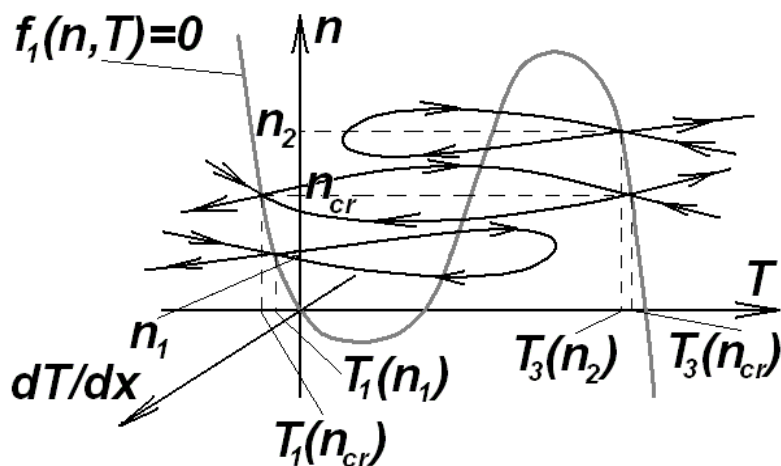


Рис. 2.3.11. Тривимірний фазовий портрет досліджуваної системи

Розглянемо такий тривимірний «фазовий портрет» в координатах  $n, T, dT/dx$ . Він поданий на рис. 2.3.11. Лінія  $f_1(T, n) = 0$ , на якій знаходяться стаціонарні точки "фазових траєкторій", лежить у площині  $n, T$ . В розглядуваному наближенні змінна  $n$  є повільною, тому «фазові траєкторії» лежать у площинах  $n = const$ . Оскільки єдині «фазові траєкторії», що проходять через стаціонарні точки  $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$  та  $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$  – це сепаратриса, то саме вони й показані. Подана також сепаратриса, що відповідає значенню  $n = n_{cr}$ .

2.3.5.4. Дослідження профілів температури, що відповідають нерухомому фронту збудження

Тепер спробуємо сконструювати розв'язки, що задовольняють рівняння (2.3.44) з граничними умовами (2.3.45) на заданому ступінчастому розподілі концентрації інгібітору. Ці розв'язки будуть принципово відрізнятися для випадків  $n_2 > n_{cr} > n_1$  та  $n_1 > n_{cr} > n_2$  (див. вище п. 2.3.5.2). Розберемо спочатку перший з цих випадків.

Нехай спочатку зображувальна точка знаходилася в точці  $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$ , якій відповідає точка А на рис. 2.3.12 а. Від неї зображувальна точка рухається вздовж петлі сепаратриса до точки В. Точка В відповідає перетину проєкцій петель сепаратрис, які проходять через точки А та D (остання має координати  $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$ , на площину  $n = const$ . Покладемо, що саме точка В відповідає стрибку концентрації інгібітору в площині  $x = 0$ . По інший бік від цього стрибка знаходиться точка С, куди й переходить зображувальна точка з точки В. Далі зображувальна точка рухається вздовж петлі сепаратриса, поки не прийде в точку D. Отриманий таким чином розподіл  $T(x)$  поданий на рис. 2.3.12 б. Він, очевидно, повністю задовольняє граничним умовам (2.3.45).

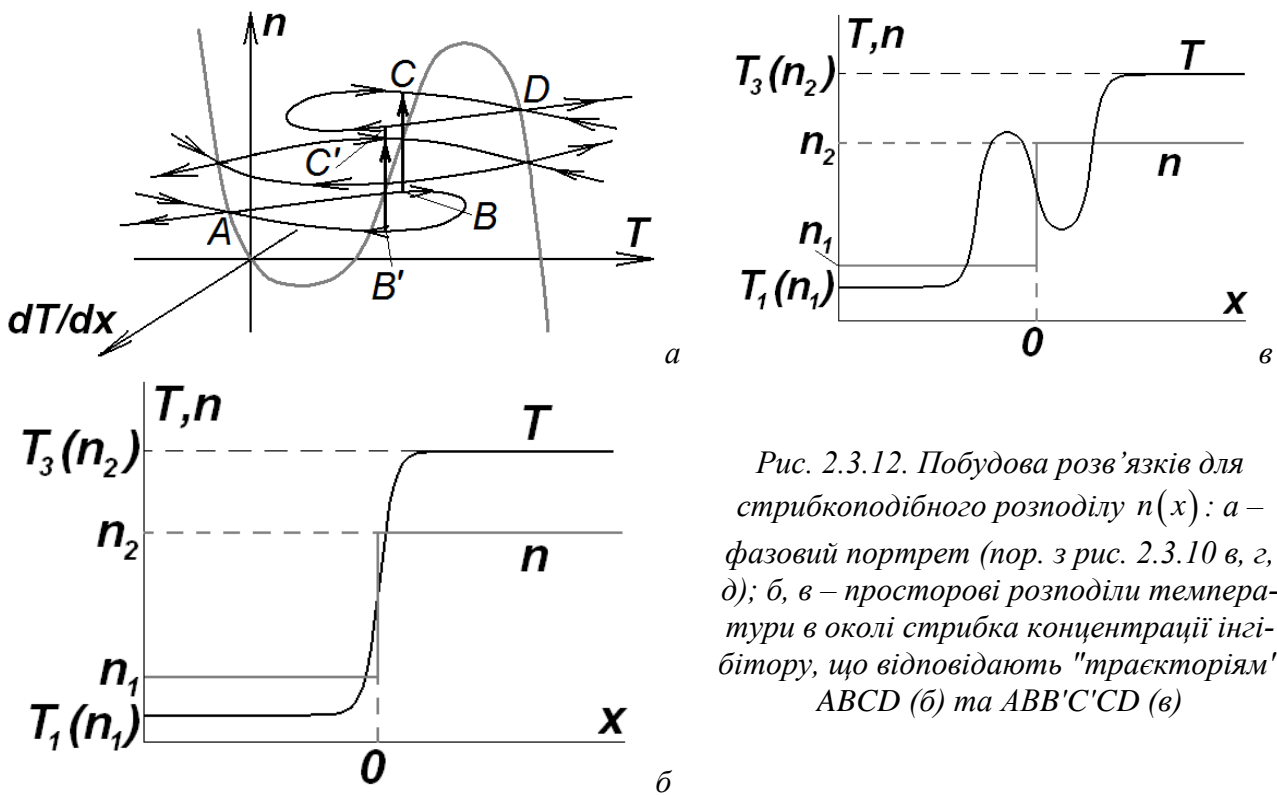


Рис. 2.3.12. Побудова розв'язків для стрибкоподібного розподілу  $n(x)$ : а – фазовий портрет (пор. з рис. 2.3.10 в, г, д); б, в – просторові розподіли температури в околі стрибка концентрації інгібітору, що відповідають "траєкторіям" ABCD (б) та ABB'C'D (в)

Слід, однак, відзначити, що проєкції згаданих вище петель сепаратрис на площину  $n = const$  насправді перетинаються в двох точках. Друга з них відповідає точкам В' та С'. Таким чином, крім фазової траєкторії ABCD, граничним умовам (2.3.45) відповідає також фа-

зова траєкторія  $AB'C'D$ . Відповідна їй залежність  $T(x)$  подана на рис. 2.3.12 в. Таким чином, за умови  $n_2 > n_{cr} > n_1$  існують два розв'язки, що відповідають переходу з точки  $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$  у точку  $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$ .

Відзначимо, що такі розв'язки можливі не завжди. Справді, при фіксованому значенні  $n_2$  та зменшенні  $n_1$  розмір петлі сепаратриси, що виходить із точки А (рис. 2.3.12 а), буде зменшуватися. В граничному випадку проекції на площину  $n = const$  петель сепаратрис, що виходять з точок А та D, будуть уже не перетинатись, а лише дотикатись (рис. 2.3.13 а). Очевидно, в цьому випадку в точці, де має місце стрибок концентрації інгібітору, залежність  $T(x)$  матиме нульовий нахил (рис. 2.3.13 б). При подальшому зменшенні  $n_1$  існування нерухомого фронту збудження стає неможливим (рис. 2.3.13 в). Така сама ситуація реалізується при фіксованому  $n_1$  та зростанні  $n_2$ , а також при одночасному симетричному відхиленні  $n_1$  та  $n_2$  в протилежні боки від значення  $n_{cr}$ . В останньому випадку нерухомий фронт збудження зникає, коли назване відхилення досягає деякого порогового значення  $\Delta_{max}$ .

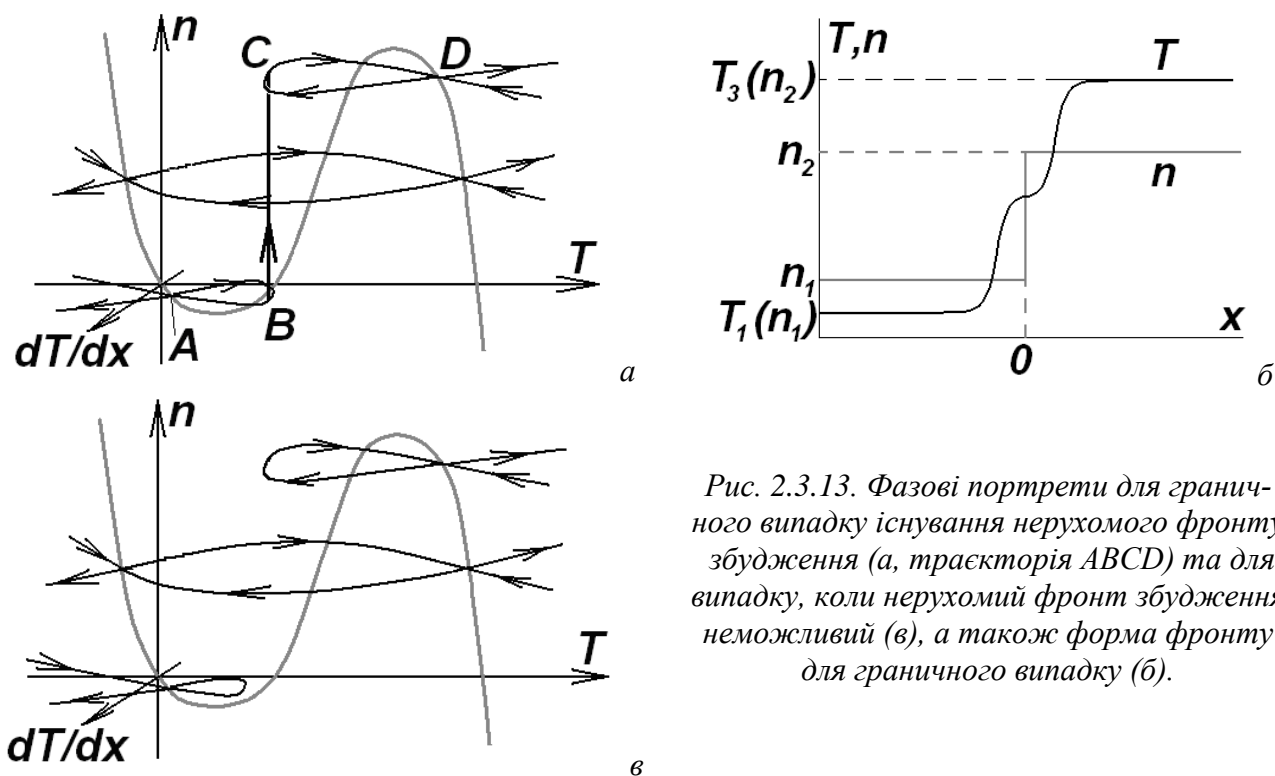


Рис. 2.3.13. Фазові портрети для граничного випадку існування нерухомого фронту збудження (а, траєкторія ABCD) та для випадку, коли нерухомий фронт збудження неможливий (в), а також форма фронту для граничного випадку (б).

Розглянемо тепер випадок, коли  $n_2 < n_{cr} < n_1$ . Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис. 2.3.14 а. Як і раніше, точка А має координати  $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$ , точка D – координати  $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$ . Тепер фазові траєкторії, що виходять з точок А та D, вже не є петлями сепаратрис (хоча ці точки зберігають сідловий характер – див. рис. 2.3.14 а). Їхні проекції на площину  $n = const$  перетинаються в єдиній точці, якій на рис. 2.3.14 а відповідають точки В та С. Таким чином, нерухомому фронту збудження відповідає фазова траєкторія ABCD. Відповідний профіль температури показаний на рис. 2.3.14 б.

### 2.3.5.5. Стійкість нерухомого фронту збудження

Обговоримо тепер питання про стійкість нерухомого фронту збудження.

Нерухомий фронт збудження при  $n_2 < n_{cr} < n_1$  (рис. 2.3.14 б) для заданого розподілу концентрації інгібітору є стійким. Справді, в області, де інгібітору мало, в принципі можлива



лише хвиля запалювання, але там і так уже відбувається горіння. В області ж, де інгібітору багато, можлива лише хвиля гасіння, але там і так немає горіння. Взагалі про стійкість фронту можна судити за напрямком руху, який виникає при початковому відхиленні фронту на віддаль, більшу від його ширини. Зокрема, при  $n_2 < n_{cr} < n_1$  швидкість зсунутого фронту (незалежно від того, в який бік він зсунутий) спрямована до точки зупинки, тому він повертається в початкове положення (рис. 2.3.15 а).

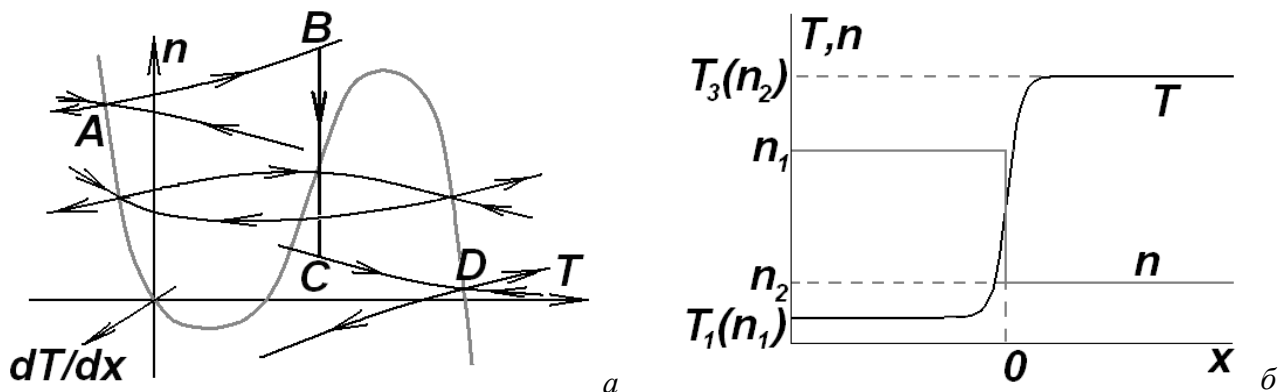


Рис. 2.3.14. Нерухомий фронт збудження при  $n_2 < n_{cr} < n_1$ : а – фазовий портрет; б – профілі температури та концентрації інгібітору

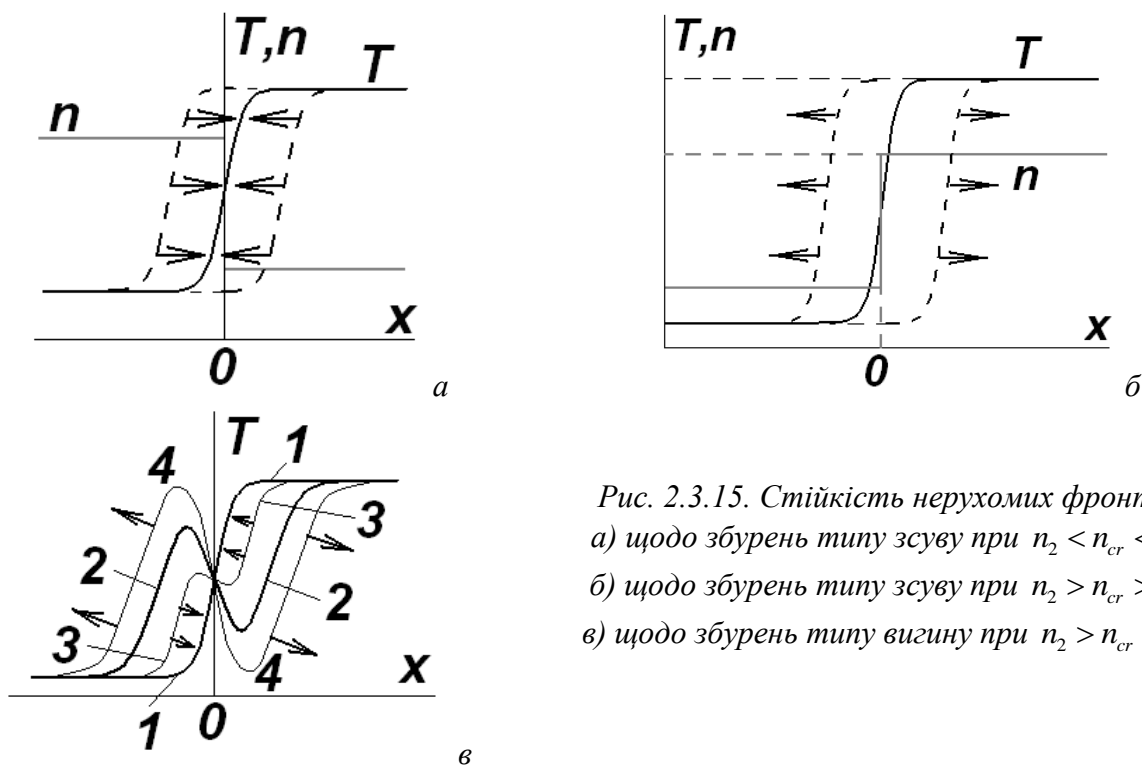


Рис. 2.3.15. Стійкість нерухомих фронтів: а) щодо збурень типу зсуву при  $n_2 < n_{cr} < n_1$ ; б) щодо збурень типу зсуву при  $n_2 > n_{cr} > n_1$ ; в) щодо збурень типу вигину при  $n_2 > n_{cr} > n_1$ .

Як уже вказувалося, при  $n_2 > n_{cr} > n_1$  можливі два розв'язки типу нерухомого фронту, показані на рис. 2.3.12 б, в – їм відповідають криві 1 та 2 на рис. 2.3.15 в.

Нерухомі фронти збудження з монотонною просторовою залежністю температури типу кривої 1 на рис. 2.3.12 б (якщо вони існують) є нестійкими (для заданого профілю концентрації інгібітору). Справді, від такого фронту в область низької концентрації інгібітору може побігти хвиля запалювання, а в область високої концентрації інгібітору – хвиля гасіння. Таким чином, швидкість зсунутого фронту (так само незалежно від напрямку початкового зсуву) тепер спрямована від точки зупинки, тому його відхилення від початкового положення з

часом зростатиме. Отже, в цьому випадку нерухомий фронт нестійкий щодо збурень типу зсуву (рис. 2.3.15 б). Підкреслимо, що збурення типу зсуву, про які тут ідеться, вже не описуються стаціонарним рівнянням (2.3.44). Для аналізу таких збурень слід використовувати повну систему рівнянь (2.2.35).

Нерухомі фронти збудження з немонотонною просторовою залежністю температури типу кривої 2 на рис. 2.3.15 в є нестійкими щодо збурень типу вигину. Зменшення вигину (крива 3) приводить урешті до встановлення фронту з монотонною просторовою залежністю температури, збільшення вигину (крива 4) породжуватиме пару хвиль перекидання, що розбігаються в обидва боки від нерухомого фронту (рис. 2.3.15 в). Для опису цих хвиль, як і в попередньому випадку, слід користуватися повною системою (2.2.35). Таким чином, можна припустити, що розв'язок з немонотонним профілем температури (крива 2 на рис. 2.3.15 в) визначає межу області стійкості розв'язку з монотонним профілем (крива 1).

При збільшенні різниці  $n_2 - n_1$  та наближенні до граничного випадку (див. рис. 2.3.13 а-б), коли криві 1 та 2 (рис. 2.3.15 в) зливаються, ширина області стійкості першого розв'язку щодо збурень типу вигину поступово зменшується до нуля.

### 2.3.5.6. Поділ нерухомого фронту збудження

Нестійкість нерухомого фронту збудження при  $n_2 > n_{cr} > n_1$  щодо збурень типу вигину (рис. 2.3.15 в) може привести до утворення джерела періодичних автохвиль у первісно однорідному середовищі – так званого автопейсмерка. Розглянемо, як цей ефект реалізується і за яких умов він можливий.

Нехай характеристики  $f_1(n, T) = 0$  та  $f_2(n, T) = 0$  (див. рівняння 2.2.34) симетричні щодо точки  $T = T_2(n_{cr})$ . Тоді відхилення температури та концентрації інгібітору від значень  $n_{cr}$  та  $T_2(n_{cr})$  по обидва боки нерухомого фронту за будуть модулем однаковими. Крім того, швидкості як швидких, так і повільних рухів по обидва боки нерухомого фронту також будуть однаковими (хоч напрямки цих рухів будуть протилежними).

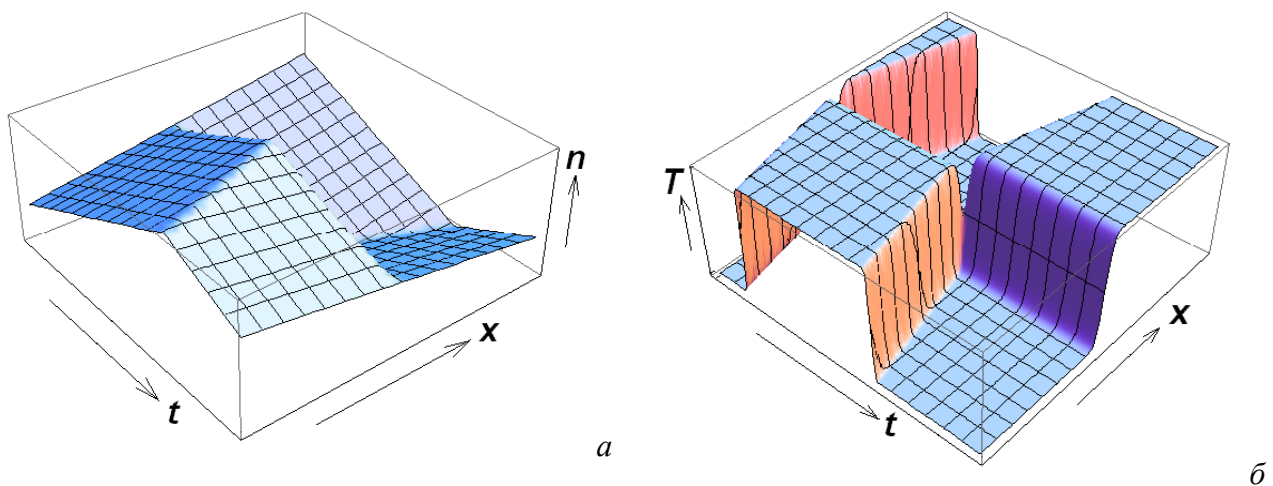


Рис. 2.3.16. Процес поділу нерухомого фронту: а – повільна зміна концентрації інгібітору; б – “перекидання” нерухомого фронту температури на стрибку концентрації інгібітору та поширення хвиль перекидання в обидва боки.

Нехай у початковий момент часу в точці  $x=0$  існує стійкий нерухомий фронт збудження (рис. 2.3.14 б). Це означає, що в області  $x < 0$  горіння відсутнє, і там  $n_1 > n_{cr}$ . В області  $x > 0$ , навпаки, відбувається горіння, і  $n_2 < n_{cr}$ . З часом в області  $x < 0$  концентрація інгібітору зменшуватиметься (нагадаємо, що за відсутності горіння інгібітор розпадається), а в області  $x > 0$  – навпаки, збільшується (горіння приводить до виділення інгібітору) –

рис. 2.3.16 а. Через певний час концентрації в областях  $x > 0$  та  $x < 0$  вирівнюються, так що  $n_1 = n_2 = n_{cr}$ . Після цього різниця  $n_2 - n_1$  стає додатною і в деякий наступний момент часу зростає настільки, що реалізується граничний випадок (рис. 2.3.13 б), який, як відзначалося вище, є нестійким щодо малих збурень. Очевидно, це відбудеться при  $n_{1,2} = n_{cr} \mp \Delta_{max}$ . В результаті швидкого зростання збурень температури типу вигину почне розвиватися нестійкість, і від колишнього нерухомого фронту побіжать дві хвилі перекидання – хвиля запалювання в область  $x < 0$  та хвиля гасіння в область  $x > 0$  (рис. 2.3.16 б). На місці ж стрибка концентрації інгібітору знову виникне стрибок температури, але знак його зміниться на протилежний. Можна вважати, що за час розвитку нестійкості розподіл концентрації інгібітору змінитися не встигає (пор. зі швидкостями зміни температури та концентрації інгібітору на фронтах біжучого імпульсу – див. вище п. 2.2.2).

На наступній стадії процесу (ділянка повільного руху) концентрація інгібітору в області  $x < 0$ , де тепер відбувається горіння, поступово зростає, а в області  $x > 0$ , де горіння відсутнє – зменшується (рис. 2.3.16 а). В якийсь момент одночасно по обидва боки нерухомого фронту названа концентрація проходить через критичне значення. В наступні моменти часу в системі реалізується ситуація  $n_2 < n_{cr} < n_1$ , в результаті чого фронт горіння стає нестійким. Подальше зростання різниці  $n_1 - n_2$  триває доти, доки не реалізується граничний випадок. При його досягненні знову розвивається нестійкість: в область  $x > 0$  біжить хвиля запалювання, в область  $x < 0$  – хвиля гасіння, а стрибок температури в точці  $x = 0$  змінює знак (рис. 2.3.16 б). Таким чином, у системі відтворюються початкові умови, з яких ми почали розгляд.

В результаті по обидва боки від нерухомого фронту формується періодична послідовність біжучих імпульсів, причому проміжок між імпульсами горіння якраз дорівнює тривалості цих імпульсів (рис. 2.3.16).

#### 2.3.5.7. Джерело типу “луна”

Як уже відзначалося, нерухомий фронт при  $n_2 > n_{cr} > n_1$  (рис. 2.3.12 б) нестійкий не лише щодо збурень типу згину, але й щодо збурень типу зсуву. Останній тип нестійкості також може привести до формування автопеймекера, точніше, джерела періодичних імпульсів типу “луна”.

Нехай критичне значення концентрації інгібітору в цих областях, як і раніше, досягається одночасно. Вважатимемо, однак, що тепер швидкості накопичення та розпаду інгібітору по різні боки нерухомого фронту відрізняються, причому більшою швидкістю характеризується розпад інгібітору.

Нехай у початковий момент часу на межі поділу двох областей (в точці  $x = 0$ ) виконано умову  $n = n_{cr}$ , в області відбувається горіння, в області  $x < 0$  горіння відсутнє. Через деякий час в області  $x > 0$  концентрація інгібітору зростає, в області  $x < 0$  зменшиться, так що буде виконано умову  $n_2 > n_{cr} > n_1$  (рис. 2.3.17 а). Тоді виникають умови для розвитку нестійкості типу зсуву. В результаті розвитку цієї нестійкості формується спочатку хвиля запалювання, що біжить в область  $x < 0$  (рис. 2.3.17 б).

З часом подальше збільшення концентрації інгібітору в області  $x > 0$  (рис. 2.3.17 а) приведе до того, що горіння в цій області стане “енергетично не вигідним”, і від межі  $x = 0$  побіжить хвиля гасіння (рис. 2.3.17 б). Таким чином, у точці  $x = 0$  знову сформується стрибок температури, але його знак буде протилежним до початкового.

Внаслідок сформованого таким чином розподілу температури в області  $x > 0$  концентрація інгібітору спадатиме, в області  $x < 0$  – зростатиме. В деякий момент часу концентрація інгібітору на межі  $x = 0$  досягне критичного значення, і в системі відтворяться початкові умови з тією тільки відмінністю, що області  $x > 0$  та  $x < 0$  поміняються місцями (рис. 2.3.17 б).

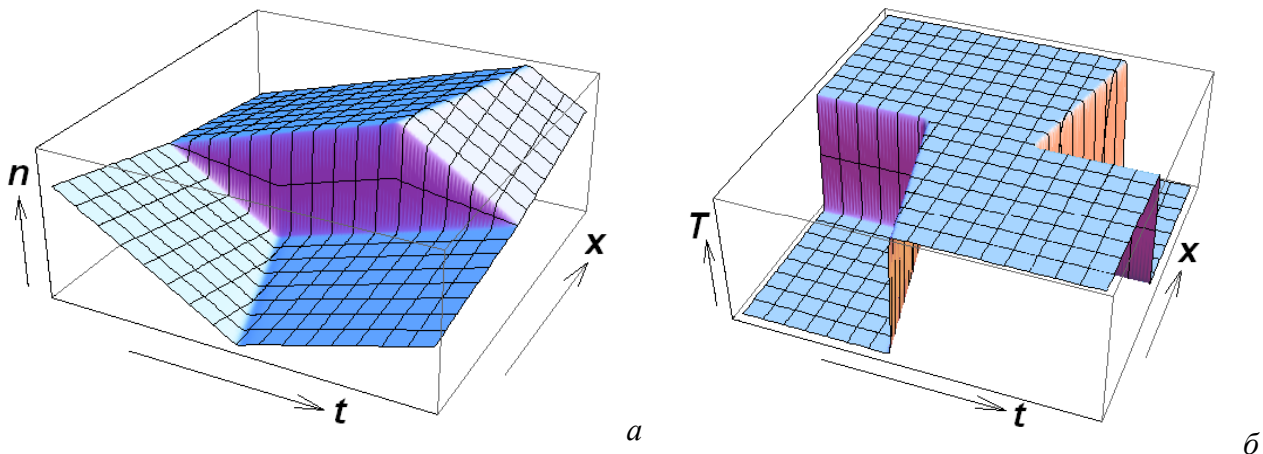


Рис. 2.3.17. Джерело типу “луна”: а – повільна зміна концентрації інгібітору; б – послідовне руйнування нерухомого фронту двома нестійкостями типу зсуву.

В результаті описаних процесів в обидва боки від нерухомого фронту збудження, як і в попередньому випадку джерела типу «поділ фронту», періодично виникатимуть і поширюватимуться імпульси горіння. Відмінність полягатиме в тому, що, по-перше, тривалість імпульсів тепер буде більшою, ніж проміжок між сусідніми імпульсами (рис. 2.3.17 б), і, по-друге, хвилі перекидання в різні боки від нерухомого фронту будуть тепер відбігати неодноразово.

Параметри імпульсів, генерованих джерелом типу «луна», зокрема, профілі температури та концентрації інгібітору, можна оцінити з умови, що в стаціонарному режимі швидкості переднього й заднього фронтів біжучих імпульсів (тобто хвилі запалювання й хвилі гасіння) мають бути однаковими, а їхня довжина має відповідати максимально можливому значенню хвильового числа  $k_{\max}$ , при якому періодична послідовність біжучих імпульсів у середовищі з відновленням ще залишається стійкою (див. вище п. 2.2.3).

На завершення слід відзначити, що обидва режими – періодичний поділ фронту та луна – можливі лише при спеціальному підборі швидкостей повільних рухів. Це означає, що в розглянутій моделі режим автопейсмерів є негрубим (структурно нестійким) щодо варіації параметрів системи. Структурна стійкість розв’язків такого типу, як уже відзначалося, можлива тільки в трикомпонентній системі.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.3.5

1. Порівняйте між собою джерела автохвиль типу поділу фронту та типу “луна”.
2. Чим визначається тривалість біжучих імпульсів, генерованих джерелом типу “луна”?
3. Чи може тривалість імпульсів горіння, генерованих джерелом типу “луна”, бути меншою, ніж проміжок між ними? Якщо може, то за яких умов?
4. Чи можна в двовимірній моделі створити автопейсмер на основі джерела автохвиль типу «поділ фронту»?
5. Чи можна в двовимірній моделі створити автопейсмер на основі джерела автохвиль типу “луна”?
6. Намалюйте епюри зміни температури та концентрації інгібітору по обидва боки від джерела типу «поділ фронту» з урахуванням взаємної залежності температури стаціонарного стану та концентрації інгібітору.
7. Намалюйте епюри зміни температури та концентрації інгібітору по обидва боки від джерела типу «луна» з урахуванням взаємної залежності температури стаціонарного стану та концентрації інгібітору.

#### Задачі до підрозділу 2.3.5

2.3.5.1. Для середовища, описуваного рівняннями Фітц-Х’ю – Нагумо, знайдіть умову того,

що швидкості накопичення та розпаду інгібітору по різні боки нерухомого фронту є однаковими.

2.3.5.2. Для середовища, описуваного рівняннями Фітц-Х'ю – Нагумо, запишіть умову (в загальному вигляді), яка дозволяє знайти амплітуду коливань концентрації інгібітору  $\Delta_{\max}$ , збуджуваних джерелом типу «поділ фронту».

2.3.5.3\*. Користуючись рівняннями Фітц-Х'ю – Нагумо, розрахуйте параметри періодичної послідовності біжучих імпульсів, генерованих джерелом типу поділу фронту.

### ***Висновки до розділу 2.3***

1. Найпростішим автономним джерелом автохвиль може служити автогенератор на відрізок активної довгої лінії. Позитивний зворотний зв'язок у такій системі забезпечується відбиттям хвилі від кінців відрізка. Довжина хвилі генерованого сигналу в цьому випадку визначається довжиною відрізка активної лінії.
2. Джерело спіральних хвиль, або ревербератор, може виникнути в однорідному середовищі з відновленням за рахунок підбору відповідних початкових умов. Спіральна хвиля обертається навколо ядра зі сталою кутовою швидкістю, не змінюючи своєї форми. На далеких віддалях від ядра спіраль є архімедовою. Скручування фронту хвилі в спіраль зумовлене тим, що нормальна швидкість фронту (принаймні, на великих віддалях від ядра) повинна залишатися незмінною.
3. Розміри ядра спіралі визначаються мінімально можливим у даному середовищі просторовим періодом періодичної послідовності біжучих імпульсів. Існування ядра спіральної хвилі для моделі середовища з горінням, яке супроводжується виділенням інгібітору, зумовлене тим, що в ядро від краю хвилі, що обертається навколо нього, весь час дифундує інгібітор, і запалювання в цій області виявляється неможливим.
4. Ревербератори можуть виникати і в середовищах автоколивного типу.
5. В середовищах автоколивного типу можливі також джерела концентричних фазових хвиль, або пейсмейкери. Пейсмейкери виникають у неоднорідних середовищах, а саме в областях, де частота автоколивань є підвищеною. Коливання таких джерел поширюються в просторі, придушуючи в результаті конкуренції синфазні автоколивання середовища.
6. У середовищах із відновленням також можливі джерела концентричних хвиль. Їхня природа остаточно не з'ясована. Одна з точок зору зводиться до того, що в неоднорідному середовищі деякі області набувають автоколивних властивостей. Інша точка зору полягає в тому, що такі джерела (їх прийнято називати автопейсмейкерами) виникають в однорідному середовищі, коли два сусідніх елемента весь час перебувають у протилежних станах (основному та метастабільному), збуджуючи сусідній елемент при переході до основного стану. Розроблено дві моделі автопейсмейкерів – типу поділу фронту та типу луни. У першій моделі тривалість горіння точно дорівнює тривалості відновлення, тому від межі двох областей з протилежними станами (її називають нерухомим фронтом збудження) періодично розбігаються хвилі перекидання (одночасно в обидва боки). У другій моделі, коли тривалість горіння перевищує час відновлення, від області, яка ще продовжує горіти, періодично підпалюється сусідня область, яка вже встигла відновитись.

### ***Контрольні питання до розділу 2.3***

1. Чи існує зв'язок між типами активних середовищ та типами джерел, що існують у цих середовищах?
2. Порівняйте між собою ревербератори в середовищах із відновленням та в середовищах автохвильового типу.
3. Порівняйте між собою пейсмейкери та автопейсмейкери.
4. Чи можливі, на Вашу думку, автономні джерела періодичних автохвиль у бістабільних середовищах?

## Розділ 2.4. Стаціонарні дисипативні структури

Стаціонарні дисипативні структури – це структури, які виникають у первісно однорідному середовищі, причому їхні властивості слабо залежать від початкових та граничних умов. Вище вже побіжно розглядалися такі структури на прикладі одновимірних стаціонарних станів у брьоселяторі (див. п. 1.3.3.5). Але брьоселятор – це лише зручна модельна система. У цьому підрозділі ми розглянемо реальні приклади стаціонарних дисипативних структур та механізми їхнього виникнення. Такі механізми можна умовно розділити на дві великі групи: це насичення аперіодичної нестійкості та розподілений зворотний зв'язок. Перший механізм приводить до формування просторово періодичних (або квазіперіодичних) дисипативних структур, другий – відповідно до формування аперіодичних структур.

### *2.4.1. Періодичні дисипативні структури: модель морфогенезу Тюрінга*

Дисипативні структури в системах, де немає розподіленого зворотного зв'язку, виникають в результаті розвитку аперіодичної нестійкості, яку можна розглядати як результат біфуркації Тюрінга (див. п. 1.3.3.3). В результаті насичення такої нестійкості в первісно однорідному середовищі виникають просторово-періодичні структури, основні характеристики яких (амплітуда, просторовий період) визначаються властивостями самого середовища і не залежать від граничних (якщо розміри однорідної області достатньо великі) та початкових умов.

Прикладами таких структур можуть бути, крім уже розглянутої моделі брьоселятора, структура полярних сьйв, обумовлена розпадом електронних потоків в іоносфері на окремі джгути, перисті хмари з виявленою просторовою періодичністю, стратифікація кометних хвостів або плазмових хмар в активних експериментах в іоносфері та багато інших.

У біології прикладом стаціонарних дисипативних структур є квазіперіодична будова деяких організмів (черви, багатоніжки, кишковопорожнинні та інші), а також виникнення плям чи смуг на шкірі або хутрі ряду тварин. Для пояснення цих явищ А.Тюрінг запропонував хімічний механізм<sup>1</sup>. Він припустив, що періодичність виникає за рахунок нерівномірного розподілу деякої речовини – так званого морфогена.

Існування морфогенів досі прямо не встановлене. Тим не менше модель Тюрінга користується популярністю, оскільки вона дає змогу пояснити численні експериментальні результати за допомогою небагатьох простих ідей. З іншого боку, ця модель є, мабуть, найпростішою з усіх, що описують виникнення стаціонарних дисипативних структур у первісно однорідних активних середовищах.

#### *2.4.1.1. Якісний опис моделі Тюрінга*

Тюрінг припустив, що морфогени можуть реагувати один з одним та дифундувати через клітини. Дослідження математичної моделі, заснованої на цьому припущенні, показало, що з первісно однорідного розподілу морфогенів у скупченні клітин можуть виникнути просторові структури розподілу морфогенів.

Модель Тюрінга стала прообразом цілого ряду так званих реакційно-дифузійних моделей. Такі моделі застосовні до систем, у яких характерний розмір просторової структури значно більший від розмірів окремих клітин.

Найпростіша реакційно-дифузійна модель включає два морфогени, що реагують один з одним та дифундують із різними швидкостями. За відсутності дифузії в системі можливий однорідний стаціонарний стан, причому такий стан є стійким.

Якщо морфогени дифундують з однаковими швидкостями, будь-яке відхилення від однорідного стаціонарного стану з часом буде розсмоктуватись. Але якщо швидкості дифузії компонент відмінні, то швидкості реакції в деякій заданій точці можуть не встигнути швидко підлаштуватися під рівноважний стан. За певних умов малі просторові збурення можуть ста-

---

<sup>1</sup> Див.: A.M.Turing. The chemical basis of morphogenesis. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. 1952. V.237. No 641. Pp.37-72.

ти нестійкими, і в системі почне формуватися просторова структура. В цьому випадку говорять про дифузійну нестійкість (нестійкість, обумовлену дифузією). Просторова неоднорідність, обумовлена розвитком дифузійної нестійкості, відома в екології як плямистість.

#### 2.4.1.2. Умови розвитку дифузійної нестійкості в двокомпонентній системі

Розглянемо двокомпонентну систему, що описується парою нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v \end{cases}$$

(такі рівняння використовувалися для опису середовищ із відновленням, див. вище п. 2.2.2). Обмежимося для простоти одновимірним випадком ( $u = u(x, t), v = v(x, t)$ ).

Як і раніше, вважатимемо, що система (2.2.34) має єдиний однорідний стаціонарний розв'язок  $u = u_0, v = v_0$ . З'ясуємо, чи буде цей розв'язок стійким.

Лінеаризуючи систему (2.2.34) по малих відхиленнях  $\tilde{u}, \tilde{v}$  від стаціонарного однорідного розв'язку  $u_0, v_0$ , можна отримати:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a_{11} \tilde{u} + a_{12} \tilde{v} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = a_{21} \tilde{u} + a_{22} \tilde{v} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

де використані позначення

$$a_{11,21} = \left. \frac{\partial f_{1,2}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_0, v=v_0}; \quad a_{12,22} = \left. \frac{\partial f_{1,2}(u, v)}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=v_0}. \quad (2.4.2)$$

Оскільки система (2.4.1) є лінійною і має сталі коефіцієнти, підставимо її розв'язок у формі  $\exp(\lambda t - ikx)$ . Тоді (2.4.1) перетвориться на однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд змінних  $\tilde{u}$  та  $\tilde{v}$ . Прирівнявши до нуля її визначник, легко знайти характеристичне рівняння для  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \lambda [k^2 (D_1 + D_2) - (a_{11} + a_{22})] + [k^4 D_1 D_2 - k^2 (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})] = 0. \quad (2.4.3)$$

Відповідно до критерію Рауса – Гурвиця, однорідний стаціонарний стан (йому відповідає розв'язок із  $k = 0$ ) середовища, описуваного рівняннями (2.1.34), буде стійким за виконання умов

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} < 0; \\ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Як відомо, порушення другої з умов (2.4.4) означає, що стаціонарна точка  $(u_0, v_0)$  на площині  $(u, v)$  стає сідлом. Порушення першої з названих умов за виконання другої означає, що ця точка стає або нестійким фокусом, або нестійким вузлом.

Перша з нерівностей (2.4.4) може бути задоволена лише тоді, коли одна з величин  $a_{11}, a_{22}$  буде від'ємною.

При ненульових значеннях  $k$  умови стійкості однорідного стаціонарного розв'язку в принципі можуть порушитися. Розглянемо це питання детальніше.

Якщо коефіцієнт при  $\lambda$  в рівнянні (2.4.3) був додатним при  $k = 0$ , він, очевидно, таким і залишиться при ненульових  $k$  (величини  $D_{1,2}$  за змістом задачі додатні). Таким чином, якщо точка  $(u_0, v_0)$  втратить стійкість, то вона може перетворитися лише на точку сідлового



типу, якій відповідають два дійсні значення  $\lambda$  з протилежними знаками. Для цього необхідно виконати умову

$$F(k) \equiv k^4 D_1 D_2 - k^2 (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) < 0. \quad (2.4.5)$$

Ліва частина нерівності (2.4.5) являє собою поліном другого ступеню щодо  $k^2$ , причому коефіцієнт при  $k^4$  та вільний доданок цього поліному додатні. Очевидно, необхідною умовою того, що названий поліном може набувати від'ємних значень, є від'ємність коефіцієнту при  $k^2$ :

$$a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 0. \quad (2.4.6)$$

Достатньою умовою є те, що значення цього поліному в мінімумі, що досягається при  $k_0^2 = (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) / 2 D_1 D_2$ , має бути від'ємним, звідки

$$(a_{11} D_2 - a_{22} D_1)^2 + 4 D_1 D_2 a_{12} a_{21} > 0 \quad (2.4.7)$$

(рис. 2.4.1 а).

Порівнюючи між собою першу з умов (2.4.4) та умову (2.4.6), легко помітити, що одночасне задоволення цих нерівностей можливе лише при  $D_1 \neq D_2$ . Таким чином, необхідною умовою розвитку дифузійної нестійкості тюрингівського типу є різні величини коефіцієнтів дифузії у двокомпонентній системі.

### 2.4.1.3. Утворення просторових структур у системі хижак – здобич

Прикладом системи, описуваної рівнянням (2.2.34), може служити відомий в екології ефект алеї – утворення просторових структур у системі популяцій хижак – здобич.

Нехай кінетичні функції в правих частинах рівняння (2.2.34) мають вигляд

$$f_1(u, v) = u[f(u) - v], \quad f_2(u, v) = v[u - g(v)], \quad (2.4.8)$$

де  $u$  та  $v$  – відповідно кількість особин здобичі та хижаків на одиницю площі системи. Функція  $f(u)$  характеризує швидкість зростання кількості здобичі за відсутності хижаків, функція  $g(v)$  – швидкість зменшення кількості хижаків за відсутності здобичі. Вигляд функцій  $f(u)$  та  $g(v)$  показаний на рис. 2.4.1 б. Точка А, в якій  $u = v = 0$ , точка В, в якій  $v = 0$  та  $f(u) = 0$ , та точка С, в якій  $v = f(u) \equiv v_0$  та  $u = g(v) \equiv u_0$ , відповідають стаціонарним однорідним розв'язкам системи (2.1.34). Зокрема, точка С відповідає співіснуванню популяцій хижак – здобич. Наявність максимуму функції  $f(u)$  відображає ефект перенаселення. Відзначимо, що точка С лежить ліворуч від цього максимуму.

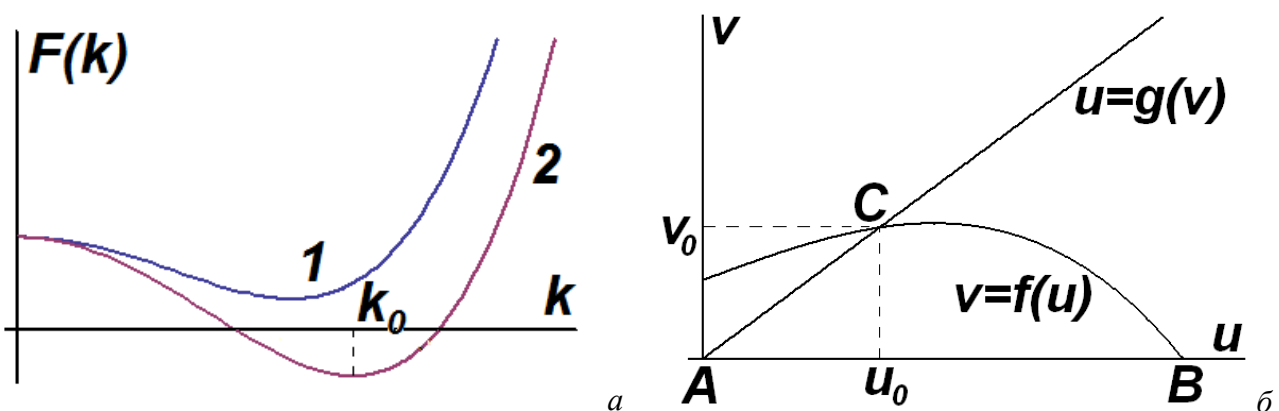


Рис. 2.4.1: а – функція  $F(k)$  за виконання лише умови (2.4.6) (крива 1) та умови (2.4.7) (крива 2); б – вигляд модельних функцій  $f(u)$  та  $g(v)$

Взявши до уваги явний вигляд кінетичних функцій (2.4.8), отримуємо з (2.4.2):



$$a_{11} = u_0 f'(u_0), \quad a_{12} = -u_0, \quad a_{21} = v_0, \quad a_{22} = -v_0 g'(v_0), \quad (2.4.9)$$

де використано позначення

$$f'(u) = \frac{df(u)}{du}, \quad g'(v) = \frac{dg(v)}{dv}$$

і враховано, що  $f(u_0) = v_0$  та  $g(v_0) = u_0$ .

Тоді умови (2.4.4) набувають вигляду:

$$\begin{cases} u_0 f'(u_0) - v_0 g'(v_0) < 0; \\ f'(u_0) g'(v_0) < 1 \end{cases} \quad (2.4.10)$$

(враховано, що за змістом задачі  $u_0$  та  $v_0$  – додатні величини). Відзначимо, що якби точка С на рис. 2.4.1 б була на спадній ділянці залежності  $f(u)$ , першу з умов (2.4.10) було б неможливо задовольнити.

Умова (2.4.6) з урахуванням (2.4.9) набуває вигляду

$$u_0 f'(u_0) D_2 - v_0 g'(v_0) D_1 > 0. \quad (2.4.11)$$

Очевидно, вона може бути задоволена одночасно з першою умовою (2.4.10) лише тоді, коли  $D_2 > D_1$ , тобто коли хижаки рухливіші від здобичі.

Щоб просунутися далі, спростимо модель. Вважатимемо область заселення одновимірною довжиною  $L$ . Тоді розв'язки  $u(x, t)$  та  $v(x, t)$  на її кінцях повинні задовольняти умовам відсутності потоку:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.4.12)$$

Накладання таких умов означає, що спектр можливих значень хвильового числа буде дискретним:  $k_n = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Отже, якщо хоч для одного значення  $n$  умова (2.4.5) (з урахуванням (2.4.9)) буде виконана, в системі розвиватиметься нестійкість дифузійного типу.

Справді, довільне початкове збурення формально можна подати як набір просторових гармонік. Якщо для однієї з них виконано умову нестійкості, то її амплітуда зростатиме з часом, тоді як амплітуди інших гармонік спадатимуть. На пізніх стадіях зростання нестійкості обмежуватиметься за рахунок нелінійностей. Зрозуміло, що останній ефект не може бути описаний розвиненою в цьому та попередньому пунктах теорією, заснованою на лінеаризації початкової системи рівнянь (2.2.34).

Щоб якісно пояснити механізм виникнення дифузійної нестійкості в екологічних системах, розглянемо іншу модель. Нехай деяка область заросла сухим лісом, у якому легко виникають вогнища пожеж. За безпекою слідкують пожежники, озброєні відповідною технікою, включаючи швидкісні гелікоптери та апаратуру зв'язку. Коли виникає чергове вогнище пожежі, пожежників поруч мало, тому вогонь деякий час поширюється. Але потім прилітає велика кількість пожежників на гелікоптерах, які локалізують вогонь, зосереджуючись над областю горіння. В результаті з часом утвориться плямиста структура – області вцілілого лісу чергуватимуться зі згарищами.

Екологам добре відомо, що в ареалі, який виглядає однорідним і не містить областей з багатшими ресурсами чи кращими умовами життя, спостерігається просторово нерівномірний розподіл особин у популяції: зовсім поруч із густо заселеними місцями є місця, що майже зовсім не заселені. Це прояви існування екологічних дисипативних структур.

#### *Контрольні питання до підрозділу 2.4.1*

1. Запропонуйте кілька прикладів систем, у яких можлива дифузійна нестійкість.
2. Чи будуть властивості структур, що виникають у двовимірній області внаслідок розвитку дифузійної нестійкості, залежати від форми цієї області?

### Задачі до підрозділу 2.4.1

2.4.1.1. Як розташовані одна щодо одної області підвищеної концентрації хижаків та здобичі в екологічній дисипативній структурі?

2.4.1.2\*. Задайте аналітично залежності  $f(u)$  та  $g(v)$ , подані на рис. 2.4.1, і, скориставшись рівняннями (2.1.34), змодельуйте розвиток дифузійної нестійкості. Чим визначається рівень її насичення? Окремо розгляньте конкуренцію початкових збурень з різними значеннями хвильового числа.

### 2.4.2. Періодичні дисипативні структури: конвекція Релея - Бенара

Мабуть, найбільш відомим та ефектним прикладом дисипативних структур, що виникають у результаті розвитку аперіодичної нестійкості, є утворення за певних умов регулярних періодичних смуг (так звані конвективні вали) або правильних шестикутних комірок течії рідини в шарі, що підігрівається знизу – явище конвекції Релея – Бенара<sup>2</sup>. Механізм утворення найпростіших структур типу конвективних валів при конвекції Релея – Бенара нічим принципово не відрізняється від розглянутої вище моделі морфогенезу Тюрінга. Але на сьогодні для конвекції Релея – Бенара побудований не тільки лінійний розв'язок, що описує виникнення аперіодичної нестійкості, але й нелінійні розв'язки, які характеризують усталені дисипативні структури різних типів.

Крім того, сама модель конвекції Релея – Бенара значно багатша порівняно з моделлю морфогенезу Тюрінга: крім формування стаціонарних дисипативних структур різного типу, вона дозволяє розглянути перехід до турбулентної динаміки, чим ми скористаємося в подальшому розгляді (див. п. 3.4.2.2).

#### 2.4.2.1. Конвекція Релея – Бенара: опис моделі та вихідні рівняння

Розглянемо шар в'язкої рідини, що займає проміжок  $0 < z < h$  (вісь  $z$  спрямовано вертикально вгору, див. рис. 2.4.2). У площині  $z = 0$  підтримується температура  $T_1$ , у площині  $z = h$  – температура  $T_2$  ( $\delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$ ).

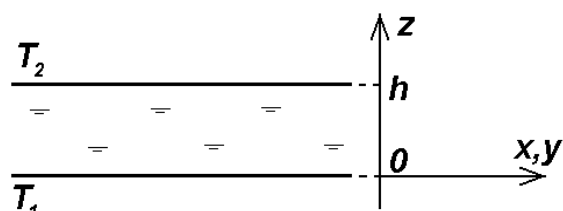


Рис. 2.4.2. Шар рідини, що підігрівається знизу

При невеликих значеннях різниці температур  $\delta T$  рідина залишається нерухомою, так що передача тепла знизу вгору відбувається лише за рахунок теплопровідності. При переході  $\delta T$  через деяке критичне значення  $\delta T_{cr}$  починається конвекція.

Будемо характеризувати рідину полем температур  $T(\vec{r}, t)$  та полем швидкостей  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Для її опису скористаємося рівнянням Нав'є – Стокса<sup>4</sup>, а також рівняннями теплопровідності та неперервності.

Рівняння Нав'є – Стокса являє собою, по суті, другий закон Ньютона<sup>5</sup> для краплі рі-

<sup>2</sup> А. Бенар спостерігав конвективні комірки експериментально, Дж. Релей побудував лінійну теорію цього явища.

<sup>3</sup> А. Нав'є (Claude Louis Marie Henri Navier, 1785 - 1836) – французький інженер та фізик. Основні результати отримав у галузі теорії пружності та гідродинаміки.

<sup>4</sup> Дж.Г. Стокс (George Gabriel Stokes, 1819 - 1903) – ірландський та англійський фізик і математик, секретар, президент Королівського товариства. Основні результати отримав у гідро- та газодинаміці, оптиці, математиці.

<sup>5</sup> І. Ньютон (Sir Isaac Newton, 1642 - 1727) – геніальний англійський фізик і математик, президент Королівського товариства. Творець сучасного диференціального й інтегрального числення та класичної механіки, відкрив за-

дини з урахуванням того, що положення краплі з часом змінюється. Тому повна похідна  $d\vec{v}/dt$  набуває вигляду

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.4.13)$$

Рівняння Нав'є – Стокса можна записати у вигляді

$$\rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g}, \quad (2.4.14)$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $p$  – її тиск,  $\eta$  – її коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість),  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  – прискорення земного тяжіння. Доданки в правій частині визначають сили, що діють на краплю рідини. Перший з них відповідає тиску, другий та третій – тертю, четвертий – силі тяжіння.

Рівняння теплопровідності з урахуванням можливої конвекції рідини набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (2.4.15)$$

де  $\chi$  – коефіцієнт температуропровідності.

Нарешті, рівняння неперервності для рідини має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.4.16)$$

Причиною конвекції є теплове розширення рідини, тому в останньому доданку рівняння (2.4.14) необхідно врахувати залежність густини рідини від температури. В першому наближенні вважатимемо цю залежність лінійною:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \alpha \Theta), \quad (2.4.17)$$

де

$$\Theta = T - T_0, \quad T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2), \quad \rho_0 = \rho(T_0). \quad (2.4.18)$$

В усіх інших рівняннях залежністю густини від температури можна знехтувати, тобто  $\rho$  можна замінити на  $\rho_0$ . Тоді рівняння (2.4.16) набуває простого вигляду

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.4.16 \text{ а})$$

характерного для нестисливої рідини, а рівняння (2.4.14) з урахуванням (2.4.17) та (2.4.16 а) можна подати у формі

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} (1 - \alpha \Theta), \quad (2.4.14 \text{ а})$$

де  $\nu = \eta / \rho_0$  – кінематична в'язкість рідини.

Очевидні граничні умови для температури мають вигляд

$$T(z=0) = T_1, \quad T(z=h) = T_2. \quad (2.4.19)$$

Вважатимемо граничні поверхні шару рідини вільними. Тоді на цих поверхнях повинні виконуватися граничні умови

$$v_z(z=0) = v_z(z=h) = 0 \quad (2.4.20)$$

#### 2.4.2.2. Розв'язок рівнянь за відсутності конвекції

Для стаціонарного і однорідного (в площині  $xy$ ) випадку і нерухомої рідини ( $\vec{v} = 0$ ) рівняння (2.4.14 а)-(2.4.15) набувають вигляду

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g (1 - \alpha \Theta), \quad (2.4.14 \text{ б})$$

---

кон всесвітнього тяжіння, отримав ряд результатів в оптиці. В різний час був також депутатом парламенту та керівником королівського монетного двору. Крім того, виступав як релігійний реформатор.

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = 0. \quad (2.4.15 \text{ а})$$

Система (2.4.14 б)-(2.4.15 а) з урахуванням граничних умов (2.4.19) має розв'язок

$$\Theta_0(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right) \delta T, \quad p_0(z) = p_{\text{ext}} + \rho_0 g (h-z) \left(1 + \frac{\alpha z}{2h} \delta T\right), \quad (2.4.21)$$

де  $p_{\text{ext}}$  – стала інтегрування, яка має зміст зовнішнього тиску. Графіки залежностей (2.4.21) подано на рис. 2.4.3 а-б.

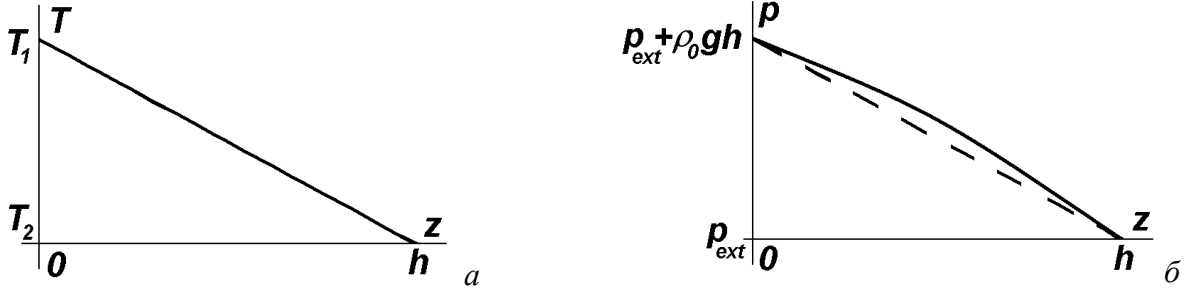


Рис. 2.4.3. Висотні залежності температури (а) та тиску (б) в шарі рідини, що підігрівається знизу, за відсутності конвекції.

Залежність  $p(z)$  вийшла нелінійною (рис. 2.4.3 б). Це пов'язано з тим, що неоднорідність температури породжує неоднорідність густини: біля дна посудини, де температура вища, густина менша, ніж біля поверхні шару. Тому при  $z=0$  нахил  $dp/dz$  залежності  $p(z)$  менший, ніж при  $z=h$ .

#### 2.4.2.3. Отримання та розв'язок рівнянь для малих збурень

Для дослідження стійкості стаціонарного розв'язку (2.4.21) підставимо в систему рівнянь (2.4.14 а), (2.4.15), (2.4.16 а) розв'язок у вигляді

$$\Theta(\vec{r}, t) = \Theta_0(z) + \theta(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t) = p_0(z) + \delta p(\vec{r}, t) \quad (2.4.22)$$

та  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} - \alpha \vec{g} \theta; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta - \frac{\delta T}{h} v_z = \chi \Delta \theta; \quad (2.4.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Граничні умови (2.4.19) для нової змінної  $\theta$  набувають вигляду

$$\theta(z=0) = \theta(z=h) = 0. \quad (2.4.19 \text{ а})$$

Лінеаризуємо систему (2.4.23), вважаючи величини  $\theta$ ,  $\delta p$  та  $\vec{v}$  малими. Отримаємо:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \nu \Delta v_x; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial y} + \nu \Delta v_y; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \alpha g \theta; \quad (2.4.23 \text{ а})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\delta T}{h} v_z = \chi \Delta \theta; \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Всі рівняння системи (2.4.23 а) – лінійні, однорідні, зі сталими коефіцієнтами. Тому розв'язок цієї системи можна шукати в експоненціальній формі. Підставимо до (2.4.23) розв'язки у формі

$$v_z(\vec{r}, t) = v_{z,m} \sin k_z z \exp(\lambda t - ik_x x - ik_y y),$$

$$v_{x,y}(\vec{r}, t) = v_{x,y,m} \cos k_z z \exp(\lambda t - ik_x x - ik_y y), \quad (2.4.24)$$

$$\theta(\vec{r}, t) = \theta_m \sin k_z z \exp(\lambda t - ik_x x - ik_y y),$$

$$\delta p(\vec{r}, t) = \delta p_m \cos k_z z \exp(\lambda t - ik_x x - ik_y y), \quad k_z = \frac{n\pi}{h}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

які задовольняють граничним умовам (2.4.19 а)-(2.4.20). Отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд:

$$\begin{aligned} (\lambda + \nu k^2) v_{xm} - \frac{ik_x}{\rho_0} \delta p_m &= 0; & (\lambda + \nu k^2) v_{ym} - \frac{ik_y}{\rho_0} \delta p_m &= 0; & (\lambda + \nu k^2) v_{zm} - \frac{k_z}{\rho_0} \delta p_m - \alpha g \theta_m &= 0; \\ (\lambda + \chi k^2) \theta_m - \frac{\alpha \Delta T}{h} v_{zm} &= 0; & i(k_x v_x + k_y v_y) + k_z v_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

де використані позначення

$$k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (2.4.26)$$

Щоб система (2.4.25) мала нетривіальні розв'язки, її визначник повинен дорівнювати нулеві, тобто має виконуватись умова

$$\Lambda^2 + \Lambda \left( \sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right) \kappa^2 + \left( \kappa^4 - R \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa^2} \right) = 0, \quad (2.4.27)$$

де використано позначення  $\kappa_{x,y,z} = k_{x,y,z} h$ ,  $\kappa = kh$ ,  $\kappa_{\perp} = k_{\perp} h$ ,  $\Lambda = \lambda h^2 / \sqrt{\nu \chi}$ ,  $P = \nu / \chi$  – число Прандтля<sup>6</sup>,  $R = \alpha g h^3 \delta T / \nu \chi$  – число Релея.

Рівняння (2.4.27) можна розв'язати щодо нормованого часового інкременту  $\Lambda$ :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left( \sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right) \kappa^2 \pm \sqrt{\left( \sqrt{P} - \frac{1}{\sqrt{P}} \right)^2 \kappa^4 + 4R \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa^2}} \right\}. \quad (2.4.28)$$

Очевидно, стаціонарний розв'язок (2.4.21) залишається стійким доти, доки  $\Lambda_{1,2}$  будуть від'ємними. Якщо ж хоч один з двох коренів (в даному разі  $\Lambda_1$ ) стане додатним, у системі буде розвиватися нестійкість, тобто почнеться конвекція.

#### 2.4.2.4. Умови виникнення конвекції

Дослідимо залежність  $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$ . Як видно з (2.4.28),

$$\lim_{\kappa_{\perp} \rightarrow \infty} \Lambda_1 = -\infty.$$

Тому максимальне значення  $\Lambda_1$  досягається при деякому скінченному значенні  $\kappa_{\perp opt}$ . В критичному випадку в нуль перетворюється як  $\Lambda_1$ , так і похідна  $\partial \Lambda_1 / \partial \kappa_{\perp}$ . Ці умови приводять до рівнянь

$$\left( \kappa_z^2 + \kappa_{\perp}^2 \right)^3 = R \kappa_{\perp}^2, \quad 2 \left( \kappa_z^2 + \kappa_{\perp}^2 \right)^3 = R \kappa_z^2, \quad (2.4.29)$$

розв'язавши які, можна з'ясувати, що нестійкість починається для збурення з поперечним хвильовим числом

$$\kappa_{\perp opt} = \frac{\kappa_z}{\sqrt{2}} \quad (2.4.30)$$

при переході числа Релея через критичне значення

$$R_{cr} = \frac{27}{4} \kappa_z^4. \quad (2.4.31)$$

Граничні умови приводять до утворення дискретного набору значень  $\kappa_z$  (див. (2.4.24)). Зрозуміло, що нестійкість почне розвиватися при тому значенні  $\kappa_z$ , якому відповідає мінімальне значення  $R_{cr}$ , тобто при

<sup>6</sup> Л. Прандтль (Ludwig Prandtl, 1875 - 1953) – німецький фізик, професор університетів у Ганновері та Геттінгені. Основні наукові результати отримані в галузі гідро- та газодинаміки.

$$\kappa_z = \pi \quad (n=1), \quad (2.4.32)$$

коли по висоті шару вкладається половина довжини стоячої хвилі. Тоді

$$\kappa_{\perp opt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.221, \quad R_{cr} = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 657.5, \quad \delta T_{cr} = \frac{27\pi^4 \nu \chi}{\alpha g h^3}. \quad (2.4.33)$$

Залежності  $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$  для різних значень  $R$  подані на рис. 2.4.4.

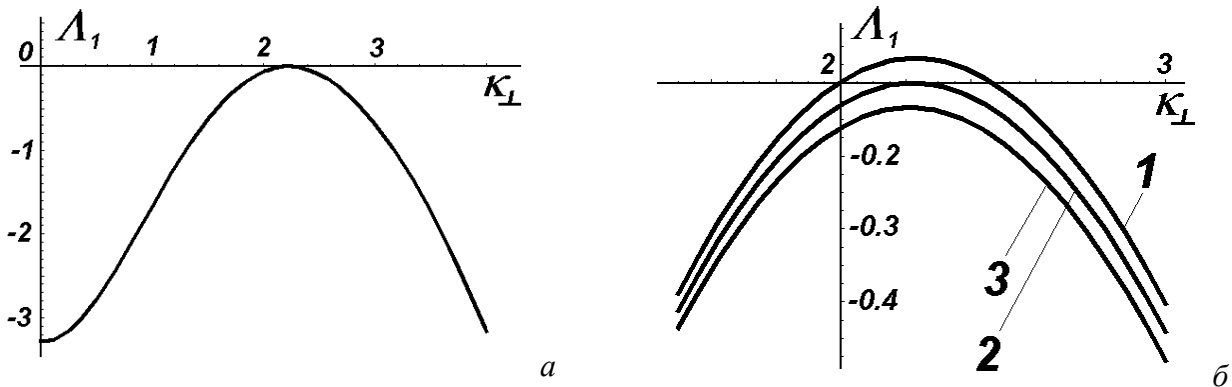


Рис. 2.4.4. Залежність  $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$  для  $R=R_{cr}$  (а) та для різних значень  $R$  ( $R_1 > R_2 = R_{cr} > R_3$ )

Як видно з рис. 2.4.4 а, при невеликому перевищенні числа Релея над критичним значенням (2.4.33) область значень  $\kappa_{\perp}$ , в якій розвивається нестійкість, є порівняно вузькою, і наближено можна вважати, що  $\kappa_{\perp} \approx \kappa_{\perp opt}$ . Підставивши до формули (2.4.28) значення  $\kappa_z$  (2.4.32) та  $\kappa_{\perp opt}$  (2.4.33) і подавши число Релея у формі  $R = R_{cr} (1 + \varepsilon)$ , де  $0 < \varepsilon \ll 1$ , отримуємо інкремент нестійкості при малій надкритичності:

$$\Lambda_1 = \frac{3\pi^2 \varepsilon}{2 \left( \sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right)}. \quad (2.4.28 \text{ а})$$

Видно, що в цьому випадку інкремент прямо пропорційний параметру надкритичності  $\varepsilon$ .

Побудована нами лінійна теорія аналогічна до лінійної теорії автогенератора: вона передбачає довжину хвилі, на якій розвивається аперіодична нестійкість, (аналог частоти автоколивань) та критичне значення числа Релея (аналог амплітудної умови самозбудження), а також інкремент малих коливань. Для того, щоб знайти амплітуду усталеного збурення (тобто, по суті, амплітуду утворюваної дисипативної структури), необхідна нелінійна теорія.

#### 2.4.2.5. Нелінійна теорія ефекту Релея – Бенара для конвективних валів: отримання системи рівнянь для $\varphi$

Побудувати аналітично загальний розв'язок нелінійної системи (2.4.23) досі не вдалося. Але явище конвекції в шарі рідини з підігрівом знизу вдається аналітично описати при малих ступенях надкритичності, якщо апіорі (відповідно до результатів експерименту) задати структуру гаданого розв'язку. Найпростіша структура відповідає конвективним валам.

Будемо розглядати збурення, які не залежать від координати  $y$  (саме такі збурення відповідають конвективним валам), так що можна в рівняннях (2.4.23) покласти  $v_y = 0$ . Будемо також шукати дві інші компоненти швидкості у формі:

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.4.34)$$

Тоді останнє рівняння системи (2.4.23) задовольняється автоматично. Зазначимо, що ми, по суті, записали швидкість як ротор деякого вектора  $\vec{\varphi}$ , який в аналізованому випадку має не-

нульову компоненту лише вздовж осі  $y$ :  $\vec{\varphi} = \{0, \varphi, 0\}$  <sup>7</sup>.

Підставивши (2.4.34) до першого рівняння системи (2.4.23) і спроектувавши його на напрямки  $x$  та  $z$ , можна отримати:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha g \theta \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

(враховано, що сила тяжіння спрямована проти осі  $z$ ).

Із системи (2.4.35) можна виключити збурення тиску  $\delta p$ . Для цього друге з рівнянь (2.4.28) продиференціюємо за  $x$  і віднімемо від нього перше, продиференційоване за  $z$ . Отримане таким чином рівняння доповнимо другим рівнянням системи (2.4.23) із підстановкою (2.4.27). В результаті можна записати таку систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \varphi &= \nu \Delta \Delta \varphi + \alpha g \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \theta - \frac{\delta T}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \chi \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

Ця система рівнянь у частинних похідних для функцій  $\varphi$  та  $\theta$  повинна бути доповнена граничними умовами (2.4.19 а) для  $\theta$

$$\theta(z=0) = \theta(z=h) = 0,$$

та умовами для  $\varphi$

$$\varphi(z=0) = \varphi(z=h) = 0, \quad (2.4.37)$$

що є наслідком (2.4.20).

#### 2.4.2.6. Отримання системи Лоренца

Для випадку, коли число Релея  $R = \alpha g h^3 \delta T / \nu \chi$  не дуже сильно перевищує своє критичне значення (2.4.33), розв'язки системи (2.4.36), що задовольняють граничним умовам (2.4.19 а), (2.4.37), будемо шукати у формі

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= \sqrt{2} \frac{\chi h}{\pi k_{\perp}} \left[ k_{\perp}^2 + \left( \frac{\pi}{h} \right)^2 \right] X(t) \sin(k_{\perp} x) \sin \frac{\pi z}{h}; \\ \theta(x, z, t) &= \frac{R_{cr} \delta T}{\pi R} \left[ \sqrt{2} Y(t) \cos(k_{\perp} x) \sin \frac{\pi z}{h} - Z(t) \sin \frac{2\pi z}{h} \right], \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

причому горизонтальна компонента хвильового числа  $k_{\perp}$  визначається умовами (2.4.30) та (2.4.32):

$$k_{\perp} = \frac{\pi}{\sqrt{2} h}. \quad (2.4.39)$$

Як бачимо, швидкість утворює структури типу конвективних валів з амплітудою  $X$ , а збурення температури – такі самі структури з амплітудою  $Y$  плюс однорідну по  $x$  стоячу хвилю у вертикальному напрямку з амплітудою  $Z$ . Хвильове число останньої вдвічі більше, ніж у двох інших хвиль.

Підставимо розв'язки (2.4.38) до першого з рівнянь (2.4.36). При цьому слід узяти до уваги, що

<sup>7</sup> Операція введення величини  $\varphi$  замість компонент швидкості аналогічна до подання магнітного поля як ротора векторного потенціалу, можливість чого випливає з теореми Гаусса для магнітного поля. В даному разі аналогом теореми Гаусса виступає рівняння неперервності для нестисливої рідини.

$$\Delta\varphi = -\left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]\varphi, \quad \Delta\Delta\varphi = \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^2\varphi,$$

$$\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta\varphi = -\left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

Тоді, скоротивши на просторові залежності та врахувавши явний вигляд  $R_{cr}$  та  $k_{\perp}$ , можна отримати таке рівняння:

$$\frac{dX}{d\tau} = -PX + PY, \quad (2.4.40)$$

де

$$\tau = \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]\chi t \quad (2.4.41)$$

– безрозмірний час.

Підставимо тепер розв'язок (2.4.38) до другого з рівнянь (2.4.36). Після деяких тригонометричних перетворень можна отримати:

$$\frac{1}{\chi\left[k_{\perp}^2 + (\pi/h)^2\right]}\left(\sqrt{2}\dot{Y}\cos(k_{\perp}x)\sin\frac{\pi z}{h} - \dot{Z}\sin\frac{2\pi z}{h}\right) + XY\sin\frac{2\pi z}{h} - \sqrt{2}\frac{R}{R_{cr}}X\cos(k_{\perp}x)\sin\frac{\pi z}{h} +$$

$$+ \sqrt{2}XZ\cos(k_{\perp}x)\left(\sin\frac{3\pi z}{h} - \sin\frac{\pi z}{h}\right) = -\sqrt{2}Y\cos(k_{\perp}x)\sin\frac{\pi z}{h} + \frac{4Z}{\left[(k_{\perp}h/\pi)^2 + 1\right]}\sin\frac{2\pi z}{h}. \quad (2.4.42)$$

Знехтуємо в (2.4.42) доданком, пропорційним до  $\sin(3\pi z/h)$ . Тоді рівняння можна розбити на дві частини. Відділивши доданки, залежні від  $x$ , та доданки, що не залежать від  $x$ , скоротивши на координатні залежності і перейшовши до безрозмірного часу  $\tau$  (2.4.41), отримаємо два рівняння вигляду

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y,$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ, \quad (2.4.43)$$

де використані позначення

$$r = \frac{R}{R_{cr}}, \quad b = \frac{4}{1 + (k_{\perp}h/\pi)^2} = \frac{8}{3}. \quad (2.4.44)$$

Система рівнянь (2.4.40), (2.4.43) і являє собою шукану систему Лоренца<sup>8</sup>. Вперше вона була отримана Б.Зальцманом<sup>9</sup>. Пізніше вона була використана Е.Лоренцом для розрахунків конвекції в атмосфері Землі.

За змістом задачі всі параметри в цих рівняннях додатні.

#### 2.4.2.7. Стаціонарні точки системи Лоренца

Стаціонарні точки системи Лоренца знаходяться з рівнянь

$$X - Y = 0, \quad Y + XZ - rX = 0, \quad XY - bZ = 0, \quad (2.4.45)$$

які, в свою чергу, зводяться до кубічного рівняння

<sup>8</sup> Е.Н. Лоренц (Edward Norton Lorenz, 1917 - 2008) – американський математик та метеоролог, один з творців теорії динамічного хаосу.

<sup>9</sup> Див.: В. Saltzman, Journ. Atmos. Sci., **19**, 329 (1963). Б. Зальцман (Barry Saltzman, 1931 - 2001) – видатний американський метеоролог та кліматолог, професор Йельського університету.



$$X[X^2 + b(1-r)] = 0. \quad (2.4.45 \text{ a})$$

Трьом кореням рівняння (2.4.45 a) відповідають три стаціонарні точки:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0;$$

$$X_2 = Y_2 = \sqrt{b(r-1)}, \quad Z_2 = r-1;$$

$$X_3 = Y_3 = -\sqrt{b(r-1)}, \quad Z_3 = r-1. \quad (2.4.46)$$

Дві останні точки існують лише при  $r > 1$ .

Перша з трьох стаціонарних точок (2.4.46) відповідає відсутності конвекції, а дві інші – усталеній конвективній течії (вони, по суті, відрізняються лише зсувом фази на  $\pi$  в напрямку  $x$ , рис. 2.4.5).

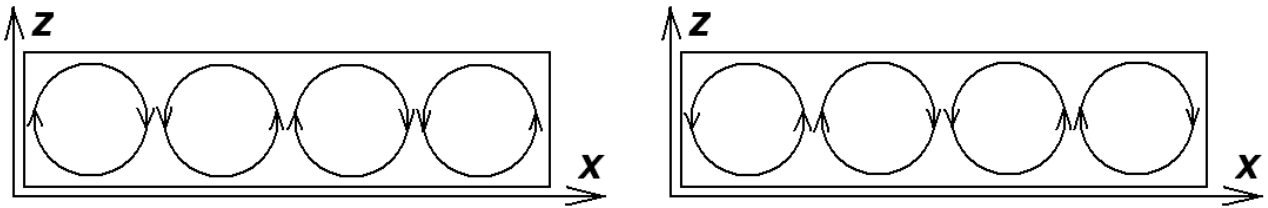


Рис. 2.4.5. Типи течії, що відповідають різним стаціонарним точкам системи Лоренца.

#### 2.4.2.8. Стійкість стаціонарних точок системи Лоренца

Для з'ясування питання про стійкість стаціонарних точок систему Лоренца слід лінеаризувати за малими відхиленнями від положення рівноваги, підставити розв'язки в експоненціальній формі ( $\sim \exp(\lambda t)$ ) та прирівняти до нуля визначник отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд.

Тоді характеристичне рівняння для показників експоненти  $\lambda$  в околі першої стаціонарної точки набуває вигляду:

$$[\lambda^2 + (P+1)\lambda + P(1-r)](\lambda + b) = 0. \quad (2.4.47)$$

Один із коренів рівняння (2.4.47),  $\lambda = -b$ , завжди від'ємний; два інші, відповідно до критерію Рауса - Гурвиця, матимуть від'ємні дійсні частини за умови  $r < 1$ . Остання умова й визначає область стійкості першої стаціонарної точки.

Як уже вказувалося, перша стаціонарна точка в тривимірному фазовому просторі системи Лоренца відповідає відсутності конвекції в шарі рідини. Вона, як було показано вище, втрачає стійкість за умови  $r > 1$ , тобто, як впливає з (2.4.44), при  $R > R_{cr}$ , і перетворюється зі стійкого вузла на сідло-вузол. Таким чином, умова виникнення конвективного руху, отримана на основі аналізу системи Лоренца, збігається з відповідним результатом лінійної теорії (див. п. 2.4.2.4).

Характеристичне рівняння для показників експоненти  $\lambda$  в околі другої та третьої стаціонарних точок можна записати у вигляді:

$$\lambda^3 + (P+b+1)\lambda^2 + b(P+r)\lambda + 2Pb(r-1) = 0. \quad (2.4.48)$$

Використовуючи критерій Рауса – Гурвиця, можна показати, що всі корені рівняння (2.4.48) матимуть від'ємні дійсні частини за умов

$$\begin{cases} r > 1, \\ r(P-b-1) < P(P+b+3). \end{cases} \quad (2.4.49)$$

При  $P < b+1$  друга нерівність виконується автоматично. Це означає, що при малих числах Прандтля (точніше, при  $P < 11/3 \approx 3.7$ ) друга та третя стаціонарні точки будуть стійкими при будь-яких числах Релея, що задовольняють умові  $R > R_{cr}$ . При  $P > b+1$  система (2.4.49) еквівалентна до подвійної нерівності

$$1 < r < r^* \equiv \frac{P(P+b+3)}{P-(b+1)}, \quad (2.4.49 \text{ a})$$

тобто при  $P > 11/3$  друга та третя стаціонарні точки стійкі лише в обмеженому діапазоні значень числа Релея (рис. 2.4.6). При перевищенні порогу, що визначається значенням  $r^*$ , вони втрачають стійкість.

При зміні температури від  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  для води число Прандтля зменшується від 13.5 до 1.74, для трансформаторного масла – від 866 до 43.9. Тому на практиці частіше реалізується другий випадок.

#### 2.4.2.9. Властивості стаціонарних конвективних валів

Як уже згадувалося, друга та третя стаціонарні точки системи Лоренца (див. рівняння (2.4.46)) описують стаціонарні конвективні вали. Відповідні їм розв'язки (2.4.38) відрізняються між собою, як уже вказувалося, лише зсувом фази на  $\pi$  в напрямку  $x$ . Ці розв'язки, як було показано вище, з'являються при  $R > R_{cr}$ , тобто саме тоді, коли розв'язок, який відповідає відсутності конвекції, стає нестійким. Це – типова біфуркація, коли при переході керувального параметра через критичне значення система обирає один з двох можливих варіантів розвитку (див. п. 1.4.3.1). Як уже відзначалося (див. п. 1.4.3), вибір одного з двох можливих стійких станів системи відбувається за рахунок флуктуацій, рівень яких помітно зростає в околі точки біфуркації. Щоб формально врахувати вплив флуктуацій, у правих частинах рівнянь системи Лоренца слід дописати відповідні випадкові зовнішні сили, як це робиться в задачі про розрахунок шумів в автогенераторі Ван дер Поля<sup>10</sup>. Саме наявність цих сил і руйнуватиме стан нестійкої рівноваги системи.

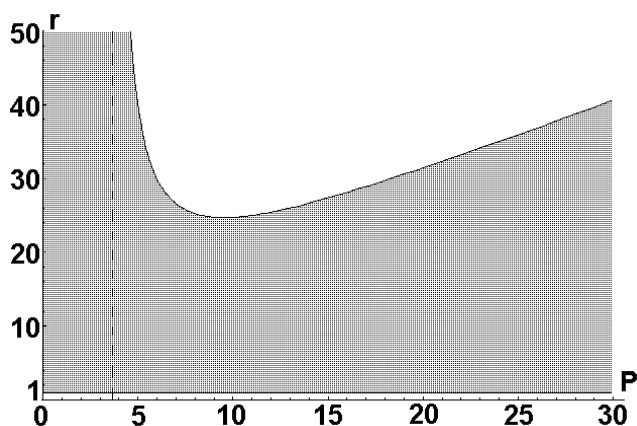


Рис. 2.4.6. Область стійкості конвективних валів у координатах  $\{r, P\}$  відповідно до формули (2.4.49 a)

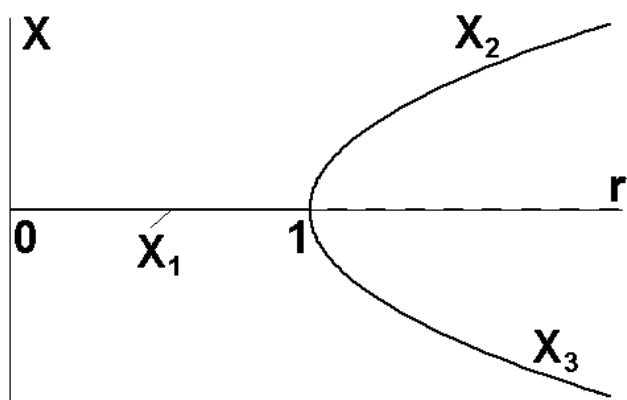


Рис. 2.4.7. Залежність амплітуди стаціонарних конвективних валів від нормованого числа Релея

<sup>10</sup> Див., наприклад: Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М., 1981. С.488-505.

Формули (2.4.46) визначають, по суті, амплітуду усталених конвективних валів. Використавши позначення  $r = 1 + \varepsilon$ , введене наприкінці п. 2.4.2.4, можна переписати вирази для амплітуд у формі

$$|X_{2,3}| = |Y_{2,3}| = \sqrt{b\varepsilon}, \quad Z_{2,3} = \varepsilon. \quad (2.4.46 \text{ а})$$

Порівнюючи (2.4.46 а) з виразом для інкременту (2.4.28 а), можна сказати, що амплітуди  $X$  та  $Y$  пропорційні кореневі з інкременту малих коливань, як і в автогенераторі Ван-дер-Поля (рис. 2.4.7 – пор. із рис. 1.4.1). Амплітуда  $Z$  пропорційна квадрату малих амплітуд  $X$  та  $Y$ . Доданок у розв'язку (2.4.38), пропорційний  $Z$ , породжується нелінійністю системи Лоренца. Він являє собою другу гармоніку основної моди в напрямку  $z$ , тобто в певному сенсі він аналогічний до вищих гармонік у спектрі нелінійного осцилятора, які описують ефект ангармонізму коливань. З іншого боку, він являє собою нульову гармоніку основної моди по  $x$ , що нагадує ефект випрямлення на нелінійному елементі. Як випливає з (2.4.46 а), при збільшенні  $\varepsilon$  цей доданок зростає швидше від  $X$  та  $Y$ . Так само в нелінійному осциляторі збільшення амплітуди коливань призводить до зростання відносного внеску вищих гармонік.

Строго кажучи, побудована тут теорія справедлива лише при малих ступенях надкритичності (при малих  $\varepsilon$ ). Тим не менше на якісному рівні вона правильно описує поведінку системи і при  $r > r^*$ , коли стаціонарні розв'язки з амплітудами (2.4.46 а) втрачають стійкість. Такий режим відповідає так званій слабкій гідродинамічній турбулентності (див. нижче п. 3.4.2.2).

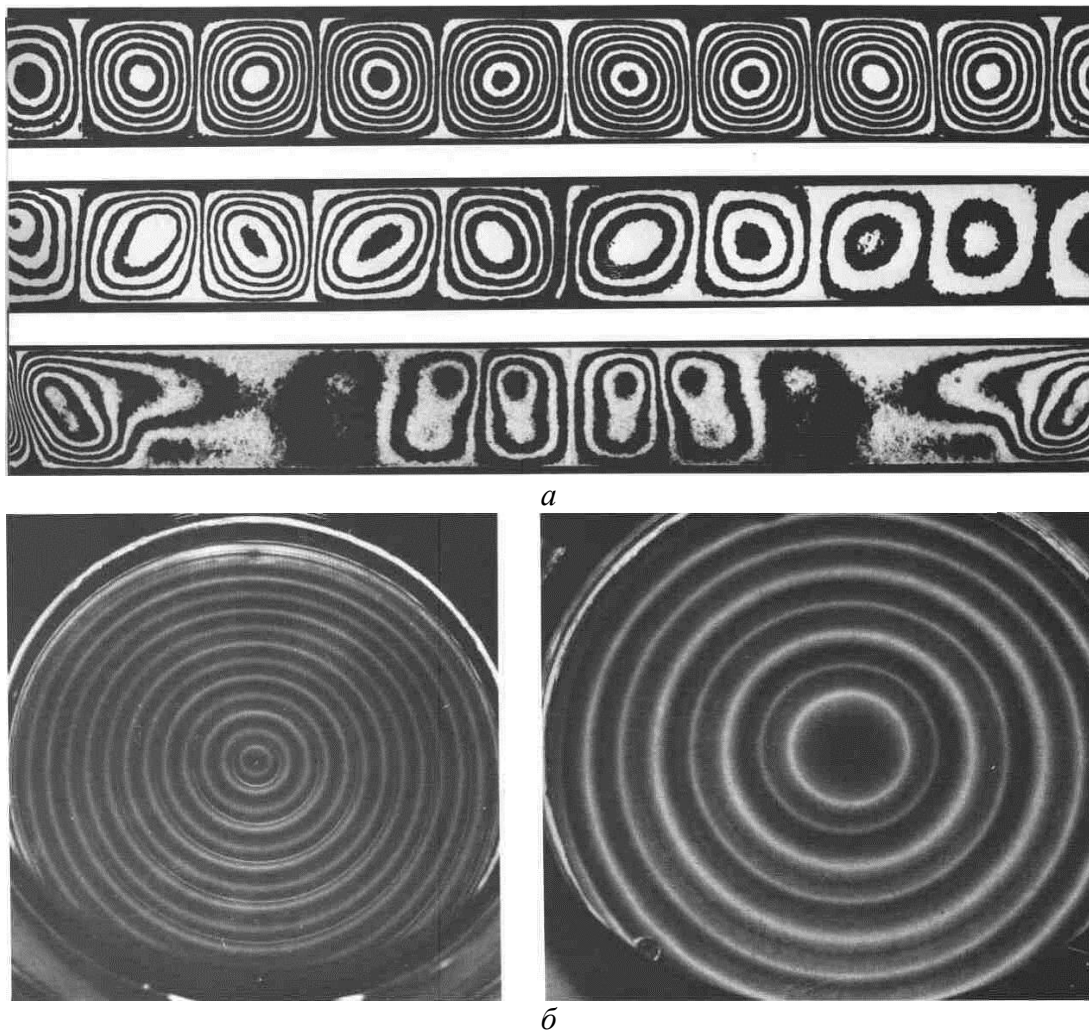


Рис. 2.4.8. Експериментальне спостереження конвективних валів: а – картини течії в перерізі посудини прямокутної форми; б – конвективні вали в неглибокій циліндричній посудині.

#### 2.4.2.10. Експериментальне спостереження конвективних валів

Конвективні вали можна спостерігати в лабораторному експерименті, взявши неглибоку посудину із силіконовим мастилом. На рис. 2.4.8 а показано фотографії ліній течії в торці такої посудини (вали перпендикулярні площині картинки). При рівномірному нагріванні її дна конвективні вали орієнтуються паралельно коротшій з горизонтальних сторін (у даному експерименті розміри сторін посудини відносились як 10:4:1).

На рис. 2.4.8 б показані конвективні вали в циліндричній посудині. Як і в попередньому випадку, товщина шару рідини значно менша від радіусу посудини. Для виключення впливу поверхневого натягу шар рідини згори вкритий скляною пластинкою, яка рівномірно охолоджувалася. В цьому випадку конвективні вали мають вигляд системи концентричних кіл.

Згідно існуючих гіпотез, конвективні вали існують також у земній мантії (температура якої, як відомо, зменшується на периферії). Вони можуть спричиняти рух літосферних плит.

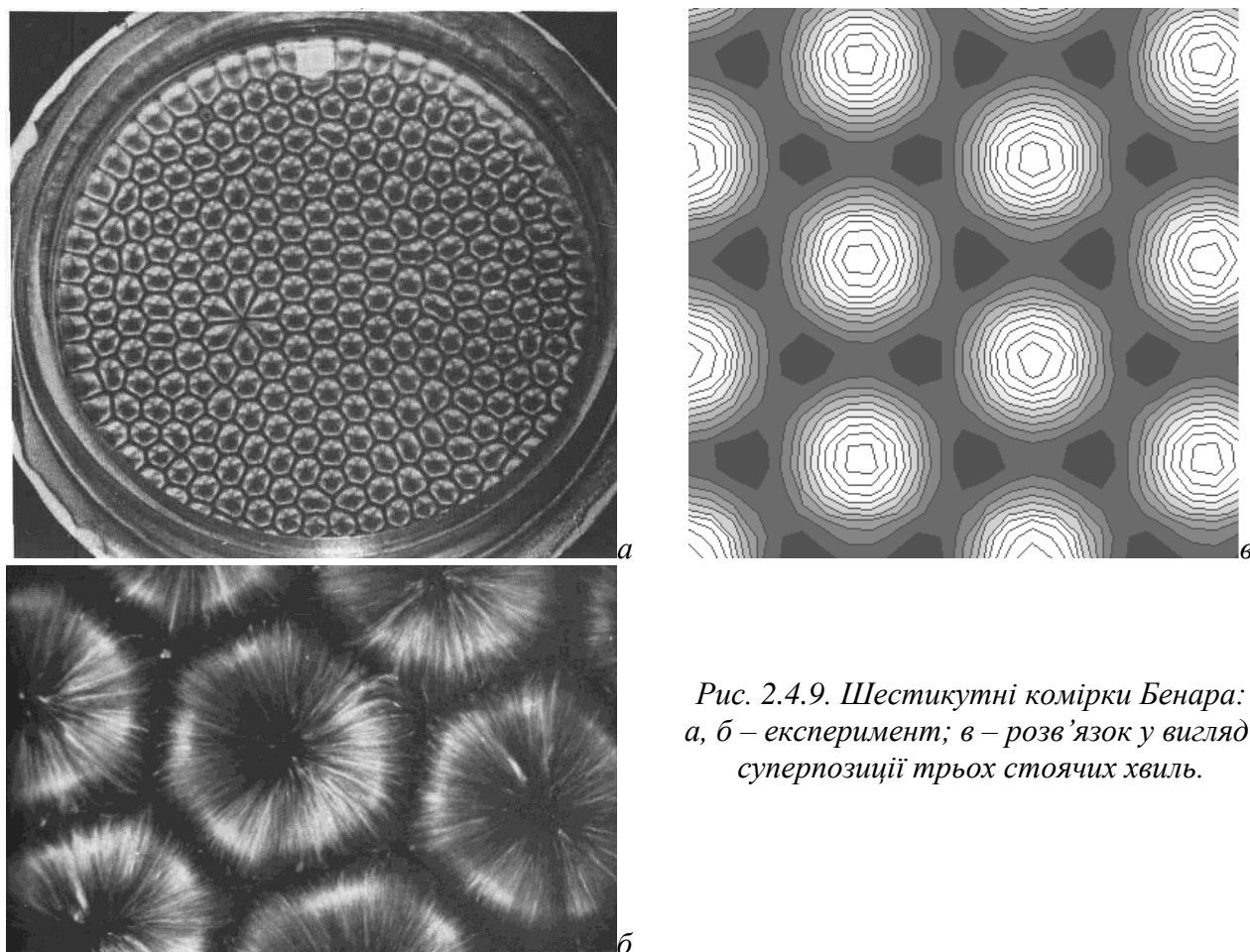


Рис. 2.4.9. Шестикутні комірки Бенара:  
а, б – експеримент; в – розв'язок у вигляді  
суперпозиції трьох стоячих хвиль.

#### 2.4.2.11. Розв'язок нелінійних рівнянь для шестикутних комірок

Найбільш загадковою особливістю конвекції Релея - Бенара протягом багатьох десятиріч залишалося виникнення конвективних комірок шестикутної форми (рис. 2.4.9 а, б). Тривалий час спроби побудувати стійкий розв'язок відповідного типу зазнавали невдачі. Задача була розв'язана лише у 60-х роках ХХ століття. Ідея врахування залежності в'язкості від температури була висловлена Е. Палмом<sup>11</sup>, а остаточно задача була розв'язана Ф. Буссе<sup>12</sup>,

<sup>11</sup> Див.: Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. // J. Fluid Mech., 1960, **8**, No 2, 183. Е. Палм (Enok Johannes Palm, 1924-2012) – норвезький математик, працював у галузі гідродинаміки.

<sup>12</sup> Див.: Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. // J. Fluid Mech., 1967, **30**, No 4, 625. Ф.Х. Буссе (Friedrich H. Busse, нар. 1936) – німецький та американський дослідник, займається проблемами геомагнетизму та турбулентності.

якому й належить наведений нижче розрахунок.

Для аналізу утворення конвективних комірок необхідно повернутися до рівнянь (2.4.14)-(2.4.16), доповнених граничними умовами (2.4.19)-(2.4.20). Знову, як це було зроблено вище (п. 2.4.2.6), апіорі задамо форму розв'язку: підставлятимемо його для всіх змінних (тиск, температура та три компоненти швидкості) у формі трьох пар хвиль:

$$f(\vec{r}, t) = f(z) \sum_{l=1}^3 \left\{ a_l(t) \exp \left[ i(\vec{k}_l \cdot \vec{r}_\perp) \right] + a_l^*(t) \exp \left[ -i(\vec{k}_l \cdot \vec{r}_\perp) \right] \right\}, \quad (2.4.50)$$

$$\vec{r}_\perp = (x, y),$$

де вектори  $\vec{k}_l$  утворюють правильний трикутник:

$$\vec{k}_1 = k(1, 0), \quad \vec{k}_2 = k \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{k}_3 = k \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (2.4.51)$$

Легко зрозуміти, що сума трьох пар стоячих хвиль вигляду (2.4.50)-(2.4.51) справді описує набір правильних шестикутних комірок у площині  $(x, y)$  (див. рис. 2.4.9 в).

Вважатимемо, як і в п. 2.4.2.4, що число Релея можна подати у формі  $R = R_{cr} (1 + \varepsilon)$ , де  $0 < \varepsilon \ll 1$ , а значення  $R_{cr}$  дається формулою (2.4.33), тобто поріг виникнення нестійкості лише трохи перевищений. Тоді нестійкість можлива тільки у вузькому діапазоні довжин хвильових векторів  $\vec{k}_l$  навколо значення  $\kappa_{\perp opt} / h$  (2.4.33). Отже, можна покласти  $|\vec{k}_l| = \kappa_{\perp opt} / h$  (пор. зі співвідношеннями (2.4.38)-(2.4.39)).

Тоді із системи (2.4.14)-(2.4.16) з урахуванням граничних умов (2.4.19)-(2.4.20) можна отримати таку систему вкорочених рівнянь для амплітуд  $a_l$ :

$$\frac{da_l}{dt} = a_l \left( \lambda - \sum_{j=1}^3 K_{lj} |a_j|^2 \right) \quad (2.4.52)$$

де  $\lambda$  – інкремент малих збурень, що визначається формулою (2.4.28 а) (з урахуванням нормування, див. п. 2.4.2.3), а  $K_{li}$  – симетрична матриця коефіцієнтів, усі елементи якої додатні. Із системи (2.4.52) неважко отримати рівняння для інтенсивностей мод  $r_l$ :

$$\frac{dr_l}{d\tau} = 2r_l \left( 1 - \sum_{j=1}^3 B_{lj} r_j \right), \quad r_l = \frac{K |a_l|^2}{\lambda}, \quad \tau = \lambda t, \quad B_{lj} = \frac{K_{lj}}{K}, \quad K \equiv K_{ll}. \quad (2.4.53)$$

Система (2.4.53) за формою збігається з добре відомою системою рівнянь для конкуренції мод у багаточастотному (в даному разі – тричастотному) автогенераторі<sup>13</sup>. Співіснування мод у багаточастотному автогенераторі можливе лише за слабкого зв'язку між модами, тобто при  $B_{lj} < 1$  ( $j \neq l$ ). Але в нашому випадку можна показати, що при  $j \neq l$  всі  $B_{lj} > 1$ . Це означає, що в результаті конкуренції виживає одна єдина мода, тобто в системі встановлюватимуться конвективні вали.

#### 2.4.2.12. Шестикутні комірки: модифікація моделі та отримання розв'язку

Щоб усе-таки отримати розв'язок у формі шестикутних комірок, слід урахувати, що фізичні параметри рідини (в першу чергу, її в'язкість) залежать від температури. Тоді, вважаючи цю залежність слабкою, а відповідний параметр  $\Gamma$  – малим, можна отримати аналог системи (2.4.52) у формі:

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \left[ \gamma - A_1^2 - B(A_2^2 + A_3^2) \right] A_1 + A_2 A_3; \quad (2.4.54)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = \left[ \gamma - A_2^2 - B(A_1^2 + A_3^2) \right] A_2 + A_3 A_1;$$

<sup>13</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., 2009 (розділ 2.5, рівняння (2.5.23)).

$$\frac{dA_3}{d\tau} = \left[ \gamma - A_3^2 - B(A_1^2 + A_2^2) \right] A_3 + A_1 A_2,$$

де використані позначення

$$A_j = \frac{K}{\Gamma} a_j, \quad \tau = \frac{\Gamma^2}{K} t, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\Gamma^2}, \quad B = B_{jl} (j \neq l), \quad (2.4.55)$$

а всі амплітуди можна вважати дійсними величинами.

Легко бачити, що система (2.4.54) без урахування квадратичних доданків зводиться до раніше розглянутої системи (2.4.52). Без лінійних та кубічних доданків система (2.4.54) описує вибухову нестійкість, що має місце при параметричній взаємодії трьох хвиль, одна з яких є хвилею з від'ємною енергією<sup>14</sup>.

Стационарні розв'язки системи (2.4.54) в залежності від параметра  $\gamma$  (реально – від різниці температур  $\delta T$ ) подані на рис. 2.4.10. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, штрихові – нестійким. Крива 1 відповідає відсутності конвекції, крива 2 – розв'язку

$$A_1 = \sqrt{\gamma}, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad (2.4.56)$$

що описує конвективні вали, криві 3-4 – розв'язкам

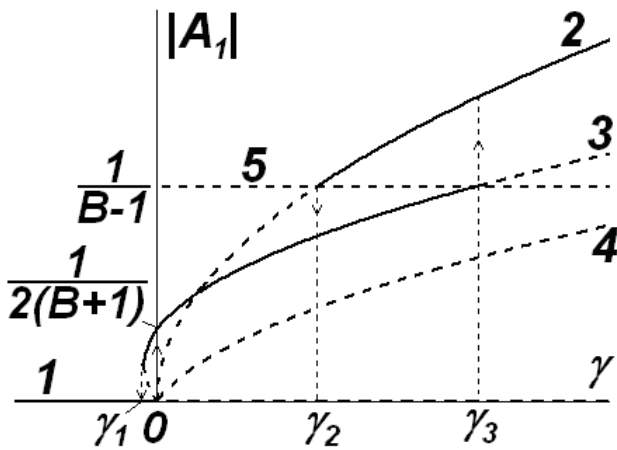


Рис. 2.4.10. Залежність амплітуд мод, що характеризують конвекцію Релея - Бенара, від нормованого інкременту малих збурень. 1 – відсутність конвекції ( $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ), 2 – конвективні вали ( $A_1 \neq 0, A_2 = A_3 = 0$ ), 3-4 – правильні шестикутні комірки ( $A_1 = A_2 = A_3$ ), 5 – неправильні шестикутні комірки ( $A_1 \neq A_2 = A_3$ ).

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma(2B+1)}}{2(2B+1)}, \quad (2.4.57)$$

які описують правильні шестикутні комірки. Нарешті, пряма 5 відповідає розв'язку у вигляді неправильних шестикутних комірок:

$$A_1 = \frac{1}{B-1}, \quad A_2 = A_3 = \frac{\gamma(B-1)-1}{(B-1)(B+1)}. \quad (2.4.58)$$

Нехай спочатку  $\gamma < \gamma_1$ , де

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4(2B+1)}. \quad (2.4.59)$$

Тоді при поступовому зростанні  $\gamma$  в точці  $\gamma = 0$  виникнуть правильні шестикутні комірки, причому їхня амплітуда стрибком зросте від нуля до значення  $A = 1/2(B+1)$ .

При подальшому зростанні  $\gamma$  біфуркація відбудеться в точці  $\gamma = \gamma_3$ , де

$$\gamma_3 = \frac{B+2}{(B-1)^2}. \quad (2.4.60)$$

При переході через цю точку замість шестикутних комірок виникнуть конвективні вали.

<sup>14</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., 2009 (п. 3.6.6).

При зменшенні  $\gamma$  від початкового значення  $\gamma > \gamma_3$  конвективні вали зникнуть лише при переході через точку  $\gamma = \gamma_2$ , де

$$\gamma_2 = \frac{1}{(B-1)^2}. \quad (2.4.61)$$

Оскільки  $\gamma_3 > \gamma_2$ , сказане означає, що ділянка  $\gamma_3 > \gamma > \gamma_2$  характеризується гістерезисом. Ще одна ділянка гістерезису виникає при  $0 > \gamma > \gamma_1$  (рис. 2.4.10).

Слід підкреслити, що наведений вище розрахунок не є вичерпним, оскільки ґрунтується на апріорному заданні форми розв'язку вихідних рівнянь. Більш акуратний аналіз показує, що отримані структури можуть виявитися нестійкими щодо збурень іншої структури (наприклад, конвективні вали – щодо збурень у вигляді зигзагів, поперечних валів та інших).

#### *Контрольні питання до підрозділу 2.4.2*

1. Які рівняння використовують для аналізу конвекції Релея – Бенара?
2. Як залежить критичне значення різниці температур, при якому виникає конвекція, від товщини шару рідини? Запропонуйте якісне пояснення цієї залежності.
3. Який із стаціонарних розв'язків системи Лоренца відповідає термодинамічній гілці?
4. Які властивості конвекції Релея – Бенара дозволяє передбачити лінійна теорія?
5. Чому без урахування залежності параметрів рідини від температури теорія передбачає стійкість лише для конвективних валів?
6. В якому наближенні вдається аналітично проаналізувати формування шестикутних комірок Бенара?
7. Який із стаціонарних розв'язків системи рівнянь, що описує формування шестикутних конвективних комірок, відповідає термодинамічній гілці?
8. За яких умов можливе формування шестикутних комірок Бенара?
9. Який механізм формування шестикутних комірок Бенара?
10. Як можна розрахувати розмір комірок Бенара?
11. Чи пов'язані між собою розміри конвективних валів і шестикутних комірок для тієї самої системи?
12. Які властивості структур при конвекції Релея – Бенара залежать від початкових умов, а які – ні?
13. Нехай у початковий момент часу  $0 > \gamma > \gamma_1$ , але  $A_1 \neq 0$ . Який режим конвекції встановиться в системі? Від чого це залежить?
14. Нехай у початковий момент часу  $\gamma_3 > \gamma > \gamma_2$ , але  $A_1 \neq 0$ . Який режим конвекції встановиться в системі? Від чого це залежить?
15. Глибина шару рідини, в якому відбувається конвекція Релея – Бенара, монотонно змінюється в одному напрямку. Вважаючи зміну плавною, опишіть картину утворених структур.

#### *Задачі до підрозділу 2.4.2*

2.4.2.1. Для системи Лоренца

$$\frac{dX}{d\tau} = -PX + PY, \quad \frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y, \quad \frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ,$$

вважаючи всі параметри додатними, отримайте умови стійкості для кожної зі стаціонарних точок.

2.4.2.2. Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \left[ \gamma - A_1^2 - B(A_2^2 + A_3^2) \right] A_1 + A_2 A_3;$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = \left[ \gamma - A_2^2 - B(A_1^2 + A_3^2) \right] A_2 + A_3 A_1;$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = [\gamma - A_3^2 - B(A_1^2 + A_2^2)]A_3 + A_1A_2,$$

де  $\gamma$  – інкремент (декремент) малих коливань,  $B > 1$  – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти діапазон значень параметра  $\gamma$ , що відповідає області стійкості розв'язку, який характеризується

- а) відсутністю конвекції;
- б) утворенням правильних гексагональних комірок ( $A_1 = A_2 = A_3$ );
- в) утворенням неправильних гексагональних комірок ( $A_1 \neq A_2 = A_3$ ).

2.4.2.3. Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{d\tau} = [\gamma - A_1^2 - B(A_2^2 + A_3^2)]A_1 + A_2A_3;$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = [\gamma - A_2^2 - B(A_1^2 + A_3^2)]A_2 + A_3A_1;$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = [\gamma - A_3^2 - B(A_1^2 + A_2^2)]A_3 + A_1A_2,$$

де  $\gamma$  – інкремент (декремент) малих коливань,  $B > 1$  – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Вважаючи, що параметр  $\gamma$  лежить в інтервалі  $-\left[4(2B+1)\right]^{-1} < \gamma < 0$ , знайдіть, при яких початкових значеннях амплітуд у системі формуються правильні шестикутні комірки Бенара.

2.4.2.4\*. Виходячи з розмірних рівнянь гідродинаміки та теплопередачі, отримати систему рівнянь для амплітуд трьох мод, що взаємодіють між собою при конвекції Релея – Бенара

- а) з точністю до доданків третього порядку за амплітудою без врахування залежності в'язкості від температури;
- б) з точністю до доданків другого порядку за амплітудою з урахуванням залежності в'язкості від температури;
- в) з точністю до доданків третього порядку за амплітудою з урахуванням залежності в'язкості від температури.

2.4.2.5\*. Користуючись системою рівнянь

$$\frac{dA_1}{d\tau} = [\gamma - A_1^2 - B(A_2^2 + A_3^2)]A_1 + A_2A_3;$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = [\gamma - A_2^2 - B(A_1^2 + A_3^2)]A_2 + A_3A_1;$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = [\gamma - A_3^2 - B(A_1^2 + A_2^2)]A_3 + A_1A_2,$$

побудувати відповідний тривимірний фазовий портрет, що описує конкуренцію мод у конвекції Релея – Бенара.

### 2.4.3. Аперіодичні стаціонарні дисипативні структури

Досі ми розглядали стаціонарні дисипативні структури періодичного типу, які виникають внаслідок локального зв'язку між елементами активного середовища (пп. 2.4.1 – 2.4.2). Перейдемо тепер до розгляду аперіодичних стаціонарних дисипативних структур.

Ми вже зустрічалися з формуванням таких структур, коли розглядали бістабільне середовище з  $\Phi(u_1) = \Phi(u_3)$  (див. п. 2.1.1.7). Але розглянута там структура перебуває в стані байдужої рівноваги, який не відновлюється після збурень, а її властивості цілком визначаються початковими умовами, що не зовсім типово.

Більш характерним прикладом системи, в якій утворюється аперіодична стаціонарна дисипативна структура, може служити баретер (англ. barretter) – пристрій, який на зорі розвитку радіоелектроніки використовувався як стабілізатор струму. Як буде показано нижче,



виникнення дисипативної структури в баретері та інших системах такого типу обумовлене розподіленим зворотним зв'язком. Процес формування такої структури пов'язаний з уже розглянутими вище аперіодичними автохвилями, а конкретно – з біжучими фронтами.

Теорія баретера була побудована лише у 1981 р.<sup>15</sup> групою співробітників Інституту хімічної фізики (м. Чорноголовка Московської обл.) на чолі з Я.Б.Зельдовичем.

### 2.4.3.1. Баретер: принцип дії

**Баретер** являє собою залізну нитку, що вміщена в атмосферу водню й нагрівається електричним струмом (рис. 2.4.11 а). З експерименту відомо, що погонний опір такої нитки нелінійно залежить від температури (рис. 2.4.11 б). Для простоти апроксимуємо цю залежність ступінчастою функцією.

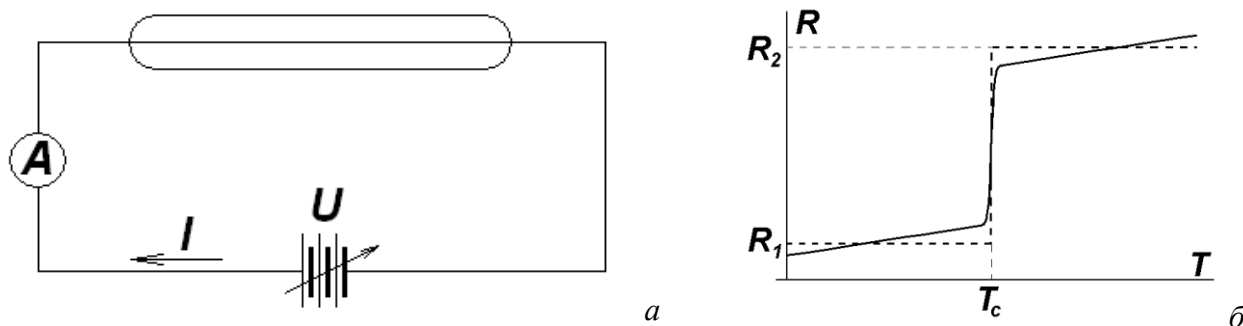


Рис. 2.4.11. Баретер: а – схема; б – залежність погонного опору залізної нитки, вміщеної в атмосферу водню, від температури (суцільна лінія) та її апроксимація (штрихова лінія).

Фізично поява низькоомних (і низькотемпературних) та високоомних (і високотемпературних – в експерименті спостерігається світіння) областей пов'язана з процесами хімічної взаємодії заліза з воднем, що протікають на поверхні нитки.

Температура в деякій точці нитки визначається виділенням тепла струмом, теплообміном з навколишнім середовищем та теплопровідністю самої нитки. Тому кінетичне рівняння для нитки має вигляд:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.4.62)$$

де

$$f(T) = I^2 R(T) - \gamma(T - T_0) \equiv Q_+ - Q_- \quad (2.4.63)$$

кінетична функція,  $c$  – погонна теплоємність нитки (на одиницю довжини),  $\kappa$  – теплопровідність,  $T_0$  – температура навколишнього середовища (пор. з рівнянням (2.1.4)). Доданки  $Q_+ = I^2 R(T)$  та  $Q_- = \gamma(T - T_0)$  визначають відповідно кількість теплоти за одиницю часу з одиниці довжини нитки, що виділяється згідно закону Джоуля - Ленца та що віддається в навколишнє середовище. Вигляд кінетичної функції для різних значень струму показано на рис. 2.4.12.

Розглянемо спочатку випадок, коли струм  $I$  через дротину підтримується сталим. В інтервалі між деякими крайніми значеннями  $I_{\min}$  та  $I_{\max}$  система має два стійкі стани – з низькою ( $T_1 = T_1(I)$ ) та з високою ( $T_2 = T_2(I)$ ) температурою. Перехід між станами має вигляд хвилі перекидання, яка витісняє (в залежності від параметрів) низькотемпературну (або, що те саме, низькоомну) чи високотемпературну (високоомну) область. Напрямок поширення хвилі визначається, як указувалося вище (див. п. 2.2.1.5), знаком інтегралу

<sup>15</sup> Див.: В.В.Барелко, В.М.Бейбутян, Ю.В.Володин, Я.Б.Зельдович. Об эффекте бареттирования. // ДАН СССР, 257, 339-344 (1981).

$$\Delta\Phi = \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT.$$

При  $\Delta\Phi > 0$  в усіх точках дротини з часом встановлюється стан з температурою  $T_2$ , при  $\Delta\Phi < 0$  – стан з температурою  $T_1$ , при  $\Delta\Phi = 0$  хвиля перекидання не поширюється.

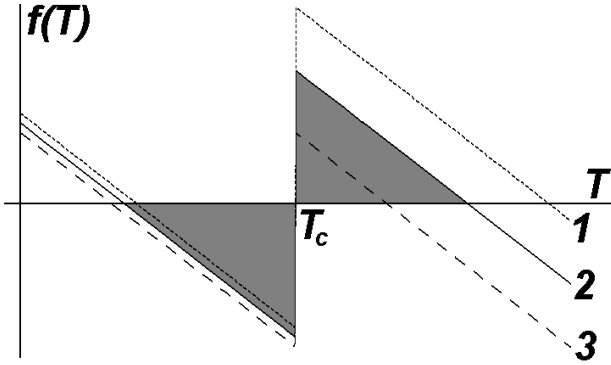


Рис. 2.4.12. Кінетична функція рівняння (2.4.62) для різних значень струму:  $I_1 > I_2 = I_{cr} > I_3$ .

Нехай тепер підтримується сталим значення не струму через нитку, а напруги  $U$  на її кінцях. Тепер струм через нитку визначається формулою

$$I = \frac{U}{\int_0^l R(T(x)) dx}, \quad (2.4.64)$$

де  $l$  – довжина нитки.

Нехай  $\Delta\Phi = 0$  для деякого значення струму  $I = I_{cr}$  (рис. 2.4.12). Розглянемо спершу випадок, коли в початковий момент часу  $I > I_{cr}$  і в усіх точках дротини температура низька,  $T = T_1$ . Тоді  $\Delta\Phi > 0$ . У цьому випадку на дротині від флуктуації з'являється високотемпературна (і, відповідно, високоомна) область,  $T = T_2$ , яка починає розширюватися. При цьому повний опір нитки зростатиме і, відповідно, струм через нитку зменшуватиметься, доки не буде досягнуте значення  $I = I_{cr}$  і хвиля перекидання не зупиниться. В результаті встановиться рівновага між ділянками з температурами  $T_1$  і  $T_2$ . Те саме буде, якщо в початковий момент часу виконувалася умова  $I < I_{cr}$ . При зміні напруги  $U$  в деяких межах розміри високотемпературної та низькотемпературної ділянок змінюватимуться, але струм у стаціонарному стані весь час дорівнюватиме  $I_{cr}$ . Це явище називається баретуванням. Відповідно баретер являє собою стабілізатор струму.

#### 2.4.3.2. Розрахунок характеристик дисипативної структури в баретері

Нехай довжини ділянок з температурами  $T_1$  і  $T_2$  значно більші від ширини перехідного шару. Тоді формулу (2.4.64) можна переписати у формі

$$I = \frac{U}{(R_2 l_2 + R_1 l_1)}, \quad (2.4.64 \text{ а})$$

де  $R_1 = R(T < T_{cr})$ ,  $R_2 = R(T > T_{cr})$  (див. рис. 2.4.11 б),  $l_1 + l_2 = l$ ,  $l_1$  і  $l_2$  – довжини ділянок з температурами  $T_1$  і  $T_2$ . Оскільки в стаціонарному режимі  $I = I_{cr}$ , маємо:

$$U/I_{cr} = R_2 l_2 + R_1 (l - l_2),$$

звідки

$$l_2 = \frac{(U/I_{cr}) - R_1 l}{R_2 - R_1} \quad (2.4.65)$$

Отже, стаціонарна дисипативна структура виникає при  $U_{\min} < U < U_{\max}$ , де  $U_{\min} = I_{cr} R_1 l$ ,  $U_{\max} = I_{cr} R_2 l$ .

На нитці не обов'язково має бути одна високотемпературна ділянка. Таких ділянок може бути декілька (це визначається початковими умовами), але їхня сумарна довжина буде задаватися співвідношенням (2.4.65).

Головна причина виникнення дисипативної структури в баретері – наявність, крім локальної взаємодії, далекодійного зворотного зв'язку. Він виявляється в тому, що при фіксованій прикладеній напрузі сила струму в кожній точці дротини залежить від стану всіх інших її точок (див. формулу (2.4.64)).

### 2.4.3.3. Утворення вогнища горіння

Нехай у реакторі обмеженого об'єму відбувається горіння деякої речовини. Нехай її коефіцієнт дифузії значно перевищує коефіцієнт теплопровідності, так що за рахунок дифузії концентрація пального підтримується однаковою в усіх точках реактора. Тоді процес горіння описується кінетичними рівняннями для температури (з дифузією) та для концентрації пального:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \kappa \Delta T; \\ \frac{dn}{dt} = w - n \int Q(T(\vec{r})) d\vec{r}. \end{cases} \quad (2.4.66)$$

Тут  $n = n(t)$  – концентрація пального,  $w$  – кількість пального, що надходить ззовні за одиницю часу на одиницю об'єму реактора,  $q(T)$  – тепловиділення при горінні на одиницю маси пального,  $nQ(T)$  – швидкість зменшення концентрації пального при горінні в одиниці об'єму (інтегрування здійснюється по всьому об'єму реактора). Обидві ці функції мають вигляд розмитої сходинок (рис. 2.4.13). Величини  $\kappa$  та  $\gamma$  мають той самий зміст, що в рівняннях (2.4.62)–(2.4.63).

Нехай пальне в деякій точці реактора підпалене. Спершу зона горіння буде розширюватись. Але це приведе до збільшення втрат пального і, відповідно до зменшення його концентрації. В результаті „різниця потенціалів”, що визначається кінетичною функцією першого з рівнянь (2.4.66), зменшиться, що приведе до сповільнення руху фронту горіння. При деякому значенні  $n = n_{cr}$  цей фронт зупиниться, і виникне стаціонарна дисипативна структура – вогнище горіння. За інших початкових умов замість одного вогнища може виникнути кілька менших.

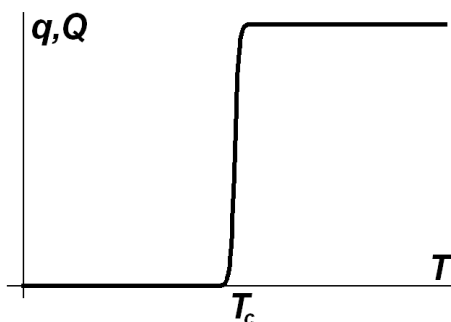


Рис. 2.4.13. Вигляд функцій, що характеризують тепловиділення та втрати пального при горінні.

Як і в попередньому випадку, причиною виникнення вогнища горіння є розподілений зворотний зв'язок у системі – концентрація пального в кожній точці реактора, як впливає з другого рівняння системи (2.4.66), залежить від стану всіх інших точок (тобто від наявності або відсутності горіння в цих точках).

#### 2.4.3.4. Нормальний режим жевріючого розряду

До числа дисипативних структур, обумовлених розподіленим зворотним зв'язком, можна зарахувати також катодну пляму в жевріючому розряді нормального типу.

Нагадаємо, що жевріючий розряд – це самостійний розряд у газах низького тиску (типові значення – 0.1-10 Торр), у якому виліт електронів з катоду забезпечується за рахунок вторинної іон-електронної емісії.

Типова сім'я вольт-амперних характеристик жевріючого розряду подана на рис. 2.4.14.

При достатньо великій прикладеній напрузі реалізується так званий аномальний режим жевріючого розряду, коли емісія електронів відбувається з усієї поверхні катода. В аномальному режимі зменшення прикладеної напруги приводить до зменшення густини розрядного струму.

Але коли густина струму досягає деякого критичного значення, подальше зменшення струму відбувається за рахунок зменшення розмірів катодної плями при практично незмінних напрузі та густині струму. Ця ділянка вольт-амперної характеристики відповідає так званому нормальному режиму жевріючого розряду. Таким чином, за своїми властивостями катодна пляма являє собою дисипативну структуру розглянутого вище типу<sup>16</sup>.

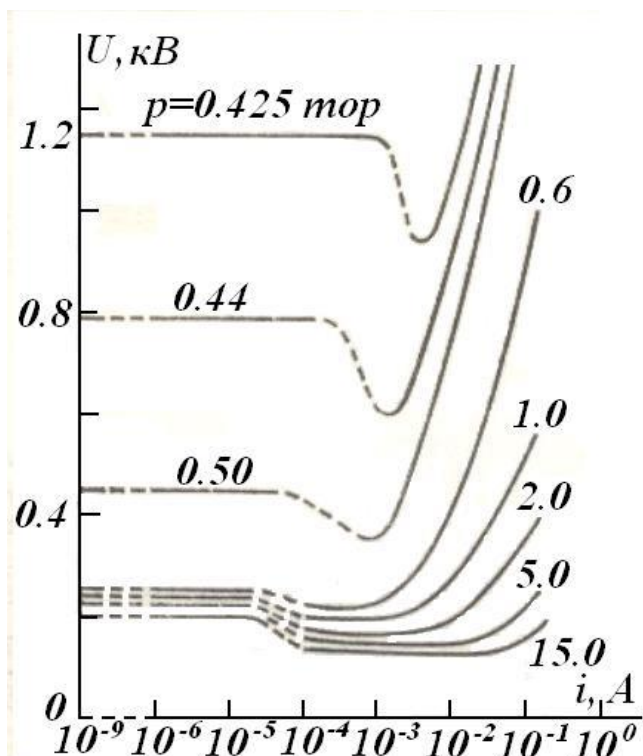


Рис. 2.4.14. Сім'я вольт-амперних характеристик жевріючого розряду в неоні між мідними дисками діаметром 9,3 см і відділю між ними 1,6 см. Розмитий мінімум на кривих відповідає нормальному режиму.

Напруга на розряді в нормальному режимі відповідає мінімальним затратам енергії електрона на іонізацію нейтрального атома. Зрозуміло, що ця енергія відбирається від зовнішнього електричного поля.

Розподілений зворотний зв'язок у такій системі виникає завдяки додатковому опору, увімкненому до джерела напруги послідовно з розрядною трубкою. Таким чином, падіння напруги на цій трубці залежить від повного розрядного струму, тобто від стану всіх точок на поверхні катоду.

При подальшому зменшенні струму густина струму на розряді починає зменшуватися

<sup>16</sup> Для електронної концентрації поблизу катоду можна отримати нелінійне кінетичне рівняння дифузійного типу, причому кінетична функція описується кубічним поліномом. Див.: V.I.Kolobov, A.Fiala. Transition from a Townsend discharge to a normal discharge via two-dimensional modeling. // Phys. Rev. E, **50**, No 4, 3018-3032 (1994).

за рахунок процесів дифузії, а падіння напруги на розряді зростає. Цей режим розряду прийнято називати піднормальним.

#### 2.4.3.5. Властивості дисипативних структур, обумовлених розподіленим зворотним зв'язком

Наведені приклади ілюструють основні властивості дисипативних структур, що виникають внаслідок існування в активному середовищі розподіленого зворотного зв'язку.

- Дисипативна структура – це стійке утворення, форма та розміри якого відновлюються після малих збурень. Можна сказати, що це певний стійкий стан розподіленої системи.
- Кожен такий стан характеризується певною областю притягання: збурення, після яких він може відновитися, не повинні перевищувати певного критичного значення.
- Одна й та сама система може породжувати багато різних дисипативних структур, реалізація яких залежить від початкових умов.

#### Контрольні питання до підрозділу 2.4.3

1. Опишіть якісно механізм стабілізації струму в баретері.
2. З яких міркувань можна визначити величину струму, що підтримується в баретері при обмеженій зміні прикладеної напруги?
3. Як можна збільшити діапазон прикладених напруг, у якому баретер стабілізує струм?
4. Чи можливі, на Вашу думку, осциляції струму в баретері навколо критичного значення?
5. Чи можливий, на Вашу думку, ефект баретування, якщо високотемпературний та низькотемпературний питомі опори змінюються вздовж дротини? Відповідь обґрунтуйте.
6. Користуючись ступінчастою апроксимацією залежності питомого опору нитки баретера від температури, якісно зобразіть вольт-амперну характеристику баретера.
7. Чи можливі, на Вашу думку, осциляції розмірів вогнища горіння в реакторі навколо стаціонарного значення?
8. Нехай температура навколишнього середовища вздовж реактора змінюється. Як це вплине на властивості вогнища горіння?
9. Наведіть декілька (не менше чотирьох) прикладів дисипативних структур, виникнення яких спричинене розподіленим зворотним зв'язком.
10. Чи залежать властивості дисипативних структур, спричинених розподіленим зворотним зв'язком, від розмірів системи?

#### Задачі до підрозділу 2.4.3

2.4.3.1. Розрахуйте критичний струм у баретері, вважаючи, що

$$R(T) = [R_1 + R_2 \Theta(T - T_c)].$$

2.4.3.2. Залежність погонного опору дротини баретера від температури має вигляд

$$R(T) = [R_1 + R_2 \Theta(T - T_c)](1 + \alpha T),$$

де  $\Theta(x)$  – функція Хевісайда. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузією має вигляд:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = I^2 R(T) - \gamma(T - T_0) + D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Знайти критичний струм та межі напруг, при яких має місце стабілізація струму, якщо довжина дротини баретера –  $l$ .

2.4.3.3. Знайти закон встановлення струму та розміру високоомної області після стрибкоподібної зміни напруги, прикладеної до баретера.

2.4.3.4. Горіння в реакторі, що має форму плоского шару, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi \Delta T; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_{(V)} Q[T(\vec{r})] d\vec{r},$$

де  $T$  – температура в даній точці реактора,  $T_0$  – температура стінки реактора (підтримується

сталою),  $n$  – концентрація пального (вважається однорідною в усьому об'ємі реактора),  $W$  – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу,  $q(T)$  – кількість теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при температурі  $T$ ,  $nQ(T)$  – кількість пального, що витрачається в одиничному об'ємі за одиницю часу при горінні при температурі  $T$ ,  $\gamma$  та  $\chi$  – сталі. Вважаючи, що

$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c),$$

де  $\Theta(x)$  – функція Хевісайда,  $T_c > T_0$ , визначити температуру в стаціонарному вогнищі горіння та об'єм цього вогнища.

2.4.3.5\*. Горіння в одновимірному реакторі описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_{(v)} Q[T(x)] dx,$$

де  $T$  – температура в даній точці реактора,  $T_0$  – температура стінки реактора (підтримується сталою),  $n$  – погонна концентрація пального (вважається однорідною в усьому об'ємі реактора),  $W$  – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу,  $q(T)$  – кількість теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при температурі  $T$ ,  $nQ(T)$  – кількість пального, що витрачається на одиницю довжини за одиницю часу при горінні при температурі  $T$ ,  $\gamma$  та  $\chi$  – сталі. Погонна теплоємність системи прийнята за одиницю. Вважаючи, що

$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c),$$

де  $\Theta(x)$  – функція Хевісайда,  $T_c > T_0$ , визначити температуру в стаціонарному вогнищі горіння та довжину цього вогнища. Побудувати числовий розв'язок системи для випадків малого та великого початкових вогнищ. Порівняти результати числового та аналітичного розрахунків для довжини стаціонарного вогнища горіння.

2.4.3.6\*. Горіння в реакторі, що має форму плоского шару, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi \Delta T; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_{(v)} Q[T(\vec{r})] d\vec{r},$$

де  $T$  – температура в даній точці реактора,  $T_0$  – температура стінки реактора (підтримується сталою),  $n$  – концентрація пального (вважається однорідною в усьому об'ємі реактора),  $W$  – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу,  $q(T)$  – кількість теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при температурі  $T$ ,  $nQ(T)$  – кількість пального, що витрачається за одиницю часу в одиниці об'єму при горінні при температурі  $T$ ,  $\gamma$  та  $\chi$  – сталі. Теплоємність на одиницю площі системи прийнято за одиницю. Вважаючи, що

$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c),$$

де  $\Theta(x)$  – функція Хевісайда,  $T_c > T_0$ , побудувати числовий розв'язок системи для випадків малого та великого початкових вогнищ. Дослідити поведінку системи в залежності від початкової форми вогнища горіння.

### **Висновки до розділу 2.4**

1. Стаціонарні дисипативні структури періодичного типу виникають в результаті насичення аперіодичної нестійкості, що виникає в системі при переході через точку біфуркації Тюрінга. Прикладами таких структур можуть бути «ефект алеї» (наявність незаселених областей в екологічних популяціях), виникнення конвективних валів у

- шарі рідини, що підігривається знизу, та інші.
2. Необхідною умовою виникнення аперіодичної нестійкості у двокомпонентній системі з дифузією (модель морфогенезу Тюрінга, що пояснює формування просторово періодичних біологічних структур з первісно однотипних клітин) є різна швидкість дифузії компонент.
  3. Виникнення шестикутних конвективних комірок (комірок Бенара) в шарі рідини, що підігривається знизу, зумовлене одночасним зростанням трьох пар хвиль, хвильові вектори яких утворюють правильний трикутник. Ці хвилі параметрично взаємодіють між собою за типом вибухової нестійкості, а насичення нестійкості зумовлене кубічною нелінійністю. Для коректного опису ефекту необхідно врахувати залежність параметрів рідини (наприклад, її в'язкості) від температури.
  4. Стаціонарні дисипативні структури аперіодичного типу формуються у відкритих системах бістабільного типу в результаті зупинення хвилі перемикавання. Останнє зумовлене тим, що швидкість хвилі перемикавання виявляється залежною від стану системи в усіх точках простору завдяки наявності розподіленого зворотного зв'язку.
  5. Прикладом системи, в якій можуть виникати стаціонарні аперіодичні дисипативні структури, може служити баретер. Ділянки нитки баретера можуть перебувати в одному з двох стійких станів (високотемпературному високоомному або низькотемпературному низькоомному). В результаті струм через баретер, який і визначає швидкість хвилі перекидання, є чутливим до стану кожної з ділянок баретера (при заданій прикладеній напрузі). Критичне значення струму, що встановлюється в баретері і відповідає зупиненню хвилі перекидання, реалізується в широкому діапазоні значень прикладеної напруги. Стаціонарна дисипативна структура відповідає поділу баретера на високоомні та низькоомні ділянки, причому сумарна довжина ділянок кожного типу визначається прикладеною наругою.

#### ***Контрольні питання до розділу 2.4***

1. Які властивості системи приводять до виникнення в ній стаціонарних дисипативних структур?
2. У чому полягає якісна відмінність між формуванням дисипативних структур у випадках баретування та конвекції Релея – Бенара?
3. Порівняйте між собою стаціонарні дисипативні структури в баретері та шарі рідини, який підігривається знизу, з точки зору впливу початкових та граничних умов.
4. Порівняйте між собою автохвилі та стаціонарні дисипативні структури. Що в них спільного і що відмінного?
5. Чи можуть в одному й тому ж самому середовищі виникати автохвилі й стаціонарні дисипативні структури? Відповідь обґрунтувати.

### **Частина 3. ХАОС І ТУРБУЛЕНТНІСТЬ**

Як уже відзначалось у Вступі, явище турбулентності є однією з форм самоорганізації, а турбулентну динаміку системи (наприклад, турбулентну течію) в загальному випадку можна розглядати як нестационарну дисипативну структуру.

Нагадаємо, що під турбулентністю розуміють складну непередбачувану поведінку систем із розподіленими параметрами. Аналогічну поведінку систем із зосередженими параметрами називають хаотичною динамікою.

Турбулентність досі залишається одним з найменш вивчених явищ у рамках класичної фізики. Однак уже зрозуміло, що в багатьох випадках при виникненні турбулентності поведінку систем із розподіленими параметрами можна звести до аналізу моделей систем зі скінченною кількістю ступенів вільності. Прикладом такого зведення є, зокрема, отримана вище система Лоренца (див. п. 2.4.2.6). Вона, як буде показано нижче (див. п. 3.4.2.2), описує також і турбулентний режим конвекції. З іншого боку, хаотична динаміка систем із невеликою кількістю ступенів вільності вивчена значно краще – особливо це стосується консервативних (гамільтонівських) систем. Тому наш розгляд турбулентності ми розпочнемо з аналізу хаотичної динаміки систем зі скінченною кількістю ступенів вільності.

#### **Розділ 3.1. Хаос у гамільтонівських системах**

Як уже зазначалося, наявність дисипації є необхідною передумовою формування дисипативних структур у відкритих нелінійних розподілених системах. Виникнення таких структур зумовлене, в першу чергу, відкритим характером системи, в яку надходить енергія ззовні. Саме ця обставина приводить до втрати стійкості стану спокою і розвитку нестійкості, нелінійна стадія якої завершується формуванням дисипативної структури. Специфіка турбулентності як дисипативної структури полягає в тому, рух системи, який виник в результаті розвитку початкової нестійкості, також виявляється нестійким (на відміну, наприклад, від усталених коливань автогенератора або регулярних дисипативних структур у відкритих системах із розподіленими параметрами). В результаті впливу цієї нестійкості формується неперервний або квазінеперервний частотний (а в деяких випадках – і просторовий) спектр руху системи.

У моделі гамільтонівської системи розглянути всі етапи виникнення турбулентності неможливо. Але ця модель виявляється цілком придатною для аналізу процесів переходу від регулярного до турбулентного руху. При цьому відсутність дисипації дозволяє не розглядати надходження енергії ззовні, оскільки повна енергія системи зберігається.

Щойно було відзначено, що сьогодні хаотична динаміка гамільтонівських систем, тобто автономних чи неавтономних консервативних систем із обмеженою кількістю ступенів вільності, є найбільш вивченою. Крім того, суттєво, що методи дослідження та кількісні характеристики хаотичного руху гамільтонівських систем у багатьох випадках переносяться на хаотичну і турбулентну динаміку дисипативних систем. Тому ми розпочнемо розгляд хаотичної динаміки саме з гамільтонівських систем зі скінченною кількістю ступенів вільності.

##### ***3.1.1. Інтегровні гамільтонівські системи***

Перш ніж розглянути хаотичну динаміку гамільтонівських систем, нагадаємо деякі відомі з теоретичної механіки та теорії коливань і хвиль поняття, що стосуються гамільтонівських систем взагалі та інтегровних гамільтонівських систем зокрема.

Інтегровні гамільтонівські системи складають лише незначну частину всіх гамільтонівських систем. Але вони викликають інтерес через те, що слугують свого роду еталоном, з яким зручно порівнювати інші гамільтонівські системи. Наприклад, окремо виділяють клас систем, близьких до інтегровних. Чим сильніше відрізняється гамільтонівська система від інтегровної, тим складнішою є її поведінка.



### 3.1.1.1. Рівняння Гамільтона

Будемо розглядати системи, які можна подати як набір частинок, що взаємодіють одна з одною. Закон залежності сили взаємодії від віддалі між частинками вважатимемо відомим. Очевидно, дисипація в таких системах відсутня. Стан подібної системи повністю задається положеннями (координатами) та швидкостями (або імпульсами) всіх частинок, що входять до її складу. Системи такого типу зручно описувати за допомогою гамільтонівського формалізму.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, гамільтоніаном  $H = H(\vec{p}, \vec{q})$  називають повну енергію системи, записану через її узагальнені імпульси  $\vec{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  та узагальнені координати  $\vec{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Якщо гамільтоніан системи не залежить від часу, така система, очевидно, буде консервативною (і автономною). Явна залежність гамільтоніана від часу відповідає неавтономній системі, тобто системі, на яку діє зовнішня сила.

З принципу найменшої дії можна вивести так звані рівняння Гамільтона – рівняння руху системи у формі:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, n. \quad (3.1.1)$$

Розв'язок рівнянь Гамільтона для системи з  $n$  ступенями вільності описує рух зображувальної точки в  $2n$ -вимірному фазовому просторі  $(\vec{p}, \vec{q})$ .

Гамільтонівський формалізм застосовний і до неавтономних консервативних систем. У цьому випадку, як уже згадувалося, гамільтоніан явно залежить від часу.

### 3.1.1.2. Теорема Ліувілля

Розглянемо деяку обмежену замкнену область  $\Omega_0$  у фазовому просторі, яку назвемо фазовою краплею. Будемо розглядати точки цієї області як початкові умови для набору фазових траєкторій, задані в момент  $t = 0$ . З плином часу зображувальні точки рухатимуться у фазовому просторі вздовж відповідних фазових траєкторій. Відповідно рухатиметься утворена ними фазова крапля, сукупність точок якої в момент  $t$  позначимо через  $\Omega_t$ .

З рівнянь Гамільтона випливає умова нестисливості фазової рідини:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] = 0, \quad (3.1.2)$$

яку можна переписати у формі:

$$\int_{(\Omega_0)} d\vec{p}d\vec{q} = \int_{(\Omega_t)} d\vec{p}d\vec{q}. \quad (3.1.2 \text{ а})$$

Рівність (3.1.2 а) показує, що об'єм фазової краплі (у фазовому просторі) з часом залишається незмінним.

Співвідношення (3.1.2)-(3.1.2 а) складають зміст теорема Ліувілля<sup>1</sup>.

### 3.1.1.3. Канонічні перетворення

У формалізмі Гамільтона є два набори незалежних змінних,  $\vec{p}$  та  $\vec{q}$ , які фактично рівноправні. Вибір цих змінних є неоднозначним. Можна розглянути перехід до деякого іншого набору змінних  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$ , так що

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n), \\ Q_i &= Q_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

<sup>1</sup> Ж. Ліувілл (Joseph Liouville, 1809 - 1882) – визначний французький математик, засновник «Журналу чистої та прикладної математики». Працював у галузі теорії чисел, комплексного аналізу, диференціальної геометрії, топології, математичної фізики та астрономії.

Якщо при цьому канонічна форма рівнянь Гамільтона зберігається, тобто

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(\vec{P}, \vec{Q})}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(\vec{P}, \vec{Q})}{\partial Q_i}, \quad i = 1, n, \quad (3.1.1 \text{ а})$$

де  $H'(\vec{P}(\vec{p}, \vec{q}), \vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}))$  – перетворений гамільтоніан, то перетворення (3.1.3) називають канонічними.

При канонічних перетвореннях фазовий об'єм повинен зберігатися:

$$\int_{(\Omega)} d\vec{p}d\vec{q} = \int_{(\Omega)} d\vec{P}d\vec{Q}. \quad (3.1.4)$$

Оскільки диференціали в інтегралах (3.1.4) пов'язані між собою через якобіан перетворення, то останній має дорівнювати одиниці:

$$\frac{\partial(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)} = \frac{\partial(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n)} = 1. \quad (3.1.4 \text{ а})$$

Канонічні перетворення можна використати для спрощення рівнянь руху. Оптимальним є випадок, коли  $H' = H'(\vec{P})$ , тобто всі узагальнені координати є, як кажуть, циклічними змінними. Тоді

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_1, \dots, P_n). \quad (3.1.1 \text{ б})$$

Визначенні таким чином імпульси  $P_i$  є інтегралами руху. Знання їх дає можливість проінтегрувати рівняння Гамільтона. В результаті отримаємо:

$$P_i = const, \quad Q_i = f_i(P_1, \dots, P_n)t + \delta_i, \quad (3.1.5)$$

де набір сталих  $\delta_i$  визначається з початкових умов.

Однак умова  $H' = H'(\vec{P})$  сама по собі ще не дозволяє однозначно ввести нові узагальнені імпульси та узагальнені координати.

#### 3.1.1.4. Змінні дія-кут для нелінійного осцилятора

Розглянемо гамільтонівську систему з одним ступенем вільності, яка здійснює фінітний рух. Такий рух обов'язково буде періодичним із деяким періодом  $2\pi/\omega$ . Нехай для цієї системи  $H = H(P)$ . Накладемо умову на змінну  $Q$ : вимагатимемо, щоб на періоді  $2\pi/\omega$  вона змінювалася на  $2\pi$ . Це, в свою чергу, однозначно визначає змінну  $P$ . Введені таким чином змінні  $I, \theta$  ( $I \equiv P$ ,  $\theta \equiv Q$ ) називаються змінними дія-кут. Можна показати, що дія визначається через “старі” змінні зі співвідношення

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (3.1.6)$$

(інтеграл береться при заданому значенні повної енергії системи). Для найпростішої моделі лінійного осцилятора  $I = E/\omega$ , тобто дія лінійно пов'язана з повною енергією системи.

Таким чином, розв'язок рівнянь Гамільтона для системи з одним ступенем вільності в змінних дія-кут має вигляд:

$$I = const, \quad \theta = \omega(I)t + \delta. \quad (3.1.5 \text{ а})$$

Залежність  $\omega(I)$  виражає закон неізохронності осцилятора, тобто останній у загальному випадку вважається нелінійним.

#### 3.1.1.5. Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут

Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут зручно малювати в полярних координатах, де по радіусу відкладена дія  $I$ , а по куту – кут  $\theta$ . Він являтиме собою набір концентричних кіл, кожному з яких внаслідок неізохронності відповідає своя час-

тота обертання зображувальної точки (рис. 3.1.1 а).

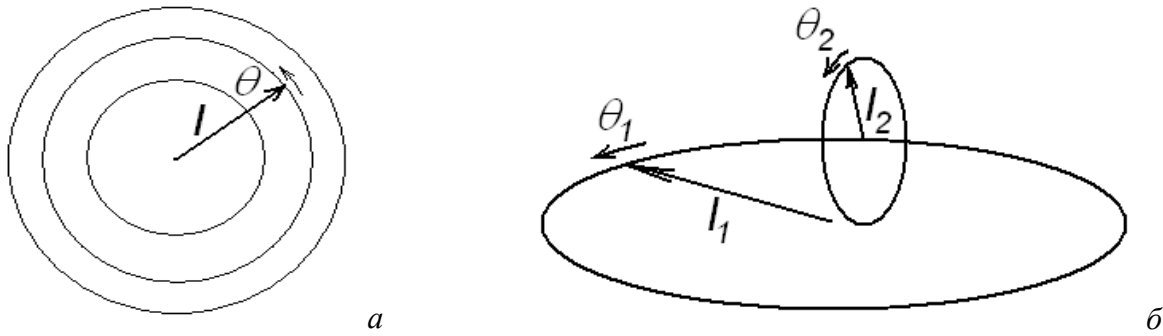


Рис. 3.1.1. Фазовий портрет в координатах дія-кут для системи з однією (а) та двома (б) ступенями вільності.

### 3.1.1.6. Інтегровні системи з багатьма ступенями вільності

Перейдемо тепер до розгляду систем із довільним числом ступенів вільності. Для таких систем перехід до змінних дія-кут можливий не завжди. Системи, для яких він можливий, називаються інтегровними. Як і для систем з одним ступенем вільності, для інтегровних систем гамільтоніан залежить лише від дій  $I_j$  і не залежить від кутів  $\theta_j$ , а рух системи є періодичним по кожному з кутів  $\theta_j$  з періодом  $2\pi$ . В результаті рівняння руху набувають вигляду

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\theta}_j = \omega_j(\vec{I}), \quad \omega_j(\vec{I}) \equiv \frac{\partial H(\vec{I})}{\partial I_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.1.1 \text{ в})$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\vec{I} = \text{const}, \quad \vec{\theta} = \vec{\omega}(\vec{I})t + \vec{\delta}_0. \quad (3.1.5 \text{ б}).$$

Питання про визначення інтегровності довільної динамічної системи (системи звичайних диференціальних рівнянь) залишається відкритим. Гіпотеза з цього приводу, що досі залишається недоведеною, була висловлена ще в другій половині XIX століття С.В.Ковалевською<sup>2</sup>. Вона зводиться до того, що інтегровність пов'язана з наявністю деяких особливостей розв'язків цих рівнянь у комплексній площині. Таким чином, можна припустити, що відсутність інтегровності – це загальне правило, а її наявність є виключенням із цього правила.

Обговоримо тепер вигляд фазового портрету інтегровної системи з багатьма ступенями вільності.

### 3.1.1.7. Фазовий портрет інтегровної системи з двома ступенями вільності

Для систем з двома ступенями вільності фазовий простір чотирирівимірний. Умови  $I_1 = \text{const}$  та  $I_2 = \text{const}$  визначають у цьому просторі деяку двовимірну поверхню – поверхню тора. Відповідно фазова траєкторія, що відповідає цим значенням дії, лежить на поверхні тора і називається обмоткою тора (рис. 3.1.1 б).

В цьому випадку весь фазовий простір являє собою сукупність вкладених один в одного торів з радіусами  $I_1$  та  $I_2$  (у чотирирівимірному просторі напрямки  $I_1$  та  $I_2$  рівноправні). Аналогічна картина матиме місце для будь-якої інтегровної системи з двома ступенями вільності. При цьому для нелінійних систем частоти обертання  $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2)$  та  $\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2)$  будуть, взагалі кажучи, змінюватися від тора до тора. В загальному випадку змінюватиметь-

<sup>2</sup> С.В.Ковалевська (Софья Васильевна Ковалевская, 1850 - 1891) – російський математик і механік, член-кореспондент Петербурзької Академії наук (1889). Основні результати отримала в галузі теорії обертання твердого тіла, теорії диференціальних рівнянь, теорії інтегралів.

ся й відношення частот  $\omega_1/\omega_2$ .

Поведінка фазових траєкторій істотно залежить від того, чи буде відношення  $\omega_1/\omega_2$  раціональним. Якщо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}, \quad (3.1.7)$$

де  $m, n$  – цілі числа, то через  $m$  витків навколо головної осі тора і  $n$  витків навколо допоміжної осі фазова траєкторія замкнеться, тобто через час  $T = 2\pi m/\omega_1 = 2\pi n/\omega_2$  система відновить початковий стан. Тори, для яких виконано умови вигляду (3.1.7), називаються резонансними (рис. 3.1.2 а).

Якщо відношення  $\omega_1/\omega_2$  є ірраціональним, фазова траєкторія ніколи не замикається, хоча з плином часу вона буде як завгодно близько підходити до будь-якої точки на поверхні тора. У цьому випадку говорять, що фазова траєкторія утворює всюди щільну обмотку тора, а рух системи називають квазіперіодичним, або умовно періодичним. Відповідні тори називають нерезонансними (рис. 3.1.2 б).

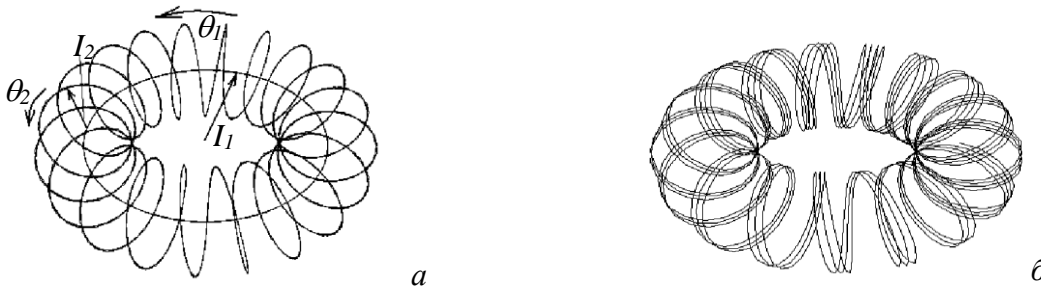


Рис.3.1.2. Фазовий портрет інтегрованої гамільтонівської системи з двома ступенями вільності для резонансного (а) та нерезонансного (б) торів.

У реальних ситуаціях (це стосується як натурних експериментів, так і числового моделювання) час спостереження за системою завжди буває обмеженим, тому при дуже великих  $m$  і  $n$  відрізнити періодичний і квазіперіодичний рух важко.

### 3.1.1.8. Резонансні та нерезонансні тори для системи з довільним числом ступенів вільності

Повернемося тепер до загального випадку інтегрованих системи з  $n$  ступенями вільності. Для таких систем  $2n$ -вимірний фазовий простір у змінних дія-кут має структуру  $n$ -вимірних торів. Довільна фазова траєкторія лежить на поверхні одного з них.

Говорять, що  $n$ -вимірний тор є резонансним, якщо для відповідних значень  $I_1, I_2, \dots, I_n$  існує набір відмінних від нуля цілих чисел  $m_i$ , що задовольняють умові

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0. \quad (3.1.7 \text{ а})$$

На відміну від системи з двома ступенями вільності, при  $n > 2$  умови (3.1.7 а) вже не достатньо для того, щоб рух на поверхні резонансного тора був строго періодичним і відбувався вздовж замкненої фазової траєкторії. Втім, будь-яка замкнена фазова траєкторія, очевидно, обов'язково лежатиме на поверхні саме резонансного тора. Отже, рух на поверхні резонансного тора при  $n > 2$  може бути як періодичним, так і квазіперіодичним.

Зміст умови (3.1.7 а) стане зрозумілим нижче (див. п. 3.1.2.5).

Для нерезонансного тора умова вигляду (3.1.7 а) не виконується при жодних значеннях  $m_i$ . Будь-яка фазова траєкторія всюди щільно заповнює поверхню нерезонансного тора, і рух є квазіперіодичним.

### 3.1.1.9. Умова невинродженості

Побудуємо квадратну матрицю з елементів  $\partial\omega_i/\partial I_j = \partial^2 H(\vec{I})/\partial I_i \partial I_j$ . Якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля,

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H(\vec{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0, \quad (3.1.8)$$

відповідна система називається невинродженою. Фактично умова невинродженості означає, що принаймні деякі елементи  $\partial\omega_i/\partial I_j$  відмінні від нуля, тобто така система є неізохронною, а, отже, й нелінійною. Для невинроджених систем у фазовому просторі резонансні й нерезонансні тори певним чином чергуються.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.1.1

1. Чи однозначно вводяться змінні дія-кут? Яка умова однозначно визначає їхню величину?
2. Визначте резонансні та нерезонансні тори для нелінійного осцилятора, на який діє зовнішня періодична сила, вважаючи, що вісь часу скручена в кільце.
3. Яких торів на фазовому портреті інтегрованої гамільтонівської системи більше – резонансних чи нерезонансних?
4. Чи можливий граничний перехід між резонансними та нерезонансними торами в інтегрованої системі?
5. В чому відмінність між резонансними торами в системах з двома і менше ступенями вільності та в системах, де кількість ступенів вільності більша від двох?
6. Дайте інтерпретацію теореми Ліувілля з точки зору динаміки зображувальних точок у фазовому просторі.
7. В яких випадках рух інтегрованої гамільтонівської системи буде ергодичним?
8. Наведіть по кілька прикладів винроджених та невинроджених систем із багатьма ступенями вільності.
9. Чи може система зв'язаних нелінійних осциляторів бути винродженою?

#### Задачі до підрозділу 3.1.1

3.1.1.1. Гамільтоніан системи має вигляд

а)  $H(\vec{I}, \vec{\theta}) = \omega_0(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}\alpha(I_1^2 + I_2^2) + \beta I_1 I_2$ ;

б)  $H(\vec{I}, \vec{\theta}) = \omega_0(I_1 + I_2) + \frac{1}{3}\alpha(I_1^3 + I_2^3) + \beta I_1 I_2(I_1 + I_2)$ .

Яким значенням дій відповідають резонансні тори порядків 1, 1/2 та 2/3?

3.1.1.2\*. Введіть змінні дія-кут та знайдіть закон неізохронності – залежність власної частоти від дії – для

- а) математичного маятника;
- б) осцилятора з квадратичною нелінійністю;
- в) осцилятора з кубічною нелінійністю.

### 3.1.2. Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних

Нехай для деякої гамільтонівської системи з  $n$  ступенями вільності гамільтоніан можна подати у вигляді

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}, t) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}, t). \quad (3.1.9)$$

Якщо  $0 < \varepsilon \ll 1$ , говорять, що така система близька до інтегрованої.

Рух інтегровних гамільтонівських систем є регулярним (періодичним або квазіперіодичним). Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, демонструють зародження хаотичної динаміки.

Нагадаємо, що причиною виникнення хаотичної динаміки (непередбачуваності) в сис-

темах із невеликою кількістю ступенів вільності за відсутності випадкових зовнішніх сил є поєднання нестійкості системи, яка виявляється в розбіжності сусідніх зображувальних точок з часом, із обмеженістю (фінітністю) руху. Початкові умови, необхідні для передбачення руху системи, завжди відомі лише зі скінченною точністю. Внаслідок нестійкості початкова невизначеність з часом зростає, так що через деякий час вона виявляється за порядком величини такою самою, як передбачене значення. Це й означає непередбачуваність руху системи<sup>3</sup>.

### 3.1.2.1. Канонічне перетворення для нелінійного осцилятора

Подивимося, чи не можна гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, просто звести до інтегровного випадку. Застосуємо для цього канонічну теорію збурень.

Канонічна теорія збурень оперує змінними дія-кут. Розглянемо спершу її застосування для систем з одним ступенем вільності, тобто автономних консервативних осциляторів.

Розглянемо гамільтоніан вигляду  $H(I, \theta, \varepsilon)$ , що залежить від малого параметра  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) таким чином, що  $H(I, \theta, \varepsilon = 0) = H_0(I)$ . Розкладемо цей гамільтоніан у ряд Тейлора<sup>4</sup> за  $\varepsilon$ :

$$H(\theta, I, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I) + \varepsilon^2 H_2(\theta, I) + \dots \quad (3.1.10)$$

(змінні  $I, \theta$  відповідають дії та куту при  $\varepsilon = 0$ ).

Рівняння Гамільтона для гамільтоніана (3.1.10) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial \theta} - \dots \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial I} + \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Ідея канонічного перетворення полягає у знаходженні для збуреного (порівняно з випадком  $\varepsilon = 0$ ) гамільтоніана  $H(I, \theta, \varepsilon)$  нових змінних  $J, \varphi$ , для яких можливе канонічне перетворення до нового гамільтоніана  $K$ , причому  $K = K(J)$ . Для знаходження цих змінних необхідно спочатку відшукати твірну функцію  $F_2(\theta, J)$ <sup>5</sup>, таку, що

$$I = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial \theta}, \quad \varphi = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial J}. \quad (3.1.12)$$

Тоді співвідношення (3.1.12) дозволяють однозначно визначити нові змінні  $J, \varphi$  через старі змінні  $I, \theta$ .

### 3.1.2.2. Рівняння Гамільтона – Якобі

Очевидно, твірна функція, як і початковий гамільтоніан, залежить від малого параметра  $\varepsilon$ . Розкладемо її в ряд Тейлора за цим параметром:

$$F_2(\theta, J) = F_{20}(\theta, J) + \varepsilon F_{21}(\theta, J) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, J) + \dots \quad (3.1.13)$$

При  $\varepsilon = 0$  нові змінні  $J, \varphi$  повинні збігатися зі старими  $I, \theta$ . Тому, щоб задовольнити у цьому випадку співвідношення (3.1.12), слід покласти

$$F_{20}(\theta, J) = J\theta. \quad (3.1.14)$$

Прирівняємо старий гамільтоніан  $H$  у вигляді ряду (3.1.10) з урахуванням першого зі співвідношень (3.1.12) до нового гамільтоніана  $K$ . Отримаємо так зване рівняння Гамільтона

<sup>3</sup> Детальніше про це див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.

<sup>4</sup> Б. Тейлор (Brook Taylor, 1685 - 1731) – англійський математик і фізик. Працював у галузі механіки, оптики, теорії коливань, досліджував капілярні явища в рідинах.

<sup>5</sup> Інколи використовують твірну функцію  $F_1 = F_1(\varphi, I)$ , для якої  $J = \partial F_1(\varphi, I) / \partial \varphi$ ,  $\theta = \partial F_1(\varphi, I) / \partial I$ .

– Якобі<sup>6</sup>:

$$H_0\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \varepsilon^2 H_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \dots = K(J). \quad (3.1.15)$$

Замінімо похідні в аргументах доданків у лівій частині (3.1.15) за допомогою ряду (3.1.13) і подамо їх у вигляді рядів Тейлора за  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right) &= H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \dots\right) = H_0\left(J + \varepsilon\left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon\left(\frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \dots\right)\right)\right) = \\ &= H_0(J) + \varepsilon \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \left[\frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2\right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$H_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) = H_1(J, \theta) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \dots \quad (3.1.17)$$

$$H_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) = H_2(J, \theta) + \dots \quad (3.1.18)$$

В рівняннях (3.1.16)-(3.1.18) залишені доданки, які відповідають членам до другого порядку мализни включно у лівій частині рівняння Гамільтона - Якобі (3.1.15).

### 3.1.2.3. Знаходження елементів ряду для нового гамільтоніана

Новий гамільтоніан  $K = K(J, \varepsilon)$  у правій частині (3.1.15), який у загальному випадку залежить від малого параметра  $\varepsilon$ , також можна розкласти в ряд Тейлора за  $\varepsilon$ :

$$K(J, \varepsilon) = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J) + \dots \quad (3.1.19)$$

Тепер підставимо (3.1.16)-(3.1.19) до (3.1.15):

$$\begin{aligned} H_0(J) + \varepsilon \left[ H_1(J, \theta) + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right] + \varepsilon^2 \left[ H_2(J, \theta) + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2 \right] + \dots = \\ = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях  $\varepsilon$  у лівій та правій частинах (3.1.20), можна отримати елементи ряду (3.1.19) у явному вигляді:

$$K_0(J) = H_0(J);$$

$$K_1(J) = H_1(J, \theta) + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta};$$

$$K_2(J) = H_2(J, \theta) + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2; \quad (3.1.21)$$

.....

### 3.1.2.4. Знаходження твірної функції

Перепишемо друге з рівнянь (3.1.21) у формі:

$$K_1(J) = H_1(J, \theta) + \omega_0(J) \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}. \quad (3.1.21 \text{ а})$$

Усереднимо обидві частини (3.1.21 а) за  $\theta$  на проміжку  $[0, 2\pi]$ . Оскільки ліва частина взагалі не залежить від  $\theta$ , вона не зміниться. Отримаємо:

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta + \omega_0(J) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} d\theta. \quad (3.1.21 \text{ б})$$

<sup>6</sup> К. Якобі (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 – 1851) – видатний німецький математик. Зробив визначний внесок до комплексного аналізу, лінійної алгебри, динаміки та ряду інших розділів математики та механіки.

Для розрахунку останнього інтегралу в правій частині (3.1.21 б) розкладемо функцію  $F_{21}(J, \theta)$  в ряд Фур'є за  $\theta$  (це можна зробити, оскільки вона періодична за  $\theta$  з періодом  $2\pi$ ):

$$F_{21}(J, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(J) \exp(ik\theta). \quad (3.1.22)$$

При підстановці (3.1.22) до (3.1.21 б) доданок, що відповідає значенню  $k=0$ , зникне при диференціюванні за  $\theta$ . Решта доданків при інтегруванні перетворяться на нуль. Таким чином, рівняння (3.1.21 б) набуде вигляду

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta \equiv \overline{H_1(J, \theta)}. \quad (3.1.21 в)$$

Таким чином, знаючи вигляд гамільтоніана  $H_1(I, \theta)$ , ми за допомогою (3.1.21 в) можемо знайти функцію  $K_1(J)$ . Тоді з рівняння (3.1.21 а) можна знайти похідну від твірної функції:

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} = \frac{K_1(J) - H_1(J, \theta)}{\omega_0(J)} = -\frac{\tilde{H}_1(J, \theta)}{\omega_0(J)}, \quad (3.1.23)$$

де

$$\tilde{H}_1(J, \theta) \equiv H_1(J, \theta) - \overline{H_1(J, \theta)} \quad (3.1.24)$$

– змінна частина гамільтоніана  $H_1(I, \theta)$ . Її також можна розкласти в ряд Фур'є за  $\theta$ :

$$\tilde{H}_1(J, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(J) \exp(ik\theta), \quad (3.1.25)$$

тобто коефіцієнти  $A_k(J)$  можна вважати відомими.

Підставимо (3.1.22) та (3.1.25) до (3.1.23). Прирівнявши коефіцієнти при однакових експонентах у правій та лівій частинах, можна знайти в явному вигляді коефіцієнти ряду (3.1.22)

$$B_k(J) = \frac{iA_k(J)}{k\omega_0(J)}, \quad (3.1.26)$$

тобто твірну функцію (з точністю до доданків першого порядку за  $\varepsilon$ ):

$$F_2(J, \theta) = J\theta + \frac{i\varepsilon}{\omega_0(J)} \sum_{k \neq 0} \frac{A_k(J)}{k} \exp(ik\theta) + \dots \quad (3.1.26 а)$$

В свою чергу, знаючи твірну функцію, із співвідношень (3.1.12) можна знайти нові змінні дія-кут. Скоригована частота, виходячи з (3.1.19), визначається співвідношенням

$$\omega(J) = \omega_0(J) + \varepsilon \frac{dK_1(J)}{dJ}. \quad (3.1.27)$$

Як бачимо, секулярні доданки в цьому розрахунку не виникають. Процедура можна продовжити, шукаючи поправки вищих порядків за  $\varepsilon$ . Проблеми можуть виникнути лише при  $\omega_0 \rightarrow 0$ , тобто при русі вздовж сепаратриси. Такі результати є цілком передбачуваними, оскільки, як нам уже відомо, гамільтонівські системи з одним ступенем вільності завжди є інтегровними.

### 3.1.2.5. Канонічна теорія збурень для систем із багатьма ступенями вільності

Розглянемо тепер загальний випадок системи, близької до інтегровної, тобто системи з гамільтоніаном (3.1.9). Вектори  $\vec{I}$  та  $\vec{\theta}$  вважатимемо  $n$ -вимірними.

У нульовому наближенні за малим параметром  $\varepsilon$  рівняння руху мають вигляд:

$$\dot{\vec{I}} = -\nabla_{\theta} H_0(\vec{I}) = 0, \quad \dot{\vec{\theta}} = \nabla_I H_0(\vec{I}) \equiv \vec{\omega}_0(\vec{I}), \quad (3.1.1 в)$$



де

$$\nabla_{\theta} \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}, \quad \nabla_I \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial I_k}. \quad (3.1.28)$$

Як і в попередньому випадку, спробуємо знайти набір канонічних змінних  $\vec{J}, \vec{\theta}$ , які перетворюють гамільтоніан  $H(\vec{I}, \vec{\theta})$  на гамільтоніан  $K(\vec{J})$ . Нові змінні знаходимо із співвідношень, аналогічних (3.1.12):

$$\vec{I} = \nabla_{\theta} F_2(\vec{J}, \vec{\theta}), \quad \vec{\varphi} = \nabla_J F_2(\vec{J}, \vec{\theta}). \quad (3.1.29)$$

Твірну функцію  $F_2(\vec{J}, \vec{\theta})$  можна записати аналогічно до (3.1.13)-(3.1.14):

$$F_2(\vec{J}, \vec{\theta}) = (\vec{\theta} \cdot \vec{J}) + \varepsilon F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) + \varepsilon^2 F_{22}(\vec{J}, \vec{\theta}) + \dots \quad (3.1.30)$$

Рівняння Гамільтона - Якобі з точністю до доданків першого порядку за  $\varepsilon$  має вигляд:

$$H_0(\vec{J} + \varepsilon \nabla_{\theta} F_{21}) + \varepsilon H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) = K_0(\vec{J}) + \varepsilon K_1(\vec{J}). \quad (3.1.31)$$

З нього легко отримати перші доданки розкладу гамільтоніана  $K(\vec{J})$  в ряд Тейлора за малим параметром  $\varepsilon$ :

$$K_0(\vec{J}) = H_0(\vec{J});$$

$$K_1(\vec{J}) = H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) + (\nabla_J H_0(\vec{J}) \cdot \nabla_{\theta} F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})) = H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) + (\vec{\omega}_0(\vec{J}) \cdot \nabla_{\theta} F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})). \quad (3.1.32)$$

Розкладемо поправку першого порядку до твірної функції  $F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})$  та змінну частину поправки до гамільтоніана

$$\tilde{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}) \equiv H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) - \overline{H_1(\vec{J}, \vec{\theta})} \quad (3.1.33)$$

в багатовимірні ряди Фур'є по кутах:

$$F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} B_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta}); \quad (3.1.34)$$

$$\tilde{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} A_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta}), \quad (3.1.35)$$

де використане позначення

$$\vec{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}. \quad (3.1.36)$$

Після усереднення по всіх кутах отримаємо:

$$K_1(\vec{J}) = \overline{H_1(\vec{J}, \vec{\theta})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n H_1(\vec{J}, \vec{\theta}). \quad (3.1.32 \text{ а})$$

Підставивши (3.1.32 а) та (3.1.34)-(3.1.35) до (3.1.32), можна отримати вираз для  $F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})$ :

$$F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) = i \sum_{|\vec{m}| \neq 0} \frac{A_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i\vec{m} \cdot \vec{\theta})}{(\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{J}))}. \quad (3.1.37)$$

Як бачимо, у випадку, коли частоти  $\omega_{0i}(\vec{J})$  сумірні, тобто коли для деякого набору індексів підсумовування  $\vec{m}$  виконано умову резонансу вигляду

$$(\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{J})) = 0 \quad (3.1.38)$$

(пор. із умовою (3.1.7 а)), ряд у правій частині (3.1.37) розбігається. Це відома в класичній механіці проблема малих знаменників.

Таким чином, гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, вдається звести до ін-

тегровного випадку лише тоді, коли йдеться про рух на нерезонансних торах. Для руху по резонансних торах мале неінтегровне збурення в гамільтоніані дає якісно новий ефект.

Обговоримо фізичний зміст умови (3.1.38) (вона може бути також записана у формі (3.1.7 а)). Залежність  $\omega_{0i}(\vec{J})$  вказує на те, що ми маємо справу з нелінійними осциляторами.

Той факт, що незбурений гамільтоніан  $H_0(\vec{I})$  (див. формулу (3.1.9)) не розпадається на суму доданків, кожен з яких залежить тільки від однієї компоненти вектора  $\vec{I}$ , означає, що між згаданими осциляторами має місце зв'язок – взагалі кажучи, нелінійний. Для такої моделі умова (3.1.38) є умовою нелінійного резонансу в тому сенсі, що комбінаційна частота, яка виникає в результаті нелінійної взаємодії власних частот системи, збігається з власною частотою одного з осциляторів. Іншими словами, умову (3.1.38) можна розглядати як узагальнення відомої в теорії коливань умови резонансу  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  для параметричної взаємодії коливань у найпростішій системі трьох зв'язаних осциляторів із резонансним квадратичним зв'язком<sup>7</sup>.

Таким чином, саме параметрична взаємодія коливань у системі багатьох зв'язаних нелінійних осциляторів може порушити первісну інтегровність цієї системи при збуренні її гамільтоніану.

### 3.1.2.6. Теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера

Відповідь на питання про те, що відбувається з фазовими траєкторіями на поверхні резонансних торів під дією малого неінтегровного доданку до гамільтоніану, в загальних рисах дає теорема Колмогорова – Арнольда<sup>8</sup> – Мозера<sup>9</sup> (теорема КАМ). Вона була сформульована А.М.Колмогоровим, він же висловив ідею її доведення<sup>10</sup>. Доведення теореми КАМ здійснив В.І.Арнольд<sup>11</sup>. Інший частинний випадок теореми КАМ дещо раніше довів Дж. Мозер<sup>12</sup>.

Розглянемо систему, близьку до інтегровної, з гамільтоніаном (3.1.9)

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}),$$

причому  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Вважатимемо інтегровну частину гамільтоніана невиродженою, так що виконано умову (3.1.8)

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0(\vec{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0.$$

Врахування неінтегровного збурення в гамільтоніані приводить до того, що нерезонансні тори лише трохи деформуються, а характер руху на них зберігається (такі тори називають інваріантними). Резонансні тори руйнуються, і на їхньому місці виникають області, де рух носить нерегулярний характер, відмінний від періодичного та квазіперіодичного. Розмір цих областей прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Чим більша величина

$$|\vec{m}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n m_k^2}, \tag{3.1.39}$$

яка характеризує порядок резонансу (3.1.38), тим менша за розмірами область нерегулярного

<sup>7</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, с. 223-230.

<sup>8</sup> В.І. Арнольд (Владимир Йгорович Арнольд, 1937-2010) – російський та французький математик, учень А.М. Колмогорова. Народився в Одесі. Академік АН СРСР (1990), Національної Академії наук США, Французької Академії наук, почесний член Королівського товариства. Останні роки життя працював у Франції. Основні результати отримав у топології, теорії диференціальних рівнянь, теорії катастроф, теоретичній механіці.

<sup>9</sup> Дж. Мозер (Jürgen (Juergen) Kurt Moser, 1928 – 1999) – німецький та американський математик. Працював у галузях теорії диференціальних рівнянь, спектральної теорії, небесної механіки, теорії стійкості.

<sup>10</sup> А.Н. Колмогоров. ДАН СССР, 1954, **98**, 574.

<sup>11</sup> В.И. Арнольд. УМН, 1963, **18**, 85.

<sup>12</sup> J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys., **K1**, 1 (1962).

руху утворюється на місці відповідного резонансного тора. Точніше, інваріантні нерезонансні тори навколо такої області на місці резонансного тора, який характеризується співвідношенням  $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}) = 0$ , зберігаються за виконання умови

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| = \left| \sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right| > \frac{C(\varepsilon)}{|\vec{m}|^{n+1}}, \quad (3.1.40)$$

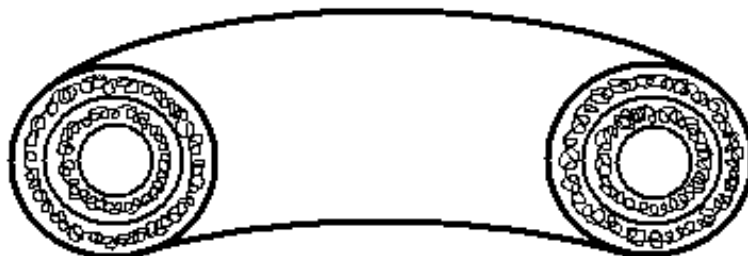
причому, як уже відзначалося,  $C(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3.1.2.7. Дифузія Арнольда

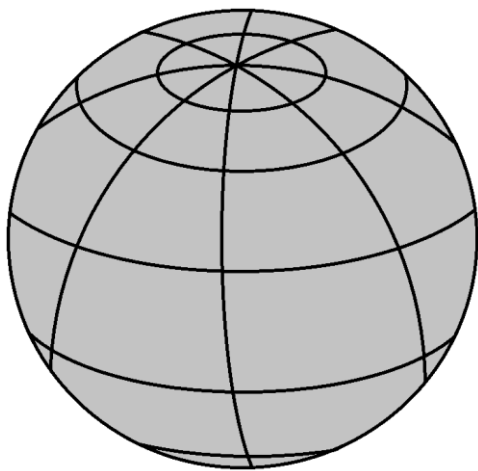
Існує якісна відмінність між поведінкою гамільтонівських систем, близьких до інтегрованих, у випадках  $n \leq 2$  та  $n > 2$  ( $n$  – число ступенів вільності). Вона полягає в тому, що при  $n \leq 2$  області нерегулярного руху, що утворюються в результаті руйнування резонансних торів, відокремлені одна від одної. Навпаки, при  $n > 2$  вони утворюють єдину систему.

Обговоримо це питання більш детально.

Системі з  $n$  ступенями вільності відповідає фазовий простір з розмірністю  $2n$ . Для автономної гамільтонівської системи зображувальна точка рухається на гіперповерхні сталої енергії, яка має розмірність  $2n - 1$ . З іншого боку, інваріантні тори мають розмірність  $n$ . Такі тори можуть відділити області нерегулярного руху одну від одної, якщо їхня розмірність буде не більше ніж на одиницю меншою, ніж розмірність області, де рухається зображувальна точка, тобто від розмірності гіперповерхні сталої енергії. Справді, для того, щоб відділити два об'єми (розмірність 3), потрібна щонайменше поверхня (розмірності 2); лінія (розмірність 1) цього зробити не може. Таким чином, області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, будуть відділені одна від одної за виконання умови  $n \geq (2n - 1) - 1$ , або  $n \leq 2$ .



a



b

Рис. 3.1.3. До пояснення дифузії Арнольда: а – переріз областей нерегулярного руху, затиснутих між інваріантними торами, при  $n \leq 2$ ; б – гіперповерхня сталої енергії (показана сірим кольором) і лінії на ній, що відповідають виконанню умов резонансу, при  $n > 2$  (видно, що ці лінії перетинаються, утворюючи єдину мережу). Обидва зображення є умовними

Можна сказати, що при  $n \leq 2$  області нерегулярного руху затиснуті між інваріантними торами. Іншими словами, якщо зображувальна точка потрапила в проміжок між двома інваріантними торами, вона залишиться там назавжди. Це означає, що в процесі руху системи значення її дії практично не змінюватиметься. Отже, для таких систем за будь-яких поча-

ткових умов зберігається глобальна стійкість руху. Можна навіть говорити про орбітальну стійкість руху. Фазовий простір такої системи умовно зображений на рис. 3.1.3 а.

При  $n > 2$  інваріантні тори вже не можуть відділити області нерегулярного руху одна від одної. В результаті ці області виявляються зв'язаними одна з одною, утворюючи єдину складну мережу – так звану павутину Арнольда (див. умовне зображення на рис. 3.1.3 б). Рухаючись уздовж цієї павутини, зображувальна точка може (залишаючись, зрозуміло, на гіперповерхні сталої енергії) відійти як завгодно далеко від свого початкового положення. При цьому, очевидно, може помітно змінюватися не тільки значення кута, але й значення дії. Такий рух зображувальної точки прийнято називати дифузією Арнольда. Наслідком дифузії Арнольда є відсутність глобальної стійкості гамільтонівських систем, близьких до інтегрованих, при  $n > 2$ .

Характерною особливістю дифузії Арнольда є відсутність порогу  $\varepsilon$ , необхідного для її виникнення.

На завершення слід відзначити, що умови теореми КАМ сформульовані таким чином, щоб її можна було строго довести математично. В дійсності її результати в більшості своїй залишаються справедливими і тоді, коли порушується, наприклад, умова невинороженості.

### 3.1.2.8. Теорема Пуанкаре – Біркгофа

Теорема КАМ нічого не говорить про те, як саме змінюється характер руху на резонансних торах під дією малого неінтегровного збурення в гамільтоніані. Відповідь на це питання дає теорема Пуанкаре<sup>13</sup> – Біркгофа<sup>14</sup>. Розберемо її на прикладі системи з двома ступенями вільності.

Розглянемо спочатку інтегровну систему. Як уже вказувалося (п. 3.1.1.7), її фазовий портрет у координатах дія-кут являє собою набір спіралей, навитих на поверхні системи вкладених двовимірних торів, причому резонансні та нерезонансні тори чергуються.

Перетнемо сім'ю таких двовимірних торів площиною  $(I_i, \theta_i)$  ( $i=1$  або  $i=2$ ). Лінії перетину являють собою набір концентричних кіл. Розглянемо одне з таких кіл  $G$ , що відповідає резонансному тору, та два сусідні кола  $G^+$  та  $G^-$  по різні боки від нього, які відповідають нерезонансним торам (рис. 3.1.4 а). Нехай резонансному тору відповідають частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  ( $\omega_1/\omega_2 = m/n$ ), причому частота  $\omega_1$  відповідає обертанню по колу  $G$ .

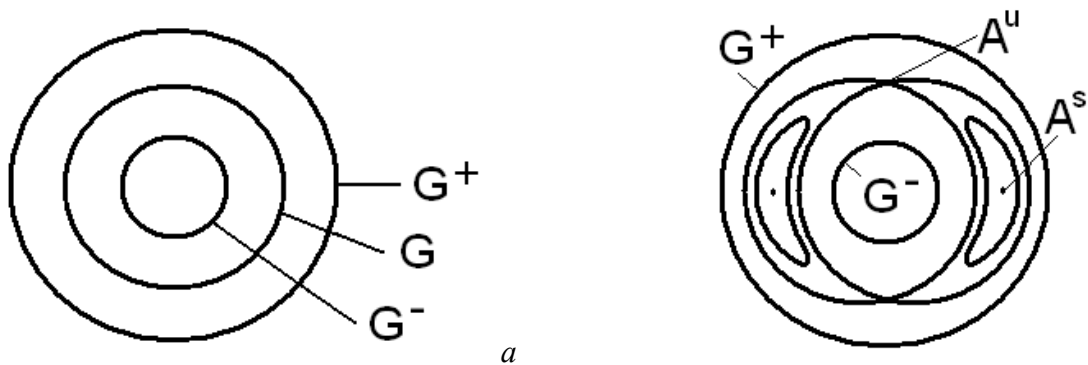


Рис. 3.1.4. Руйнування резонансного тора: а – лінії перетину з площиною резонансного (крива  $G$ ) та сусідніх нерезонансних (криві  $G^+$  та  $G^-$ ) торів; б – стійкі ( $A^s$ ) та нестійкі ( $A^u$ ) точки ( $2kp = 4$ ), що утворилися на місці зруйнованого резонансного тора, та фазові траєкторії, що їх оточують (у першому наближенні за малим параметром  $\varepsilon$ ).

<sup>13</sup> А. Пуанкаре (Jules Henri Poincaré; 1854 - 1912) – видатний французький математик, фізик, філософ і теоретик науки, президент Паризької академії наук та Французької академії, член Королівського товариства, член-кореспондент Петербурзької академії наук. Основні роботи стосуються топології, теорії ймовірностей, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, неевклідової геометрії, теорії чисел, спеціальної теорії відносності.

<sup>14</sup> Дж. Біркгоф (George David Birkhoff, 1884 - 1944) – американський математик. Найвідоміші роботи присвячені статистичній механіці та теорії динамічних систем.

Додамо тепер до гамільтоніана системи мале неінтегровне збурення. Як впливає з теореми КАМ, криві  $G^+$  та  $G^-$  лише дещо деформуються. Теорема Пуанкаре – Біркгофа стверджує, що від кривої  $G$  залишаться тільки  $2kn$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )<sup>15</sup> нерухомих точок, причому стійкі (еліптичні, або центри) та нестійкі (гіперболічні, або сідла) точки чергуються. В результаті на місці кола  $G$  утворюється структура, показана на рис. 3.1.4 б.

Фактично ця структура відповідає так званим фазовим коливанням – нелінійному аналогу биттів<sup>16</sup>. Ці коливання зумовлені параметричною взаємодією, яка приводить до періодичної зміни інтенсивності (дії) мод, що беруть у ній участь. За виконання умови  $\omega_1/\omega_2 = m/n$  (або, що те саме,  $n\omega_1 = m\omega_2$ ) можна сказати, що в системі двох зв'язаних нелінійних осциляторів  $n$ -та гармоніка частоти  $\omega_1$  породжує  $m$ -ту субгармоніку частоти  $\omega_2$ , і навпаки,  $m$ -та гармоніка частоти  $\omega_2$  породжує  $n$ -ту субгармоніку частоти  $\omega_1$ . Якщо зв'язок між осциляторами слабкий, то зростання інтенсивності моди  $\omega_1$  (дії  $I_1$ ) має супроводжуватися зменшенням інтенсивності моди  $\omega_2$  (дії  $I_2$ ), і навпаки.

Очевидно, фазові коливання можна спостерігати як у перерізі  $(I_1, \theta_1)$ , так і в перерізі  $(I_2, \theta_2)$  чотирирівимірного фазового портрету системи, оскільки ці перерізи рівноправні.

У чотирирівимірному фазовому просторі кожній замкненій кривій, що оточує стійку нерухому точку (див. рис. 3.1.4 б), відповідає тор, на який намотана фазова траєкторія. Серед цих торів також можна виділити резонансні та нерезонансні. Застосовуючи до них теорему КАМ, приходимо до висновку, що резонансні тори руйнуються (точніше, розщеплюються) під дією неінтегровного збурення гамільтоніану. На площині, що перетинає тори, відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа, на місці замкнених кривих, що відповідали резонансним торам першого порядку, виникають нові центри та сідла, оточені відповідними фазовими траєкторіями (рис. 3.1.5). Продовжуючи цей процес, приходимо до висновку, що в результаті утворюється дуже складна структура фрактального типу.

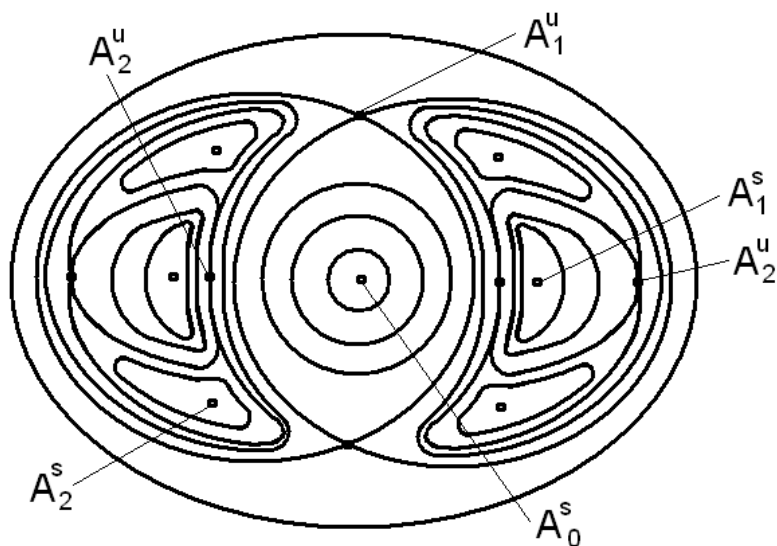


Рис. 3.1.5. Розщеплення резонансних торів першого порядку. Показані стійкі (s) та нестійкі (u) точки нульового, першого та другого порядків.

### 3.1.2.9. Гомоклінічні та гетероклінічні структури

Описана вище картина руйнування резонансного тора під дією неінтегровного збурення гамільтоніану є неповною. Справді, як відомо, рух в околі сідлової точки є нестійким. Таким чином, саме в околах сідлових точок, що виникають в результаті руйнування резонан-

<sup>15</sup> Теорема Пуанкаре – Біркгофа нічого не говорить про величину числа  $k$ . Звичайно  $k = 1$ .

<sup>16</sup> Детальніше про фазові коливання в найпростішій моделі вимушених коливань нелінійного осцилятора див.: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, с.113-118, 131-136.

сних торів під дією неінтегровного збурення в гамільтоніані, зароджується хаотична динаміка системи. В околі цих точок утворюються так звані гетероклінічні структури – складні геометричні утворення, по яких і рухається зображувальна точка.

Через сідлову точку  $A_1''$  на рис. 3.1.5 (нагадаємо, що на цьому рисунку зображений переріз тора) проходить деяка замкнена фазова траєкторія (після оберту навколо головної осі тора ця траєкторія знову повертається в дану точку, оскільки вихід із сідлової точки в площині, що проходить через головну вісь тора, вимагає нескінченно довгого часу). Така фазова траєкторія є прикладом гіперболічних траєкторій (рис. 3.1.6 а-б). Вона може розглядатись як перетин двох поверхонь, по одній з яких зображувальні точки експоненціально віддаляються від гіперболічної траєкторії (ця поверхня називається нестійким многовидом), а по іншій – асимптотично наближаються до неї (це стійкий многовид). Лінії перетину стійкого та нестійкого многовидів з площиною рис. 3.1.5 – це асимптоти, що проходять через гіперболічну (сідлову) точку  $A_1''$ .

Якщо система є інтегрованою, стійкий та нестійкий многовиди можуть переходити один в одного, утворюючи гладенькі структури (рис. 3.1.6 в). Такі структури можна розглядати як аналог петлі сепаратриси з однією сідловою точкою. Всі фазові траєкторії, які лежать на поверхні, утвореній стійким та нестійким многовидами, з часом прямують до гіперболічної траєкторії. Гіперболічна траєкторія, утворена внаслідок перетину стійкого та нестійкого многовидів, що переходять один в одного, називається гомоклінічною траєкторією.

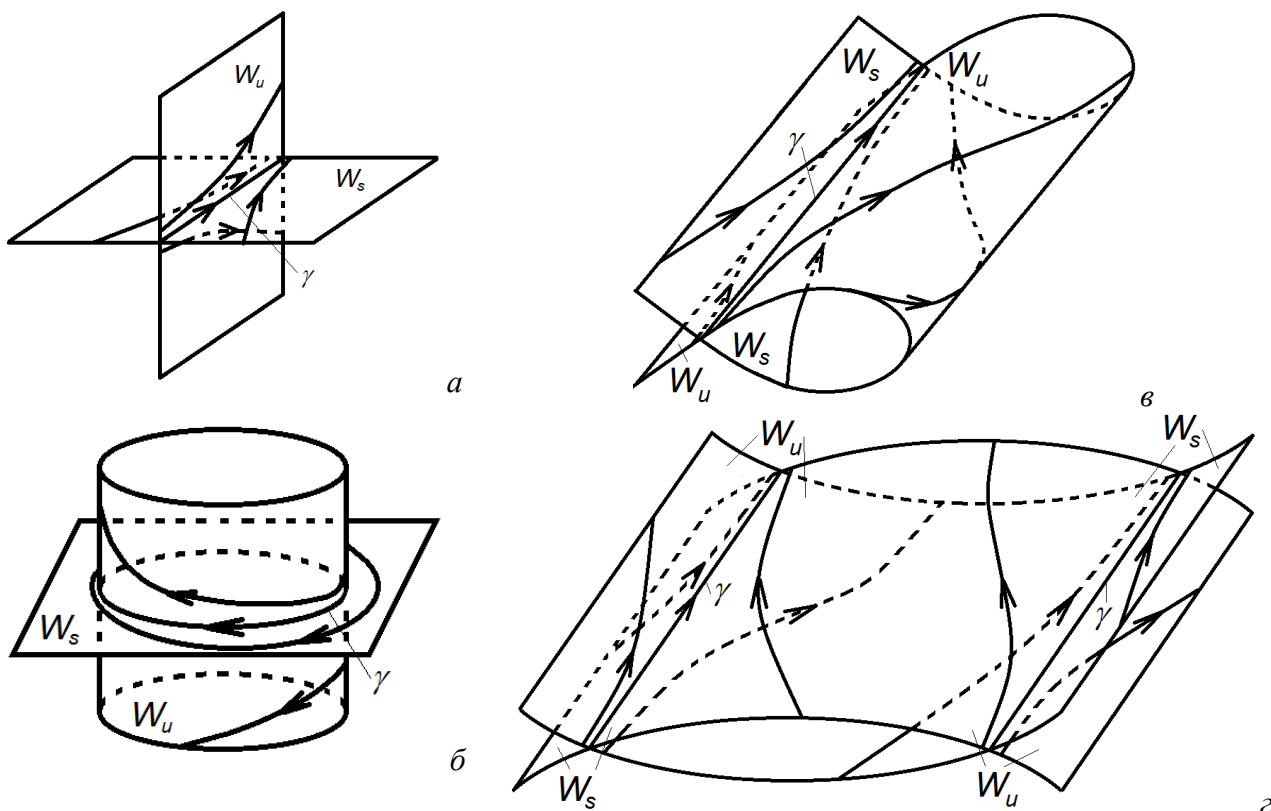


Рис. 3.1.6. Гіперболічні траєкторії та многовиди: а – ділянка гіперболічної траєкторії; б – простий приклад замкненої гіперболічної траєкторії; в – перехід нестійкого многовида у стійкий і утворення гомоклінічної траєкторії; г – перетини стійкого та нестійкого многовидів і утворення гетероклінічних траєкторій ( $\gamma$  – гіперболічна траєкторія,  $W_s$  та  $W_u$  – стійкий та нестійкий многовиди, стрілками вказаний напрямок руху вздовж фазових траєкторій).

Для деяких інтегровних систем стійкий та нестійкий многовиди, перетин яких утворює гіперболічну траєкторію, можуть мати й інші лінії перетину (рис. 3.1.6 г), що теж будуть

гіперболічними траєкторіями. Гіперболічні траєкторії такого типу називають гетероклінічними. Бачимо, що й у цьому випадку стійкі та нестійкі многовиди, що сполучають різні гетероклінічні траєкторії, переходять один в одного.

Розглянемо тепер, як змінюються стійкі та нестійкі многовиди за наявності неінтегровного збурення в гамільтоніані, на простішому прикладі гомоклінічної траєкторії.

Виявляється, що під дією збурення стійкі та нестійкі многовиди, які раніше гладенько переходили один в одного, розщеплюються, в результаті чого утворюється ціла система ліній їхнього перетину (рис. 3.1.7 а). Існує зчислена кількість точок перетину цих ліній із площиною, перпендикулярною до початкової гомоклінічної траєкторії (рис. 3.1.7 б). Нестійкий многовид при наближенні до сідлової траєкторії (при  $t \rightarrow \infty$ ) здійснює осциляції, просторовий крок яких поступово зменшується (внаслідок зменшення швидкості руху зображувальної точки в околі особливої точки сідлового типу), а амплітуда, навпаки, зростає (в силу теореми Ліувілля площа "петель" між сусідніми точками перетину слідів многовидів на площині, перпендикулярній гомоклінічній траєкторії, має зберігатися). Аналогічні осциляції здійснює стійкий многовид при віддаленні від сідлової траєкторії при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким чином на вказаній площині формується своєрідна ґратка (рис. 3.1.7 б), якій у фазовому просторі відповідає складна система гіперболічних асимптот, між якими (в силу їхньої нестійкості) випадково блукають фазові траєкторії (рис. 3.1.7 а). Всю цю систему називають гомоклінічною структурою. Вперше гомоклінічна структура була досліджена А.Пуанкаре при аналізі задачі про взаємодію багатьох тіл.

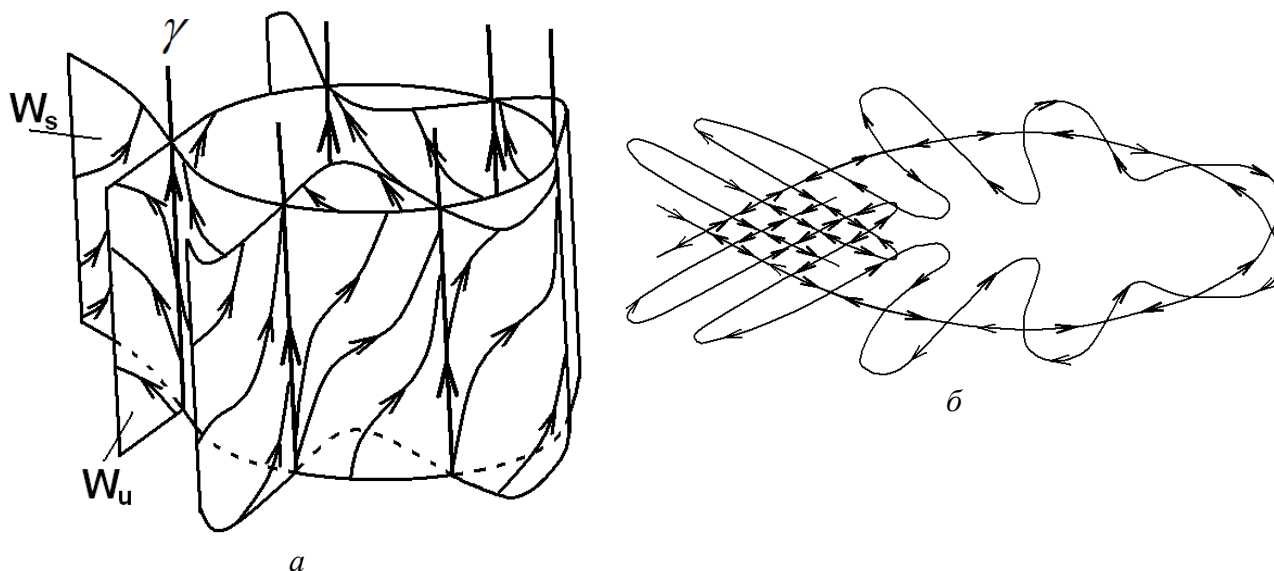
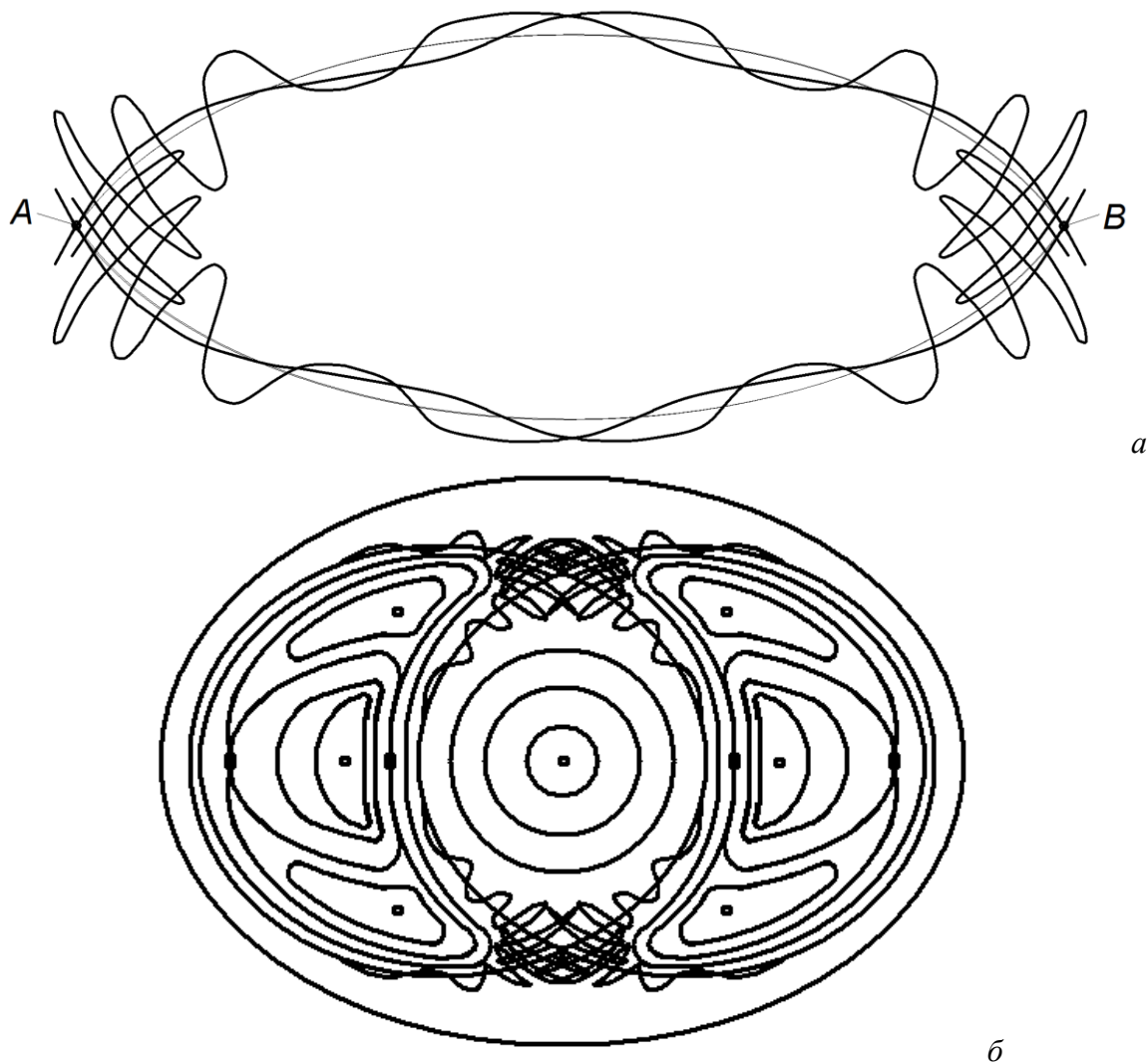


Рис. 3.1.7. Гомоклінічна структура: а – схематичне зображення тривимірного фазового портрету, що виникає в області гомоклінічної траєкторії  $\gamma$  під дією неінтегровного збурення гамільтоніану; б – переріз стійкого та нестійкого многовидів площиною, перпендикулярною до гомоклінічної траєкторії

Відзначимо, що розщеплення петлі сепаратриси нагадує руйнування резонансного тора відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа. Справді, від петлі сепаратриси також залишаються лише окремі нерухомі точки – центри та сідла, але кількість пар таких точок виявляється зчисленою<sup>17</sup>.

Многовиди, що проходять через гетероклінічні фазові траєкторії, під дією неінтегровного збурення гамільтоніану також зазнають розщеплення. В результаті в їхньому околі утворюються складні гетероклінічні структури, подібні до гомоклінічних (рис. 3.1.8 а). По суті, рух в околі гетероклінічних структур відповідає хаотичній динаміці системи.

<sup>17</sup> Справді, оскільки частота  $\omega_1$  обертання вздовж петлі сепаратриси дорівнює нулеві, то й відношення  $\omega_1/\omega_2$  формально дорівнює нулеві, тобто  $n \rightarrow \infty$ .



*Рис. 3.1.8. Гетероклінічні структури: а – переріз стійкого та нестійкого многовидів, деформованих неінтегровним збуренням гамільтоніану, площиною, перпендикулярною до гетероклінічних траєкторій (їм відповідають точки А та В); б – деформація перерізу резонансного тора з урахуванням ефектів другого порядку за малим збуренням гамільтоніана – розщеплення резонансних торів першого порядку та утворення гетероклінічних структур в околі гіперболічних точок першого порядку*

Повернемося тепер до гамільтонівської системи з двома ступенями вільності, про яку йшлося в п.3.1.2.8. Під дією неінтегровного збурення в гамільтоніані резонансні тори спочатку розщеплюються на гіперповерхні, перерізи яких містять сідлові (гіперболічні) точки. Далі одночасно з руйнуванням резонансних торів другого порядку відбувається розщеплення стійких та нестійких многовидів, пов'язаних із цими точками, та утворення гетероклінічних структур (рис. 3.1.8 б). В області виникнення гетероклінічних структур топологія фазових траєкторій зазнає суттєвих змін, які унеможливають існування там інваріантних торів. Врахування ефектів вищих порядків додатково ускладнює картину, надаючи їй, як уже вказувалося, рис фрактальної структури.

Вказані обставини суттєво доповнюють та ускладнюють картину руйнування резонансних торів, описану наприкінці п.3.1.2.8.

### 3.1.2.10. Вуса та завитки

Розглянемо тепер, як буде деформуватись у фазовому просторі з часом відрізок лінії (зрозуміло, що такий відрізок відповідає певному неперервному набору початкових умов си-



стеми). Тут прийнято виділяти два характерних випадки.

Якщо розглянути відрізок, що потрапив, наприклад, на нестійкий многовид гомоклінічної або гетероклінічної структури, то з часом, при наближенні до сідлової траєкторії, на ньому утворюються характерні гомоклініні осциляції. Такий об'єкт прийнято називати вусом (рис 3.1.9 а).

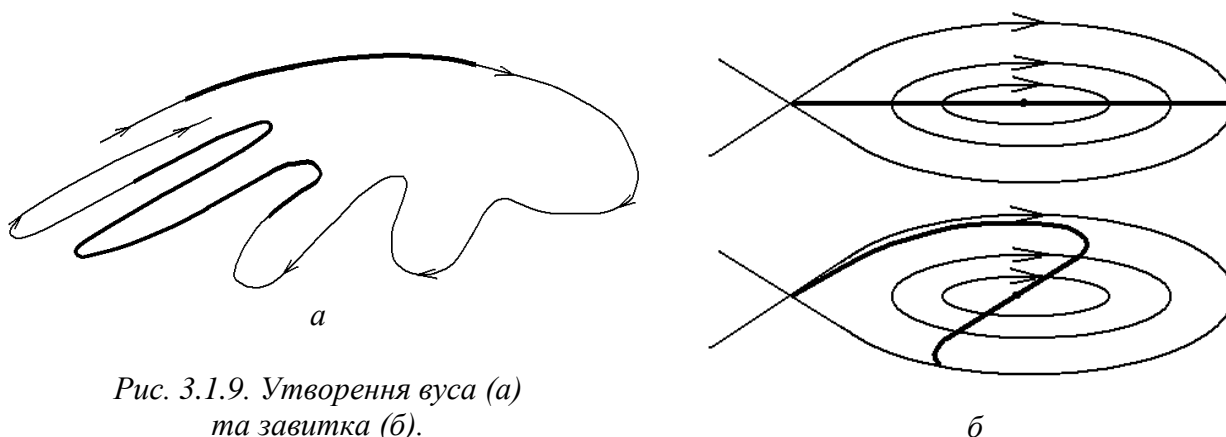


Рис. 3.1.9. Утворення вуса (а) та завитка (б).

Нехай тепер відрізок початково вміщує особливу точку типу центр (в площині  $xu$ ). Якби коливання, що відповідають різним фазовим траєкторіям, відбувалися з однаковою частотою, відрізок обертався б як єдине ціле. Але внаслідок неізохронності обертання навколо центру (нагадаємо, що в околі сепаратриси рух зображувальної точки сповільнюється) цей відрізок з часом сильно деформується і перетворюється на так званий завиток (рис 3.1.9 б).

### 3.1.2.11. Аналогія між магнітними силовими лініями тороїдальних пасток та фазовими траєкторіями півторавимірної гамільтонівської системи

Абстрактний фазовий простір, що відповідає гамільтонівським системам, близьким до інтегровних, може збігатися з реальним простором деяких фізичних систем. Прикладом таких систем є тороїдальні магнітні пастки – стеларатори<sup>18</sup> або токамаки<sup>19</sup>.

Обговоримо спочатку конфігурацію поля тороїдальних магнітних пасток.

У тороїдальних пастках прагнуть створити магнітне поле, силові лінії якого були б спіралями, намотаними на послідовність вкладених торів (ці тори можуть бути й деформованими), причому крок спіралі повинен змінюватися від тора до тора (рис. 3.1.10 а). Таке поле можна розглядати як суперпозицію тороїдальної (азимутальної, лінії 3 на рис. 3.1.10 б) та полоїдальної (лінії 4 на рис. 3.1.10 б) компоненти. Силові лінії тороїдального та полоїдального полів утворюють кільця, надіті відповідно на головну (лінія 1 на рис. 3.1.10 б) та на допоміжну (лінія 2 на рис. 3.1.10 б) осі тора, причому полоїдальні силові лінії лежать у площинах, що вміщують головну вісь. Магнітні пастки різних типів відрізняються в першу чергу способами створення полоїдального поля.

<sup>18</sup> Від латинського *stella* – зірка. Мається на увазі, що в таких пастках має створюватися зоряна речовина. Ідея стеларатора належить Л.Спітцеру (Lyman Strong Spitzer, Jr., 1914 - 1997) – американському фізику-теоретику та астрофізику.

<sup>19</sup> Скорочення від російських слів «тороїдальная магнитная камера». Ідея токамака належить І.Є.Тамму та А.Д.Сахарову. І.Є. Тамм (Ігорь Євгеньєвич Тамм, 1895 - 1971) – видатний російський фізик-теоретик, академік АН СРСР (1953), лауреат Сталінської та Нобелівської (1958) премій. Дитинство провів у Єлисаветграді (тепер Кіровоград), в молодості викладав у Сімферополі та Одесі. Працював у галузях квантової механіки, електродинаміки, фізики плазми, ядерної фізики, фізики елементарних частинок. А.Д.Сахаров (Андрій Дмитрійєвич Сахаров, 1921 - 1989) – російський фізик, правозахисник та політичний діяч, академік АН СРСР (1953), лауреат Сталінської (1953) та Ленінської (1956) премій, тричі Герой Соціалістичної Праці (позбавлений радянських нагород у 1980 р.), лауреат Нобелівської премії миру (1975). Роботи присвячені магнітній гідродинаміці, фізиці плазми, керованому термоядерному синтезу, астрофізиці, елементарним частинкам, гравітації. Один з «батьків» радянської водневої бомби.

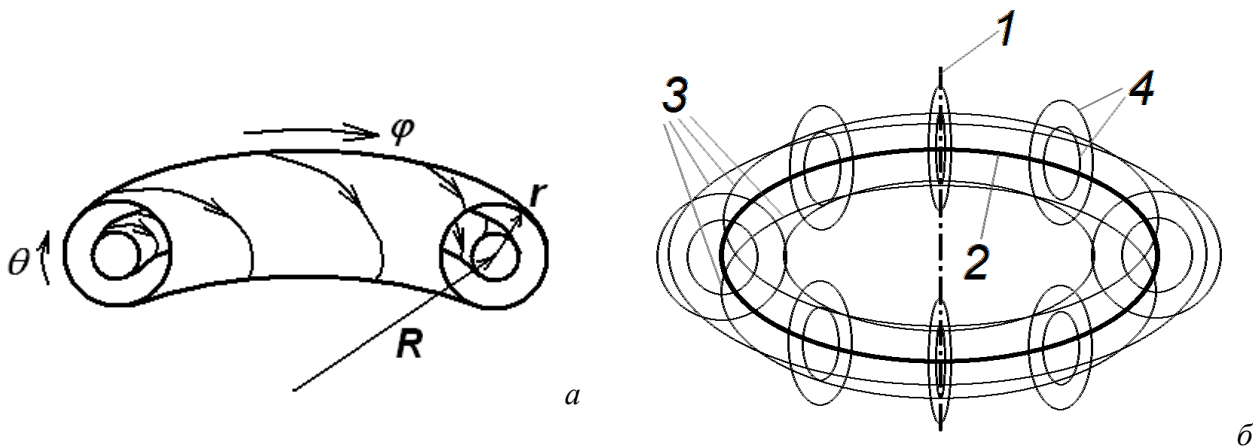


Рис. 3.1.10. Геометрія торіодальних магнітних пасток: а – схематичне зображення силових ліній магнітного поля; б – основні характеристики тора (1 – головна вісь, 2 – допоміжна вісь, 3 – торіодальна компонента поля, 4 – полоїдальна компонента поля)

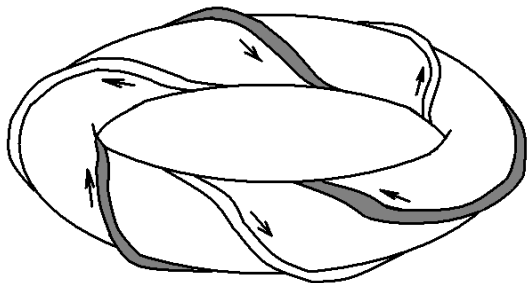


Рис. 3.1.11. Схематичне зображення торса трона – пастки стелараторного типу. Показані обмотки зі струмом, що створюють магнітне поле.

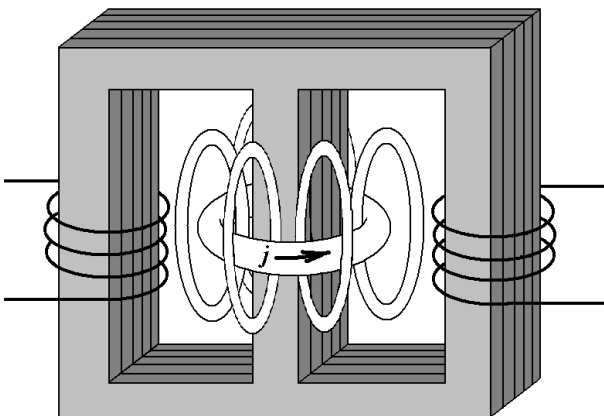


Рис. 3.1.12. Схема токамака. Торіодальна складова магнітного поля створюється спеціальними котушками (показані білими кільцями), полоїдальна – струмом, що протікає в плазмі. Цей струм виникає під дією вихрового електричного поля, створеного трансформатором. Первинна обмотка цього трансформатора живиться від конденсаторних батарей. Вторинною обмоткою є торіодальна розрядна камера, в якій газ іонізується під дією наведеної електрорушійної сили.

У сучасних пастках стелараторного типу (торса тронах, геліотронах) як торіодальне, так і полоїдальне поля створюються зовнішніми (щодо плазми) джерелами - спеціальними котушками зі струмом (рис. 3.1.11). Кажуть, що в таких пастках можна утримувати одиночну заряджену частинку. Пастки стелараторного типу можуть працювати як в імпульсному, так і в стаціонарному режимі.

У системах типу токамаків (рис. 3.1.12) вакуумне утримання окремого електрона неможливе. Магнітне поле, створене спеціальними котушками, має лише торіодальну компоненту  $B_\phi$ . Полоїдальне поле створюється струмом  $j_\phi$ , який протікає в плазмі. Таким чином, у токамаках здійснюється самоузгоджене утримання плазми.

Струм у плазмі виникає під дією вихрового електричного поля, яке, в свою чергу, виникає в результаті зміни магнітного поля у вторинній обмотці трансформатора. Первинна обмотка живиться імпульсним джерелом (через неї розряджається батарея конденсаторів).

Тому токамак – це принципово імпульсний пристрій.

Таким чином, і в магнітних пастках стелараторного типу, і в токамаках в ідеалі магнітні силові лінії мають вигляд гвинтових ліній, навитих на систему вкладених тороїдальних поверхонь. Ці лінії можуть бути як замкненими, так і незамкненими (нескінченними). Співвідношення частот обертання навколо головної осі (йому відповідає так званий тороїдальний кут  $\varphi$ ) та навколо допоміжної осі (йому відповідає полоїдальний кут  $\theta$ )  $\omega_1/\omega_2$ , яке й визначає замкненість або незамкненість магнітних силових ліній, відоме в теорії магнітних пасток як фактор безпеки  $q$ .

Розглянемо тепер гамільтонівську систему з півтора ступенями вільності. Таку систему можна інтерпретувати як осцилятор (взагалі кажучи, нелінійний), на який діє зовнішня сила, що залежить від часу (вважатимемо її надалі періодичною)<sup>20</sup>. Її фазовий простір має бути тривимірним. За осі можна обрати дію, кут та час. Якщо дію і кут відкласти по радіусу та куту полярної системи координат, а перпендикулярну їм вісь часу скрутити в кільце, довжина якого відповідає періоду зовнішньої сили, то в інтегровному випадку (за відсутності зовнішньої сили) фазові траєкторії будуть спіралями, намотаними на поверхні системи вкладених торів. Відповідно до теореми КАМ, неінтегровний доданок у гамільтоніані (зовнішня сила) приведе до руйнування резонансних торів (тих, у яких відношення періоду власних коливань до періоду зовнішньої сили буде раціональним).

Очевидно, силові лінії магнітного поля розглянутих вище тороїдальних пасток в ідеальному випадку мають таку саму топологію, як фазові траєкторії у фазовому просторі півторавимірної гамільтонівської системи для випадку, коли амплітуда зовнішньої сили прямує до нуля.

Однак у реальних тороїдальних пастках магнітне поле виявляється певною мірою спотвореним порівняно з ідеалізованою моделлю. Наприклад, у пастках стелараторного типу струми в плазмі малі, і магнітне поле створюється переважно зовнішніми обмотками. Але провідники, що живлять ці обмотки, несуть потужні струми і вносять помітні збурення у магнітне поле.

Покажемо, що і в цьому випадку наведена вище аналогія залишається справедливою, і спотворення конфігурації магнітних силових ліній аналогічне спотворенню фазових траєкторій нелінійного консервативного осцилятора під дією періодичної зовнішньої сили.

### 3.1.2.12. Теорема КАМ і магнітне утримання плазми

Полоїдальне магнітне поле в тороїдальних пастках можна описати або за допомогою тороїдального вектор-потенціалу  $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi$ , так що

$$\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times A_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (3.1.42)$$

або за допомогою так званої функції полоїдального магнітного потоку  $\Psi = -RA_\varphi$ , де  $R$  – великий радіус тора.

Вважатимемо магнітне поле сильним у тому сенсі, що ларморівський радіус електрона набагато менший від радіусу кривини магнітних силових ліній у будь-якій точці магнітної пастки. Тоді можна наближено вважати, що електрони плазми (точніше, так звані провідні центри – точки, навколо яких обертаються електрони) рухаються вздовж силових ліній магнітного поля. Вважатимемо також, що великий радіус тора значно більший від малого радіуса, так що кривиною силових ліній тороїдального поля  $B_\varphi$  можна знехтувати. Нарешті, приймемо, що полоїдальне поле значно менше від тороїдального,  $B_\varphi \gg B_\theta$ .

Перше припущення означає, що рівняння руху електронів (точніше, провідних центрів) можна записати у формі

$$[\vec{v} \times \vec{B}] = 0. \quad (3.1.43)$$

<sup>20</sup> Детальніше про це див. у п. 3.1.5.

В силу другого припущення геометрія системи, по суті, зводиться до циліндричної, причому можна вважати, що  $z = R\varphi$  і, відповідно,  $\vec{e}_z = \vec{e}_\varphi$ . В ролі радіуса та азимутального кута виступають, відповідно, малий радіус тора  $r$  (точніше, відстань від допоміжної осі тора до точки спостереження) та пологідальний кут  $\theta$ . Тоді проєкції рівняння (3.1.43) на напрямки  $\vec{e}_r$  та  $\vec{e}_\theta$  набувають вигляду

$$v_\theta B_z - v_z B_\theta = 0, \quad v_r B_z - v_z B_r = 0, \quad (3.1.43 \text{ а})$$

звідки

$$\frac{v_\theta}{v_z} = \frac{B_\theta}{B_z}, \quad \frac{v_r}{v_z} = \frac{B_r}{B_z}. \quad (3.1.43 \text{ б})$$

З рівнянь (3.1.43 б) з урахуванням припущення про малізну пологідального поля випливає, що  $|v_{r,\theta}| \ll |v_z|$ .

Відзначимо також, що проєкція рівняння (3.1.43) на напрямок  $\vec{e}_z$  дає співвідношення

$$\frac{v_\theta}{v_r} = \frac{B_\theta}{B_r},$$

яке можна отримати безпосередньо із системи (3.1.43 б), тому остання повністю еквівалентна рівнянню (3.1.43).

Тепер приймемо до уваги, що

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \frac{dz}{dt} = v_z \frac{dr}{dz} = \frac{v_z}{R} \frac{dr}{d\varphi}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{rv_z}{R} \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (3.1.44)$$

Підставляючи (3.1.44) до (3.1.43 б), отримуємо:

$$\frac{dr}{d\varphi} = R \frac{v_r}{v_z} = R \frac{B_r}{B_z}, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{R v_\theta}{r v_z} = \frac{R B_\theta}{r B_z}. \quad (3.1.45)$$

Але з урахуванням (3.1.42)

$$RB_r = R \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(-RA_\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad RB_\theta = -R \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial(-RA_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.1.46)$$

Підставивши (3.1.46) до (3.1.45) і замінивши  $B_z$  на  $B_\varphi$ , тобто знову перейшовши від циліндричної геометрії до тороїдальної, остаточно отримуємо рівняння руху електрона у вигляді півторавимірної гамільтонівської системи:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r};$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}. \quad (3.1.47)$$

В рівняннях (3.1.47) в ролі часу виступає кут  $\varphi$ , в ролі узагальненого імпульсу – тороїдальний магнітний потік

$$\int_0^r B_\varphi(r') r' dr' \approx \frac{B_\varphi r^2}{2},$$

в ролі узагальненої координати – пологідальний кут  $\theta$ , в ролі гамільтоніана – функція пологідального магнітного потоку  $\Psi$ .

Нагадаємо, що просторовий розподіл функції  $\Psi$  визначається пологідальною компонентою  $A_\varphi$  векторного потенціалу. Як відомо з електродинаміки, векторний потенціал може бути записаний через просторовий розподіл густини струму. Таким чином, розподіл густини струму однозначно задає гамільтоніан системи (3.1.47).

Якщо  $\partial \Psi / \partial \varphi = 0$  (розподіл струму не залежить від тороїдального кута), отримуємо інтегровний випадок (система з одним ступенем вільності, гамільтоніан явно не залежить від

часу). Це відповідає ідеальній аксіально-симетричній моделі. Для забезпечення утримання плазми залежність магнітного поля від  $r$  повинна мати мінімум при  $r=0$ . Траєкторії електронів  $r=r(\theta)$  ( $\varphi=const$ ) знаходяться з умови  $\Psi(r,\theta)=const$ . Справді, поділивши рівняння (3.1.47) одне на одне, можна отримати:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\partial\Psi/\partial\theta}{\partial\Psi/\partial r}, \quad (3.1.47 \text{ а})$$

або

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} d\theta \equiv d\Psi(r,\theta) = 0. \quad (3.1.47 \text{ б})$$

Траєкторії електронів (нагадаємо, що в даному наближенні вони збігаються з магнітними силовими лініями) являють собою суперпозицію обертання навколо головної та допоміжної осей тора (останнє якраз і описується рівняннями (3.1.47 а,б)). Відношення відповідних частот складає величину

$$\frac{1}{q(r)} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\theta/dt}{d\varphi/dt} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial\Psi(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (-RA_\varphi) = \frac{RB_\theta}{rB_\varphi} \quad (3.1.48)$$

(враховано перше з рівнянь (3.1.47)).

У загальному випадку з урахуванням збурень, що виникають унаслідок руху плазми та струмів у провідниках живлення, з'являється залежність  $\Psi$  від  $\varphi$ , тобто аксіальна симетрія системи порушується. З формальної точки зору такі збурення виступають як неінтегровні збурення гамільтоніана, залежні від часу. В цьому випадку функцію  $\Psi(r,\theta,\varphi)$  можна записати у вигляді ряду (ця процедура аналогічна розкладанню залежної від часу зовнішньої сили в ряд Фур'є):

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \Psi_{00}(r) + \sum_{m,n} \Psi_{mn}(r) \cos(m\theta - n\varphi), \quad (3.1.49)$$

де  $\Psi_{mn}(r)$  – деякі функції, що задовольняють граничним умовам  $\Psi_{mn}(r \rightarrow 0) \sim r^m$ ,  $\Psi_{mn}(r=a)=0$  (тут  $a$  – малий радіус тороїдальної камери).

Збурення  $\Psi_{mn}(r)$  є резонансними для рівноважного поля  $\vec{B}$  на раціональних поверхнях  $r_s$ , на яких  $q(r_s) = m/n$  ( $m, n$  – довільні цілі числа). Як впливає з теорему КАМ, відповідні тори (тобто магнітні поверхні) руйнуються під дією збурення, і на їхньому місці виникають магнітні острівці, оточені хаотичними силовими лініями магнітного поля. Однак завдяки збереженню інваріантних торів і відсутності дифузії Арнольда глобальна стійкість системи зберігається, якщо розміри острівців невеликі (нагадаємо, що вони зростають зі зростанням величини збурення і зменшуються при збільшенні порядку резонансу).

Доки області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, відділяються одна від одної інваріантними торами (незруйнованими магнітними поверхнями), радіальний транспорт плазми залишається утрудненим. Якщо ж збурення настільки велике, що такі області перекриваються, ні про яке утримання плазми говорити вже не доводиться (про перекриття сусідніх резонансів див. далі, п. 3.1.3).

Цікаво відзначити, що в магнітних пастках вдається експериментально спостерігати КАМ-структури, які виникають на місці зруйнованих резонансних торів. Така можливість заснована на тому, що рух електронів у тороїдальних магнітних пастках повторює траєкторії силових ліній поля внаслідок мализни ларморівського радіусу (останній складає звичайно частки міліметра). Пучок електронів інjektують уздовж силової лінії, а в перерізі магнітної поверхні встановлюють напівпрозорий люмінесцентний екран. Перетинаючи цей екран багато (близько сотні) разів, пучок в результаті малює на екрані переріз магнітної поверхні, на яку намотана дана магнітна силова лінія. Дана методика була вперше запропонована групою

дослідників із Харківського фізико-технічного інституту (Є.Д.Волков<sup>21</sup> та ін.) в середині 1960х років. Типове зображення магнітного острівця, отримане за допомогою цієї методики, наведено на рис. 3.1.13. Візуалізація магнітних поверхонь за допомогою електронних пучків дозволяє експериментально контролювати конфігурацію магнітного поля в тороїдальних пастках.



Рис. 3.1.13. Зображення трьох магнітних острівців, отримане шляхом інжекції електронного пучка вздовж магнітних силових ліній.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.1.2

1. Опишіть процедуру введення нових змінних дія-кут для системи, близької до інтегрованої.
2. Чи можна з рівняння Гамільтона – Якобі точно знайти поправку першого порядку  $F_{21}$  до твірної функції?
3. Чому дорівнює коефіцієнт із нульовим індексом у Фур'є-розкладі поправки першого порядку  $H_1(\theta, J)$  до гамільтоніану системи, близької до інтегрованої?
4. Чому резонансні тори у фазовому просторі руйнуються при появі в гамільтоніані малої неінтегрованої частини?
5. Чому мале неінтегровне збурення в гамільтоніані не змінює якісно поведінку фазових траєкторій на нерезонансних торах?
6. Чи можливий у теорії КАМ граничний перехід від резонансних торів до нерезонансних?
7. Чи є гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, орбітально стійкими?
8. Чи можлива дифузія Арнольда в системі з двома ступенями вільності?
9. Чи можливе руйнування резонансних торів у системі зв'язаних лінійних осциляторів?
10. Чи можливе руйнування резонансних торів у системі автономних нелінійних осциляторів?
11. Опишіть характер руйнування резонансних торів під дією малого неінтегровного збурення гамільтоніана.
12. Чому рух зображувальних точок в околі гомоклінічної структури є непередбачуваним?
13. Якісно зобразіть розщеплення сепаратриси, що містить дві сідлові точки, під дією неінтегровного збурення гамільтоніану.
14. Для якої саме гамільтонівської системи структура фазового простору аналогічна до структури магнітного поля в магнітних пастках?

<sup>21</sup> Волков Євген Дмитрович (1934-2012) – український дослідник у галузі фізики плазми, лауреат Державної премії України, працював в Інституті фізики плазми Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут».

15. Виділіть у виразі для функції полоїдального магнітного потоку  $\Psi$  (за відсутності аксіальної симетрії) інтегровну та неінтегровну частини.
16. Які магнітні поверхні магнітних пасток звичайно руйнуються в першу чергу?
17. Чи можуть малі збурення магнітного поля порушити умови утримання плазми в тороїдальній магнітній пастці? Відповідь обґрунтувати.
18. Які збурення зовнішнього магнітного поля найбільш небезпечні для утримання плазми в токамаках?

### Задачі до підрозділу 3.1.2

3.1.2.1. Гамільтоніан системи має вигляд

а)  $H(I, \theta) = I^2 + \varepsilon I \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1;$

б)  $H(I, \theta) = I^3 + \varepsilon I^2 \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1;$

в)  $H(I, \theta) = I^4 + \varepsilon I^3 \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$

Перейти до нових змінних, у яких гамільтоніан буде залежати тільки від дії (з точністю до доданків першого порядку за  $\varepsilon$ ).

3.1.2.2. Гамільтоніан системи має вигляд

а)  $H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) \quad 0 < \varepsilon \ll 1;$

б)  $H(\theta, I, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I) + \varepsilon^2 H_2(\theta, I) + \dots \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$

Знайти поправку другого порядку за  $\varepsilon$  до твірної функції  $F_2(\theta, J)$ .

3.1.2.3. За допомогою комп'ютера отримайте зображення

а) вуса;

б) завитка

для математичного маятника.

3.1.2.4\*. Рух нелінійного осцилятора під дією зовнішньої сили описується рівнянням:

а)  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = f_m \cos pt;$

б)  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f_m \cos pt.$

За допомогою комп'ютера побудуйте для нього тривимірний фазовий портрет у координатах  $(x, dx/dt, t)$ , причому вісь часу замкнена в петлю, тривалість руху вздовж якої відповідає періоду зовнішньої сили.

3.1.2.5\*. Гамільтоніан системи має вигляд

а)  $H(I, \theta, t) = I^2 + \varepsilon I \sin^3 \theta \cos pt;$

б)  $H(I, \theta, t) = I^3 + \varepsilon I^2 \sin^3 \theta \sin 2pt;$

в)  $H(I, \theta, t) = I^4 + \varepsilon I^3 \sin^5 \theta \cos 3pt.$

За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет системи в координатах дія-кут-час при різних значеннях параметра  $\varepsilon$ .

### 3.1.3. Глобальний хаос та його характеристики

Ми бачили, що складний нерегулярний рух виникає вже в системах, близьких до інтегровних. Але доки неінтегровне збурення в гамільтоніані залишається малим, області нерегулярного руху займають лише невелику частку фазового простору. Збільшення неінтегровного збурення приводить до того, що області нерегулярного руху розширюються і в певний момент зливаються в одну, утворюючи суцільне стохастичне море. Іншими словами, хаотичними стають уже не окремі фазові траєкторії, а цілі групи таких траєкторій. Такий стан системи називають глобальним хаосом. Наявність глобального хаосу еквівалентна тому, що система володіє властивістю перемішування.

У цьому підрозділі ми розглянемо умову виникнення глобального хаосу та його осно-

вні кількісні характеристики – показники Ляпунова, ентропію Колмогорова - Синая<sup>22</sup>, час розчеплення кореляцій.

### 3.1.3.1. Ізольовані резонанси та інтегровність

Розглянемо гамільтонівську систему з  $n$  ступенями вільності, близьку до інтегрованої, гамільтоніан якої можна подати у формі (3.1.9):

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}).$$

Оскільки залежність від кожної з компонент вектора  $\vec{\theta}$  є періодичною з періодом  $2\pi$ , збурення можна розкласти у багатовимірний ряд Фур'є за  $\vec{\theta}$ :

$$H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) = \sum_{\vec{m}} H_{\vec{m}}(\vec{I}) \cos(\vec{m} \cdot \vec{\theta}). \quad (3.1.50)$$

Можлива ситуація, коли в ряду Фур'є істотний лише один доданок. Це наближення відповідає врахуванню одного єдиного резонансу вигляду  $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{I})) = 0$ <sup>23</sup>. Тоді рівняння Гамільтона набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{I}} &= \varepsilon \vec{m} H_{\vec{m}}(\vec{I}) \sin(\vec{m} \cdot \vec{\theta}); \\ \dot{\vec{\theta}} &= \vec{\omega}(\vec{I}) + \varepsilon \cos(\vec{m} \cdot \vec{\theta}) \nabla_{\vec{I}} H_{\vec{m}}(\vec{I}), \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

де використане позначення для градієнту в просторі дій:

$$\nabla_{\vec{I}} \equiv \sum_{j=1}^N \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial I_j}.$$

В нульовому наближенні за малим параметром  $\varepsilon$  із системи (3.1.51) можна отримати:  $\vec{I} = const$ ,  $\vec{\theta} = \vec{\omega}(\vec{I})t + \vec{\delta}$ . Підставимо вираз для  $\vec{\theta}$  до першого з рівнянь системи (3.1.51). Тепер його можна проінтегрувати за часом. Отримаємо:

$$I_j \approx I_j(0) - \varepsilon \frac{m_j H_{\vec{m}}(\vec{I}(0))}{(\vec{m} \cdot \vec{\omega})} \cos[\vec{m}(\vec{\omega}t + \vec{\delta})]. \quad (3.1.51 \text{ a})$$

Розв'язок (3.1.51 a) втрачає чинність, грубо кажучи, при  $\left|(\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{I}))\right| < \varepsilon$ . Ця умова й визначає ширину області резонансу. Таким чином, інтегровність системи може порушитися тільки в області з малими розмірами (порядку  $\varepsilon$ ), тобто в невеликій частині всієї області фазового простору, де відбувається рух аналізованої системи.

Насправді ж наявність ізольованого резонансу ще не призводить до втрати інтегровності системи як цілого. Справді, в цьому випадку, помноживши перше з рівнянь (3.1.51) на  $\vec{l}$ , де  $\vec{l} = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  – вектор, ортогональний до  $\vec{m}$  ( $(\vec{m} \cdot \vec{l}) = 0$ ), можна побудувати інтеграл руху вигляду  $F = (\vec{l} \cdot \vec{I}) = const$ . Оскільки вектор  $\vec{m}$  є  $n$ -вимірним, то можна побудувати  $n-1$  перпендикулярних до нього та один до одного векторів  $\vec{l}$  і отримати таку саму кількість лінійно незалежних інтегралів руху вказаного вище вигляду. Ці інтеграли руху є аналогом співвідношень Менлі – Роу<sup>24</sup>, відомих у теорії параметричної взаємодії коливань та хвиль.

Отже, єдиний резонанс може значно спотворити й ускладнити рух в околі відповідно-

<sup>22</sup> Я.Г. Синай (Яков Григор'євич Синай, нар. 1935) – російський та американський математик, академік РАН, іноземний член Королівського товариства, професор МДУ (1971), професор Принстонського університету (з 1993). Основні результати отримав у галузі математичної фізики, статистичної фізики (зокрема, ергодичної теорії), теорії динамічних систем.

<sup>23</sup> Для системи з двома ступенями вільності цій умові якраз відповідає рис. 3.1.4 б.

<sup>24</sup> Дж. Менлі (Jack M. Manley) та Х. Роу (Harrison E. Rowe, 1925-1995) – американські дослідники в галузі радіоелектроніки та телекомунікацій.



го резонансного тора, але ще не вносить елементів хаотичної поведінки до системи як цілого, оскільки вона залишається інтегрованою.

Наявність кількох резонансів, тобто існування в ряду (3.1.50) декількох доданків, кожен з яких може бути суттєвим у деякій області фазового простору, також не обов'язково приводить до хаотичної динаміки. Хаотичної поведінки фактично не буде, якщо резонанси є ізольованими. Ізольованість резонансів означає, що при будь-якому конкретному значенні  $\vec{I}$  суттєвим є тільки один із доданків у ряду (3.1.50). Саме така ситуація реалізується для систем, до яких застосовна теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера (див. п.3.1.2.6).

### 3.1.3.2. Виникнення глобального хаосу

Зроблений вище висновок про інтегровність гамільтонівської системи за наявності в ній кількох резонансів є наближеним. Строго кажучи, присутність двох або більшої кількості резонансів робить систему неінтегрованою. Більш того, близько розташовані резонанси за певних умов породжують глобальний хаос.

Проілюструємо сказане числовим розрахунком<sup>25</sup>. Розглянемо гамільтоніан вигляду 
$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = I_1 + I_2 + I_2^2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + \alpha I_1I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + \beta I_1^{3/2}I_2 \cos(2\theta_1 - 3\theta_2). \quad (3.1.52)$$

При  $\alpha = \beta = 0$  цей гамільтоніан є інтегровним. У загальному випадку (при  $\alpha\beta \neq 0$ ) він містить два резонанси –  $\omega_1/\omega_2 = 2/2$  (рис. 3.1.14 а) та  $\omega_1/\omega_2 = 3/2$  (рис. 3.1.14 б). На рис. 3.1.12  $P_{1,2}$  та  $Q_{1,2}$  – відповідно узагальнені координати та імпульси першого та другого "парціальних" осциляторів,  $E$  – повна енергія системи.

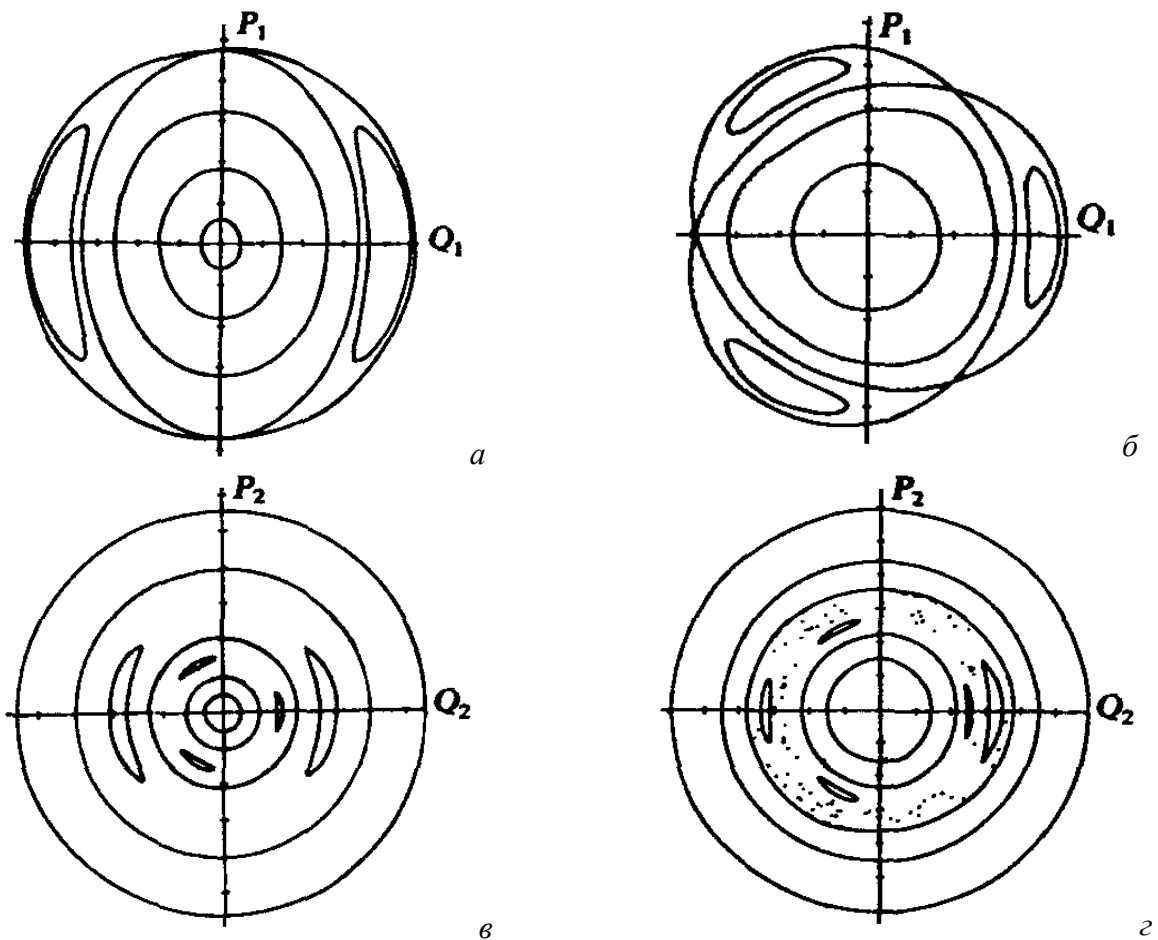


Рис. 3.1.14. Поверхня перетину гамільтоніана (3.1.52): а –  $\alpha \neq 0, \beta = 0$ ; б –  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ; в –  $\alpha = \beta = 0.02, E = 0.18$ ; г –  $\alpha = \beta = 0.02, E = 0.2905$ .

<sup>25</sup> Див.: G.H.Walker, J.Ford, Phys. Rev., **188**, 416 (1969).

При малих значеннях енергії системи резонанси є ізольованими (рис. 3.1.14 в – цей рисунок може служити ілюстрацією до теореми КАМ). При переході енергії системи через деяке порогове значення резонанси починають взаємодіяти, утворюючи макроскопічну зону нестійкості – область глобального хаосу, в якій рух системи є суттєво неінтегровним (див. рис. 3.1.12 г). Розміри цієї зони зростають при подальшому збільшенні енергії системи.

Наведений вище приклад стосується системи з двома ступенями вільності, коли перехід до глобального хаосу означає руйнування нерезонансних торів, які розділяють області складного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів відповідно до теореми КАМ. У системах із більшою кількістю ступенів вільності навіть при малому неінтегровному збуренні гамільтоніана резонансні гіперповерхні у фазовому просторі не є ізольованими, і виникає павутина Арнольда (див. вище п. 3.1.2.7). У цьому випадку також можна говорити про перехід до глобального хаосу, однак це питання досі залишається недостатньо вивченим.

### 3.1.3.3. Критерій Чирикова

Оцінити умови переходу системи до глобального хаосу можна за допомогою так званого критерію Чирикова<sup>26</sup>. Суть його зводиться до того, що для виникнення глобального хаосу повинне відбутися перекриття резонансів, тобто віддаль між сусідніми резонансами (наприклад, за частотою  $\delta\omega$  або за дією  $\delta I$ ) повинна стати меншою від їхньої ширини (відповідно  $\Delta\omega$  або  $\Delta I$ ):

$$\frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \approx \frac{\Delta I}{\delta I} \geq 1 \quad (3.1.53)$$

(рис. 3.1.15). У цьому випадку розрахунок для ізольованого резонансу, наведений у п. 3.1.3.1, втрачає чинність.

За виконання критерію Чирикова зображувальна точка у фазовому просторі бере участь одночасно в двох резонансних рухах, причому досліджувана система є суттєво нелінійною, тобто принцип суперпозиції не спрацьовує. В результаті рух системи набуває надзвичайно складного й водночас нестійкого характеру.

Кількісно критерій Чирикова найкраще працює для систем із півтора чи двома ступенями вільності, однак якісно він є справедливим і для систем із більшою кількістю ступенів вільності.

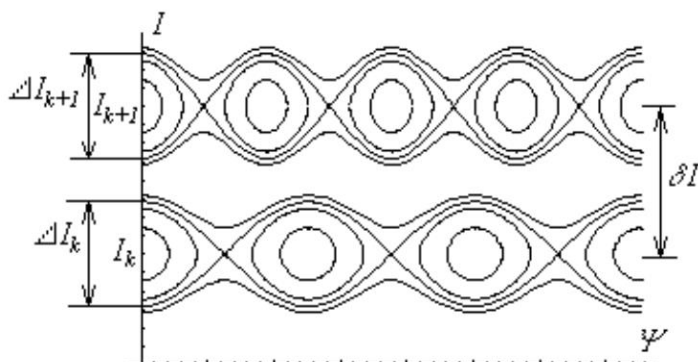


Рис. 3.1.15. Сусідні нелінійні резонанси (у координатах дія  $I$  – кут  $\Psi$ ). Показано ширину резонансів та віддаль між ними.

### 3.1.3.4. Системи з перемішуванням

Строго кажучи, навіть при виникненні глобального хаосу не всі траєкторії у фазовому просторі відповідають стохастичній динаміці. На рис. 3.1.14 г видно, що в області стохастичного руху зберігаються острівці регулярного руху в околі нерухомих точок типу центр (ці

<sup>26</sup> Див.: В.Chirikov, Phys. Reports, **52**, 263 (1979). Б.В. Чириков (Борис Валерианович Чириков, 1928 - 2008) – російський фізик, академік РАН (1992), працював у Новосибірську. Займався теорією електронних прискорювачів та відкритих магнітних пасток для плазми, створив теорію динамічного хаосу в класичних та квантових гамільтонівських системах, отримав фундаментальні результати в статистичній механіці.

точки, відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа, виникають при руйнуванні резонансних торів різних порядків).

Однак, якщо нас цікавлять глобальні характеристики стохастичної поведінки, то наявністю острівців регулярного руху можна знехтувати. Тоді можна сказати, що поведінка систем із глобальним хаосом описується моделлю систем із перемішуванням.

Нагадаємо визначення систем із перемішуванням.

Розглянемо гамільтонівську систему, що здійснює фінітний рух. Тоді фазові траєкторії, що описують цей рух, будуть знаходитись у деякій обмеженій області  $D$  фазового простору. Під мірою довільної області  $A$  фазового простору (тут і нижче розглядаються лише такі області, що є частинами області  $D$ ) будемо розуміти відношення об'єму області  $A$  до об'єму всієї області  $D$ :

$$\mu(A) = \frac{V_A}{V_D}, \quad V_A = \int_{(A)} d\vec{X}, \quad V_D = \int_{(D)} d\vec{X} \quad (3.1.54)$$

(вектор  $\vec{X}$  розмірністю  $2n$  включає всі змінні, що визначають фазовий простір).

Нехай деяка фазова траєкторія системи  $\vec{X} = \vec{X}(t)$  задовольняє початковим умовам  $\vec{X}(t=0) = \vec{X}_0$ . Визначимо оператор потоку  $F_t$  як оператор, дія якого на точку  $\vec{X}_0$  перетворює її в точку  $\vec{X}(t)$ :

$$F_t \vec{X}_0 = \vec{X}(t). \quad (3.1.55)$$

Для гамільтонівських систем у силу теореми Ліувілля фазовий об'єм є нестисливим (див. п.3.1.1.2), тобто для довільної області  $A$ , що рухається у фазовому просторі під дією оператора потоку,

$$\mu(A) = \mu(F_t A). \quad (3.1.56)$$

Розглянемо дві довільні області  $A$  і  $B$  з мірами  $\mu(A)$  і  $\mu(B)$ . Нехай область  $B$  залишається нерухомою, а область  $A$  еволюціонує з плином часу під дією оператора потоку  $F_t: A_t = F_t A$ . Позначимо через  $A_t \cap B$  сукупність усіх частин області  $A_t$ , що входять до складу області  $B$ .

Якщо при довільному виборі областей  $A$  та  $B$  виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_t \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A), \quad (3.1.57)$$

говорять, що динамічна система має властивість перемішування<sup>27</sup>.

Перепишемо (3.1.57) у формі:

$$\frac{V(A_t \cap B)}{V(B)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{V(A)}{V(D)}. \quad (3.1.57 \text{ а})$$

Запис (3.1.57 а) вказує, що частка шматків області  $A$ , які потрапили до нерухомої області  $B$ , з часом стає такою самою, як частка області  $A$  в усій області  $D$ . Оскільки область  $B$  вибирається довільним чином, сказане вище означає, що шматки області  $A$  з часом рівномірно заповнюють усю область  $D$ . Це твердження залишається справедливим при довільному початковому положенні та розмірах області  $A$ .

Таким чином, наявність перемішування в системі означає, що її фазові траєкторії є абсолютно нестійкими щодо малих збурень, тобто сусідні фазові траєкторії з часом розбігаються. Це впливає з того, що шматки як завгодно малої області  $A$  з часом рівномірно заповнюють усю область  $D$  (схематично це показано на рис. 3.1.16; слід тільки мати на увазі, що ускладнення форми фазової краплі, показане на цьому рисунку, супроводжується її рухом як цілого). Наявність нестійкості за обмеженості області  $D$  означає, що поведінка системи з пе-

<sup>27</sup> Йдеться про перемішування траєкторій у фазовому просторі. В математиці наведене визначення задає так зване метричне перемішування.

ремішуванням є непередбачуваною. Нарешті, оскільки з часом шматки області  $A$  не можуть знов зібратися разом, це означає, що поведінка такої системи є необоротною<sup>28</sup>.

Наслідком перемішування є також розчеплення часових кореляцій.

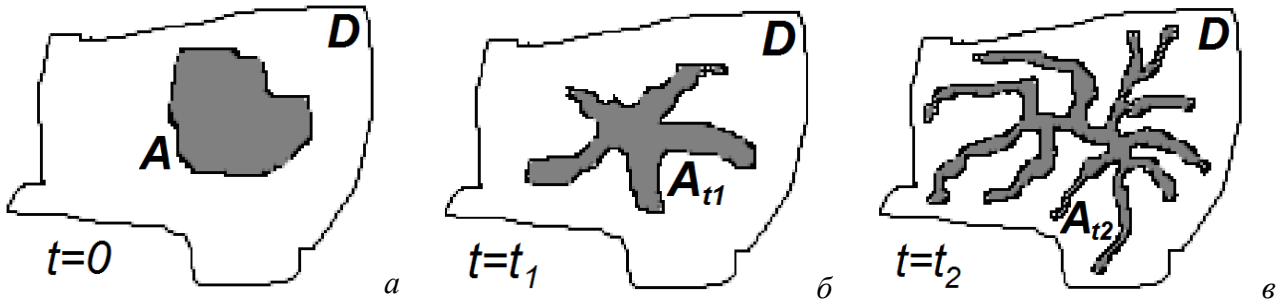


Рис.3.1.16. Еволюція фазової краплі в гамільтонівській системі з перемішуванням ( $t_2 > t_1 > 0$ )

### 3.1.3.5. Розчеплення часових кореляцій у системах із перемішуванням

Інтуїтивно зрозуміло, що шматки області  $A$  рівномірно заповнюють усю область  $D$  за деякий характерний час. Спробуємо визначити цей час більш формально.

Розглянемо довільні інтегровні функції  $f$  і  $g$ , визначені в замкненій області  $D$  фазового простору динамічної системи. Визначимо їхні фазові середні, як

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\vec{X}) d\vec{X}; \quad \langle g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g(\vec{X}) d\vec{X}. \quad (3.1.58)$$

Оскільки рух системи відбувається в обмеженій області  $D$ , то можна вважати, що різні точки цієї області відповідають різним початковим умовам. Таким чином, середні величини (3.1.58) можна інтерпретувати як середні за ансамблем реалізацій.

Нехай у початковий момент часу стан системи визначається умовою  $\vec{X}(t=0) = \vec{X}_0$ . Відповідно можна записати, що в момент  $t$  положення зображувальної точки є функцією початкових умов:  $\vec{X}(t) = \vec{X}(t, \vec{X}_0)$ . Визначимо корелятор функцій  $f$  і  $g$  як фазове середнє від добутку  $f[\vec{X}(t, \vec{X}_0)] \cdot g(\vec{X}_0)$ :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f[\vec{X}(\vec{X}_0, t)] g(\vec{X}_0) d\vec{X}_0. \quad (3.1.59)$$

В інтегралі в правій частині формули (3.1.59) можна перейти від змінної  $\vec{X}_0$  до змінної  $\vec{X}$ , переписавши співвідношення  $\vec{X}(t) = \vec{X}(t, \vec{X}_0)$  у формі  $\vec{X}_0 = \vec{X}(t, \vec{X}(t))$ . Тоді, враховуючи нестисливість фазового об'єму, корелятор (3.1.59) можна переписати в еквівалентній формі

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\vec{X}) g[\vec{X}_0(\vec{X}, t)] d\vec{X}. \quad (3.1.59 \text{ а})$$

В силу зробленого вище зауваження можна стверджувати, що величина (3.1.59) є не що інше, як взаємна кореляційна функція функцій  $f$  і  $g$ , аргументи яких зсунуті на час  $t$ . Відповідно величина  $\langle f, f \rangle$  буде звичайною автокореляційною функцією.

<sup>28</sup> Питання про необоротність поведінки гамільтонівських систем із перемішуванням нетривіальне. Як відомо, гамільтонівські системи (принаймні, автономні) можуть бути описані рівнянням, що містить лише похідні парних порядків за часом, тому його поведінка є оборотною (про це див. нижче, п. 3.1.3.8). Але, як показують оцінки, час, необхідний для того, щоб у системі відтворилися початкові умови, є дуже великим. Тому можна говорити, що поведінка системи протягом фактичного часу спостереження за нею може вважатися оборотною. З іншого боку, формально для отримання необоротної поведінки гамільтонівської системи необхідне припущення про розчеплення кореляцій з часом, яке виходить за рамки гамільтонівського формалізму.

На якісному рівні можна стверджувати, що корелятор кількісно визначає пам'ять системи про її початкові умови. Втрата пам'яті про початкові умови означає, що при  $t \rightarrow 0$  залежність  $\vec{X}$  від  $\vec{X}_0$  втрачається. Тоді ми можемо замінити функцію  $f[\vec{X}(t, \vec{X}_0)]$  під інтегралом у правій частині (3.1.59) на її фазове середнє, яке визначається першою з формул (3.1.58). Останню величину можна винести з-під знаку інтегралу. В результаті отримаємо:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\vec{X}) g(\vec{X}_0) d\vec{X}_0 = \langle f \rangle \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g(\vec{X}_0) d\vec{X}_0 = \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (3.1.59 \text{ б})$$

Покажемо тепер більш строго (або більш формально), що за наявності перемішування при  $t \rightarrow \infty$  відбувається розчеплення кореляцій, тобто для довільних функцій  $f$  та  $g$  виконуються співвідношення

$$\langle f, g \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (3.1.60)$$

Розглянемо спершу випадок, коли

$$f_A(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \vec{X} \in A; \\ 0, & \vec{X} \notin A; \end{cases} \quad g_B(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \vec{X} \in B; \\ 0, & \vec{X} \notin B, \end{cases}$$

де  $A$  і  $B$  – довільні частини області  $D$ .

Нехай область  $B$  нерухома, а область  $A$  еволюціонує під дією потоку  $F_t$ :  $A_t = F_t A$ .

При великих  $t$  внаслідок перемішування

$$\mu(A_t \cap B) \approx \mu(A) \mu(B).$$

З іншого боку,

$$\mu(A_t \cap B) = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g_B(\vec{X}) f_{A_t}(\vec{X}) d\vec{X} = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g_B(\vec{X}_0) f_A[\vec{X}(\vec{X}_0, t)] d\vec{X}_0 = \langle f_A, g_B \rangle$$

(під інтегралом виконано перехід від змінної  $\vec{X}$  до змінної  $\vec{X}_0$  та враховано, що область  $B$  залишається нерухомою),

$$\mu(A) \mu(B) = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f_A(\vec{X}) d\vec{X} \cdot \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g_B(\vec{X}) d\vec{X} = \langle f_B \rangle \langle g_A \rangle.$$

Отже, в аналізованому випадку справді виконується умова (3.1.60).

Розіб'ємо тепер область  $D$  на дрібні області  $A_j$ , що не перетинаються. Розмір цих областей оберемо настільки малим, що в кожній з них значення функцій  $f$  та  $g$  можна вважати сталими. Тоді

$$f(\vec{X}) \approx \sum_j \phi_j f_{A_j}(\vec{X}), \quad g(\vec{X}) \approx \sum_j \gamma_j g_{A_j}(\vec{X}),$$

де

$$f_{A_j}(\vec{X}) = g_{A_j}(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \vec{X} \in A_j; \\ 0, & \vec{X} \notin A_j, \end{cases} \quad \phi_j \equiv f(\vec{X} \in A_j), \quad \gamma_j \equiv g(\vec{X} \in A_j).$$

Введені таким чином функції  $f_{A_j}$  та  $g_{A_j}$  збігаються зі щойно розглянутими. Тоді для системи з перемішуванням

$$\langle f, g \rangle \approx \sum_{j,k} \phi_j \gamma_k \langle f_{A_j}(\vec{X}) g_{A_k}(\vec{X}_0) \rangle = \sum_{j,k} \phi_j \gamma_k \langle f_{A_j} \rangle \langle g_{A_k} \rangle = \sum_j \phi_j \langle f_{A_j} \rangle \sum_k \gamma_k \langle g_{A_k} \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Отже, система з перемішуванням із плином часу справді „забуває” про свої початкові умови.

Введемо тепер величини

$$\tilde{f}(\vec{X}) = f(\vec{X}) - \langle f \rangle, \quad \tilde{g}(\vec{X}) = g(\vec{X}) - \langle g \rangle$$

і побудуємо їхній корелятор:

$$R(f, g, t) \equiv \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \langle f, g \rangle - 2\langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f \rangle \langle g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (3.1.61)$$

Як впливає з (3.1.60),

$$R(f, g, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Характерний час спадання корелятора  $R(f, g, t)$  і можна розглядати як деяку кількісну характеристику процесу перемішування – характерний час розчеплення кореляцій, або характерний час перемішування. Його точне визначення обирається в залежності від конкретної задачі.

### 3.1.3.6. Показники Ляпунова

Говорячи про системи з перемішуванням (див. п. 3.1.3.4), ми вказували, що у фазовому просторі таких систем сусідні зображувальні точки розбігаються. З іншого боку, в силу теореми Ліувілля об'єм фазової краплі має залишатися сталим. Тому, якщо в деякому напрямку ця крапля з часом розтягається, то в деякому іншому напрямку вона повинна стискатися. Кількісно цей процес описується за допомогою так званих показників Ляпунова.

Розглянемо найбільш загальний випадок динамічної системи, яка задається диференціальними рівняннями вигляду

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (3.1.62)$$

( $N$  – розмірність фазового простору). Нехай  $\vec{X}(t)$  – деякий розв'язок цієї системи, що відповідає початковим умовам  $\vec{X}(t=0) = \vec{X}_0$ . Розглянемо тепер деяку близьку фазову траєкторію:

$$\vec{X}_1(t) = \vec{X}(t) + \vec{\xi}(t), \quad |\vec{\xi}(0)| = \varepsilon \ll 1. \quad (3.1.63)$$

Введемо величину

$$\Lambda(\vec{\xi}(0)) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \frac{1}{t} \ln \frac{|\vec{\xi}(t)|}{|\vec{\xi}(0)|} \right]. \quad (3.1.64)$$

Покажемо, що при всіх можливих поворотах вектора  $\vec{\xi}(0)$  величина  $\Lambda$  буде змінюватися стрибком і набувати значень зі скінченного набору  $\{\lambda_j\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Ці величини називають (глобальними) показниками Ляпунова.

Вважатимемо величину  $|\vec{\xi}(t)|$  малою. Підставимо розв'язок (3.1.63) до (3.1.62) і розкладемо обидві частини рівняння (3.1.62) в ряд Тейлора, обмежившись лінійними доданками:

$$\dot{X}_i + \dot{\xi}_i = f_i(\vec{X}(t)) + \sum_{k=1}^N \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\vec{X}(t)} \xi_k(t). \quad (3.1.65)$$

Звідси з урахуванням (3.1.62) випливає, що

$$\dot{\vec{\xi}} = \hat{A} \vec{\xi}, \quad (3.1.65 \text{ a})$$

де

$$\hat{A} = \{a_{ik}\}, \quad a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\vec{X}(t)}. \quad (3.1.66)$$

Похідна в правій частині (3.1.65) береться в точці  $\vec{X}(t)$ , тому в загальному випадку елементи матриці (3.1.66) залежать від часу:  $a_{ik} = a_{ik}(t)$ . Але спочатку розглянемо випадок, коли  $a_{ik} = const$ . Тоді розв'язок рівняння (3.1.65 a) має вигляд

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{j=1}^N C_j \vec{e}_j \exp(\lambda_j t), \quad (3.1.67)$$

де  $C_j$  – сталі інтегрування,  $\vec{e}_j$  та  $\lambda_j$  – відповідно власні вектори та власні значення (вважатимемо їх дійсними) матриці (3.1.66).

Якщо вектор  $\vec{\xi}(0)$  спрямований уздовж деякого власного вектора  $\vec{e}_j$ , то всі  $C_i = 0$  ( $i \neq j$ ). Тому при довільному  $t$  вектор  $\vec{\xi}(t)$  залишається паралельним до  $\vec{e}_j$ , а його величина змінюється за законом  $|\vec{\xi}(t)| \sim \exp(\lambda_j t)$ . Тоді, очевидно,  $\Lambda(\vec{\xi}(0)) = \lambda_j$ .

В загальному випадку вектор  $\vec{\xi}(0)$  має складові вздовж кількох або навіть усіх векторів  $\vec{e}_j$ . Тому при великих  $t$  величина  $\Lambda$  визначається максимальним значенням  $\lambda_j$ . Отже, змінюючи положення  $\vec{\xi}(0)$ , будемо діставати різні значення  $\lambda_j$ .

Насправді значення  $\lambda_j$ , які визначаються з розв'язку рівняння

$$\det\{a_{ik} - \delta_{ik} \lambda\} = 0, \quad (3.1.68)$$

що має вигляд полінома  $N$ -го порядку, в загальному випадку є комплексними. Точніше, оскільки матриця  $a_{ik}$  дійсна, матимемо пари комплексно-спряжених значень. У цьому випадку на площині, що задається відповідною парою власних векторів  $\vec{e}, \vec{e}'$ , розв'язок має вигляд: 
$$\vec{\xi}(t) = [\vec{e} C \cos(t \operatorname{Im} \lambda) + \vec{e}' C' \sin(t \operatorname{Im} \lambda)] \exp(t \operatorname{Re} \lambda), \quad (3.1.67 \text{ а})$$

тобто в цьому випадку  $|\vec{\xi}(t)| \sim \exp(t \operatorname{Re} \lambda)$ . Отже, парі комплексно-спряжених власних чисел відповідає двічі вироджений показник Ляпунова  $\operatorname{Re} \lambda$ . Таким чином, для сталої матриці  $a_{ik}$  показники Ляпунова збігаються з дійсними частинами її власних значень.

В загальному випадку, як уже вказувалося,  $a_{ik} = a_{ik}(t)$ . У такому випадку загальний розв'язок системи (3.1.65 а) записується у вигляді суперпозиції  $N$  лінійно незалежних розв'язків:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{j=1}^N C_j \vec{\xi}_j(t). \quad (3.1.67 \text{ б})$$

Враховуючи, що елементи матриці  $a_{ik}$  залишаються обмеженими, для пізніх моментів часу можна записати:

$$\vec{\xi}_j(t) = \vec{\Phi}_j(t) \exp(\lambda_j t), \quad (3.1.69)$$

де функції  $\vec{\Phi}_j(t)$  змінюються повільніше від експонент. Тому  $\Lambda$  знову набирає значень лише з набору  $\{\lambda_j\}$ ,  $j = 1, N$ .

Якщо вектор  $\vec{\xi}(0)$  зорієнтований довільним чином, то  $\Lambda(\vec{\xi}(0))$  дасть максимальний показник Ляпунова (при довільному  $\vec{\xi}(0)$  відмінні від нуля всі проєкції на напрямки власних векторів  $\vec{e}_j$ ).

Відзначимо, що запропоноване тут визначення показників Ляпунова справедливе як для гамільтонівських, так і для дисипативних систем.

### 3.1.3.7. Властивості показників Ляпунова

Перерахуємо основні властивості показників Ляпунова:

1. Кількість показників Ляпунова дорівнює розмірності  $N$  фазового простору системи. Впорядкуємо їх за величиною:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

2. Сума всіх показників Ляпунова дорівнює середньому вздовж фазової траєкторії значенню величини  $\text{div } \vec{v} = \text{div} (d\vec{\xi}/dt)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{div} \dot{\vec{\xi}}(t) dt = \sum_{j=1}^N \lambda_j. \quad (3.1.70)$$

Зокрема, для гамільтонівських систем

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0, \quad (3.1.70 \text{ a})$$

оскільки для таких систем фазовий об'єм зберігається.

3. Для гамільтонівських систем має місце симетрія:

$$\lambda_i = -\lambda_{2n-i+1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.1.71)$$

де  $n$  – число ступенів вільності ( $N = 2n$ ). Це впливає з того, що відповідне характеристичне рівняння містить лише парні ступені показника експоненти, дійсною частиною якого є показник Ляпунова. Тому всі корені цього рівняння можна розбити на пари, однакові за величиною та протилежні за знаком.

4. Якщо показники Ляпунова для гамільтонівської системи з  $n$  ступенями вільності розраховуються на гіперповерхні сталої енергії, яка має, очевидно, розмірність  $2n-1$ , то зі співвідношення симетрії (3.1.71) випливає, що принаймні один (а, отже, в просторі з розмірністю  $2n$  – принаймні два) з показників Ляпунова має дорівнювати нулеві.

### 3.1.3.8. Ентропія Колмогорова - Синая

В теоретичній фізиці відома проблема консервативної системи з багатьох частинок. В силу консервативності її поведінка має бути оборотною. Між тим реально спостерігається необоротна поведінка.

Існує дві точки зору на можливе розв'язання цієї суперечності. Одна з них, сформульована І.Р.Пригожиним, зводиться до того, що необоротність від самого початку треба закладати в опис системи<sup>29</sup>. Пригожин навіть запропонував замінити рівняння Шрьодінгера іншим рівнянням, яке від самого початку враховує необоротність. Більш традиційна точка зору зводиться до того, що необоротність поведінки з'являється в результаті огрублення опису поведінки системи. Прикладом такого огрублення може служити введення ентропії Колмогорова - Синая для гамільтонівських систем.

Існування динамічних систем із перемішуванням приводить до потреби в деякій універсальній характеристиці таких систем. Вона, очевидно, має бути інваріантом.

В 1958 р. А.М.Колмогоров ввів новий метричний інваріант динамічних систем  $h$ , названий ентропією, який визначає, чи є в системі перемішування<sup>30</sup>. Це визначення пізніше було розвинене Я.Г.Синаєм<sup>31</sup>.

Оскільки перемішування означає появу досить складної динаміки фазових траєкторій, то для її опису природно застосовувати поняття ентропії.

Нехай, наприклад, фазова крапля у фазовому просторі має об'єм  $\Delta\Gamma$ . Тоді її ентропія дорівнює  $S = \ln \Delta\Gamma$  (ентропію вимірюємо в одиницях сталої Больцмана). Ця формула аналогічна до відомого співвідношення  $S = k_B \ln p$ , де  $p$  – число мікроскопічних станів, що відповідають тому самому макроскопічному стану (див. п. 1.1.2.2).

Але для гамільтонівських систем унаслідок теореми Ліувілля об'єм фазової краплі зберігається в процесі її еволюції, тому формально й ентропія  $S$  при цьому не змінюється. В той же час структура фазової краплі буде змінюватись. Від неї відростають свого роду пагони, товщина яких зменшується зі зростанням їхньої довжини. З часом ці пагони стають все

<sup>29</sup> Детальніше див., наприклад: И.Пригожин, И.Стенгерс. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М., УРСС, 2003.

<sup>30</sup> А.Н.Колмогоров. ДАН СРСР, 1958, **119**, 861; 1959, **125**, 754.

<sup>31</sup> Я.Г.Синай. ДАН СРСР, 1959, **124**, 768; 1959, **125**, 1200.



більш розгалуженими, а об'єм, у якому вони знаходяться, зростає (рис. 3.1.16), доки не заповнить усю область  $D$  еволюції динамічної системи у фазовому просторі.

Введемо величину  $\varepsilon$ , що має розмірність фазового об'єму, і будемо покривати фазову краплю  $N$ -вимірними кубами з ребрами завдовжки  $\varepsilon^{1/N}$  ( $N$  – розмірність фазового простору). Сукупність таких кубів складе огрублений фазовий об'єм  $\Delta G$ . Цей об'єм відчуває розтягання фазової краплі, але не відчуває її стиснення (починаючи з деякого моменту часу). Тому для нього теорема Ліувілля вже не справджується, і огрублений об'єм  $\Delta G(t)$  з часом зростає (рис. 3.1.17).

Зростання  $\Delta G(t)$  відбуватиметься на гіперповерхні, що вміщує всі нестійкі напрямки у фазовому просторі. Величина площі фігури на цій гіперповерхні зростає як добуток усіх її характерних розмірів, тобто за законом

$$\Omega(t) = \Omega(0) \exp(h_0 t), \quad (3.1.72)$$

де інкремент  $h_0$ , взагалі кажучи, є функцією координат фазового простору:  $h_0 = h_0(\vec{X})$ . Якщо нестійкі напрямки характеризуються показниками Ляпунова  $\lambda_i(\vec{X})$ , то

$$h_0(\vec{X}) = \sum_i \lambda_i(\vec{X}), \quad \lambda_i(\vec{X}) > 0. \quad (3.1.73)$$

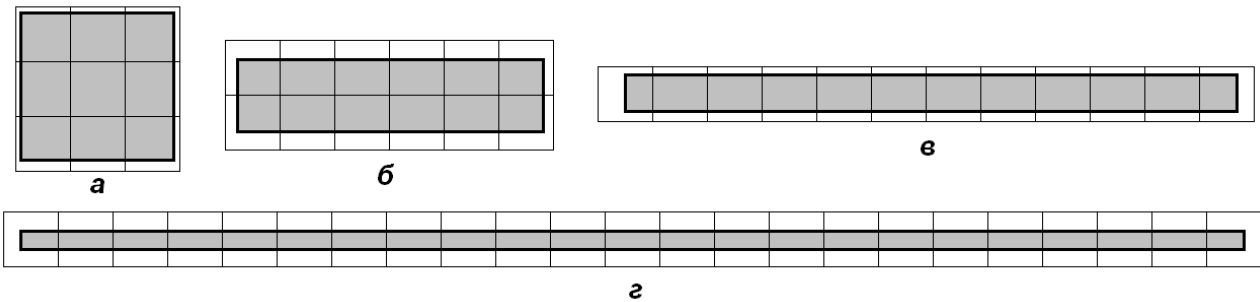


Рис. 3.1.17. Вигляд фазової краплі, яка стискається по вертикалі та одночасно розтягається по горизонталі, в послідовні моменти часу. Починаючи з деякого моменту, огрублений фазовий об'єм, що визначається кількістю квадратів сталого розміру, які покривають фазову краплю, перестає відчувати подальше стиснення.

Для довільного елемента  $\Delta G$ , таким чином, матимемо (в середньому за областю  $D$ ):

$$\Delta G(t) = \Delta G_0 \exp(ht), \quad h = \langle h_0 \rangle. \quad (3.1.74)$$

Отже, показник  $h$  зростання об'єму  $\Delta G$  є результат усереднення інкременту локальної нестійкості по всьому фазовому простору.

Тоді для ентропії, яка відповідає огрубленому фазовому об'єму  $\Delta G$ , можна записати:

$$\bar{S} = \ln \Delta G(t) = \ln(\Delta G_0 e^{ht}) = ht + \ln \Delta G_0 \quad (3.1.75)$$

При точності огрублення  $\varepsilon$  не слід брати  $\Delta G_0$  меншим від  $\varepsilon$ . Тому можна покласти

$\Delta G_0 = \varepsilon$ . Отримаємо:

$$\bar{S} = ht + \ln \varepsilon. \quad (3.1.75 \text{ a})$$

Для розрахунку ентропії з більшою точністю слід перейти до границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Величина

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \Delta G(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (ht + \ln \varepsilon) = h \quad (3.1.76)$$

і являє собою ентропію Колмогорова - Синая, або КС-ентропію.

### 3.1.3.9. Властивості КС-ентропії

Основні властивості ентропії Колмогорова - Синає такі:

1. КС-ентропія  $h$  визначає швидкість зростання ентропії  $\bar{S}$ , що відповідає огрубленому фазовому об'єму, в результаті перемішування траєкторій у фазовому просторі.

2. Ентропія  $h$ , інкремент локальної нестійкості  $h_0$  і обернений час розщеплення кореляцій  $1/\tau_c$  є величинами одного порядку.

3. Ентропія  $h$  є метричним інваріантом системи, тобто її величина не залежить від способу розбиття фазового простору та його огрублення.

Якщо система здійснює регулярний рух, то потік фазової рідини є ламінарним. В цьому випадку  $h = 0$ . Зростання ентропії при  $h > 0$  пов'язане з перетворенням ламінарної течії фазової рідини на турбулентну.

### 3.1.3.10. Спектральні властивості хаосу

Ще одна відмінність між періодичним чи квазіперіодичним рухом та перемішуванням виявляється у спектральних властивостях системи.

Спираючись на визначення корелятора (3.1.61), можна ввести спектральну густину корелятора:

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(f, f, t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3.1.77)$$

Для регулярного (періодичного або квазіперіодичного) руху спектр  $R(\omega)$  виявляється дискретним:

$$R(\omega) = \sum_i R_i \delta(\omega - \omega_i) \quad (3.1.78)$$

(набір частот  $\omega_i$  може бути й нескінченим). Навпаки, за наявності перемішування спектр частот виходить неперервним.

На практиці (це стосується як натурних, так і числових експериментів) спектр (3.1.77) досліджувати незручно. Тому частіше аналізують безпосередньо спектр потужності сигналу.

### 3.1.3.11. Спектр потужності

Для регулярного руху на поверхні тора у фазовому просторі змінні, що характеризують рух системи, можуть бути подані у формі

$$\vec{q}(t) = \sum_{\vec{m}} \vec{q}_{\vec{m}} \exp\left[i\vec{m}(\vec{\omega}t + \vec{\delta})\right], \quad (3.1.79)$$

де  $\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  – набір частот, що відповідає даному тору (пор. із формулами (3.1.5 б), (3.1.35), (3.1.49). Спектр такого сигналу міститиме частоти  $\omega_i$  та їхні комбінації  $(\vec{m} \cdot \vec{\omega})$ .

Спектр потужності (спектральна інтенсивність)  $R(\omega)$  звичайно вводиться як перетворення Фур'є від автокореляційної функції  $R(q_i, q_i, t)$  деякої змінної  $q_i$ :

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(q_j, q_j, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (3.1.80)$$

Співвідношення (3.1.80) являє собою частинний випадок теореми Вінера - Хінчина<sup>32</sup>.

Розрахуємо величину  $R(q_i, q_i, t)$  для регулярного руху (3.1.79). За область фазового простору, в якій еволюціонує система, зручно взяти поверхню відповідного тора. Оскільки кожна траєкторія однозначно задається початковою фазою  $\vec{\delta}$ , досить виконати усереднення

<sup>32</sup> Див., наприклад: Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М., 1981. О.Я.Хінчин (Хинчин Александр Яковлевич, 1894 - 1959) – російський математик, професор МДУ, член-кореспондент АН СРСР, лауреат Сталінської премії (1941). Зробив визначний внесок у теорію ймовірностей.

за компонентами  $\vec{\delta}$  на інтервалі  $[0, 2\pi]$ . Отримаємо:

$$\begin{aligned} R(q_j, q_j, t) &= \left\langle \sum_{\vec{m}, \vec{m}'} q_{j, \vec{m}} q_{j, \vec{m}'} \exp \left[ i \vec{m} (\vec{\omega} t + \vec{\delta}) + i \vec{m}' \cdot \vec{\delta} \right] \right\rangle = \\ &= \sum_{\vec{m}, \vec{m}'} q_{j, \vec{m}} q_{j, \vec{m}'} \exp \left[ i (\vec{m} \cdot \vec{\omega}) t \right] \left\langle \exp \left[ i (\vec{m} + \vec{m}') \vec{\delta} \right] \right\rangle = \sum_{\vec{m}} |q_{j, \vec{m}}|^2 \exp \left[ i (\vec{m} \cdot \vec{\omega}) t \right] \end{aligned} \quad (3.1.81)$$

(враховано, що  $q_{i, -\vec{m}} = q_{i, \vec{m}}^*$  – це впливає з властивостей рядів Фур'є).

Очевидно, спектр потужності (3.1.80) для автокореляційної функції (3.1.81) буде дискретним.

Якщо частоти  $\vec{\omega}$  несумірні, то фазове середнє збігається із середнім за часом, і спектральну інтенсивність можна знайти за однією єдиною фазовою траєкторією:

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T q_j(t) \exp(i\omega t) dt \right|^2. \quad (3.1.82)$$

### 3.1.3.12. Спектр потужності хаотичного руху

В хаотичному режимі для розрахунку спектральної інтенсивності на практиці можна користуватися формулою (3.1.82), використовуючи єдину фазову траєкторію (хоча, строго кажучи, розрахована таким чином величина вже не збігатиметься зі спектральною інтенсивністю (3.1.80), оскільки не зрозуміло, що виступає в ролі ансамблю, за яким здійснюється усереднення). Спектр нерегулярної траєкторії буде значно складнішим, ніж для регулярної. Як правило, спостерігається кілька піків на фоні деякого неперервного шуму. Можна довести, що для систем із перемішуванням спектр (3.1.80) має бути неперервним.

Втім, існує кілька обставин, які ускладнюють аналіз спектрів.

По-перше, на практиці часовий інтервал спостереження завжди обмежений, і це буде приводити до розширення спектральних ліній. Так, якщо гармонічний сигнал  $q(t) = A \exp(i\Omega t)$  спостерігається на проміжку часу  $|t| < T$ , то замість  $\delta$ -функції отримаємо функцію

$$I_T(\omega) = \frac{2|A|^2 \sin^2(\omega - \Omega)T}{\pi(\omega - \Omega)^2 T}.$$

В результаті замість дискретного спектру спостерігається неперервний.

По-друге, в реальних ситуаціях (включаючи комп'ютерне моделювання) в досліджуваних системах завжди присутні шуми різноманітної природи, які формують неперервний "п'єдестал" навіть для дискретного спектру.

Тим не менше на практиці аналіз спектрів у багатьох випадках дозволяє відділити регулярний та нерегулярний (хаотичний) рух.

### Контрольні питання до підрозділу 3.1.3

1. Скільки співвідношень Менлі – Роу можна записати для ізольованого резонансу системи  $N$  нелінійно зв'язаних осциляторів?
2. За яких умов у гамільтонівських системах виникає глобальний хаос?
3. У чому полягає відмінність між рухом систем, близьких до інтегровних, та систем із глобальним хаосом?
4. При яких збуреннях магнітного поля магнітні пастки в принципі втрачають здатність утримувати плазму?
5. Чи існує в гамільтонівських системах із глобальним хаосом павутина Арнольда?
6. Чи залежить швидкість розбігання сусідніх зображувальних точок у фазовому просторі системи з локальною нестійкістю від їхнього взаємного розташування?
7. Чи може бути гамільтонівською система з двома ступенями вільності, яка має чотири різних показники Ляпунова?

8. Гамільтонівська система з двома ступенями вільності має показник Ляпунова  $\sigma_1=3$ . Якими будуть інші показники Ляпунова цієї системи?
9. Поясніть, чому показники Ляпунова для гамільтонівської системи можна розбити на пари, однакові за величиною і протилежні за знаком.
10. Який фізичний зміст часу розчеплення кореляцій для гамільтонівської системи? Від чого залежить цей час?
11. Для визначення огрубленого фазового об'єму користуються  $n$ -вимірними кубами з ребром  $\varepsilon$ . Характерний розмір фазової краплі в початковий момент часу –  $a$  ( $a \gg \varepsilon$ ). Через який час огрублений фазовий об'єм почне зростати?
12. Чим визначається проміжок часу, на якому можна визначити КС-ентропію для гамільтонівської системи?
13. Запропонуйте можливі алгоритми визначення КС-ентропії в числовому експерименті.
14. Які висновки про рух гамільтонівської системи можна зробити, досліджуючи спектральну інтенсивність її руху?
15. Чи може КС-ентропія бути від'ємною?

### Задачі до підрозділу 3.1.3

3.1.3.1. Звести систему рівнянь

$$\dot{\vec{I}} = \varepsilon \vec{m} H_{\vec{m}}(\vec{I}) \sin(\vec{m} \cdot \vec{\theta}); \quad \dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}(\vec{I}) + \varepsilon \cos(\vec{m} \cdot \vec{\theta}) \nabla_{\vec{I}} H_{\vec{m}}(\vec{I})$$

до одного рівняння для змінної  $\psi = (\vec{m} \cdot \vec{\theta})$  у наближенні помірної нелінійності<sup>33</sup>, розклавши частоту як функцію дії в ряд Тейлора навколо резонансного значення з точністю до лінійного доданку і знехтувавши в другому рівнянні доданком порядку  $\varepsilon$ . Визначити частоту фазових коливань. Отримати набір співвідношень Менлі – Роу.

3.1.3.2. Динамічна система (автогенератор) описується рівняннями:

$$\text{а) } \frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha(1 - \gamma x^2)y - \omega_0^2 x;$$

$$\text{б) } \frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha(1 - \gamma y^2)y - \omega_0^2 x.$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки.

3.1.3.3. Для автогенератора, описуваного рівнянням Релея

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon \left[ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \left( \frac{dx}{dt} \right) + x = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

знайти показники Ляпунова для довільних початкових умов. Вважати, що початкові умови для сусідніх фазових траєкторій відрізняються

- а) лише початковою амплітудою;
- б) лише початковою фазою.

Окремо розглянути випадки  $(a_0/a_\infty)^2 \exp(\varepsilon t) \ll 1$ , де  $a_0$  та  $a_\infty$  – відповідно початкова та усталена амплітуди коливань, і  $t \rightarrow \infty$ .

3.1.3.4. Система рівнянь, що описує генератор шуму КПП, має вигляд:

$$\frac{di}{d\tau} = i[\alpha - \gamma i^2] - v - u; \quad \frac{du}{d\tau} = i; \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = i - \beta v[(v - v_0)^2 + \delta].$$

Вважаючи параметр  $\varepsilon$  малим, знайти показники Ляпунова в околі точки  $\{0, 0, 0\}$ .

3.1.3.5. Система Вольтерра для чисельності популяцій хижак-здобич має вигляд

$$\text{а) } \dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \quad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_2 N_1 N_2;$$

$$\text{б) } \dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \quad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - (\varepsilon_2/K) N_2^2 - \gamma_2 N_1 N_2$$

<sup>33</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.137.

(усі коефіцієнти додатні). Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках. Коли ці точки будуть стійкими?

3.1.3.6. Взаємні перетворення проміжних продуктів хімічної реакції Лотки, що мають концентрації  $X$  та  $Y$ , описуються системою кінетичних рівнянь:

$$\dot{X} = k_0 - k_1XY, \quad \dot{Y} = k_1XY - k_2Y.$$

Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках. Коли ці точки будуть стійкими?

### 3.1.4. Точкові відображення

Для опису хаотичної динаміки систем із багатьма ступенями вільності в багатьох випадках дуже зручним виявляється так званий метод точкових відображень, або відображень Пуанкаре. У цьому розділі ми розглянемо деякі загальні властивості точкових відображень, а потім подивимось, як цей метод застосовується для аналізу однієї з найпростіших гамільтонівських систем, здатних демонструвати хаотичну поведінку – так званого більярду Синая.

#### 3.1.4.1. Відображення Пуанкаре

Нехай деяка динамічна система задається диференціальними рівняннями вигляду:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{3.1.84}$$

з початковими умовами  $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0$ .

Виберемо у фазовому просторі цієї динамічної системи, що має розмірність  $N$ , деяку гіперповерхню  $\Sigma$  розмірністю  $N-1$ , яку фазові траєкторії перетинають, не дотикаючись до неї (рис. 3.1.18). Будемо позначати точками на цій поверхні місця перетину її фазовою траєкторією в певному напрямку (наприклад, згори вниз). Дістанемо деякий набір точок  $A, B, C, \dots$ , що послідовно переходять одна в одну. Оскільки рівняння руху з початковими умовами однозначно задає фазову траєкторію, то кожна точка в цій послідовності однозначно визначається положенням попередньої точки. Іншими словами, існує деяка функція  $\vec{\varphi}$ , що пов'язує між собою координати кожної пари сусідніх точок у послідовності  $A, B, C, \dots$ . Нехай  $\vec{x}_n$  – координати  $n$ -ї точки послідовності. Тоді для довільного  $n$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{\varphi}(\vec{x}_n). \tag{3.1.85}$$

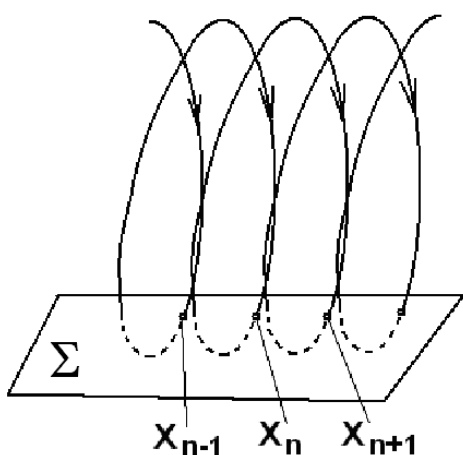


Рис. 3.1.18. Точкове відображення, що виникає при багатократному перетині гіперповерхні  $\Sigma$  фазовою траєкторією.

Говорять, що співвідношення (3.1.85) визначає точкове відображення, або відображення Пуанкаре. Послідовно застосовуючи його, отримуємо послідовність точок  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots$ , яка однозначно задається відображенням  $\vec{\varphi}$  і початковою точкою  $\vec{x}_0$ . Номер  $n$  відіграє роль дискретного часу.

Використання точкового відображення (3.1.85) замість векторного рівняння (3.1.84)

дає, очевидно, можливість зменшити розмірність фазового простору досліджуваної системи на одиницю. Крім того, виявляється, що про властивості динамічної системи (3.1.84) великою мірою можна судити за властивостями породжуваного нею відображення (3.1.85). Зокрема, періодичним розв'язком (3.1.84) будуть відповідати так звані нерухомі точки відображення (3.1.85).

Відзначимо, що точкові відображення вигляду (3.1.85) можуть бути визначені і поза будь-яким зв'язком із конкретними системами диференціальних рівнянь.

### 3.1.4.2. Нерухомі точки та мультиплікатори

Розглянемо більш детально властивості відображення (3.1.85). Точка  $\bar{x}^*$  називається нерухомою точкою відображення  $\bar{\varphi}$ , якщо вона задовольняє співвідношенню

$$\bar{x}^* = \bar{\varphi}(\bar{x}^*). \quad (3.1.86)$$

Іншими словами, нерухома точка – це точка, яка не змінюється під дією відображення. Очевидно, такій точці відповідає замкнена траєкторія у фазовому просторі.

У теорії відображень нерухомі точки відіграють таку саму роль, як стаціонарні точки в теорії диференціальних рівнянь.

Знайдемо умови стійкості нерухомої точки. Для цього покладемо  $\bar{x}_n = \bar{x}^* + \delta\bar{x}_n$ , вважаючи, що  $|\delta\bar{x}_n| \ll |\bar{x}^*|$ , і підставимо до (3.1.85). Функцію в правій частині розкладаємо в багатовимірний ряд Тейлора, обмежуючись лінійними доданками. Отримаємо:

$$\bar{x}^* + \delta\bar{x}_{n+1} = \bar{\varphi}(\bar{x}^* + \delta\bar{x}_n) \approx \bar{\varphi}(\bar{x}^*) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^{(i)}} \delta x_n^{(i)}, \quad (3.1.87)$$

або, з урахуванням (3.1.86),

$$\delta x_{n+1}^{(i)} = b_{ij} \delta x_n^{(j)}, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^*}. \quad (3.1.88)$$

Тут верхній індекс (у круглих дужках) позначає номер змінної, а нижній – номер кроку відображення.

Матриця з елементами  $b_{ij}$  являє собою, по суті, якобіан відображення (3.1.85). Власні значення цієї матриці  $\sigma_k$  називаються мультиплікаторами. Мультиплікатор – це, по суті, коефіцієнт передачі зорієнтованого певним чином (у напрямку одного з власних векторів матриці  $b_{ij}$ ) початкового збурення  $\delta\bar{x}$  за один прохід. Значення мультиплікаторів  $\sigma_k$  знаходяться з рівняння:

$$\det(b_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = 0, \quad (3.1.89)$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера<sup>34</sup>.

Нерухома точка  $\bar{x}^*$  є стійкою, якщо всі мультиплікатори  $\sigma_k$  задовольняють умові  $|\sigma_k| < 1$ . Якщо серед мультиплікаторів  $\sigma_k$  є такі, що для них  $|\sigma_k| > 1$ , нерухома точка  $\bar{x}^*$  буде нестійкою.

В автономних системах один з мультиплікаторів, що відповідає еволюції системи уздовж періодичної траєкторії, завжди дорівнює одиниці. Тому число „нетривіальних” мультиплікаторів у системі з  $N$ -вимірним фазовим простором дорівнює  $N - 1$ .

Для двовимірних відображень ( $N - 1 = 2$ ), очевидно, можливі лише три випадки:

$|\sigma_1| > 1, |\sigma_2| > 1$  – повністю нестійка нерухома точка, якій у фазовому просторі відповідає нестійкий граничний цикл (рис. 3.1.19 а);

<sup>34</sup> Л. Кронекер (Leopold Kronecker; 1823 - 1891) – німецький математик, професор Берлінського університету, член Берлінської Академії наук. Основні роботи присвячені алгебрі та теорії чисел.

$|\sigma_1| < 1, |\sigma_2| < 1$  – стійка нерухома точка, якій відповідає стійкий граничний цикл (рис. 3.1.19 б);

$|\sigma_1| > 1, |\sigma_2| < 1$  – сідлова нерухома точка, якій відповідає так званий сідловий граничний цикл (рис. 3.1.19 в).

Розташуємо всі  $\sigma_k$  за величиною модуля:

$$|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq \dots \leq |\sigma_k| \leq \dots \leq |\sigma_N|.$$

Тут  $\sigma_k$  – найбільший мультиплікатор, який ще задовольняє умові  $|\sigma_k| \leq 1$ . Тоді у фазовому просторі є  $k$  стійких та  $N - k$  нестійких напрямків.

Показник розтягання визначимо так: нехай у напрямку власного вектора із номером  $i$  має місце розтягання з характерним числом  $\sigma_i$  ( $|\sigma_i| > 1$ ). Тоді за  $n$  кроків довжина вектора зростає як

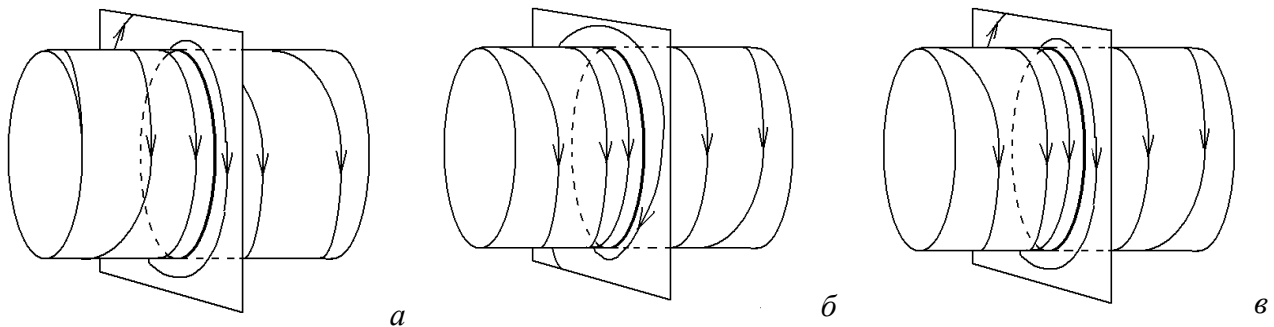


Рис. 3.1.19: а – нестійкий граничний цикл; б – стійкий граничний цикл; в – сідловий граничний цикл.

$$d_i(n) = |\sigma_i|^n d_i(0) = d_i(0) \exp(\lambda_i n), \quad (3.1.90)$$

де  $\lambda_i = \ln |\sigma_i|$ . Оскільки номер кроку  $n$  виступає дискретним аналогом часу, то величини  $\lambda_i$  – це не що інше, як показники Ляпунова, нормовані на обернений час між двома сусідніми відображеннями.

Для гамільтонівських систем  $\det \{b_{ij}\} = 1$ ,  $N = 2k$  ( $k$  – кількість ступенів вільності).

Тоді

$$\prod_{i=1}^{2k} \sigma_i = 1. \quad (3.1.91)$$

Зокрема, при  $N = 1$  маємо  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$ , тобто відповідна нерухома точка відображення (якщо вона нестійка) буде сідловою.

### 3.1.4.3. Цикли для одновимірних відображень

Розглянемо окремо одновимірні відображення вигляду

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (3.1.92)$$

Графік залежності (3.1.92) називають діаграмою Ламерея<sup>35</sup>, або поворотним відображенням (рис. 3.1.20 а).

На діаграмі Ламерея нерухомі точки – це точки перетину графіка  $y = \varphi(x)$  і прямої  $y = x$ . Вони стійкі, якщо  $|d\varphi/dx| < 1$ , і нестійкі в протилежному випадку.

Крім нерухомих точок, одновимірні відображення можуть мати цикли. Циклом по-

<sup>35</sup> Е. Ламерей (Charles Ernest Maurice Lemaire, 1860-1926) – французький математик і фізик, автор робіт з математичної фізики та теорії відносності.

рядку  $m$  (або ж  $m$ -кратним циклом) точкового відображення  $\varphi(x)$  називається послідовність точок  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , що задовольняють співвідношенням:

$$x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots, x_m = \varphi(x_{m-1}), x_1 = \varphi(x_m), \quad (3.1.93)$$

причому всі точки послідовності – різні. Точки циклу називаються іноді  $m$ -кратними нерухомими точками (рис. 3.1.18 б).

Оскільки для  $m$ -кратних нерухомих точок

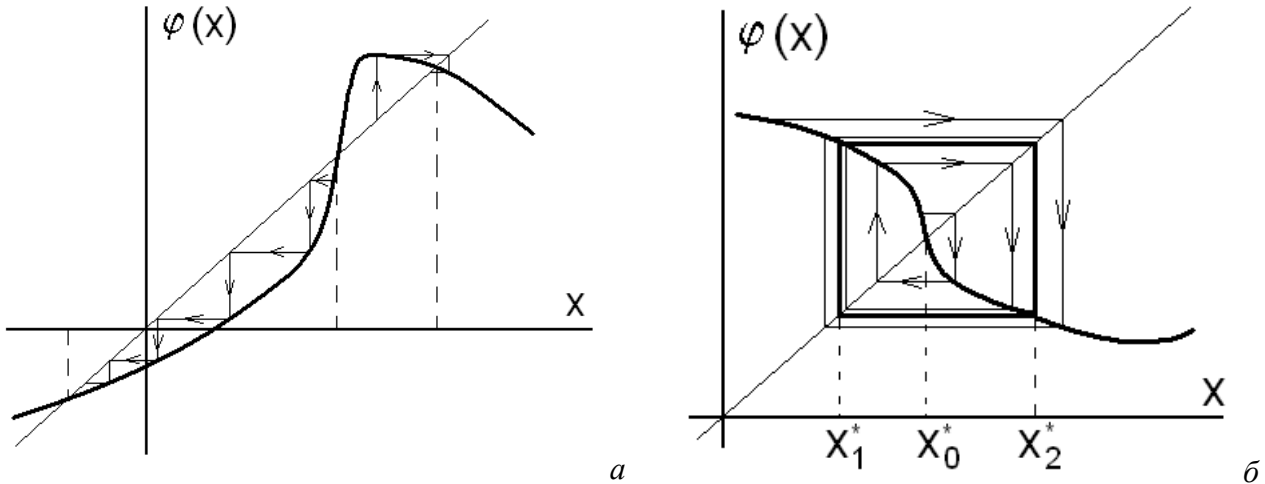


Рис. 3.1.20: а – діаграма Ламерея;

б – двократний стійкий цикл  $x_1^*, x_2^*$  та нестійка нерухома точка  $x_0^*$ .

$$x_1 = \varphi^m(x_1) \equiv \varphi(\varphi(\dots\varphi(x_1))) \quad (3.1.94)$$

(відображення  $\varphi$  послідовно діє  $m$  разів), то кожна з точок  $x_1, x_2, \dots, x_m$  одночасно є нерухомою точкою відображення  $\varphi^m$ . Тому умова стійкості  $m$ -кратної нерухомої точки має вигляд

$$|\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\dots\varphi'(x_m)| < 1, \quad (3.1.95)$$

де  $\varphi'(x) \equiv d\varphi/dx$ .

Очевидно, у фазовому просторі початкової динамічної системи циклу кратності  $m$  відповідає замкнена фазова траєкторія, яка  $m$  разів перетинає гіперповерхню  $\Sigma$  (рис. 3.1.21).

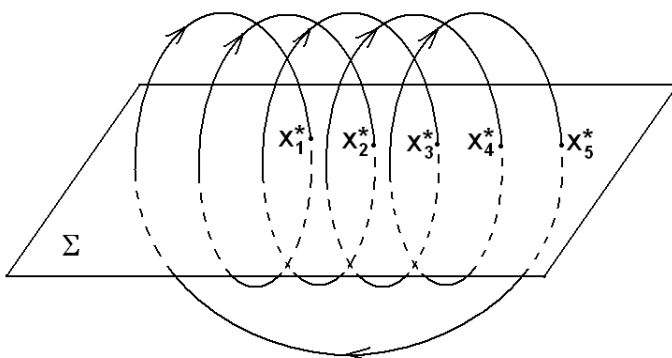


Рис. 3.1.21. Фазова траєкторія, що відповідає циклу точкового відображення кратності 5.

#### 3.1.4.4. Властивості монотонно зростаючих відображень

В залежності від вигляду функції  $\varphi$  одновимірні відображення бувають взаємно однозначні і не взаємно однозначні. Розглянемо спочатку взаємно однозначні відображення.

Відображення (3.1.92) називається взаємно однозначним, якщо рівність  $\varphi(x) = \varphi(y)$  виконується тоді й тільки тоді, коли  $x = y$ . Іншими словами,  $\varphi(x)$  або монотонно зростає,



або монотонно спадає на всьому інтервалі  $(-\infty, \infty)$ .

Розглянемо спочатку випадок  $\varphi'(x) > 0$ . З рис. 3.1.22 а видно, що серед нерухомих точок стійкі та нестійкі чергуються, причому інтервал стійкості стійкої точки лежить між сусідніми нестійкими точками. Іншими словами, якщо сусідні нерухомі точки задовольняють умові  $x_{k-1}^* < x_k^* < x_{k+1}^*$ , причому  $x_k^*$  – стійка точка, то  $x_{k-1}^*$  та  $x_{k+1}^*$  – нестійкі точки, а область стійкості точки  $x_k^*$  займає проміжок  $(x_{k-1}^*, x_{k+1}^*)$ .

Особливий випадок має місце, коли графік  $y = \varphi(x)$  дотикається до прямої  $y = x$  (рис. 3.1.22 б). Цей випадок відповідає біфуркації точкового відображення, коли одночасно виникають (чи зникають) стійка та нестійка нерухомі точки. Якщо (3.1.92) є деяке відображення Пуанкаре, то даному випадку відповідає народження (зникнення) у фазовому просторі динамічної системи пари граничних циклів – стійкого та нестійкого (як при задоволенні умови самозбудження автогенератора в жорсткому режимі).

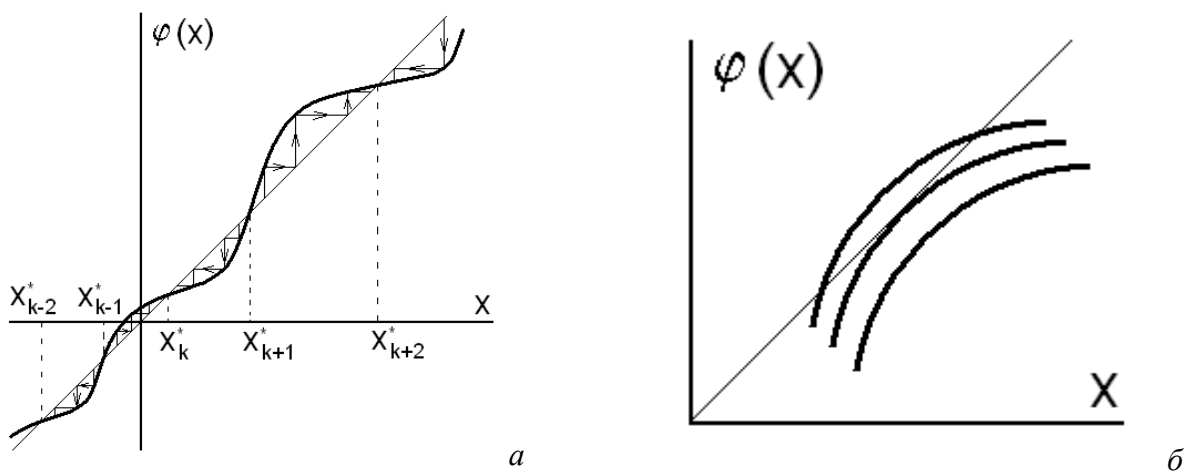


Рис. 3.1.22. Властивості монотонно зростаючого відображення:  
 а – чергування стійких та нестійких нерухомих точок;  
 б – утворення (зникнення) пари стійка - нестійка нерухома точка.

### 3.1.4.5. Властивості монотонно спадних відображень

Тепер розглянемо випадок, коли  $\varphi'(x) < 0$ . В цьому випадку може існувати єдина нерухома точка  $x^* = \varphi(x^*)$ , що може бути стійкою або нестійкою (рис. 3.1.23 а).

Відзначимо, що відображення  $F(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$  належить до розглянутого раніше типу з додатною похідною. Справді,

$$F'(x) = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{\varphi(x)} \cdot \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_x \geq 0 \quad (3.1.96)$$

(бо обидва співмножники від'ємні). Ясно, що стаціонарним точкам відображення  $F$  (крім  $x^*$  – нерухомих точок відображення  $\varphi$ ) будуть відповідати двократні цикли відображення  $\varphi$ . Отже, тепер вся пряма  $x$  розбивається на область притягання нерухомих точок  $x^*$  (якщо вона стійка) та області притягання стійких циклів. Межами цих областей служать нестійкі двократні цикли.

Для взаємно однозначного відображення з  $\varphi'(x) < 0$  можливі два типи біфуркації: перехід від стійкої нерухомих точок до нестійкої, оточеної стійким циклом, (рис. 3.1.23 а, б) і народження (зникнення) пари стійкий-нестійкий цикл (рис. 3.1.23 а, в). Першій із цих біфуркацій відповідає подвоєння періоду коливань.

### 3.1.4.6. Немонотонні відображення

Розглянемо тепер більш складний випадок однозначних, але не взаємно однозначних відображень. Характерною особливістю таких відображень є можливість виникнення надзвичайно складної динаміки – аперіодичних послідовностей, коли при деяких початкових умовах у відображення відсутні будь-які нерухомі точки (довільної кратності). Це впливає з того, що при спробі відтворення послідовності точок у зворотному напрямку внаслідок неоднозначності відображення  $\varphi^{-1}$  кожного разу виникатиме питання, яку з гілок обрати.

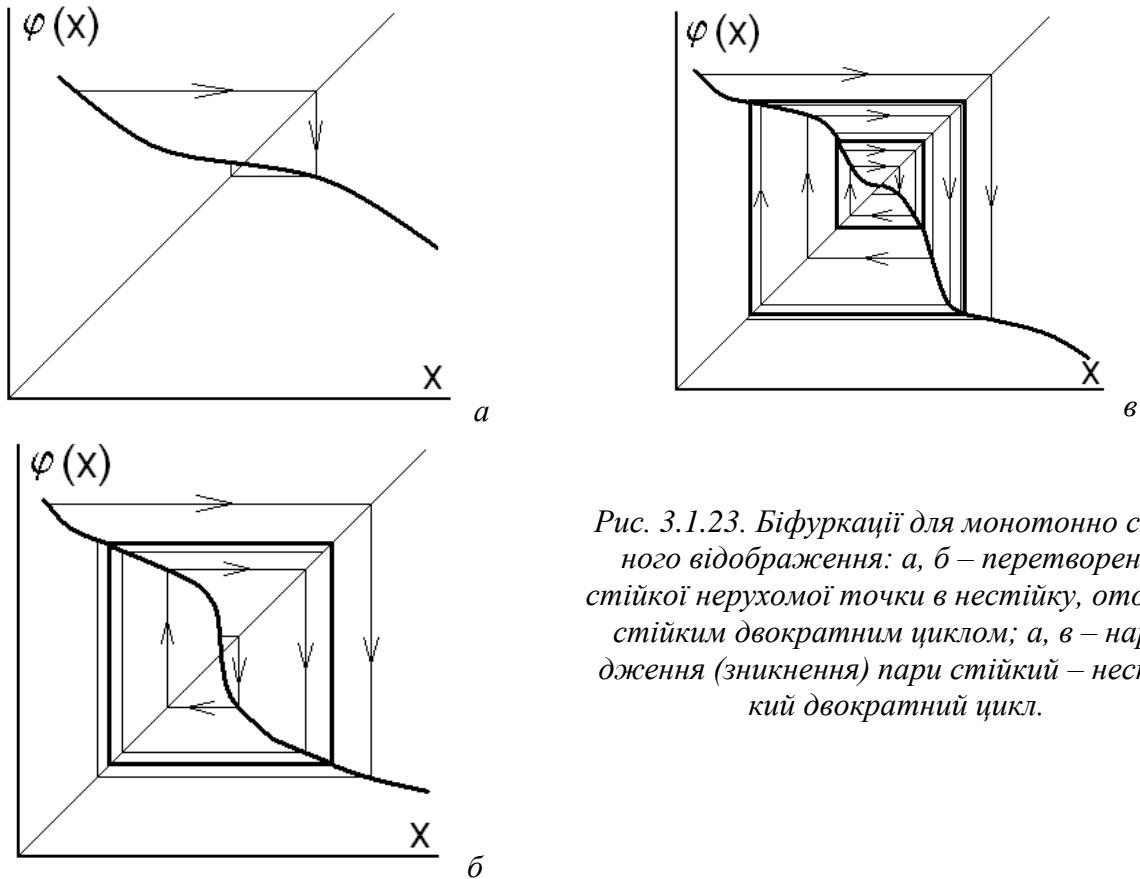


Рис. 3.1.23. Біфуркації для монотонно спадного відображення: а, б – перетворення стійкої нерухомої точки в нестійку, оточену стійким двократним циклом; а, в – народження (зникнення) пари стійких – нестійкий двократний цикл.

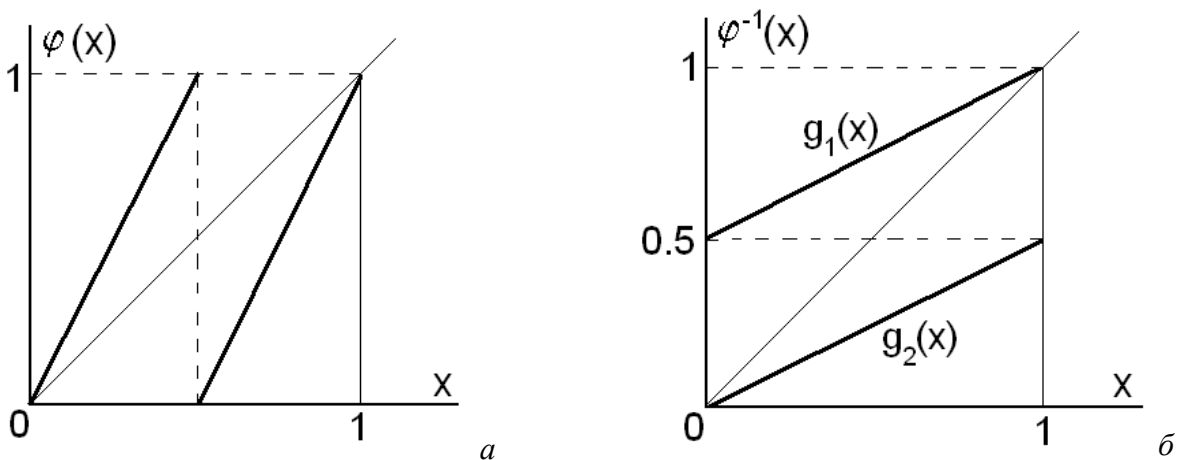


Рис. 3.1.24. Графік відображення  $\varphi(x)=\{2x\}$  (а) та зворотного відображення (б)

Виявляється, що немонотонне відображення, яке складається з кількох гілок, кожна з яких відображає частину деякого відрізка у весь цей відрізок, має нескінченну кількість різних кратних нерухомих точок. Продемонструємо це на простому прикладі відображення

$\varphi(x) = \{2x\}$ , що відображає відрізок  $[0,1]$  сам у себе (рис. 3.1.24 а). Тут символ  $\{ \}$  означає дробову частину числа.

Зворотнє відображення  $g(x) \equiv \varphi^{-1}(x)$ , очевидно, матиме дві гілки –  $g_1(x) = (1+x)/2$  та  $g_2(x) = x/2$  (рис. 3.1.24 б). Цикл прямого відображення, очевидно, буде циклом і для підібраних відповідним чином гілок зворотного відображення. Наприклад, цикл кратності 2 можна побудувати, взявши послідовно відображення  $g_1$  та  $g_2$ . Маємо:

$$g_2(g_1(x)) = \frac{1}{2} \left( \frac{1+x}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4}.$$

Стаціонарна точка цього відображення знаходиться з рівняння

$$\frac{1}{4} + \frac{x}{4} = x.$$

Це точка  $x^* = 1/3$ . Підставляючи її до відображення  $\varphi(x)$ , отримуємо:

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{ \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3}; \quad \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \left\{ \frac{4}{3} \right\} = \frac{1}{3}.$$

Отже, точки  $1/3$  та  $2/3$  справді утворюють двократний цикл відображення  $\varphi(x)$ . Взявши, наприклад, відображення  $g_1(g_1(g_2(x)))$  або  $g_1(g_2(g_2(x)))$ , можна аналогічно знайти цикли кратності 3. Так само можна побудувати й цикли більш високої кратності.

Якщо для одновимірного обмеженого відображення в усій області значень  $x$  виконано нерівність  $|d\varphi/dx| > 1$  то таке відображення (його називають розтягальним) характеризується нестійкістю: сусідні точки експоненціально розбігаються. Але, оскільки таке відображення завжди немонотонне, ці точки залишаються в межах скінченного інтервалу, переплутуючись при цьому. Фактично таке відображення гарантує хаотичну динаміку системи.

#### 3.1.4.7. Теорема Шарковського

Існує ряд теорем, за допомогою яких можна з'ясувати, коли точкові відображення характеризуються складною нерегулярною динамікою. Одна з них – це теорема Шарковського<sup>36</sup>.

Нехай  $\varphi$  є неперервне відображення лінійної області  $R$  в  $R$ , і воно має  $n$ -кратний зворотний цикл. Тоді відображення  $\varphi$  має і цикли кратності  $m$ , де  $m$  – будь-яке число, що перевищує  $n$  у послідовності:

$$3 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow 9 \leftarrow \dots \leftarrow (2n-1) \leftarrow \dots \leftarrow 2 \cdot 3 \leftarrow 2 \cdot 5 \leftarrow 2 \cdot 7 \leftarrow \dots \leftarrow 2^2 \cdot 3 \leftarrow 2^2 \cdot 5 \leftarrow 2^2 \cdot 7 \leftarrow \dots \leftarrow 2^3 \leftarrow 2^2 \leftarrow 2 \leftarrow 1,$$

причому такі цикли відповідають початковим умовам множини ненульової міри. Пізніше окремий випадок теореми Шарковського, проаналізований Т.Лі<sup>37</sup> та Дж.Йорке<sup>38</sup>, став відомий під назвою „Період три народжує хаос”.

#### 3.1.4.8. Більярди Синая

Історично одним з перших прикладів реальних (чи, принаймні, близьких до реальності) систем, що демонструють непередбачувану поведінку, були більярди Синая<sup>39</sup>. Приклад такого більярду наведений на рис. 3.1.25. Як видно з цього рисунку, сусідні кулі, що рухали-

<sup>36</sup> Див.: А.Н.Шарковский. Укр. мат. журн., 1964, **16**, 61. Шарковський Олександр Миколайович (нар. 1936) – український математик, академік НАН України (2006). Випускник Київського університету. Працює в галузі теорії динамічних систем та теоретичної механіки.

<sup>37</sup> Т.Лі (Tien-Yien Li, нар. 1945) – американський математик, професор університету Мічигану. Працює в галузі теорії динамічних систем і числового аналізу.

<sup>38</sup> Дж. Йорке (James Alan Yorke, нар. 1941) – американський математик, професор університету Меріленду.

Найбільш відомі роботи стосуються дослідження динамічного хаосу.

<sup>39</sup> Я.Г.Синай. ДАН СРСР, 1963, **153**, 1261; УМН, 1970, **25**, 141.

ся паралельно одна одній, вже після кількох відбиттів від стінок розходяться на велику від-  
даль.

### 3.1.4.9. Зв'язок між кутом падіння та кутом відбиття в більярді Синая

Найпростішою моделлю більярду Синая може служити відбиття точкової кульки від набору однакових кіл, що заповнюють деяку площину (рис. 3.1.26 а). Нехай характерна від-  
даль між центрами кіл –  $R$ , радіус окремого кола –  $r$  ( $2r \leq R$ ).

Розглянемо одноразове відбиття точкової кульки від такого кола. Спробуємо зв'язати  
кут падіння  $\alpha$  з кутом відбиття  $\beta$  (рис. 3.1.26 б).

З трикутника  $ABO$  за теоремою синусів

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \gamma}{R}. \quad (3.1.97)$$

Оскільки завжди  $\gamma > \pi/2$ , то, як випливає з (3.1.97),

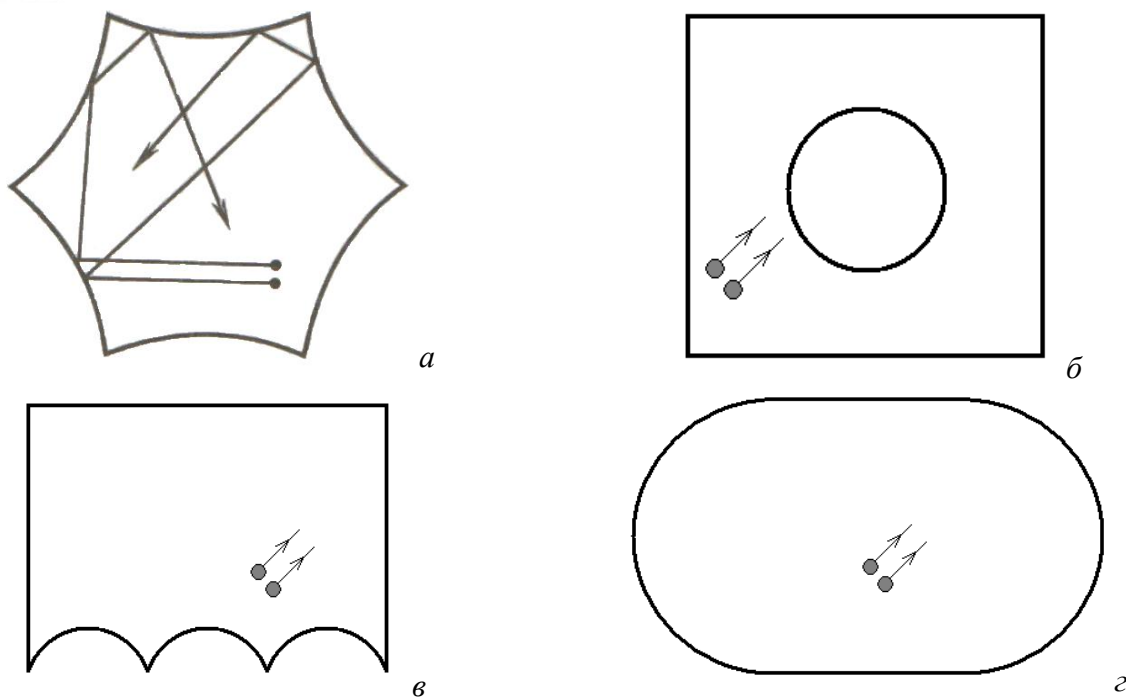


Рис. 3.1.25. Схеми різних більярдів Синая (на одному з рисунків показано траєкторії двох  
куль, які в початковий момент часу були близькими).

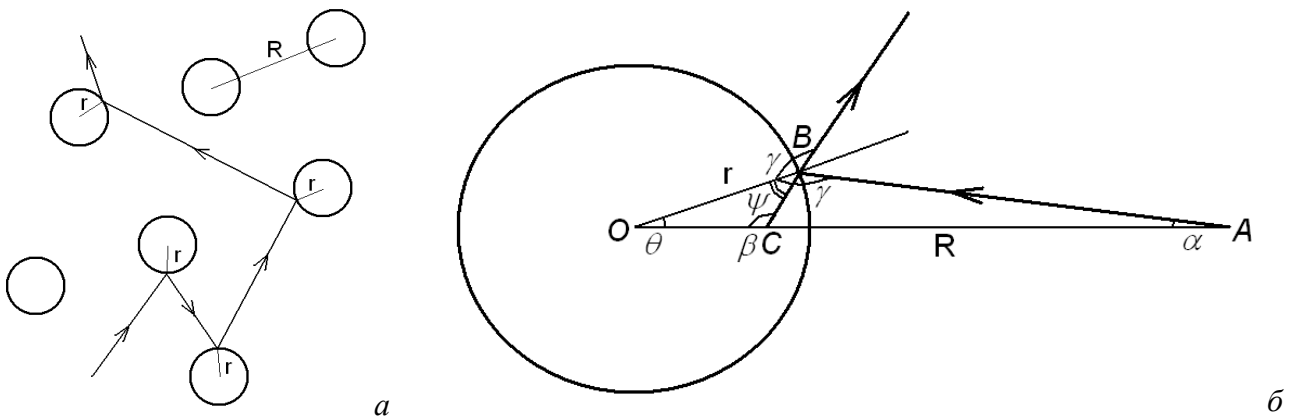


Рис. 3.1.26. Більярд Синая: а – найпростіша модель;  
б – одноразове відбиття точкової кульки від кола

$$\gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right). \quad (3.1.98)$$

Оскільки  $\psi = \pi - \gamma$ , то з трикутника  $OBC$  можна записати, що

$$\beta = \pi - \theta - \psi = \pi - \theta - (\pi - \gamma) = \gamma - \theta. \quad (3.1.99)$$

З іншого боку, як випливає з трикутника  $ABO$ ,

$$\theta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \alpha - \pi + \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) = \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \alpha. \quad (3.1.100)$$

(враховано рівність (3.1.98)). Підставивши (3.1.100) та (3.1.98) до (3.1.99), отримаємо остаточний вираз для шуканого кута  $\beta$ :

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) + \alpha = \pi + \alpha - 2 \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right). \quad (3.1.101)$$

Якщо  $\alpha \rightarrow 0$ , то співвідношення (3.1.101) спрощується:

$$\beta \approx \pi + \alpha \left(1 - 2 \frac{R}{r}\right). \quad (3.1.101 \text{ а})$$

Зміна кута  $\alpha$  на величину  $d\alpha$  після відбиття породжує зміну кута  $\beta$  на величину

$$d\beta = -d\alpha \left(2 \frac{R}{r} - 1\right). \quad (3.1.101 \text{ б})$$

Як випливає з (3.1.101 б),  $|d\beta/d\alpha| > 1$  при  $R > r$ , а останнє співвідношення за умовою задачі виконується завжди.

#### 3.1.4.10. Побудова модельного відображення для більярду Синая

Узагальнюючи співвідношення (3.1.101 б) та беручи до уваги, що значення кутів  $\alpha$  та  $\beta$  знаходяться на проміжку  $[0, 2\pi]$ , приходимо до відображення вигляду

$$x_{n+1} = \{Kx_n\} \quad (0 < x < 1), \quad (3.1.102)$$

де символ  $\{ \}$ , як і раніше, означає дробову частину,  $K$  – параметр. Строго кажучи, воно справедливе лише для малих значень аргументу. Але на якісному рівні воно правильно описує поведінку кульки в більярдах Синая і в загальному випадку.

Якщо  $|K| < 1$ , то  $x_n = Kx_{n-1} = \dots = K^n x_0$ , тобто  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Якщо  $|K| > 1$ , ситуація повністю змінюється, бо умова  $|dx_n/dx_{n-1}| > 1$ , як ми вже знаємо (див. кінець п. 3.1.4.6), означає наявність локальної нестійкості.

#### 3.1.4.11. Розрахунок КС-ентропії для більярду Синая

Можна записати, що

$$\delta x_{n+1} = K \delta x_n = \dots = K^{n+1} \delta x_0 = \delta x_0 \exp[(n+1) \ln K]. \quad (3.1.103)$$

Отже, оскільки номер кроку можна ототожнити з дискретним часом, то

$$h_0 = \ln K = h, \quad (3.1.104)$$

оскільки  $h_0 = \text{const}$  на відрізку  $[0, 1]$ .

#### 3.1.4.12. Розрахунок часу розщеплення кореляцій для більярду Синая

Покажемо, що час розщеплення кореляції в цьому випадку задовольняє умові  $\tau_c \sim 1/h$ , тобто пам'ять про початкові умови забувається тим швидше, чим більший параметр  $K$ .

Справді, оцінімо корелятор  $R_n(f, g)$ , вибравши функції  $f$  та  $g$  у формі

$$f(x_m) = \exp(i2\pi x_m), \quad g(x_n) = \exp(-i2\pi x_n)$$

(параметр  $K$  у відображенні (3.1.102) нижче вважатимемо нецілим числом). Функції  $f$  та  $g$

вибрані так, що

$$f(x_m) = f(\{x_m\}), \quad g(x_m) = g(\{x_m\}).$$

Корелятор  $R_n(f, g)$  (див. формулу (3.1.61) можна подати у формі

$$R_n(f, g) = \langle f(x_n), g(x_0) \rangle - \langle f(x), g(x) \rangle. \quad (3.1.105)$$

Для обраних функцій  $f$  та  $g$

$$\langle f \rangle = \langle g^* \rangle = \int_0^1 \exp(i2\pi x) dx = \frac{\exp(i2\pi x)}{i2\pi} \Big|_0^1 = 0.$$

Тоді (3.1.105) набуває вигляду:

$$R_1(f, g) = \int_0^1 dx_0 \exp(i2\pi Kx_0) \exp(-i2\pi x_0) = \frac{\exp[i2\pi(K-1)] - 1}{i2\pi(K-1)};$$

$$R_n(f, g) = \int_0^1 dx_0 \exp(i2\pi K^n x_0) \exp(-i2\pi x_0) = \frac{\exp[i2\pi(K^n-1)] - 1}{i2\pi(K^n-1)}, \quad (3.1.106)$$

тобто при  $K \gg 1$

$$|R_n| \sim \frac{1}{K^n} = \exp(-n \ln K). \quad (3.1.107)$$

Як випливає з (3.1.107), для системи, описуваної відображенням (3.1.102),

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \ln K, \quad h \sim \frac{1}{\tau_c}$$

(пор. з п. 3.1.3.9).

#### Контрольні питання до підрозділу 3.1.4

1. Що таке нерухома точка для точкового відображення? Коли вона буде стійкою? Які фазові траєкторії у фазовому просторі відповідають їй?
2. Що таке цикл кратності  $m$  для точкового відображення? Які фазові траєкторії у фазовому просторі відповідають йому? Коли він буде стійким?
3. Яке відображення відповідає нестійкому рухові системи?
4. Чи мають фізичний зміст комплексні мультиплікатори?
5. Як пов'язані між собою мультиплікатори та показники Ляпунова з урахуванням їхньої розмірності?
6. Які біфуркації можливі в системах, описуваних монотонно зростаючими відображеннями?
7. Які біфуркації можливі в системах, описуваних монотонно спадними відображеннями?
8. Відображення має цикл кратності 12. Цикли ще якої кратності воно обов'язково має?
9. Скільки відмінних циклів кратності  $n$  може мати відображення, якщо зворотне відображення складається з  $k$  гілок, кожна з яких відображає частину деякого відрізка у весь цей відрізок?
10. Чому в більярді Синая виникає нестійкість?

#### Задачі до підрозділу 3.1.4

3.1.4.1. Для лінійного слабкодисипативного осцилятора побудувати відображення Пуанкаре і дослідити його властивості в залежності від параметра дисипації.

3.1.4.2. Відображення Ено<sup>40</sup> має вигляд:

$$x = y + 1 - ax^2; \quad y = bx.$$

Знайти нерухомі точки цього відображення. Коли ці точки будуть стійкими?

<sup>40</sup> Див.: М. Hénon. Communications in Mathematical Physics, **50**, 69–77 (1976). М. Ено (Michel Hénon, 1931–2013) – французький математик і астроном. Займався дослідженнями еволюції зір та зоряних кластерів.

3.1.4.3. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку  $[0,1]$  має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x(1-x), \quad 0 \leq \mu \leq 4.$$

Знайти стаціонарні точки цього відображення та дослідити їхню стійкість.

3.1.4.4. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку  $[0,1]$  має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x(1-x), \quad 0 \leq \mu \leq 4.$$

Дослідити умови існування та стійкості циклу кратності 2 цього відображення.

3.1.4.5. Для відображення

$$\bar{x} = \mu + x + x^2$$

знайти стаціонарні точки. При яких значеннях  $\mu$  вони існуватимуть? Чи будуть вони стійкими?

3.1.4.6. Для відображення

$$\bar{x} = 4x(1-x)$$

знайти цикл кратності 2.

3.1.4.7\*. Для більярду Синая, утвореного

а) чотирма однаковими увігнутими дугами кола;

б) шістьма однаковими увігнутими дугами кола (рис. 3.1.25 а);

в) квадратом і вміщеним у нього колом, центри яких збігаються (рис. 3.1.25 б);

г) прямокутником, одна сторона якого замінена трьома увігнутими дугами кола (рис. 3.1.25 в);

д) двома відрізками прямих та двома півколами (рис. 3.1.25 г)

за допомогою комп'ютера побудувати набір тривимірних картинок, що ілюструють еволюцію фазової краплі в часі.

### **3.1.5. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора: побудова відображення та аналіз руху**

Як відомо, однією з найпростіших моделей, яка демонструє хаотичну динаміку, є нелінійний консервативний осцилятор, на який діє зовнішня сила, що залежить від часу<sup>41</sup>. Нехай зовнішня сила являє собою періодичну послідовність коротких імпульсів, проміжків між якими значно більший від їхньої тривалості. Тоді для такої системи можна порівняно просто побудувати точкове відображення, яке дозволяє кількісно проаналізувати рух системи на великих проміжках часу і виявити області параметрів, коли цей рух стає хаотичним.

Отримані таким чином результати стануть у пригоді при аналізі хаотичної динаміки автогенератора з параметричним збудженням (див. нижче п.3.2.2) та слабкої турбулентності гамільтонівських систем із розподіленими параметрами (див. нижче п.3.3.1).

#### *3.1.5.1. Опис моделі*

Розглянемо систему, що описується в координатах дія-кут гамільтоніаном вигляду:

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t). \quad (3.1.108)$$

Перший доданок у правій частині (3.1.108) відповідає власним коливанням осцилятора, який ми надалі вважатимемо нелінійним, другий – потенціалу зовнішньої сили. Гамільтоніан (3.1.108) породжує рівняння руху у формі:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta},$$

<sup>41</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}, \quad (3.1.109)$$

де  $\omega(I) \equiv dH_0/dI$ .

Будемо вважати, що зовнішня сила являє собою деяку послідовність ударів. Тоді, як впливає з першого рівняння системи (3.1.109), дія змінюватиметься лише під час ударів, а в проміжках між ударами вона зберігатиметься. Прийmemo також, що тривалість окремих ударів  $\tau$  значно менша від характерного проміжку  $T$  між ударами.

Нехай до того ж інтервали  $T$  між ударами однакові. Тоді гамільтоніан можна записати у вигляді

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (3.1.108 \text{ а})$$

де  $t = nT$  – моменти ударів.

Саме систему, описувану гамільтоніаном (3.1.108 б), ми будемо розглядати нижче<sup>42</sup>. Для неї рівняння руху набувають вигляду

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.1.109 \text{ а})$$

У проміжках між ударами, тобто при  $(n-1)T < t < nT$ , система (3.1.109 а) має розв'язки

$$I = \text{const}, \quad \theta = \omega(I)t + \theta_0. \quad (3.1.109 \text{ б})$$

### 3.1.5.2. Побудова відображення

За відсутності зовнішньої сили рух нелінійного осцилятора зручно описувати змінними дія-кут. Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис. 3.1.1 а. В загальному випадку фазовий простір системи, описуваної рівняннями (3.1.109 а), стає тривимірним, тобто у фазовому просторі додається вісь часу, перпендикулярна до площини дія-кут.

Наявність періодичної зовнішньої сили дозволяє побудувати відображення природним чином. Для цього ототожнимо кут  $\theta$  з полоїдальним кутом тора, дію  $I$  – з малим радіусом тора, а вісь часу – з тороїдальним кутом  $\psi = 2\pi t/T$ , так що зміна цього кута на  $2\pi$  відповідає зміні часу на  $T$  – період зовнішньої сили (рис. 3.1.27). Тоді моментам ударів  $t = nT$  відповідає півплощина, обмежена головною віссю тора, яка визначається значенням тороїдального кута  $\psi = 0$ . А за гіперповерхню  $\Sigma$  (див. п. 3.1.4.1), яку перетинають фазові траєкторії, оберемо таку саму півплощину, яка відповідає моментам часу безпосередньо перед ударами,  $\psi = -0$ .

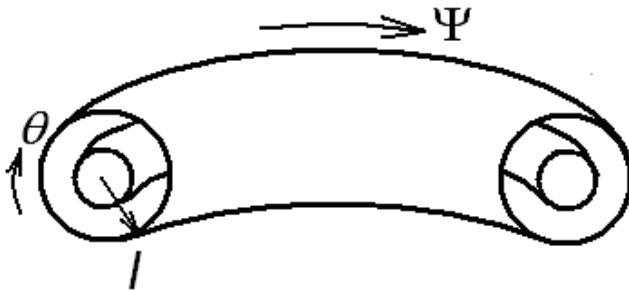


Рис. 3.1.27. Структура фазового простору.

<sup>42</sup> Така модель є частинним випадком системи, коли періодична зовнішня сила діє на нелінійний консервативний осцилятор. Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 127-139.



Отже, визначимо відображення  $\hat{T}$  таким чином:

$$(\bar{I}, \bar{\theta}) = \hat{T}(I, \theta), \quad (3.1.110)$$

де

$$\begin{aligned} I &= I(t = nT - 0); & \theta &= \theta(t = nT - 0); \\ \bar{I} &\equiv I(t = (n+1)T - 0); & \bar{\theta} &= \theta(t = (n+1)T - 0). \end{aligned}$$

Як уже говорилося, рух аналізованої системи можна розділити на миттєву зміну дії та кута в момент удару та вільні коливання в проміжках між ударами. Відповідно до цього відображення  $\hat{T}$  подати як суперпозицію двох відображень –  $\hat{T}_\delta$ , що описує удар, та  $\hat{T}_R$ , що описує обертання (англ. rotation) по колу радіусу  $I$ :

$$\hat{T} = \hat{T}_R \hat{T}_\delta. \quad (3.1.111)$$

Для відображення  $\hat{T}_R$ , відповідно (3.1.109 б), маємо:

$$\hat{T}_R(I, \theta) = (I, \theta + \omega(I)T). \quad (3.1.112)$$

Щоб отримати відображення  $\hat{T}_\delta$ , проінтегруємо рівняння руху (3.1.109 а) в малому околі моменту удару  $t_0$  (на проміжку  $[t_0 - 0, t_0 + 0]$ ). Оскільки координата  $q$  є неперервною функцією часу, то й функція  $V(q) = V(I, \theta)$  також неперервна. Маємо з урахуванням співвідношень (3.1.109 а):

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv I(t_0 + 0) - I(t_0 - 0) = \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \dot{I} dt = -\varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta}; \\ \Delta \theta &\equiv \theta(t_0 + 0) - \theta(t_0 - 0) = \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \dot{\theta} dt = \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial I}. \end{aligned} \quad (3.1.113)$$

Рівняння (3.1.113) і визначають перетворення  $\hat{T}_\delta$ :

$$\hat{T}_\delta(I, \theta) = \left( I - \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta}, \theta + \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial I} \right). \quad (3.1.114)$$

Підставляючи (3.1.112) і (3.1.114) до (3.1.111), остаточно маємо:

$$\bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega(\bar{I})T + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial I}. \quad (3.1.115)$$

Відображення (3.1.115) відоме в літературі як універсальне відображення<sup>43</sup>.

Якщо припустити, що потенціал зовнішньої сили залежить тільки від кута,  $V = V(\theta)$ , то відображення (3.1.115) можна спростити:

$$\bar{I} = I - \varepsilon T V'(\theta), \quad \bar{\theta} = \theta + T \omega(I - \varepsilon T V'(\theta)). \quad (3.1.115 \text{ а})$$

Для того, щоб додатково спростити відображення (3.1.115 а), врахуємо, що функція  $V(\theta)$  має бути періодичною з періодом  $2\pi$ , і покладемо  $V(\theta) = V_0 \cos \theta$ . Функцію  $\omega(I)$  розкладемо в ряд Тейлора, обмежившись лінійним доданком:  $\omega(I) = \omega_0 + \omega' I$ , де  $\omega_0 = \omega(I = 0)$ . Тоді замість (3.1.115 а) можна записати:

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left[ 1 + \frac{\alpha}{I_0} (I + \varepsilon I_0 \sin \theta) \right] = \theta + \omega_0 T \left( 1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right), \quad (3.1.115 \text{ б})$$

де введені константа  $I_0 = V_0 T$  та безрозмірний параметр нелінійності  $\alpha = \omega' I_0 / \omega_0$ . Максимально спрощений варіант універсального відображення у формі (3.1.115 б) прийнято називати стандартним відображенням. Цьому відображенню відповідає гамільтоніан

<sup>43</sup> Вперше розглянуте в роботі: Чириков Б.В. Атомная энергия, 1959, 6, 630.

$$H(I, \theta, t) = \omega_0 I + \frac{\alpha \omega_0 T}{2I_0} I^2 - \varepsilon I_0 T \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.1.108 \text{ б})$$

Додатково спростимо стандартне відображення, опустивши постійний зсув фази  $\omega_0 T$  (що еквівалентно переходу в систему координат, яка обертається) і перейшовши до безрозмірної дії,  $\alpha \omega_0 T I / I_0 \rightarrow I$ . Тоді воно набуде вигляду:

$$\bar{I} = I + K_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi} \quad (3.1.115 \text{ в})$$

де підкреслено, що кут  $\theta$  змінюється на проміжку  $[0, 2\pi[$ , і використано позначення

$$K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T. \quad (3.1.116)$$

### 3.1.5.3. Нерухомі точки та умови виникнення нестійкості

Нерухомі точки відображення (3.1.115 в) знаходяться зі звичайної умови (3.1.86):

$$\bar{I} = I, \quad \bar{\theta} = \theta.$$

Звідси можна отримати два набори нерухомих точок:

$$(I_1, \theta_1) = (2\pi m; 0), \quad (I_2, \theta_2) = (2\pi m; \pi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.117)$$

Якобіан відображення (3.1.115 в) має вигляд:

$$\hat{J} = \frac{\partial(\bar{I}, \bar{\theta})}{\partial(I, \theta)} = \begin{pmatrix} 1 & K \\ 1 & 1+K \end{pmatrix}, \quad K \equiv K_0 \cos \theta. \quad (3.1.118)$$

Тоді значення мультиплікаторів знаходимо з рівняння (3.1.89)

$$\det \{ J_{ij} - \sigma \delta_{ij} \} = 0,$$

яке для якобіану (3.1.118) набуває вигляду

$$\sigma^2 - (2+K)\sigma + 1 = 0. \quad (3.1.119)$$

Як випливає з (3.1.119), мультиплікатори відображення (3.1.115 в) мають вигляд

$$\sigma_{1,2} = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K}{2} \left( 2 + \frac{K}{2} \right)}. \quad (3.1.119 \text{ а})$$

Відображення буде нестійким при  $|\sigma| > 1$ , тобто при  $K > 0$  ( $\sigma_1 > 1$ ) і при  $K < -4$  ( $\sigma_2 < -1$ ).

Для першого з наборів стаціонарних точок (3.1.117)  $K_1 = K_0 \cos \theta_1 = K_0 > 0$ . Значить, ці точки завжди нестійкі, а точніше, гіперболічні, оскільки для гамільтонівських систем будь-яка нестійка точка буде гіперболічною. Для другого набору  $K_2 = K_0 \cos \theta_2 = -K_0 < 0$ , тобто ці точки стійкі (еліптичні), якщо  $0 < K_0 < 4$ .

Для стандартного відображення з формули (3.1.119 а) видно, що яким би великим не був параметр  $K_0$ , завжди знайдуться такі значення  $\theta$ , що величина  $K = K_0 \cos \theta$  потрапить в область стійкості (пор. з острівцями регулярного руху на рис.3.1.14 г). Ця обставина ускладнює можливість теоретичного аналізу межі виникнення стохастичності.

### 3.1.5.4. Фазовий портрет

Фазовий портрет (у полярних координатах) системи, описуваної відображенням (3.1.115 в), наведений на рис. 3.1.28 а-г для різних значень параметра  $K_0$ . Фактично це перетин фазового портрету системи з гамільтоніаном (3.1.108 б), побудованого в координатах, показаних на рис.3.1.27, площиною  $\psi = const$ .

При  $K_0 = 0$  реалізується інтегровний випадок (рис. 3.1.28 а). При  $0 < K_0 \ll 1$  відповідно до теореми КАМ резонансні тори руйнуються, а нерезонансні – зберігаються (рис. 3.1.28 б). Нагадаємо, що на місці зруйнованих резонансних торів виникають структури, які в першому наближенні відповідають фазовим коливанням – нелінійному аналогу біттів

між гармоніками зовнішньої сили та гармоніками власної частоти осцилятора (точному виконанню умови нелінійного резонансу відповідає еліптична нерухома точка). При подальшому зростанні параметра  $K_0$  умови теореми КАМ порушуються. В результаті на місці зруйнованих резонансних торів поступово формуються стохастичні шари (рис. 3.1.28 в). Їх утворення пов'язане із впливом нерезонансних доданків у потенціалі зовнішньої сили. Ці доданки для фазових коливань в околі певного резонансу виступають у ролі зовнішньої сили. Така сила поблизу сепаратриси, де гарантовано відбувається перекриття нелінійних резонансів, породжує хаотичну динаміку системи<sup>44</sup>. При цьому між окремими стохастичними шарами зберігаються інваріантні тори. Оскільки число ступенів вільності менше двох, окремі стохастичні шари ізольовані один від одного, тобто дифузія Арнольда відсутня.

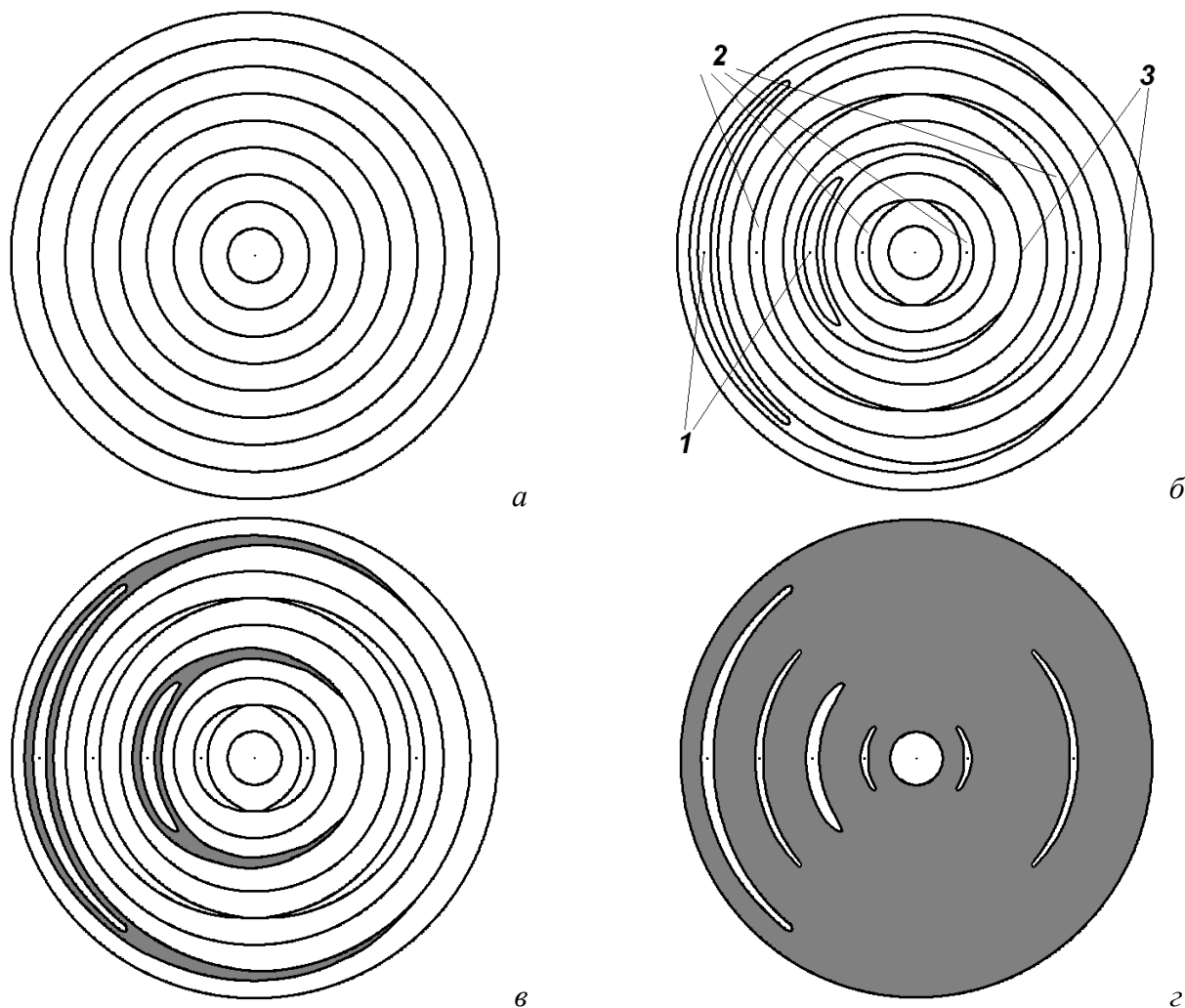


Рис. 3.1.28. Стандартне відображення для різних значень  $K_0$ : а –  $K_0 = 0$ ; б –  $K_0 \rightarrow 0$  (1, 3 – еліптичні та гіперболічні нерухоми точки вигляду (3.1.117), 2 – резонансні тори вищих порядків); в –  $K_0 \approx 1$  (на місці сепаратрис утворилися стохастичні шари, але інваріантні тори зберігаються); г –  $K_0 > 1$  (інваріантні тори зруйнувалися, утворилося єдине стохастичне море).

Дія та кут відповідають радіусу та азимутальному куту в полярній системі координат.

При переході параметра  $K_0$  через одиницю ширина резонансів збільшується, відбувається їхнє перекриття, інваріантні тори руйнуються, і окремі стохастичні шари зливаються в стохастичне море (рис. 3.1.28 г), в якому, однак, існують острівці стійкості. Їхній розмір має порядок  $1/K_0$ . Цей випадок відповідає переходу до глобального хаосу.

<sup>44</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 137-139.

Як показує числове моделювання, область переходу до стохастичного режиму відбувається в дуже вузькому діапазоні значень  $K_0$ : при  $K_0 < 0.97$  утворюється стохастичний шар в околі сепаратриси, при  $K_0 > 0.97$  стохастичні шари зливаються, утворюючи стохастичне море.

Острівці регулярного руху виникають навколо еліптичних точок, які, в свою чергу, утворюються при руйнуванні резонансних торів відповідно до теореми Пуанкаре - Біркгофа (див. вище п. 3.1.2.8). Наявність таких острівців є фундаментальною властивістю реальних фізичних систем. Сама структура острівців є надзвичайно складною. Існують системи острівців різних порядків, розміри яких зменшуються зі зростанням порядку (див. п.3.1.2.8).

Описані тут результати для стандартного відображення залишаються якісно справедливими й для універсального відображення. Відмінність виявляється лише у формі та кількості острівців.

Зображувальна точка, що рухається в області стохастичної динаміки, може потрапити на межу острівця. Тоді протягом певного часу вона здійснюватиме там майже регулярні коливання, а потім знову перейде в область хаосу. В результаті спостерігатиметься явище переміжності, коли хаотична динаміка чергується з регулярними коливаннями<sup>45</sup>.

### 3.1.5.5. Оцінка часу перемішування за кутом

Досі у всі формули, що описували стандартне відображення, входив лише добуток  $\varepsilon V_0$ . Для того, щоб визначити параметр  $\varepsilon$  незалежно, вважатимемо, що  $I_0 \sim I$ .

Якщо параметр  $\varepsilon$  малий, то, як впливає з (3.1.115 б), для стандартного відображення відносна зміна дії на один крок відображення також є малою:

$$\frac{\Delta I}{I} \equiv \frac{|\bar{I} - I|}{I} = \varepsilon \frac{I_0}{I} |\sin \theta| \sim \varepsilon \ll 1. \quad (3.1.120)$$

Іншими словами, час перемішування за дією  $\tau_I$ , протягом якого відносна зміна дії стає величиною порядку одиниці, значно перевищує проміжок часу  $T$  між двома зовнішніми ударами.

Зі співвідношень (3.1.115 в) можна оцінити також відносну зміну кута на одному кроці відображення:

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} \equiv \frac{|\bar{\theta} - \theta|}{\theta} = \frac{|I + K_0 \sin \theta|}{\theta}. \quad (3.1.121)$$

Якщо  $K_0 \gg 1$ , відносна зміна кута на одному кроці відображення вже не буде малою.

Умови  $K_0 \gg 1$  та  $\varepsilon \ll 1$  можуть бути задоволені одночасно, якщо  $\alpha \omega_0 T \gg 1/\varepsilon$  (див. формулу (3.1.116)). Тоді характерний час перемішування за кутом  $\tau_\theta$  буде значно меншим від часу перемішування за дією  $\tau_I$ . Це означає, зокрема, що на проміжку часу  $\tau_\theta \ll t \ll \tau_I$  процес перемішування за кутом (за фазою) можна розглядати незалежно від зміни дії. Звідси випливає, що розрахунок часу перемішування за кутом для стандартного відображення можна повести, вважаючи дію фіксованою.

Побудуємо корелятор  $R_n(f, g)$ , вибравши функції  $f$  та  $g$  аналогічно до того, як це було зроблено в п. 3.1.4.12:

$$f(\theta_n) = \exp(ir\theta_n), \quad g(\theta_0) = \exp(-is\theta_0),$$

$$R_n(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \exp[i(r\theta_n - s\theta_0)] \quad (3.1.122)$$

де  $r, s$  – додатні числа,  $n$  – номер кроку відображення.

<sup>45</sup> Про явище переміжності див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 258.

Зв'язок між  $\theta_{n-1}$  та  $\theta_n$ , що задається співвідношенням (3.1.115 б), перепишемо у формі  $\theta_n = \theta_{n-1} + \omega T + K_0 \sin \theta_{n-1}$ ,

нехтуючи на проміжку часу  $t \ll \tau_I$  зміною частоти  $\omega$  внаслідок зміни дії. Тоді, підставивши цей вираз до (3.1.122), можна записати:

$$R_n(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \exp\left[i(r\theta_{n-1} + r\omega T - rK_0 \sin \theta_{n-1} - s\theta_0)\right]. \quad (3.1.122 \text{ а})$$

Далі можна скористатися відомим співвідношенням

$$\exp(iz \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \exp(im\theta), \quad (3.1.123)$$

де  $J_m(x)$  – функція Бесселя<sup>46</sup> порядку  $m$ .

Підставивши (3.1.123) до (3.1.122 а) і продовжуючи ітераційний процес, можна врешті решт отримати:

$$\begin{aligned} R_n(f, g) &= \exp(ir\omega T) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(rK_0) R_{n-1}(f, g) \Big|_{r-m, s} = \\ &= \exp(inr\omega T) \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\sum_{k=1}^n m_k} \exp\left(i\omega T \sum_{k=1}^n m_k\right) \times \\ &\times J_{m_1}(rK_0) J_{m_2}[(r-m_1)K_0] \dots J_{m_n}\left[\left(r - \sum_{k=1}^{n-1} m_k\right)K_0\right] R_0(f, g) \Big|_{r-\sum_{k=1}^n m_k, s}. \end{aligned} \quad (3.1.122 \text{ б})$$

Для оцінки корелятора  $R_n(f, g)$  у формі (3.1.122 б) скористаємося асимптотикою функцій Бесселя  $J_m(x \rightarrow \infty) \sim x^{-1/2}$  і тим, що для цілих значень  $r$  та  $s$  справедливе співвідношення  $R_0(f, g) = \delta_{rs}$ , де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Отримуємо:

$$R_n(f, g) \sim K_0^{-n/2} \exp(inr\omega T) = \exp\left(-\frac{nT \ln K_0}{2T}\right) \exp(inr\omega T). \quad (3.1.124)$$

Отже, час перемішування за кутом  $\tau_\theta$  визначається співвідношенням

$$\tau_\theta = \frac{2T}{\ln K_0}. \quad (3.1.125)$$

Як і слід було чекати, він зменшується при зростанні параметра  $K_0$ .

Тепер оцінимо ентропію Колмогорова – Синає. Оскільки у фазовому просторі є лише один нестійкий напрям, вона дорівнює просто додатному показнику Ляпунова. Як впливає з формули (3.1.119 а), більший за модулем мультиплікатор при  $|K| \gg 1$  може бути оцінений як  $|\sigma| \approx |K| \approx K_0$  (нехтуємо існуванням острівців), звідки

$$h = \lambda = \frac{1}{T} \ln |\sigma| \approx \frac{\ln K_0}{T}. \quad (3.1.126)$$

Отже, співвідношення  $h \sim 1/\tau_\theta$  в даному разі виконується.

### 3.1.5.6. Спектральні властивості хаотичної динаміки, породжуваної стандартним відображенням

Знайдені раніше умова виникнення глобального хаосу  $K_0 \geq 1$  і вирази для часу перемішування (3.1.125) та КС-ентропії (3.1.126) характеризують, по суті, лише лінійну стадію

<sup>46</sup> Ф. Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 - 1846) – німецький математик і астроном, професор університету Альбертина в Кенігсбергу, засновник обсерваторії в цьому місті. Був учнем К.Ф. Гауса. Основні роботи пов'язані з дослідженнями розширення Всесвіту, паралаксу, орбіти комети Галлея. Функції, названі ім'ям Бесселя, вперше були визначені швейцарським математиком і фізиком Д. Бернуллі (Daniel Bernoulli; 1700 - 1782).

нестійкості, яка породжує перемішування. Характеристикою усталеного режиму хаотичної динаміки є спектральна густина корелятора, або спектр потужності хаотичного руху (див. вище пп. 3.1.3.10-3.1.3.12).

Як випливає з формули (3.1.124), корелятор спадає з часом експоненціально,

$$R(t) = R_0 \exp(-t/\tau_\theta). \quad (3.1.124 \text{ а})$$

Тоді його спектр буде мати лоренцівську форму,

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{R_0 \tau_\theta}{\pi(1 + \omega^2 \tau_\theta^2)}, \quad (3.1.127)$$

і швидко спадатиме з частотою при  $\omega > 1/\tau_\theta$ .

Для дискретного часу за реалізацією стохастичного процесу  $x_k = x_k(I_k, \theta_k)$  спочатку розраховують коефіцієнт кореляції

$$R_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2} \leq j \leq \frac{N}{2}} x_j x_{j+k}, \quad (3.1.128)$$

де величина  $N$  визначає максимальну кількість кроків відображення (строго кажучи, має виконуватись умова  $N \rightarrow \infty$ ). Потім розраховують дискретний аналог спектральної інтенсивності

$$R_N(\omega_m) = \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}} R_N(k) \exp(-ik\omega_m), \quad \omega_m = \frac{2\pi}{N} m. \quad (3.1.129)$$

Можна чекати, що при дуже великих значеннях  $K_0$  спектр (3.1.129) повинен мати вигляд, близький до (3.1.127). Але при отриманні формули (3.1.127) не бралось до уваги існування острівців, наявність яких радикально змінює вигляд спектру (рис. 3.1.29<sup>47</sup>).

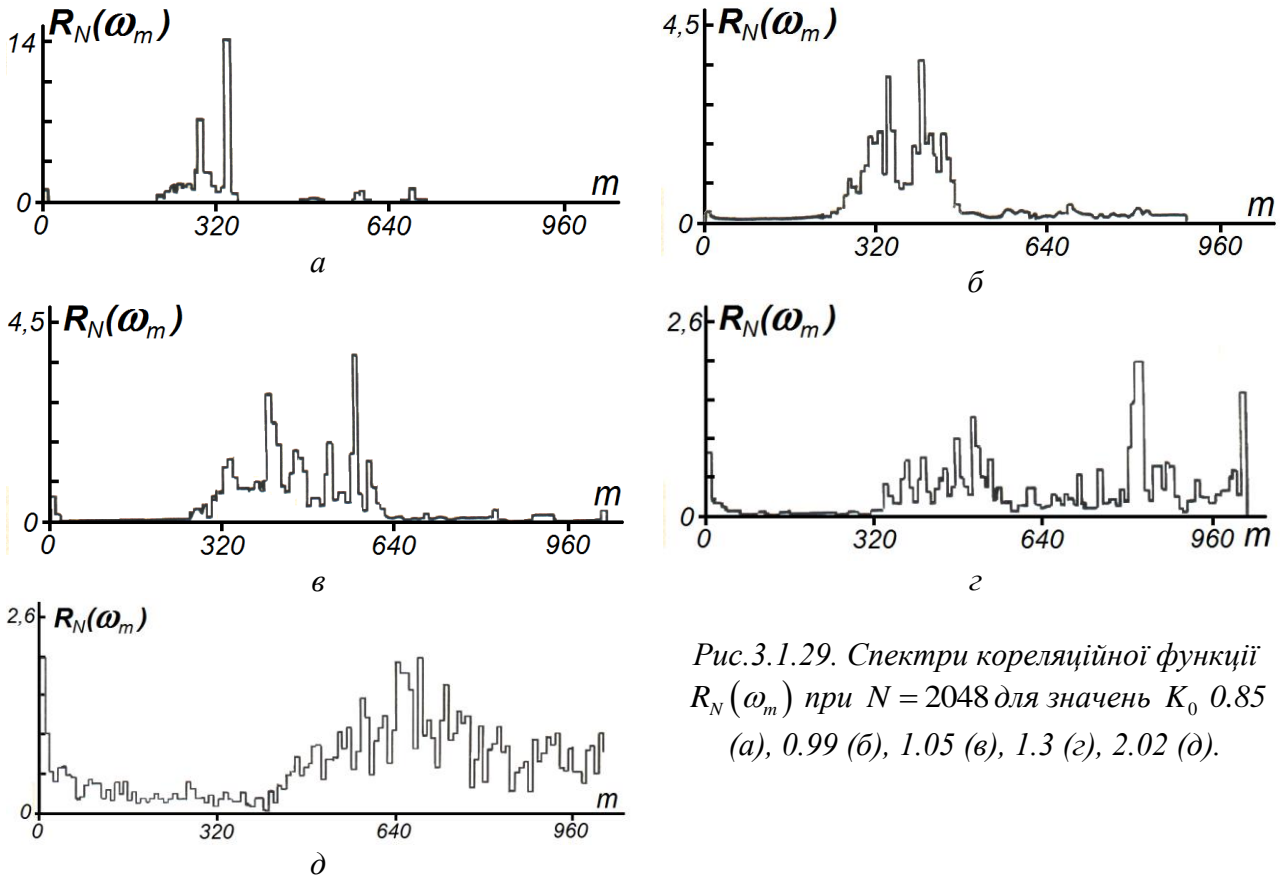


Рис.3.1.29. Спектри кореляційної функції  $R_N(\omega_m)$  при  $N = 2048$  для значень  $K_0$  0.85 (а), 0.99 (б), 1.05 (в), 1.3 (г), 2.02 (д).

<sup>47</sup> Дані взяті з роботи: Beloshapkin V.V., Zaslavskii G.M. // Phys. Lett. 1983. V.97A. P.121.

Зображувальна точка, що потрапила з області стохастичного руху на межу острівця, затримується там надовго (як уже вказувалося в п. 3.1.5.4, це відповідає ефекту переміжності, коли стохастична динаміка чергується з ділянками квазігармонічних коливань). В результаті в спектрі виникають локальні максимуми на частотах, що відповідають коливанням в околі центрів острівців різних порядків. Острівці найбільшого розміру (і найнижчого порядку) визначають низькочастотну межу спектру (так званий центральний пік), острівці найменшого розміру – високочастотну. Видно, що зі зростанням параметра  $K_0$  спектр розширюється (що, втім, узгоджується й зі співвідношеннями (3.1.127) та (3.1.125)).

На ділянках фазових траєкторій поблизу меж острівців властивості локальної нестійкості змінюються: розбігання сусідніх зображувальних точок відбувається не за експоненціальним законом,  $d(t) \sim \exp(\lambda t)$ , а за лінійним законом –  $d(t) \sim t$ . В результаті при  $t \rightarrow \infty$  кореляційна функція спадає за гіперболічним законом:  $R(t) \sim t^{-\alpha}$ , де  $\alpha \sim 1$ .

### Контрольні питання до підрозділу 3.1.5

1. Які реальні системи можуть, на Вашу думку, бути описані моделлю універсального відображення?
2. Який характер нелінійності має осцилятор, що відповідає моделі стандартного відображення?
3. Що є причиною утворення острівців вищих порядків на фазовому портреті стандартного відображення?
4. Опишіть і поясніть залежність часу перемішування за кутом від властивостей моделі нелінійного осцилятора, на який діють короткі удари.
5. За яких умов час перемішування за дією для стандартного відображення буде значно меншим від часу перемішування за кутом?
6. Опишіть вигляд фазової траєкторії в системі, яка породжує універсальне відображення.

### Задачі до підрозділу 3.1.5

3.1.5.1. Доведіть, що стандартне відображення

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left( 1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right)$$

буде нестійким при  $K > 0$  та при  $K < -4$ , де  $K = \varepsilon \alpha \omega_0 T \cos \theta$ .

3.1.5.2\*. За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет стандартного відображення

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left( 1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right)$$

для різних значень параметра  $K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T$ .

3.1.5.3\*. Конкретизуйте універсальне відображення

$$\bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega(\bar{I}) T + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial I}$$

для випадку частинки, що рухається в полі з потенціалом

а)  $\varphi(x) = \sin x$ ;

б)  $\varphi(x) = \sin^3 x$ ;

в)  $\varphi(x) = \sin^5 x$ ,

на яку діє періодична послідовність коротких імпульсів сили. За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет такого відображення для різних значень параметрів моделі, які відповідають майже регулярному руху, утворенню глобального хаосу та проміжному випадку.

3.1.5.4. Для відображення

$$\bar{I} = I + K_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi}$$

знайдіть значення мультиплікаторів у нерухомих точках.

3.1.5.5. Оцініть час перемішування для математичного маятника, на який діють імпульси заданої амплітуди  $A$  тривалістю  $\tau$  з періодом повторення  $T$  ( $\omega_0 \tau \ll 1$ ,  $\tau/T \ll 1$ ).

### **Висновки до розділу 3.1**

1. Для інтегровних гамільтонівських систем із багатьма ступенями вільності (які складають незначну частку всіх гамільтонівських систем) можна ввести змінні дія-кут таким чином, що гамільтоніан залежить лише від дій, а рух є періодичним по всіх кутах із періодом  $2\pi$ . У фазовому просторі рух інтегровних систем можна зобразити як обертання по спіралі, намотаній на поверхню багатовимірного тора. При переході від одного тора до іншого частоти обертання змінюються. Тори називаються резонансними, якщо існує лінійна комбінація частот із цілими коефіцієнтами, що обертається в нуль, і нерезонансними в протилежному випадку.
2. Відповідно до теореми Колмогорова - Арнольда - Мозера, додавання малого неінтегровного збурення до гамільтоніану невідродженої інтегровної системи приводить до того, що нерезонансні тори лише трохи деформуються, а характер руху на них зберігається. Резонансні тори руйнуються, і на їхніх місцях утворюються області складного руху, розміри яких зменшуються зі збільшенням порядку резонансу. В першому наближенні фазові траєкторії в цих областях відповідають резонансній параметричній взаємодії коливань (внутрішньому нелінійному резонансу). Для систем, у яких кількість ступенів вільності не перевищує двох, області складного руху відділені одна від одної незруйнованими нерезонансними торами. Для систем із більшою кількістю ступенів вільності області складного руху зливаються в єдину мережу – павутину Арнольда, рухаючись по якій, зображувальна точка може відійти як завгодно від свого початкового положення.
3. Відповідно до теореми Пуанкаре - Біркгофа, під дією малого неінтегровного збурення в гамільтоніані системи з двома ступенями вільності резонансні тори послідовно розшаровуються, так що в перерізі від них залишаються лише скінченна кількість еліптичних та гіперболічних точок (центрів і сідел), що чергуються. Навколо еліптичних точок різних порядків виникають острівці регулярного руху, навколо гіперболічних точок – гетероклінічні структури, де рух виявляється надзвичайно складним і нестійким.
4. Існує безпосередня аналогія між фазовим простором гамільтонівської системи з півтора ступенями вільності та картиною магнітного поля в тороїдальних пастках для утримання гарячої плазми (токамаки, стеларатори). Зокрема, збурення магнітного поля (наприклад, за рахунок провідників, які підводять струм до котушок, що формують магнітне поле) приводить до руйнування резонансних магнітних поверхонь, для яких частоти обертання навколо головної та допоміжної осей тора співвідносяться як невеликі цілі числа.
5. При подальшому зростанні неінтегровної частини гамільтоніану системи з двома ступенями вільності відбувається перекриття нелінійних резонансів, коли нерезонансні тори, що розділяють області складного руху, руйнуються, і ці області зливаються в єдине хаотичне море. В результаті система переходить до стану глобального хаосу. Нехтуючи наявністю острівців регулярного руху, глобальний хаос можна ототожнити з перемішуванням, коли будь-яка фазова крапля з часом розмазується по всій області фазового простору, в якій відбувається еволюція системи.
6. У фазовому просторі гамільтонівських систем із перемішуванням існують стійкі та нестійкі напрямки. Розбігання сусідніх зображувальних точок у цих напрямках, що відбувається за експоненціальним законом, характеризують показники Ляпунова. Сума всіх додатних показників Ляпунова, усереднена по області фазового простору, в



якій відбувається еволюція системи, називається ентропією Колмогорова - Синає (КС-ентропією) і кількісно характеризує процес перемішування. Обернена до КС-ентропії величина – час перемішування – визначає час, протягом якого поведінка системи ще залишається передбачуваною. Про наявність перемішування можна судити також за спектральною інтенсивністю досліджуваного процесу: для систем із квазіперіодичним рухом ця величина виходить дискретною, для систем із перемішуванням – неперервною.

7. Метод точкових відображень (відображень Пуанкаре) дозволяє в багатьох випадках спростити аналіз хаотичної динаміки, зокрема, шляхом зменшення розмірності фазового простору. При цьому відбувається перехід від неперервного часу до дискретного. Аналогом граничних циклів для точкових відображень виступають нерухомі точки (в тому числі кратні нерухомі точки), аналогом показників Ляпунова – мультиплікатори.
8. Застосування методу точкових відображень до задачі про вимушені коливання нелінійного осцилятора під дією періодичної послідовності коротких ударів (побудова стандартного відображення) дозволяє проілюструвати ланцюжок переходів від інтегрованої системи до виникнення глобального хаосу і кількісно визначити умови таких переходів.

### ***Контрольні питання до розділу 3.1***

1. Які переваги має метод точкових відображень при аналізі хаотичної динаміки систем із зосередженими параметрами?
2. Опишіть якісно зміну поведінки гамільтонівської системи при збільшенні (від нуля) неінтегровного доданку в гамільтоніані.
3. Яку стадію розвитку нестійкості характеризують показники Ляпунова, КС-ентропія та час перемішування?
4. Чи є нестійкими системи, близькі до інтегровних? Відповідь обґрунтувати.
5. Яка частка від усіх гамільтонівських систем може демонструвати стохастичну динаміку?

## Розділ 3.2. Хаос у дисипативних системах

У попередньому розділі 3.1 розглядалася хаотична динаміка гамільтонівських систем. Однак значна частина реальних систем (зокрема, практично всі макросистеми) є дисипативними.

Очевидно, в дисипативних системах підтримання стохастичних коливань можливе лише за рахунок надходження енергії ззовні, тобто такі системи обов'язково мають бути відкритими (див. вище частину I). Тому всі такі системи з обмеженим числом ступенів вільності можна інтерпретувати як генератори шуму.

У цьому розділі ми спочатку розглянемо загальні властивості хаотичної динаміки в дисипативних системах, а потім розберемо два приклади таких систем – автогенератор із параметричним збудженням, якому відповідає стандартне дисипативне відображення, та генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича<sup>1</sup>.

### 3.2.1. Загальні властивості хаотичного руху дисипативних систем

У дисипативних системах стохастична динаміка має свою специфіку. Виявляється, що стохастична динаміка дисипативних систем еквівалентна існуванню в їхньому фазовому просторі деякого особливого об'єкта – дивного атрактора.

#### 3.2.1.1. Прості атрактори

Для дисипативних систем теорема Ліувілля вже не справджується, і об'єм фазової краплі з часом змінюється. Він може як зростати, так і зменшуватись, але в середньому з часом він зменшується (це добре видно на прикладі автогенератора, див. рис. 3.2.1). В результаті при  $t \rightarrow +\infty$  всі зображувальні точки опиняються на деякій підмножині фазового простору з нульовою мірою, яка називається атрактором. Точніше кажучи, атрактор – це деяка підмножина  $B$  фазового простору, що задовольняє таким умовам:

- вона інваріантна щодо дії оператора потоку,  $F_t B = B$ ;
- існує деякий окіл  $U$ , що стискається до  $B$  під дією оператора потоку;
- множину  $B$  не можна розбити на дві інваріантні підмножини, що не перетинаються.

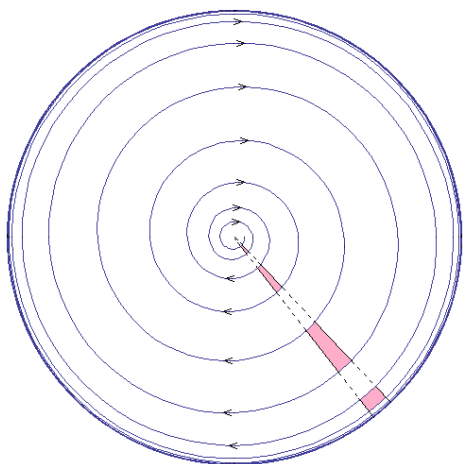


Рис. 3.2.1. Зміна об'єму фазової краплі на фазовій площині автогенератора.

Прикладами атракторів на фазовій площині можуть бути стаціонарні точки (стійкий

<sup>1</sup> С.В.Кияшко (Сергей Васильевич Кияшко, нар. 1947) – співробітник Інституту прикладної фізики РАН (м. Нижній Новгород). Зараз займається радіолокаційним зондуванням океану. А.С. Піковський (Аркадий Самуїлович Піковський, нар. 1956) – російський та німецький фізик-теоретик. Працює в галузі статистичної теорії хаосу (Інститут прикладної фізики РАН, м. Нижній Новгород; університети Вупертала та Потсдама). М.І. Рабинович (Михаил Израилевич Рабинович, нар. 1941) – російський фізик-теоретик, член-кореспондент РАН (1991). Основні роботи присвячені релаксаційним коливанням у нелінійних середовищах, динамічному хаосу та турбулентності.

фокус, стійкий вузол) та стійкі граничні цикли.

У фазовому просторі з розмірністю вище трьох, крім стаціонарних точок та граничних циклів, з'являється ще один різновид атракторів – багатовимірні інваріантні тори, що відповідають автоколиванням із кількома некротними частотами.

Всі згадані типи атракторів називають простими атракторами.

Крім атракторів, у фазовому просторі дисипативних систем можуть існувати й такі об'єкти, до яких зображувальні точки з деякого околу притягаються при  $t \rightarrow -\infty$ . Такі об'єкти дістали назву репелерів. Репелери, як і атрактори, інваріантні щодо дії оператора потоку. Прикладами репелерів можуть служити нестійкий фокус, нестійкий вузол та нестійкий граничний цикл.

Відзначимо, що вже в тривимірному фазовому просторі можуть існувати атрактори, що є комбінаціями стійкого та нестійкого типів (рис. 3.1.19 в та 3.2.2 а-г).

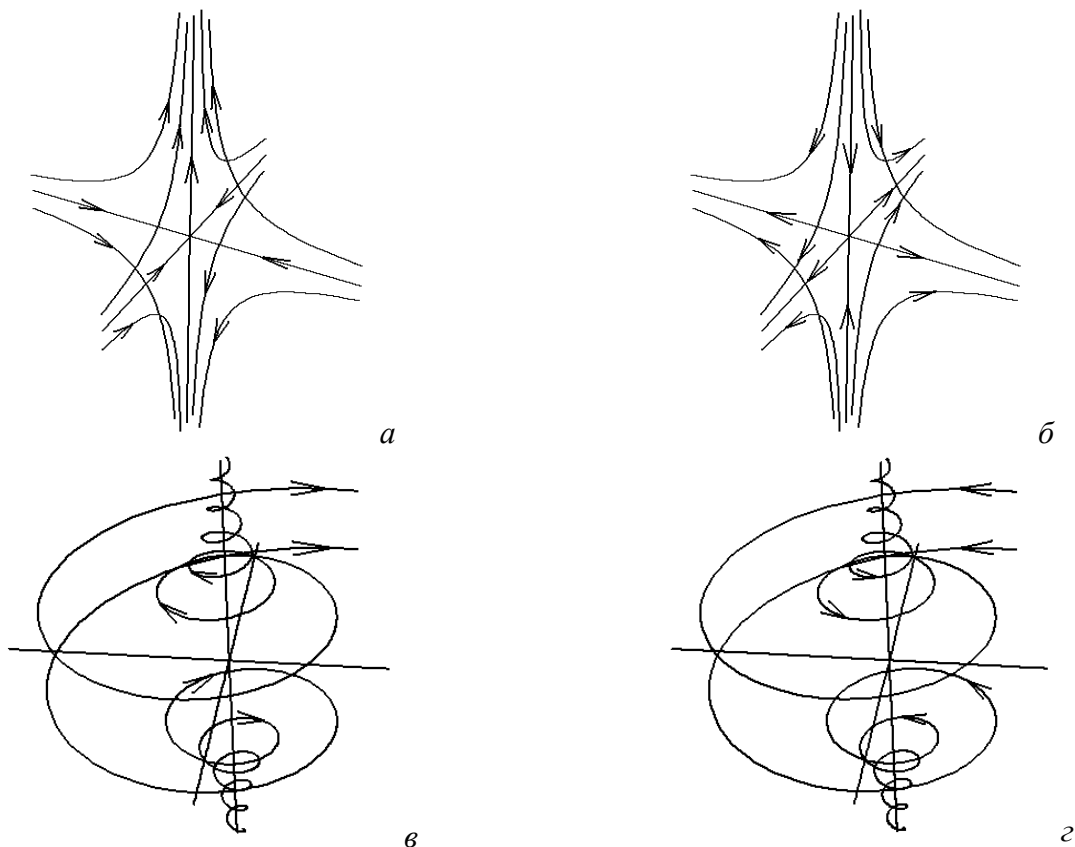


Рис. 3.2.2. Особливі точки типу сідло-вузол (а, б) та сідло-фокус (в, г) у тривимірному фазовому просторі.

### 3.2.1.2. Дивні атрактори

Крім простих атракторів, у фазовому просторі можуть існувати ще так звані дивні атрактори, які не є ні стаціонарними точками, ні граничними циклами, ні інваріантними торами. Вони поєднують стійкість із нестійкістю. Зображувальні точки з часом притягаються до дивного атрактора, але на самому атракторі сусідні зображувальні точки з часом розбігаються, тобто має місце нестійкість (щось схоже має місце для стаціонарних точок типу сідло-фокус та сідло-вузол, рис.3.2.2).

Поняття дивного атрактора було введено Д.Рюеллем та Ф.Такенсом<sup>2</sup>. Зупинимося на ньому більш детально.

<sup>2</sup> Д.Рюэль, Ф.Такенс. В кн.: «Странные аттракторы». М., Мир, 1981. С. 117-151. Д.Рюелль (David Pierre Ruelle, нар. 1935) – бельгійський та французький фізик і математик. Працює в галузі математичної фізики та теорії динамічних систем. Ф.Такенс (Floris Takens, 1940-2010) – голландський математик. Займався хаотичними динамічними системами.

Прості атрактори є підмножинами фазового простору динамічних систем. Підмножина простору  $M$  – це будь-яка підмножина  $W$  простору  $M'$  ( $M'$  включається до  $M$ ), яка має в кожній точці єдину дотичну гіперплощину, тобто  $W$  вкладена в  $M$  гладенько. Наприклад, граничний цикл та двовимірний інваріантний тор – це приклади одновимірного та двовимірного підмножин.

Але у фазовому просторі дисипативних систем з розмірністю не менше трьох можуть існувати обмежені притягальні множини, що є атракторами, але при цьому не є підмножинами. Саме такі об'єкти називаються дивними атракторами.

Дивні атрактори мають надзвичайно складну геометричну структуру: вони належать до фракталів і характеризуються нецілою геометричною розмірністю<sup>3</sup>.

Поведінка фазових траєкторій на дивному атракторі аналогічна поведінці у гамільтоновських системах із перемішуванням, їй відповідає стохастична динаміка системи. Зокрема, на дивному атракторі можна визначити КС-ентропію та час перемішування.

Зміна огрубленого фазового об'єму для дисипативної системи, що має дивний атрактор у фазовому просторі, визначається співвідношенням:

$$\Delta G(t) = \Delta G_0 \exp[h(t - t_0)]. \quad (3.2.1)$$

Час  $t_0$  у формулі (3.2.1) повинен задовольняти умові  $t_0 > t_0^*$ , де  $t_0^*$  – час, за який зображувальні точки, що належать фазовій краплі  $\Delta G_0$ , потрапляють на дивний атрактор.

Із викладеного вище зрозуміло, що дивні атрактори можуть існувати лише в таких дисипативних системах, які є відкритими (до яких надходить енергія ззовні).

### 3.2.1.3. Квазіатрактори

Крім дивних атракторів, у фазовому просторі дисипативних систем можуть існувати й такі об'єкти, які містять значну кількість стійких траєкторій періодичного руху, але з дуже малими областями притягання. За рахунок флуктуацій, які відіграють роль випадкової зовнішньої сили, зображувальна точка може перестрибувати з однієї стійкої траєкторії на іншу. В результаті рух системи сприймається як хаотичний. Такі об'єкти у фазовому просторі прийнято називати квазіатракторами.

Інший варіант квазіатрактора реалізується тоді, коли фазова траєкторія дисипативної динамічної системи має надзвичайно складну форму, але врешті решт прямує до простого атрактора. По-перше, час спостереження за рухом системи може виявитися меншим від часу її наближення до простого атрактора<sup>4</sup>. По-друге, наявність флуктуацій може відкидати систему від простого атрактора, повертаючи її на траєкторію складного руху. В обох випадках рух системи зовні сприйматиметься як стохастичний.

Отже, про квазіатрактори говорять тоді, система не має дивного атрактора, але її рух сприймається як стохастичний через наявність флуктуацій або недостатньо тривалий час спостереження.

### 3.2.1.4. Сценарії переходу до хаосу

У консервативних системах перехід від регулярного до хаотичного руху відбувається при зростанні неінтегровного доданку в гамільтоніані (див. вище пп. 3.1.1-3.1.3). При цьому поріг величини неінтегровного доданку, необхідний для виникнення хаотичної динаміки, відповідно до теореми КАМ, відсутній. Можна говорити лише про момент переходу до глобального хаосу, зумовлений перекриттям нелінійних резонансів відповідно до критерію Чирікова.

У дисипативних системах перехід від стійкого стаціонарного стану до хаотичного руху відбувається при зміні деякого керувального параметра, який може характеризувати ступінь нерівноважності системи. Зміна керувального параметра (або набору таких параметрів)

<sup>3</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.254-256.

<sup>4</sup> Цей випадок відповідає замкненій дисипативній системі, яка в початковий момент часу є сильно нерівноважною (має великий запас вільної енергії). Тоді простим атрактором буде стійка стаціонарна точка.

породжує послідовність біфуркацій, яка врешті рещт приводить до встановлення хаотичної динаміки. Така послідовність біфуркацій відома як сценарій переходу до хаосу.

В реальних системах, як правило, існує кілька керувальних параметрів, тому до того самого стану хаотичної динаміки можна прийти різними шляхами. В результаті в одній і тій самій системі можна спостерігати кілька відмінних один від одного сценаріїв переходу до хаосу. Отже, такі сценарії не є однозначними характеристиками певної системи. В той же час вони розкривають можливі механізми переходу від стійкого стаціонарного стану до хаотичного руху, і через те вивчення різних сценаріїв переходу до хаосу поглиблює розуміння даної проблеми.

На сьогодні найбільш відомі три сценарії переходу до хаосу: сценарій Рюелля - Таке-нса (послідовне збудження коливань на трьох несумірних частотах, після чого система спонтанно переходить у хаотичний стан), сценарій Фейгенбаума<sup>5</sup> (послідовність подвоєння періодів автоколивань; в літературі зустрічаються повідомлення й про потроєння періодів) та сценарій Помо - Манневільля<sup>6</sup> (перехід до хаосу через переміжність; як відзначалося в п. 3.1.5.4, 3.1.5.6, така поведінка можлива й у консервативних системах)<sup>7</sup>.

### *Контрольні питання до підрозділу 3.2.1*

1. Чому в фазовому просторі дисипативних систем виникають атрактори?
2. Порівняйте перемішування та його характеристики в гамільтонівських та дисипативних системах.
3. Назвіть особливості хаотичної динаміки дисипативних систем у порівнянні з гамільтонівськими.
4. Як, на вашу думку, виглядає граничний перехід між гамільтонівськими та дисипативними системами з хаотичною динамікою?
5. Які властивості дивних атракторів у фазовому просторі дисипативних систем Вам відомі?
6. Які геометричні властивості дивних атракторів Вам відомі?

### *Задачі до підрозділу 3.2.1*

3.2.1.1. Знайдіть, як буде змінюватися з часом об'єм малої фазової краплі для:

- а) лінійного слабко дисипативного ( $\delta < \omega_0$ ) осцилятора;
- б) лінійного сильно дисипативного ( $\delta > \omega_0$ ) осцилятора;
- в) дисипативного осцилятора з уявною частотою ( $\omega_0^2 < 0$ ).

3.2.1.2. Знайдіть, як буде змінюватися з часом об'єм малої фазової краплі для автогенератора квазігармонічних коливань, описуваного рівнянням Релея, якщо в початковий момент часу вона знаходиться

- а) поблизу початку відліку;
- б) за межами області, оточеної граничним циклом.

3.2.1.3. Знайдіть, як буде змінюватися з часом об'єм малої фазової краплі для автогенератора квазігармонічних коливань, описуваного рівнянням Ван-дер-Поля, якщо в початковий момент часу вона знаходиться

- а) поблизу початку відліку;
- б) за межами області, оточеної граничним циклом.

### **3.2.2. Автогенератор із параметричним збудженням**

Порівняно простим прикладом дисипативної динамічної системи, яка демонструє хао-

<sup>5</sup> М.Фейгенбаум (Mitchell Jay Feigenbaum, нар. 1944) – американський фізик і математик, один з піонерів теорії хаосу. Працював у Лос-Аламоській національній лабораторії.

<sup>6</sup> І.Помо (Yves Pomeau, нар. 1942) – французький фізик, займається гідродинамікою та теорією пружності. Працював у Вищій нормальній школі (Франція), пізніше в університеті Арізони (США). П.Манневільль (Paul Manneville, нар. 1946) – французький фізик, відомий роботами в галузі гідродинаміки, нелінійної динаміки, теорії хаосу. Працює в Політехнічній школі (Франція).

<sup>7</sup> Детальніше див.: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 209. С.256-258.

тичну поведінку, може служити автогенератор, що збуджується параметрично. Цю модель, запропоновану Г.М.Заславським<sup>8</sup>, навряд чи можна реалізувати в експерименті. Але для неї вдається порівняно просто побудувати відображення, яке відоме в літературі як стандартне дисипативне відображення, а також аналітично дослідити вигляд дивного атрактора.

### 3.2.2.1. Побудова моделі

Розглянемо динамічну систему, що описується гамільтоніаном вигляду

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta) f(t). \quad (3.2.2)$$

Цей гамільтоніан породжує рівняння руху у формі

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} f(t), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} f(t), \quad \omega(I) \equiv \frac{\partial H_0}{\partial I} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

(пор. з формулами (3.1.109 а)).

Тепер введемо до моделі дисипацію. Припустимо, що за відсутності збурення (при  $\varepsilon = 0$ ) система має стійкий граничний цикл при  $I = I_0$ . Тоді рівняння руху матимуть вигляд

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0), \quad \dot{\theta} = \omega(I). \quad (3.2.4)$$

Рівняння (3.2.4) якісно подібні до вкорочених рівнянь для інтенсивності та фази автогенератора типу Ван-дер-Поля (поблизу стійкого граничного циклу). Вони описують усталення коливань в автогенераторі. Усталені коливання такого автогенератора характеризуються значенням дії  $I_0$  (нагадаємо, що дія пов'язана з амплітудою коливань) та частотою  $\omega_0 \equiv \omega(I_0)$ . Залежність  $\omega(I)$  враховує неізохронність коливань автогенератора.

Додавши до рівнянь (3.2.4) малі доданки з рівнянь (3.2.3), можна отримати:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\gamma(I - I_0) - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} f(t), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} f(t). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Рівняння (3.2.5) і описують модель, яка розглядатиметься нижче.

Зробимо деякі додаткові спрощення, аналогічні тим, які були прийняті при отриманні стандартного відображення (п. 3.1.5.2). По-перше, вважатимемо зовнішню силу періодичною з періодом  $T$ :  $f(t+T) = f(t)$ . По-друге, оберемо потенціал збурення у найпростішій формі:

$$V(I, \theta) = V(\theta) = \frac{I_0}{T} \cos \theta. \quad (3.2.6)$$

(тим самим ми однозначно визначаємо безрозмірну константу  $\varepsilon$ ).

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$y = \frac{I - I_0}{I_0}, \quad x = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \Gamma = \gamma T. \quad (3.2.7)$$

Введена таким чином змінна  $y$  являє собою безрозмірну віддаль (за дією  $I$ ) від зображуваної точки до граничного циклу,  $x$  та  $\tau$  – відповідно нормований кут та безрозмірний час.

В результаті рівняння (3.2.5) набувають вигляду:

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y - \varepsilon f(\tau) \cos 2\pi x, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega(y)T}{2\pi}. \quad (3.2.5 \text{ а})$$

Рівняння (3.2.5 а) описують автогенератор, на який діє сила, що залежить від фази ко-

<sup>8</sup> Zaslavsky G.M. // Phys. Lett., **69A**, 145 (1978). Г.М. Заславський (Георгий Моисеевич Заславский, 1935-2008) – російський та американський фізик-теоретик. Народився в м. Одесі. Працював в Інституті ядерної фізики Сибірського відділення АН СРСР (м. Новосибірськ), Інституті фізики Сибірського відділення АН СРСР (м. Красноярськ), Інституті космічних досліджень АН СРСР (м. Москва), Інституті математики ім. Куранта Нью-Йоркського університету (з 1991 р.). Зробив значний внесок у розвиток теорії динамічного хаосу.

ливань. Таку силу можна назвати параметричною.

Продовжимо спрощувати модель. Функцію  $\omega(y)$  розкладемо в ряд Тейлора, обмежившись лінійним доданком:

$$\omega(y) = \omega_0(1 + \alpha y), \quad (3.2.8)$$

де  $\alpha$  – безрозмірний параметр нелінійності.

Нарешті, конкретизуємо вигляд функції  $f(\tau)$ . Як і при побудові універсального відображення (п. 3.1.5.1), вважатимемо, що ця функція являє собою періодичну послідовність коротких ударів:

$$f(\tau) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n). \quad (3.2.9)$$

Підставляючи (3.2.8)-(3.2.9) до (3.2.5 а), отримаємо остаточну форму рівнянь руху досліджуваної системи:

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y + \varepsilon \cos 2\pi x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha y). \quad (3.2.5 б)$$

Рівняння (3.2.5 б) описують автогенератор, на який діє періодична послідовність коротких ударів, причому величина і знак сили залежить від фази коливань.

### 3.2.2.2. Побудова стандартного дисипативного відображення

Можна вважати, що структура фазового простору для системи (3.2.5 б) аналогічна до задачі про рух нелінійного консервативного осцилятора під дією послідовності коротких ударів, яка приводить до стандартного відображення (див. п. 3.1.5.2).

Аналогічно до названої задачі можна вважати, що рух системи можна розділити на миттєву зміну дії під впливом миттєвих ударів та вільні коливання, що описуються системою (3.2.4).

Зміна величин  $x$  та  $y$  в результаті удару знаходиться в результаті інтегрування рівнянь (3.2.5 б) на проміжку від моменту  $\tau_0 - 0$  перед ударом до моменту  $\tau_0 + 0$  після удару:

$$y(\tau_0 + 0) = y(\tau_0 - 0) + \varepsilon \cos[2\pi x(\tau_0 - 0)], \quad x(\tau_0 - 0) = x(\tau_0 + 0). \quad (3.2.10)$$

На проміжку від моменту  $\tau_0 + 0$  після удару до моменту  $\tau_0 + 1 - 0$  перед наступним ударом зміна величин  $x$  та  $y$  визначається співвідношеннями, які можна отримати в результаті інтегрування рівнянь (3.2.5 б):

$$y(\tau_0 + 1 - 0) = y(\tau_0 + 0) \exp(-\Gamma), \quad (3.2.11)$$

$$x(\tau_0 + 1 - 0) = x(\tau_0 + 0) + \frac{T}{2\pi} \int_{\tau_0 + 0}^{\tau_0 + 1 - 0} \omega[y(\tau)] d\tau = x(\tau_0 + 0) + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)] y(\tau_0 + 0).$$

Об'єднуючи співвідношення (3.2.10) та (3.2.11), можна записати:

$$\bar{y} = (y + \varepsilon \cos 2\pi x) \exp(-\Gamma),$$

$$\bar{x} = x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)] (y + \varepsilon \cos 2\pi x) = x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha \mu y) + \frac{K_0 \mu}{2\pi} \cos 2\pi x, \quad (3.2.12)$$

де використано позначення

$$\mu = \frac{1}{\Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)], \quad K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T \quad (3.2.13)$$

Врахувавши, що кут  $\theta$  змінюється на проміжку  $[0, 2\pi[$ , а величина  $x$  – відповідно на проміжку  $[0, 1[$ , перепишемо відображення у формі

$$\bar{y} = (y + \varepsilon \cos 2\pi x) \exp(-\Gamma),$$

$$\bar{x} = \left\{ x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha \mu y) + \frac{K_0 \mu}{2\pi} \cos 2\pi x \right\}, \quad (3.2.12 а)$$

де фігурні дужки, як і раніше, позначають дробову частину числа.

Перейшовши в систему відліку, що обертається (це дозволяє виключити постійний поворот на кут  $\omega_0 T$ ), і скориставшись позначенням

$$z = y \frac{\alpha \mu \omega_0 T}{2\pi} \exp(\Gamma), \quad (3.2.14)$$

запишемо остаточно:

$$\bar{z} = z \exp(-\Gamma) + \frac{\mu K_0}{2\pi} \cos 2\pi x, \quad \bar{x} = \{x + \bar{z}\}. \quad (3.2.12 \text{ б})$$

Будемо називати відображення (3.2.12 б) стандартним дисипативним відображенням. Нагадаємо, що змінна  $z$  відповідає нормованому відхиленню дії від значення, що відповідає усталеним коливанням, а змінна  $x$  – відхиленню фази коливань від значення  $\omega_0 t$ .

Якщо  $\Gamma \rightarrow 0$ , то  $\mu = 1$ , і відображення (3.2.12 б) переходить (з точністю до позначень та перенормувань) у стандартне відображення (3.1.115 в), властивості якого були детально розібрані у пп. 3.1.5.3-3.1.5.6.

### 3.2.2.3. Нерухомі точки, мультиплікатори та умова виникнення стохастичності

Нерухомі точки стандартного дисипативного відображення знаходяться із співвідношень

$$z^* = z^* \exp(-\Gamma) + \frac{\mu K_0}{2\pi} \sin 2\pi x^*, \quad x^* = \{x^* + z^*\}. \quad (3.2.12 \text{ в})$$

З другого рівняння (3.2.12 в) випливає, що  $z^*$  – довільне ціле число. Відповідні йому значення  $x^*$  легко визначаються з першого рівняння (3.2.12 в). В результаті отримуємо:

$$z^* = n, \quad x_1^* = \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( 2\pi \frac{\Gamma}{K_0} n \right) + m, \\ x_2^* = -\frac{1}{2\pi} \arcsin \left( 2\pi \frac{\Gamma}{K_0} n \right) + m + \frac{1}{2}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.15)$$

(кожному значенню  $z^*$  відповідають два значення  $x^*$ ). Зокрема, при  $n = m = 0$  маємо:  $z^* = 0$ ,  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1/2$ .

Матриця  $b_{ij}$  (див. формулу (3.1.88)) має вигляд:

$$b_{ij} = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{z})}{\partial(x, z)} = \begin{bmatrix} 1 - \mu K_0 \sin 2\pi x & -\mu K_0 \sin 2\pi x \\ \exp(-\Gamma) & \exp(-\Gamma) \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Тоді якобіан відображення (3.2.12 б) визначається співвідношенням

$$J = \det(b_{ij}) = \exp(-\Gamma) < 1, \quad (3.2.17)$$

тобто об'єм фазової краплі в процесі еволюції системи буде експоненціально зменшуватися з часом, що характерно для дисипативних систем.

Мультиплікатори  $\sigma_{1,2}$  знаходимо з рівняння (3.1.89)

$$\det(b_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0,$$

яке в нашому випадку набуває вигляду

$$\sigma^2 - \sigma [1 - \mu K_0 \sin 2\pi x + \exp(-\Gamma)] + \exp(-\Gamma) = 0. \quad (3.2.18)$$

Якщо виконано умову  $|\mu K_0 \sin 2\pi x| \gg 1 > \exp(-\Gamma)$ , то за теоремою Вієта<sup>9</sup> корені рівняння (3.2.18) можна оцінити як

<sup>9</sup> Ф. Вієт (François Viète, seigneur de la Bigotière, 1540 - 1603) – видатний французький математик, один з основоположників алгебри, за основною професією – юрист.



$$\alpha_1 \approx \mu K_0 \sin 2\pi x, \quad \alpha_2 \approx \frac{\exp(-\Gamma)}{\mu K_0 \sin 2\pi x}. \quad (3.2.18 \text{ а})$$

Як впливає з рівнянь (3.2.12 б),

$$\left| \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} - 1 \right| = \mu K_0 |\sin 2\pi x|. \quad (3.2.19)$$

Тоді умову локальної нестійкості для  $x$  можна записати у формі

$$\mu K_0 = \frac{K_0}{\Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)] \gg 1 \quad (3.2.20)$$

(пор. з умовою  $K_0 \gg 1$  для стандартного відображення, див. п. 3.1.5.4). Якщо  $\Gamma \geq 1$ , умову локальної нестійкості (3.2.20) можна переписати у формі

$$K_0 \gg \Gamma. \quad (3.2.20 \text{ а})$$

#### 3.2.2.4. Структура дивного атрактора

Спробуємо аналітично дослідити структуру дивного атрактора, який відповідає системі, описуваній рівняннями (3.2.5 б). Розглядатимемо відображення (3.2.12 а).

Припустимо, що  $\Gamma \geq 1$ , так що  $\exp(-\Gamma) \ll 1$ . Тоді можна вважати, що ліва частина першого з рівнянь (3.2.12 а) є малою. Це, в свою чергу, означає, що в дужках у правій частині цього рівняння перший доданок можна вважати значно меншим від другого. Знехтувавши цим малим доданком, запишемо:

$$y = \varepsilon \exp(-\Gamma) \cos 2\pi x. \quad (3.2.21)$$

(тут і нижче риси над  $x$  та  $y$  опускаємо).

За допомогою цього рівняння можна подати  $\cos(2\pi x)$  через  $y$  і підставити цей вираз до другого з рівнянь (3.2.12 а). Тоді воно набуде вигляду

$$x = \left\{ x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} y \exp(\Gamma) \right\}$$

(ми послідовно відкинули  $\exp(-\Gamma)$  поруч із одиницею). Нарешті, припустимо, що  $\omega_0 T \geq 2\pi$ , і знехтуємо  $x$  поруч із цією величиною, оскільки  $0 < x < 1$ . Отримаємо:

$$x = \left\{ \frac{\omega_0 T}{2\pi} \left[ 1 + y \frac{\alpha}{\Gamma} \exp(\Gamma) \right] \right\}. \quad (3.2.22)$$

Рівняння (3.2.22) визначає сім'ю відрізків на площині  $xy$ , які мають нахил

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\pi \Gamma}{\alpha \omega_0 T} \exp(-\Gamma). \quad (3.2.23)$$

Крайні значення  $y$  оцінимо зі співвідношення (3.2.21), взявши замість  $x$  нерухомі точки  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1/2$  (див. п. 3.2.2.3). Отримаємо відповідно:

$$y_1 = \varepsilon \exp(-\Gamma), \quad y_2 = -\varepsilon \exp(-\Gamma). \quad (3.2.24)$$

Значить,  $y$  змінюється в діапазоні значень  $\Delta y = 2\varepsilon \exp(-\Gamma)$ . Тоді, якби  $x$  змінювалося в довільних межах, відповідна зміна  $x$  склала б величину

$$\Delta x = \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Delta y = \frac{\varepsilon \alpha \omega_0 T}{\pi \Gamma}. \quad (3.2.25)$$

Насправді  $x$ , як уже говорилося, змінюється на відрізку  $[0, 1[$ . Тому графік залежності (3.2.22) буде складатися з окремих відрізків, кількість яких можна оцінити як цілу частину величини  $\Delta x$  (3.2.25).

Крайні точки залежності (3.2.22) за координатою  $x$  можна знайти з першого із співвідношень (3.2.12 а):

$$x_1 = \bar{x}(x_1^*, y=0) = \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{K_0}{2\pi\Gamma},$$

$$x_2 = \bar{x}(x_2^*, y=0) = \frac{1}{2} + \frac{\omega_0 T}{2\pi} - \frac{K_0}{2\pi\Gamma}. \quad (3.2.26)$$

Схематичне зображення графіка залежності (3.2.22) подане на рис. 3.2.3 а.

Насправді врахування доданків, відкинутих при отриманні формули (3.2.22), показує, що кожен відрізок на рис. 3.2.3 а розщеплюється на сім'ю подібних відрізків. У результаті графік дивного атрактора утворює множину канторівського типу, по якій і відбуваються стохастичні блукання зображуваної точки. Графік, отриманий в результаті числового розрахунку за формулами (3.2.12 а), поданий на рис. 3.2.3 б.

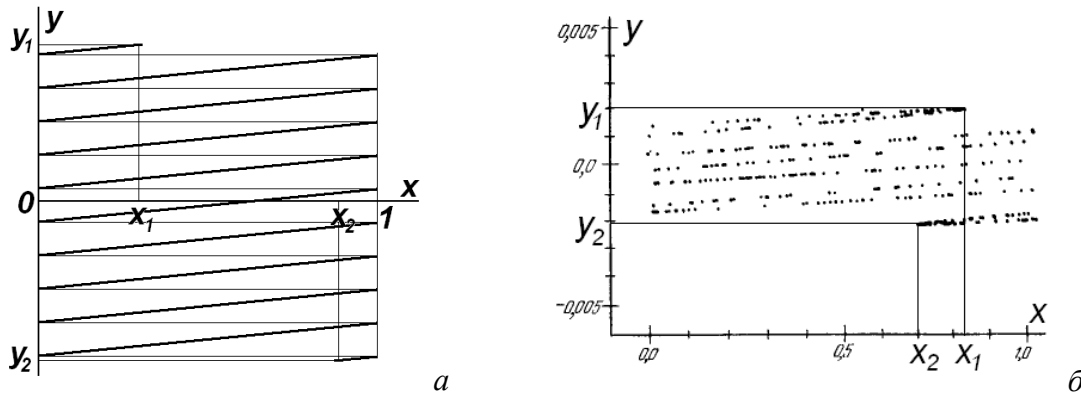


Рис. 3.2.3. Дивний аттрактор для стандартного дисипативного відображення:  
 а – схематичне зображення на основі формули (3.2.22);  
 б – результат числового розрахунку ( $\Gamma=5$ ,  $\alpha=0.3$ ,  $\varepsilon=0.3$ ,  $K_0=9.03$ ).

Збільшення дисипації призводить до зменшення кількості відрізків на рис. 3.2.3 а. Врешті рещт при дуже великих значеннях  $\Gamma$  дивний аттрактор “вмирає” – від нього залишаються тільки крайні точки. Це означає, що фазова траєкторія, по суті, збігається з граничним циклом, і на площині  $xu$  залишаються тільки точки перетину з цим циклом.

Формулою (3.2.22), взагалі кажучи, не можна користуватися при малих значеннях  $\Gamma$ . Тим не менше з неї впливає, що при малих  $\Gamma$  дивний аттрактор все більш щільно заповнює область фазового простору, де відбувається еволюція системи. Це відповідає граничному переходу при  $\Gamma \rightarrow 0$  до режиму перемішування, коли кожна фазова траєкторія (крім тих, що відповідають острівцям регулярного руху) щільно заповнює всю область фазового простору, де відбувається рух системи.

### 3.2.2.5. Оцінка фрактальної розмірності дивного атрактора

Нагадаємо спочатку визначення фрактальної (хаусдорфової) розмірності об'єкта в  $k$ -вимірному фазовому просторі.

Будемо покривати об'єкт  $k$ -вимірними кубами з ребром  $\varepsilon$ . Нехай для цього потрібно  $N(\varepsilon)$  кубів. Тоді фрактальна розмірність  $d_F$  визначається співвідношенням

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3.2.27)$$

Розглянемо тепер деяку двовимірну область, яка еволюціонує під дією відображення Пуанкаре. Нехай це відображення характеризується сталими (незалежними від номеру кроку) мультиплікаторами  $\sigma_{1,2}$ , причому  $|\sigma_1| < 1$ ,  $|\sigma_2| > 1$ .

Нехай на  $n$ -му кроці відображення розмір  $\varepsilon_n$ , який входить до формули (3.2.27), визначається співвідношенням  $\varepsilon_n = C|\sigma_1|^n$ , де  $C$  – деяка константа. Тоді  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При великих значеннях  $n$  досліджувана область являтиме собою вузьку смугу, довжина якої буде пропорційна до  $|\sigma_2|^n$ . Отже, число  $N_n \equiv N(\varepsilon_n)$  можна оцінити як

$$N_n = C_1 \frac{|\sigma_2|^n}{\varepsilon_n} = C_2 \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right|^n, \quad (3.2.28)$$

де  $C_{1,2}$  – деякі константи. Підставляючи (3.2.28) до (3.2.27), легко отримати, що

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_2 + n \ln \sigma_2 - n \ln \sigma_1}{\ln C - n \ln \sigma_1} = 1 + \frac{\ln \sigma_2}{\ln(1/\sigma_1)}. \quad (3.2.29)$$

Якщо відображення відповідає гамільтонівській системі, то для неї  $|\sigma_1 \sigma_2| = 1$ , і, відповідно до формули (3.2.29),  $d_F = 2$ . Це результат того, що за наявності перемішування стохастична траєкторія рівномірно заповнює область фазового простору, що відповідає фінитному рухові системи.

Для дисипативної системи об'єм фазової краплі з часом повинен стискатися, так що (принаймні для великих  $n$ , коли точки досліджуваної області наближаються до дивного атратора)  $|\sigma_1 \sigma_2| < 1$ , і, відповідно,  $1 < d_F < 2$ .

Повернемося тепер до стандартного дисипативного відображення ((3.2.12 б). Для нього мультиплікатори визначаються формулами (3.2.18 а). Вони залежать від  $x$ , а, отже, й від номера кроку. Тоді в формулі для фрактальної розмірності (3.2.29) мультиплікатори  $\sigma_{1,2}$  треба замінити їхніми середніми геометричними (по всіх кроках відображення) значеннями:

$$\sigma_{1,2} \rightarrow A_{1,2} \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sigma_{1,2}^{(1)} \sigma_{1,2}^{(2)} \sigma_{1,2}^{(3)} \dots \sigma_{1,2}^{(m)} \right|^{1/m}, \quad (3.2.30)$$

де верхній індекс у круглих дужках вказує на номер кроку.

Величина в правій частині (3.2.30) має не випадкову границю. Щоб знайти цю границю, подамо праву частину (3.2.30) у формі

$$A_{1,2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln |\sigma_{1,2}^{(i)}| \right\}. \quad (3.2.30 \text{ а})$$

Усереднення в правій частині (3.2.30 а) дає:

$$A_{1,2} = \exp \left\{ \langle \ln |\sigma_{1,2}| \rangle \right\}, \quad (3.2.30 \text{ б})$$

де використане позначення

$$\langle f(\alpha) \rangle = \int dx dy f[\alpha(x, y)] w(x, y), \quad (3.2.31)$$

$w(x, y)$  – стаціонарна функція розподілу на стохастичному атраторі.

Підставимо (3.2.30 б) до (3.2.29) з урахуванням заміни (3.2.30). Отримаємо:

$$d_F = 1 + \frac{\langle \ln A_2 \rangle}{\Gamma + \langle \ln A_2 \rangle} = 1 + \frac{h}{\Gamma + h}, \quad (3.2.32)$$

де  $h = \langle \ln A_2 \rangle$  – КС-ентропія (див. п. 3.1.3.8).

При малих  $h$  фрактальна розмірність дивного атратора близька до двійки. Для випадку  $|\mu K_0| \gg \Gamma \geq 1$  можна вважати, що  $h \approx \ln \mu K_0$ , і

$$d_F \approx 1 + \frac{h}{\Gamma + h} \approx 2 - \frac{\Gamma}{h} \approx 2 - \frac{\Gamma}{\ln(\mu K_0)}. \quad (3.2.32 \text{ а})$$

Як впливає з (3.2.32 а), фрактальна розмірність менша від двійки на величину, що дорівнює відношенню коефіцієнту дисипації (коефіцієнту стиснення фазового об'єму) до коефіцієнту розбіжності траєкторій (інкременту локальної нестійкості).

### Контрольні питання до підрозділу 3.2.2

1. Опишіть, як виглядає фазовий портрет системи, описуваної рівняннями

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y + \varepsilon \cos 2\pi x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha y).$$

2. Як змінюватиметься фрактальна розмірність дивного атрактора, що відповідає стандартному дисипативному відображенню, при зміні параметра  $\Gamma$  від нуля до нескінченності?

### Задачі до підрозділу 3.2.2

3.2.2.1. Покажіть, що система рівнянь

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y - \varepsilon f(\tau) \cos 2\pi x, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega(y)T}{2\pi}$$

з урахуванням співвідношення

$$\omega(y) = \omega_0 (1 + \alpha y)$$

справді зводиться до рівняння, коефіцієнт якого залежить від часу (рівняння параметричного осцилятора).

3.2.2.2\*. За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет, що відповідає стандартному дисипативному відображенню

$$\bar{z} = z \exp(-\Gamma) + \frac{\mu K_0}{2\pi} \cos 2\pi x, \quad \bar{x} = \{x + \bar{z}\}$$

для різних значень параметрів моделі.

### 3.2.3. Генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича

Одним з порівняно простих прикладів реальних дисипативних систем, що здатні демонструвати хаотичну динаміку, є так званий генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича (генератор КІР)<sup>10</sup>. У цьому пункті ми отримаємо рівняння, що описують роботу даної схеми, опишемо характерні режими її роботи та вигляд дивного атрактора.

#### 3.2.3.1 Схема та рівняння руху

Схема генератора КІР (рис. 3.2.4 а.) нагадує схему звичайного лампового генератора Ван-дер-Поля з контуром у колі сітки<sup>11</sup>, але в цей контур додатково увімкнений тунельний діод з  $N$ -подібною вольт-амперною характеристикою  $I_d(V)$  (рис. 3.2.4 б). Остання має дві зростаючі ділянки –  $A$  та  $B$ , розділені спадною ділянкою (стани, що їй відповідають, є нестійкими і не реалізуються). Омичний опір діода на ділянці  $A$  (в області від'ємних та малих додатних напруг), а також при великих додатних напругах на ділянці  $B$  можна вважати невеликим, на початку ж ділянки  $B$  він є значно більшим.

Крім тунельного діода, в схемі є ще один нелінійний елемент – лампа з анодно-сітковою характеристикою, яку зручно апроксимуватимемо кубічним поліномом:

$$I_A = SU - \frac{SU^3}{3K^2}. \quad (3.2.33)$$

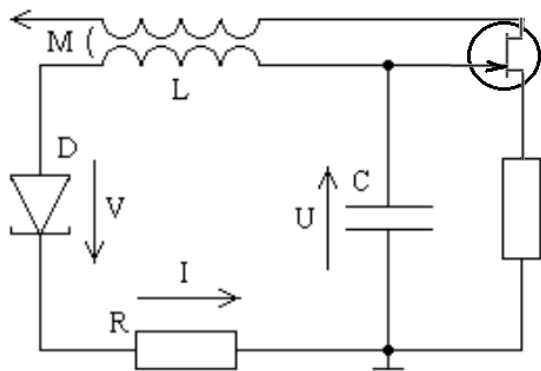
Складемо систему диференціальних рівнянь, що описує роботу генератора. Позначивши через  $I$  струм у коливному контурі, а через  $U$  та  $V$  – падіння напруги відповідно на конденсаторі та на тунельному діоді (рис. 3.2.4 а), можна записати другий закон Кірхгофа<sup>12</sup> для контуру (з урахуванням взаємної індуктивності  $M$  та апроксимації (3.2.33)) у формі

$$L \frac{dI}{dt} + RI - M \frac{d}{dt} \left( SU - \frac{SU^3}{3K^2} \right) + U + V = 0. \quad (3.2.34)$$

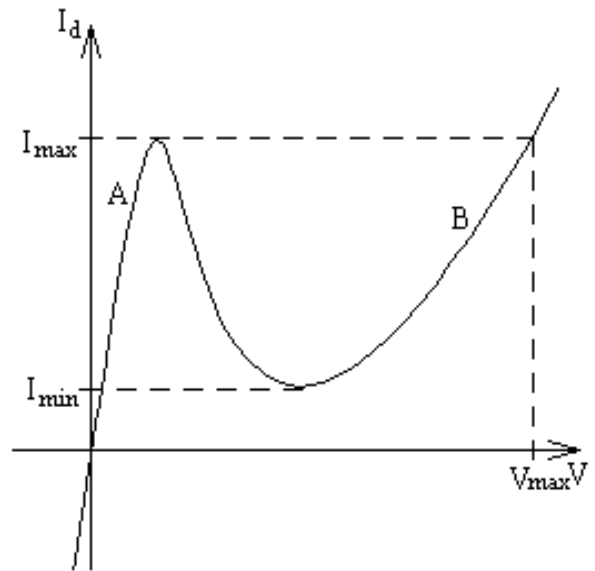
<sup>10</sup> Див.: С.В.Кияшко, А.С.Пиковский, М.И.Рабинович // Радиотехника и электроника, **25**, 336 (1980).

<sup>11</sup> Замість лампи може бути використаний польовий транзистор, як показано на рис. 3.2.4 а.

<sup>12</sup> Г. Кірхгоф (Gustav Robert Kirchhoff; 1824 – 1887) – видатний німецький фізик. Професор університетів Гейдельберга та Берліна, член Берлінської Академії наук. Основні результати – в галузі електрики, механіки, математичної фізики.



a



б

Рис. 3.2.4: а – схема генератора КПП; б – вольт-амперна характеристика тунельного діода.

Диференціюючи рівняння, що пов'язує між собою заряд конденсатора та напругу на ньому, дістанемо:

$$C \frac{dU}{dt} = I. \quad (3.2.35)$$

Врахуємо, що  $p-n$  перехід тунельного діода має деяку ємність  $C_1$ , яку ми вважати- мемо малою ( $\varepsilon \equiv C_1/C \ll 1$ ). Тому повний струм через цей діод складатиметься із струму провідності  $I_d(V)$  та струму зміщення  $C_1 dV/dt$ :

$$I = I_d(V) + C_1 \frac{dV}{dt}. \quad (3.2.36)$$

Виключимо з (3.2.34) похідну  $dU/dt$  за допомогою (3.2.35) і перейдемо до безрозмір- них змінних:

$$\tau = \omega t, \quad u = \frac{U}{U_\infty}, \quad v = \frac{V}{U_\infty}, \quad i = \frac{\rho I}{U_\infty}, \quad (3.2.37)$$

де  $\omega^2 = 1/LC$ ,  $\rho^2 = L/C$ ,  $U_\infty^2 = K^2/\omega MS$ . Тоді рівняння (3.2.34)–(3.2.36) можна переписати у вигляді системи

$$\frac{di}{d\tau} = (\gamma - u^2)i - v - u, \quad \frac{du}{d\tau} = i, \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = i - i_d(v), \quad (3.2.38)$$

де використане позначення  $\gamma = K^2/U_\infty^2 - R/\rho$ .

Система (3.2.38) містить три диференціальних рівняння першого порядку з незалеж- ними від часу правими частинами і, отже, описує систему з півтора ступенями вільності.

Вольт-амперну характеристику тунельного діода зручно замінити її кусково-лінійною апроксимацією:

$$i_d(v) = \begin{cases} v/r_A, & v < v_1; \\ (2v_1 - v)/r_A, & v_1 \leq v < 2v_1 r_B / (r_A + r_B); \\ v/r_B, & v \geq 2v_1 r_B / (r_A + r_B) \end{cases} \quad (3.2.39)$$

(рис. 3.2.5 а). Тут використано позначення:  $v_1 = V_1/U_\infty$ ;  $r_A = R_A/\rho$ ;  $r_B = R_B/\rho$ ; величина  $V_1$  показана на рис. 3.2.5 а, а  $R_A$  та  $R_B$  – це опори тунельного діода відповідно на ділянках А та В.

Систему рівнянь (3.2.38) з урахуванням апроксимації (3.2.39) можна розв'язувати як

аналітично, так і числовими методами. В результаті числового розв'язку були побудовані часові епюри напруг  $u$ ,  $v$  та струму  $i$ , а також фазовий портрет системи. Крім цього, будувалося точкове відображення, тобто залежність  $u_{n+1} = F(u_n)$  (за гіперповерхню, що перетинається фазовими траєкторіями, обиралася додатна піввісь  $u$ ).

Обговоримо спочатку способи аналітичного розв'язку рівнянь (3.2.38)-(3.2.39).

### 3.2.3.2. Ділянки швидкого та повільного руху

Система (3.2.38) містить малий параметр  $\varepsilon$  при похідній в одному з рівнянь, тому її розв'язок можна будувати шляхом виділення ділянок швидкого та повільного руху. Як впливає з останнього рівняння (3.2.38), траєкторії повільного руху лежать на поверхні  $i = i_d(v)$  (рис. 3.2.5 б). Поверхню повільного руху, що відповідає першій зростаючій ділянці залежності  $i_d(v)$  (перший рядок у (3.2.39)), будемо називати поверхнею  $A$ , а ту, що відповідає другій зростаючій ділянці (третій рядок у (3.2.39)) – поверхнею  $B$ . Поверхня повільного руху, що відповідає спадній ділянці вольт-амперної характеристики діода, є нестійкою. Траєкторії швидкого руху – це прямі, паралельні осі  $v$ . Справді, поділивши, наприклад, третє рівняння системи (3.2.38) на друге, приходимо до висновку, що нахил траєкторії швидкого руху  $dv/du$  обернено пропорційний малому параметру  $\varepsilon$ .

Розглянемо повільний рух окремо на поверхнях  $A$  та  $B$ . Завдяки обраній апроксимації вольт-амперної характеристики діода та малізні параметра  $\varepsilon$  третє рівняння в системі (3.2.38) можна замінити на  $i = v/r_A$  або  $i = v/r_B$  відповідно для кожної з поверхонь. Тоді система (3.2.38) зводиться до двох рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} - (\gamma - r_A - u^2) \frac{du}{dt} + u &= 0, \\ \frac{d^2u}{dt^2} - (\gamma - r_B - u^2) \frac{du}{dt} + u &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Кожне з рівнянь (3.2.40) являє собою рівняння Ван-дер-Поля. Перше з рівнянь (3.2.40) описує роботу схеми при  $V < V_1$ , друге – при  $V > V_2$ .

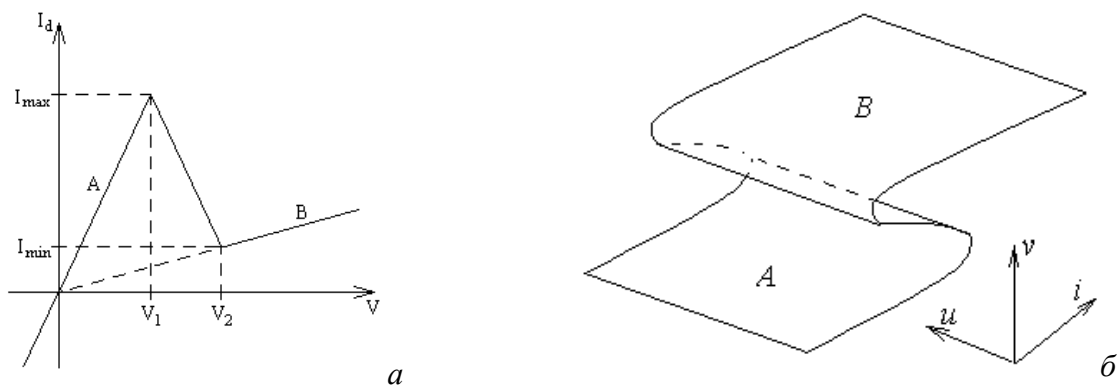


Рис. 3.2.5. До опису генератора КПР: а – апроксимація вольт-амперної характеристики тунельного діода; б – поверхня повільного руху

### 3.2.3.3. Характерні режими роботи

Діаграма характерних режимів роботи генератора КПР в залежності від керувальних параметрів  $\gamma$  та  $v_1$ , побудована на основі числового розв'язку системи (3.2.38) з урахуванням апроксимації (3.2.39), подана на рис. 3.2.6. Якісно такі самі результати можна отримати й при апроксимації вказаної характеристики кубічною параболою.

Цікаво відзначити, що деякі з областей за своєю структурою нагадують фрактали.

Розберемо режими, показані на рис. 3.2.6, більш детально.

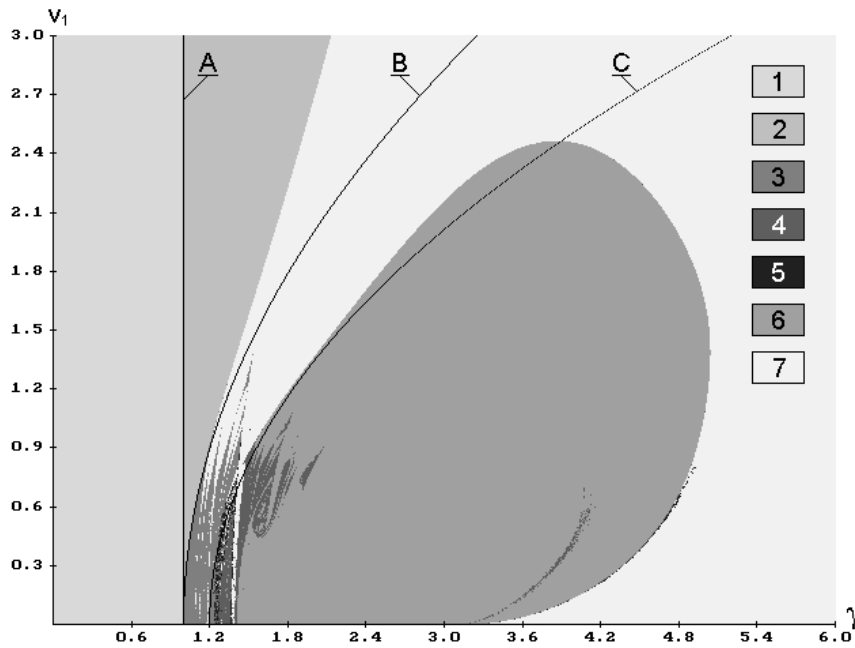


Рис. 3.2.6. Діаграма режимів роботи генератора КІР: 1 – згасаючі коливання; 2 – квазігармонічні коливання; 3, 4, 5 – хаотичні режими; 6, 7 – релаксаційні режими.

### 3.2.3.4. Робота схеми при малих коефіцієнтах зворотного зв'язку

З першого рівняння (3.2.40) видно, що при  $\gamma < r_A$  амплітудна умова генерації не виконується, і розв'язком системи є майже лінійні (при невеликих відхиленнях від положення рівноваги) згасаючі коливання. Їм відповідає область 1 на рис. 3.2.6.

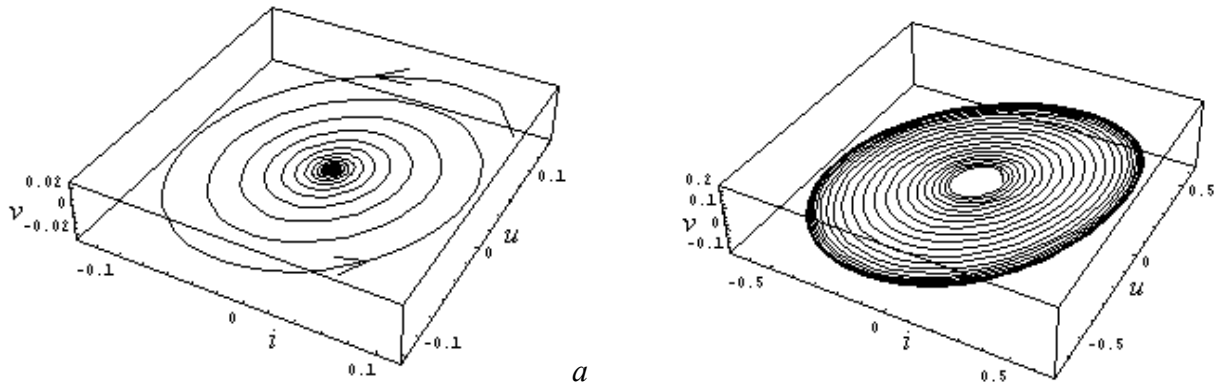


Рис. 3.2.7. Фазовий портрет генератора КІР в режимах згасаючих (а) та квазігармонічних (б) коливань. Фазові траєкторії лежать на ділянці А поверхні повільного руху (рис. 3.2.5 б)

При переході  $\gamma$  через критичне значення  $r_A$  (йому відповідає пряма А на рис. 3.2.6), коли ефективний інкремент коливань з урахуванням омичного опору тунельного діода на ділянці А характеристики діода (рис.3.2.5 а) проходить через нуль, відбувається біфуркація Андронова – Хопфа, тобто самозбудження автогенератора, і в ньому встановлюються незгасаючі квазігармонічні коливання. Їм відповідає область 2 на рис. 3.2.6. Для випадку  $0 < \gamma - r_A \ll 1$  перше рівняння (3.2.40) можна розв'язати наближено, застосувавши метод повільних амплітуд. Таким чином отримуємо розв'язок  $u = a(\tau) \cos \tau$ , в якому амплітуда змінюється з часом за законом

$$a(\tau) = \frac{a_\infty}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{a_\infty}{a_0} \right)^2 - 1 \right] \exp[-(\gamma - r_A)\tau]}}, \quad a_\infty = 2\sqrt{\gamma - r_A}, \quad (3.2.41)$$

де  $a_\infty$  – амплітуда коливань напруги в усталеному режимі.

Зазначимо, що в розглянутих режимах безрозмірна амплітуда струму в колі не повинна перевищувати значення  $i_{\max} = v_1/r_A$  ( $I_{\max}$  на рис.3.2.5 а), тобто діод виступає як звичайний лінійний резистор.

Фазовий портрет генератора КІР у режимах 1 та 2 подано відповідно на рис. 3.2.7 а та 3.2.7 б.

### 3.2.3.5. Мономодальний режим стохастичних коливань

При подальшому збільшенні  $\gamma$ , коли усталена амплітуда (3.2.41) перевищує значення  $i_{\max} = v_1/r_A$ , тобто при

$$2\sqrt{\gamma - r_A} > \frac{v_1}{r_A} \quad (3.2.42)$$

(умові (3.2.42) відповідає перехід через криву  $B$  на рис. 3.2.6), коливання змінюють форму та набувають хаотичного характеру.

Справді, при переході струму через значення  $i_{\max}$  відбувається стрибок з однієї зростаючої ділянки вольт-амперної характеристики тунельного діода (низькоомної) на іншу (високоомну). На фазовому портреті спостерігається відповідний стрибок між поверхнями повільного руху  $A$  та  $B$ . При цьому омичний опір тунельного діода різко зростає (при тому самому значенні струму зростає падіння напруги на діоді), що призводить до аперіодичного згасання коливань у контурі. Після зменшення струму до значення  $i_{\min} = 2v_1/(r_A + r_B)$  (розмірне  $I_{\min}$  на рис.3.2.5 а) відбувається зворотній стрибок між поверхнями  $A$  і  $B$ .

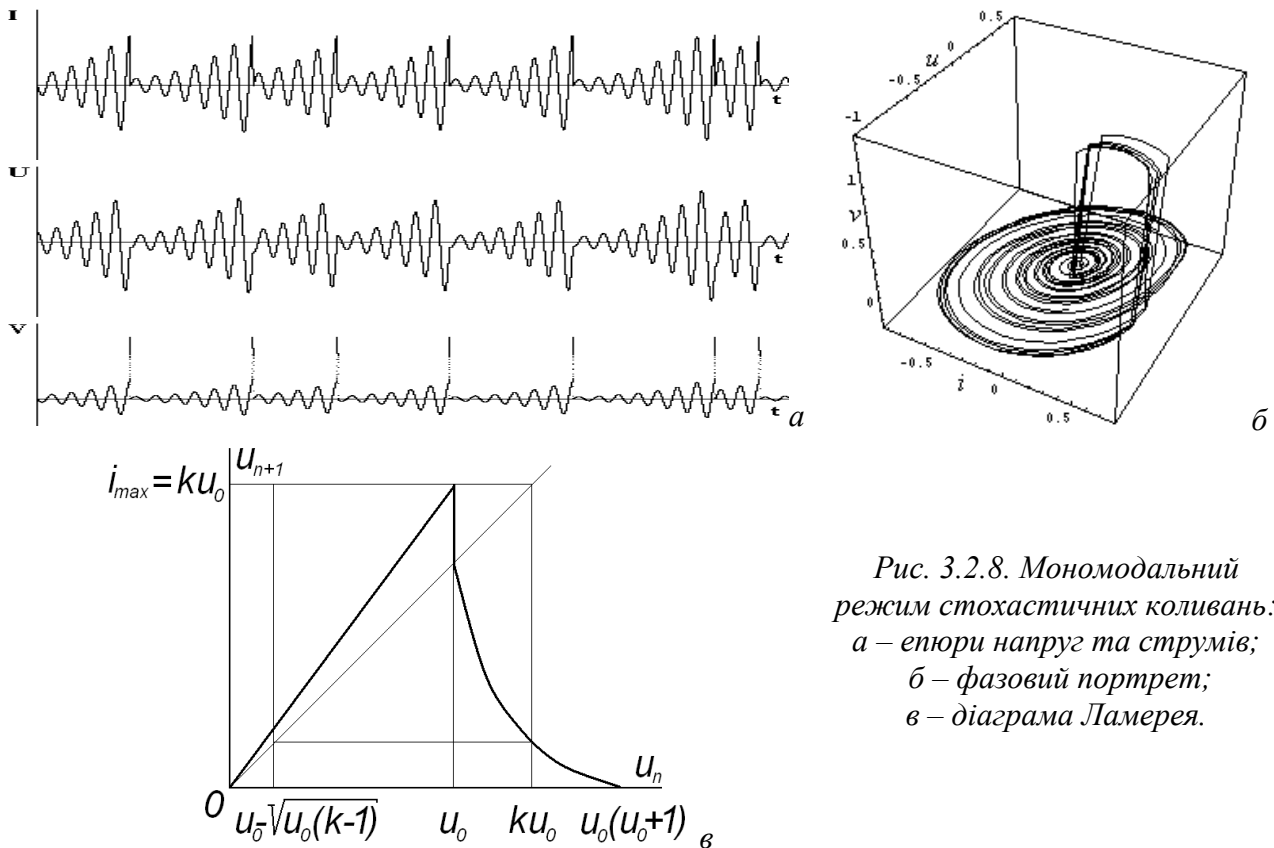


Рис. 3.2.8. Мономодальний режим стохастичних коливань:  
а – епюри напруг та струмів;  
б – фазовий портрет;  
в – діаграма Ламерея.

Оскільки ймовірність потрапити на попередню фазову траєкторію практично відсутня, зростання коливань починається з новими амплітудою та фазою. Таким чином, саме немонотонність вольт-амперної характеристики тунельного діода та наявність у нього малої ємності разом із нестійкістю, обумовлену позитивним зворотним зв'язком, приводить до



стохастизації коливань.

В процесі моделювання було виявлено три якісно різні режими стохастичних коливань. Перший з них - це режим, описаний у згаданій вище (прим. 10) роботі С.В.Кияшка та ін. – режим 3 на рис.3.2.6. При цьому залежності струму та напруг з часом являють собою випадкові послідовності радіоімпульсів з експоненціальною обвідною (рис. 3.2.8 а). Видно, що величини  $i$  та  $u$  змінюються з часом неперервно, а величина  $v$  зазнає стрибків, що узгоджується з висловленими вище якісними міркуваннями.

Фазовий портрет для цього режиму показано на рис. 3.2.8 б. Фазова траєкторія на рис. 3.2.8 б являє собою дивний атрактор, який має характерну фрактальну структуру. Фрактальна розмірність цього атрактора лежить, очевидно, в межах від одиниці до двійки. Область нестійкості на дивному атракторі припадає на ділянку  $A$  поверхні повільного руху.

Стрибки між поверхнями повільного руху призводять до формування максимумів і різких спадів на діаграмі Ламерея для точкового відображення. Для режиму 3 діаграма Ламерея показана на рис. 3.2.8 в. Вона має один різкий максимум. Відображення такого типу називають мономодальним. Такий режим хаотичних коливань можна описати за допомогою мономодального відображення, Тому й відповідний режим стохастичних коливань генератора КІР можна назвати мономодальним.

Саме мономодальний режим було експериментально та теоретично досліджено в роботах Кияшка, Піковського та Рабиновича.

### 3.2.3.6. Статистика генератора КІР у мономодальному режимі

Опишемо тепер, як побудувати точкове відображення для мономодального режиму, показане на рис. 3.2.8 в. Для того, щоб побудувати ту частину відображення, яка описує рух на поверхні  $A$  (рис. 3.2.5 б), скористаємося першим з рівнянь (3.2.40), в якому знехтуємо нелінійним доданком (це справедливо, якщо на межі ділянки  $A$  поверхні повільного руху амплітуда коливань значно менша від того усталеного значення, яке визначається нелінійністю лампи або польового транзистора). В цьому наближенні вказане рівняння описує коливання з безрозмірною частотою  $\omega = 1$ , амплітуда яких зростає з безрозмірним часовим інкрементом  $(\gamma - r_A)/2$ . Тоді зв'язок між амплітудами напруги  $u$  в сусідніх точках перетину додатної півосі  $u$  (тобто через період коливань частоти  $\omega = 1$ , див. рис. 3.2.9 а) буде визначатися співвідношенням  $u_{n+1} = \varphi_1(u_n) = ku_n$ , де  $k = \exp[\pi(\gamma - r_A)] > 1$ . Це співвідношення залишається справедливим при  $u_0 - \sqrt{(k-1)u_0} < u_n < u_0$ , де  $u_0 = i_{\max}/k$ .

Інша ділянка відображення відповідає випадку, коли зображувальна точка зістрибує з ділянки  $A$  поверхні повільного руху на ділянку  $B$ , рухається по ній, а потім стрибком повертається на ділянку  $A$  (рис. 3.2.9 б). Як видно з рис. 3.2.9 б, цьому випадку повинна відповідати спадна ділянка відображення. Її можна апроксимувати ділянкою квадратної параболи вигляду  $u_{n+1} = \varphi_2(u_n) = u_0 - \sqrt{u_n - u_0}$ . Це відображення справедливе при  $u_0 < u_n < ku_0$ .

Побудоване таким чином відображення  $\varphi$  носить модельний характер. Однак воно є якісно правильним, що підтверджують числові розрахунки.

Відображення  $\varphi_1$  є розтягальним,  $|d\varphi_1/du_n| = k > 1$ . Відображення  $\varphi_2$  є розтягальним там, де  $u_n < u_0 + 1/2$  (якщо  $(k-1)u_0 < 1/2$ , то відображення  $\varphi_2$  є розтягальним на всій робочій ділянці). Крім того, сумарне відображення  $\varphi$  є обмеженим (воно перетворює відрізок  $[u_0 - \sqrt{(k-1)u_0}, ku_0]$  сам у себе) і немонотонним. Отже, досліджувана система буде демонструвати хаотичну динаміку (див. вище п. 3.1.4.6).

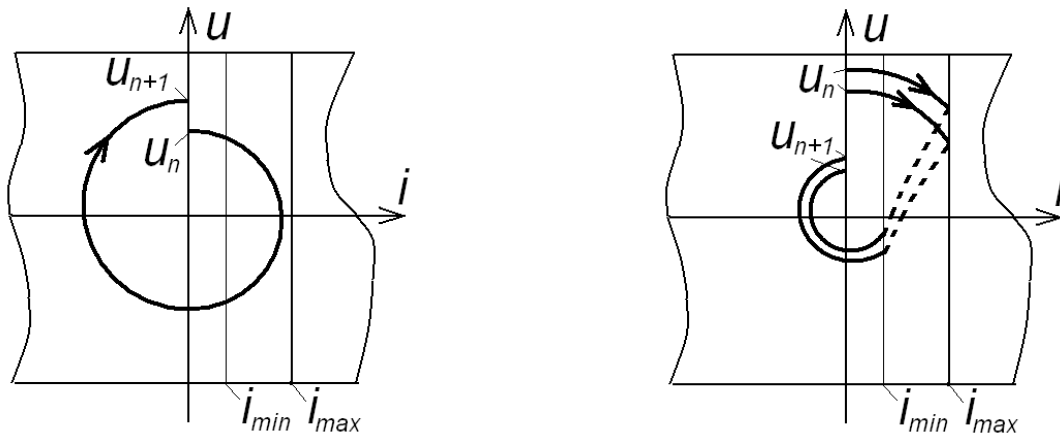


Рис. 3.2.9. До побудови відображення для моноmodalного режиму стохастичних коливань. Показано поверхню повільного руху з боку негативної частини осі  $v$  (див. рис. 3.2.5 б) та відрізки фазових траєкторій на ній.

З точки зору відображення Пуанкаре, число максимумів, або, що те саме, число періодів коливань в одному радіоімпульсі (див. рис. 3.2.8 а) – це число ітерацій відображення на відрізьку  $\varphi_1$ .

Розіб'ємо відрізок  $[u_0 - \sqrt{(k-1)u_0}, ku_0]$  на ділянки  $d_i$  та  $\Delta_i$  (рис. 3.2.10 а). Будемо цікавитися не координатами точки  $u_n$ , а лише номером ділянки, на яку вона потрапляє. Кожній траєкторії при цьому відповідатиме певна послідовність ділянок.

Для визначення статистики сигналу потрібно знати ймовірності переходу з однієї ділянки в іншу. В даному разі ймовірність переходів визначається такими правилами:

- якщо з ділянки можливий лише один перехід, то його ймовірність дорівнює одиниці; це стосується переходів, які починаються зі всіх ділянок, крім  $d_1$ ;
- з ділянки  $d_1$  можливі різні переходи; прийmemo, що ймовірності переходів  $d_1 \rightarrow \Delta_i$  пропорційна довжинам відрізків  $\Delta_i$ , які, в свою чергу, пропорційні довжинам відрізків  $d_i$ , тобто величині  $1/k^i$ .

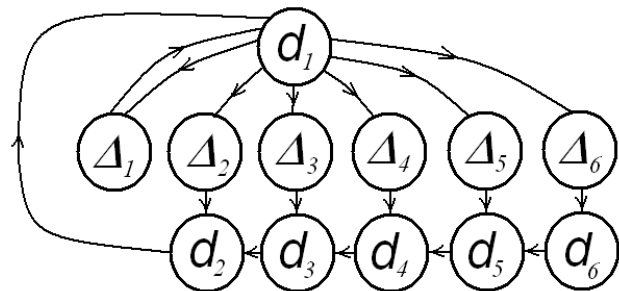
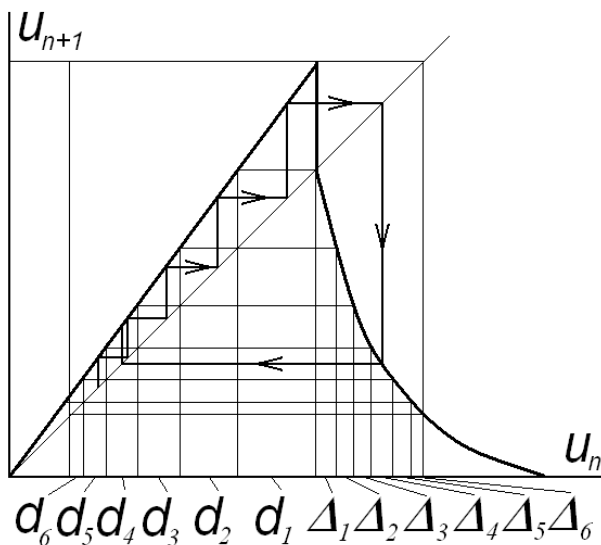


Рис. 3.2.10. До побудови статистики генератора КІР у моноmodalному режимі: а – сходи Ламерея і розбивка осі абсцис на ділянки; б – схема можливих переходів між ділянками.

Схема переходів між відрізками показана на рис. 3.2.10 б. З неї видно, що ймовірність  $P(n)$  того, що радіоімпульс міститиме  $n$  періодів коливань, пропорційна ймовірності пот-

раплення з ділянки  $d_1$  на ділянку  $\Delta_n$ , тобто величині  $1/k^n$ . Точніше,

$$P(n) = \frac{f(n)}{k^n}, \quad (3.2.43)$$

де повільна залежність  $f(n)$  визначається обраною апроксимацією  $\varphi_2$  та умовою нормування. Ця формула задовільно описує статистику реального генератора КПР.

### 3.2.3.7. Мультимодальні режими стохастичних коливань

При подальшому збільшенні  $\gamma$  інкремент коливань стає настільки великим, що зображувальна точка за один оберт у площині  $iu$  здійснює не на одну, а декілька пар стрибків між поверхнями  $A$  та  $B$ . Таким чином, реалізуються інші стохастичні режими, якісно відмінні від моноmodalного. Ці режими можна назвати мультимодальними, оскільки їм відповідає мультимодальне відображення<sup>13</sup>.

Другий режим стохастичних коливань (режим 4 на рис. 3.2.6) реалізується при більших значеннях  $\gamma$ . В цьому випадку схема генерує пакети однополярних імпульсів струму та напруги на тунельному діоді, причому кількість імпульсів в одному пакеті випадкова (рис.3.2.11). З рисунку видно, що під час одного оберту зображувальної точки навколо осі  $v$  може відбутися вже не одна, а кілька пар стрибків між поверхнями повільного руху. Після першої пари стрибків між цими поверхнями відхилення від стану рівноваги  $i = 0$ ,  $u = 0$  зростає настільки швидко, що на цьому самому оберті встигають відбутися ще кілька пар стрибків. Відзначимо також, що напруга на сітці лампи (чи на затворі польового транзистора)  $u$  змінюється плавно, без стрибків, причому зростаючій ділянці відповідають перестрибування між поверхнями, а спадаючій – швидке зростання амплітуди на тій поверхні повільного руху, що проходить через початок координат. Цьому режиму відповідає мультимодальне відображення (рис. 3.2.11 в).

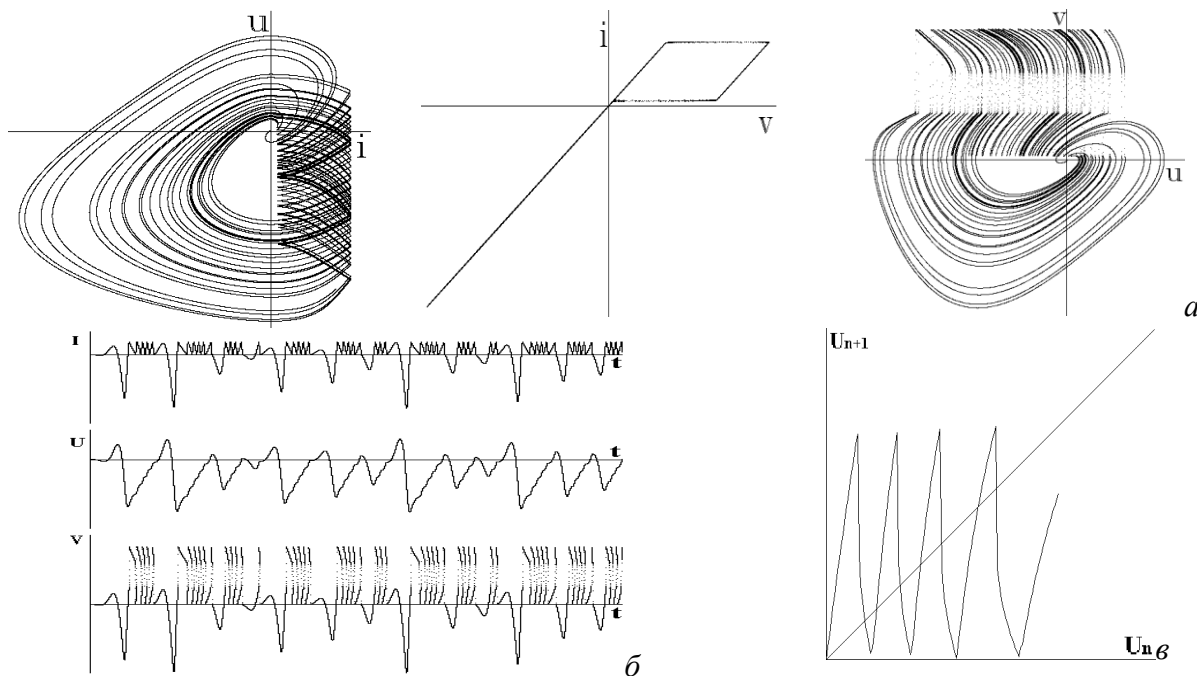


Рис. 3.2.11. Другий режим стохастичних коливань: а – проєкції фазового портрету на площини  $iu$ ,  $iv$  та  $uv$ ; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея.

Ще один шумовий режим (режим 5 на рис. 3.2.6) являє собою квазігармонічні коли-

<sup>13</sup> Див.: І.О.Анісімов, А.М.Дідовик, Т.В.Сіверський. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. Вип. 2 (2000). С.367-374; І.О.Анісімов, Т.В.Сіверський. Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Радіофізика та електроніка. Вип. 4 (2002). С.12-19.

вання напруги на сітці лампи, амплітуда яких випадково змінюється від періоду до періоду (рис. 3.2.12 г). У цьому режимі серед фазових траєкторій на другій поверхні повільного руху (що відповідає високоомній ділянці вольт-амперної характеристики діода) виникає атрактор (рис. 3.2.12 б). В цьому режимі, на відміну від усіх інших, фазова траєкторія виходить за лінію  $I = I_{\max}$ , і тому під час одного оберту зображувальної точки навколо осі  $v$  відбувається одна пара перескоків між площинами повільного руху, і між цими перескоками проходить деякий (досить великий в порівнянні з першим стохастичним режимом) час. Як і в попередніх випадках, максимуми на графіку поворотного відображення обумовлені стрибками між поверхнями повільного руху.

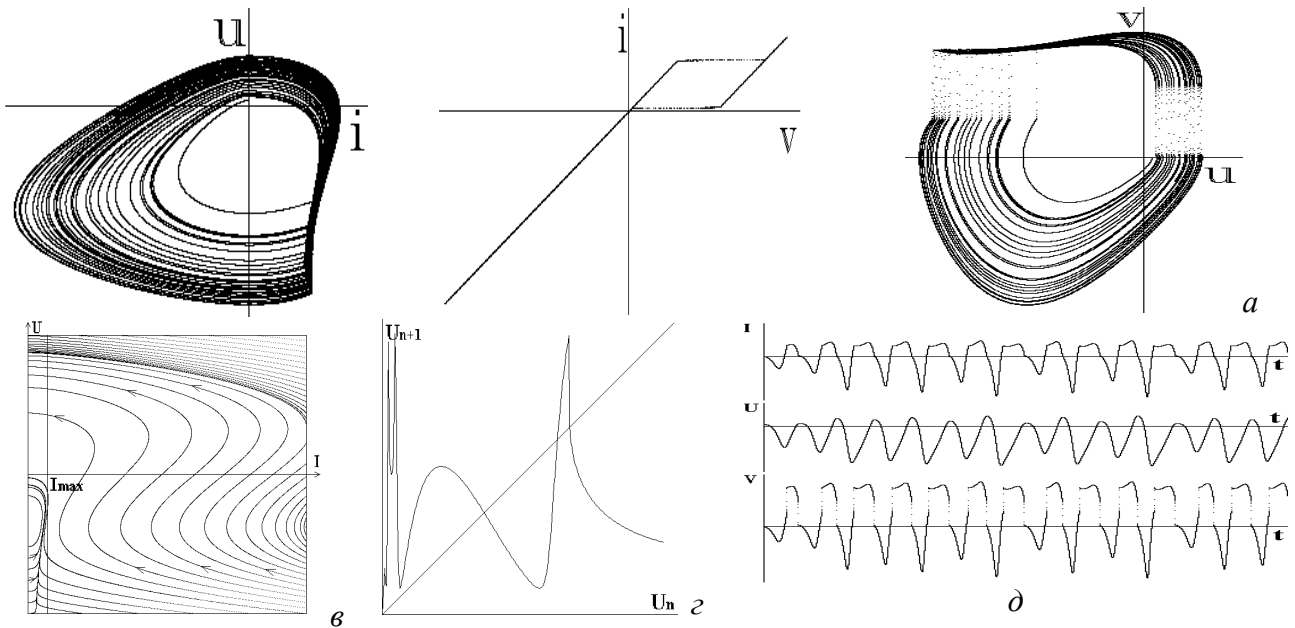


Рис. 3.2.12. Третій режим стохастичних коливань: а – проєкції фазового портрету на площини  $iu$ ,  $iv$  та  $uv$ ; б – фазовий портрет на поверхні повільного руху, що відповідає високоомній ділянці ВАХ діода; в – діаграма Ламерея; г – часові епюри струму та напруг

### 3.2.3.8. Перехід від мономодального до мультимодальних режимів

Для дослідження переходу між різними стохастичними режимами розглянемо фазову траєкторію, що проходить по самому краю поверхні  $A$  (рис. 3.2.13). В точках 1, 2 та 3 відбуваються стрибки між поверхнями. Частина траєкторії від точки 1 до точки 2 лежить на поверхні  $A$ , тому наближено її форму в полярних координатах ( $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\varphi = \arctg(u/i)$ ) можна описати формулою (3.2.41), в якій слід покласти  $a_0 = v_1/r_A$  та замінити  $\tau$  на  $\varphi$ .

У проміжку між точками 2 та 3 фазова траєкторія лежить на поверхні  $B$ . З другого рівняння (3.2.40) можна отримати фазовий портрет на цій поверхні. Умова  $r_B - \gamma \gg 1$  дозволяє виділити на поверхні  $B$  траєкторію повільного руху

$$i = -\frac{u}{r_B - \gamma + u^2} \quad (3.2.44)$$

(тепер малим параметром служить величина  $1/(r_B - \gamma)$ ). Тоді ділянка 2-3 (рис. 3.2.13) лежить на траєкторії швидкого руху, яку можна вважати відрізком прямої, нахиленої під кутом  $\psi = -\text{arcctg}(r_B - \gamma)$  до осі  $i$ .

Якщо точка 3 знаходиться ближче до початку координат, ніж точка 1 (рис. 3.2.13 а), то маємо мономодальний хаотичний режим. У протилежному випадку (рис. 3.2.13 б) точка 3 знаходиться досить далеко від початку координат, і тому виникає ще один стрибок між поверхнями  $A$  і  $B$ . Біфуркаційні значення керуючих параметрів можна знайти з умови, що точки

1 та 3 збігаються:

$$a(\tau_2) \sin \varphi_2 - (i_{\max} - i_{\min}) \operatorname{tg} \psi = a(\tau_1) \sin \varphi_1, \quad (3.2.45)$$

де  $\tau_1$  та  $\varphi_1$  – момент часу й полярний кут, що відповідають точці 1, а  $\tau_2$  та  $2\pi - \varphi_2$  – ті самі величини в точці 2. Вони пов'язані між собою співвідношеннями  $a(\tau_1) \cos \varphi_1 = i_{\max}$ ;  $\varphi_1 = \tau_1$ ;  $a(\tau_2) \cos \varphi_2 = i_{\min}$ ;  $2\pi - \varphi_2 = \tau_2$ .

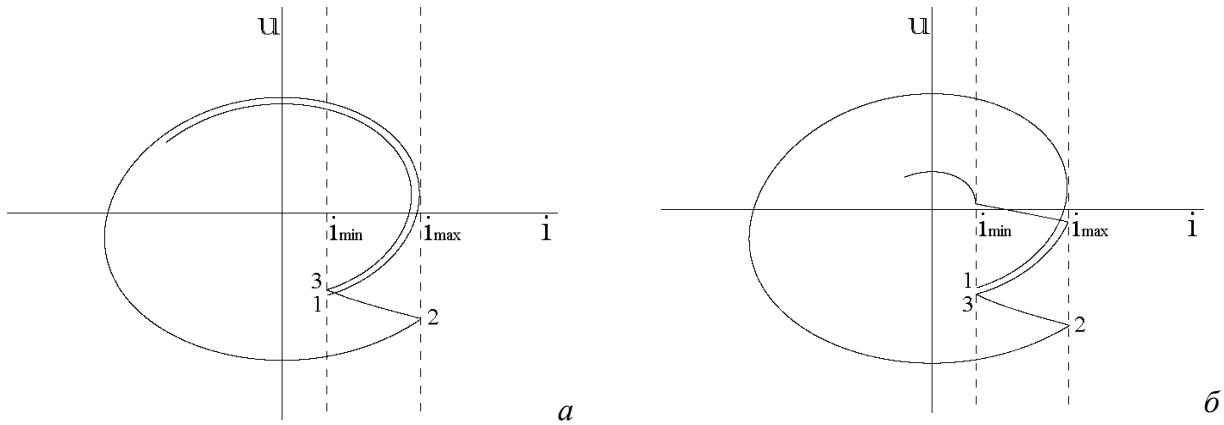


Рис. 3.2.13. Фазові траєкторії, що відповідають моноmodalьному (а) та мультиmodalьному (б) режимам.

Записані вище вирази утворюють систему рівнянь, яку можна наближено розв'язати аналітично щодо  $v_1$ . Однак аналітичний розв'язок виражається досить громіздкою формулою, яку зручніше апроксимувати виразом

$$\gamma = r_A + \left( \frac{v_1}{1.5r_A} \right)^2 + 0.2. \quad (3.2.46)$$

Формула (3.2.46) правильно описує межу між моноmodalьним та мультиmodalьним режимами у відповідному інтервалі значень параметрів (крива С на рис. 3.2.6).

### 3.2.3.9. Релаксаційні коливання

З подальшим збільшенням  $\gamma$  коливання знов набувають регулярності. Це демонструє графік поворотного відображення, на якому з'являється стійка стаціонарна точка, оскільки тепер похідна функції  $u_{n+1} = F(u_n)$  в точці перетину її графіка з бісектрисою координатного кута за модулем менша одиниці. Інакше можна сказати, що для великих значень  $\gamma$  амплітуда коливань, що встановлюються в колі, виходить на граничний цикл за час, менший від одного періоду коливань.

Перший тип релаксаційних коливань (режим 6 на рис.3.2.6) нагадує стохастичні коливання в режимі 5 (за період коливань має місце декілька пар стрибків між ділянками А і В поверхні повільного руху), але тепер кількість імпульсів струму в кожному пакеті одна й та сама (рис. 3.2.14).

Для дуже великих значень  $\gamma$  амплітуда коливань, що встановлюються в колі, стає набагато більшою, аніж характерний розмір ділянки немонотонності на вольт-амперній характеристиці тунельного діода, тому в цьому випадку (другий режим релаксаційних коливань) діод, по суті, знову відіграє роль лінійного опору (режим 7 на рис. 3.2.6). В режимі 7 за період коливань має місце одна пара стрибків між ділянками А і В (див. рис. 3.2.15). Відповідні коливання подібні до звичайних релаксаційних автоколивань, описуваних рівнянням Ван дер Поля (рис. 3.2.15 г). Слід тільки взяти до уваги, що при додатних та від'ємних значеннях напруги  $v$  опір тунельного діода, а, отже, й інкремент і амплітуда релаксаційних коливань виявляються неоднаковими.

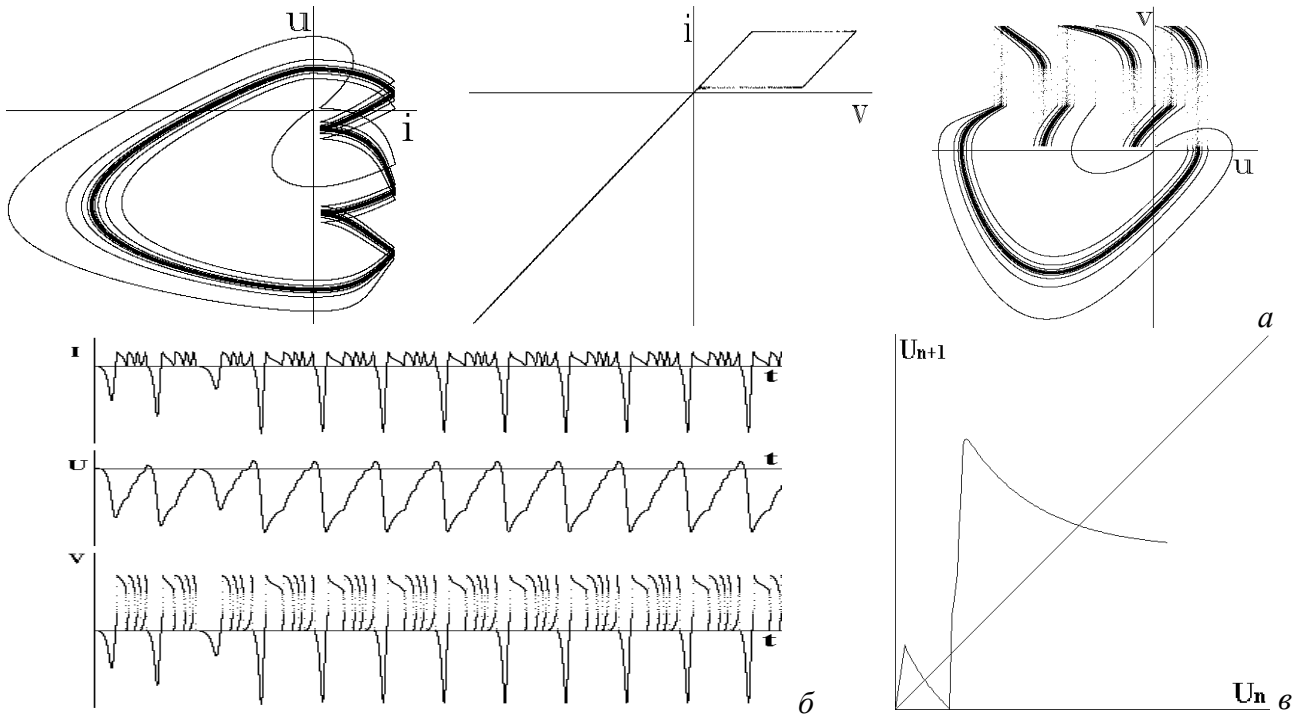


Рис. 3.2.14. Перший режим релаксаційних коливань: а – проєкції фазового портрету на площини  $iu$ ,  $iv$  та  $uv$ ; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея.

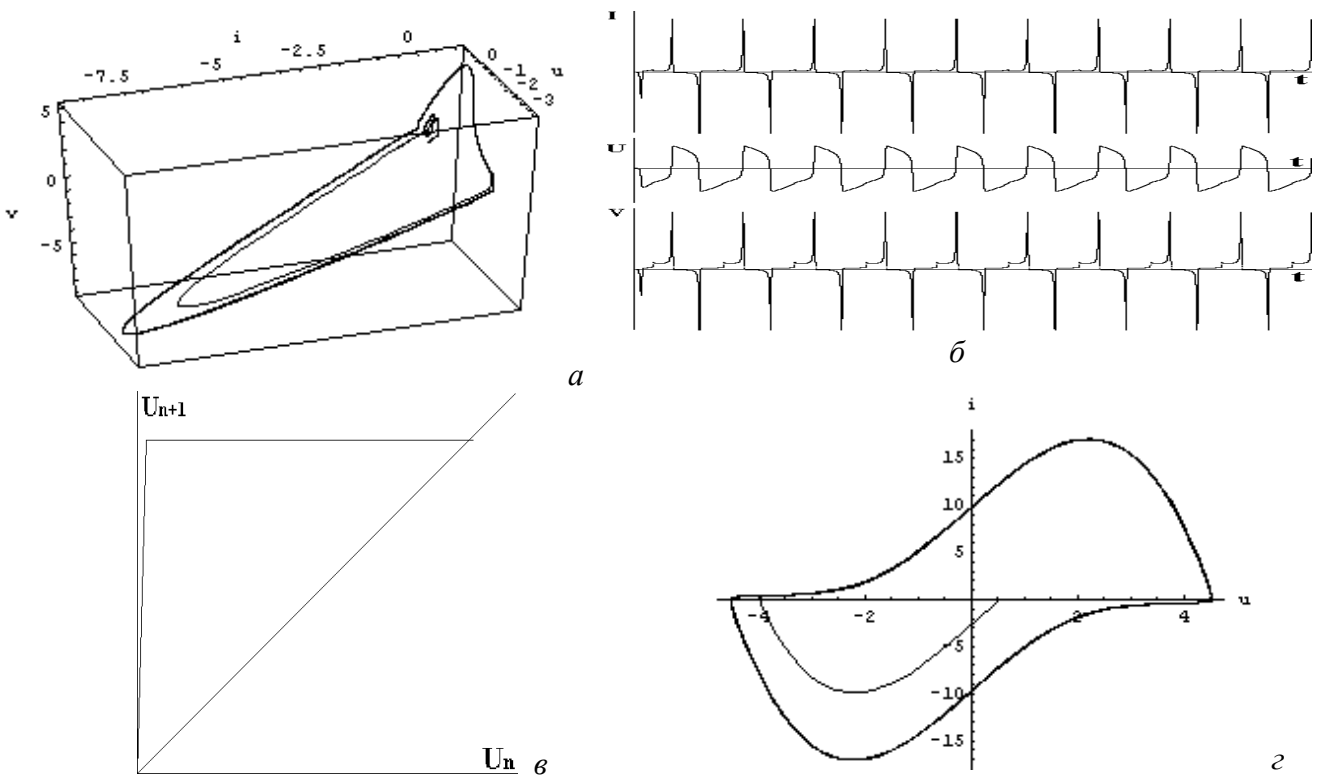


Рис. 3.2.15. Другий режим релаксаційних коливань: а – фазовий портрет; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея; г – фазовий портрет релаксаційних коливань для рівняння Ван дер Поля

### 3.2.3.10. Особливості біфуркацій

В процесі моделювання виявилось, що на межі хаотичної та регулярної динаміки виникають деякі особливості, що зазвичай притаманні таким біфуркаціям.

На межі режимів 4 та 6 (рис.3.2.6) спостерігався гістерезис, тобто залежність форми

коливань від початкових умов. Тут при малих початкових амплітудах реалізуються стохастичні коливання, а при великих – зображувальна точка виходить на граничний цикл. Як видно з графіка поворотного відображення (рис. 3.2.16 а), для малих значень  $u$  маємо деяку область, з якої не може вийти зображувальна точка, і в якій немає стійких стаціонарних точок. Але, якщо початкове значення  $u$  обрати досить великим, то система потрапляє в стійку стаціонарну точку, якій відповідає режим релаксаційних коливань.

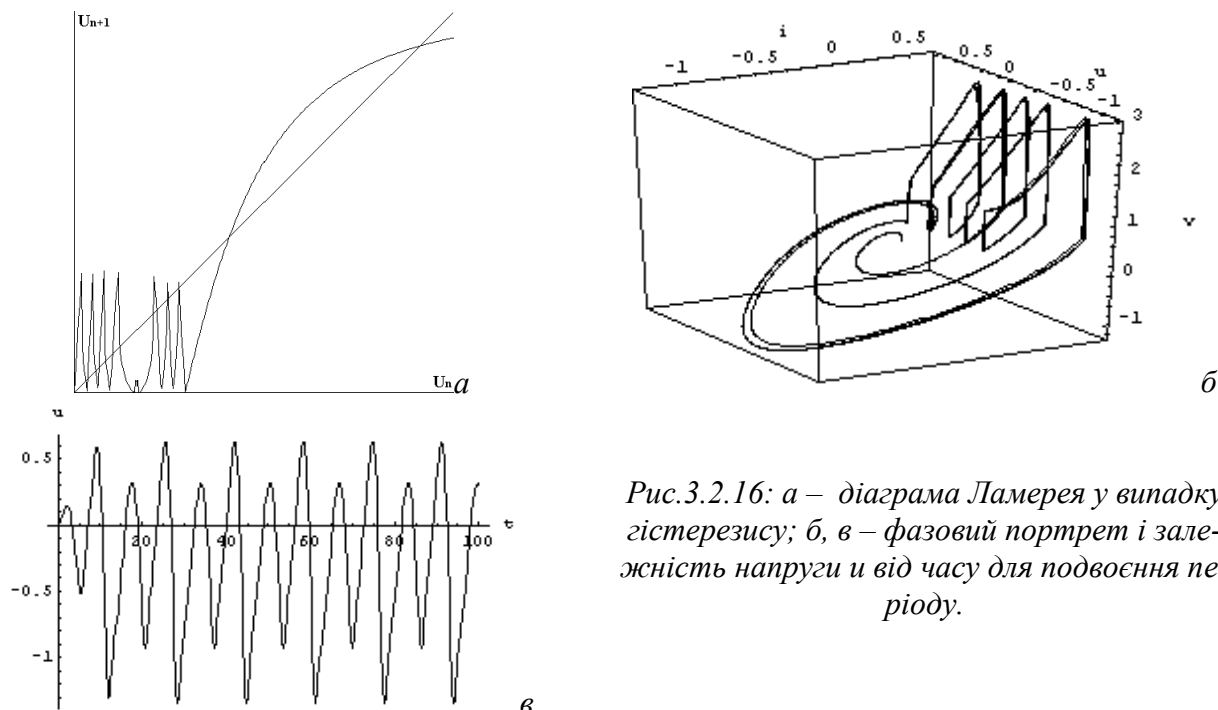


Рис.3.2.16: а – діаграма Ламерея у випадку гістерезису; б, в – фазовий портрет і залежність напруги  $u$  від часу для подвоєння періоду.

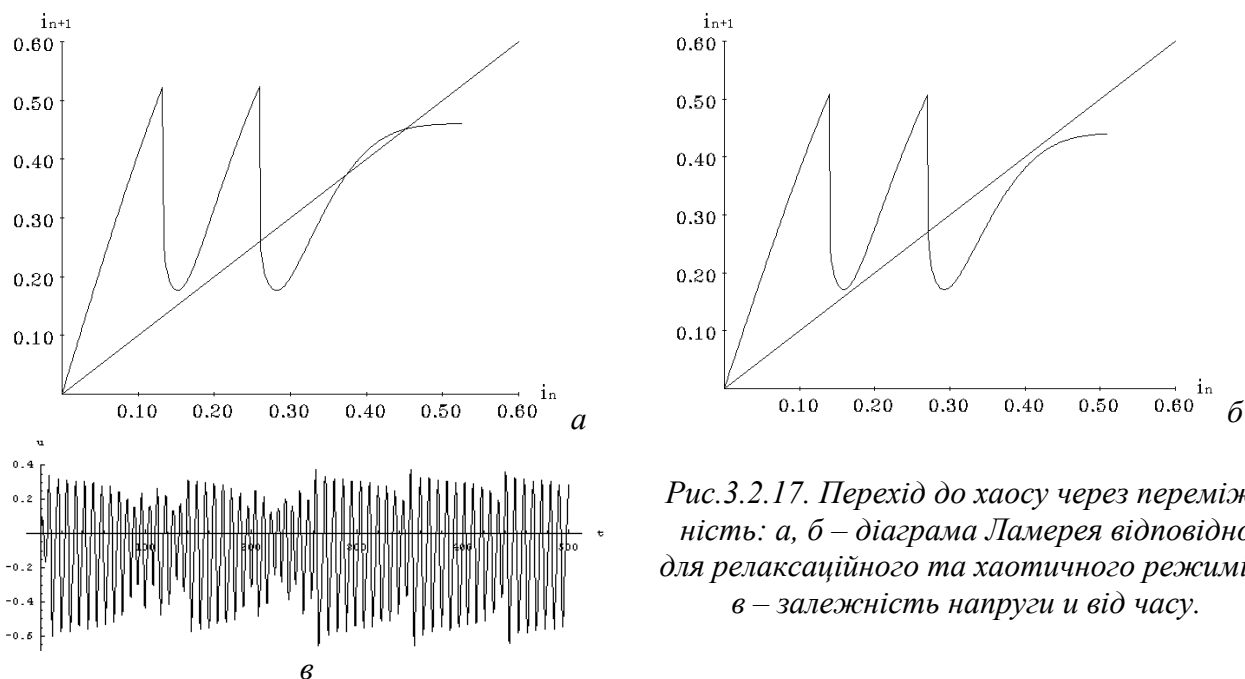


Рис.3.2.17. Перехід до хаосу через переміжність: а, б – діаграма Ламерея відповідно для релаксаційного та хаотичного режимів; в – залежність напруги  $u$  від часу.

Перехід від режиму регулярних релаксаційних коливань 7 до стохастичного режиму 4 (рис. 3.2.6) відбувався двома шляхами: через послідовні подвоєння періоду (за сценарієм Фейгенбаума) або через переміжність (за сценарієм Помо – Маннвілля) – див. вище п. 3.2.1.4.

На рис. 3.2.16 б в показано фазовий портрет та епюру напруги  $u$  для випадку подвоє-

ного періоду (виникає граничний цикл кратності два). Зазначимо, що для цього випадку на графіку поворотного відображення в точці перетину графіка функції  $u_{n+2} = F(u_n)$  з прямою  $u_{n+2} = u_n$  похідна за модулем менша від одиниці, тобто відповідний стан є стійким.

При переході до хаосу через переміжність (за сценарієм Помо – Манневілья) спочатку спостерігаються регулярні коливання. При подальшій зміні керувального параметра вони починають зрідка перериватися хаотичним рухом (рис. 3.2.17 в). При подальшій зміні параметра в коливаннях залишається все менше регулярності, і вони набувають хаотичного характеру. Справді, на графіку поворотного відображення для релаксаційного режиму (рис. 3.2.17 а) існує стійка стаціонарна точка, яка зникає в хаотичному режимі (рис. 3.2.17 б).

### *Контрольні питання до підрозділу 3.2.3*

1. Які сценарії переходу до хаосу можна реалізувати в генераторі шуму КПП?
2. Чи є сценарій переходу до хаосу однозначним? Відповідь дайте на прикладі генератора шуму КПП.
3. Оцініть розмірність дивного атрактора для генератора шуму КПП.
4. Що треба змінити в генераторі КПП, щоб збільшити середню довжину пачок коливань у мономодальному режимі стохастичних коливань?

### *Задачі до підрозділу 3.2.3*

3.2.3.1. Скориставшись апроксимацією  $\varphi_2(u_n) = u_0 - \sqrt{u_n - u_0}$ , розрахуйте функцію  $f(n)$ , яка визначає ймовірність того, що пачка імпульсів на виході генератора КПП у мономодальному режимі містить  $n$  коливань.

3.2.3.2\*. Користуючись комп'ютером, побудуйте спектр коливань генератора КПП

- а) для режиму мономодальних коливань;
- б) для різних режимів мультимодальних коливань.

### *Висновки до розділу 3.2*

1. Хаотична динаміка дисипативних систем пов'язана з існуванням у фазовому просторі таких систем дивних атракторів. Дивні атрактори – це об'єкти у фазовому просторі, до яких зображувальні точки з часом притягаються, а на самих атракторах – розбігаються. З геометричної точки зору дивні атрактори – це фрактали, які характеризуються масштабною інваріантністю та нецілою розмірністю.
2. Аналіз стандартного дисипативного відображення (що є узагальненням розглянутого раніше стандартного відображення), побудованого для автогенератора з параметричним збудженням, дозволяє з'ясувати умови виникнення стохастичної динаміки в такій системі, проаналізувати вигляд дивного атрактора і оцінити його фрактальну розмірність.
3. Однією з найпростіших реальних автономних систем, яка демонструє стохастичну динаміку, є генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабіновича (генератор КПП). Аналіз рівнянь руху для генератора КПП дозволяє побудувати його фазовий портрет та отримати точкове відображення, за допомогою якого вдається проаналізувати різні режими стохастичної динаміки. Показано, що стохастична динаміка має місце в обмеженому діапазоні керувальних параметрів. Крім того, для мономодального режиму побудовано функцію розподілу для кількості імпульсів у пачках квазігармонічних коливань.

### *Контрольні питання до розділу 3.2*

1. Що можна сказати про розміри області керувальних параметрів, у якій нелінійна дисипативна система демонструє стохастичну динаміку?
2. Якою є сума показників Ляпунова для відкритої дисипативної динамічної системи:
  - а) далеко від атрактора;



б) поблизу атрактора;

в) на атракторі?

3. Чи може дисипативна система мати одночасно простий та дивний атрактори?

### Розділ 3.3. Турбулентність у розподілених консервативних системах

Поняття турбулентності (від латинського *turbulentus* – непорядкований, бурхливий) прийнято застосовувати до систем із розподіленими параметрами (рідких та газоподібних середовищ або хвильових полів) у тому ж розумінні, що й поняття хаосу – для систем зі скінченною кількістю ступенів вільності: це складний непередбачуваний рух системи за відсутності випадкових зовнішніх сил або флуктуацій.

Турбулентність, як і хаотична динаміка, може мати місце і в консервативних, і в дисипативних системах. В останньому випадку система обов'язково повинна бути відкритою, бо за наявності дисипації турбулентність (як і регулярні дисипативні структури) може підтримуватися тільки за постійного надходження енергії ззовні. Ми розпочнемо розгляд турбулентності з простіших консервативних систем.

Зрозуміло, що в більшості реальних макроскопічних систем дисипація так чи інакше присутня. Тим не менше аналіз консервативного наближення є корисним, оскільки він дозволяє на прикладі спрощеної моделі зрозуміти механізм народження турбулентної динаміки.

На відміну від хаотичної динаміки консервативних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, турбулентна динаміка консервативних систем із розподіленими параметрами досі не вивчена достатньою мірою. Тому ми обмежимося розглядом лише окремих випадків, які на сьогодні досліджені.

Принаймні в деяких випадках опис консервативних систем із розподіленими параметрами, що дається рівняннями в частинних похідних, вдається звести до набору зчисленної або навіть скінченної кількості рівнянь у повних похідних. Можна сказати, що в цьому випадку динаміка системи з розподіленими параметрами зводиться до динаміки консервативної системи зі зчисленною або скінченною кількістю ступенів вільності.

Як уже вказувалося вище (див. розділ 3.1), поведінка такої системи може бути описана із застосуванням гамільтонівського формалізму і за певних умов набути хаотичного (непередбачуваного) характеру. В останньому випадку говорять про турбулентну динаміку консервативної системи.

Турбулентна динаміка в консервативних системах виникає, зокрема, при нелінійній взаємодії великої кількості хвиль у середовищі, коли картина поля набуває великої складності та непередбачуваності. У цьому випадку іноді говорять про турбулентність хвильових полів.

Найчастіше турбулентність хвильових полів зустрічається в плазмі. Це пов'язано з тим, що плазма має дуже низькі (порівняно з іншими середовищами) пороги нелінійності для цілого ряду хвиль електростатичної та електромагнітної природи.

При розгляді турбулентності хвильових полів виділяють поняття слабкої та сильної турбулентності. Слабка турбулентність характеризується тим, що хвилі в середовищі є майже гармонічними, а взаємодію між цими хвилями можна вважати слабкою. При порушенні будь-якої із цих умов говорять про сильну турбулентність.

У багатьох випадках для опису турбулентності хвильових полів користуються мовою квазічастинок, подібно до того, як це робиться при описі колективних збуджень у теорії твердого тіла. Сорт квазічастинок (фонони, плазмони, магнони, екситони та інші) відповідає певному типу хвиль, а їхня кількість – інтенсивності таких хвиль.

Зараз важко сказати, наскільки універсальним є підхід до опису турбулентності у консервативних системах, заснований на її зведенні до хаотичної динаміки систем із багатьма ступенями вільності. Принаймні, на сьогодні в теорії слабкої турбулентності хвильових полів на цьому шляху отримано ряд фундаментальних результатів. Теорія сильної турбулентності лише зароджується.

### 3.3.1. Слабка турбулентність у гамільтонівських системах: рівняння руху, побудова відображення та умови виникнення нестійкості

Для опису турбулентності, як уже вказувалося, звичайно намагаються ввести поняття кількості ступенів вільності. Зразком такого підходу є "мова квазічастинок", про яку вже згадувалося вище. При такому описі кожній власній моді системи (з певними значеннями частоти та довжини хвилі) ставиться у відповідність деякий сорт квазічастинок. Кількість квазічастинок даного сорту визначається інтенсивністю даної моди.

Слабка взаємодія хвиль не дуже псує "мову квазічастинок". Ця взаємодія нагадує таку взаємодію частинок, яка змінює їхній стан, не руйнуючи їх, або перетворює їх на частинки іншого сорту (подібно до збудження та іонізації атомів при непружних зіткненнях). У слабконелінійних середовищах аналогом квазічастинок виступають плоскі хвилі з відповідним законом дисперсії. Взаємодія між ними зумовлена нелінійними властивостями середовища. Зокрема, акти взаємодії за участю трьох і більше хвиль можуть приводити до резонансних нестійкостей параметричного характеру. Така взаємодія може бути однією з можливих причин турбулентної динаміки системи.

У цьому підрозділі ми розглянемо задачу про параметричну взаємодію великої кількості квазігармонічних хвиль у середовищі з квадратичною та кубічною нелінійністю. Цю задачу можна за певних умов звести до задачі про взаємодію великої кількості нелінійних осциляторів із нелінійним зв'язком, а потім – до задачі про рух системи нелінійно зв'язаних осциляторів під дією періодичної послідовності коротких ударів. Остання виявляється дуже подібною до розглянутої вище (п. 3.1.5) задачі про вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора. Використавши метод точкових відображень, вдається визначити умови розвитку нестійкості, яка, власне, й приводить до виникнення турбулентної динаміки в такій системі, та оцінити для цієї нестійкості КС-ентропію і час перемішування.

Задача про слабку турбулентність у гамільтонівських системах, що розглядається в цьому та наступному підрозділах, уперше була розв'язана Г.М. Заславським та Р.З. Сагдеевим<sup>1</sup>.

#### 3.3.1.1. Гамільтонівський опис хвиль

Розглянемо хвильове поле  $y(x, t)$ , що залежить (для простоти) лише від однієї координати  $x$ . Нехай рівняння для поля  $y(x, t)$  може бути записане у формі

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \hat{Q}(x, t)y(x, t), \quad (3.3.1)$$

де  $\hat{Q}(x, t)$  – оператор (взагалі кажучи, нелінійний), що діє на функцію  $y$ . Він може, зокрема, містити похідні за координатою  $x$ , інтеграли та інше.

Розкладемо поле  $y(x, t)$  в інтеграл Фур'є за координатою:

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(k, t) \exp(ikx) dk, \quad y(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) \exp(-ikx) dx. \quad (3.3.2)$$

Підстановка (3.3.2) до рівняння (3.3.1) приводить до нескінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dy(k, t)}{dt} = Q_k(t, [y(k, t)]), \quad (3.3.3)$$

<sup>1</sup> Див.: Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ. Т.52 (1967). С.1081. Р.З.Сагдеев (Роальд Зиннурович Сагдеев, Roald Zinnur uđlı Səđdiev, нар. 1932) – відомий російський та американський фізик-теоретик, за національністю татарин, академік АН СРСР (1968), Герой Соціалістичної Праці (1986), лауреат Ленінської премії (1984). Відомий теоретик у галузі фізики плазми. В різний час працював в Інституті атомної енергії ім. І.В.Курчатова (м. Москва), Інституті ядерної фізики Сибірського відділення АН СРСР (м. Новосибірськ), Інституті космічних досліджень АН СРСР (м. Москва, 1973-1988 – директор). З 1990 р. живе в США, професор університету Меріленду.

де права частина

$$Q_k(t, [y(k, t)]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ikx) \hat{Q}(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} y(k', t) \exp(ik'x) dk' \quad (3.3.4)$$

залежить (взагалі кажучи, нелінійним чином) від амплітуд просторових гармонік  $y(k, t)$  з довільними значеннями  $k$ . Набір рівнянь (3.3.3) відповідає системі з кількістю ступенів вільності, яка дорівнює континууму.

Нехай аналізована система є просторово обмеженою (має довжину  $L$ ). Тоді її можна періодично продовжити, щоб задовольнити умові

$$y(x, t) = y(x + L, t). \quad (3.3.5)$$

У цьому випадку замість інтеграла (3.3.2) можна написати ряд Фур'є:

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(t) \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} x\right), \quad y_n(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} y(x, t) \exp\left(-i \frac{2\pi n}{L} x\right) dx. \quad (3.3.6)$$

В результаті рівняння (3.3.1) зводиться до системи

$$\dot{y}_n = Q_n(t, [y_n]), \quad (3.3.7)$$

$$Q_n(t, [y_n]) = \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \exp\left(-i \frac{2\pi n}{L} x\right) \hat{Q}(x, t) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} y_{n'}(t) \exp\left(i \frac{2\pi n'}{L} x\right).$$

Формально об'єкт, що описується рівняннями (3.3.7), можна інтерпретувати як деяку динамічну систему<sup>2</sup> (залежність від часу в правій частині можна виключити, замінивши  $t$  на  $\tau$  і додавши рівняння  $d\tau/dt = 1$ ), або систему (нелінійно) зв'язаних осциляторів, причому кількість ступенів вільності такої системи, на відміну від (3.3.3), є зчисленною. Тим самим початкова задача про нелінійну взаємодію хвиль, описувана рівнянням (3.3.1) у частинних похідних, істотно спрощується. Зокрема, зведення до моделі зв'язаних осциляторів дозволяє застосувати для опису хвильового поля гамільтонівський формалізм.

Очевидно, для системи зчисленної кількості зв'язаних нелінійних (за координатою) осциляторів гамільтоніан можна записати як нескінченний ряд вигляду

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{y}_n \dot{y}_{-n} + U([y_n]) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dot{y}_n \dot{y}_{-n} + \omega_n^2 y_n y_{-n}) + \frac{1}{3} \sum_{n_1, n_2, n_3} V_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 + n_2 + n_3) + \dots, \quad (3.3.8)$$

де матричні елементи  $V_{n_1, n_2, n_3}$  є симетричними щодо перестановки довільної пари індексів,  $\delta(n) \equiv \delta_{n,0}$  – символ Кронекера. Квадратичні доданки в гамільтоніані відповідають лінійним у рівнянні руху, кубічні – квадратичній нелінійності, і так далі. Символи Кронекера  $\delta(n)$  вказують, що для реалізації параметричної взаємодії трьох хвиль на квадратичній нелінійності повинна виконуватись умова синхронізму  $k_{n_1} + k_{n_2} + k_{n_3} = 0$  (враховано, що  $k_n = 2\pi n/L$ ). У рівнянні (3.3.8) прийнято також, що функції  $y(x, t)$  дійсні, тому, як випливає з (3.3.6),  $y_n^* = y_{-n}$ .

Знаючи вигляд гамільтоніану (3.3.8), можна, використавши гамільтонівський формалізм, записати рівняння руху, з яких знаходяться невідомі "координати"  $y_n$  та "імпульси"  $dy_n/dt$ .

### 3.3.1.2. Опис моделі

Розглянемо одновимірне хвильове поле, збуджене в слабконелінійному середовищі на

<sup>2</sup> Нагадаємо, що динамічна система – це система, що описується набором рівнянь вигляду  $dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, n$ .

відрізку  $[-L/2, L/2]$ . Як уже відзначалося, спектр такого поля буде дискретним. Будемо вважати, що кількість гармонік у спектрі є великою, а нелінійність – слабкою. Саме така модель, як ми переконаємося далі, породжує слабку турбулентність хвильового поля.

Якщо в гамільтоніані обмежитися лише доданками третього й четвертого порядку (тобто квадратичною і кубічною нелінійністю в звичайному розумінні), дістанемо:

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (\dot{y}_n \dot{y}_{-n} + \omega_n^2 y_n y_{-n}) + \frac{1}{3} \sum_{n_1, n_2, n_3} V_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 + n_2 + n_3) + \frac{1}{4} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} V_{n_1, n_2, n_3, n_4} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} y_{n_4} \delta(n_1 + n_2 + n_3 + n_4). \quad (3.3.9)$$

Відповідно до сказаного вище всі матричні елементи  $V$  вважатимемо малими.

Доданки третього порядку в рівнянні (3.3.9), як і раніше, описують параметричну взаємодію трьох хвиль на квадратичній нелінійності, а доданки четвертого порядку – відповідно взаємодію чотирьох хвиль на кубічній нелінійності, для якої умова синхронізму набуває вигляду  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ . Відповідні матричні елементи в обох випадках є симетричними щодо перестановки довільної пари індексів.

Звичайно врахування кубічної нелінійності дозволяє описати самовплив хвиль (тобто нелінійну взаємодію вигляду  $\omega + \omega - \omega = \omega$ ), який може привести, зокрема, до залежності дисперсії (частоти або хвильового числа) хвилі від її амплітуди. В даному випадку розглядатиметься також взаємодія двох хвиль вигляду  $\omega + \omega_1 - \omega_1 = \omega$ . Як буде показано нижче, в даній задачі така взаємодія є принциповою.

### 3.3.1.3. Рівняння для нелінійно зв'язаних мод

Як уже вказувалося, гамільтоніан (3.3.9) зручно інтерпретувати як енергію взаємодії великої кількості осциляторів з амплітудами  $y_n$ . Тоді індекс  $n$  можна розглядати як номер осцилятора, рух якого описується рівняннями

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}}, \quad \frac{d\dot{y}_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_{-n}}. \quad (3.3.10)$$

Підставивши до рівнянь (3.3.10) вигляд гамільтоніану (3.3.9), дістанемо:

$$\dot{y}_n = \dot{y}_n \quad (\text{тотожність}) \quad \text{та} \quad \ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = -\sum_{n_1, n_2} V_{-n, n_1, n_2} y_{n_1} y_{n_2} \delta(n - n_1 - n_2) - \sum_{n_1, n_2, n_3} V_{-n, n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n - n_1 - n_2 - n_3) \quad (3.3.11)$$

(враховано, що символ Кронекера є парною функцією).

Співвідношення (3.3.11) являє собою рівняння для осцилятора, який нелінійно взаємодіє з усіма іншими.

Як уже вказувалося, кубічна нелінійність може привести до взаємного впливу двох хвиль. Щоб урахувати цей ефект, залишимо у відповідній сумі лише доданки, пропорційні  $y_n$ , тобто братимемо до уваги лише процеси вигляду  $\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_1} = \omega_n$ . Дістанемо:

$$\sum_{n_1, n_2} V_{-n, n, n_1, n_2} y_n y_{n_1} y_{n_2} \delta(n - n - n_1 - n_2) = 3y_n \sum_{n_1} V_{n, -n, n_1, -n_1} y_{n_1} y_{-n_1}. \quad (3.3.12)$$

З урахуванням (3.3.12) рівняння (3.3.11) набувають вигляду:

$$\ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = -\sum_{n_1, n_2} V_{-n, n_1, n_2} y_{n_1} y_{n_2} \delta(n - n_1 - n_2) - 3y_n \sum_{n_1} V_{n, -n, n_1, -n_1} y_{n_1} y_{-n_1} \quad (3.3.11 \text{ а})$$

### 3.3.1.4. Узагальнена неізохронність

Будемо розв'язувати систему рівнянь (3.3.11 а) за методом послідовних наближень. В лінійному (за амплітудами хвиль) наближенні ця система розпадається на набір ізольованих рівнянь для кожного з осциляторів, розв'язки яких можна подати у формі

$$y_n = y_n^{(0)} \cos(\omega_n t + \varphi_n). \quad (3.3.13)$$

Тепер, відповідно до методу послідовних наближень, підставимо (3.3.13) до правої частини (3.3.11 а) під знаками сум. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n = & - \sum_{n_1, n_2} V_{n, n_1, n_2} y_{n_1}^{(0)} y_{n_2}^{(0)} \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{n_1}) \cos(\omega_{n_2} t + \varphi_{n_2}) \delta(n - n_1 - n_2) - \\ & - 3y_n \sum_{n_1} V_{n, -n, n_1, -n_1} y_{n_1}^{(0)} y_{-n_1}^{(0)} \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{n_1}) \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{-n_1}), \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

де під  $y_n$  слід розуміти суму доданків нульового і першого порядків мализни,  $y_n = y_n^{(0)} + y_n^{(1)}$ .

Оскільки

$$\cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{n_1}) \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{-n_1}) = \frac{1}{2} \left[ \cos(2\omega_{n_1} t + \varphi_{n_1} + \varphi_{-n_1}) + \cos(\varphi_{n_1} - \varphi_{-n_1}) \right],$$

то останній доданок у правій частині (3.3.14) можна перенести ліворуч і об'єднати з останнім доданком у лівій частині, відкинувши коливання з частотою  $2\omega_{n_1}$ . Тоді замість частоти  $\omega_n$  до рівняння увійде нова частота

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \frac{3}{2} \sum_{n_1} V_{n, -n, n_1, -n_1} |y_{n_1}^{(0)}|^2} \approx \omega_n + \frac{3}{4\omega_n} \sum_{n_1} V_{n, -n, n_1, -n_1} |y_{n_1}^{(0)}|^2. \quad (3.3.15)$$

Частота (3.3.15) враховує неізохронність коливань – залежність їхнього періоду від амплітуди, коли  $n_1 = n$ . Цей ефект спричинений урахуванням самовпливу хвиль на кубічній нелінійності. Наявність процесів взаємного впливу двох хвиль вигляду  $\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_1} = \omega_n$ , де  $n_1 \neq n$ , приводить до того, що частота  $\omega_n$  залежить не тільки від амплітуди коливань  $n$ -ї моди, але, взагалі кажучи, й від амплітуд коливань усіх інших мод системи. Таку властивість можна назвати узагальненою неізохронністю. Причиною виникнення узагальненої неізохронності є параметрична взаємодія на кубічній нелінійності  $n$ -ї моди з усіма іншими за схемою  $\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_1} = \omega_n$ .

З урахуванням (3.3.15) рівняння руху (3.3.14) набувають вигляду:

$$\ddot{y}_n + \bar{\omega}_n^2 y_n = - \sum_{n_1, n_2} V_{-n, n_1, n_2} y_{n_1}^{(0)} y_{n_2}^{(0)} \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_{n_1}) \cos(\omega_{n_2} t + \varphi_{n_2}) \delta(n - n_1 - n_2). \quad (3.3.16)$$

### 3.3.1.5. Зведення рівнянь руху до моделі вимушених коливань

Спробуємо додатково спростити систему (3.3.16), скориставшись тією обставиною, що збуджене поле містить велику кількість мод.

Нехай  $\omega_{\max}$  та  $\omega_{\min}$  є відповідно максимальна та мінімальна частоти збудженого спектру гармонік,  $\Delta k = 2\pi/L$  – віддаль між сусідніми гармоніками за хвильовим числом. Характерна віддаль між сусідніми гармоніками за частотою складає величину

$$\Omega_n = \left( \frac{\partial \bar{\omega}_n}{\partial k} \right) \Delta k. \quad (3.3.17)$$

Якщо збуджений пакет достатньо широкий, то кількість збуджених мод можна оцінити як

$$N_0 = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\Omega} \gg 1. \quad (3.3.18)$$

де  $\Omega$  – усереднене за  $n$  значення  $\Omega_n$ .

Будемо надалі вважати, що  $\omega_{\max} \gg \omega_{\min} \approx 0$ .

Припустимо, нарешті, що всі характеристики гармонік у пакеті ( $y_n^{(0)}$ ,  $\varphi_n$ ,  $\Omega_n$  і матричні елементи  $V_{-n, n_1, n_2}$ ) зі зміною номера гармоніки  $n$  змінюються повільно. Тоді при  $N_0 \rightarrow \infty$  рівняння руху для  $n$ -го осцилятора (3.3.16) у правій частині міститиме періодичні сили з амплітудами  $y_0^2$  ( $y_0$  – середнє по пакету значення величини  $y_n^{(0)}$ ) і частотами, кратними  $\Omega$ .

При  $N_0 \rightarrow \infty$ , коли кількість таких доданків стане дуже великою, можна наближено записати систему рівнянь (3.3.16) у вигляді:

$$\ddot{y}_n + \bar{\omega}_n^2 y_n \approx -\frac{1}{4} V y_0^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\Omega t), \quad (3.3.19)$$

де  $V$  – середнє по пакету значення величини  $V_{-n, n_1, n_2}$ . Як бачимо, в цьому наближенні система (3.3.16) перетворюється на набір рівнянь, зв'язаних між собою лише через узагальнену неізохронність.

Нарешті, візьмемо до уваги, що нескінченну суму еквідистантних гармонік можна перетворити на суму  $\delta$ -функцій Дірака згідно формули

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{2\pi m}{T} t\right), \quad (3.3.20)$$

що являє собою розклад у ряд Фур'є періодичної послідовності  $\delta$ -функцій.

Тоді рівняння (3.3.19) набудуть вигляду:

$$\ddot{y}_n + \bar{\omega}_n^2 y_n \approx -\frac{\pi}{2} \frac{V y_0^2}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 2\pi \left( \left. \frac{d\bar{\omega}}{dk} \right|_{\Delta k} \right)^{-1} \quad (3.3.21)$$

(враховано, що  $\delta(ax) = \delta(x)/a$ ).

Як бачимо, рівняння (3.3.21) описують набір зв'язаних нелінійних осциляторів, на кожний з яких діє періодична послідовність ударів. Зв'язок між осциляторами забезпечується за рахунок узагальненої неізохронності: власна частота кожного з осциляторів залежить від амплітуд усіх осциляторів системи.

Ми прийшли до моделі, яка є безпосереднім узагальненням розглянутої в п. 3.1.5 моделі одиночного нелінійного осцилятора, який рухається під дією періодичної послідовності коротких ударів.

### 3.3.1.6. Перехід до змінних дія - кут

Оскільки рівняння (3.3.21) містить природний інтервал часу – проміжок між ударами, то для його аналізу зручно перейти від неперервного часу до дискретного (з інтервалом  $T$ ) і скористатися методом точкових відображень, як це було зроблено в п. 3.1.5 при аналізі вимушених коливань окремого нелінійного осцилятора.

Перейдемо в рівнянні (3.3.21) до змінних дія – кут, увівши їх за допомогою співвідношень

$$y_n = \sqrt{\frac{I_n}{2\bar{\omega}_n}} \exp(i\theta_n) + \text{к.с.}, \quad \dot{y}_n = i \sqrt{\frac{I_n \bar{\omega}_n}{2}} \exp(i\theta_n) + \text{к.с.} \quad (3.3.22)$$

Тоді гамільтоніан, що відповідає рівнянням (3.3.21), у змінних дія – кут має вигляд

$$H = \sum_n \left\{ \bar{\omega}_n I_n + \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{2I_n}{\bar{\omega}_n}} V_0 \cos \theta_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right\}, \quad V_0 = \frac{\pi}{8} \frac{I}{\bar{\omega}} V. \quad (3.3.23)$$

Зв'язок між осциляторами, які описуються гамільтоніаном (3.3.23), обумовлений, як уже вказувалося, лише узагальненою неізохронністю. Коефіцієнт  $V_0$ , що визначає потенціал зовнішньої сили – малий параметр, тому формально маємо систему, близьку до інтегрованої.

Скориставшись гамільтонівським формалізмом, з (3.3.23) можна отримати рівняння руху:

$$\dot{I}_n = \frac{2\pi}{\Omega} V_0 \sqrt{\frac{2I_n}{\bar{\omega}_n}} \sin \theta_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \quad \dot{\theta}_n = \bar{\omega}_n \quad (3.3.24)$$

(ми знехтували впливом малої неінтегрованої частини гамільтоніана на зміну кута поруч із доданком нульового порядку мализни).

Відзначимо, що при  $V_0 = 0$ , а також у проміжках між ударами система (3.3.24) стає ін-

тегровою і описує рух на поверхні  $N_0$ -вимірних торів у  $2N_0$ -вимірному фазовому просторі. Врахування залежного від часу доданка в правій частині першого з рівнянь (3.3.24) збільшує розмірність фазового простору на одиницю. Зростання параметра  $V_0$ , який визначає величину цього доданка, приводить до результатів, якісно подібних отриманим для задачі про рух нелінійного осцилятора під дією послідовності коротких ударів (див. вище п. 3.1.5.4): спочатку відповідно до теореми КАМ руйнуються резонансні тори, потім на їхніх місцях виникають області з хаотичною динамікою. Через велику розмірність фазового простору ці області зливаються, утворюючи павутину Арнольда. Врешті область стохастичної динаміки заповнює майже всю частину ту фазового простору, де відбувається еволюція системи – регулярний рух зберігається лише в околах острівців стійкості різних порядків. Такий стан і відповідає турбулентності хвильових полів.

### 3.3.1.7. Побудова відображення

Як уже вказувалося, рух системи, описуваної рівняннями (3.3.24), зручно проаналізувати за допомогою методу точкових відображень, як це було зроблено в п. 3.1.5. Для побудови відображення необхідно проінтегрувати рівняння (3.3.24) в околі точок  $t = mT$  (пор. з п. 3.1.5.2).

Введемо позначення для  $n$ -х компонент векторів дії та кута на кроці відображення з номером  $m$ :

$$I_{n,(m)} \equiv I_n(t = mT - 0); \quad \theta_{n,(m)} \equiv \theta_n(t = mT - 0). \quad (3.3.25)$$

Тоді відображення можна записати у вигляді

$$I_{n,(m+1)} = I_{n,(m)} + \Delta I_{n,(m)}; \quad (3.3.26)$$

$$\theta_{n,(m+1)} = \theta_{n,(m)} + \frac{2\pi}{\Omega} \bar{\omega}_n(\bar{I}_{(m+1)}),$$

де використані позначення

$$\Delta I_{n,(m)} = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{2I_{n,(m)}}{\bar{\omega}_n}} V_0 \sin \theta_{n,(m)}, \quad \bar{I}_{(m+1)} = \{I_{1,(m+1)}, I_{2,(m+1)}, I_{3,(m+1)}, \dots\}. \quad (3.3.27)$$

Відображення (3.3.27) можна розглядати як узагальнення універсального відображення (3.1.115 а) на систему зв'язаних нелінійних осциляторів.

### 3.3.1.8. Локальна нестійкість фаз

Дослідимо тепер локальну нестійкість фазових траєкторій системи. Оскільки нелінійність вважається малою, то відносна зміна дії на кожному кроці відображення також буде малою:  $\Delta I_{n,(m)} \sim V_0 \ll I_n$ . Але зміна фаз на одному кроці відображення може не бути малою, і саме тут в першу чергу може виникнути локальна нестійкість (пор. з п. 3.1.5.5).

Виходячи зі рівнянь (3.3.26), запишемо співвідношення між приростами фази осциляторів з номерами  $n$  та  $l$  на сусідніх кроках відображення:

$$\frac{\delta \theta_{n,(m+1)}}{\delta \theta_{l,(m)}} = \delta_{n,l} + \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\partial \bar{\omega}_{n,(m+1)}}{\partial I_{l,(m+1)}} \frac{\partial \Delta I_{l,(m)}}{\partial \theta_{l,(m)}} = \delta_{n,l} + K_{n,l} \cos \theta_{l,(m)}, \quad (3.3.28)$$

де враховані співвідношення (3.3.15), (3.3.23) та (3.3.27) і використане позначення

$$K_{n,l} \approx \frac{VI}{\bar{\omega}\Omega^2} \frac{V_{n,-n,l,-l}}{\bar{\omega}_n \bar{\omega}_l} \sqrt{\frac{I_l}{\bar{\omega}_l}}. \quad (3.3.29)$$

Відмінна від нуля величина  $K_{n,l}$  виникає внаслідок ефекту узагальненої неізохронності – залежності власної частоти осцилятора від значень дії для всіх інших осциляторів, зумовленої ненульовими значеннями матричних елементів  $V_{n,-n,l,-l}$ .

Нехай змінна  $y$  є безрозмірною. Тоді гамільтоніан  $H$  має розмірність  $\omega^2$ . Таку саму



розмірність мають матричні елементи  $V$ ,  $V_{-n,n,n_1,-n_1}$  та інші.

Розглянемо вираз (3.3.9) для гамільтоніана. Він має вигляд степеневого ряду. Як ми побачимо далі, амплітуда коливань є малим параметром задачі. Тому коефіцієнти при різних степенях амплітуд, або, що те саме, члени ряду різних степенів при  $y_n \sim 1$  мають бути величинами однакового порядку.

У гамільтоніані (3.3.9) сума квадратичних доданків буде порядку  $N_0 \omega_n^2 y_n^2$ , а сума кубічних доданків (з урахуванням того, що  $\delta$ -функція із суми по  $n_3$  залишає лише один доданок, якщо  $n_1$  і  $n_2$  задані) – порядку  $N_0^2 V y_n^3$ . Щоб при  $y_n \sim 1$  внески квадратичних і кубічних доданків були одного порядку, слід виконати умову  $N_0 \omega_n^2 \sim N_0^2 V$ , або  $V \sim \omega_n^2 / N_0$ . Але  $\omega_n \sim N_0 \Omega$ , звідки  $V \sim \omega \Omega$ .

Серед доданків четвертого порядку число ненульових елементів у матриці  $V_{n_1, n_2, n_3, n_4}$  може виявитися дуже малим – порядку числа діагональних елементів  $N_0$ . Тому відповідну суму в гамільтоніані можна оцінити як  $N_0 V_{n_1, n_2, n_3, n_4} y_n^4$ . Отже, з тих самих міркувань, що й раніше, можна прийняти  $V_{-n,n,n_1,-n_1} \sim \omega_n^2$ .

З урахуванням цих оцінок для матричних елементів вираз для  $K_{n,l}$  (3.3.29) можна переписати у вигляді:

$$K_{n,l} \sim \frac{\omega \Omega \omega^2}{\omega^2 \Omega^2} y_0^3 = \frac{\omega}{\Omega} y_0^3 \approx N_0 y_0^3, \quad (3.3.30)$$

де, як і раніше,  $y_0$  – характерна амплітуда гармонік  $y_n$ .

Оскільки кількість збуджених гармонік має бути великою,  $N_0 = \omega / \Omega \gg 1$ , то параметр  $K_{n,l}$  може не бути малим навіть при малих  $y_0$ .

З іншого боку, відносна зміна дії на один крок відображення при цьому залишається малою:

$$\frac{\Delta I}{I_0} \sim \frac{2\pi V_0}{\Omega I_0} \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sim \frac{2\pi \pi VI}{\Omega 8\omega I} y_0 \sim \frac{\omega \Omega}{\omega \Omega} y_0 \sim y_0 \ll 1 \quad (3.3.31)$$

(враховано позначення (3.3.23) та оцінку для  $V$ ).

Отже, малий параметр задачі – це безрозмірна амплітуда  $y_0$ .

Рівняння для варіації фаз (3.3.28) має таку саму структуру, як у випадку стандартного відображення (це впливає з формули (3.1.115 б), п. 3.1.5.2). Міркуючи за аналогією, можна зробити висновок, що при  $|K_{n,l}| \geq 1$  у фазовому просторі виникає нестійкість всюди, крім околу точок  $\theta_n^{(1)} = \pi/2$ ,  $\theta_n^{(2)} = 3\pi/2$ . Розмір областей стійкості зменшується зі зростанням  $K_{n,l}$ .

Перепишемо відображення (3.3.26) у більш наочному вигляді, розклавши частоту  $\bar{\omega}(\vec{I}_{(m+1)})$  у багатовимірний ряд Тейлора за  $\Delta I_{n,(m)}$ :

$$I_{n,(m+1)} = I_{n,(m)} + \sqrt{\frac{I_{n,(m)}}{\bar{\omega}_n}} I \sin \theta_{n,(m)}; \quad (3.3.26 \text{ а})$$

$$\theta_{n,(m+1)} = \theta_{n,(m)} + 2\pi \frac{\bar{\omega}_n}{\Omega} + \sum_l K_{n,l} \sin \theta_{l,(m)}.$$

Новим у відображенні (3.3.26 а) порівняно зі стандартним відображенням (3.1.115 в) є наявність багатьох напрямків у фазовому просторі, для яких виконано умову  $|K_{n,l}| \geq 1$  і має місце нестійкість фаз  $\theta_n$ . Позначимо кількість таких напрямків через  $N$  ( $N \sim N_0$ ).

### 3.3.1.9. КС-ентропія

Наявність  $N$  нестійких ступенів вільності з інкрементами  $\lambda_n$  приводить до того, що еволюція огрубленого фазового об'єму (див. п. 3.1.3.8) визначається співвідношенням

$$\overline{\Delta\Gamma} = \Delta\Gamma_0 \exp\left(t \sum_{n=1}^N \lambda_n\right). \quad (3.3.32)$$

Тоді КС-ентропія  $h$  задається формулою

$$h = \lim_{\Delta\Gamma_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\Delta\Gamma} = \sum_{i=1}^N \lambda_i. \quad (3.3.33)$$

Грубо кажучи, за наявності  $N$  приблизно однаковою мірою нестійких напрямків КС-ентропія зростає в  $N$  разів у порівнянні з випадком стандартного відображення для системи з півтора ступенями вільності.

За умови сильної локальної нестійкості, коли  $|K_{n,l}| \gg 1$ , можна вважати, що

$$\left| \frac{\delta\theta_{n,(m+1)}}{\delta\theta_{l,(m)}} \right| \sim K, \quad (3.3.28 \text{ a})$$

де під  $K$  розуміємо середнє за хвильовим пакетом значення  $K_{n,l}$ . Крім того, опущено множник  $\cos\theta_{l,(m)}$ . Останнє спрощення означає, що ми нехтуємо існуванням малих острівців стійкості навколо стійких стаціонарних точок (див. пп. 3.1.2.8, 3.1.5.4).

Виділимо деякий підпростір фазового простору, який включає лише нестійкі напрямки. Введемо елемент фазового об'єму цього підпростору на кроці відображення  $m$ :

$$D(\vec{\theta}_{(m)}) = d\theta_{1,(m)} d\theta_{2,(m)} \dots d\theta_{N,(m)}. \quad (3.3.34)$$

Розглянемо величину

$$\frac{D(\theta_{n(m)})}{D(\theta_{n(0)})} = \det \left| \frac{\delta\theta_{n_i(m)}}{\delta\theta_{n_j(0)}} \right| \quad (3.3.35)$$

(у правій частині рівняння (3.3.35) стоїть визначник якобіану відображення). Її можна переписати у вигляді:

$$\frac{D(\vec{\theta}_{(n)})}{D(\vec{\theta}_{(0)})} = \det \left| \frac{\delta\theta_{n_i(m)}}{\delta\theta_{n_j(m-1)}} \right| \cdot \det \left| \frac{\delta\theta_{n_i(m-1)}}{\delta\theta_{n_j(m-2)}} \right| \cdot \dots \cdot \det \left| \frac{\delta\theta_{n_i(1)}}{\delta\theta_{n_j(0)}} \right|. \quad (3.3.35 \text{ a})$$

Кожен якобіан у добутку в правій частині (3.3.35 а) містить  $N^2$  елементів величиною порядку  $K$ , отже, відповідні визначники є величинами порядку  $K^N$ . Тоді з (3.3.35 а) випливає оцінка

$$D(\vec{\theta}_{(m)}) \sim D(\vec{\theta}_{(0)}) (K^N)^m. \quad (3.3.35 \text{ б})$$

Підставляючи (3.3.35 б) замість  $\overline{\Delta\Gamma}$  у вираз для КС-ентропії (3.3.33), отримаємо:

$$h \approx N \ln K \quad (3.3.36)$$

(тут  $h$  вимірюється в одиницях  $1/T$ ).

Порівнюючи цей результат із формулою (3.1.125) для часу перемішування у випадку стандартного відображення з урахуванням співвідношення між часом перемішування та КС-ентропією (див. п. 3.1.3.9), бачимо, що наявність  $N$  нестійких напрямків у фазовому просторі приводить до зростання КС-ентропії в  $N$  разів.

### 3.3.1.10. Розчеплення кореляцій

Оскільки КС-ентропія  $h$  зростає в  $N$  разів у порівнянні з випадком нестійкості в одному напрямку, час розчеплення кореляцій фаз хвиль (час перемішування) має, очевидно,

зменшитись в  $N$  разів.

Справді, розглянемо кореляційну функцію

$$R_n(t) = \langle\langle \exp i(\theta_{n(m)} - \theta_{n(0)}) \rangle\rangle, \quad (3.3.37)$$

де номер кроку  $n \approx 2\pi\Omega t$  ( $n \gg 1$ ) відіграє роль дискретного часу і введено позначення

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\theta_{1(0)} \int_0^{2\pi} d\theta_{2(0)} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{N(0)} X = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} XD(\theta_{n(0)}) \quad (3.3.38)$$

(усереднення за фазами по нестійких напрямках). Для оцінки  $R_n(t)$ , вважаючи виконаною умову  $|K_{n,l}| \gg 1$ , будемо залишати в рекурентному співвідношенні для фаз лише доданки, що змінюються найшвидше.

В результаті отримаємо:

$$\theta_{n(m)} - \theta_{n(0)} \sim \omega_n t + \sum_{n_1} K_{n,n_1} \sin \left( \sum_{n_2} K_{n_1,n_2} \sin \left( \sum_{n_3} K_{n_2,n_3} \sin \dots \left( \sum_{n_m} K_{n_{m-1},n_m} \sin \theta_{n_m(0)} \right) \dots \right) \right). \quad (3.3.39)$$

Підстановка цього виразу до формули (3.3.37) і усереднення за фазами (аналогічно до того, як це було зроблено в п. 3.1.5.5) дає:

$$R_n(t) \sim \exp \left( -\frac{t}{\tau_c} + i\omega_n t \right), \quad (3.3.37 \text{ а})$$

де

$$\tau_c = \frac{2}{\Omega N \ln K}. \quad (3.3.40)$$

Отже, час релаксації фаз справді обернено пропорційний до числа ступенів вільності, вздовж яких відбувається перемішування.

### *Контрольні питання до підрозділу 3.3.1*

1. Коли можна застосовувати гамільтонівський опис до хвильового поля?
2. Чи може виникнути слабка турбулентність у середовищах, що мають лише квадратичну нелінійність?
3. Які властивості слабкої турбулентності в гамільтонівських системах визначає відповідно квадратична та кубічна нелінійність?
4. До якої моделі зводиться турбулентність у гамільтонівських системах при побудові відображення?
5. Чому розвиток нестійкості в системах із великою кількістю збуджених ступенів вільності можливий навіть за невеликих амплітуд окремих мод?
6. Порівняйте розвиток слабкої турбулентності і хаосу, описуваного стандартним відображенням.
7. Порівняйте КС-ентропію і час перемішування для хаосу, описуваного стандартним відображенням, і слабкої турбулентності.

### **3.3.2. Статистичний опис слабкої турбулентності**

При статистичному описі будь-якої системи (наприклад, газу) втрачається детальна інформація (про рух окремих атомів або молекул), але натомість можна отримати деякі узагальнені характеристики ансамблю (температуру, тиск та інші).

У цьому підрозділі статистичний опис буде застосовано до слабкої турбулентності хвильових полів (модель хвильового поля в середовищі зі слабкою нелінійністю, описана в попередньому підрозділі).

Умова розвитку нестійкості при параметричній взаємодії хвиль, отримана в попередньому підрозділі, є аналогічною до лінійної теорії автогенератора – вона лише передбачає умови виникнення турбулентної динаміки (КС-ентропія в певному сенсі є аналогом інкреме-

нту малих коливань) і нічого не говорить про її властивості.

Величиною, що з достатньою повнотою характеризує турбулентну динаміку системи, є спектр турбулентності, тобто залежність інтенсивності усталених коливань (в даному разі – дії) від частоти (пор. з п. 3.1.5.6). Для визначення цієї характеристики якраз і необхідно застосувати статистичний опис, відкинувши шляхом усереднення часові зміни кутів і залишивши лише дії. Тим самим опис руху системи робиться суттєво менш детальним.

### 3.3.2.1. Багаточастинкова функція розподілу та рівняння Ліувілля

Строго кажучи, не існує однозначного способу, за допомогою якого можна звести нелінійне хвильове рівняння до деякої скінченновимірної динамічної системи. Нижче ми розглянемо один з можливих підходів до розв'язання такої проблеми.

Нехай динамічна система з  $N$  ступенями вільності описується гамільтоніаном вигляду

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{I}) + H_{\text{int}}(\vec{I}, \vec{\theta}), \quad H_0(\vec{I}) = \sum_{k=1}^N \omega_k I_k, \quad (3.3.41)$$

де  $H_0$  – частина гамільтоніану, що описує ансамбль лінійних осциляторів, які не взаємодіють між собою ( $\omega_k$  – набір констант), а  $H_{\text{int}}$  для моделі, розібраної у п. 3.3.1, має вигляд

$$H_{\text{int}}(\vec{I}, \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^N \Delta\omega_k(\vec{I}) I_k + \beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \left( \frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \right)^{1/2} \left\{ V_{k_1, k_2, k_3} \exp[i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] + \text{к.с.} \right\} \delta(k_1 + k_2 + k_3),$$

$$0 < \beta \ll 1, \quad \Delta\omega_k(\vec{I}) \sim \beta^2, \quad (3.3.42)$$

де перший доданок у правій частині (3.3.42) відповідає узагальненій неізохронності, а другий – трихвильовій взаємодії на квадратичній нелінійності.

Точний опис динамічної системи з  $N$  ступенями вільності забезпечує  $N$ -частинкова функція розподілу  $f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) \equiv f(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2, \dots, I_n, \theta_n, t)$ , що залежить від  $N$  дій та  $N$  фаз, тобто визначена в  $2N$ -вимірному фазовому просторі. Нагадаємо, що вона визначає ймовірність  $f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) d\vec{I} d\vec{\theta}$  того, що значення дії  $\vec{I}$  та кута  $\vec{\theta}$  в момент часу  $t$  потрапляють відповідно до інтервалів  $(\vec{I}, \vec{I} + d\vec{I})$  та  $(\vec{\theta}, \vec{\theta} + d\vec{\theta})$ . Ця функція розподілу задовольняє рівнянню Ліувілля

$$\frac{df(\vec{I}, \vec{\theta}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial I_k} \dot{I}_k + \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k \right) = 0. \quad (3.3.43)$$

Використовуючи гамільтонівські рівняння руху та враховуючи явний вигляд гамільтоніану (3.3.41), рівняння (3.3.42) можна переписати у формі:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \omega_k = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial I_k} \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial I_k} \right). \quad (3.3.43 \text{ а})$$

Рівняння (3.3.43 а) точно описує динамічну систему з гамільтоніаном (3.3.41). Його права частина є величиною принаймні першого порядку за малим параметром  $\beta$ .

### 3.3.2.2. Розв'язок рівняння Ліувілля в нульовому наближенні

Будемо розв'язувати рівняння Ліувілля (3.3.43 а) методом послідовних наближень за малим параметром  $\beta$  (подібно до того, як це робилося із системою рівнянь руху для даної моделі, див. п. 3.3.1.4). У нульовому наближенні отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \omega_k = 0. \quad (3.3.43 \text{ б})$$

Рівняння (3.3.43 б) відповідає інтегровній системі – набору осциляторів, що не взаємодіють між собою. Тому його розв'язок можна шукати у формі:

$$f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) = \prod_{k=1}^N f_k(I_k, \theta_k, t). \quad (3.3.44)$$

Підставивши (3.3.44) до (3.3.43 б), можна отримати систему рівнянь вигляду

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial f_k}{\partial \theta_k} = 0, \quad (3.3.45)$$

які мають загальні розв'язки вигляду

$$f_k(I_k, \theta_k, t) = f_k(I_k, \theta_k - \omega_k t). \quad (3.3.46)$$

Оскільки залежності від кутів  $\theta_k$  є періодичними з періодом  $2\pi$ , то розв'язки (3.3.46) можна подати у вигляді рядів Фур'є за  $\theta_k$ :

$$f_k(I_k, \theta_k - \omega_k t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_k^l(I_k) \exp[i l (\theta_k - \omega_k t)]. \quad (3.3.47)$$

Підставивши ряди (3.3.47) до (3.3.44), отримаємо:

$$f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) = \sum_{\vec{l}} f^{(\vec{l})}(\vec{I}) \exp[i(\vec{l} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\omega} t))], \quad (3.3.48)$$

де

$$\vec{l} = \{l_1, l_2, \dots, l_N\}, \quad (\vec{l} \cdot \vec{\theta}) \equiv \sum_{k=1}^N l_k \theta_k, \quad f^{(\vec{l})}(\vec{I}) = \prod_{k=1}^N f_k^{l_k}(I_k). \quad (3.3.49)$$

### 3.3.2.3. Отримання рівнянь для амплітуд ряду Фур'є функції розподілу

Тепер спробуємо врахувати доданки першого порядку за  $\beta$ . Подібно до того, як це робиться при розв'язуванні рівнянь методом повільних амплітуд, припустимо, що малі (порядку  $\beta$ ) доданки в рівнянні Ліувілля (3.3.43 а) приводять до повільної зміни амплітуд  $f^{(\vec{l})}(\vec{I})$  з часом. В результаті розв'язок (3.3.43 а) можна шукати у формі:

$$f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) = \sum_{\vec{l}} f^{(\vec{l})}(\vec{I}, t) \exp[i(\vec{l} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\omega} t))]. \quad (3.3.48 \text{ а})$$

Підставивши (3.3.48 а) до рівняння (3.3.43 а), можна (в силу однозначності розкладу в ряд Фур'є) прирівняти амплітуди при експонентах з однаковими значеннями "векторного індексу"  $\vec{l}$  і в результаті отримати набір рекурентних рівнянь для  $f^{(\vec{l})}(\vec{I}, t)$  вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(\vec{l})}(\vec{I}, t)}{\partial t} = & -i3\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1, k_2, -k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \sqrt{\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}}} \times \\ & \times \left\{ \left( \frac{l_{k_1}}{2I_{k_1}} + \frac{l_{k_2}}{2I_{k_2}} - \frac{l_{k_3}}{2I_{k_3}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) f^{(\vec{l} + \vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, t) \exp[i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{l_{k_1}}{2I_{k_1}} + \frac{l_{k_2}}{2I_{k_2}} - \frac{l_{k_3}}{2I_{k_3}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) f^{(\vec{l} - \vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, t) \exp[-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

де  $\vec{e}_k$  – одиничний вектор у напрямку  $k$  (тобто вектор, у якого всі компоненти, крім  $k$ -ї, дорівнюють нулеві, а  $k$ -та компонента – одиниці),  $l_k$  –  $k$ -та компонента "векторного індексу"  $\vec{l}$ . Зміна індексу коефіцієнтів ряду Фур'є в правій частині пов'язана з тим, що збурення  $H_{\text{int}}$ , що входить у праву частину рівняння Ліувілля (3.3.43 а), залежить від трьох компонент вектора  $\vec{\theta}$ . З цієї самої причини в правих частинах з'являються експоненціальні залежності від часу. Знак мінус при окремих доданках породжується умовою на хвильові числа при параметричній взаємодії трьох хвиль (формально на це вказує символ Кронекера  $\delta(k_1 + k_2 - k_3)$ ).

Рівняння (3.3.50) є аналогом укорочених рівнянь для «повільних амплітуд»  $f^{(\vec{l})}(\vec{l}, t)$ .

Введемо оператор

$$Q_{k_1, k_2, k_3}^{(\pm)} = V_{k_1, k_2, -k_3} \sqrt{\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}}} \left[ \left( \frac{l_{k_1}}{2I_{k_1}} + \frac{l_{k_2}}{2I_{k_2}} - \frac{l_{k_3}}{2I_{k_3}} \right) \pm \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \right]. \quad (3.3.51)$$

Тоді співвідношення (3.3.50) можна переписати у дещо компактнішій формі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(\vec{l})}(\vec{l}, t)}{\partial t} = & -i3\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \left\{ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} f^{(\vec{l} + \vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, t) \exp[i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] + \right. \\ & \left. + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(\vec{l} - \vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, t) \exp[-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.50 \text{ а})$$

Рівняння (3.3.50 а) доповнимо початковими умовами у формі

$$f^{(\vec{l})}(\vec{l}, t) \Big|_{t=0} = f^{(\vec{l})}(\vec{l}, 0), \quad (3.3.52)$$

де  $f^{(\vec{l})}(\vec{l}, 0)$  – відомий початковий розподіл.

### 3.3.2.4. Отримання редукованого рівняння для постійної складової функції розподілу

Застосувавши до рівняння (3.3.50 а) перетворення Лапласа<sup>3</sup> за часом, що має вигляд

$$F(p) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-pt) dt,$$

можна з урахуванням початкових умов (3.3.52) отримати таке рекурентне рівняння для функції  $f^{(\vec{l})}(\vec{l}, p)$ :

$$\begin{aligned} pf^{(\vec{l})}(\vec{l}, p) = & f^{(\vec{l})}(\vec{l}, 0) - i3\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \times \\ & \times \left\{ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} f^{(\vec{l} + \vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, p - i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})) + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(\vec{l} - \vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, p + i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Покладемо в рівнянні (3.3.53)  $\vec{l} = 0$ . Отримаємо рівняння для перетворення Лапласа від постійної (тобто незалежної від кутів  $\vec{\theta}$ ) складової функції розподілу:

$$\begin{aligned} pf^{(0)}(\vec{l}, p) = & f^{(0)}(\vec{l}, 0) - i3\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \times \\ & \times \left\{ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} f^{(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, p - i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})) + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(-\vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, p + i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

Аналогічно до (3.3.54) можна записати рівняння для випадку  $\vec{l} = \pm(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})$  та

$$\begin{aligned} p \rightarrow & p \pm i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}): \\ \left[ p \mp i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \right] & f^{\pm(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, p \mp i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})) \approx \\ \approx & f^{\pm(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{l}, 0) - i3\beta Q_{k_1, k_2, k_3}^{(\mp)} f^{(0)}(\vec{l}, p) \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

(ми залишили в сумі в правій частині лише доданки з індексом  $\vec{l} = 0$ , вважаючи, що коефіцієнти ряду (3.3.48 а) достатньо швидко спадають зі зростанням  $|\vec{l}|$ ).

Тепер підставимо (3.3.55) до правої частини (3.3.54) і залишимо лише доданки першо-

<sup>3</sup> П.-С. Лаплас (Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827) – великий французький математик та астроном, професор математики Нормальної школи, дійсний член Паризької Академії наук, за режиму Наполеона – граф, після реставрації Бурбонів – маркіз і член палати перів. Основні роботи присвячені небесній механіці, диференціальним рівнянням, теорії ймовірності.

го та другого порядків за  $\beta$ . Отримаємо:

$$pf^{(0)}(\vec{I}, p) = f^{(0)}(\vec{I}, 0) - \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \left\{ i3\beta \left[ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} \frac{f^{(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0)}{p - i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})} + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} \frac{f^{(-\vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0)}{p + i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})} \right] + 9\beta^2 \frac{Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(0)}(\vec{I}, p)}{p^2 + (\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})^2} \right\}. \quad (3.3.56)$$

Перейдемо в рівнянні (3.3.56) до границі  $t \rightarrow \infty$  (або, що те саме,  $p \rightarrow 0$ ) і виконаємо зворотнє перетворення Лапласа. Отримаємо:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + 6\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \frac{V_{k_1, k_2, -k_3}^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \right] f^{(0)}(\vec{I}, t) = \\ = -i3\beta \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \left\{ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} f^{(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0) \exp[i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] + \right. \\ \left. + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(-\vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0) \exp[-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t] \right\}. \quad (3.3.57)$$

Як бачимо, рівняння (3.3.57) для постійної складової функції розподілу вийшло замкненим, але неоднорідним: його права частина містить лише коефіцієнти багатовимірного ряду Фур'є, що відповідають початковим умовам (правда, з відмінними від нуля векторними індексами  $-\vec{l} = \pm(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})$ ).

### 3.3.2.5. Рівняння для усередненої за кутами функції розподілу

Введемо усереднену за кутами функцію розподілу  $\Phi(\vec{I}, t)$ , визначену в  $N$ -вимірному просторі дій. Її можна отримати з функції розподілу  $f(\vec{I}, \vec{\theta}, t)$  шляхом усереднення за всіма початковими фазами  $\theta_{k_0}$  (ця операція позначена подвійними кутовими дужками):

$$\Phi(\vec{I}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\theta_{10} \int_0^{2\pi} d\theta_{20} \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{N0} f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) \equiv \langle\langle f(\vec{I}, \vec{\theta}, t) \rangle\rangle. \quad (3.3.58)$$

Підставивши  $f(\vec{I}, \vec{\theta}, t)$  у формі багатовимірного ряду Фур'є (3.3.48 а) до правої частини (3.3.58) і виконавши інтегрування, легко перекопатися, що в рамках зроблених припущень

$$\Phi(\vec{I}, t) \Big|_{t=0} = f^{(0)}(\vec{I}, 0). \quad (3.3.59)$$

Рівняння для функції розподілу  $\Phi(\vec{I}, t)$  можна отримати з (3.3.57) шляхом його інтегрування по всіх початкових фазах. З урахуванням співвідношення (3.3.59) воно набуває вигляду:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \left\{ i3\beta \left[ Q_{k_1, k_2, k_3}^{(+)} f^{(\vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} - \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0) \langle\langle \exp[i(\Delta\theta_{k_1} + \Delta\theta_{k_2} - \Delta\theta_{k_3})] \rangle\rangle \right] + \right. \\ \left. + Q_{k_1, k_2, k_3}^{(-)} f^{(-\vec{e}_{k_1} - \vec{e}_{k_2} + \vec{e}_{k_3})}(\vec{I}, 0) \langle\langle \exp[-i(\Delta\theta_{k_1} + \Delta\theta_{k_2} - \Delta\theta_{k_3})] \rangle\rangle \right] + \\ + 6\pi\beta^2 \frac{V_{k_1, k_2, -k_3}^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \Phi \Big\}, \quad (3.3.60)$$

де враховано, що в силу (3.3.46)

$$\omega_k t = \theta_k(t) - \theta_k(0) \equiv \Delta\theta_k. \quad (3.3.61)$$

Як бачимо, рівняння (3.3.60) для  $\Phi(\vec{I}, t)$  за зовнішнім виглядом таке саме, як рівняння (3.3.57) для  $f(\vec{I}, \vec{\theta}, t)$ . Зокрема, воно зберігає фазову пам'ять системи.

### 3.3.2.6. Умови хаотизації фаз хвиль

Тепер врахуємо вплив нелінійного зсуву частоти  $\Delta\omega_k(\vec{I})$  в гамільтоніані (3.3.42), обумовленого узагальненою неізохронністю (див. п. 3.3.1.4). Це означає, що в формулах (3.3.57) та (3.3.61) сталі частоти  $\omega_k$  потрібно замінити на частоти з урахуванням узагальненої неізохронності  $\omega_k + \Delta\omega_k(\vec{I})$ . Взаємодія моди з даним значенням  $k$  з усіма іншими зводиться, як було показано в п. 3.3.1, до ефективного розсіювання періодично в часі ("зовнішня сила" у вигляді послідовності коротких ударів, див. формулу (3.3.21)). Кожен акт розсіювання змінює значення дії. Тому нелінійний зсув частоти  $\Delta\omega_k(\vec{I})$  виявляється функцією часу.

Врахуємо цю обставину в множниках  $\exp\left[\pm i(\Delta\theta_{k_1} + \Delta\theta_{k_2} - \Delta\theta_{k_3})\right]$ , що входять до доданків порядку  $\beta$  в рівнянні (3.3.60). Для цього візьмемо до уваги, що, згідно (3.3.61),

$$\Delta\theta_k = \theta_k(t) - \theta_k(0) = \theta_{k,(m)} - \theta_{k,(0)}, \quad (3.3.62)$$

де індекс у круглих дужках вказує на номер кроку відображення (див. формулу (3.3.26)). В даному разі з урахуванням (3.3.21)  $m = t/T = \Omega t/2\pi$ .

Тепер зрозуміло, що доданки вигляду  $\left\langle\left\langle \exp\left[\pm i(\Delta\theta_{k_1} + \Delta\theta_{k_2} - \Delta\theta_{k_3})\right]\right\rangle\right\rangle$ , по суті, є кореляторами типу (3.3.37). В даному разі це будуть корелятори не другого, а шостого порядку, причому значення функції беруться в моменти часу  $t = 0$  та  $t$ . Отже, скориставшись співвідношенням (3.3.37 а), можна відразу записати, що за умови  $|K_{n,l}| \geq 1$  (див. вище п.3.3.1.8) унаслідок розвитку нестійкості за кутами

$$\left\langle\left\langle \exp\left[\pm i(\Delta\theta_{k_1} + \Delta\theta_{k_2} - \Delta\theta_{k_3})\right]\right\rangle\right\rangle \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right), \quad (3.3.63)$$

де час розчеплення кореляцій  $\tau_c$  визначається формулою (3.3.40). Можна навіть чекати, що корелятор шостого порядку спадатиме з часом швидше, ніж корелятор другого порядку (3.3.37).

Таким чином, за час щонайбільше порядку  $\tau_c$  доданки першого порядку за  $\beta$  в рівнянні (3.3.60), що зберігають пам'ять про початкові умови, зникнуть, і воно набуде вигляду рівняння Фоккера - Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = & 6\pi\beta^2 \left[ \sum_{k_1, k_2, k_3} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \frac{V_{k_1, k_2, -k_3}^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left( \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \right] \Phi. \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

Рівняння (3.3.64) називається основним кінетичним рівнянням. За структурою воно нагадує рівняння дифузії: в лівій частині стоїть перша похідна за часом, у правій – другі похідні за дією, яка відіграє роль координати. Отже можна стверджувати, що основне кінетичне рівняння описує дифузію функції розподілу в просторі дій хвильових гармонік. Зрозуміло, що реально цей процес якраз і відповідає перемішуванню у фазовому просторі (див. вище пп. 3.1.3.3 та 3.1.3.8), причому ми абстрагуємося від тонкої структури фазової краплі, як це робиться при визначенні КС-ентропії.



### 3.3.2.7. Кінетичне рівняння для кількості квантів

Введемо поняття моментів функції  $\Phi$ :

$$\langle I_{k_1} \dots I_{k_m} \rangle = \int d\vec{I} \Phi(\vec{I}, t) I_{k_1} \dots I_{k_m} \quad (3.3.65)$$

(деякі з індексів  $k_1, k_2, \dots, k_m$  можуть збігатись один з одним). Зрозуміло, що величина  $\langle I_k \rangle$  ви- значає середню (за ансамблем реалізацій) інтенсивність моди з частотою  $\omega_k$ , або середню кількість квазічастинок (квантів, фотонів, фононів, плазмонів, магنونів) сорту  $k$ . Тому спектр турбулентності, який ми хочемо знайти, є не що інше, як залежність  $\langle I_k \rangle$  від частоти (або, що те саме, від номера моди  $k$ ).

Щоб отримати рівняння для  $\langle I_k \rangle$ , помножимо (3.3.64) на  $I_k$  і проінтегруємо по  $\vec{I}$ . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle I_k \rangle}{dt} = & 18\pi\beta^2 \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{V_{k_1, k_2, -k_3}^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta(k_1 + k_2 - k_3) \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) [\delta(k_1 - k) + \delta(k_2 - k) - \delta(k_3 - k)] \times \\ & \times (\langle I_{k_2} I_{k_3} \rangle + \langle I_{k_1} I_{k_3} \rangle - \langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle). \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

Рівняння (3.3.66) виявляється незамкненим – крім моменту першого порядку, до нього входять моменти другого порядку. Спроба отримати рівняння для моментів другого порядку призведе до появи в правій частині моментів третього порядку, і так далі. Отримана таким чином нескінченна рекурентна система рівнянь буде еквівалентна до основного кінетичного рівняння (3.3.64).

Щоб отримати замкнене рівняння для моментів першого порядку, можна скористатися принципом ослаблення кореляцій у розріджених газах. У даному разі він виглядає таким чином.

Величина  $\langle I_k \rangle$ , як уже вказувалося, визначає середню кількість квазічастинок сорту  $k$ . Якщо ці кількості невеликі, відповідний газ квазічастинок можна вважати розрідженим, а квазічастинки з різними значеннями  $k$  – слабо скорельованими між собою. Це, в свою чергу, означає, що моменти вищих порядків можна записати через моменти першого порядку. Зокрема, при  $k_1 \neq k_2$

$$\langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle = \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle. \quad (3.3.67)$$

Фактично формула (3.3.67) є наслідком слабкості нелінійного зв'язку між модами, що відповідає умовам існування слабкої турбулентності. Такий нелінійний зв'язок буде слабким, доки інтенсивність мод (кількість квантів  $\langle I_k \rangle$ ) залишатиметься малою.

Підставивши (3.3.67) до (3.3.66), можна отримати так зване кінетичне рівняння для кількості квантів:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle I_k \rangle}{dt} = & \sum_{k_1, k_2} \frac{18\pi\beta^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_k} \left\{ 2\delta(k + k_2 - k_1) \delta(\omega_k + \omega_{k_2} - \omega_{k_1}) V_{k, k_2, -k_1}^2 \left[ \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle \right] - \right. \\ & \left. - \delta(k_1 + k_2 - k) \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k) V_{k_1, k_2, -k}^2 \left[ \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

Це рівняння є аналогом рівняння для моментів першого порядку, яке можна отримати з рівняння Больцмана. Його праву частину можна інтерпретувати як специфічну форму інтегралу зіткнень. Явний вигляд правої частини залежить від обраного закону взаємодії хвиль.

Нагадаємо, що ми враховували лише резонансну трихвильову взаємодію. Відповідно до цього доданки у перших квадратних дужках у правій частині (3.3.68) відповідають процесам розпаду височастотного кванту  $k_1$  на два низькочастотні кванти  $k_2$  та  $k$  (рис. 3.3.1 а) та зворотному до нього процесу злиття квантів (рис. 3.3.1 б). Перший з цих процесів приводить до збільшення кількості квантів  $k$  (відповідні йому перший та другий доданки в квадратних дужках додатні), другий – до зменшення (йому відповідає від'ємний третій доданок).

Аналогічно доданки в другій квадратній дужці відповідають процесам розпаду високочастотного кванту  $k$  на два низькочастотні кванти  $k_1$  та  $k_2$  (рис. 3.3.1 в) та зворотному до нього процесу злиття квантів (рис. 3.3.1 г).

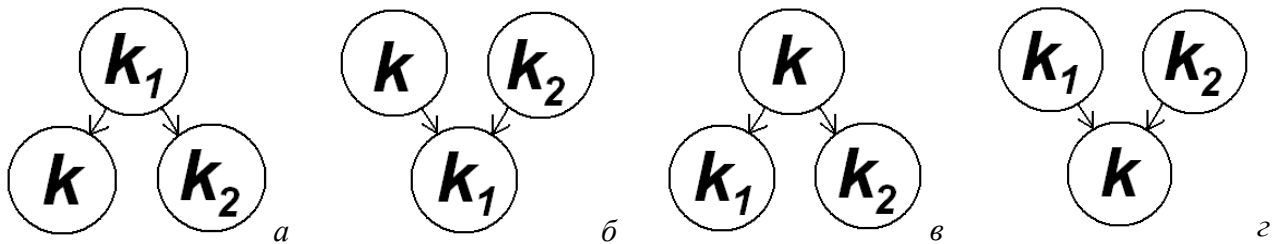


Рис. 3.3.1. Процеси трихвильової взаємодії в досліджуваній моделі.

Для звичайної трихвильової взаємодії  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  вкорочені рівняння, записані для повільних амплітуд відповідних хвиль  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), у випадку граничної задачі, коли процес розвивається в просторі, мають вигляд<sup>4</sup>:

$$\frac{da_1}{dx} = i\sigma a_2^* a_3; \quad \frac{da_2}{dx} = i\sigma a_1^* a_3; \quad \frac{da_3}{dx} = i\sigma a_1 a_2,$$

де  $\sigma$  – параметр квадратичної нелінійності. Видно, що доданки в правій частині кінетичного рівняння для кількості квантів (3.3.68) мають таку саму структуру, а більша кількість доданків зумовлена більшою кількістю процесів, які приводять до народження або зникнення квантів сорту  $k$ .

### 3.3.2.8. Властивості розв'язку кінетичного рівняння для кількості квантів

Розв'язок рівняння (3.3.68) дає відповідь на питання про вигляд частотного спектру турбулентності та дозволяє дослідити інші властивості турбулентної динаміки.

Так, розрахувавши величину

$$\frac{d}{dt} \sum_k \ln \langle I_k \rangle,$$

можна переконатися в тому, що в системі, описуваній рівнянням (3.3.68), ентропія з часом зростає.

Безпосередньою підстановкою можна також переконатися в тому, що рівняння (3.3.68) має стаціонарний розв'язок вигляду

$$\langle I_k \rangle = \frac{const}{\omega_k}. \quad (3.3.69)$$

Співвідношення (3.3.69) якрз і дає відповідь на питання про вигляд частотного спектру турбулентності. Його фізичний зміст стає зрозумілим, якщо переписати це співвідношення у формі

$$\langle I_k \rangle \omega_k = const = T. \quad (3.3.69 \text{ а})$$

У лівій частині (3.3.69 а) стоїть добуток кількості квантів даного сорту на частоту одного кванту, тобто повна енергія моди даного типу. Отже, співвідношення (3.3.69 а) виражає закон рівномірного розподілу енергії по ступенях вільності системи. Константу, що стоїть у правій частині, можна назвати температурою газу квазічастинок. Графік спектру турбулентності (3.3.69) (без врахування його дискретності) подано на рис. 3.3.2.

Реально спектр (3.3.69) обмежений з боку верхніх частот максимальним номером збудженої моди, а для надто низьких частот наведені вище розрахунки стають некоректними. Таким чином, гіперболічна ділянка спектру слабкої турбулентності хвильових полів насправді обмежена як знизу, так і згори. Цим забезпечується скінченність повної енергії системи

<sup>4</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 351.

$$W = \sum_{k=1}^N \omega_k \langle I_k \rangle.$$

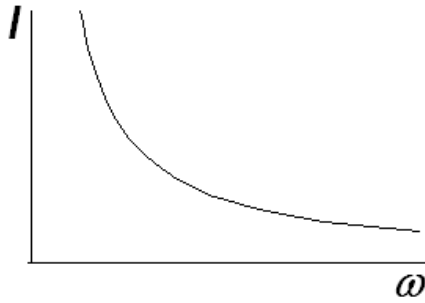


Рис. 3.3.2. Спектр турбулентності хвильового поля у випадку резонансної трихвильової взаємодії мод.

### Контрольні питання до підрозділу 3.3.2

1. Які припущення робляться при отриманні основного кінетичного рівняння для опису слабкої турбулентності?
2. Який процес для квантів виступає аналогом зіткнень для частинок?
3. Чому в кінетичному рівнянні для моментів першого порядку функції розподілу для дій у правій частині з'являються моменти другого порядку?
4. Як отримують кінетичне рівняння для кількості квантів при описі слабкої турбулентності? Який зміст цього рівняння?
5. Для яких систем частотний спектр слабкої турбулентності відповідає рівномірному розподілу енергії по ступнях вільності?
6. За яких початкових умов у системі встановиться рівномірний розподіл енергії по ступнях вільності?
7. Який зміст має температура розподілу кількості квантів по частотах у задачі про слабку турбулентність?
8. Стверджується, що в слабкотурбулентній гамільтонівській системі ентропія весь час зростає. Про яку ентропію йдеться?
9. До яких реальних систем можна застосувати модель слабкої гамільтонівської турбулентності?
10. Як вплине наявність слабкої дисипації на взаємодію великої кількості хвиль у розподіленій системі із сильною дисперсією та слабкими кубічною та квадратичною нелінійностями?
11. Якісно опишіть еволюцію довільного початкового збурення в слабкодисипативній розподіленій системі із сильною дисперсією та слабкими кубічною та квадратичною нелінійностями.

### Задачі до підрозділу 3.3.2

3.3.2.1. Показати, що в системі, описуваній рівнянням

$$\frac{d\langle I_k \rangle}{dt} = \sum_{k_1, k_2} \frac{18\pi\beta^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_k} \left\{ 2\delta(k+k_2-k_1)V_{k, k_2, -k_1}^2 \left[ \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle \right] + \right. \\ \left. + \delta(k_1+k_2-k)V_{k_1, k_2, -k}^2 \left[ \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle \right] \right\},$$

а) ентропія

$$\sum_k \ln \langle I_k \rangle$$

з часом зростає;

б) в стаціонарному випадку реалізується частотний розподіл інтенсивності  $\langle I_k \rangle \omega_k = const$ .

### 3.3.3. Солітонна турбулентність

Як уже вказувалось, у випадку турбулентності хвильових полів режиму слабкої тур-

булентності відповідає слабка взаємодія між майже гармонічними „власними хвилями” середовища. Якщо умови слабкої турбулентності порушуються, говорять про сильну турбулентність.

Таким чином, режим сильної турбулентності реалізується принаймні в двох випадках: коли „власні хвилі” нелінійного середовища є суттєво негармонічними або коли взаємодія між гармонічними „власними хвилями” не є слабкою. Другий з названих випадків можна звести до першого. Справді, сильна взаємодія між квазігармонічними хвилями приводить до зміни їхніх амплітуд за час, сумірний з їхнім періодом. Отже, такі хвилі вже не можна вважати квазігармонічними.

В принципі можлива й ситуація сильної взаємодії між суттєво негармонічними „власними хвилями”.

Прикладом слабкої взаємодії між суттєво негармонічними „власними хвилями” може служити так звана солітонна турбулентність, яка обговорюється нижче<sup>5</sup>.

### 3.3.3.1. Солітони та кноїдальні хвилі

Будемо розглядати хвилі в одновимірному нелінійному (швидкість хвилі залежить від величини збурення) консервативному середовищі зі слабкою дисперсією. Такі хвилі<sup>6</sup> в найпростішому випадку описуються відомим рівнянням Кортевега – де Вріза<sup>7</sup> (КдВ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.3.70)$$

де вісь  $x$  спрямована вздовж напрямку поширення хвилі,  $u = dx/dt$ . Автомодельна підстановка  $u(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Vt$  ( $V$  – швидкість стаціонарної хвилі) перетворює рівняння КдВ у частинних похідних на рівняння в повних похідних:

$$(u - V) \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0. \quad (3.3.71)$$

Рівняння (3.3.71) можна один раз проінтегрувати. Вважаючи, що стала інтегрування дорівнює нулеві (цього завжди можна добитися переходом до рухомої системи відліку), отримаємо:

$$\beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} + u \left( \frac{u}{2} - V \right) = 0. \quad (3.3.72)$$

Рівняння (3.3.72) має вигляд рівняння руху нелінійного осцилятора (роль координати відіграє змінна  $u$ , роль часу – змінна  $\xi$ ) в потенціалі

$$\Phi(u) = \frac{u^3}{6} - V \frac{u^2}{2} \quad (3.3.73)$$

(рис. 3.3.3 а). Фазовий портрет коливань у такому потенціалі поданий на рис. 3.3.3 б.

Стаціонарні хвилі, що відповідають рухові по сепаратрисі (крива 4 на рис. 3.3.3 б), відомі як солітони КдВ (рис. 3.3.4 а). Вони мають вигляд одиночних збурень.

Хвилі, що відповідають рухові вздовж фазових траєкторій, що лежать поблизу сепаратрисі всередині її петлі, відомі як кноїдальні хвилі. Зображувальна точка, рухаючись уздовж такої фазової траєкторії, швидко проходить усю її за винятком ділянки, близької до сідлової

<sup>5</sup> Див.: Берман Г.П., Заславський Г.М. ЖЭТФ. Т.57 (1969). С.1240.

<sup>6</sup> Прикладами таких хвиль можуть бути хвилі на поверхні неглибокої водойми з твердим дном або іонно-звукові хвилі великої амплітуди в плазмі.

<sup>7</sup> Д.Й. Кортевег (Diederik Johannes Korteweg, 1848–1941) – голландський фізик і математик, професор університету м. Амстердама. Основні роботи – в галузі термодинаміки, гідродинаміки, кінетичної теорії. Г. де Вріз (Gustav de Vries, 1866 - 1934) – голландський математик, професор університету в Хаарлемі. Рівняння КдВ вперше отримане Буссінеском (1877). Ж. Буссінеск (Joseph Valentin Boussinesq, 1842 - 1929) – французький фізик, механік, член Паризької Академії наук (1886), професор Паризького університету, автор робіт з гідродинаміки, оптики, термодинаміки, теорії пружності.

точки, де рух різко сповільнюється. В результаті кноїдальна хвиля нагадує періодичну послідовність солітонів (рис. 3.3.4 б). Чим ближча фазова траєкторія до сепаратриси, тим більшою буде віддаль між окремими „імпульсами” в кноїдальній хвилі.

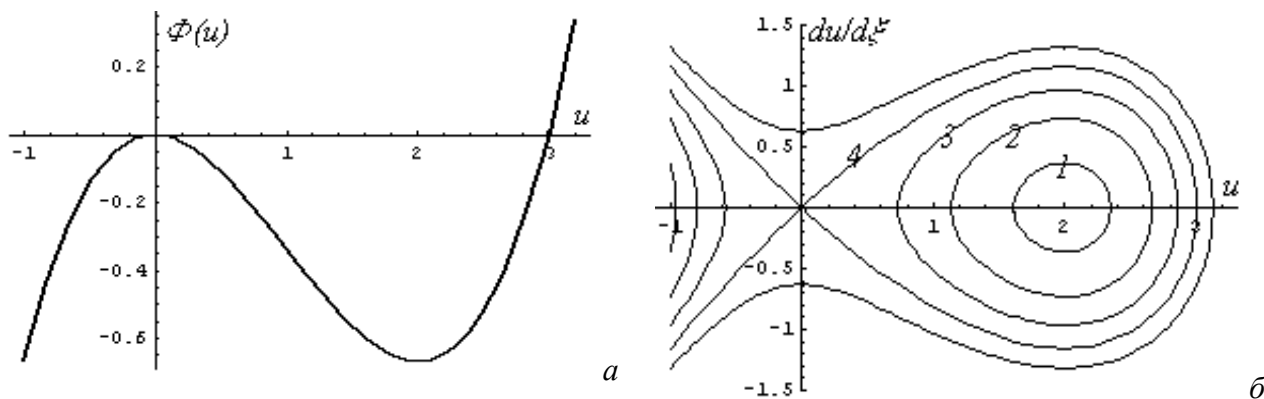


Рис. 3.3.3. Стационарні розв'язки рівняння КдВ: а - хід потенціалу; б - фазовий портрет.

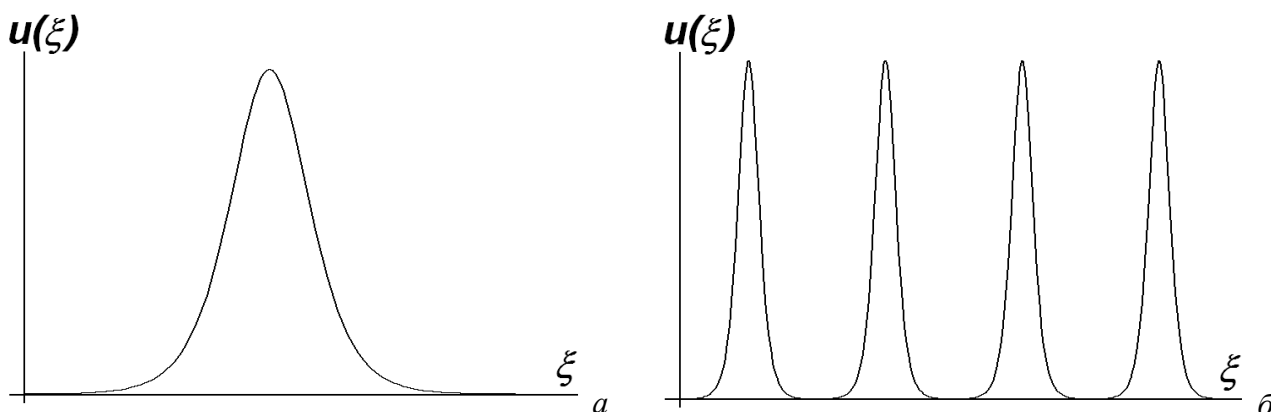


Рис. 3.3.4: а – солітон КдВ; б – кноїдальна хвиля.

Залежність  $u(\xi)$  для кноїдальної хвилі можна розкласти в ряд Фур'є. Кількість  $N$  істотно відмінних від нуля коефіцієнтів у цьому ряду, очевидно, буде збільшуватися при наближенні відповідної фазової траєкторії до сепаратриси.

### 3.3.3.2. Взаємодія солітонів

Як відомо, солітони КдВ не взаємодіють між собою: в одновимірному випадку при зустрічі двох солітонів вони проходять один крізь одного без зміни енергії. Іншими словами, коли після взаємодії солітони розходяться на достатньо далеку віддаль, вони відновлюють форму, яку вони мали до розсіювання. Єдиним результатом взаємодії двох солітонів КдВ є зміна їхніх фаз, обумовлена затримкою при розсіюванні.

Точно так само відсутня взаємодія і для одновимірних стаціонарних хвиль, описуваних рівнянням КдВ.

Однак ситуація, що описується рівнянням КдВ, є в певному сенсі ідеалізованою. Справді, узагальненням рівняння КдВ на двовимірний випадок є так зване рівняння Кадомцева – Петвіашвілі<sup>8</sup>, яке може бути подане у вигляді

<sup>8</sup> Б.Б. Кадомцев (Борис Борисович Кадомцев, 1928 – 1998) – видатний російський фізик, академік АН СРСР (1970), працював в Інституті атомної енергії ім. І.В.Курчатова (м. Москва). В останній період життя – керівник радянської програми з керованого термоядерного синтезу. В.І.Петвіашвілі (Владимир Йосифович Петвіашвілі, 1936 – 1993) – грузинський та російський фізик, працював в Інституті атомної енергії ім. І.В.Курчатова (м. Москва). Основні роботи присвячені фізиці плазми.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.3.74)$$

Двовимірні солітони рівняння Кадомцева – Петвіашвілі при взаємодії вже не зберігаються. Цей результат якраз і відповідає реальній ситуації, коли між солітонами або солітоноподібними (кноїдальними) хвилями відбувається нетривіальна взаємодія, як це має місце, наприклад, для іонно-звукових та магнітозвукових хвиль у плазмі або для хвиль на неглибокій воді з твердим дном. Така взаємодія супроводжується обміном енергією.

Отже, при слабкій взаємодії сильнонелінійних хвиль їх можна розглядати як ансамбль, у якому за виконання певних умов може виникнути турбулентний рух, подібно до того, як це мало місце при слабкій взаємодії квазігармонічних хвиль (пп. 3.3.1-3.3.2).

### 3.3.3.3. Гамільтонівський формалізм для сильно нелінійних хвиль

Для гамільтонівського опису сильно нелінійних хвиль можна, як і раніше (п. 3.3.1.1) використати розклад у ряд Фур'є (для випадку, коли хвилі взаємодіють в обмеженій області простору). Кількість  $N$  нетривіальних доданків у ряду Фур'є визначає реальну кількість ступенів вільності. Але амплітуди  $u_n$  цих доданків уже не будуть лінійно незалежними, як у звичайному хвильовому пакеті. Вони виявляються сильно пов'язаними між собою. Цей зв'язок приводить до того, що амплітуди  $u_n$  можна подати як функції одного або декількох параметрів – наприклад, енергії  $E$ , швидкості  $V$  та хвильового числа  $k$ :

$$u_n = u_n(E, V, k). \quad (3.3.75)$$

Зв'язок між амплітудами  $u_n$  виявляється тим сильнішим, чим більше число зв'язаних хвиль  $N$ . Таким чином, число  $N$  можна розглядати як константу зв'язку між гармоніками, що формують нелінійну хвилю. При  $N \sim 1$  зв'язок між гармоніками слабкий, при  $N \gg 1$  – навпаки, сильний.

Задачі про слабку взаємодію між сильно нелінійними хвилями нерідко можна розв'язувати шляхом розкладу по ступенях малого параметра  $1/N$ . Справді, за наявності сильного зв'язку між гармоніками, що утворюють нелінійну хвилю, їх важко „розірвати”, перетворивши в незалежні ступені вільності. Тоді можна чекати, що слабкість взаємодії виявитиметься в тому, що ефективна кількість гармонік, які завдяки сильному зв'язку можуть залежати лише від одного параметра, буде з часом змінюватися мало ( $\Delta N \ll N$ ).

Таким чином, для випадку слабкої взаємодії сильно нелінійних хвиль гамільтоніан може бути поданий у вигляді

$$H = \sum_n H_n + H_{\text{int}}, \quad (3.3.76)$$

де кожен з доданків  $H_n$  характеризує нелінійну хвилю, а збурення  $H_{\text{int}}$  є малим. Тоді за нульове наближення можна взяти просто суперпозицію окремих нелінійних хвиль.

### 3.3.3.4. Малий параметр взаємодії кноїдальних хвиль у двовимірному випадку

Розглянемо тепер двовимірне середовище, в якому поширюються дві плоскі кноїдальні хвилі, причому їхні фронти утворюють деякий кут, відмінний від нуля (рис. 3.3.5).

Якщо просторовий період кожної з хвиль значно перевищує ширину окремого „імпульсу”, то площа областей перекриття двох хвиль буде складати малу частку від площі всієї області, в якій збуджені хвилі. Природно вважати, що енергія взаємодії хвиль пропорційна до площі їхнього перекриття. Отже, вона буде малою порівняно з енергією кожної з хвиль. Це й означає, що взаємодія хвиль може виявитися слабкою. Отже, можна чекати, що малий параметр взаємодії хвиль буде пропорційний до  $1/N$ , і, отже, буде зменшуватися зі зростанням  $N$  (тобто для сильно нелінійних хвиль).

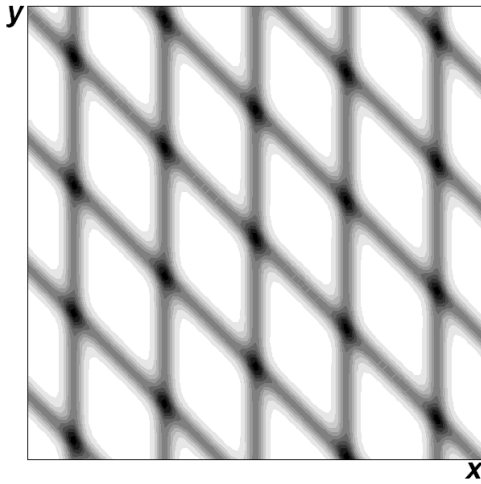


Рис. 3.3.5. Области перекриття двох кноїдальних хвиль.

### 3.3.3.5. Основне кінетичне рівняння для солітонної турбулентності

Нехай  $I_m$  є дія для нелінійної хвилі з номером  $m$ . Тоді в результаті стохастизації фаз хвиль  $\theta_m$  виникає статистичний ансамбль хвиль, який описується функцією розподілу  $F(t, I_1, I_2, \dots, I_M)$ , де  $M$  – число «власних» хвиль, які беруть участь у взаємодії.

Подібно до того, як для слабкої турбулентності було отримане основне кінетичне рівняння у формі рівняння Фоккера – Планка (див. формулу (3.3.64), п. 3.3.2), в даному випадку можна отримати рівняння такого самого типу. Для середовища з кубічною нелінійністю воно має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{n_{m_1}, n_{m_2}, n_{m_3}=-\infty}^{\infty} |V_{m_1, m_2, m_3}|^2 D \left( n_{m_1} \frac{\partial}{\partial I_{m_1}} + n_{m_2} \frac{\partial}{\partial I_{m_2}} - n_{m_3} \frac{\partial}{\partial I_{m_3}} \right) |a(n_{m_1}) a(n_{m_2}) a(n_{m_3})|^2 \times \\ \times \delta(n_{m_1} \omega_{n_1} + n_{m_2} \omega_{n_2} - n_{m_3} \omega_{n_3}) \delta(n_{m_1} \vec{k}_{n_1} + n_{m_2} \vec{k}_{n_2} - n_{m_3} \vec{k}_{n_3}) D \left( n_{m_1} \frac{\partial}{\partial I_{m_1}} + n_{m_2} \frac{\partial}{\partial I_{m_2}} - n_{m_3} \frac{\partial}{\partial I_{m_3}} \right) F, \quad (3.3.77)$$

де  $a(n_m)$  – амплітуда доданку з номером  $n$  в ряду Фур'є для нелінійної хвилі з номером  $m$ ,  $V$  – матричний елемент взаємодії трьох хвиль, який залежить тільки від їхніх хвильових векторів,  $D$  – коефіцієнт дифузії в просторі дій,  $\delta(\vec{k}) = \delta(k_x) \delta(k_y) \delta(k_z)$ .

Структура правої частини рівняння (3.3.77) визначається тим, що воно описує параметричну взаємодію трьох кноїдальних хвиль, кожна з яких розкладається у формально нескінченний ряд Фур'є. Насправді ж у сумах по  $n_m$  реальна кількість відмінних від нуля доданків визначається кількістю ступенів вільності  $N_m$ , яка відповідає даній кноїдальній хвилі.

Динаміка системи, описуваної рівнянням (3.3.77), в головних рисах подібна до системи зі слабкою турбулентністю (див. п. 3.3.2).

Можливість своєрідного перенормування змінних у розглянутій задачі обумовлена слабкою взаємодією солітоноподібних розв'язків за умови їхньої достатньої розрідженості (тобто при  $N_m \gg 1$ ). Турбулентний рух, що виникає при цьому, називають солітонною турбулентністю. Етапи розвитку солітонної турбулентності можна аналітично прослідкувати аж до визначення спектру турбулентності.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.3.3

1. Наскільки коректно говорити про періодичну послідовність солітонів?
2. Коли солітони в середовищі, описуваному рівнянням Кадомцева – Петвіашвілі, не взаємодітимуть між собою?
3. В чому полягає особливість гамільтонівського опису сильно нелінійних хвиль порівняно з

квазігармонічними?

4. Коли при взаємодії кноідальних хвиль існує малий параметр? Що служить таким параметром?

5. Який механізм взаємодії спектральних складових нелінійних хвиль закладений у модель солітонної турбулентності?

### ***Висновки до розділу 3.3***

1. Хоч більшість макроскопічних систем із розподіленими параметрами є дисипативними, тим не менше аналіз простішої консервативної (гамільтонівської) моделі дозволяє дослідити механізми виникнення турбулентної динаміки. При розгляді турбулентної динаміки намагаються зменшити кількість аналізованих ступенів вільності і тим самим звести нелінійне рівняння в частинних похідних до скінченної кількості рівнянь у повних похідних або відповідного відображення.
2. Під слабкою турбулентністю гамільтонівської системи розуміють слабку нелінійну взаємодію великої кількості власних хвиль такої системи, які є квазігармонічними. Порушення хоча б однієї з умов – квазігармонічності хвиль або слабкості їхньої нелінійної взаємодії – приводить до сильної турбулентності. Напевне, найпростішою моделлю гамільтонівської системи зі слабкою турбулентністю є параметрична взаємодія квазігармонічних хвиль у системі зі слабкою квадратичною та кубічною (за амплітудою хвиль) нелінійністю. Побудова відображення для такої моделі виявляється аналогічною стандартному відображенню. Поріг (за амплітудою хвиль) виникнення стохастичності (перемішування фаз) зменшується зі збільшенням кількості збуджених мод, а КС-ентропія виявляється пропорційною цій кількості. Це пов'язано зі збільшенням кількості нестійких напрямків у фазовому просторі порівняно з випадком стандартного відображення.
3. Навіть найпростіший різновид турбулентності – слабка турбулентність гамільтонівських систем – є настільки складним видом руху, що описати її в деталях видається неможливим. Тому для її аналізу застосовують статистичний опис. Від рівняння Ліувілля для багаточастинкової функції розподілу, яке точно описує еволюцію системи, вдається після ряду спрощень та огрублень моделі перейти до значно простішого рівняння для кількості квантів (моментів першого порядку від функції розподілу для дій). Права частина цього рівняння враховує різні типи параметричної взаємодії хвиль (злиття та розпаду квантів), що відбуваються в досліджуваній системі. Стаціонарний розв'язок рівняння дає спектр турбулентності – залежність середньої інтенсивності коливань від частоти. Вигляд цього спектру відповідає закону рівномірного розподілу енергії по ступенях вільності системи.
4. Однією з найпростіших моделей сильної турбулентності є так звана солітонна турбулентність. В ролі власних хвиль системи (суттєво негармонічних) виступають солітони Кортевега – де Вріза (точніше, кноідальні хвилі – близькі до солітонів за формою, але періодичні розв'язки відповідного рівняння), а взаємодію між ними для спрощення можна вважати слабкою. Для такої моделі також вдається довести розв'язок задачі до отримання спектру турбулентності. Загалом властивості солітонної турбулентності досить подібні до властивостей слабкої турбулентності.

### ***Контрольні питання до розділу 3.3***

1. Для чого в задачах про статистичний аналіз турбулентності переходять до кількостей квантів? Який зміст цієї величини в задачах про слабку та солітонну турбулентність?
2. На якому етапі отримання кінетичного рівняння для слабкої турбулентності в гамільтонівській системі використовується умова стохастизації фаз мод?
3. Порівняйте між собою основні кінетичні рівняння для слабкої та солітонної турбулентності. Що в них спільного і що – відмінного?



### Розділ 3.4. Турбулентність у розподілених дисипативних системах

Історично поняття турбулентності виникло в гідродинаміці при описі течій великої швидкості, які супроводжуються виникненням вихорів. В таких течіях дисипація виявляється істотною: енергія, яка надходить до системи ззовні, зазнає розсіювання. Таким чином, гідродинамічна турбулентність може служити прикладом турбулентності в дисипативних системах.

Відповідно до сучасних уявлень турбулентність у дисипативних системах у загальних рисах виявляється подібною до хаосу в дисипативних системах (див. розділ 3.2). Вона характеризується існуванням у фазовому просторі (точніше, у так званому функціональному просторі, що виступає аналогом фазового простору для систем із розподіленими параметрами – див. нижче п. 3.4.1.2) дивних атракторів, фрактальна розмірність яких є скінченою.

Ми обмежимося тут розглядом гідродинамічної турбулентності. Але слід мати на увазі, що якісно подібний характер має турбулентність інших розподілених дисипативних систем – наприклад, ленгмюрівська турбулентність у плазмі.

#### 3.4.1. Гідродинамічна турбулентність: загальні поняття

Розберемо спочатку деякі загальні поняття, що стосуються гідродинамічної турбулентності (турбулентності в потоці рідини): рівняння, що її описують, вигляд фазового портрету, а також класифікацію видів гідродинамічної турбулентності.

##### 3.4.1.1. Рівняння Нав'є – Стокса. Ламінарна та турбулентна течія

Ми вже стикалися з рівнянням Нав'є – Стокса при аналізі руху шару рідини, який підігрівається знизу (див. п. 2.4.2.1, рівняння (2.4.14)). Вважаючи рідину нестисливою та нехтуючи силою ваги, перепишемо його у формі:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (3.4.1)$$

Нагадаємо, що  $\vec{v}$  – швидкість течії,  $p$  – тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $\eta$  – коефіцієнт (динамічної) в'язкості.

Для стаціонарної течії рівняння Нав'є – Стокса спрощується й набуває вигляду

$$\nabla p = -\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}. \quad (3.4.1 \text{ а})$$

Нелінійний доданок  $\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  у рівнянні (3.4.1 а) має порядок величини  $\rho v^2/l$ , де  $l$  – характерний масштаб течії (наприклад, це може бути радіус труби, по якій тече рідина). Величину дисипативного доданку  $\eta \Delta \vec{v}$  можна оцінити як  $\eta v/l^2$ . Тоді відношення модулів цих доданків дасть безрозмірну величину

$$\frac{\rho |(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}|}{\eta |\Delta \vec{v}|} \sim \frac{\rho v^2 l^2}{\eta l v} = \frac{l v}{\nu} \equiv \text{Re}, \quad (3.4.2)$$

де  $\nu = \eta/\rho$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості. Величину  $\text{Re}$  (3.4.2) називають числом Рейнольдса<sup>1</sup>.

Якщо  $\text{Re} \ll 1$ , то нелінійність неістотна, і стаціонарна течія описується лінійним рівнянням

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v}. \quad (3.4.1 \text{ б})$$

Разом із рівнянням неперервності для нестислової рідини

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.4.3)$$

рівняння (3.4.1 б) повністю описує рух рідини. Така течія називається ламінарною.

При  $\text{Re} \geq 1$  нелінійним доданком у рівнянні Нав'є – Стокса вже не можна знехтувати.

<sup>1</sup> О. Рейнольдс (Osborne Reynolds, 1842 – 1912) – англійський фізик та інженер, професор університету в м. Манчестері. Працював у галузі гідравліки та термодинаміки.

З іншого боку, розв'язок стаціонарного рівняння (3.4.1 а) в цьому випадку виявляється нестійким, тому загальне рівняння (3.4.1) набуває вигляду

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (3.4.1 \text{ в})$$

По суті, умова  $Re \geq 1$  в чомусь аналогічна до умови самозбудження автогенератора: при її виконанні в течії розвивається нестійкість, в результаті чого з'являються вихори. Зупинимося на детальніше на механізмі їхньої появи.

Причиною виникнення вихорів у течії є так звана нестійкість Кельвіна - Гельмгольца. Механізм її дії найпростіше пояснити на прикладі поведінки межі між рухомою та нерухою рідиною. Отже, розглянемо два шари рідини, причому нижній шар (область  $x < 0$ ) є нерухомим, а верхній (область  $x > 0$ ) рухається з деякою швидкістю  $v_0$  (рис. 3.4.1 а). Нехай на межі двох шарів виникло гармонічне в просторі збурення. Тоді там, де це збурення заходить в область  $x > 0$ , швидкість течії поблизу межі зростатиме, а там, де збурення заходить в область  $x < 0$  – навпаки, зменшуватиметься (рис. 3.4.1 б). В областях, де швидкість течії зростає, відповідно до закону Бернуллі тиск рідини зменшиться, а в областях, де швидкість зменшується – тиск, навпаки, зростатиме. Під дією цього просторово неоднорідного тиску початкове збурення межі зростатиме. В результаті розвитку цієї нестійкості й виникатимуть вихори.

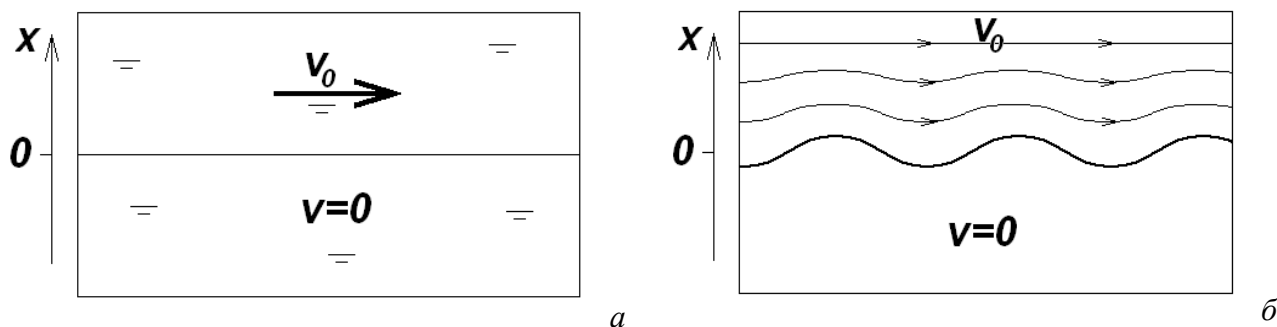


Рис. 3.4.1. До пояснення нестійкості Кельвіна - Гельмгольца.

Розмір вихорів, що виникають у течії, визначається її характерним розміром  $l$  (тобто, по суті, граничними умовами) та числом Рейнольдса  $Re$ . Якщо число Рейнольдса невелике, то виникають стаціонарні вихори з характерними розмірами порядку  $l$ . При подальшому зростанні числа Рейнольдса вихори починають відриватися від місця свого виникнення і зноситися за течією (так звана доріжка Кармана<sup>2</sup>). Крім того, в течії починають з'являтися вихори все більш дрібних масштабів, подібно до того, як у спектрі автогенератора при переході від квазігармонічного до релаксаційного режиму з'являються вищі гармоніки основної частоти. Розпад вихорів на дрібніші також пов'язаний з нестійкістю Кельвіна – Гельмгольца, оскільки в окремому вихорі існує градієнт лінійної швидкості вздовж діаметра (при фіксованій кутовій швидкості обертання  $\omega$  лінійна швидкість  $v$  змінюється з радіусом  $r$  за законом  $v = \omega r$ ). Нарешті, при  $Re \gg 1$  рух рідини набуває надзвичайно складного, нестаціонарного й непередбачуваного характеру. Саме таку течію називають турбулентною (рис. 3.4.2).

Ілюстрацією до викладеного вище може служити рис. 3.4.3, на якому схематично показані лінії течії рідини, що обтікає довгий циліндр, при різних значеннях числа Рейнольдса.

Можна сказати, що фактичним керувальним параметром, який визначає характер течії в трубі, є різниця тисків між кінцями труби, яка виступає мірою нерівноважності системи. При малих різницях тисків швидкість течії буде малою, а сама течія – ламінарною. При зрос-

<sup>2</sup> Т. Карман (Szöllöskislaki Kármán Tódor, Theodore von Kármán, 1881 - 1963) – угорський, німецький і американський фізик та інженер, у різний час працював в університеті м. Геттінгена та Каліфорнійському технологічному інституті. Відомий роботами в галузі аеродинаміки, аеронавтики та астронавтики, зокрема, дослідженням надзвукових течій.

танні різниці тисків зростатиме швидкість течії, все більшу роль відіграватиме нелінійний доданок у рівнянні Нав'є – Стокса, і течія поступово набуде турбулентного характеру. Таким чином, у даному прикладі саме різниця тисків визначає міру нерівноважності системи. В будь-якому випадку нерівноважність системи є необхідною передумовою виникнення турбулентної течії.



Рис. 3.4.2. Турбулентна течія рідини.

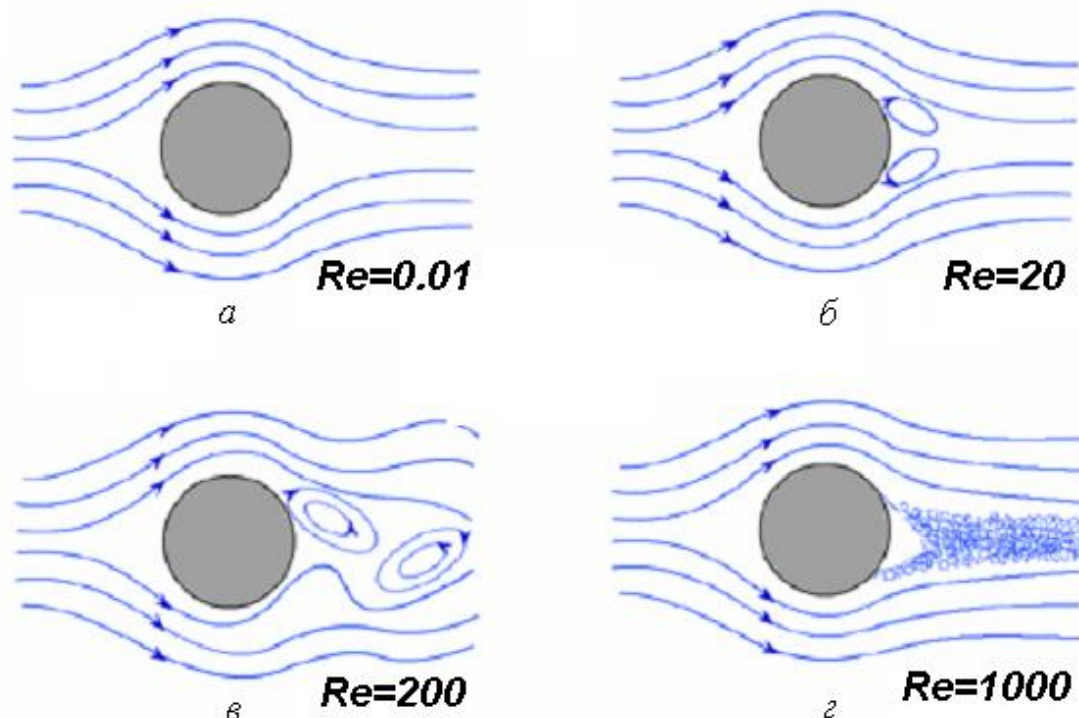


Рис. 3.4.3. Обтікання довгого циліндра рідиною при різних значеннях числа Рейнольдса: а – ламінарна течія; б – поява вихорів; в – відрив вихорів, або доріжка Кармана; г – розвинена турбулентність.

Ситуація, якісно подібна до описаної вище, має місце й у випадку конвекції Релея – Бенара (див. п. 2.4.2). Аналогом ламінарної течії в цьому випадку виступає режим відсутнос-

ті конвекції, який реалізується при малій різниці температур між нижньою та верхньою межами шару рідини (або при великій в'язкості рідини). При зростанні різниці температур (зменшенні в'язкості рідини) з'являються конвективні потоки, причому спочатку виникають регулярні структури, а при подальшому зростанні ступеню нерівноважності течія набуває турбулентного характеру (детальніше про це див. пп. 3.4.2.2-3.4.2.3).

#### 3.4.1.2. Утворення дивного атрактора у функціональному просторі

Рівняння Нав'є – Стокса (3.4.1) описує систему з розподіленими параметрами. Системам із розподіленими параметрами відповідає континуум ступенів вільності. Відповідно до цього й фазовий простір таких систем буде нескінченновимірним (точніше, матиме континуум ступенів вільності). Такий фазовий простір прийнято називати функціональним. Кожна точка цього простору відповідає певному просторовому розподілу величин, що характеризують систему (наприклад, певному полю швидкості для гідродинамічної течії). Розв'язок відповідного рівняння в частинних похідних, яке описує систему, задає фазову траєкторію у функціональному просторі, тобто зміну просторових розподілів з часом.

Гідродинамічна течія належить до дисипативних систем, відповідно до цього рівняння Нав'є – Стокса містить дисипативний доданок. Як ми вже знаємо, в процесі еволюції дисипативних систем при  $t \rightarrow \infty$  об'єм фазової краплі зменшується, і вона потрапляє на деякий аттрактор. В принципі, можливі й нескінченновимірні аттрактори (хоча це питання досі вивчене недостатньо). Але в багатьох випадках аттрактори у функціональному просторі можуть мати скінченну геометричну розмірність<sup>3</sup>. Такі аттрактори можуть бути як простими (стаціонарні точки, граничні цикли), так і дивними. Саме дивні аттрактори визначають турбулентний рух.

Наявність атрактора зі скінченною геометричною розмірністю у функціональному просторі системи означає, що усталений рух системи можна повністю описати скінченною кількістю рівнянь у повних похідних, що є величезним спрощенням порівняно з рівнянням у частинних похідних.

Найменшу кількість незалежних змінних, які однозначно визначають усталений рух нерівноважної дисипативної системи з розподіленими параметрами, називають розмірністю вкладення атрактора  $d_e$ . З геометричної точки зору розмірність вкладення атрактора – це мінімальна розмірність фазового простору, до якого може бути вкладений (тобто вміщений без самоперетинів) гладенький підмноговид, що повністю утримує цей аттрактор. Зрозуміло, що розмірність вкладення має завжди бути більшою від розмірності атрактора.

Можна показати, що будь-який гладенький многовид розмірності  $m$  завжди може бути вкладений у простір з розмірністю  $2m+1$ . Скажемо, крива (розмірність 1) завжди може бути вкладена в тривимірний простір. На площину таку криву можна вкласти не завжди (це не можна зробити, наприклад, із обмоткою тора). Дивний аттрактор із фрактальною розмірністю  $d_F$  завжди можна вкласти в простір із цілою розмірністю  $k \geq 2d_F + 1$ . У деяких випадках розмірність вкладення може бути й меншою – включно до значення  $[d_F]+1$ , де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Як показують результати числового моделювання, для гідродинамічної турбулентності зростання числа Рейнольдса приводить, взагалі кажучи, до зростання фрактальної розмірності дивного атрактора.

#### 3.4.1.3. Різновиди гідродинамічної турбулентності

Для характеристики гідродинамічної турбулентності найчастіше користуються понят-

<sup>3</sup> Див.: Ладыженская О.А. Записки научного семинара Ленинградского отделения Математического института. Т.115 (1982). С.137-155. О.А. Ладыженська (Ольга Александровна Ладыженская, 1922 - 2004) – російський математик, академік АН СРСР (1990), лауреат Державної премії СРСР (1969), в різний час працювала в Ленінградському державному університеті, Петербурзькому відділенні Математичного інституту ім. В.А. Стеклова РАН. Основні праці присвячені математичній фізиці, гідродинаміці, теорії стійкості.

тями слабкої та розвиненої турбулентності.

Підкреслимо, що поняття слабкої турбулентності в гідродинаміці істотно відрізняється від введеного вище (див. початок розділу 3.3) аналогічного поняття для хвильових полів.

Гідродинамічну турбулентність називають слабкою, якщо розмірність вкладення дивного атрактора для гідродинамічної турбулентності невелика – скажемо, за порядком величини не перевищує десяти (нагадаємо, що для слабкої турбулентності хвильових полів, навпаки,  $N \gg 1$ , де аналогом розмірності вкладення є розмірність фазового простору  $2N$ ). Усталений режим такої турбулентності описується невеликою кількістю рівнянь у повних похідних, у фазовому просторі якої існує дивний атрактор. Можна сказати, що властивості такої турбулентності, по суті, нічим не відрізняються від хаотичної динаміки дисипативних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, яка була розглянута в розділі 3.2. Для течії, описуваної рівнянням Нав'є – Стокса (3.4.1), режим слабкої турбулентності буде реалізуватися при помірних значеннях числа Рейнольдса. Більш детально про режим слабкої гідродинамічної турбулентності йтиметься нижче (п. 3.4.2).

Для слабкої турбулентності характерним є збереження регулярних просторових структур течії. Лише амплітуда цих структур зазнає випадкових змін у часі.

Як випливає з виконаних вище оцінок, дисипативний доданок у рівнянні Нав'є – Стокса буде істотним лише для вихорів малих характерних масштабів (при  $Re \leq 1$ ), причому зі збільшенням швидкості течії цей масштаб зменшуватиметься. З іншого боку, як уже говорилося, нестійкість, що приводить до виникнення вихорів, розвивається на великих масштабах. Таким чином, при великих швидкостях течії (тобто при  $Re \gg 1$ ) енергія надходить до системи у вигляді великомасштабних вихорів, а розсіюється на дрібномасштабних вихорах. Отже, в такій течії відбувається перекачування енергії від великих просторових масштабів до малих через деякий проміжний інтервал масштабів, на яких відсутнє як надходження енергії до системи, так і її розсіювання. Цей інтервал прийнято називати інерційним.

Перекачування енергії від великих до малих масштабів через інерційний інтервал характеризує так звану розвинену гідродинамічну турбулентність. Розвинена гідродинамічна турбулентність буде детальніше розглянута у п. 3.4.3.

Особливість режиму розвиненої турбулентності полягає у відсутності фіксованих структур у течії. Зокрема, швидкість течії зазнає випадкових змін не тільки в часі, але й у просторі. Такий режим інколи називають просторово-часовим хаосом.

#### *Контрольні питання до підрозділу 3.4.1*

1. Які властивості рідини, описуваної рівнянням Нав'є – Стокса у формі

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} ?$$

2. Що таке ламінарний та турбулентний режими течії? Відповідь дайте на основі аналізу рівняння Нав'є – Стокса.

3. Чому при збільшенні числа Рейнольдса в турбулентній течії з'являються вихори все менших розмірів?

4. Який доданок у рівнянні Нав'є – Стокса породжує турбулентність? Звідки виникає цей доданок?

5. Поясніть якісно механізм виникнення вихорів при обтіканні течією циліндричної перешкоди (рис. 3.4.3). Чому при великих швидкостях течії ці вихори починають відриватися від місця свого виникнення?

6. Виходячи з рівняння Нав'є - Стокса, спробуйте відповісти на питання, на скільки частин буде розпадатися вихор у дуже швидкій течії.

7. Запропонуйте якісне пояснення механізму ділення вихорів при великих швидкостях течії.

8. Порівняйте між собою класифікацію турбулентності для гамільтонівських (турбулентність хвильових полів) та дисипативних (на прикладі гідродинамічної турбулентності) систем.

### 3.4.2. Слабка гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося, слабка гідродинамічна турбулентність в усталеному режимі характеризується малою кількістю ступенів вільності (умовно кажучи, до десяти), тобто її можна описати порівняно невеликою кількістю рівнянь у повних похідних.

Виявляється, що розмірність вкладення дивного атратора (тобто, по суті, кількість рівнянь першого порядку, необхідних для опису системи) можна в цьому випадку визначити експериментально. Методи, за допомогою яких це можна зробити, описані на початку цього підрозділу.

Далі ми розглянемо відносно простий приклад слабкої гідродинамічної турбулентності – так звану систему рівнянь Лоренца, яка була отримана для опису турбулентного режиму конвекції в шарі в'язкої рідини, що підігривається знизу (див. вище п.2.4.2.6). При великих числах Релея рух, описуваний системою Лоренца, стає нерегулярним і нестійким.

На закінчення цього підрозділу на тому самому прикладі руху рідини в шарі, який підігривається знизу, ми розглянемо перехід до так званого просторово-часового хаосу, або розвиненої турбулентності.

#### 3.4.2.1. Методи експериментального визначення розмірності вкладення

При експериментальному спостереженні турбулентної динаміки відрізнити слабку турбулентність від розвиненої можна, якщо визначити відповідну розмірність вкладення. Спираючись на знання цієї величини, можна далі намагатися аналітично описати динаміку системи.

Для експериментального визначення розмірності вкладення дивного атратора системи з розподіленими параметрами, яка здійснює усталений турбулентний рух, необхідно виміряти яку-небудь величину  $x(t)$ , що характеризує систему (наприклад, миттєвий тиск або одну з компонент швидкості в деякій точці потоку), через однакові проміжки часу. Отримаємо послідовність значень  $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Найпростіший метод експериментального визначення розмірності вкладення умовно можна назвати геометричним<sup>4</sup>.

Нехай рух системи описується одним єдиним диференціальним рівнянням першого порядку. Тоді послідовність  $\{x_n\}$  однозначно визначається початковим значенням  $x_1$ . Кожна наступна точка є одна й та сама функція попередньої,  $x_{n+1} = f(x_n)$ , оскільки проміжок часу між усіма вимірюваннями однаковий. Отже, всі пари точок  $(x_{n+1}, x_n)$  послідовності  $\{x_n\}$  мають лежати на одній кривій  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Ця залежність являє собою, по суті, діаграму Ламе-рея.

Якщо рух системи описується не одним, а двома диференціальними рівняннями першого порядку, то в площині  $(x_{n+1}, x_n)$  точки лежатимуть безладно. Зате в тривимірному просторі  $(x_{n+1}, x_n, x_{n-1})$  набори точок лягатимуть на деяку поверхню  $x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1})$ .

Якщо рух системи описується більш ніж двома рівняннями, геометричний метод стає незручним.

Інший метод можна умовно назвати методом підпоследовательностей<sup>5</sup>.

Оберемо в послідовності  $\{x_n\}$  всі можливі підпоследовательності довжиною  $k$  ( $k < N$ ) і розглянемо набір векторів  $w^{(n)} = \{x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  ( $k \leq n$ ). Всі такі вектори належать деякому  $k$ -вимірному простору.

Зафіксуємо одну з підпоследовательностей, яка починається з номера  $n_0$ , і позначимо від-

<sup>4</sup> Див.: N.H.Packard, J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, R.S.Shaw, Phys. Rev. Lett., **45**, 712 (1980).

<sup>5</sup> Див.: С.Н.Лукашук, А.А.Предтеченский, Г.Е.Фалькович, А.И.Черных, Препринт №280 Ин-та автоматки и электротрии СО АН СССР №280, Новосибирск, 1985.



повідний вектор як  $w^{(0)}$ . Розглянемо відстань  $\rho_k(n, n_0)$  між довільним вектором  $w^{(n)}$  та вектором  $w^{(0)}$ :

$$\rho_k(n, n_0) \equiv |w^{(n)} - w^{(0)}| = \left[ \sum_{i=1}^k (x_{n-k+i} - x_{n_0-k+i})^2 \right]^{1/2}, \quad (3.4.4)$$

а також величину

$$r(n, n_0) \equiv |x_{n+1} - x_{n_0+1}|. \quad (3.4.5)$$

Побудуємо графік залежності  $r(\rho)$  для різних значень  $n$ .

Наявність функціональної залежності між елементом  $x_{n+1}$  та  $k$  попередніми елементами послідовності  $\{x_n\}$  означає, що існує деяка неперервна функція  $x_{n+1} = f(w^{(n)})$ . Тому

$$r(n, n_0) \equiv |f(w^{(n)}) - f(w^{(0)})|. \quad (3.4.6)$$

Очевидно, в цьому випадку  $\rho_k(n, n_0) \rightarrow 0$  при  $w^{(n)} \rightarrow w^{(0)}$ . При цьому і  $r(n, n_0) \rightarrow 0$ .

Якщо ж функціональна залежність між  $x_{n+1}$  та  $w^{(n)}$  відсутня, то  $r(n, n_0)$  не прямуватиме до нуля при зменшенні  $\rho_k(n, n_0)$ .

Якщо функціональна залежність при заданому  $k$  досягнута, то в області малих значень  $\rho$  відповідні значення  $r$  також є малими, тобто точки на графіку  $r(\rho)$  поблизу початку координат лежать нижче деякої прямої вигляду  $r = C\rho$ . Розмірність вкладення визначається мінімальним значенням  $k$ , для якого ця властивість виконується (рис. 3.4.4).

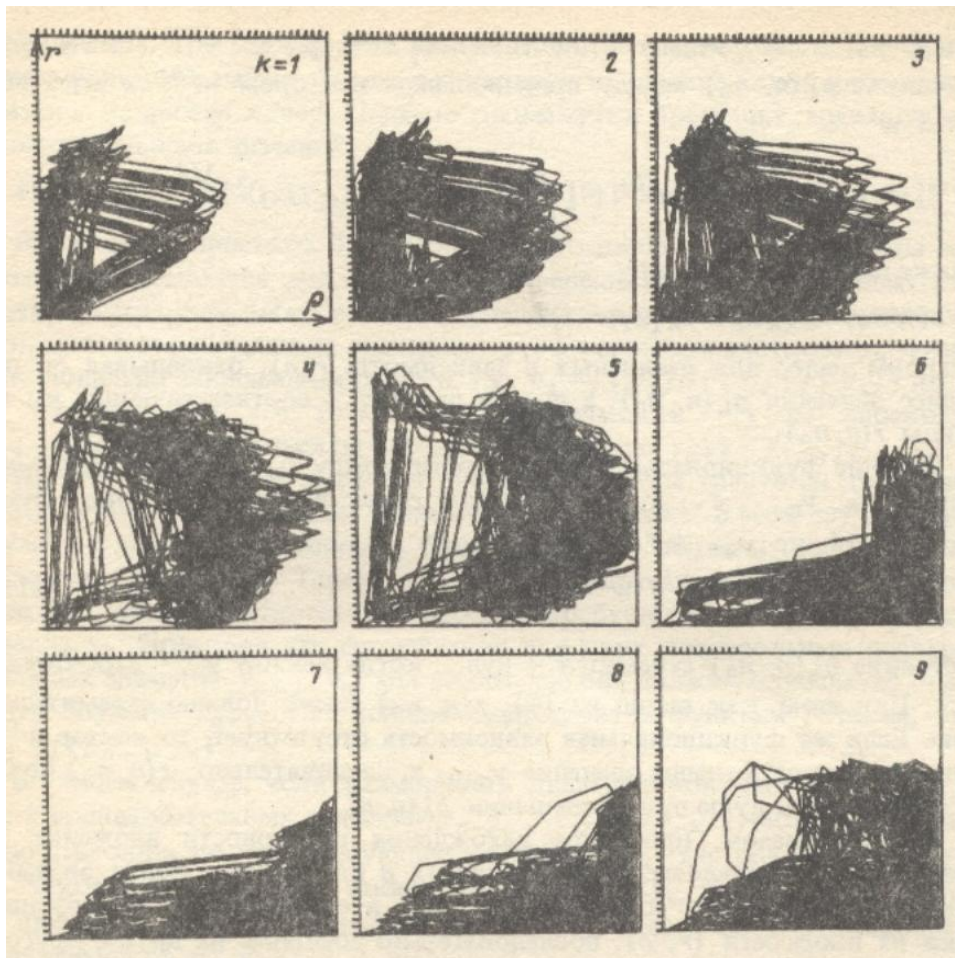


Рис. 3.4.4. Перевірка функціональної залежності  $(k+1)$ -ї координати від  $k$  попередніх за методом підпоследностей: розмірність вкладення – 5.

Найбільш інформативним вважається так званий метод Грассбергера – Прокаччіа<sup>6</sup>.

Задано деяким значенням параметра  $l$  і підрахуємо кореляційний інтеграл

$$C_k(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1}^N \theta[l - \rho_k(n,m)], \quad (3.4.7)$$

де  $N$  – повне число елементів у послідовності  $\{x_n\}$ ,  $\theta(z)$  – функція Хевісайда:

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Строго кажучи, у формулі (3.4.7) треба зробити граничний перехід  $N \rightarrow \infty$ , але реально величина  $N$  завжди обмежена.

Внесок до кореляційного інтегралу дають лише ті пари векторів  $w^{(n)}$  та  $w^{(m)}$ , віддаль між якими не перевищує заданої величини  $l$ . Очевидно, при  $l$ , більших від деякого порогового значення,  $C_k(l) = 1$  – сума в правій частині (3.4.7) міститиме  $N^2$  доданків, кожен з яких дорівнює одиниці. При малих  $l$ , навпаки,  $C_k(l) \rightarrow 0$ . Точніше, має місце співвідношення  $C_k(l) \sim l^{\alpha(k)}$ . Ця залежність аналогічна до залежності між «лінійним розміром» фракталу та його «об'ємом»  $V$ :

$$V \sim l^{d_F},$$

де  $d_F$  – фрактальна розмірність.

Величину  $\alpha(k)$  можна знайти, побудувавши залежність  $\ln[C_k(l)]$  від  $\ln l$ . Такі графіки можна побудувати для різних значень  $k$ . Починаючи з деякого значення  $k_0$ , величина  $\alpha(k)$  перестає залежати від  $k$ . Це значення  $k_0$  дає розмірність вкладення атрактора, а відповідне значення  $\alpha(k_0)$  – так звану кореляційну розмірність  $\nu$  даного атрактора (рис. 3.4.5).

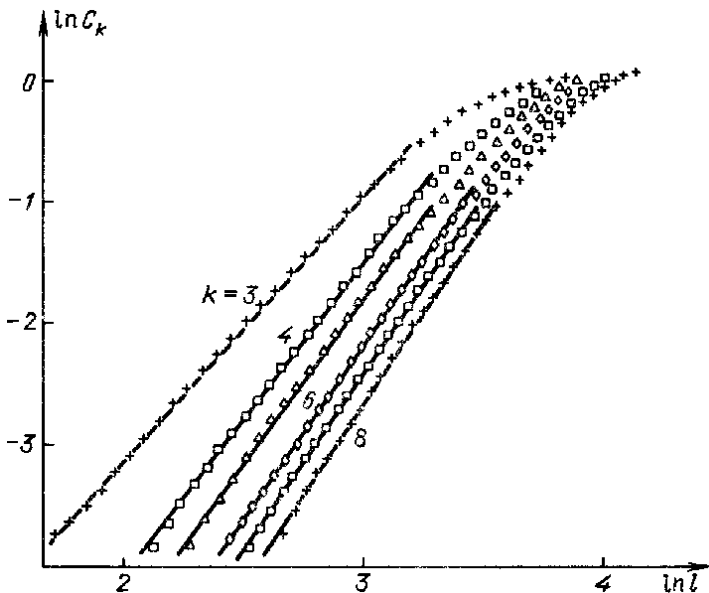


Рис. 3.4.5. Експериментальне визначення розмірності вкладення та кореляційної розмірності атрактора за методом Грассбергера – Прокаччіа: розмірність вкладення – 5, кореляційна розмірність – 2.8.

Справді, величина  $k$  визначає розмірність простору, в якому розраховується кореляційний інтеграл. Якщо вона менша від розмірності вкладення, фрактал у такому просторі

<sup>6</sup> Див.: P.Grassberger, I.Procaccia, Phys. Rev. Lett., **50**, 346 (1983). П. Грассбергер (Peter Grassberger, нар. 1940) – сучасний німецький математик, професор Інституту обчислень ім. Дж. фон Неймана в м. Юліху (Німеччина) та університету Калгарі (Канада), відомий своїм внеском до теорії хаосу. І. Прокаччіа (Itamar Procaccia, нар. 1949) – ізраїльський та американський фізик, професор Вейцманівського наукового інституту (Ізраїль), фахівець у галузі хімічної фізики, гідродинаміки, фізики фракталів та ін.



спотворюється. Якщо ж вона перевищує розмірність вкладення, то фрактальна розмірність не залежить від  $k$ .

В загальному випадку  $\nu \leq d_F$ . Рівність  $\nu = d_F$  має місце лише при рівномірному розміщенні точок на атракторі.

Таким чином, даний метод дає змогу оцінити фрактальну розмірність дивного атрактора як знизу (через кореляційну розмірність), так і згори (через розмірність вкладення).

Для систем із великою розмірністю вкладення використання процедури Грассбергера – Прокаччіа різко ускладнюється через стрімке зростання потрібної кількості експериментальних точок  $N$ . Тому на практиці нею можна користуватися, як правило, лише для випадку слабкої гідродинамічної турбулентності.

### 3.4.2.2. Слабка турбулентність у шарі рідини, який підігрівається знизу: аналіз системи Лоренца

Наприкінці п. 3.4.1.1 вже відзначалася аналогія між виникненням турбулентності в потоці рідини та в шарі рідини, який підігрівається знизу. Тому режим слабкої турбулентності можна розглянути на прикладі системи Лоренца (див. п. 2.4.2.6, рівняння (2.4.40), (2.4.43)) – системи трьох диференціальних рівнянь у повних похідних, яка в певному наближенні описує конвективні течії в шарі рідини, що підігрівається знизу:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= -PX + PY, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що величини  $X$  та  $Y$  характеризують відповідно амплітуди швидкості та збурення температури, а величина  $Z$  – “нелінійне спотворення” профілю температури (ефект, аналогічний до ангармонізму нелінійного осцилятора),  $b = 8/3$ ,  $r$  – число Релея, нормоване на його критичне значення,  $P$  – число Прандтля. Число Прандтля визначається властивостями рідини, а число Релея в експерименті можна змінювати, змінюючи, наприклад, різницю температур між нижньою та верхньою поверхнями шару рідини.

З’ясуємо спершу деякі загальні властивості системи Лоренца (2.4.40), (2.4.43).

Ця система відповідає тривимірному фазовому простору. Для неї дивергенція швидкості однакова в усьому фазовому просторі й від’ємна:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -P - 1 - b < 0, \quad (3.4.8)$$

отже, відповідна модель є дисипативною (що, власне кажучи, випливає і з процедури отримання рівнянь), і в усьому фазовому просторі фазові краплі з часом стискаються.

Система Лоренца інваріантна щодо заміни змінних  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ . Це означає, що її фазовий портрет симетричний щодо осі  $z$ .

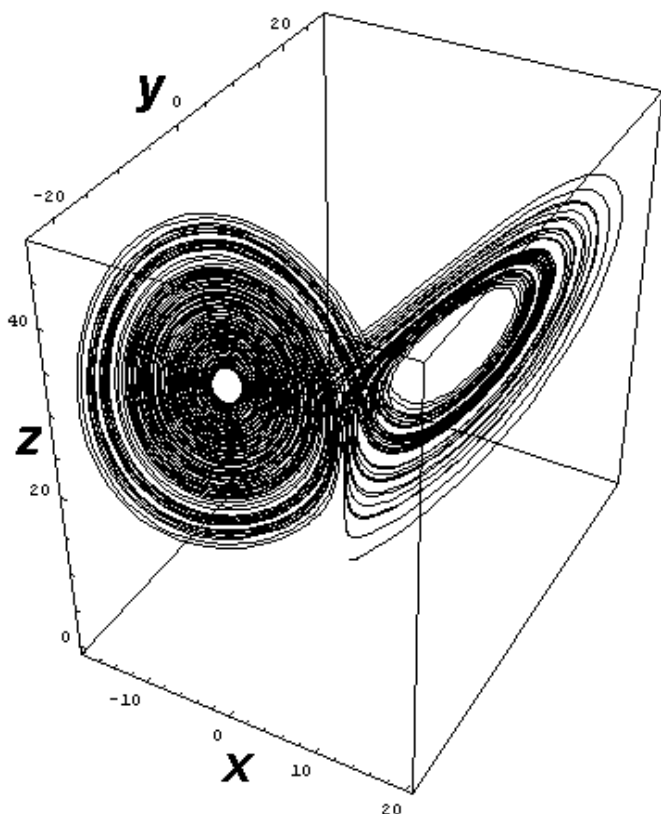
Стаціонарні точки системи Лоренца детально обговорювалися в пп. 2.4.2.7-2.4.2.9. Нагадаємо, що вони відповідають нерухомій рідині та двом типам конвективних валів, що виникають при  $r > 1$  і відрізняються лише напрямком обертання валів (рис. 2.4.5). Як уже вказувалося, при  $P > b + 1 = 11/3$  та  $r > r^*$ , де величина  $r^*$  визначається формулою (2.4.49 а),

$$r^* \equiv \frac{P(P+b+3)}{P-(b+1)},$$

всі вони виявляються нестійкими.

Як показує числовий розрахунок, за виконання умови  $P > 11/3$  ще при  $r < r^*$  у фазовому просторі, крім двох простих атракторів – стійких фокусів, що відповідають конвективним валам, з’являється спочатку пара сідлових граничних циклів, які при зростанні числа Ре-

ля поступово ускладнюються і врешті решт перетворюються на дивний атрактор – так званий атрактор Лоренца (рис. 3.4.6). При  $r > r^*$  атрактор Лоренца залишається єдиним атрактором у фазовому просторі, тобто система демонструє турбулентну поведінку незалежно від початкових умов.



*Рис. 3.4.6. Фазовий портрет системи Лоренца ( $P=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$ ; для цих параметрів  $r^*=22.38$ ).*

В процесі руху на атракторі Лоренца осциляції навколо двох нестійких стаціонарних точок чергуються з випадковими перестрибуваннями між околами цих точок.

Існування атрактора Лоренца означає, що рух рідини в шарі, що підігрівається знизу, при  $r > r^*$  якраз і відповідає режиму слабкої гідродинамічної турбулентності. При цьому структура течії у формі конвективних валів зберігається, але амплітуда і фаза (просторове розташування) цих валів з часом весь час змінюється складним чином.

Саме при розв'язанні системи Лоренца числовими методами було чи не вперше помічено, що дуже мала зміна початкових умов з часом приводить до радикальної зміни розв'язку (рис. 3.4.7 а, б). Видно, що при  $t < 20$  залежності, наведені на рис. 3.4.7 а та рис. 3.4.7 б, практично збігаються. Але вже при  $t > 25$  вони йдуть зовсім по-різному. Таким чином, ці рисунки ілюструють розбіжність із часом первісно сусідніх зображувальних точок на дивному атракторі (див. п. 3.2.1.2).

На основі своїх розрахунків Лоренц сформулював так званий ефект метелика: рух повітря, обумовлений польотом метелика в джунглях Амазонки, через деякий час може спричинити радикальну зміну погоди в Сибіру. На якісному рівні цей висновок вважається справедливим і сьогодні. За існуючими оцінками характерний час перемішування для атмосфери Землі складає величину порядку двох тижнів. Це і є той час, на який можна реально передбачати погоду.

З фізичної точки зору використання системи Лоренца при великих числах Релея є некоректним, оскільки при цьому порушуються припущення, які були використані при її отриманні. Тому, хоч були спроби використати систему Лоренца для опису руху повітря в атмосфері (по суті, для передбачення погоди), сьогодні вона має переважно історичне значення. Це значення полягає в тому, що на її прикладі була продемонстрована нестійкість динаміки складних систем, а атрактор Лоренца був першим дослідженим дивним атрактором.

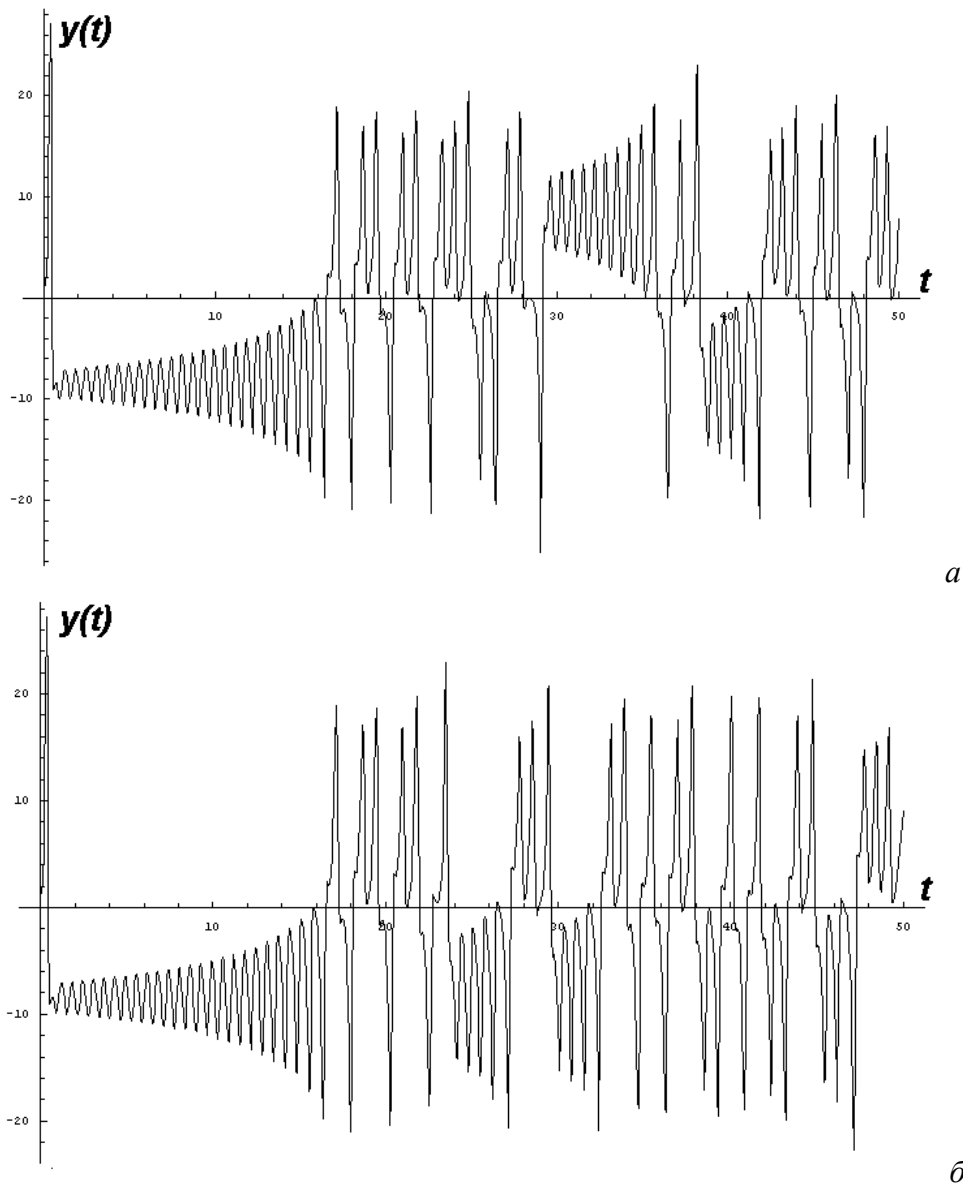


Рис. 3.4.7. Результати числового розв'язання системи Лоренца ( $P=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$ ) для початкових умов  $x(0)=z(0)=0$ ,  $y(0)=1.00$  (а) та  $x(0)=z(0)=0$ ,  $y(0)=1.01$  (б).

### 3.4.2.3. Перехід до просторово-часового хаосу

Нагадаємо (див. п. 2.4.2.6), що при отриманні системи Лоренца було зроблене жорстке припущення про структуру течії. Саме таким шляхом початкові рівняння в частинних похідних (рівняння Нав'є - Стокса, рівняння теплопровідності та рівняння неперервності) вдалося звести до невеликої кількості рівнянь у повних похідних (за часом).

В дійсності таке припущення залишається справедливим лише при невеликому ступені нерівноважності системи. При переході керувального параметра, що характеризує нерівноважність, через деяке критичне значення в системі починають утворюватися нерегулярні просторові структури, тобто спектр хвильових чисел також стає неперервним. У цьому випадку говорять про виникнення просторово-часового хаосу. Саме такий хаос ототожнюється з розвиненою турбулентністю.

Очевидно, народження просторово-часового хаосу призводить до помітного збільшення кількості ступенів вільності, який характеризує рух системи, або, що те саме, до суттєвого зростання розмірності відповідного дивного атрактора у функціональному просторі (див. п. 3.4.1.2).

Сказане вище можна проілюструвати на прикладі характерних режимів конвекції Ре-

ля – Бенара. Діаграма таких режимів, побудована на основі експериментальних даних, отриманих Р.Крішнамурті<sup>7</sup>, наведена на рис. 3.4.8.

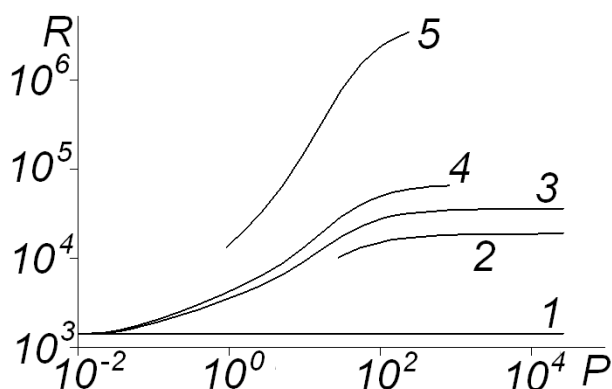


Рис. 3.4.8. Области існування різних режимів конвекції Релея - Бенара (експеримент, з роботи Р.Крішнамурті, 1973):  $R$  – число Релея,  $P$  – число Прандтля.

При дуже малих значеннях числа Релея  $R$  конвекція в системі відсутня при будь-яких значеннях числа Прандтля  $P$  (пор. з п. 2.4.2.4). При переході через критичне значення  $R_1$  (при фіксованому значенні  $P$ ), якому на рис. 3.4.8 відповідає лінія 1, виникають стаціонарні конвективні вали (як це й передбачає розв'язок системи Лоренца, див. п. 2.4.2.8). При переході через критичне значення  $R_2$  (лінія 2 на рис. 3.4.8) течія залишається стаціонарною, але стає тривимірною (в цьому режимі можуть, зокрема, виникати шестикутні комірки). Далі, при переході через наступне критичне значення  $R_3$  (лінія 3 на рис. 3.4.8), цей стаціонарний режим набуває коливного характеру (при  $P < 5$  стаціонарні конвективні вали безпосередньо переходять у нестаціонарний режим). При переході через значення  $R_4$  (лінія 4 на рис. 3.4.8) часові коливання стають нерегулярними, а їхній часовий спектр – суцільним. Цей режим відповідає слабкій турбулентності. Нарешті, при перевищенні критичного значення  $R_5$  (лінія 5 на рис. 3.4.8) ускладнюється й просторова структура течії – народжується просторово-часовий хаос, або розвинена турбулентність.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.4.2

1. Що виступає аналогом фазового простору для систем із розподіленими параметрами?
2. Що являє собою фазовий портрет дисипативної системи з розподіленими параметрами, яка здійснює турбулентний рух?
3. Чому в деяких випадках турбулентну гідродинамічну течію вдається описати невеликою кількістю рівнянь у повних похідних?
4. Який принцип лежить в основі експериментальних методів вимірювання розмірності вкладення?
5. Які умови повинен задовольняти проміжок часу між сусідніми вимірами, призначеними для визначення розмірності вкладення?
6. В чому перевага методу Грассбергера – Прокаччіа порівняно з іншими методами вимірювання розмірності вкладення?
7. В яких межах лежить фрактальна розмірність атрактора Лоренца?
8. Чи може, на Вашу думку, шар рідини, що підігрівається знизу, демонструвати регулярний або турбулентний рух в залежності від початкових умов при тих самих параметрах системи?
9. Що є аналогом просторово-часового хаосу для гамільтонівських систем?
10. Який режим течії рідини, що обтікає перешкоду, відповідатиме, на Вашу думку, слабкій турбулентності?

<sup>7</sup> Р.Крішнамурті (Ruby Ebisuzaki Krishnamurti, нар. 1934) – американська дослідниця індійського походження, займається проблемами аеро- та гідродинаміки, зокрема, конвекцією Релея – Бенара.

### 3.4.3. Розвинена гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося вище (п. 3.4.1.3), розвинена гідродинамічна турбулентність характеризується тим, що при великих значеннях числа Рейнольдса нестійкість у потоці рідини, що приводить до виникнення вихорів, розвивається на великих масштабах (порядку характерного масштабу течії  $l$ ), розсіювання енергії відбувається на малих масштабах, а проміжні масштаби утворюють так званий інерційний інтервал, через який потік енергії передається від великих масштабів до малих.

В принципі, задачу про дослідження розвиненої турбулентності потрібно було б розв'язувати статистичними методами, тобто приблизно таким самим шляхом, як це було зроблено для слабкої гамільтонівської турбулентності в п. 3.3.2. На основі рівнянь Нав'є – Стокса слід отримати кінетичне рівняння для функції розподілу, потім шляхом додаткового спрощення моделі – рівняння для моментів цієї функції. Розв'язання рівняння для моментів дозволяє знайти спектр турбулентності, тобто розподіл енергії турбулентного руху по частотах (або по хвильових числах).

Однак у роботах А.М. Колмогорова та О.М. Обухова<sup>8</sup>, виконаних ще на межі 1930-х – 1940-х рр., було запропоновано якісно інший шлях, заснований на застосуванні теорії розмірностей. Отримані таким чином результати, як не дивно, виявилися в загальних рисах справдливими не тільки для розвиненої гідродинамічної турбулентності, але й для інших типів турбулентності в розподілених дисипативних системах за наявності інерційного інтервалу.

Викладенню якісної картини розвиненої гідродинамічної турбулентності та теорії Колмогорова – Обухова й присвячений цей підрозділ.

#### 3.4.3.1. Пульсації різних масштабів у турбулентному потоці

Розвинена гідродинамічна турбулентність, як уже відзначалося (див. п.3.4.2.3), відповідає просторово-часовому хаосу. Тому вона характеризується надзвичайно нерегулярною, безладною зміною швидкості з часом у кожній точці потоку, а також від точки до точки в просторі для фіксованого моменту часу.

Під середньою швидкістю руху  $\bar{u}(\vec{r})$  у даній точці простору будемо розуміти усереднену за великий проміжок часу миттєву швидкість течії  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  у цій точці:

$$\bar{u}(\vec{r}) = \overline{\vec{v}(\vec{r}, t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \vec{v}(\vec{r}, t) dt. \quad (3.4.9)$$

Середня швидкість  $\bar{u}(\vec{r})$  від точки до точки змінюється плавно.

Величину  $\vec{v}_\sim = \vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})$ , що демонструє нерегулярні зміни в просторі та в часі, називатимемо пульсаційною складовою швидкості. Зрозуміло, що  $\overline{\vec{v}_\sim} = 0$ .

$$(3.4.10)$$

Пульсаційну складову швидкості можна якісно розглядати як набір турбулентних пульсацій (вихорів) різних масштабів. Під масштабом  $\lambda$  розуміють ті характерні відстані, на яких швидкість руху істотно змінюється. Можна вважати, що швидкість  $\vec{v}_\lambda$ , що відповідає масштабу  $\lambda$  – це пульсаційна складова швидкості  $\vec{v}_\sim$ , усереднена на довжині  $\lambda$ , або, що практично те саме (див. нижче), на проміжку часу  $\lambda/u(\vec{r})$ :

$$\vec{v}_\lambda(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda} \int_{z-\lambda/2}^{z+\lambda/2} [\vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})] dz \approx \frac{\bar{u}(\vec{r})}{\lambda} \int_{t-\lambda/2u(\vec{r})}^{t+\lambda/2u(\vec{r})} [\vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})] dt. \quad (3.4.11)$$

Як уже говорилося, при зростанні числа Рейнольдса спочатку з'являються великомасштабні пульсації, а потім – пульсації з усе меншими масштабами (див. п. 3.4.1.1).

<sup>8</sup> О.М. Обухов (Александр Михайлович Обухов, 1918 - 1989) – російський геофізик, академік АН СРСР (1970), лауреат Державної премії СРСР (1990, посмертно), організатор і директор Інституту фізики атмосфери АН СРСР, учень А.М. Колмогорова. Основні роботи присвячені теорії атмосфери та турбулентності.

Основна енергія турбулентного потоку зосереджена в найбільш великомасштабних пульсаціях (з розмірами порядку  $l$ ). Їхня швидкість  $v_l$  є величиною порядку зміни  $\Delta u_l$  середньої швидкості  $u$  на довжині  $l$ . Частота цих пульсацій у фіксованій точці спостереження складає величину порядку  $u/l$ . Це обумовлено тим, що вихори рухаються повз нерухомого спостерігача із середньою швидкістю потоку  $\bar{u}$ .

Дрібномасштабні пульсації характеризуються значно меншими пульсаційними швидкостями порівняно з пульсаціями масштабу  $l$  і несуть лише невелику частку кінетичної енергії турбулентного потоку. Характерні частоти пульсацій масштабу  $\lambda$  ( $\lambda \ll l$ ) складають величину порядку  $u/\lambda$ . Пульсаційна швидкість  $v_\lambda$ , що визначає зміну миттєвої швидкості на довжині  $\lambda$  в деякий момент часу, при  $\lambda \ll l$  набагато менша від величини  $\Delta u_l$ , але набагато більша від зміни середньої швидкості  $u$  на цій самій довжині  $\Delta u_\lambda$ :

$$\Delta u_\lambda \ll v_\lambda \ll \Delta u_l. \quad (3.4.12)$$

#### 3.4.3.2. Роль дисипації для пульсацій різних масштабів

Визначимо число Рейнольдса для турбулентних пульсацій масштабу  $\lambda$ :

$$\text{Re}_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \quad (3.4.13)$$

(пор. із формулою (3.4.2)). Величина  $\text{Re}_\lambda$  тим менша, чим менше  $\lambda$  (зі зменшенням  $\lambda$  зменшується й пульсаційна швидкість  $v_\lambda$ ).

При великих  $\text{Re}$  для пульсацій помірних масштабів  $\lambda$  величини  $\text{Re}_\lambda$  також є великими. Але великі значення числа Рейнольдса означають, що в'язкістю можна знехтувати (див. п. 3.4.1.1). Отже, для пульсацій не дуже малих масштабів, для яких виконана умова  $\text{Re}_\lambda \gg 1$ , в'язкість є неістотною, і дисипація енергії майже відсутня.

Дисипація енергії відбувається переважно для малих масштабів  $\lambda \leq \lambda_0$ , де порогове значення  $\lambda_0$  визначається з умови  $\text{Re}_{\lambda_0} \sim 1$ . З точки зору загальної картини руху рідини в турбулентному потоці такі масштаби неістотні.

Область масштабів  $\lambda_0 \ll \lambda \ll l$  відповідає інерційному інтервалу. В цьому інтервалі відсутнє як надходження енергії в систему, так і її розсіювання, а відбувається лише перекачування енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних.

Отже, для розвиненої гідродинамічної турбулентності характерний перехід енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних майже без дисипації. Для підтримання стаціонарного стану такого потоку необхідні зовнішні джерела енергії, які "накачують" її у великомасштабні пульсації. Іншими словами, система повинна бути відкритою.

#### 3.4.3.3. Аналіз великомасштабних пульсацій за методом розмірностей

Оскільки для пульсацій масштабів  $\lambda \gg \lambda_0$  в'язкість неістотна, то величини, що характеризують рух із такими масштабами, не можуть залежати від кінематичної в'язкості  $\nu$ . Ця обставина звужує круг величин, що визначають турбулентний рух. В результаті аналіз такого руху вдається провести на основі міркувань, пов'язаних із розмірністю.

Оцінімо (за порядком величини) розсіювання енергії при турбулентному русі великого масштабу (порядку  $l$ ). Це розсіювання обумовлене не безпосередньо в'язкими втратами, а передачею енергії на збудження пульсацій менших масштабів.

Нехай  $E$  – середня потужність розсіювання на одиницю маси. Вона має розмірність  $\text{ерг}/(\text{г}\cdot\text{с}) = (\text{г}\cdot\text{см}^2)/(\text{с}^2\cdot\text{г}\cdot\text{с}) = \text{см}^2/\text{с}^3$ . В силу сказаного вище ця величина, в принципі, може залежати лише від густини рідини  $\rho$ , характерного масштабу течії  $l$  та амплітуди пульсацій  $v_l \sim \Delta u_l$ . Оскільки розмірність  $E$  не містить маси, то залежності від  $\rho$  бути не може. Тоді, виходячи з міркувань розмірності, можна сконструювати єдину комбінацію величин  $l$  та

$\Delta u_l$ , яка матиме розмірність  $E$ :

$$E = f(\Delta u_l, l) \sim \frac{(\Delta u_l)^3}{l}. \quad (3.4.14)$$

Формула (3.4.14) підтверджує, що потужність для втрат великомасштабних пульсацій визначається саме перекачуванням енергії в пульсації менших масштабів, оскільки вона залежить лише від пульсаційної швидкості та характерного розміру цих пульсацій.

Різниця тиску  $\Delta p$  на межах області турбулентного руху також може, в принципі, залежати тільки від  $\rho$ ,  $l$  та  $\Delta u_l$ . Виходячи з міркувань розмірності, можна записати:

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u_l)^2. \quad (3.4.15)$$

Як бачимо, ця величина виявляється незалежною від розміру  $l$  області турбулентного руху. Якщо величина  $\Delta p$  відома, то з (3.4.15) випливає оцінка для пульсаційної швидкості найбільшого масштабу  $l$ :

$$v_l \sim \Delta u_l \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (3.4.16)$$

Як і слід було чекати, амплітуда великомасштабних пульсацій зростає при зростанні прикладеної різниці тисків. Цікаво відзначити, що закон цього зростання кореневий, як у залежності усталеної амплітуди коливань автогенератора Ван-дер-Поля від коефіцієнта зворотного зв'язку (за відсутності втрат)<sup>9</sup>.

#### 3.4.3.4. Локальні властивості розвиненої турбулентності

Розглянемо тепер властивості розвиненої турбулентності на масштабах  $\lambda \ll l$ . Їх прийнято називати локальними властивостями турбулентності.

Природно припустити, що на далеких віддальх  $d$  від стінок ( $d \gg \lambda$ ) локальні властивості розвиненої турбулентності характеризуються однорідністю (незалежністю від координат) та ізотропністю (незалежністю від напрямку середньої швидкості  $\bar{u}$  на ділянках із характерними розмірами порядку  $\lambda$ ).

Якщо масштаб пульсацій задовольняє умові  $\lambda_0 \ll \lambda \ll l$ , тобто потрапляє в інерційний інтервал, то локальні властивості турбулентності мають залежати лише від  $E$ ,  $\rho$  та  $\lambda$  і не повинні залежати від  $v$ ,  $l$  та  $\Delta u_l$  (поведінка вихорів усередині інерційного інтервалу не залежить безпосередньо від процесів на його межах, а визначається лише потоком енергії  $E$ , що переноситься через інерційний інтервал за одиницю часу).

Тоді зміна пульсаційної швидкості на масштабі  $\lambda$ , виходячи з міркувань розмірності, визначається співвідношенням

$$v_\lambda \sim (E\lambda)^{1/3}. \quad (3.4.17)$$

Величина  $v_\lambda$ , як уже вказувалося, характеризує одночасно й швидкість руху рідини у вихорах масштабу  $\lambda$ .

Співвідношення (3.4.17) відоме в літературі як закон Колмогорова – Обухова.

Турбулентність характеризується локальною нестійкістю. Нехай дві маленькі крапельки рідини знаходяться на малій відстані  $\lambda$ . Зміна цієї відстані з часом визначається швидкістю  $v_\lambda$ :  $v_\lambda = d\lambda/dt$ . Тоді, інтегруючи співвідношення (3.4.17), можна отримати закон зростання віддалі між сусідніми крапельками з часом:

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (E\lambda)^{1/3},$$

звідки

<sup>9</sup> Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, формули (1.13.6), (1.13.25).

$$\lambda(t) \sim E^{1/2} t^{3/2}. \quad (3.4.18)$$

Відповідно до (3.4.18), час, за який сусідні крапельки розходяться на віддаль  $\lambda$ , що значно перевищує початкову відстань між ними, складає

$$t(\lambda) \sim \frac{\lambda^{2/3}}{E^{1/3}}. \quad (3.4.18 \text{ а})$$

Оцінимо тепер відношення  $v_\lambda/\Delta u_l$ . Для цього запишемо  $\Delta u_\lambda$  через  $E$  та  $l$  із формули (3.4.14):

$$\Delta u_l \sim (El)^{1/3}. \quad (3.4.14 \text{ а})$$

Поділивши (3.4.17) на (3.4.14 а), отримаємо:

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u_l} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}. \quad (3.4.19)$$

Формула (3.4.19) встановлює масштабне співвідношення між розмірами вихорів та відповідними швидкостями.

Як уже згадувалося, турбулентний потік рідини можна уявити собі як набір вихорів різних масштабів, які зносяться із середньою швидкістю  $u$ . Тому зміну швидкості потоку за час  $\tau \ll T = l/u$  в певній нерухомій точці простору можна записати, замінивши у формулі (3.4.17) масштаб  $\lambda$  на пройдений шлях  $u\tau$ :

$$v_\tau \sim (Eu\tau)^{1/3}. \quad (3.4.17 \text{ а})$$

Зовсім інакше виглядає зміна швидкості  $v'_\tau$  за час  $\tau$  для деякої виділеної краплі рідини, яка рухається в потоці. Ця величина має залежати лише від  $E$  та  $\tau$ . Тоді на основі аналізу розмірності можна записати:

$$v'_\tau \sim (E\tau)^{1/2}. \quad (3.4.20)$$

Зрозуміло, що при  $\tau \ll T$  виконується нерівність  $v'_\tau \ll v_\tau$ .

#### 3.4.3.5. Оцінка порогового масштабу дисипації

Знаючи залежність  $v_\lambda$  від  $\lambda$ , ми можемо тепер явно оцінити масштаб  $\lambda_0$ , який визначає поріг дисипативних ефектів (див. п. 3.4.3.2). Справді, підставивши  $v_\lambda$  з (3.4.19) до формули (3.4.13), можна отримати:

$$\text{Re}_\lambda \sim \frac{\lambda v_\lambda}{\nu} \sim \frac{\lambda}{\nu} \Delta u_l \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3} \sim \frac{l \Delta u_l}{\nu} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3} \sim \text{Re} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}. \quad (3.4.13 \text{ а})$$

Як уже вказувалося, пороговий масштаб дисипації  $\lambda_0$  визначається з умови  $\text{Re}_{\lambda_0} \sim 1$ . Тоді з урахуванням (3.4.13 а) можна записати:

$$\lambda_0 \sim \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (3.4.21)$$

Формула (3.4.21) підтверджує висловлені раніше міркування про те, що при зростанні числа Рейнольдса інерційний інтервал розширюється в бік дрібніших масштабів.

Швидкість, що відповідає цьому масштабу, легко знайти з (3.4.19):

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u_l \left(\frac{\lambda_0}{l}\right)^{1/3} \sim \frac{\Delta u_l}{\text{Re}^{1/4}}. \quad (3.4.22)$$

Тепер можна знайти умову існування інерційного інтервалу:

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0 \sim \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (3.4.23)$$

Як випливає з (3.4.23), вона зводиться до вимоги  $\text{Re} \gg 1$ .



### 3.4.3.6. Колмогорівські спектри

Закон Колмогорова – Обухова можна переписати в спектральній формі.

Введемо замість масштабів  $\lambda$  хвильові числа  $k \sim 1/\lambda$ . Нехай  $W(k)dk$  є кінетична енергія рідини на одиницю маси в заданому інтервалі  $[k, k + dk]$ . Розмірність величини  $W(k) - (\text{г}\cdot\text{см}^2\cdot\text{см})/(\text{с}^2\cdot\text{г}) = \text{см}^3/\text{с}^2$ . Очевидно, вона має залежати лише від  $k$  та від  $E$ . Тоді з міркувань розмірності випливає, що

$$W(k) \sim \frac{E^{2/3}}{k^{5/3}}. \quad (3.4.24)$$

Інтегруючи (3.4.24) по  $k$ , маємо:

$$\int_k^\infty W(k)dk \sim \frac{E^{2/3}}{k^{2/3}} \sim (E\lambda)^{2/3}. \quad (3.4.24 \text{ а})$$

Інтеграл (3.4.24 а) визначає повну кінетичну енергію (на одиницю маси) пульсацій з масштабами, що не перевищують  $\lambda$ . Отже, він має бути величиною порядку  $v_\lambda^2$ . Тоді для  $v_\lambda$  виходить оцінка, що збігається із законом Колмогорова – Обухова у формі (3.4.17).

Співвідношення (3.4.24) визначає так званий колмогорівський спектр – ділянку спектральної інтенсивності розвиненої гідродинамічної турбулентності, яка відповідає інерційному інтервалу.

Формула (3.4.24) характеризує спектр хвильових чисел. Аналогічне співвідношення можна отримати й для частотного спектру, зробивши заміну  $k \sim \omega/u$ . З урахуванням того, що  $W(\omega)d\omega = W(k)dk$ , можна записати:

$$W(\omega)d\omega \sim E^{2/3} \left(\frac{\omega}{u}\right)^{-5/3} \frac{d\omega}{u},$$

звідки

$$W(\omega) \sim \frac{(Eu)^{2/3}}{\omega^{5/3}}. \quad (3.4.25)$$

Частота  $\omega$ , що фігурує у формулі (3.4.25), визначає повторюваність у часі руху в деякій нерухомій точці спостереження. Повторюваність руху деякої виділеної краплі рідини (як у формулі (3.4.20)) будемо характеризувати частотою  $\omega'$ . Енергетичний спектр  $W(\omega')$  повинен залежати лише від  $E$  та  $\omega'$  і не повинен залежати від  $u$ . Тому з міркувань розмірності виходить співвідношення

$$W(\omega') \sim \frac{E}{(\omega')^2}. \quad (3.4.26)$$

### 3.4.3.7. Область масштабів, де в'язкість рідини стає суттєвою

На масштабах  $\lambda \ll \lambda_0$  турбулентність відсутня, швидкість змінюється плавно. Розкладаючи невідому залежність  $\nu(\lambda)$  в ряд Тейлора, обмежуючись лінійним за  $\lambda$  доданком та враховуючи, що  $\nu(\lambda = 0) = 0$ , можна записати, що  $\nu(\lambda) = \text{const} \cdot \lambda$ . Оскільки останнє співвідношення можна вважати справедливим аж до масштабів  $\lambda_0$ , то на дисипативній ділянці масштабів справджується співвідношення

$$\nu_\lambda \sim \frac{\nu_{\lambda 0}}{\lambda_0} \lambda \sim R^{1/2} \Delta u \frac{\lambda}{l} \quad (3.4.27)$$

(враховано формули (3.4.21)-(3.4.22)).

Таким чином, частотний спектр розвиненої турбулентності має вигляд, якісно показаний на рис. 3.4.9.

Слід зазначити, що ситуації, подібні до розглянутої вище, коли енергія надходить до системи на одних масштабах і поглинається на інших, реалізуються в багатьох системах, що характеризуються турбулентною динамікою. Таке перекачування енергії вгору за спектром має місце, зокрема, в плазмово-пучкових системах<sup>10</sup>. Спектри, що відповідають інерційному інтервалу масштабів, для таких систем теж прийнято називати колмогорівськими.

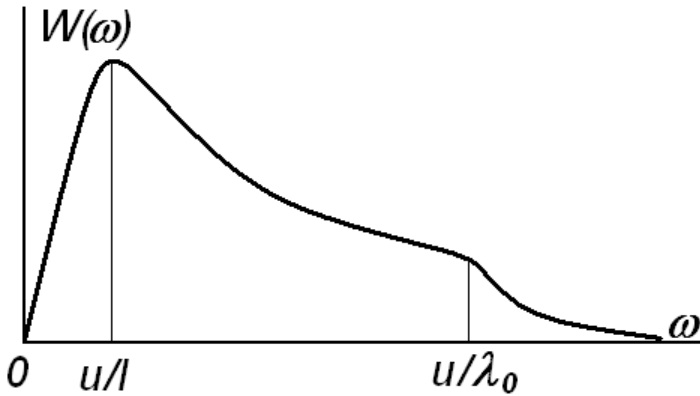


Рис. 3.4.9. Частотна залежність спектральної інтенсивності для розвиненої гідродинамічної турбулентності.

Як уже згадувалося, сучасні методи аналізу гідродинамічної турбулентності ґрунтуються на застосуванні статистичних методів і розв'язанні рівняння Ліувілля. Таким способом намагаються виділити в спектрах турбулентних течій інші характерні ділянки, відмінні від колмогорівських спектрів та областей, де в'язкість рідини суттєва.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.4.3

1. Що таке розвинена гідродинамічна турбулентність?
2. Чому дисипація в рідині істотна тільки на малих масштабах? Від чого залежать ці масштаби? Відповідь дайте на основі аналізу рівняння Нав'є – Стокса.
3. Чим, на Вашу думку, визначається ширина колмогорівського спектру для течії в трубі?
4. Які міркування покладені в основу теорії Колмогорова – Обухова?
5. Як залежить число Рейнольдса від різниці тисків на межах області турбулентного руху?
6. Чи залежить пульсаційна швидкість в інерційному інтервалі, розрахована за формулою Колмогорова – Обухова, від вибору напрямку осі  $z$  ?
7. Порівняйте між собою колмогорівську ділянку спектру розвиненої гідродинамічної турбулентності та спектр слабкої турбулентності хвильових полів, вказавши їхні спільні та відмінні риси.

#### Задачі до підрозділу 3.4.3

3.4.3.1. Отримайте вираз для

- а) середньої потужності розсіювання на одиницю маси;
- б) пульсаційної швидкості для вихорів масштабу  $\lambda$  ;
- в) колмогорівської ділянки спектру (по хвильових числах) через різницю тисків, що породжує турбулентну течію.

3.4.3.2. За яким законом змінюватиметься

- а) спектральна (по хвильових числах);
- б) спектральна (по частотах)

густина енергії турбулентної течії на одиницю маси на ділянці спектру, де в'язкість рідини стає суттєвою?

<sup>10</sup> Див., наприклад: Е.В.Мишин, Ю.Я.Ружин, В.А.Телегин. Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л., Гидрометеоиздат, 1989.

### 3.4.4. Регулярні дисипативні структури та турбулентність в активних середовищах

Щоб з різних точок зору підкреслити спільну природу турбулентності та регулярних структур у розподілених дисипативних системах, розглянемо на завершення поняття патернів<sup>11</sup> та узагальнену класифікацію турбулентного руху та дисипативних структур<sup>12</sup>.

#### 3.4.4.1. Патерни та автопатерни

Поняття патерна, що застосовується до систем із розподіленими параметрами, можна розглядати як деяке узагальнення поняття структури. Під патерном розуміють будь-яку послідовність явищ у часі або будь-яке розташування предметів у просторі, які можна відрізнити від іншої послідовності або іншого розташування чи порівняти з ними.

За аналогією з коливаннями патерни можна поділити на вільні, вимушені та автопатерни. Прикладом вільних патернів можуть служити солітони Кортевега - де Вріза (хвилі великої амплітуди на неглибокій воді з твердим дном) чи нелінійного рівняння Шрьодінгера (оптичні імпульси великої амплітуди у волоконних світловодах), димові кільця, вихори в рідині чи газі за гвинтом корабля або літака, сніжинки. В певному сенсі вільні патерни виступають узагальненням лінійних хвиль у пасивних середовищах.

Прикладами вимушених патернів можуть служити дисипативні структури в активних середовищах, властивості яких нав'язуються граничними умовами. Ми обговорювали такі режими для бруселятора (див. п. 1.3.3.5). До цього ж класу належать кругові конвективні комірки, створювані за рахунок кругової межі.

Під автопатернами розуміють локалізовані просторові утворення, що стійко існують у дисипативних нерівноважних середовищах і не залежать від початкових та граничних умов (у скінчених межах). Автопатерни, в свою чергу, ділять на статичні, в яких рух відсутній, стаціонарні, в яких рух є незмінним, та динамічні, які регулярно або хаотично змінюються з часом.

Прикладом статичних автопатернів є структури плям на хутрі деяких тварин (реалізація структур Тюрінга). Прикладом стаціонарних (або квазістаціонарних) автопатернів є комірки Бенара, смерчі, циклони, велика червона пляма Юпітера. Нарешті, прикладом динамічних автопатернів можуть служити, з одного боку, різноманітні автохвилі (біжучі фронти, хвилі заселення, біжучі імпульси різноманітної природи), а з іншого – турбулентний рух (наприклад, слабка гідродинамічна турбулентність, описувана системою Лоренца).

Таким чином, поняття динамічних автопатернів об'єднує регулярний та хаотичний рух активних розподілених систем.

#### 3.4.4.2. Узагальнена класифікація турбулентного руху та дисипативних структур

У системах, де спостерігаються складні колективні рухи, ці рухи зручно класифікувати за ступенем збурення ліній течії (або фазових траєкторій<sup>13</sup>) та за ступенем скорельованості пульсацій. Подібна класифікація була запропонована для опису плазмової турбулентності, але вона застосовна й для колективних рухів в інших середовищах.

Ступінь збурення ліній течії (фазових траєкторій) визначається ступенем нерівноважності середовища. Останній зручно кількісно характеризувати деяким параметром  $\xi$  – відношенням енергії турбулентного руху до повної енергії руху системи. Наприклад, для турбулентного потоку рідини це буде відношення середньої густини кінетичної енергії турбулентних пульсацій до густини кінетичної енергії спрямованого руху рідини, для турбулентної

<sup>11</sup> Див., наприклад: Д.И.Трубецков, Е.С.Мчедлова, Л.В.Красичков. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М., Физматлит, 2005.

<sup>12</sup> Ю.С.Сигов. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. М., Физматлит, 2001. Ю.С.Сигов (Юрий Сергеевич Сигов, 1934 - 1999) – російський фізик-теоретик, професор, працював в Інституті прикладної математики ім. М.В.Келдиша АН СРСР. Народився в Луганській обл. Основні результати пов'язані з числовим моделюванням турбулентної плазми.

<sup>13</sup> Нагадаємо, що перемішуванню в фазовому просторі відповідає турбулентна течія "фазової рідини".

плазми – відношення густини енергії коливань до густини енергії теплового руху, і таке інше.

Введемо два характерні часи колективних рухів  $\tau_{NL}$  та  $\tau_C$ . Під  $\tau_{NL}$  будемо розуміти характерний час нелінійної взаємодії, що характеризує обмін енергією між нелінійними хвилями (наприклад, за рахунок їхньої параметричної взаємодії, див. пп. 3.3.1-3.3.2) чи вихорами. По суті, цей параметр можна розуміти як час формування регулярної дисипативної структури. Під  $\tau_C$  будемо розуміти характерний час перемішування (або руйнування кореляцій руху). Руйнування кореляцій може відбуватися як за рахунок впливу випадкових сил, так і за рахунок взаємодії між хвилями чи вихорами (стохастична динаміка). Таким чином, одна й та сама взаємодія може породжувати як регулярний (регулярні дисипативні структури), так і стохастичний (турбулентність) колективний рух. Очевидно, першому з них відповідає умова  $\tau_{NL} \ll \tau_C$ , другому – протилежна умова  $\tau_{NL} \gg \tau_C$ .

Тепер відкладемо по осях координат безрозмірні параметри  $\xi$  та  $\tau = \tau_C / \tau_{NL}$ , що характеризують відповідно ступінь нерівноважності середовища та ступінь скорельованості пульсацій (рис. 3.4.10). Різні області цієї площини відповідають різним типам колективного руху.

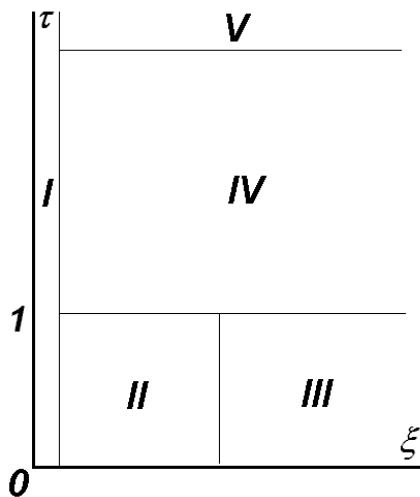


Рис. 3.4.10. Узагальнена класифікація турбулентного руху та дисипативних структур: I – лінійні хвилі; II – слабка турбулентність; III – сильна турбулентність; IV – помірна турбулентність; V – вироджена турбулентність.

При малих  $\xi$  рівень збурень ламінарної течії дуже малий незалежно від значень  $\tau$ , і ми маємо справу з лінійними хвилями, або хвилями малої амплітуди – порядку рівня теплових флуктуацій (рис. 3.4.11 а, область I на рис. 3.4.10).

При невеликому зростанні  $\xi$  за умови  $\tau \ll 1$  система переходить до режиму слабкої турбулентності (рис. 3.4.11 б, область II на рис. 3.4.10). У цьому режимі хвилі можна вважати квазігармонічними ( $\tau_{NL}$  є значно більшим від часового періоду хвиль), але стає суттєвою взаємодія між ними, яка й приводить до хаотизації руху (пп. 3.3.1-3.3.2, 3.4.2).

При подальшому зростанні  $\xi$  та незмінному  $\tau$  реалізується режим сильної турбулентності (рис. 3.4.11 в, область III на рис. 3.4.10). У цьому режимі  $\tau_{NL}$  стає величиною порядку або менше часового періоду хвиль, так що останні вже не можна вважати квазігармонічними<sup>14</sup>. Зазначимо, що характеристика слабкої та сильної турбулентності в залежності від величини параметра  $\xi$  (по суті, від амплітуди збуджених у системі хвиль) є найбільш універсальною.

Спільною рисою слабкої та сильної турбулентності є відсутність регулярних просторових або просторово-часових структур, обумовлена мализною параметра  $\tau$  (по суті – мализною часу перемішування  $\tau_C$ ).

<sup>14</sup> Це визначення сильної турбулентності узгоджується з тим, що подане на початку розділу 3.3.

Якщо ж виконано умову  $\tau \gg 1$ , то наявність нерівноважності (коли параметр  $\xi$  не є малим) спричиняє появу регулярних просторових чи просторово-часових структур (рис. 3.4.11 д). Цей режим (область V на рис. 3.4.10) за Сіговим називається виродженою турбулентністю. По суті, це регулярні дисипативні структури, приклади яких розглядалися в п. 2.4.

Нарешті, випадок помірних значень  $\tau$  і немалих  $\xi$  називається помірною турбулентністю (рис. 3.4.11 г, область V на рис. 3.4.10). Помірну турбулентність можна розглядати як область поступового переходу від регулярних хвильових структур до хаотичного руху.

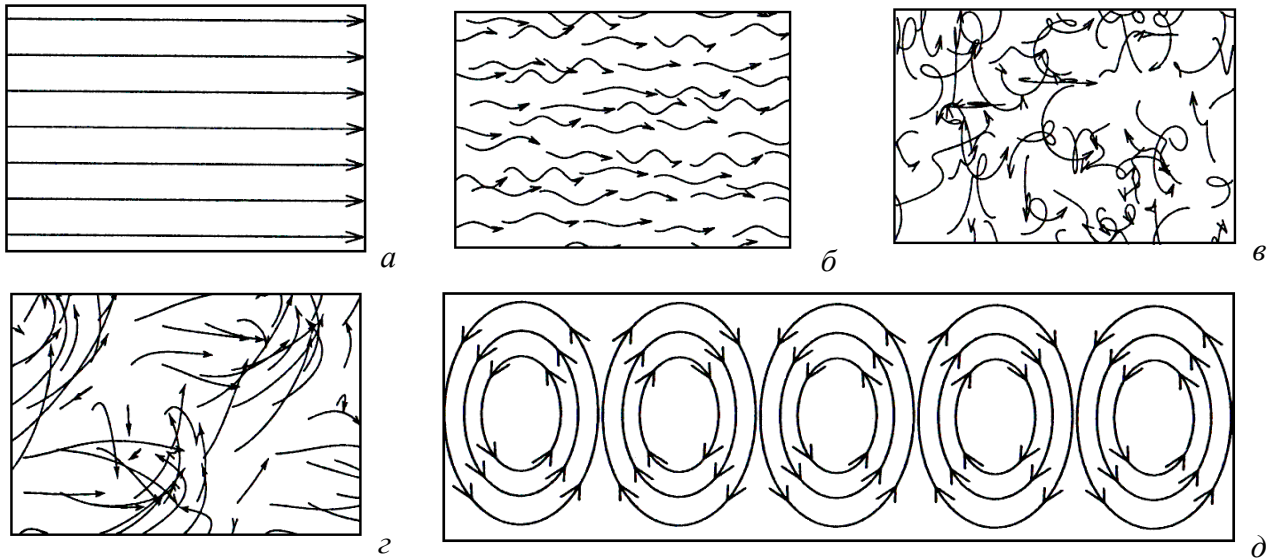


Рис. 3.4.11. Умовне зображення руху для різних типів турбулентності: а – ламінарна течія з хвилями малої амплітуди; б – слабка турбулентність; в – сильна турбулентність; г – помір-на турбулентність; д – вироджена турбулентність.

#### Контрольні питання до підрозділу 3.3.4

1. Наведіть відомі Вам приклади помірної турбулентності.
2. В чому, на Вашу думку, полягає різниця між регулярними дисипативними структурами та турбулентністю?

#### Висновки до розділу 3.4

1. Для систем із розподіленими параметрами аналогом фазового простору виступає так званий функціональний простір, кожна точка якого відповідає певному просторовому розподілу досліджуваної величини (скалярному або векторному полю). Для дисипативних систем, що демонструють турбулентну динаміку, у функціональному просторі існує дивний атрактор, причому його фрактальна розмірність скінченна. Це означає, що рух такої системи можна адекватно описати системою скінченної кількості диференціальних рівнянь у повних похідних. Існують експериментальні методи, що в принципі дозволяють оцінити необхідну для такого опису кількість рівнянь (розмірність вкладення).
2. Під слабкою гідродинамічною турбулентністю розуміють таку турбулентність, коли розмірність вкладення за порядком величини не перевищує десяти. Найпростішим прикладом слабкої гідродинамічної турбулентності може служити описувана системою рівнянь Лоренца турбулентна конвекція в шарі рідини, який підігрівається знизу. Для такої турбулентності характерне збереження структури течії у вигляді конвективних валів, амплітуда яких хаотично змінюється з часом. Як показує експеримент, при подальшому зростанні числа Релея розвивається просторово-часовий хаос, тобто поведінка системи стає випадковою не тільки в часі, але й у просторі.

3. Механізм розвитку турбулентності в потоці рідини пов'язаний із нестійкістю Кельвіна - Гельмгольца, зумовленою поперечним градієнтом швидкості течії. Поріг розвитку цієї нестійкості визначається значенням числа Рейнольдса. На нелінійній стадії нестійкість Кельвіна - Гельмгольца приводить до утворення вихорів, розміри яких складають величину порядку характерних розмірів течії. Якщо початкове значення числа Рейнольдса велике, первинні вихори, в яких також має місце градієнт швидкості, починають послідовно ділитися навпіл, утворюючи вихори все менших масштабів. Нарешті, для достатньо малих вихорів стає суттєвою в'язкість рідини, і відбувається дисипація кінетичної енергії течії. У течії з великими числами Рейнольдса між масштабами первинних вихорів та масштабами, на яких стає помітною дисипація, існує так званий інерційний інтервал масштабів, через який енергія перекачується від великих масштабів до малих без згасання. Існування інерційного інтервалу характеризує режим розвиненої гідродинамічної турбулентності.
4. Для розвиненої гідродинамічної турбулентності вдається визначити цілий ряд кількісних співвідношень на основі методу розмірностей. Серед них – закон Колмогорова - Обухова, який визначає зміну пульсаційної швидкості на заданому масштабі. З цього закону випливає степеневий характер спектру турбулентності в інерційному інтервалі (так звані колмогорівські спектри).
5. Не існує різкої межі між турбулентним рухом та регулярними дисипативними структурами, при неперервній зміні керувальних параметрів вони неперервним чином переходять одне в одне. Цю обставину підкреслює узагальнена класифікація турбулентного руху та дисипативних структур за Ю.С.Сіговим.

#### ***Контрольні питання до розділу 3.4***

1. Порівняйте між собою слабку турбулентність за Сіговим, слабку турбулентність для хвильових полів та слабку гідродинамічну турбулентність.
2. Порівняйте між собою сильну турбулентність за Сіговим, сильну турбулентність для хвильових полів та розвинену гідродинамічну турбулентність.
3. Порівняйте між собою узагальнену класифікацію турбулентності та дисипативних структур та діаграму режимів конвекції Релея – Бенара в залежності від числа Релея та числа Прандтля.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Э.Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., Сов. радио, 1977.
2. А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
3. В.А.Васильев, Ю.М.Романовский, В.Г.Яхно. Автоволновые процессы. М., Наука, 1987.
4. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
5. Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий, А.А.Непомнящий. Устойчивость конвективных течений. М., Наука, 1989.
6. Е.В.Мишин, Ю.Я.Ружин, В.А.Телегин. Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л., Гидрометеиздат, 1989.
7. А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. Введение в синергетику. М., Наука, 1990.
8. Г.Николис, И.Пригожин. Познание сложного. М., Мир, 1990.
9. Ю.Л.Климонтович. Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.
10. W.Horton, Y.-H.Ishikawa. Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas. Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, World Scientific Publishing, 1996.
11. Пределы предсказуемости. П/ред. Ю.А.Кравцова. М., ЦентрКом, 1997.
12. М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. R&C Dynamics, 2000.
13. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Гидродинамика. М., Физматлит, 2001.
14. М.Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М., УРСС, 2001.
15. В.Й.Сугаков. Основы синергетики. К., Обереги, 2001.
16. Ю.С.Сигов. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. М., Физматлит, 2001.
17. И.Пригожин. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. М., УРСС, 2002.
18. П.Гленсдорф, И.Пригожин. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., УРСС, 2003.
19. Н.В.Карлов, Н.А.Кириченко. Колебания, волны, структуры. М., Физматлит, 2003.
20. Д.И.Трубецков. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М., УРСС, 2004.
21. Д.И.Трубецков, Е.С.Мчедлова, Л.В.Красичков. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М., Физматлит, 2005.
22. Г.Хакен. Информация и самоорганизация. М., УРСС, 2005.
23. С.П.Кузнецов. Динамический хаос. М., Физматлит, 2006.
24. А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. Основы теории сложных систем. М. – Ижевск. НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2007.
25. І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.