

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Радіофізичний факультет
Кафедра фізичної електроніки**

І. О. Анісімов

Синергетика

Навчальний посібник



Київ 2006

Передмова**ВСТУП**

В.1. Що вивчає синергетика? В.2. Основні типи регулярних структур у нерівноважних середовищах. В.3. Турбулентність. В.4. Синергетика й термодинаміка. В.5. Практичне значення синергетики. В.6. Зміст та структура курсу.

Частина 1. ТЕРМОДИНАМІКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ**1.1. Ентропія та другий початок термодинаміки для замкнених систем***1.1.1. Достатня умова стійкості динамічної системи*

1.1.1.1. Функція Ляпунова і теорема Ляпунова. 1.1.1.2. Приклад застосування теореми Ляпунова.

1.1.2. Другий початок термодинаміки для ідеального газу

1.1.2.1. Другий початок термодинаміки. 1.1.2.2. Больцманівська інтерпретація ентропії. 1.1.2.3. Визначення ентропії за Больцманом. 1.1.2.4. Н-теорема Больцмана.

1.1.3. Ентропія системи частинок, що взаємодіють між собою

1.1.3.1. Ентропія Гіббса. 1.1.3.2. Теорема Гіббса.

1.1.4. Узагальнення поняття ентропії

1.1.4.1. Ентропія Шеннона. 1.1.4.2. Ентропія Шеннона для ансамблю автогенераторів.

1.1.5. Системи зі сталою температурою

Контрольні питання до розділу 1.1

Задачі до розділу 1.1

1.2. Виробництво ентропії в нерівноважних системах*1.2.1. Ентропія у відкритих системах*

1.2.1.1. Узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи. 1.2.1.2. Густина виробництва ентропії та потік ентропії. 1.2.1.3. Рівняння балансу для ентропії.

1.2.2. Густина виробництва ентропії в системах із локальною рівновагою

1.2.2.1. Поняття локальної рівноваги. 1.2.2.2. Локальне виробництво ентропії. 1.2.2.3. Формула Гіббса для ентропії. 1.2.2.4. Локальне виробництво ентропії при протіканні хімічної реакції.

1.2.3. Лінійна нерівноважна термодинаміка

1.2.3.1. Виробництво ентропії при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги. 1.2.3.2. Нерівноважні стаціонарні стани. Теорема Пригожина.

Контрольні питання до розділу 1.2

Задачі до розділу 1.2

1.3. Стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги*1.3.1. Теорія термодинамічної стійкості*

1.3.1.1. Умова стійкості стаціонарного стану для малих відхилень від положення рівноваги. 1.3.1.2. Другий диференціал ентропії у випадку збурення однієї змінної. 1.3.1.3. Умова термодинамічної стійкості у випадку збурення багатьох змінних. 1.3.1.4. Другий диференціал ентропії і виробництво ентропії. 1.3.1.5. Стійкість станів, далеких від положення термодинамічної рівноваги.

1.3.2. Термодинамічна стійкість хімічних реакцій

1.3.2.1. Стаціонарні стани й термодинамічна гілка. 1.3.2.2. Надлишкове виробництво ентропії при перетворенні однієї пари речовин в іншу пару речовин. 1.3.2.3. Надлишкове виробництво ентропії для реакції автокаталітичного типу.

1.3.3. Брюсселятор

1.3.3.1. Опис моделі та вихідні рівняння. 1.3.3.2. Стаціонарний стан та його стійкість. 1.3.3.3. Характерні області стійкості-нестійкості та переходи між ними.

1.3.3.4. Нелінійна стадія динаміки бруселятора.

Контрольні питання до розділу 1.3

Задачі до розділу 1.3

1.4. Самоорганізація та еволюція термодинамічно нерівноважних систем

1.4.1. Кількісне порівняння ступеню самоорганізації для двох відмінних станів системи

1.4.1.1. S-теорема Климонтовича. 1.4.1.2. Самоорганізація в автогенераторі Ван-дер-Поля.

1.4.2. Принцип мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації

1.4.3. Роль флуктуацій у процесах самоорганізації

1.4.3.1. Біфуркації та вибір. 1.4.3.2. Роль флуктуацій при проходженні системи через біфуркаційну точку.

Контрольні питання до розділу 1.4

Задачі до розділу 1.4

Частина II. РЕГУЛЯРНІ ДИСИПАТИВНІ СТРУКТУРИ

2.1. Автохвилі та інші нестационарні регулярні структури

2.1.1. Автохвилі в бістабільних середовищах

2.1.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників). 2.1.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля). 2.1.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом. 2.1.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу. 2.1.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикавання): побудова фазового портрету. 2.1.1.6. Вигляд хвилі перемикавання для модельної кінетичної функції. 2.1.1.7. Еволюція початкового збурення в бістабільному середовищі. 2.1.1.8. Поширення хвиль перекидання в двовимірних середовищах. 2.1.1.9. Хвиля заселення.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.1

Задачі до підрозділу 2.1.1

2.1.2. Автохвилі в середовищах із відновленням

2.1.2.1. Середовища з відновленням та рівняння, що їх описують. 2.1.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (якісний розгляд). 2.1.2.3. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використані наближення. 2.1.2.4. Імпульс горіння. 2.1.2.5. Довжина релаксації та фазовий портрет. 2.1.2.6. Періодичні хвилі в середовищах з відновленням. 2.1.2.7. Спіральні хвилі в середовищі з відновленням: розрахунок форми фронту. 2.1.2.8. Природа ядра спіральної хвилі. 2.1.2.9. Спіральні хвилі в неоднорідних та нестационарних середовищах. 2.1.10. Автохвильові фронти в тривимірних середовищах. 2.1.2.11. Пейсмекери в середовищі з відновленням.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.2

Задачі до підрозділу 2.1.2

2.1.3. Автохвилі в автоколивних середовищах

2.1.3.1. λ - ω модель для автоколивного середовища. 2.1.3.2. Рівняння для фазових хвиль. 2.1.3.3. Синфазні автоколивання. 2.1.3.4. Біжучі фазові хвилі. 2.1.3.5. Взаємодія двох біжучих фазових хвиль. 2.1.3.6. Пейсмекери. 2.1.3.7. Спіральні хвилі в автоколивних середовищах.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.3

Задачі до підрозділу 2.1.3

Контрольні питання до розділу 2.1

2.2. Стаціонарні дисипативні структури

2.2.1. Дисипативні структури, обумовлені розподіленним зворотним зв'язком

2.2.1.1. Баретер: принцип дії. 2.2.1.2. Розрахунок характеристик дисипативної структури. 2.2.1.4. Утворення вогнища горіння. 2.2.1.4. Властивості дисипативних структур, обумовлених розподіленним зворотним зв'язком.

Контрольні питання до підрозділу 2.2.1

Задачі до підрозділу 2.2.1

2.2.2. Дисипативні структури, обумовлені аперіодичною нестійкістю

2.2.2.1. Конвекція Релея – Бенара: опис моделі та вихідні рівняння. 2.2.2.2. Стационарний розв’язок рівнянь. 2.2.2.3. Отримання та розв’язок рівнянь для малих збурень. 2.2.2.4. Умови виникнення конвекції. 2.2.2.5. Нелінійна теорія ефекту Релея – Бенара для конвективних валів: отримання системи рівнянь для ϕ . 2.2.2.6. Отримання системи Лоренца. 2.2.2.7. Стационарні точки системи Лоренца. 2.2.2.8. Стійкість стационарних точок системи Лоренца. 2.2.2.9. Властивості стационарних конвективних валів. 2.2.2.10. Конвекція Релея – Бенара: виникнення шестикутних комірок.

Контрольні питання до підрозділу 2.2.2

Задачі до підрозділу 2.2.2

Контрольні питання до розділу 2.2

Частина 3. ХАОС І ТУРБУЛЕНТНІСТЬ

3.1. Хаос у гамільтонівських системах

3.1.1. Інтегровні гамільтонівські системи

3.1.1.1. Рівняння Гамільтона. 3.1.1.2. Теорема Ліувілля. 3.1.1.3. Канонічні перетворення. 3.1.1.4. Змінні дія-кут. 3.1.1.5. Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут. 3.1.1.6. Інтегровні системи з багатьма ступенями вільності. 3.1.1.7. Фазовий портрет інтегровної системи з двома ступенями вільності. 3.1.1.8. Резонансні та нерезонансні тори для системи з довільним числом ступенів вільності. 3.1.1.9. Умова невиродженості.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.1

Задачі до підрозділу 3.1.1

3.1.2. Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних

3.1.2.1. Канонічна теорія збурень для нелінійного осцилятора. 3.1.2.2. Рівняння Гамільтона – Якобі. 3.1.2.3. Знаходження елементів ряду для нового гамільтоніана. 3.1.2.4. Знаходження твірної функції. 3.1.2.5. Канонічна теорія збурень для систем із багатьма ступенями вільності. 3.1.2.6. Теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера. 3.1.2.7. Дифузія Арнольда. 3.1.2.8. Теорема Пуанкаре – Біркгофа. 3.1.2.9. Гомоклінічні структури. 3.1.2.10. Вуса та завитки. 3.1.2.11. Теорія КАМ і магнітне утримання плазми. 3.1.2.12. Аналогія між теоремою КАМ та рухом заряджених частинок у токамаках.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.2

Задачі до підрозділу 3.1.2

3.1.3. Глобальний хаос та його характеристики

3.1.3.1. Ізольовані резонанси. 3.1.3.2. Виникнення глобального хаосу. 3.1.3.3. Критерій Чирікова. 3.1.3.4. Системи з перемішуванням. 3.1.3.5. Розчеплення часових кореляцій у системах із перемішуванням. 3.1.3.6. Показники Ляпунова. 3.1.3.7. Властивості показників Ляпунова. 3.1.3.8. Ентропія Колмогорова - Синая. 3.1.3.9. Властивості КС-ентропії. 3.1.3.10. Спектральні властивості хаосу. 3.1.3.11. Спектр потужності. 3.1.3.12. Спектр потужності хаотичного руху.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.3

Задачі до підрозділу 3.1.3

3.1.4. Точкові відображення

3.1.4.1. Відображення Пуанкаре. 3.1.4.2. Нерухомі точки та мультиплікатори. 3.1.4.3. Цикли для одновимірних відображень. 3.1.4.4. Властивості монотонно зростаючих відображень. 3.1.4.5. Властивості монотонно спадних відображень. 3.1.4.6. Немонотонні відображення. 3.1.4.7. Теорема Шарковського. 3.1.4.8. Більярди Синая. 3.1.4.9. Зв’язок між кутом падіння та кутом відбиття. 3.1.4.10. Побудова модельного відображення. 3.1.4.11. Розрахунок КС-ентропії. 3.1.4.12. Розраху-

нок часу розчеплення кореляцій.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.4

Задачі до підрозділу 3.1.4

3.1.5. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора: побудова відображення та аналіз руху

3.1.5.1. Опис моделі. 3.1.5.2. Побудова відображення. 3.1.5.3. Умови виникнення нестійкості. 3.1.5.4. Фазовий портрет. 3.1.5.5. Оцінка часу перемішування за кутом.

3.2. Хаос у дисипативних системах

3.2.1. Загальні властивості хаотичного руху дисипативних систем

3.2.1.1. Прості атрактори. 3.2.1.2. Дивні атрактори. 3.2.1.3. Квазіатрактори.

3.2.2. Автогенератор із параметричним збудженням

3.2.2.1. Побудова моделі. 3.2.2.2. Побудова стандартного дисипативного відображення. 3.2.2.3. Нерухомі точки, мультиплікатори та умова виникнення стохастичності. 3.2.2.4. Структура дивного атрактора. 3.2.2.5. Оцінка фрактальної розмірності дивного атрактора.

3.2.3. Генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича

3.2.3.1. Схема та рівняння руху. 3.2.3.2. Ділянки швидкого та повільного руху.

3.2.3.3. Характерні режими роботи. 3.2.3.4. Робота схеми при малих коефіцієнтах зворотного зв'язку. 3.2.3.5. Мономодальний режим стохастичних коливань.

3.2.3.6. Статистика генератора КНР у мономодальному режимі. 3.2.3.7. Мульти-модальні режими стохастичних коливань. 3.2.3.8. Перехід від мономодального до мультимодальних режимів. 3.2.3.9. Релаксаційні коливання. 3.2.3.10. Особливості біфуркацій.

3.3. Гідродинамічна турбулентність

3.3.1. Загальні поняття

3.3.1.1. Рівняння Нав'є – Стокса. Ламінарна та турбулентна течія. 3.3.1.2. Утворення дивного атрактора в функціональному просторі. 3.3.1.3. Різновиди гідродинамічної турбулентності.

3.3.2. Слабка гідродинамічна турбулентність

3.3.2.1. Методи експериментального визначення розмірності вкладення. 3.3.2.2. Слабка турбулентність у шарі рідини, який підігрівається знизу: аналіз системи Лоренца. 3.3.2.3. Перехід до просторово-часового хаосу.

3.3.3. Розвинена гідродинамічна турбулентність

3.3.3.1. Пульсації різних масштабів у турбулентному потоці. 3.3.3.2. Роль дисипації для пульсації різних масштабів. 3.3.3.3. Аналіз великомасштабних пульсацій за методом розмірностей. 3.3.3.4. Локальні властивості розвиненої турбулентності. 3.3.3.5. Оцінка порогового масштабу дисипації. 3.3.3.6. Колмогорівські спектри.

Передмова

Пропонований навчальний посібник призначений для магістрантів першого року навчання за спеціальністю „радіофізика і електроніка” (напрямок підготовки – „прикладна фізика”), що вивчають курс „Синергетика” (IX семестр, 36 годин лекцій, 18 годин семінарських занять, іспит). Він містить тексти лекцій, а також контрольні питання та задачі. Задачі, відзначені зірочкою, призначені для самостійної індивідуальної роботи студентів.

Слід узяти до уваги, що частина матеріалу, викладеного в посібнику, виноситься на самостійне вивчення, а також служить основою для підготовки доповідей на семінарах. При цьому на іспит виноситься весь матеріал посібника, включаючи контрольні питання та задачі. Вважаю, що, на відміну від студентів молодших курсів, слухачі магістратури здатні самостійно, користуючись лише консультаціями викладача, розібратись із задачами (тим більше з контрольними питаннями), спираючись на текст лекцій.

Для повноцінного сприйняття посібника необхідно засвоїти матеріал курсів загальної та теоретичної фізики, а також курсів „Основи радіоелектроніки”, „Коливання та хвилі”, „Статистична радіофізика”.

В основу посібника покладено лекції, які читалися автором спершу для студентів кафедри фізики біологічних систем факультету природничих наук Національного університету „Києво-Могилянська Академія” (курси „Вступ до нелінійної фізики” та „Хаос у фізичних явищах”), потім для магістрантів спеціалізації „Автоматизація наукових досліджень” радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (курс „Нелінійні хвилі. Структури. Хаос”), і, нарешті, для магістрантів усіх спеціалізацій радіофізичного факультету КНУ (курс „Синергетика”).

При читанні тексту слід узяти до уваги, що з міркувань, пов’язаних зі зручністю набору, векторні величини у формулах позначаються стрілкою над відповідною літерою, а безпосередньо в тексті – жирним шрифтом.

Вважаю своїм приємним обов’язком подякувати за допомогу в роботі над цим посібником своєму колезі О. І. Кельнику, а також численним студентам радіофізичного факультету КНУ, які слухали цей курс, розв’язували задачі до нього та робили доповіді на семінарах. Я особливо вдячний Андрію Лазареву та Віталію Тицькому, які безпосередньо підштовхнули мене до підготовки цього посібника та дуже допомогли мені в роботі над його текстом.

Усвідомлюючи недосконалість цього посібника, звертаюся з проханням до всіх його читачів надсилати мені свої зауваження та побажання електронною поштою на адресу ioa@univ.kiev.ua, за що буду дуже вдячний.

І. О. Анісімов

ВСТУП

В.1. Що вивчає синергетика?

Синергетика – це міждисциплінарний напрямок, що вивчає процеси в нелінійних дисипативних системах із розподіленими параметрами, які є відкритими (тобто можуть обмінюватися з іншими системами енергією та речовиною) або знаходяться в стані, далекому від термодинамічної рівноваги.

Загальновідомим аналогом подібних систем, але із зосередженими параметрами, є автогенератор. В автогенераторах за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати та встановлюватися періодичні коливання, основні властивості яких (форма, амплітуда, період) визначаються властивостями автогенератора і не залежать від початкових умов. При цьому енергія на збудження коливань береться ззовні (якщо система є відкритою) або в самій системі (якщо остання є далекою від стану рівноваги). Прикладом системи першого типу може служити генератор електричних коливань, що живиться від батареї, прикладом системи другого типу – годинник, що приводиться в дію гирею або деформованою пружиною.

Якщо кількість ступенів вільності автогенератора буде більшою за одиницю, то у такій системі, крім періодичних коливань, можливі також стохастичні коливання (непередбачувана поведінка). Виникнення стохастичних коливань пов'язане з нестійкістю руху за Ляпуновим: як завгодно мала зміна початкових умов (а вони в реальному житті завжди відомі з обмеженою точністю) з часом призводить до значного розбігання фазових траєкторій. Причиною непередбачуваної поведінки системи може бути також вплив флуктуацій (шумів), поява яких обумовлена неможливістю точно описати динаміку системи з дуже великою кількістю ступенів вільності (наприклад, рух усіх молекул у газі чи всіх заряджених частинок у провіднику) або наявністю випадкового зовнішнього впливу.

Синергетика вивчає ефекти такого самого типу, але для систем із розподіленими параметрами. Тому відповідні явища є значно складнішими та різноманітнішими. Загалом можна говорити про виникнення в нерівноважних дисипативних середовищах структур, які в загальному випадку залежать від часу, причому властивості таких структур слабо залежать від початкових та граничних умов і визначаються переважно властивостями самого середовища. Названі структури можуть бути й нерегулярними в просторі та в часі – в такому випадку говорять про турбулентний рух. Такі структури прийнято називати дисипативними.

В.2. Основні типи регулярних дисипативних структур у нерівноважних середовищах

Серед регулярних нестационарних структур можна в першу чергу назвати автохвилі – хвилі, що можуть поширюватися в активних середовищах без зміни своєї форми, причому основні характеристики таких хвиль (амплітуда, форма, швидкість, а у випадку періодичних хвиль – частота або довжина хвилі) не залежать від початкових та граничних умов і визначаються лише властивостями середовища, в якому вони поширюються. Прикладами автохвиль можуть служити лісова пожежа (хвиля запалювання), поширення імпульсу в нервовому волокні (біжучий імпульс), концентраційні хвилі в середовищі, де протікає хімічна реакція коливного типу (наприклад, реакція Білоусова – Жаботинського). До регулярних нестационарних структур відносять також коливання в розподілених автогенераторах найрізноманітнішої природи (від лазера до серцевого м'яза).

Найвідомішим прикладом стаціонарних дисипативних структур є, напевне, конвективні вали та комірки Бенара – просторово-періодичні течії типу вихорів, що за певних умов можуть виникнути в шарі в'язкої рідини, який підігрівається знизу. Процеси такого типу, що відбуваються в атмосфері, відіграють важливу роль у метеорології (їхнім наслідком є, зокрема, утворення періодичних структур у хмарах). Прикладами одиночних вихорів такого самого типу є циклони та антициклони, а також смерчі. Інший зразок дисипативної структури – це розшарування первісно однорідного потоку електронів, що рухається в плазмі, на окремі нитки. Вважається, що саме цей ефект визначає смугасту структуру полярних сьайв. Можливі й простіші дисипативні структури, коли середовище спонтанно розпадається на області з

відмінними властивостями. Прикладом таких структур може служити виникнення низькоомних та високоомних областей у баретері (залізна нитка, вміщена в атмосферу водню, крізь яку пропускається струм) або вогнища горіння в реакторі з перемішуванням та обмеженим надходженням пального.

В.3. Турбулентність

Турбулентністю прийнято називати хаотичну динаміку в системах із розподіленими параметрами. Можна сказати, що турбулентність так само виникає в результаті руйнування регулярних (стаціонарних або нестаціонарних) дисипативних структур у нерівноважних розподілених системах, як хаотична динаміка виникає в результаті руйнування регулярних автоколивань у генераторах із зосередженими параметрами.

Історично найбільш відомою і, напевне, найбільш дослідженою є гідродинамічна турбулентність. Вона виявляється в тому, що при великих швидкостях у течії виникають вихори різних масштабів, поле швидкостей течії набуває надзвичайно складного, зовні випадкового в просторі та часі характеру.

Сьогодні поняття турбулентності широко використовується для опису не тільки руху рідин та газів, а також динаміки плазми та деяких інших об'єктів, поведінка яких визначається електромагнітними полями.

Турбулентний рух насправді характеризується значним ступенем упорядкованості, що, зокрема, виявляється в не випадковому характері спектрів турбулентності.

Слід прямо вказати, що турбулентність на сьогоднішній день залишається одним з найменш зрозумілих явищ у межах класичної фізики. Механізми виникнення стохастичної динаміки можна вважати розробленими лише для консервативних (гамільтонівських) систем.

В.4. Синергетика й термодинаміка

На перший погляд, виникнення регулярних та нерегулярних структур у первісно однорідному середовищі суперечить другому початку термодинаміки, згідно з яким системи спонтанно прямують до стану з найбільшою ентропією, тобто найбільшим ступенем безладдя. Насправді треба пам'ятати, що другий початок термодинаміки справедливий лише для замкнених систем. Більш того, класична термодинаміка взагалі розглядає лише системи, що перебувають у стані термодинамічної рівноваги або, принаймні, близькі до такого стану. Синергетика ж вивчає системи, які або є далекими від термодинамічної рівноваги, або взагалі є відкритими. Таким чином, другий початок термодинаміки до них незастосовний.

По суті, синергетику можна розглядати як нерівноважну термодинаміку. Визначні результати в цьому напрямку були отримані відомим бельгійським дослідником, Нобелівським лауреатом І.Р.Пригожиным. Він, зокрема, показав, що при великих відхиленнях від положення рівноваги стаціонарний стан системи, що раніше був стійким, може втратити свою стійкість, що є першим кроком до виникнення дисипативної структури.

Ентропія, як міра безладу, та деякі її локальні характеристики можуть бути використані для кількісної характеристики ступеню самоорганізації. Так вдалося, зокрема, продемонструвати, що перехід течії в турбулентний режим приводить до зростання ступеню самоорганізації системи.

В.5. Практичне значення синергетики

Дослідження регулярних автохвильових процесів, дисипативних структур та турбулентності має велике практичне значення.

Слід сказати, що біологічні об'єкти різної природи та різних рівнів (від клітини до екологічної системи) в багатьох випадках можуть розглядатися саме як нерівноважні нелінійні розподілені дисипативні системи, а процеси, що відбуваються в них, відповідно можуть бути описані в термінах синергетики. Так, проблема виникнення життя може бути розглянута як процес самоорганізації речовини. Багато біологічних процесів мають автохвильову природу (поширення збуджень у нервовому волокні, робота серця, поширення популяцій у просторі

та інше). Є навіть точка зору, що мозок людини в процесі еволюції розвивався таким чином, щоб якнайкраще розв'язувати задачі про еволюцію систем із непередбачуваною поведінкою.

Приклад біологічних об'єктів наштовхує на думку, що, коли сьогодні передача та обробка сигналів значною мірою базується на теорії лінійних та нелінійних хвиль у пасивних системах, то завтра її основою стануть процеси в активних системах із розподіленими параметрами. Уже сьогодні для генерації коливань широко використовуються відкриті системи з розподіленими параметрами (лазери, лампи біжучої хвилі, діоди Ганна, лазери на вільних електронах та багато інших). Активно ведуться роботи, спрямовані на створення синергетичних комп'ютерів, принципи роботи яких носять аналоговий характер (типу пристроїв функціональної електроніки) та нагадують роботу людського мозку й інших біологічних систем.

Окремо хочеться підкреслити величезне практичне значення вивчення турбулентності. Досить нагадати, що майже завжди рух рідин, газів та плазми, що спостерігається на практиці, має турбулентний характер (від турбулентної течії води в річках чи крові в судинах до руху атмосфери, рідких та газоподібних реагентів у технологіях хімічної промисловості та турбулентної дифузії плазми в магнітних пастках для досягнення керованого термоядерного синтезу).

В.6. Зміст та структура курсу

При викладенні матеріалу автор намагався, з одного боку, розбирати реальні задачі, що досліджуються в рамках синергетики, а з іншого – викладати ці задачі як реалізацію деяких загальних принципів або ілюстрацію до них. Нові методи досліджень, специфічні для даної галузі науки, на зразок методу точкових відображень, викладалися лише тоді, коли без них неможливо було обійтися. По можливості (але не завжди) хід аналітичних розрахунків розбирався достатньо детально.

Матеріал курсу розбитий на три частини.

Перша частина присвячена термодинаміці відкритих (нерівноважних) систем. У ній розглядаються питання про виробництво ентропії в нерівноважних системах, про стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги, про еволюцію та самоорганізацію таких систем.

Друга частина курсу присвячена регулярним дисипативним структурам. Тут спочатку розглядаються автохвильові процеси в типових активних середовищах, включаючи й просторово-однорідні коливання в середовищах автоколивного типу. Потім аналізуються основні механізми виникнення стаціонарних дисипативних структур (на прикладі ефекту баретування та виникнення конвективних валів).

Нарешті, третя, найбільша за обсягом частина курсу присвячена хаосу та турбулентності. Спочатку розглядається виникнення хаотичної динаміки та її ускладнення при переході від інтегровних гамільтонівських систем до систем, близьких до інтегровних, а потім – до неінтегровних систем. Тут же розбирається метод точкових відображень та основні кількісні характеристики хаотичного руху. Потім розглядаються властивості хаотичної динаміки в дисипативних системах, що пов'язані з виникненням дивних атракторів. Нарешті, два останні розділи третьої частини присвячені гідродинамічній турбулентності та турбулентності хвильових полів.

Частина 1. ТЕРМОДИНАМІКА ВІДКРИТИХ СИСТЕМ

1.1. Ентропія та другий початок термодинаміки для замкнених систем

Перш ніж безпосередньо розглядати відкриті системи, наведемо деякі відомості зі статистичної фізики та термодинаміки, що стосуються замкнених систем та їхньої рівноваги. Дослідження рівноваги буде виконуватися за методом функцій Ляпунова. Ми обговоримо статистичне визначення ентропії за Больцманом та за Гіббсом. Буде розглянуто Н-теорему Больцмана та теорему Гіббса, як за своїм змістом близькі до другого початку термодинаміки. Наприкінці коротко обговорюються системи зі сталою температурою, які вже не можна вважати замкненими.

1.1.1. Достатня умова стійкості динамічної системи

З курсу теоретичної фізики добре відома процедура дослідження стійкості положення рівноваги (або стійкості руху) для систем з невеликою кількістю ступенів вільності, яка зводиться до лінеаризації рівнянь рух по малих відхиленнях і наступного дослідження коренів отриманого таким чином характеристичного рівняння¹. Але такий метод, очевидно, дуже ускладнюється для систем з великою кількістю ступенів вільності. В останньому випадку зручніше користуватися методом так званих функцій Ляпунова, який і розглядається в цьому підрозділі.

1.1.1.1. Функція Ляпунова і теорема Ляпунова

Розглянемо динамічну систему, що описується набором диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (1.1.1)$$

Нехай при $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ виконано умову

$$F_i(\vec{x}_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1.2)$$

Тоді точка $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ є точкою рівноваги для розглядуваної системи.

Нехай при $t=0$ маємо $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$. Чи буде система з часом еволюціонувати до точки рівноваги $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$? Іншими словами, чи буде точка $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ аттрактором?

Щоб відповісти на це питання, введемо деяку функцію $V=V(\mathbf{x})$, таку, що вона є позитивною при всіх $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ і перетворюється в нуль у точці $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$. Називатимемо її функцією Ляпунова.

Розглянемо, як функція Ляпунова $V(\mathbf{x})$ змінюється з часом:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(\vec{x}). \quad (1.1.3)$$

Теорема Ляпунова стверджує, що точка $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ є аттрактором, якщо похідна dV/dt має знак, протилежний знаку V (в нашому випадку $dV/dt < 0$).

1.1.1.2. Приклад застосування теореми Ляпунова

Проілюструємо застосування теореми Ляпунова на прикладі задачі про теплопровідність, описуваної рівнянням Фур'є:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.1.4)$$

Розглядатимемо відрізок $[0, L]$ з граничними умовами $T(0)=T(L)=T_0$. Функцію Ляпунова оберемо у вигляді:

$$V(T) = \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.1.5)$$

¹ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., Академпрес, 2003.

Тоді

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L 2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dx = 2\kappa \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} dx. \quad (1.1.6)$$

Інтегруючи по частинах, отримуємо:

$$\frac{dV}{dt} = 2\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_0^L - 2\kappa \int_0^L \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (1.1.7)$$

З рівняння Фур'є (1.1.4) випливає, що $\partial^2 T / \partial x^2 = (1/\kappa) \partial T / \partial t$. Але на кінцях відрізка $T = T_0$ і, відповідно, $\partial T / \partial t = 0$. Тому $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$, тобто перший доданок у правій частині (1.1.7) зникає, і

$$\frac{dV}{dt} = -2\kappa \int_0^L \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 dx \leq 0. \quad (1.1.8)$$

Отже, стан $T = T_0$ є атрактором.

1.1.2. Другий початок термодинаміки для ідеального газу

Як відомо з курсу термодинаміки, другий початок термодинаміки визначає напрямок їхньої еволюції в часі. З другим початком термодинаміки тісно пов'язане поняття ентропії. Обговоримо ці питання спочатку для ідеального газу, точніше, для ансамблю однакових частинок, що взаємодіють між собою лише за рахунок пружних зіткнень.

1.1.2.1. Другий початок термодинаміки

Для замкнених систем, які не обмінюються з іншими ні енергією, ні речовиною, з другого початку термодинаміки випливає існування деякої функції S (ентропії), яка монотонно зростає з часом доти, доки не досягне свого максимального значення S_{\max} у стані термодинамічної рівноваги, так, що $dS/dt \geq 0$. Поведінка величини $S_{\max} - S$ нагадує функцію Ляпунова.

Будемо називати величину dS/dt виробництвом ентропії. Внесок у виробництво ентропії дають лише необоротні процеси (хімічні реакції, теплопровідність, дифузія та ін.).

Ентропія є екстенсивною величиною: якщо система складається з кількох частин, то повна ентропія дорівнює сумі ентропії цих частин.

1.1.2.2. Больцманівська інтерпретація ентропії

При формулюванні другого початку термодинаміки поняття ентропії було введено феноменологічно. Значно пізніше Л. Больцман запропонував інтерпретацію ентропії як міри молекулярного хаосу. Відповідно закон зростання ентропії слід розуміти як вияв зростання дезорганізації замкненої системи.

Для ілюстрації поняття ентропії розглянемо скриньку, розділену на два однакові відділення (рис. 1.1.1).

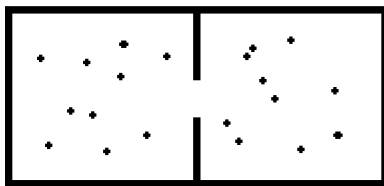


Рис. 1.1.1. До больцманівської інтерпретації ентропії

Нехай у скриньці знаходяться N молекул. Їх можна розбити на дві частини, N_1 та N_2 ($N_1 + N_2 = N$), причому число можливих способів такого розбиття буде

$$P = \frac{N!}{N_1! N_2!} \quad (1.1.14)$$

Легко бачити, що це число досягає максимуму, коли $N_1=N_2$ (або $N_1=N_2\pm 1$, якщо N – непарне число). Саме стан з найбільшим p (найбільшою ймовірністю) і буде реалізуватися. Больцман пов’язав число p – ймовірність реалізації даного макроскопічного стану – з ентропією S співвідношенням

$$S = k_B \ln p, \quad (1.1.15)$$

де k_B – стала Больцмана.

Отже, зростання ентропії відповідає еволюції системи до «найбільш імовірного» (або найменш упорядкованого) стану.

1.1.2.3. Визначення ентропії за Больцманом

В загальному випадку ентропія Больцмана S_B записується через одночастинкову функцію розподілу для ідеального газу $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, де \mathbf{r} та \mathbf{p} – відповідно радіус-вектор та імпульс. Ця функція задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}, t) = 1. \quad (1.1.16)$$

Тоді

$$S_B = -k_B N \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \ln [f(\vec{r}, \vec{p}, t)] + S_0, \quad (1.1.17)$$

де N – повна кількість частинок у системі, S_0 – константа інтегрування. Остання неістотна, оскільки фізичний інтерес являє зміна ентропії при переході системи одного стану в інший.

Суттєво, що одночастинкова функція розподілу f , відповідно, ентропія Больцмана не враховують кореляційного зв’язку між різними частинками. Таким чином, вони відповідають саме моделі ідеального газу, де взаємодія між частинками відсутня.

1.1.2.4. Н-теорема Больцмана

Як відомо, другий початок термодинаміки був сформульований Кельвіном та Клаузіусом на основі узагальнення експериментальних даних як постулат. Больцман уперше аналітично довів твердження, аналогічне до нього за змістом, для моделі ідеального газу. Це твердження увійшло в літературу як Н-теорема Больцмана (від англійського слова heat – тепло).

Н-теорема стверджує, що в замкненій (для частинок) системі в процесі еволюції до рівноваги ентропія зростає і залишається незмінною при досягненні рівноважного стану.

Для доведення цієї теореми використовується відоме з курсу статистичної фізики кінетичне рівняння Больцмана для одночастинкової функції розподілу $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \mathbf{F} \cdot \vec{r}, t \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_B(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (1.1.18)$$

де \mathbf{F} – зовнішня сила (для розрідженого газу), а I_B – так званий інтеграл зіткнень Больцмана, який описує процеси дисипації. Саме наявність інтегралу зіткнень робить рівняння Больцмана необоротним. У явному вигляді інтеграл зіткнень Больцмана записується так:

$$I_B(\vec{r}, \vec{p}, t) = N \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left[f(\vec{r}, \vec{p}_1', t) f(\vec{r}, \vec{p}_2', t) - f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f(\vec{r}, \vec{p}_2, t) \right]. \quad (1.1.19)$$

Тут φ та r – кут та радіус циліндричної системи координат, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ – відносна швидкість частинок перед зіткненням, $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ та \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_1' та \mathbf{p}_2' – імпульси частинок відповідно перед зіткненням та після нього. Вони пов’язані між собою законами збереження імпульсу та енергії:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \quad \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m}. \quad (1.1.20)$$

З урахуванням уведених вище позначень математичне формулювання Н-теореми має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = -k_B N \int I_B \ln f \, d\bar{p}d\bar{r} \geq 0, \quad (1.1.21)$$

де виробництво ентропії виступає в ролі функції Ляпунова. Слід звернути увагу, що під інтегралом у виразі для густини виробництва ентропії фігурує інтеграл зіткнень I_B , що описує необоротні процеси. Справді, як підкреслювалося вище (п.1.1.2.1), виробництво ентропії пов'язане саме з необоротними процесами.

Відзначимо, що для розрідженого газу, описуваного рівнянням Больцмана, середня енергія (на одну частинку) зберігається.

Як уже вказувалося, Н-теорема Больцмана доведена для ідеального газу. Для неідеального газу довести аналогічне твердження в загальному випадку не вдається. Тим не менше, і в таких системах, і навіть у значно складніших для аналізу відкритих системах ентропія також може служити характеристикою ступеню впорядкованості.

1.1.3. Ентропія системи частинок, що взаємодіють між собою

Хоча узагальнити Н-теорему на випадок системи частинок, що взаємодіють між собою, не вдається, але можна сформулювати інше твердження, аналогічне за змістом до другого початку термодинаміки – так звану теорему Гіббса. Для цього доведеться розглянути інше визначення ентропії – ентропію Гіббса.

1.1.3.1. Ентропія Гіббса

Як уже вказувалося, ентропія Больцмана введена для системи частинок, що не взаємодіють між собою. Для розгляду системи частинок, що взаємодіють, користуються іншим визначенням ентропії – так званою ентропією Д.Гіббса.

Розглянемо $6N$ -вимірний фазовий простір $X = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$. Кожна точка такого простору відповідає певному стану системи з N частинок. При статистичному описі точки розташовуються в просторі X випадковим чином, і можна ввести відповідну функцію розподілу $f_N(X, t)$, що в загальному випадку залежить від часу та задовольняє звичайній умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(X, t) \, dX = 1. \quad (1.1.22)$$

Тоді ентропія Гіббса задається співвідношенням

$$S_G(t) = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} f_N(X, t) \ln[f_N(X, t)] \, dX + S_0. \quad (1.1.23)$$

Константу S_0 у (1.23) слід обрати такою самою, як у визначенні ентропії Больцмана (1.17). Тоді за відсутності кореляцій, тобто коли рух кожної з частинок системи можна вважати незалежним від руху всіх інших частинок, багаточастинковий розподіл записується просто як добуток N одночастинкових,

$$f_N(X, t) = \prod_{i=1}^N f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t), \quad (1.1.24)$$

і ентропія Гіббса збігається з ентропією Больцмана:

$$\begin{aligned} S_G(t) &= -k_B \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N f(\bar{r}_j, \bar{p}_j, t) \ln \left[\prod_{i=1}^N f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t) \right] dX + S_0 = \\ &= -k_B \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t) \ln[f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t)] d\bar{r}_i d\bar{p}_i \prod_{j \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{r}_j, \bar{p}_j, t) d\bar{r}_j d\bar{p}_j + S_0 = \\ &= -k_B \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t) \ln[f(\bar{r}_i, \bar{p}_i, t)] d\bar{r}_i d\bar{p}_i + S_0 = \\ &= -k_B N \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{r}, \bar{p}, t) \ln[f(\bar{r}, \bar{p}, t)] d\bar{r} d\bar{p} + S_0 = S_B \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

(враховано, що всі частинки мають однакові одночастинкові функції розподілу).

В загальному випадку, коли рівність (1.1.24) не справджується, виконується умова

$$S_G \leq S_B. \quad (1.1.26)$$

Справді, максимум ентропії повинен відповідати максимальній неупорядкованості системи, а взаємодія між частинками спричиняє, очевидно, до появи такої впорядкованості.

1.1.3.2. Теорема Гіббса

Узагальненням Н-теорема Больцмана на випадок системи частинок із довільною взаємодією є теорема Гіббса. Але Гіббс не розглядав еволюцію системи в часі, й відповідно теорема Гіббса не стверджує, що при переході до рівноважного стану ентропія монотонно зростає. Гіббс лише порівнював ентропію довільного стану з ентропією рівноважного стану, але за однієї додаткової умови: середня енергія довільного стану має дорівнювати середній енергії рівноважного стану (для Н-теорема Больцмана ця умова, як уже відзначалося, виконується автоматично).

Розглядатимемо систему, що характеризується довільною функцією Гамільтона $H(X)$, а набір змінних X визначений вище. Рівноважний стан цієї системи описується відомим з курсу статистичної фізики канонічним розподілом Гіббса

$$f_c(X) = \exp\left[\frac{F - H(X)}{k_B T}\right], \quad (1.1.27)$$

де F – вільна енергія рівноважного стану. Цей розподіл задовольняє умові нормування (1.1.22), з якої й можна знайти вільну енергію F за відомими гамільтоніаном $H(X)$ та температурою T .

Нехай $f(X)$ – розподіл, що відповідає деякому довільному рівноважному стану, задовольняє умові нормування (1.1.22) і для якого середнє значення функції Гамільтона $H(X)$ таке саме, як для канонічного розподілу (1.1.27):

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(X) f_c(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} H(X) f(X) dX. \quad (1.1.28)$$

Позначимо відповідно через S_c та S ентропію, що відповідає станам із розподілами $f_c(X)$ та $f(X)$. Тоді відповідно до теорема Гіббса

$$S_c - S = \int_{-\infty}^{\infty} f(X) \ln \frac{f(X)}{f_c(X)} dX \geq 0. \quad (1.1.29)$$

Слід підкреслити, що інтеграл у співвідношенні (1.29) дорівнює різниці ентропії лише за виконання додаткової умови (1.28). У цьому випадку він виступає в ролі функції Ляпунова для досліджуваної системи частинок.

1.1.4. Узагальнення поняття ентропії

Поняття ентропії Больцмана та Гіббса характеризують статистичний підхід до опису системи частинок, так що мікроскопічний стан системи характеризується набором координат та імпульсів частинок, які її складають. Виявляється, що це поняття можна узагальнити на випадок статистичного ансамблю будь-якої фізичної природи.

1.1.4.1. Ентропія Шеннона

Розглянемо тепер довільний статистичний ансамбль, стан якого характеризується деяким набором змінних X . Нехай ці змінні характеризуються функцією розподілу $f(X,t)$, яка задовольняє умові нормування (1.1.22).

Величина

$$S_S(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(X,t) \ln[f(X,t)] dX + S_0 \quad (1.1.30)$$

називається ентропією Шеннона (на честь К.Шеннона – одного з творців теорії інформації). Ентропія Шеннона вступає узагальненням поняття ентропії на статистичні ансамблі довільної природи. Вона може розглядатися як міра невизначеності при статистичному описі.

З визначення ентропії Шеннона зрозуміло, що при розгляді ансамблю частинок вона зводиться до ентропії Гіббса.

1.1.4.2. Ентропія Шеннона для ансамблю автогенераторів

Для прикладу подивимося, як вводиться поняття ентропії для ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля (вони ж – автогенератори томсонівського типу, або LC-генератори).

Для зручності подальших розрахунків запишемо рівняння для такого автогенератора у формі симетризованої системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E) x = y; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E) y + \omega_0^2 x = 0, \end{cases} \quad (1.1.31)$$

де використано позначення: $y=dx/dt$ – швидкість, $E=(\omega_0^2 x^2 + y^2)/2$ – енергія коливань, α – параметр лінійного тертя (додатні α відповідають від’ємній дисипації), γ – параметр нелінійного тертя. Система (1.1.31) зводиться до одного рівняння для енергії

$$\frac{dE}{dt} - \gamma - \alpha E = 0, \quad (1.1.32)$$

яке має стійкий стаціонарний розв’язок $E=\gamma/\alpha$, що відповідає усталеним коливанням.

Як відомо з курсу статистичної радіофізики, реальний автогенератор Ван-дер-Поля описується неоднорідним рівнянням Релея (або Ван-дер-Поля), в правій частині якого стоїть випадкова сила, обумовлена внутрішніми шумами. Основний внесок у цю силу дають теплові та дробові шуми. Таким чином, можна розглянути статистичний ансамбль автогенераторів і охарактеризувати його деякою функцією розподілу – наприклад, функцією розподілу по енергіях $f(E,t)$.

Нагадаємо також, що ширина лінії автогенератора визначається двома процесами – флуктуаціями амплітуди, які можна характеризувати шириною спектру, та флуктуаціями фази, які можна вважати дифузійним випадковим процесом і характеризувати коефіцієнтом дифузії фази.

За відомим стохастичним диференціальним рівнянням можна записати так зване рівняння Фоккера - Планка для густини розподілу ймовірності (функції розподілу).

Нехай стохастичне диференціальне рівняння для випадкової величини x має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x) \xi(t), \quad (1.1.33)$$

де $a(x)$ та $b(x)$ – довільні функції випадкової змінної x , а випадкова функція часу $\xi(t)$ має нульове середнє і є δ -корельованою, тобто задовольняє умовам

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \delta(\tau), \quad (1.1.34)$$

де σ^2 – дисперсія випадкового процесу $\xi(t)$. Тоді рівняння Фоккера - Планка для густини розподілу ймовірності $w(x)$ має вигляд:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) w] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) w], \quad (1.1.35)$$

де використані позначення

$$K_1(x) = a(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 b(x) \frac{db(x)}{dx}, \quad K_2(x) = \sigma^2 b^2(x). \quad (1.1.36)$$

Стаціонарний розв’язок рівняння Фоккера - Планка (який досягається при $t \rightarrow \infty$) можна записати у вигляді:

$$w_x = \frac{C}{b^x} \exp\left[\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{a x dx}{b^2 x}\right]. \quad (1.1.37)$$

Знаючи стохастичне диференціальне рівняння (в нашому випадку – рівняння (1.1.32) з випадковою зовнішньою силою), можна записати рівняння Фоккера - Планка для функції розподілу. Зокрема, для функції розподілу за енергією $f(E,t)$ у припущенні, що шуми характеризуються сталою інтенсивністю D , воно має вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} [-\alpha + \gamma E \quad E f]. \quad (1.1.38)$$

Стационарний розв'язок рівняння (1.1.38) може бути поданий у формі канонічного розподілу Гіббса:

$$f(E) = \exp\left[\frac{F + \alpha E - 0.5\gamma E^2}{D}\right], \quad (1.1.39)$$

де F – вільна енергія, яку можна знайти з умови нормування (1.1.22):

$$F = \frac{\alpha^2}{2\gamma} - D \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\pi\gamma}{2D} + \ln \left(1 + \frac{\alpha D}{\gamma} \operatorname{Erf} \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma D}} \right) \right]. \quad (1.1.40)$$

Знаючи розподіл $f(E)$, можна розрахувати ентропію Шеннона за формулою (1.1.30):

$$S = - \int_0^{\infty} f(E) \ln [f(E)] dE + S_0. \quad (1.1.41)$$

Зокрема, для найпростішого випадку $-\alpha = \delta$ (зворотний зв'язок відсутній) та $\gamma = 0$ (нелінійність відсутня), коли $f(E) = (\delta/D) \exp(-\delta E/D)$, поклавши $S_0 = 0$, отримаємо $S = 1 + \ln(D/\delta)$.

1.1.5. Системи зі сталою температурою

Поговоримо тепер про системи зі сталою температурою. Для опису таких систем потрібно користуватися вже не ентропією S , а вільною енергією Гельмгольца $F = E - TS$. Для ізотермічних систем замість закону зростання ентропії діє закон зменшення вільної енергії.

Структура формули для F відбиває конкуренцію між енергією E та ентропією S . При низьких температурах $TS \rightarrow 0$, і мінімум вільної енергії F відповідає мінімуму енергії E (і, як правило, невеликим значенням S). При зростанні температури стан системи зсувається в бік зростання ентропії S і вже не відповідає мінімуму енергії E .

Справді, при низьких температурах речовина звичайно набуває форми кристалів, що мають упорядковану структуру і, відповідно, малу ентропію. При зростанні температури кристалічні структури поступово руйнуються. При достатньо високих температурах реалізується газоподібний стан речовини з високою ентропією.

Проте в природі існує також принципово інший тип структур, які породжуються нерівноважним станом системи. Саме такі структури (вони називаються дисипативними) будуть розглядатися в цьому курсі.

Контрольні питання до розділу 1.1.

1. На чому ґрунтується доведення Н-теорема Больцмана?
2. Чому виробництво ентропії в замкненій системі частинок, які взаємодіють між собою лише через зіткнення, пов'язане з необоротними процесами?
3. Як співвідносяться між собою другий початок термодинаміки, Н-теорема Больцмана та теорема Гіббса?
4. Як співвідносяться між собою ентропія Больцмана, ентропія Гіббса та ентропія Шеннона?
5. Порівняйте між собою структури, що виникають у системах при низьких температурах, та дисипативні структури.

Задачі до розділу 1.1.

1.1.1. Покажіть, що визначення ентропії (1.1.15) для системи, описаній у п.1.1.2.2, еквівалентне до загального визначення ентропії Больцмана (1.1.17).

1.1.2. Посудина розділена на два сполучені між собою відділення об'ємами V_1 та V_2 . Ймовірність потрапляння частинки до кожного з відділень пропорційна до його об'єму. Запишіть ймовірність того, що N частинок розподіляться по відділеннях у кількості N_1 та N_2 відповідно. Запишіть ентропію, що відповідає стану термодинамічної рівноваги.

1.1.3. Розв'яжіть задачу 1.1.2 для випадку, коли посудина розділена

а) на три відділення з об'ємами V_1 , V_2 та V_3 ;

б) на n однакових відділень.

1.2. Виробництво ентропії в нерівноважних системах

Перейдемо тепер до розгляду відкритих систем. У цьому розділі буде розглянуте узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи. Потім будуть записані загальні співвідношення для густини виробництва ентропії у відкритих системах. Наприкінці розділу вони будуть конкретизовані для випадку малих відхилень від положення рівноваги (випадок лінійної нерівноважної термодинаміки).

1.2.1. Ентропія у відкритих системах

Нагадаємо, що відкритими називають такі системи, які можуть обмінюватись із зовнішнім світом речовиною та енергією.

1.2.1.1. Узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи

Другий початок термодинаміки може бути узагальнений і на відкриті системи. У цьому випадку повний приріст ентропії системи dS можна розбити на дві частини: $d_i S$, що описує ентропію, вироблену безпосередньо в системі, та $d_e S$, що описує перенесення ентропії через межі системи:

$$dS = d_i S + d_e S, \quad d_i S \geq 0. \quad (1.2.1)$$

Як бачимо, для відкритих систем приріст ентропії може бути як додатним, так і від'ємним. Останнє можливо у випадку, коли потік ентропії за межі системи перевищує виробництво ентропії всередині системи.

1.2.1.2. Густина виробництва ентропії та потік ентропії

Виробництво ентропії в системі можна, враховуючи екстенсивність ентропії, записати як інтеграл по об'єму:

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{(V)} \sigma S dV \geq 0, \quad (1.2.2)$$

де $\sigma(S)$ – густина виробництва ентропії, тобто виробництво ентропії в одиниці об'єму за одиницю часу. Оскільки нерівність (1.2.2) справедлива для будь-якого об'єму, то

$$\sigma \geq 0. \quad (1.2.3)$$

Потік ентропії визначається як

$$d_e S = \frac{dQ}{T}. \quad (1.2.4)$$

Потік ентропії через деяку замкнену поверхню Ω , що охоплює об'єм V , можна записати у формі інтегралу:

$$\frac{d_e S}{dt} = \Phi S = - \int_{\Omega} \varphi_n d\Omega, \quad (1.2.5)$$

де φ_n – компонента густини потоку φ ентропії вздовж зовнішньої нормалі до поверхні Ω . Знак потоку може бути довільним.

1.2.1.3. Рівняння балансу для ентропії

Як уже вказувалося, ентропія є екстенсивною величиною. Тому ентропію в об'ємі V можна записати як інтеграл по цьому об'єму від густини ентропії s :

$$S = \int_V s dV. \quad (1.2.6)$$

Тепер формально поділимо всі доданки у співвідношенні (1.2.1) на dt і замінимо S у лівій частині за допомогою співвідношення (1.2.6), а доданки в правій частині – за допомогою співвідношень (1.2.2) та (1.2.5), перетворивши інтеграл по поверхні в (1.2.5) в інтеграл по об'єму за допомогою теореми Остроградського - Гаусса. Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V s dV = \int_{(V)} \sigma S dV - \int_V \text{div } \vec{\varphi} dV \quad (1.2.7)$$

Оскільки (1.2.7) залишається справедливим при довільному виборі об'єму інтегрування, то з рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних виразів:

$$\sigma S = \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \text{div } \vec{\varphi}. \quad (1.2.8)$$

Співвідношення (1.2.8) має зміст рівняння балансу: зміна об'ємної густини ентропії s обумовлена локальним виробництвом ентропії $\sigma(S)$ та потоками ентропії з густиною φ . Зрозуміло, що обидві частини рівності (1.2.8) в силу умови (1.2.3) є невід'ємними.

1.2.2. Густина виробництва ентропії в системах із локальною рівновагою

З'ясуємо тепер, якими факторами визначається густина виробництва ентропії у нерівноважних системах. При цьому розглядатимемо системи з довільним відхиленням від положення рівноваги.

1.2.2.1. Поняття локальної рівноваги

Ми будемо далі розглядати лише випадки, коли виробництво та потоки ентропії можна розрахувати макроскопічними методами. Припустимо, що в кожному малому елементі об'єму існує стан локальної рівноваги, для якого локальна ентропія $s=dS/dV$ є функцією тих самих локальних макроскопічних змінних, що й для рівноважної системи, і не залежить від градієнтів.

Припущення про локальну рівновагу не суперечить тому, що система в цілому може бути нерівноважною. Так, при розширенні газу в трубці (нерівноважний процес) локальний зв'язок між тиском, густиною і температурою дається тим самим рівнянням стану $p/\rho T = \text{const}$, що і в стані рівноваги.

Припущення про локальну рівновагу означає, що дисипативні процеси є значними, тому великі відхилення від статистичної рівноваги виключаються. В багатьох випадках це означає наявність достатньої кількості зіткнень.

Таким чином, припущення про локальну рівновагу справедливе для газів середньої густини, тим більше для рідин та твердих тіл, і несправедливе, наприклад, для сильно розріджених газів.

1.2.2.2. Локальне виробництво ентропії

Для систем із локальною рівновагою густину виробництва ентропії можна записати через узагальнені термодинамічні сили X_α та відповідні потоки, або швидкості необоротних процесів J_α :

$$\sigma S = \sum_\alpha J_\alpha X_\alpha \geq 0 \quad (1.2.9)$$

(сума береться по всіх необоротних процесах, що йдуть у системі). В рівновазі $J_\alpha=0$ та $X_\alpha=0$, відповідно й $\sigma(S)=0$. Це основна формула для термодинамічно необоротних процесів. Як бачимо, в загальному випадку виробництво ентропії виступає аналогом функції Ляпунова, а рівноважний стан – у ролі атрактора.

Як уже відзначалося, внесок до виробництва ентропії можуть давати лише необоротні процеси – наприклад, хімічні реакції, в'язке тертя, теплопередача, перемішування багатокомпонентної суміші.

1.2.2.3. Формула Гіббса для ентропії

Проілюструємо, як можна отримати формулу для локального виробництва ентропії, на прикладі хімічної реакції в системі, що обмінюється з іншими лише енергією. Нехай до складу цієї системи входить n_1, n_2, \dots молів відповідних реагентів. Тоді $S=S(E, V, n_\gamma)$. Відповідно,

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \sum_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial n_{\gamma}} dn_{\gamma}. \quad (1.2.10)$$

Але, як відомо з курсу термодинаміки,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial n_{\gamma}} = -\frac{\mu_{\gamma}}{T}. \quad (1.2.11)$$

Тут μ_{γ} – хімічні потенціали, введені Д.Гіббсом. Для так званих ідеальних систем (ідеальні гази, розріджені розчини) вони задаються співвідношенням

$$\mu_{\gamma} = \zeta_{\gamma}(P, T) + RT \ln N_{\gamma}, \quad (1.2.12)$$

де

$$N_{\gamma} = \frac{n_{\gamma}}{\sum_{\gamma} n_{\gamma}} \quad (1.2.13)$$

– молярні частки, $\zeta_{\gamma}(p, T)$ – деяка функція тиску та температури.

Підставивши (1.2.11) до (1.2.10), можна отримати:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{P}{T} dV - \sum_{\gamma} \frac{\mu_{\gamma}}{T} dn_{\gamma}. \quad (1.2.14)$$

Це так звана формула Гіббса для ентропії.

1.2.2.4. Локальне виробництво ентропії при протіканні хімічної реакції

Тепер розглянемо деяку хімічну реакцію:



Нехай зміна кількості молів компонент за час dt буде

$$dn_x = dn_y = -dn_A = -dn_B = -d\xi.$$

У більш загальному випадку можна записати

$$dn_{\gamma} = \nu_{\gamma} d\xi, \quad (1.2.16)$$

де ν_{γ} вказує, скільки молекул сорту γ виникають ($\nu_{\gamma} > 0$) або зникають ($\nu_{\gamma} < 0$) в елементарному акті реакції. Ціле число ν_{γ} називається стехіометричним коефіцієнтом компоненти γ в хімічній реакції, величина ξ – ступенем перетворення хімічної реакції. В нашому прикладі всі $\nu_{\gamma} = \pm 1$.

Швидкістю хімічної реакції називається величина

$$v = \frac{d\xi}{dt}. \quad (1.2.17)$$

Замінивши dn_{γ} у формулі Гіббса через $d\xi$, отримаємо:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} - \frac{d\xi}{T} \sum_{\gamma} \mu_{\gamma} \nu_{\gamma}. \quad (1.2.18)$$

Величина

$$A = -\sum_{\gamma} \nu_{\gamma} \mu_{\gamma} \quad (1.2.19)$$

називається спорідненістю хімічної реакції. З урахуванням (1.2.19) формулу Гіббса можна переписати у формі

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} + \frac{A}{T} d\xi. \quad (1.2.20)$$

Як відомо, згідно першого початку термодинаміки

$$dE = \delta Q - pdV. \quad (1.2.21)$$

Тоді з формули Гіббса отримаємо:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \frac{Ad\xi}{T}. \quad (1.2.22)$$

Перший доданок у правій частині (1.2.22) відповідає потоку ентропії $d_e S$, другий – її виробництву $d_i S$. Тоді

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{A}{T} \frac{d\xi}{dt} = \frac{A}{T} v \geq 0. \quad (1.2.23)$$

Співвідношення (1.2.23) є частинним випадком записаної раніше формули (1.2.9) для виробництва ентропії, де в ролі швидкості необоротного процесу (поток) J виступає швидкість хімічної реакції v , а в ролі узагальненої термодинамічної сили X – відношення A/T спорідненості реакції до температури. Слід лише звернути увагу на те, що формула (1.2.9) визначає локальне виробництво ентропії (в одиниці об'єму), а формула (1.2.23) – повне виробництво ентропії в системі.

1.2.3. Лінійна нерівноважна термодинаміка

Тепер конкретизуємо співвідношення для густини виробництва ентропії, отримані в попередньому підрозділі, для систем, стан яких мало відрізняється від рівноважного, і проаналізуємо стійкість стаціонарних станів таких систем.

1.2.3.1. Виробництво ентропії при малих відхиленнях від термодинамічної рівноваги

В загальному випадку зв'язок між узагальненими термодинамічними силами та спричиненими ними потоками є складним. З іншого боку, як уже вказувалося, в стані термодинамічної рівноваги $J_i=0$ та $X_i=0$. Тому для малих відхилень від положення рівноваги природно припустити, що між цими величинами існує лінійний зв'язок:

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j. \quad (1.2.24)$$

Припущення, виражене формулою (1.2.24), відповідає лінійній термодинаміці нерівноважних процесів. Частинними випадками (1.2.24) є, наприклад, закон Фур'є про пропорційність потоку теплоти до градієнту температури або закон Фіка про пропорційність потоку дифузії до градієнту концентрації.

З урахуванням (1.2.24) формулу для виробництва ентропії (1.2.9) можна подати у вигляді

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j \geq 0. \quad (1.2.25)$$

Заміною змінних X_i на X_i' можна діагоналізувати матрицю L_{ij} і переписати (1.2.22) у формі:

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_i L'_{ii} X_i'^2, \quad L'_{ii} > 0. \quad (1.2.26)$$

В лінійній термодинаміці необоротних процесів має місце співвідношення взаємності Л.Онсагера (1931):

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (1.2.27)$$

Прикладом застосування теореми Онсагера є теплопровідність кристалів. Як і вимагає ця теорема, тензор теплопровідності повинен бути симетричним незалежно від симетрії кристалу. Цей факт було експериментально встановлено В.Фойгтом ще в XIX ст.

1.2.3.2. Нерівноважні стаціонарні стани. Теорема Пригожина

В деяких випадках граничні умови, накладені на систему, не дозволяють їй досягти стану термодинамічної рівноваги, але досягається деякий стаціонарний стан.

Для прикладу розглянемо систему з двох посудин, сполучених капіляром чи мембраною, причому між посудинами підтримується різниця температур X_T і різниця хімічних потенціалів X_m . Відповідно виникають тепловий потік J_T і потік речовини J_m .

В стаціонарному стані потік речовини J_m зникає, але потік тепла J_T і, відповідно, виробництво ентропії зберігаються:

$$J_m = L_{21} X_T + L_{22} X_m = 0, \quad (1.2.28)$$

$$J_T = L_{11}X_T + L_{12}X_m, \quad L_{12} = L_{21}.$$

Але співвідношення (1.2.28) разом з умовою взаємності еквівалентне до умови мінімуму виробництва ентропії при заданій сталій силі X_T (яка й справді підтримується незмінною):

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \left(\frac{d_i S}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial X_m} \left(\sum_{i,j=1} L_{ij} X_i X_j \right) = 2L_{12}X_k + L_{22}X_m \stackrel{>}{=} 2J_m = 0. \quad (1.2.29)$$

Отже, якщо задані граничні умови заважають системі досягти стану термодинамічної рівноваги, то вона з часом переходить у стан найменшого виробництва ентропії, тобто найменшої дисипації.

Ця теорема була сформульована і доведена І.Р.Пригожином (1945).

Математичне формулювання теореми Пригожина можна подати у вигляді співвідношення $\sigma_{st} \leq \sigma(t)$, де $\sigma(t)$ – поточне значення густини виробництва ентропії,

$$\sigma_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) \quad (1.2.30)$$

– усталене значення густини виробництва ентропії, яке відповідає стаціонарному стану системи. Іншими словами, для будь-якого моменту часу виконується умова

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq 0, \quad (1.2.31)$$

або, що те саме,

$$\frac{d^2 S}{dt^2} \leq 0. \quad (1.2.32)$$

Слід підкреслити, що теорема про мінімальне виробництво ентропії виконується, строго кажучи, тільки поблизу стану термодинамічної рівноваги. Як показали проведені дослідження, узагальнення теореми Пригожина у формі (1.2.31) або (1.2.32) на випадок нелінійних термодинамічних систем в принципі неможливе. В системах, далеких від термодинамічної рівноваги, поведінка системи може бути зовсім іншою і навіть протилежною до того, що передбачає теорема Пригожина.

Контрольні питання до розділу 1.2

1. Утворення структур у первісно однорідному середовищі призводить до зменшення ентропії. Як це узгоджується з другим початком термодинаміки?
2. Порівняйте між собою рівняння неперервності в електродинаміці та рівняння балансу ентропії. Що в них спільне і що – відмінне?
3. Запишіть рівняння балансу ентропії в інтегральній формі.
4. Наведіть кілька прикладів систем, де має місце локальна рівновага.
5. Наведіть кілька прикладів систем, де локальна рівновага порушується.
6. Чи застосовна формула для густини виробництва ентропії через узагальнені термодинамічні сили та відповідні потоки для великих відхилень від стану термодинамічної рівноваги?
7. Чому утворення дисипативних структур можливе тільки при значних відхиленнях від термодинамічної рівноваги?

Задачі до розділу 1.2

- 1.2.1. Для реакції вигляду $A+B \rightarrow X+Y$, що протікає в розрідженому розчині, запишіть залежність спорідненості реакції від концентрацій реагентів.
- 1.2.2. Розв'яжіть задачу 1.2.1 для реакції $2H_2+O_2 \rightarrow 2H_2O$.
- 1.2.3. Між двома посудинами підтримується різниця температур $X_T \equiv X_1$ і різниця хімічних потенціалів $X_m \equiv X_2$. Яку заміну змінних треба здійснити, щоб діагоналізувати матрицю коефіцієнтів перенесення L_{ij} ($i,j=1,2$)? Запишіть елементи діагоналізованої матриці. Якими вони мають бути, щоб задовольнявся узагальнений другий початок термодинаміки?

1.3. Стійкість стаціонарних станів систем, далеких від термодинамічної рівноваги

Теорема Пригожина, що дає можливість визначити стаціонарний стан нерівноважної системи, є справедливою лише при малих відхиленнях від положення рівноваги. Для того, щоб відповісти на питання про стійкість стаціонарного стану, далекого від стану термодинамічної рівноваги, необхідно здійснити спеціальний аналіз. Такий аналіз зроблений у даному розділі. Його результати ілюструються на прикладі різних типів хімічних реакцій, включаючи так званий бруселятор – просторово обмежену систему, в якій ідуть хімічні реакції автокаталітичного типу.

1.3.1. Теорія термодинамічної стійкості

Як уже відзначалося, в області лінійної нерівноважної термодинаміки виробництво ентропії може розглядатися як функція Ляпунова: після збурень така нерівноважна система повертається в стаціонарний стан з найменшим виробництвом ентропії.

Для розгляду систем, далеких від стану рівноваги, зручно ввести ще одну функцію Ляпунова.

1.3.1.1. Умова стійкості стаціонарного стану для малих відхилень від положення рівноваги

Як випливає з другого початку термодинаміки, стан рівноваги ізольованої системи є стійким, якщо він відповідає максимальній ентропії S_{eq} . Завдавши в системі мале збурення деякого керівного параметра, отримаємо:

$$S = S_{eq} + \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S. \quad (1.3.1)$$

Але в точці максимуму $\delta S = 0$, тому стійкість стану рівноваги визначається доданком другого порядку $\delta^2 S$. Точніше, умова стійкості в цьому випадку має вигляд $\delta^2 S < 0$.

Подивимося, як виглядатиме ця умова при підстановці конкретних виразів для другого диференціалу в різних випадках.

1.3.1.2. Другий диференціал ентропії у випадку збурення однієї змінної

Розглянемо спочатку збурення δE лише однієї незалежної змінної – енергії, тобто прийемо, що $S = S(E)$. Тоді з формули Гіббса (1.2.11) випливає, що $\delta S = \delta E / T$, і

$$\delta^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \delta E^2 = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{T} \right) \delta E^2 = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)_V \delta E^2 = -\frac{\delta E^2}{C_V T^2} = -C_V \frac{\delta T^2}{T^2} < 0. \quad (1.3.2)$$

Тут враховано, що

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = C_V > 0, \quad (1.3.3)$$

де C_V – питома теплоємність при сталому об'ємі.

Отже, умовою стійкості рівноважного стану в даному випадку є невід'ємність теплоємності C_V .

1.3.1.3. Умова термодинамічної стійкості у випадку збурення багатьох змінних

У загальному випадку збурення багатьох незалежних змінних, користуючись формулою Гіббса (1.2.11) та отриманим вище співвідношенням (1.3.2), можна записати:

$$T \delta^2 S = - \left[\frac{C_V}{T} \delta T^2 + \frac{1}{\chi V} \delta V_{n_j}^2 + \sum_{j,j'} \mu_{jj'} \delta n_j \delta n_{j'} \right] < 0, \quad (1.3.4)$$

де $\chi = -(1/V)(\partial P / \partial V)_T$ – ізотермічна стисливість,

$$\mu_{jj'} = \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial n_{j'}} \right)_{P,T}, \quad (1.3.5)$$

індекс n_j вказує на те, що при варіації δV склад речовини залишається незмінним.

Основні умови стійкості класичної термодинаміки такі:

$$C_v > 0 \quad (1.3.6)$$

(теплова стійкість – при збільшенні енергії температура системи має зростати);

$$\chi > 0 \quad (1.3.7)$$

(механічна стійкість – при зменшенні об'єму має зростати тиск);

$$\sum_{ij} \mu_{ij} \delta n_j \delta n_j > 0 \quad (1.3.8)$$

(стійкість щодо дифузії в суміші).

Так, при порушенні умови (1.3.6) флуктуації температури будуть не розсмоктуватись, а зростати; при порушенні умови (1.3.7) зростатимуть флуктуації густини.

Якщо всі умови стійкості виконані, то $\delta^2 S$ буде негативно визначеною величиною.

1.3.1.4. Другий диференціал ентропії і виробництво ентропії

Можна також показати, що похідна від $\delta^2 S$ за часом пов'язана з виробництвом ентропії співвідношенням

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \sum_p J_p X_p = \frac{d_i S}{dt} \geq 0, \quad (1.3.9)$$

(пор. із формулою (1.2.6); слід знову вказати, що в (1.2.6) йдеться про локальне виробництво ентропії, а в (1.3.9) – про виробництво ентропії в усій системі).

Із формул (1.3.4) та (1.3.9) випливає, що величина $\delta^2 S$ є функцією Ляпунова, і її існування забезпечує згасання всіх флуктуацій. Але отримані результати справедливі лише недалеко від стану термодинамічної рівноваги.

1.3.1.5. Стійкість станів, далеких від положення термодинамічної рівноваги

Для того, щоб з'ясувати, чи зберігатиметься таке становище далеко від стану рівноваги, слід розрахувати $\delta^2 S$ для системи, що перебуває в нерівноважному стані. Для цього розглядається відхилення від деякого іншого стаціонарного стану, який уже не відповідає максимуму ентропії. Такий розрахунок показує, що співвідношення (1.3.4) зберігається всюди, де застосовний макроскопічний опис. Але похідна $\partial(\delta^2 S)/\partial t$ виявляється пов'язаною не з повним виробництвом ентропії, як у (1.3.9), а лише з виробництвом, спричиненим збуренням:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S \stackrel{\sim}{=} \sum_p \delta J_p \delta X_p. \quad (1.3.10)$$

Величину в правій частині (1.3.10) можна назвати надлишковим виробництвом ентропії. Фактично (1.3.10) збігається з (1.3.9), оскільки у (1.3.9) присутнє лише збурення. Але, оскільки в нерівноважному стані зв'язок між δJ_p і δX_p в загальному випадку буде нелінійним, то вираз (1.3.10) не обов'язково буде невід'ємним. Іншими словами, в сильно нерівноважному стані надлишкове виробництво ентропії може бути як додатним, так і від'ємним.

1.3.2. Термодинамічна стійкість хімічних реакцій

Проілюструємо можливість різних знаків надлишкового виробництва ентропії на прикладі системи, в якій відбувається деяка хімічна реакція.

1.3.2.1. Стаціонарні стани й термодинамічна гілка

Розглянемо спершу хімічну реакцію типу



де $\{A\}$ – множина початкових речовин, $\{X\}$ – множина проміжних продуктів, $\{F\}$ – множина кінцевих продуктів.

Нехай спочатку реакція йде в замкненій системі. Тоді з часом там встановиться термодинамічна рівновага, якій відповідають концентрації реагентів A_0 , X_0 , F_0 .

Тепер припустимо, що в системі підтримуються фіксовані концентрації початкових та кінцевих продуктів А та F. Оскільки рівняння хімічних реакцій нелінійні, то для концентрацій проміжних речовин X існуватиме деякий набір розв'язків. Той з них, що проходить через точку X_0 , будемо називати термодинамічною гілкою (крива 1 на рис. 1.3.1). Виявляється, що на достатньо далекій віддалі від точки рівноваги ця гілка може стати нестійкою.

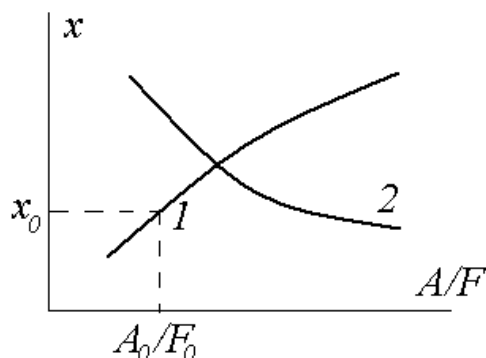


Рис. 1.3.1. Стаціонарні стани, що відповідають однаковим концентраціям початкових та кінцевих продуктів; 1 – термодинамічна гілка; x_0 – стан термодинамічної рівноваги.

1.3.2.2. Надлишкове виробництво ентропії при перетворенні однієї пари речовин в іншу пару речовин

Тепер спробуємо розрахувати надлишкове виробництво ентропії для хімічної реакції

$$X + Y \rightarrow A + B, \quad (1.3.12)$$

підтримуючи концентрації речовин X та Y сталими.

В стані, далекому від термодинамічної рівноваги, знехтуємо зворотною реакцією (вважаємо, наприклад, що продукти А і В швидко видаляються з реактора). Тоді швидкість реакції (вона пропорційна до частоти зіткнень молекул сортів X та Y) можна записати у формі

$$v = \alpha n_x n_y \quad (1.3.13)$$

(коефіцієнт α залежить від температури). В нашому випадку $v_x = v_y = -1$, $v_A = v_B = 1$, тому згідно (1.2.16)

$$A = \mu_x + \mu_y - \mu_A - \mu_B. \quad (1.3.14)$$

Вважаємо систему ідеальною, тому відповідно до (1.2.9) та (1.3.14)

$$A = f(P, T) + RT \ln \frac{n_x n_y}{n_A n_B}. \quad (1.3.15)$$

Варіюємо n_x . Тоді (див. кінець п. 1.2.2.3) з (1.3.13) та (1.3.15) випливає, що

$$\delta J \equiv \delta v = \alpha n_y \delta n_x, \quad (1.3.16)$$

$$\delta X \equiv \frac{\delta A}{T} = R \left(\frac{n_A n_B}{n_x n_y} \frac{n_y \delta n_x}{n_A n_B} \right) = R \frac{\delta n_x}{n_x}. \quad (1.3.17)$$

Підставляючи (1.3.16)-(1.3.17) до (1.3.10), отримуємо остаточно:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \delta J \delta X = \alpha R \frac{n_y}{n_x} \delta n_x^2 \geq 0. \quad (1.3.18)$$

Отже, флуктуація δn_x (або δn_y) не має порушити стійкість системи.

1.3.2.3. Надлишкове виробництво ентропії для реакції автокаталітичного типу

Розглянемо тепер так звану реакцію автокаталітичного типу (коли продукт реакції одночасно є її каталізатором):



Тепер $v_x = -v_y = 1$, і хімічна спорідненість буде записуватись у формі

$$A = f(P, T) + RT \ln \frac{n_x n_y}{n_x^2} = f(P, T) + RT \ln \frac{n_y}{n_x}, \quad (1.3.20)$$

а вираз для швидкості реакції збережеться. Отже,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \alpha n_y \delta n_x R \left[\frac{n_x}{n_y} \left(-\frac{n_y}{n_x^2} \right) \delta n_x \right] = -\alpha R \frac{n_y}{n_x} \delta n_x^2 < 0. \quad (1.3.21)$$

Як бачимо, надлишкове виробництво ентропії виявилось негативним. Це означає, що величина $\delta^2 S$ уже не буде функцією Ляпунова.

Існування функції Ляпунова є лише достатньою (але не необхідною) умовою стійкості положення рівноваги, тому отриманий результат іще не означає, що умова стійкості обов'язково порушиться. Але така можливість в принципі існує.

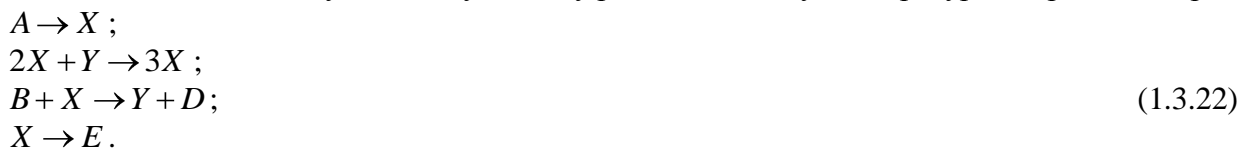
Можна сказати, що нестійкість термодинамічної гілки породжується саме реакціями автокаталітичного типу. До цього класу належить, наприклад, більшість біохімічних реакцій.

1.3.3. Брюсселятор

Одним з широко відомих модельних об'єктів нерівноважної термодинаміки є так званий бруселятор – реактор, у якому протікає деяка реакція автокаталітичного типу. Він був запропонований І.Р.Пригожиным зі співробітниками і названий на честь Брюсселя – міста, де Пригожин працював більшу частину життя і де він створив всевітньо відому школу з нерівноважної термодинаміки.

1.3.3.1. Опис моделі та вихідні рівняння

Розглянемо деяку модельну хімічну реакцію, відому в літературі як бруселятор:



Вважатимемо, що концентрації початкових речовин А, В та продуктів реакції С, D підтримуються сталими, тоді як концентрації проміжних продуктів X, Y можуть змінюватися з часом. Тоді, позначивши концентрації тими ж літерами, що й хімічні речовини, і вважаючи, що всі константи швидкостей реакцій дорівнюють одиниці, можна записати (з урахуванням дифузії для одновимірної моделі) кінетичні рівняння для концентрацій проміжних продуктів реакції в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = A + X^2 Y - BX - X + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = -X^2 Y + BX + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (1.3.23)$$

1.3.3.2. Стаціонарний стан та його стійкість

Стаціонарний однорідний стан системи відповідає термодинамічній гілці. Для нього

$$\begin{cases} A + X - XY - B = 0; \\ X - XY - B = 0, \end{cases} \quad (1.3.24)$$

звідки

$$X_0 = A, \quad Y_0 = \frac{B}{A}. \quad (1.3.25)$$

Для того, щоб з'ясувати стійкість цього стану, розглянемо малі відхилення від нього:

$$X = X_0 + \Delta X, \quad Y = Y_0 + \Delta Y, \quad |\Delta X| \ll X_0, \quad |\Delta Y| \ll Y_0. \quad (1.3.26)$$

Тоді з (1.3.23) можна отримати:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta X}{\partial t} = 2B\Delta X + A^2\Delta Y - B\Delta X - \Delta X + D_x \frac{\partial^2 \Delta X}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial \Delta Y}{\partial t} = B\Delta X - 2B\Delta X - A^2\Delta Y + D_y \frac{\partial^2 \Delta Y}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (1.3.27)$$

Шукатимемо розв'язок системи (1.3.27) в експоненціальній формі:

$$\Delta X, \Delta Y \sim \exp \lambda t - ikz. \quad (1.3.28)$$

Підставивши (1.3.28) до (1.3.27), можна отримати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд відхилень:

$$\begin{cases} B-1-\lambda-k^2D_x \Delta X + A^2\Delta Y = 0; \\ -B\Delta X + -\lambda-A^2-k^2D_y \Delta Y = 0. \end{cases} \quad (1.3.29)$$

Прирівнявши до нуля визначник системи (1.3.30), отримаємо квадратне рівняння щодо λ . Його корені можна подати у формі

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}, \quad (1.3.30)$$

$$2b = A^2 - B + 1 + k^2(D_x + D_y);$$

$$c = A^2 + k^2(A^2D_x + (-B)D_y + k^4D_xD_y).$$

Зрозуміло, що стаціонарний однорідний розв'язок (1.3.26) системи (1.3.23) буде стійким лише за виконання умови $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$.

1.3.3.3. Характерні області стійкості-нестійкості та переходи між ними

Розіб'ємо площину $\{b, c\}$ на характерні області з різними значеннями $\text{Re}\lambda_{1,2}$ та $\text{Im}\lambda_{1,2}$ (рис. 1.3.2).

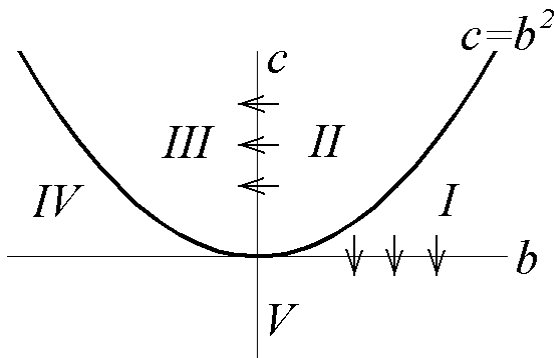


Рис. 1.3.2. Характерні області стійкості та нестійкості стаціонарного однорідного розв'язку для бруселятора.

В області I маємо $\lambda_{1,2} < 0$ ($\text{Im}\lambda_{1,2} = 0$). Тут малі відхилення від розв'язку (1.3.25) будуть експоненціально згасати з часом.

В області II маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Тут згасання малих відхилень від однорідного стаціонарного розв'язку матиме осциляторний характер.

Отже, I і II – це області стійкості однорідного стаціонарного розв'язку. В усіх інших областях цей розв'язок буде нестійким.

В області III маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$. Іншими словами, в цій області відхилення від положення рівноваги матиме характер біжучої хвилі, амплітуда якої з часом зростає, або суперпозиції таких хвиль. Випадок $k=0$ (або $D_x = D_y = 0$) дає синфазні коливання, амплітуда яких зростає з часом. Перехід з області II в область III відповідає (при $k=0$) відомій біфуркації Андронова – Хопфа, або м'якому самозбудженню коливань.

В області IV маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{1,2} > 0$. Відхилення від положення рівноваги являє собою просторово періодичне збурення, що монотонно зростає з часом (так звана аперіодична нестійкість), або набір таких збурень.

Нарешті, в області V буде $\text{Im}\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_1\lambda_2<0$, тобто поведінка відхилень від рівноваги буде приблизно такою ж, як і в області IV. Перехід з області I в область V відповідає так званій біфуркації Тюрінга.

1.3.3.4. Нелінійна стадія динаміки бруселятора

Проведений аналіз поведінки відхилень бруселятора від однорідного стаціонарного стану стосується (за наявності нестійкості) лише початкових моментів часу, поки відхилення залишаються малими. Поведінку системи в пізні моменти часу можна досліджувати лише числовими методами. В залежності від параметрів моделі A, B вона характеризується дуже великою різноманітністю. Крім того вона дуже суттєво залежить від граничних умов. Так, у найпростіших одновимірних випадках граничні умови можуть, наприклад, дискретизувати спектр можливих значень k .

При $k=0$ (точніше, при $D_x=D_y=0$) в області III система поводить себе як розподілений автогенератор. При $k\neq 0$ може спостерігатися щось схоже на стоячу хвилю (рис. 1.3.3).

В областях IV-V можливе утворення стаціонарних просторово-періодичних структур (рис. 1.3.4). Такі структури можуть виникати лише при достатньо великих значеннях параметра D/L^2 (L – довжина системи).

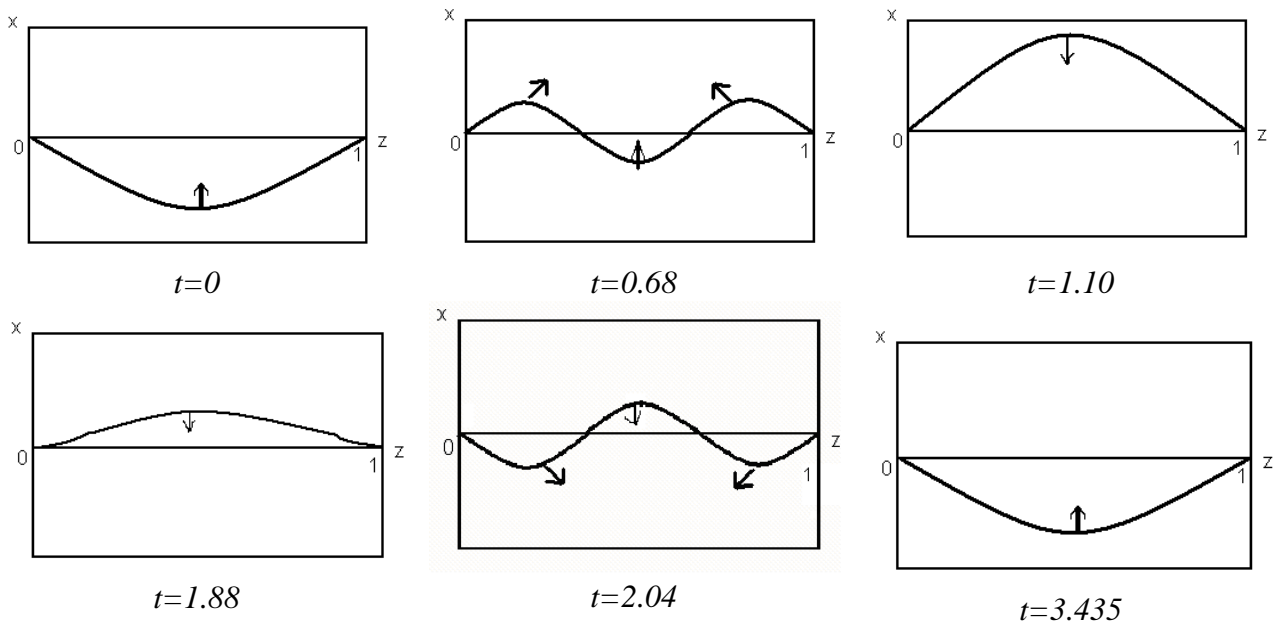


Рис. 1.3.3. Часова еволюція розподілу $X(z)$ в одновимірному бруселяторі при $L=1$, $D_x=8\cdot 10^{-3}$, $D_y=4\cdot 10^{-3}$, $A=2$, $B=5.45$.

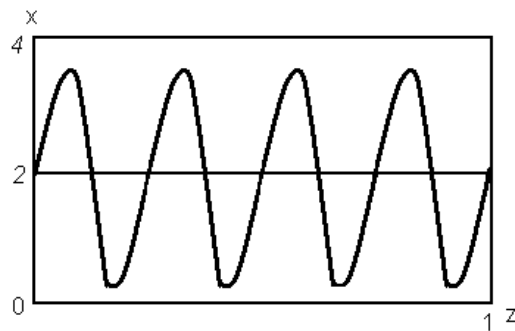


Рис. 1.3.4. Стаціонарна структура $X(z)$ в одновимірному бруселяторі при $L=1$, $D_x=1.6\cdot 10^{-3}$, $D_y=8\cdot 10^{-3}$, $A=2$, $B=4.47$.

Кількість та складність можливих структур у брюсселяторі різко зростає при переході до дво- та тривимірних моделей.

Брюсселятор є, звичайно, лише зручною моделлю нерівноважної системи. Але схожа поведінка спостерігається у реальних хімічних реакцій (наприклад, так звана реакція Білоусова-Жаботинського). Всі такі реакції належать до класу автокаталітичних.

Контрольні питання до розділу 1.3

1. Чи можливе в принципі порушення умов стійкості класичної термодинаміки?
2. Який з можливих станів рівноваги системи називають термодинамічною гілкою? Наведіть кілька прикладів.
3. За яких умов термодинамічна гілка може стати нестійкою? Наведіть кілька прикладів.
4. До якого класу належать хімічні реакції, що протікають у брюсселяторі? Які реальні аналоги брюсселятора?
5. Порівняйте між собою характер втрати стійкості системи при біфуркації Андронова - Хопфа та при біфуркації Тюрінга.

Задачі до розділу 1.3

- 1.3.1. Розрахувати надлишкове виробництво ентропії в хімічній реакції $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$. Чи може воно бути від'ємним?
- 1.3.2*. Розрахувати надлишкове виробництво ентропії в брюсселяторі.
- 1.3.3*. Характеристичне рівняння для параметра λ , який характеризує стійкість положення рівноваги системи щодо малих відхилень, має вигляд $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. В тривимірному просторі (a, b, c) виділіть характерні області стійкості та нестійкості й дослідіть можливі переходи між ними.
- 1.3.4*. Для одновимірної моделі брюсселятора, користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає розподіленню автоколиванням системи. Дослідити залежність поведінки розв'язку від значень керівних параметрів та від довжини системи.
- 1.3.5*. Для одновимірної моделі брюсселятора, користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає формуванню періодичної структури. Дослідити залежність поведінки розв'язку від значень керівних параметрів та від довжини системи.
- 1.3.6*. Для двовимірної моделі брюсселятора (колова область), користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає розподіленню автоколиванням системи. Дослідити залежність поведінки розв'язку від значень керівних параметрів та від радіусу системи.
- 1.3.7*. Для двовимірної моделі брюсселятора (колова область), користуючись числовими методами, побудувати розв'язок, що відповідає формуванню періодичної структури. Дослідити залежність поведінки розв'язку від значень керівних параметрів та від радіусу системи.

1.4. Самоорганізація та еволюція термодинамічно нерівноважних систем

Коли говорять про еволюцію системи, то звичайно мають на увазі зміну її властивостей із часом. Коли йдеться про процеси самоорганізації, то мають на увазі такі процеси, що ведуть до створення більш складних та досконаліх структур. Звичайно, далеко не всякий процес еволюції веде до самоорганізації. Наприклад, у замкнених системах еволюція супроводжується збільшенням ентропії, тобто зменшенням ступеню впорядкованості. Отже, самоорганізація – лише один з можливих шляхів еволюції.

У цьому розділі буде з'ясоване питання про те, як можна кількісно порівняти ступінь самоорганізації двох відмінних станів системи, обговорена проблема еволюції систем, далеких від термодинамічної рівноваги, а також виявлена роль флуктуацій у процесах еволюції систем при зміні деякого керівного параметра (або набору таких параметрів).

1.4.1. Кількісне порівняння ступеню самоорганізації для двох відмінних станів системи

Будемо розглядати відкриті системи, в яких неможливе встановлення термодинамічної рівноваги (пор. з п. 1.2.3.2). Нехай стан такої системи характеризується деяким набором керівних параметрів $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Зміна керівного параметра \mathbf{a} може супроводжуватися як збільшенням, так і зменшенням ступеню самоорганізації системи. На практиці нерідко важливо з'ясувати, який з двох станів системи характеризується вищим рівнем самоорганізації.

1.4.1.1. S-теорема Климонтовича

N-теорема Больцмана (див. п. 1.1.2.3) передбачає для замкнених систем монотонне зростання ентропії з часом. Але, як уже вказувалося, вона справедлива лише для ансамблю частинок, що не взаємодіють між собою. Узагальненням N-теорема Больцмана на ансамбль частинок із довільним характером взаємодії є теорема Гіббса (див. п. 1.1.3.2). Остання нічого не говорить про поведінку системи в часі, але стверджує, що стану термодинамічної рівноваги відповідає максимальна ентропія (за додаткової умови збереження середньої енергії системи). Втім, теорема Гіббса, як і N-теорема Больцмана, стосується лише замкнених систем.

Оскільки ентропія є мірою безпорядку, то можна припустити, що утворення структур повинне приводити до її зменшення. Це твердження становить суть так званої S-теорема (від англійського слова self-organization), сформульованої (1983) та доведеної (1987) російським дослідником Ю.Л.Климонтовичем² для відкритих систем. Розберемо зміст цієї теорема більш докладно.

Будемо розглядати статистичний ансамбль довільної природи, який характеризується набором випадкових змінних X та керівним параметром \mathbf{a} . Будемо порівнювати між собою стани з $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0$ та $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0+\Delta\mathbf{a}$, які характеризуються відповідно функціями розподілу $f_0(X, \mathbf{a}_0)$ та $f(X, \mathbf{a}_0+\Delta\mathbf{a})$. Подамо їх у формі канонічного розподілу Гіббса:

$$f_0(X, \mathbf{a}_0) = \exp\left[\frac{F_0 - H(X, \mathbf{a}_0)}{D}\right], \quad (1.4.1)$$

$$f(X, \mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{a}) = \exp\left[\frac{F - H(X, \mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{a})}{D}\right], \quad (1.4.2)$$

де H – функція Гамільтона, F – вільна енергія, а параметр D відіграє роль температури. Функції розподілу (1.4.1)-(1.4.2) задовольняють звичайній умові нормування:

$$\int f dX = \int f_0 dX = 1. \quad (1.4.3)$$

Подібно до того, як це було зроблено в теоремі Гіббса, накладемо додаткову умову сталості середньої енергії (тобто середнього значення функції Гамільтона) системи. В зв'язку з цим функцію f_0 необхідно перенормувати: $f_0 \rightarrow f_1$. Перенормований розподіл також має канонічну форму,

² Див., наприклад: Ю.Л.Климонтович. Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.

$$f_1(X, \bar{a}_0, \Delta \bar{a}) = \exp \left[\frac{F_1 - H(X, \bar{a}_0)}{D_1 \Delta \bar{a}} \right], \quad (1.4.4)$$

і задовольняє умові нормування (1.4.3).

Умова, з якої знаходиться перенормована температура $D_1(\Delta \mathbf{a})$, якраз і являє собою вимогу незмінності середньої енергії системи:

$$\int H(X, \bar{a}_0) f_1(X, \bar{a}_0, \Delta \bar{a}) dX = \int H(X, \bar{a}_0 + \Delta \bar{a}) f(X, \bar{a}_0 + \Delta \bar{a}) dX. \quad (1.4.5)$$

Далі існує принаймні дві можливості. Перша з них полягає в безпосередньому порівнянні між собою температур $D_1(\Delta \mathbf{a})$ та D . Якщо виконана умова

$$D_1 \Delta \bar{a} > D, \quad (1.4.6)$$

тобто задля виконання умови рівності енергій (1.4.5) ефективну температуру стану $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0$ потрібно підвищити, то стан $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0+\Delta \mathbf{a}$ є більш упорядкованим.

Для підтвердження цього висновку слід перепозначити стани і знову повторити розрахунок. Якщо при цьому виявиться, що $D_1(\Delta \mathbf{a}) < D$, то зроблений висновок підтверджується. Якщо ж знову виконується нерівність (1.4.6), то за більш упорядкований стан слід прийняти той, при переході від якого зміна ефективної температури D_1 – буде меншою.

Інша можливість полягає в тому, щоб безпосередньо за функціями розподілу f_1 та f розрахувати значення S_1 та ентропії Шеннона (1.1.30). Менше значення ентропії відповідає більш упорядкованому стану.

Проілюструємо ці можливості на прикладі автогенератора Ван-дер-Поля. Саме для цієї задачі була вперше сформульована S-теорема Климонтовича.

1.4.1.2. Самоорганізація в автогенераторі Ван-дер-Поля

Розглянемо статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля з урахуванням їхніх внутрішніх шумів, описаний у п. 1.1.4.2. Він характеризується функцією розподілу

$$f(E) = \exp \left[\frac{F + \alpha E - 0.5\gamma E^2}{D} \right] \quad (1.1.34)$$

з вільною енергією

$$F = \frac{\alpha^2}{2\gamma} - D \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\pi\gamma}{2D} + \ln \left(1 + \frac{\alpha D}{\gamma} \operatorname{Erf} \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma D}} \right) \right]. \quad (1.1.35)$$

Нагадаємо, що параметр α визначає дисипацію (його додатні значення відповідають від'ємній дисипації), параметр γ – нелінійність, а параметр D – інтенсивність шуму (він же відіграє роль ефективної температури).

Розглянемо три характерні стани ансамблю – відсутність зворотного зв'язку, поріг самозбудження та розвинену генерацію.

Будемо вважати, що за відсутності зворотного зв'язку ($-\alpha=\delta>0$) нелінійністю при заданій інтенсивності шумів також можна знехтувати. Інтенсивність вимушених коливань у контурі буде порядку D/δ , поріг нелінійності – порядку δ/γ , тобто має бути виконана умова $\gamma D/\delta^2 \ll 1$. Тоді розподіл (1.1.34) набуває вигляду

$$f^1(E) = \frac{\delta}{D} \exp \left(-\frac{\delta}{D} E \right). \quad (1.4.7)$$

Він характеризується середньою енергією $\langle E^{(1)} \rangle = D/\delta$ та ентропією Шеннона

$$S^1 = 1 + \ln \frac{D}{\delta} \quad (1.4.8)$$

(тут і нижче вважатимемо, що $S_0=0$).

На порозі самозбудження $\alpha=0$, звідки

$$f^2 E = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi D}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2D} E^2\right). \quad (1.4.9)$$

Стан, що відповідає розподілу (1.4.9), характеризується середньою енергією $\langle E^{(2)} \rangle = (2D/\pi\gamma)^{1/2}$ та ентропією

$$S^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{\pi D}{2\gamma}\right). \quad (1.4.10)$$

Вважатимемо, що режим розвиненої генерації характеризується умовами $\gamma D/\alpha^2 \ll 1$ (інтенсивність вимушених коливань за рахунок шуму D/α значно менша від амплітуди автоколивань α/γ) та $\alpha \ll \delta$ (перевищення порогу самозбудження незначне, тобто реалізується режим квазігармонічних коливань). Виділяючи в показнику експоненти в (1.1.34) повний квадрат суми, можна записати:

$$f^3 E = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2D} \left(E - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2\right]. \quad (1.4.11)$$

Відповідно значення середньої енергії складає $\langle E^{(3)} \rangle = \alpha/\gamma$, ентропії –

$$S^3 = \frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{2\pi D}{\gamma}\right). \quad (1.4.12)$$

Як бачимо, виконуються співвідношення

$$\langle E^1 \rangle < \langle E^2 \rangle < \langle E^3 \rangle \quad (1.4.13)$$

та

$$S^1 < S^2 < S^3 \quad (1.4.14)$$

(враховано умову $\gamma D/\delta^2 \ll 1$), тобто при зростанні зворотного зв'язку як середня енергія коливань, так і ентропія ансамблю автогенераторів монотонно зростають.

Тепер необхідно перенормувати ентропію до однакових значень середньої енергії. Прийmemo за стан з $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0$ стан розвиненої генерації. Тоді умова перенормування (1.4.5) для функцій розподілу

$$\tilde{f}^1 E = \frac{\delta}{D_1} \exp\left(-\frac{\delta}{D_1} E\right) \quad (1.4.15)$$

та

$$\tilde{f}^2 E = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi D_2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2D_2} E^2\right) \quad (1.4.16)$$

набуде вигляду

$$\int E \tilde{f}^{1,2} E dE = \int E f^3 E dE = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (1.4.17)$$

звідки

$$D_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad D_2 = \frac{\pi\alpha^2}{2\gamma}, \quad D_3 = D. \quad (1.4.18)$$

Підставивши значення $D_{1,2,3}$ до формул (1.4.8), (1.4.10) та (1.4.12), можна отримати значення перенормованої ентропії:

$$\tilde{S}^1 = 1 + \ln \frac{\alpha}{\gamma\delta}, \quad \tilde{S}^2 = \frac{1}{2} + \ln \frac{\pi\alpha}{2\gamma}, \quad \tilde{S}^3 = \frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{2\pi D}{\gamma}\right). \quad (1.4.19)$$

Враховавши, що $\ln(\pi/2) \approx 0.45$ та $\gamma D/\delta^2 \ll 1$, можна пересвідчитися, що

$$\tilde{S}^1 > \tilde{S}^2 > \tilde{S}^3. \quad (1.4.20)$$

Таким чином, в автогенераторі Ван-дер-Поля стан, що відповідає відсутності зворотного зв'язку, є найбільш хаотичним, а стан розвиненої генерації – більш упорядкованим, ніж стан, що відповідає порогу самозбудження.

Климонтівч виконав також розрахунки за S-теоремою для двох варіантів течії і показав на їхній основі, що турбулентна течія характеризується вищим ступенем упорядкованості порівняно з ламінарною.

1.4.2. Принцип мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації

Вище (п.1.2.3.2) вже обговорювалася теорема Пригожина. Вона стверджує, що в стаціонарних нерівноважних станах виробництво ентропії досягає свого мінімуму, а при наближенні до таких станів – зменшується з часом. Нагадаємо, що теорема Пригожина справедлива лише для малих відхилень від положення рівноваги і не може бути узагальнена на нелінійні термодинамічні системи (тобто на випадок великих відхилень від положення термодинамічної рівноваги).

Однак, як і у випадку з S-теоремою Больцмана, узагальнення теореми Пригожина в принципі можливе, якщо розглядати еволюцію системи в не в часі, а в просторі керівних параметрів. Таке гіпотетичне узагальнення було виконане Ю.Л.Климонтівчем і підтверджене на прикладі течії Куетта в плоскому каналі та течії Пуазейля в трубі.

Отже, розглянемо еволюцію деякої відкритої системи в просторі керівних параметрів **a**. Нехай набір **a**_{cr} відповідає деякій біфуркаційній точці, при переході через яку в системі встановлюється новий стійкий стаціонарний розв'язок. Позначимо густину виробництва ентропії в цьому новому стані при **a**=**a**_{cr}+ Δ **a** через σ_s .

Подумки продовжимо в точку **a**=**a**_{cr}+ Δ **a** розв'язок, який реалізувався при **a**=**a**_{cr}- Δ **a**, а в точці **a**=**a**_{cr}+ Δ **a** є нестійким. Відповідну густину виробництва ентропії позначимо через σ_u . Подібно до того, як це було зроблено в теоремі Гіббса та S-теоремі Климонтівча, на систему необхідно накласти деяку додаткову умову. Вибір такої умови визначається структурою виразу, який визначає виробництво ентропії. Наприклад, у згаданих вище розрахунках течій вважалася незмінною напруженість на стінках каналу або труби. Тоді виробництво ентропії в новому стійкому стані, що виник після чергової біфуркації, буде меншим, ніж для старого стану, продовженого в нестійку для цього стану область:

$$\sigma_s \leq \sigma_u. \quad (1.4.21)$$

Сформульоване вище твердження Климонтівч назвав принципом мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації.

Як показали виконані на основі цього принципу розрахунки, перехід течії з ламінарного режиму в турбулентний відповідає переходу в стан з меншим (у викладеному вище розумінні) виробництвом ентропії.

Підкреслимо, що в загальному випадку принцип мінімуму виробництва ентропії в процесах самоорганізації досі залишається недоведеним.

1.4.3. Роль флуктуацій у процесах самоорганізації

Як ми бачили на прикладі бруселятора, перехід від термодинамічної гілки до формування структури проходить через точку біфуркації (одну або декілька), після чого в системі розвивається нестійкість, а на її нелінійній стадії формується структура (стаціонарна або нестаціонарна).

1.4.3.1. Біфуркації та вибір

Біфуркація звичайно супроводжується вибором одного з кількох можливих варіантів розвитку системи.

Так, у дисипативному осциляторі з потенціалом вигляду

$$\Phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^4 \quad (\beta > 0) \quad (B.67)$$

при від'ємних α виникають дві стійкі точки рівноваги – $x_{1,2} = \pm(|\alpha|/2\beta)^{1/2}$ (рис. 1.4.1). Яку з них обере система при переході керівного параметра α через біфуркаційне значення $\alpha=0$, визначає початкове відхилення від попередньої точки рівноваги $x=0$.

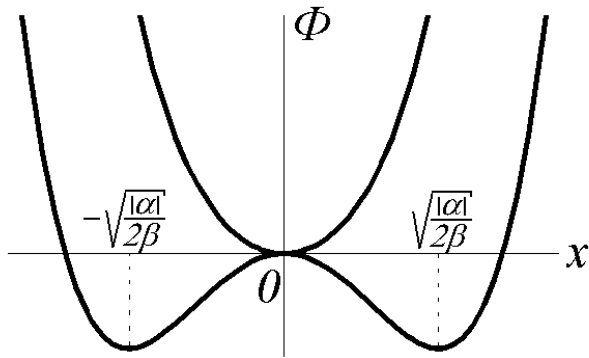


Рис. 1.4.1. Поява нових положень рівноваги при проходженні системи через біфуркаційну точку.

1.4.3.2. Роль флуктуацій при проходженні системи через біфуркаційну точку

Фактично відхилення системи від положення рівноваги в момент її проходження через біфуркаційну точку визначається флуктуаціями. Отже, саме флуктуації визначають той шлях, яким розвиватиметься система після біфуркації.

Можна показати, що в біфуркаційних точках, де термодинамічна гілка втрачає стійкість, спостерігається зростання рівня флуктуацій. Саме така ситуація, наприклад, має місце в автогенераторі Ван-дер-Поля при переході через точку, що відповідає порогу самозбудження.

Після того, як керівний параметр перейшов через біфуркаційне значення, роль флуктуацій знову стає незначною, і розвиток системи протікає еволюційним шляхом.

Контрольні питання до розділу 1.4

1. В яких випадках поняття еволюції та самоорганізації збігаються, а в яких – ні? Наведіть кілька прикладів.
2. В якому сенсі можна говорити про статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля?
3. Порівняйте між собою формулювання S-теореми Климонтовича та її застосування до ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля.
4. Порівняйте між собою теорему Пригожина та принцип мінімуму виробництва ентропії Климонтовича.
5. Наведіть кілька прикладів біфуркацій і вкажіть, які варіанти подальшого розвитку системи при цьому виникають.
6. Яку роль відіграють флуктуації при проходженні системи через біфуркаційну точку?

Задачі до розділу 1.4

1.4.1. Порівняйте нормовану ентропію (при фіксованому значенні енергії) для двох близьких станів ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля, що відрізняються величиною коефіцієнту позитивного зворотного зв'язку (тобто величиною коефіцієнту α).

1.4.2. Порівняйте нормовану ентропію в стані, що відповідає відсутності зворотного зв'язку, та в стані, що відповідає порогу самозбудження, для ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля, вважаючи фіксованою енергію стану, яка відповідає

- а) першому
 - б) другому
- з названих станів.

1.4.3*. Числовими методами дослідіть зміну нормованої ентропії (при фіксованому значенні енергії) при монотонному зростанні коефіцієнту позитивного зворотного зв'язку (тобто коефіцієнту α).

Частина II. РЕГУЛЯРНІ ДИСИПАТИВНІ СТРУКТУРИ

Аналіз дисипативних структур із застосуванням понять ентропії та методів статистичної фізики, який обговорювався у першій частині цього курсу, досить рідко застосовується на практиці при розв'язанні конкретних задач синергетики. Значно частіше застосовується підхід, описаний у п. 1.3.3 на прикладі брусселлятора – запис та розв'язання рівнянь руху, що описують розподілену нелінійну дисипативну систему. Рівняння руху, що отримуються таким чином, звичайно мають вигляд так званих нелінійних кінетичних рівнянь із дифузєю. При цьому той факт, що система є відкритою (нерівноважною), не акцентується, хоча за бажання в цьому можна переконатися. Саме такі методи будуть використані в другій частині даного курсу для дослідження регулярних дисипативних структур (про них див. вище п. В.2).

Розгляд регулярних дисипативних структур ми почнемо з автохвильових процесів.

2.1. Автохвилі та інші нестационарні регулярні структури

Як уже вказувалося у вступі, автохвилями називають хвилі, що поширюються в розподілених активних нелінійних дисипативних середовищах без зміни своєї форми³, причому основні властивості цих хвиль (амплітуда, форма, швидкість, а для періодичних хвиль – частота або довжина хвилі) не залежать (чи слабко залежать) від початкових або граничних умов і визначаються властивостями середовища.

Із сказаного зрозуміло, що тип автохвилі визначається властивостями середовища, в якому вона поширюється. В літературі прийнято виділяти три основні типи активних середовищ – бістабільні середовища, середовища з відновленням (збудливі середовища) та середовища автоколивного типу. Напевне, ці моделі не вичерпують всієї різноманітності реальних активних середовищ, тим більше що питання не можна вважати до кінця вивченим. Тим не менше їхній розгляд дає уявлення про найбільш поширені типи автохвильових процесів.

2.1.1. Автохвилі в бістабільних середовищах

Бістабільні середовища – це такі середовища, що характеризуються двома стійкими однорідними стаціонарними станами рівноваги. Відповідно автохвилі в таких середовищах являють собою хвилі перекидання (фазових переходів) з одного стійкого стаціонарного стану в інший.

Розглянемо спершу кілька прикладів бістабільних середовищ і запишемо для кожного з них рівняння руху.

2.1.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників)

Розглянемо деяку комірку (пальник), всередині якої може протікати процес горіння. Запас горючої суміші підтримується постійним за рахунок надходження від зовнішнього джерела. Нехай за одиницю часу при горінні виділяється кількість теплоти $q(T)$, залежність якої від температури горіння T має ступінчатий характер (рис. 2.1.1).

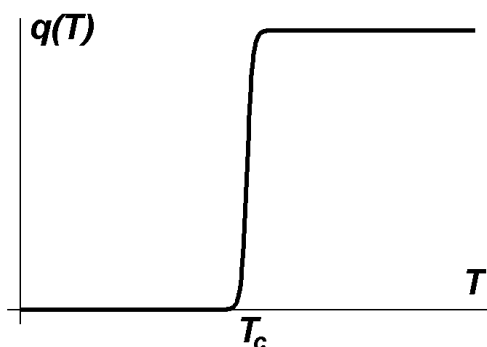


Рис. 2.1.1. Кількість теплоти, що виділяється в пальнику за одиницю часу, як функція його температури (T_c – температура запалювання).

³ Йдеться про усталені хвилі в однорідних середовищах.

Якщо комірка ізолювана, то вся виділена теплота йде на її нагрівання. Тому зміна температури (за умови, що надходження пального до комірки стає) визначатиметься рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{C}, \quad (2.1.1)$$

де C – теплоємність пального. Рівняння (2.1.1) описує необмежене зростання температури пального з часом, оскільки $q(T) \geq 0$.

Але в реальності температура комірки, зрозуміло, не буде необмежено зростати, оскільки існує теплообмін з навколишнім середовищем. Якщо навколишнє середовище має температуру T_0 , то рівняння для температури пального з урахуванням теплообміну має вигляд

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{C} - \gamma(T - T_0) \equiv f(T), \quad (2.1.2)$$

де γ – коефіцієнт теплообміну, а права частина – $f(T)$ – носить назву кінетичної функції. Побудова кінетичної функції показана на рис. 2.1.2.

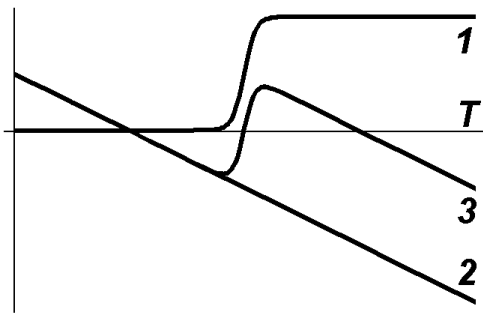


Рис. 2.1.2. Температурні залежності тепло- виділення (крива 1), втрат на теплообмін (крива 2) та сумарної кінетичної функції (крива 3).

Вигляд кінетичної функції для різних значень параметрів моделі показано на рис. 2.1.3 а-в. Якщо температура навколишнього середовища дуже низька, запалювання взагалі неможливе (рис. 2.1.3 а). Якщо температура запалювання перевищує температуру навколишнього середовища, то єдино можливий стаціонарний стан – горіння (рис. 2.1.3 б). Нарешті, в деякому проміжному діапазоні значень система формально має три стаціонарні однорідні стани – T_0 , T_c та T_1 (рис. 2.1.3 в).

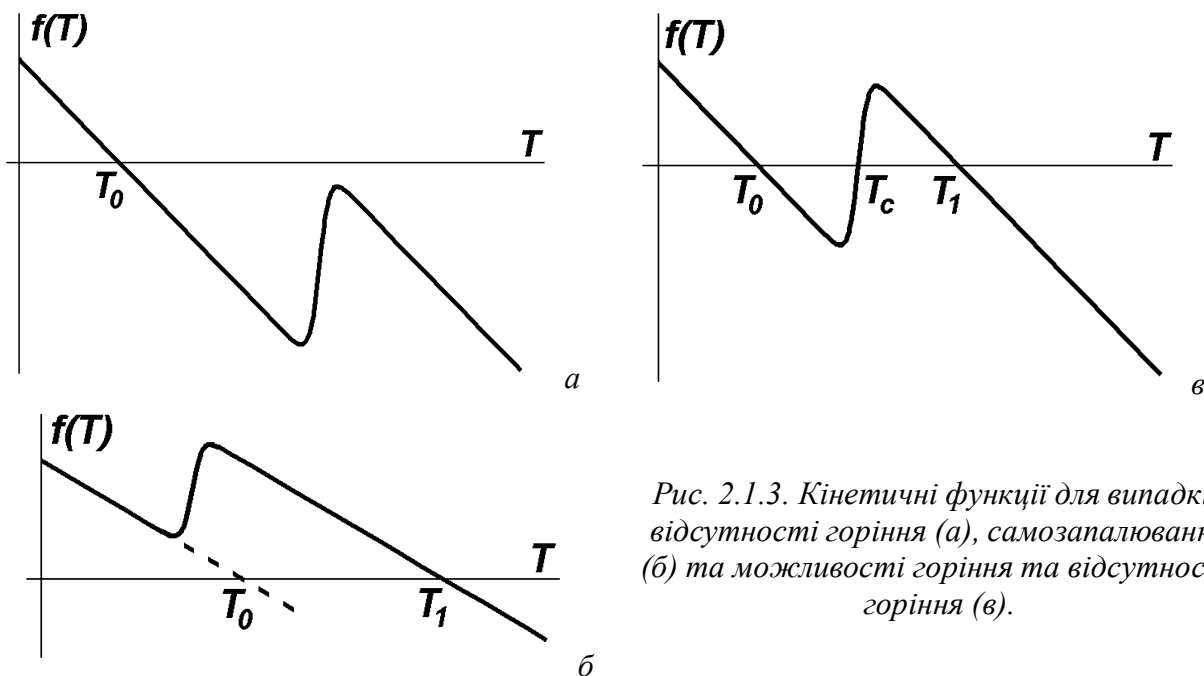


Рис. 2.1.3. Кінетичні функції для випадків відсутності горіння (а), самозапалювання (б) та можливості горіння та відсутності горіння (в).

Для дослідження стійкості однорідних стаціонарних станів лінеаризуємо рівняння (2.1.2) поблизу відповідних точок T_i :

$$\frac{dT}{dt} = T - T_i - f'(T_i) (T - T_i), \quad f'(T_i) \equiv \left. \frac{df(T)}{dT} \right|_{T=T_i} \equiv \frac{1}{\tau_i}. \quad (2.1.3)$$

Якщо $f'(T_i) < 0$, то, як випливає з (2.1.3), малі відхилення від стаціонарних станів експоненціально згасатимуть із характерним часом τ_i , тобто відповідні точки (T_0 та T_1 на рис. 2.1.3 в) є стійкими. Навпаки, при $f'(T_i) > 0$ малі відхилення експоненціально зростатимуть, тобто відповідна точка (T_c на рис. 2.1.3 в) є нестійкою.

Точка T_0 відповідає відсутності горіння, коли температура комірки збігається з температурою навколишнього середовища. Точка T_1 відповідає стаціонарному горінню, коли все виділене за одиницю часу тепло відходить у навколишнє середовище внаслідок теплообміну. Нарешті, точка T_c , яка відповідає температурі запалювання, служить межею областей притягання точок T_0 та T_1 . Справді, при $f(T) > 0$ температура системи з часом зростатиме, при $f(T) < 0$ – навпаки, спадатиме (напрямок зміни температури з часом показаний на рис. 2.1.3 стрілками). Таким чином, як видно з цього рисунку, якщо в початковий момент часу виконана умова $T < T_c$, то в системі встановлюється температура T_0 , в протилежному випадку – температура T_1 .

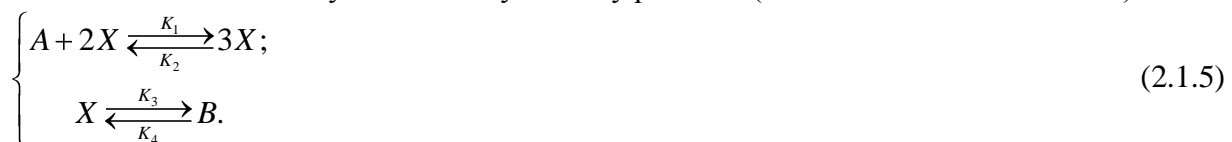
Якщо замість відокремленого пальника розглядати ланцюжок таких пальників, розташованих на малих віддальх один від одного, то в рівнянні (2.1.2) необхідно врахувати теплопровідність. Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.1.4)$$

(D – коефіцієнт теплопровідності).

2.1.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля)

Розглянемо деяку гіпотетичну хімічну реакцію (так звана модель Шльогля):



Відзначимо, що ця реакція належить до автокаталітичного типу (пор. з п. 1.3.2.3) – пряма реакція, описувана першим із рівнянь (2.1.5), зводиться до перетворення речовини A в речовину X , причому остання служить і каталізатором цієї реакції.

Нехай спершу реакція протікає в реакторі з перемішуванням, де концентрації реагентів підтримуються однорідними в усьому об'ємі.

Для протікання першої з реакцій (2.1.5) у прямому напрямку необхідне зіткнення однієї молекули сорту A та двох молекул сорту X . Ймовірність такого процесу пропорційна добутку AX^2 , де літери позначають концентрації відповідних речовин. Елементарний акт даної реакції приводить до народження однієї молекули сорту X . Тоді внесок у зміну концентрації речовини X за одиницю часу буде K_1AX^2 . Врахувавши подібним чином внески трьох інших реакцій, можна записати кінетичне рівняння для концентрації речовини X у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = K_1AX^2 - K_2X^3 - K_3X + K_4B \equiv f(X). \quad (2.1.6)$$

Якщо величини K_1A , K_2 , K_3 та K_4B приблизно однакові за величиною, то графік кінетичної функції $f(x)$ (рис. 2.1.4) матиме приблизно ту саму форму, що й у попередньому прикладі.

Нехай тепер реакція протікає в одновимірному реакторі без перемішування, так що концентрація реагентів змінюється вздовж реактора (в напрямку x). Якщо врахувати дифузію молекул у реакторі, то замість (2.1.6) отримаємо:

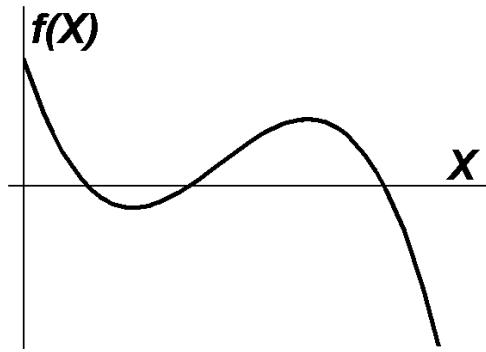


Рис. 2.1.4. Кінетична функція для концентрації речовини X у реакції Шльогля.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (2.1.7)$$

2.1.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом

Нехай густина розселення деяких тварин – n . Нехай вони розмножуються статевим шляхом, тобто приріст кількості особин у пропорційний до ймовірності їхніх зустрічей ($\sim n^2$). Тоді з урахуванням смертності і територіального розростання популяції можна записати рівняння для густини розселення у формі

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m n^2 - \gamma n + D \Delta n. \quad (2.1.8)$$

Тут враховано, що швидкість розмноження пропорційна масі їжі $m(n)$, яка надходить у систему за одиницю часу в розрахунку на одну особину. Очевидно, $m(n)$ зменшується із зростанням густини розселення n . Нехай, наприклад,

$$m n = m_0 \exp(-n/n_0). \quad (2.1.9)$$

Вигляд кінетичної функції

$$f n = \alpha m_0 n^2 \exp(-n/n_0) - \gamma n \quad (2.1.10)$$

при деякому наборі параметрів подано на рис. 2.1.5. Він якісно подібний до кінетичних функцій для розглянутих раніше випадків (рис. 2.1.3 в, рис. 2.1.4). Точки $n=0$ та $n=n_1$ відповідають стійким стаціонарним станам, точка $n=n_c$ – нестійкому. При малих n майже не відбуваються зустрічі тварин, популяція не зростає. При $n=n_1$ зростання популяції обмежується вичерпанням харчових ресурсів.

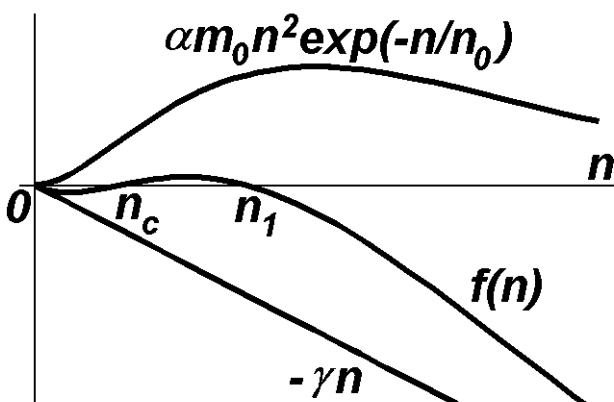


Рис. 2.1.5. Побудова кінетичної функції для популяції, що розмножується статевим шляхом в умовах обмежених харчових ресурсів.

2.1.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу

Всі розібрані вище приклади приводять до рівнянь вигляду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{f}(\bar{u}) + \bar{D} \Delta \bar{u} \quad (2.1.11)$$

– так званих нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Назва пов’язана з тим, що при $D=0$ рівняння (2.1.11) переходить у рівняння, що описує зміну величини \mathbf{u} в часі – так зване кінетичне рівняння з нелінійною кінетичною функцією $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. Навпаки, при $\mathbf{f}(\mathbf{u})=0$ рівняння (2.1.11) переходить у звичайне рівняння дифузії. В загальному випадку дифузія є нелінійною, тобто коефіцієнт дифузії залежить від змінної \mathbf{u} . В анізотропних середовищах замість скалярного коефіцієнта дифузії D матимемо тензор D_{ij} .

Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу – одна з універсальних моделей для опису автоколивних процесів. Саме такими рівняннями описуються процеси в активних середовищах найрізноманітнішої природи. Для опису бістабільних середовищ досить одного рівняння вигляду (2.1.11). В усіх розглянутих прикладах бістабільних середовищ рівняння такого типу має два стійкі стаціонарні однорідні розв’язки (див. п. 2.1.1.1).

2.1.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикання): побудова фазового портрету

Розглянемо одновимірне нелінійне кінетичне рівняння з дифузією для бістабільного середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.1.12)$$

Будемо шукати його розв’язок у вигляді стаціонарної хвилі, тобто хвилі, що поширюється в просторі з постійною швидкістю без зміни своєї форми: $u=u(\xi)$, $\xi=x-V_0t$ (так званий автомодельний розв’язок). Тоді (2.1.12) зводиться до вигляду

$$Du'' + V_0u' + f(u) = 0. \quad (2.1.13)$$

Це рівняння можна формально розглядати як рівняння дисипативного нелінійного осцилятора з потенціалом

$$\Phi(u) = \int f(u) du, \quad (2.1.14)$$

де швидкість хвилі V_0 відіграє роль параметра дисипації. Вважатимемо надалі, що $\Phi(u_3) > \Phi(u_1)$, тобто “різниця потенціалів” між точками u_1 та u_3 додатна:

$$\Delta\Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du > 0. \quad (2.1.15)$$

Для випадку $V_0=0$ неважко, знаючи вигляд “нелінійної сили” $f(u)$ (рис. 2.1.6 а), а, отже, й “потенціалу” $\Phi(u)$ (рис. 2.1.6 б), побудувати фазовий портрет системи (рис. 2.1.6 в).

Нас цікавить випадок, коли система переходить зі стану u_1 до стану u_3 . Це можливо лише тоді, коли тертя від’ємне, а енергія, що виділяється при переході між u_1 і u_3 , точно дорівнює різниці потенціалів:

$$\int_{u_1}^{u_3} V_0 \frac{du}{d\xi} du = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du, \quad (2.1.16)$$

де враховано, що аналогом сила тертя є величина $V_0 du/d\xi$. Тоді з (2.1.16) можна знайти швидкість стаціонарної хвилі:

$$V_0 = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\int_{u_1}^{u_3} \frac{du}{d\xi} du} = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi} \quad (2.1.17)$$

На фазовому портреті з урахуванням “від’ємної дисипації” (рис. 2.1.6 г) переходу зі стану u_1 до стану u_3 відповідає сепаратриса, що йде з сідла в сідло.

Повернемося до аналізу формули (2.1.17). Оскільки її знаменник строго додатний, то знак, а також і величина швидкості V_0 стаціонарної хвилі визначається “різницею потенціалів” (2.1.15). Поки нерівність (2.1.15) виконана, розширюється область $u=u_3$. Якщо ж знак нерівності (2.1.15) зміниться на протилежний, то розширюватиметься область $u=u_1$.

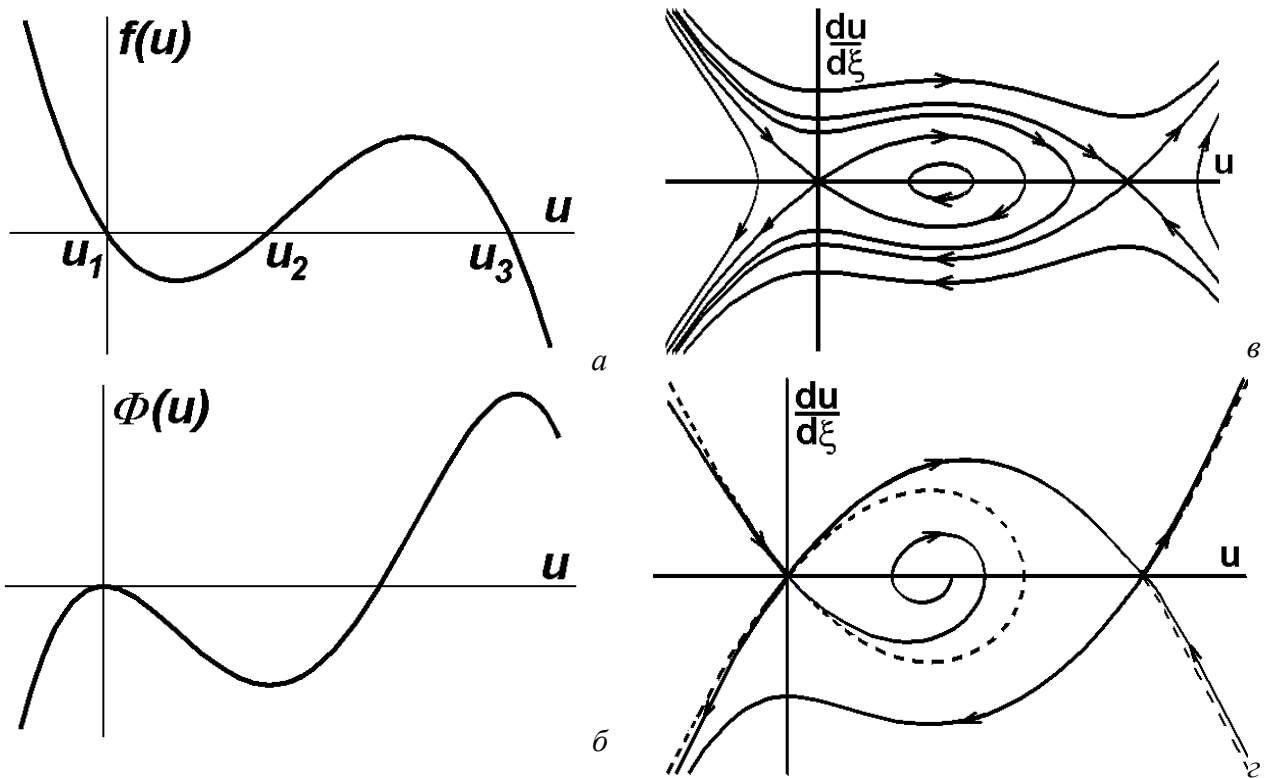


Рис. 2.1.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання: а – вигляд кінетичної функції, б – хід потенціалу, в – фазовий портрет без урахування дисипації, г – фазовий портрет з урахуванням від’ємної дисипації із сепаратрисою, що йде з сідла в сідло.

На практиці, однак, користуватися формулою (2.1.17) незручно, оскільки для цього треба знати явний вигляд розв’язку $u=u(\xi)$ рівняння (2.1.13). Тому на практиці для визначення швидкості стаціонарних хвиль перекидання застосовують різні наближені методи.

2.1.1.6. Вигляд хвилі перемикання для модельної кінетичної функції

Рівняння (2.1.13) вдається проінтегрувати до кінця, якщо обрати модельну функцію $f(u)$ у формі

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u), \quad 0 < u_0 < 1. \quad (2.1.18)$$

Тоді задачу вдається аналітично розв’язати до кінця.

Рівняння для стаціонарної хвилі (2.1.13) при цьому набуває вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.1.13 \text{ а})$$

У фазових змінних ($w = du/d\xi$) це рівняння записується у формі

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.1.13 \text{ б})$$

Вільний доданок у рівнянні (2.1.13 б) є поліномом третього ступеню. Тому його розв’язок можна також шукати у формі полінома. Порівняння першого доданку з останнім показує, що це має бути поліном другого ступеню.

Шукаємо розв’язок (2.1.13 б) у вигляді:

$$w(u) = \sigma u(1 - u). \quad (2.1.19)$$

Після підстановки (2.1.19) до (2.1.13 б) отримаємо:

$$D\sigma^2 u(1 - u)(1 - 2u) + \sigma V_0 u(1 - u) + u(u - u_0)(1 - u) = 0, \quad (2.1.20)$$

або

$$u(-2D\sigma^2 + 1) + D\sigma^2 + \sigma V_0 - u_0 = 0. \quad (2.1.20 \text{ а})$$

Це – поліном першого ступеню. Для того, щоб він дорівнював нулеві, повинні дорівнювати нулеві коефіцієнти при u^1 та u^0 . Отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь, розв'язавши які, легко записати вирази для введених по ходу параметрів σ та V_0 :

$$\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{2D}}; \quad (2.1.21)$$

$$V_0 = \frac{u_0 - \frac{1}{2}}{\sigma} = \mp \frac{1 - 2u_0}{2} \sqrt{2D} = \mp \sqrt{\frac{D}{2}} (1 - 2u_0). \quad (2.1.22)$$

Формула (2.1.22) дає явний вигляд швидкості хвилі перекидання. Як бачимо, названа швидкість зростає зі збільшенням коефіцієнту дифузії. Зміна знаку швидкості відбувається при $u_0=1/2$. Легко переконатися, що це якраз відповідає зміні знаку різниці потенціалів (2.1.15) для кінетичної функції вигляду (2.1.18), тобто формула (2.1.22) узгоджується з раніше отриманою загальною формулою (2.1.17).

Тепер співвідношення (2.1.19), яке з урахуванням явного вигляду функції $w(u)$ має вигляд

$$\frac{du}{d\xi} = \sigma u (1-u), \quad (2.1.19 \text{ a})$$

можна проінтегрувати. Маємо:

$$\int \left(\frac{du}{u} + \frac{du}{1-u} \right) = \int \sigma d\xi,$$

звідки

$$\ln \left| \frac{u}{1-u} \right| = \sigma (\xi - \xi_0),$$

де ξ_0 – стала інтегрування. Врахувавши, що за змістом задачі $0 < u < 1$, остаточно отримаємо:

$$u(\xi) = \frac{e^{\sigma(\xi - \xi_0)}}{1 + e^{\sigma(\xi - \xi_0)}} = \frac{1}{1 + e^{-\sigma(\xi - \xi_0)}} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{th} \frac{\sigma(\xi - \xi_0)}{2} \right]. \quad (2.1.23)$$

Якщо у формулі (2.1.21) обрати верхній знак, то розв'язок (2.1.23) відповідає граничним умовам

$$u(\xi) \rightarrow \infty = 1, \quad u(\xi) \rightarrow -\infty = 0. \quad (2.1.24)$$

Графік розв'язку (2.1.23), який описує форму хвилі перекидання (біжучого фронту), поданий на рис. 2.1.7.

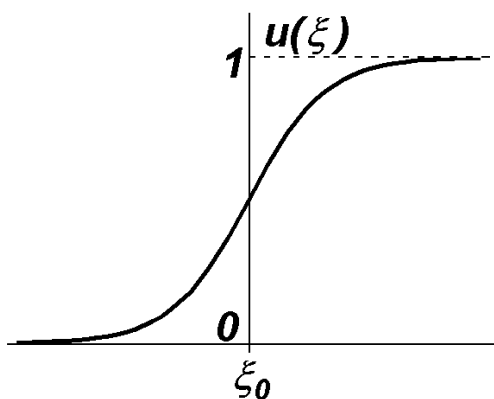


Рис. 2.1.7. Профіль хвилі перекидання.

Ширина фронту хвилі може бути оцінена як

$$\Delta \xi \sim \frac{1}{\sigma} = \sqrt{2D}, \quad (2.1.25)$$

тобто чим сильніша дифузія, тим більш розмитим буде фронт хвилі перекидання. Характерний час переходу з одного стійкого стаціонарного стану легко визначити із співвідношення

$$\Delta t = \frac{\Delta \xi}{V_0} = \left(u_0 - \frac{1}{2} \right)^{-1}, \quad (2.1.26)$$

тобто в даній моделі він не залежить від коефіцієнта дифузії, оскільки більш розмитому фронту відповідає більша швидкість хвилі перемикавання.

2.1.1.7. Еволюція початкового збурення в бістабільному середовищі

Тепер, знаючи розв'язок рівняння (2.1.12) у вигляді стаціонарної хвилі, поставимо питання про те, як виглядатиме його розв'язок для довільних початкових умов.

Будемо вважати, що часи релаксації $\tau_{1,3}$ (2.1.3) до обох стійких стаціонарних станів u_1 , u_3 значно менші від характерного часу проходження хвилі перекидання Δt (2.1.26). Тоді за довільних початкових умов система спершу в кожній точці простору за малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови.

Якщо в початковий момент часу всюди $u(x) < u_2$, система за час порядку τ_1 еволюціонує до однорідного стаціонарного стану u_1 . Якщо в початковий момент часу всюди $u(x) > u_2$, система за час порядку τ_3 еволюціонує до однорідного стаціонарного стану u_3 .

Якщо в початковий момент часу в середовищі співіснують області з $u(x) < u_2$ та $u(x) > u_2$, то воно спершу в кожній точці простору за малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови (рис. 2.1.8). Після цього в середовищі побіжить хвиля перемикавання, напрямком якої визначається "різницею потенціалів" $\Delta \Phi$ (2.1.15), і в середовищі врешті рещт встановиться той із станів $u \in \{u_1; u_3\}$, якому відповідає більше значення потенціалу $\Phi(u)$. Зокрема, дві зустрічні хвилі перемикавання загасять одна одну.

Якщо $\Delta \Phi = 0$, то, як випливає з (2.1.17), $V_0 = 0$, тобто в середовищі можливе співіснування областей $u = u_1$ і $u = u_3$. Це – випадок формування стаціонарної дисипативної структури.

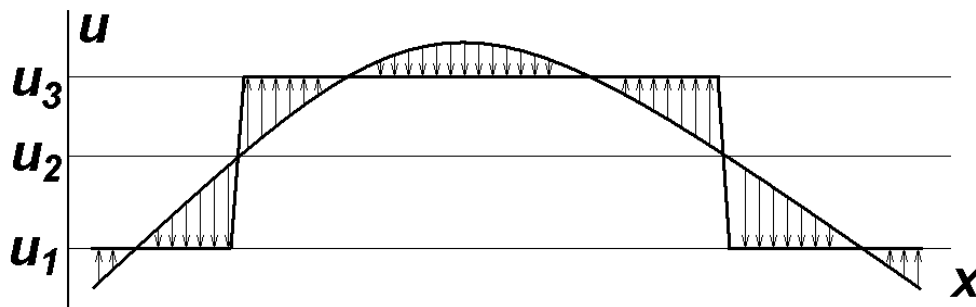


Рис. 2.1.8. Швидка релаксація бістабільного середовища до стаціонарних однорідних станів.

2.1.1.8. Поширення хвиль перекидання в двовимірних середовищах

Досі розглядалися одновимірні моделі бістабільних середовищ. У двовимірному середовищі побудовані вище розв'язки описують плоскі хвилі. Цікаво з'ясувати, як будуть поширюватися хвилі перекидання з криволінійним фронтом.

Щоб відповісти на це питання, перепишемо рівняння (2.1.12) у полярній системі координат, вважаючи хвилю аксіально-симетричною:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.1.27)$$

Рівняння (2.1.27) мало зміниться, якщо в знаменнику другого доданку в правій частині замінити r на R , де радіус $R(t)$ описує положення фронту в момент t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{R} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.1.28)$$

Справді, похідна $\partial u/\partial r$ відмінна від нуля лише в шарі $r \approx R$ завтовшки $\Delta \xi$ (2.1.25), який можна вважати вузьким ($\Delta \xi \ll R$). Тому в цьому шарі зроблена заміна є правомірною, а в інших точках простору похідна $\partial u/\partial r$ обертається в нуль, і змінений доданок не дає внеску до рівняння.

Підставимо до (2.1.28) розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, швидкість якої тепер залежить від радіусу кривини фронту:

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - V(R)\hat{t}.$$

Отримаємо:

$$-V(R)\hat{u}' = f(\xi) + \frac{D}{R}u' + Du'', \quad (2.1.29)$$

або

$$Du'' + \left[V(R) + \frac{D}{R} \right] u' + f(\xi) = 0. \quad (2.1.29 \text{ а})$$

Це рівняння за формою збігається з одновимірним рівнянням (2.1.13), якщо замінити $V(R) + D/R$ на V_0 . Отже, залежність швидкості фронту від радіусу його кривини має вигляд

$$V(R) = V_0 - \frac{D}{R}, \quad (2.1.30)$$

тобто опуклий фронт має меншу швидкість.

При $R < R_c = D/V_0$ напрямок поширення хвилі змінюється на протилежний. Отже, якщо область $u = u_3$ має розмір $R < R_c$, вона зникне. Лише при $R > R_c$ вона почне розростатися. Цей ефект легко інтерпретувати на прикладі хвилі запалювання. В моделі, описаній у п. 2.1.1.1, тепловиділення відбувається по всій області горіння, а теплообмін – уздовж межі області горіння. Для кругового вогнища горіння площа пропорційна до R^2 , а довжина межі пропорційна до R . Тому при малих R площа зменшуватиметься швидше, ніж довжина межі, і теплопередача в навколишнє середовище переважатиме тепловиділення.

Якщо на плоскому фронті хвилі перекидання виникне опуклість, вона буде загальмовуватися, і, навпаки, западина на фронті буде прискорюватися (рис. 2.1.9). В результаті форма фронту підтримуватиметься плоскою.

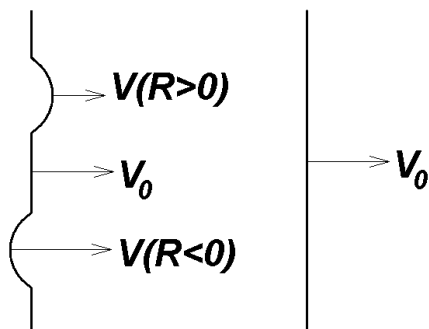


Рис. 2.1.9. Еволюція збурень плоского фронту перекидання в бістабільному середовищі.

2.1.1.9. Хвиля заселення

Досі для бістабільних середовищ розглядалися лише хвилі переходу між стійкими стаціонарними однорідними станами u_1 та u_3 .

Спробуємо проаналізувати хвилю, яка відповідає переходу із нестійкого стану рівноваги u_2 в стійкий (u_1 або u_3). Для більшості систем фізичної природи така хвиля неможлива, оскільки стан $u = u_2$ буде руйнуватися флуктуаціями. Але існує ситуація, коли флуктуації неможливі в принципі – це поширення біологічної популяції.

Розглянемо поширення популяції, яка розмножується діленням. Тоді швидкість зростання популяції (з урахуванням смертності) буде пропорційна до першого ступеню концентрації особин n ($n \geq 0$), і відповідне нелінійне кінетичне рівняння з дифузиею можна подати у формі (пор. з рівнянням (2.1.8), п. 2.1.1):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n + D\Delta n, \quad (2.1.31)$$

де $m(n)$ – обсяг продовольства, що надходить у систему за одиницю часу на одну особину. В найпростішому випадку можна покласти

$$m(n) = \begin{cases} m_0 - \beta n, & n < n_0; \\ 0, & n \geq n_0, \end{cases} \quad n_0 = \frac{m_0}{\beta}. \quad (2.1.32)$$

Графік кінетичної функції $f(n) = \alpha n m(n)$ та відповідного потенціалу (див. формулу (2.1.14)) поданий на рис. 2.1.10 а, б, а відповідний фазовий портрет – на рис. 2.1.10 в. Стационарній хвилі відповідає сепаратриса, що йде з нестійкого вузла в сідло.

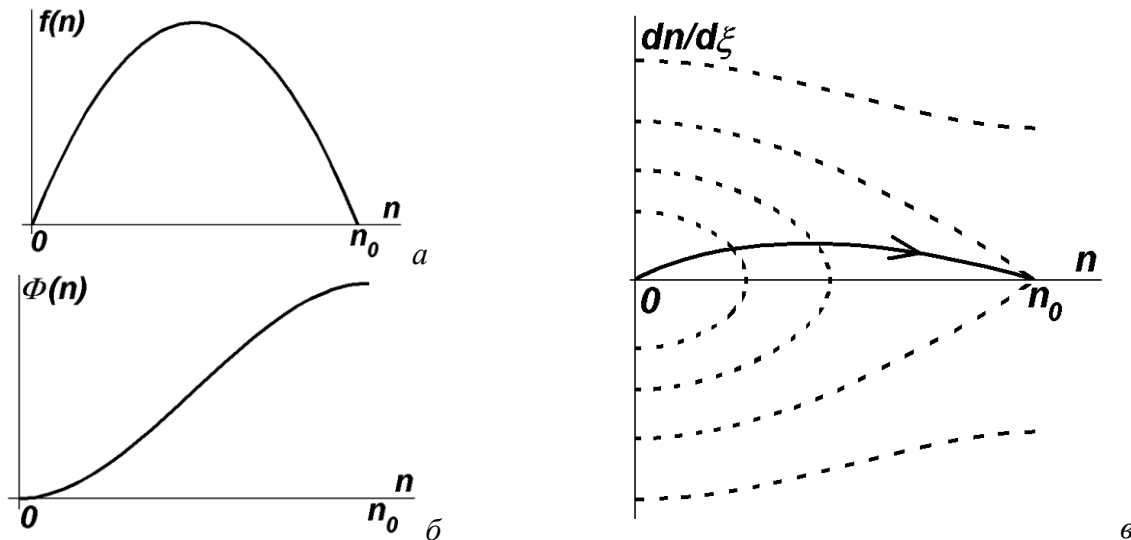


Рис. 2.1.10. До аналізу хвилі заселення: а – кінетична функція, б – хід потенціалу, в – фазовий портрет (штрихові лінії відповідають умові $V_0=0$).

Рівняння (2.1.31) з урахуванням (2.1.32) має два стаціонарні однорідні розв'язки – $n=0$ та $n=n_0$. Формально стан $n=0$ – нестійкий, але, оскільки флуктуації неможливі, він буде підтримуватись, доки не з'явиться зародок популяції.

Хвиля переходу зі стану до стану відома в літературі як хвиля заселення. Її швидкість визначається властивостями середовища,

$$V_0 \sim \sqrt{2m_0 D}, \quad (2.1.33)$$

і не залежить від n_0 .

Контрольні питання до підрозділу 2.1.1

1. Чи можна впливати на кінетику відкритих (нерівноважних) систем шляхом зміни зовнішніх параметрів? Відповідь дати на прикладі горіння в комірці та моделі Шльогля.
2. Чим визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в бістабільних середовищах?
3. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих фронтів.
4. У чому відмінність між хвилею заселення та хвилею запалювання в бістабільному середовищі?
5. Від чого залежить ширина фронту хвилі запалювання?
6. Намалюйте кінетичну функцію для середовища, в якому можливі хвилі заселення.
7. Якісно охарактеризуйте еволюцію довільного початкового збурення в бістабільному середовищі.
8. Чому фронт лісової пожежі звичайно буває плоским?
9. Чи залежать біжучі фронти від початкових і граничних умов? Як саме?
10. Чому з трьох стаціонарних станів бістабільного середовища один виявляється нестійким?

Задачі до підрозділу 2.1.1

2.1.1.1. Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u) - u + u_0,$$

де $0 < u_0 < 1$ і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціонарним хвилям системи.

2.1.1.2. Показати, що рівнянню для хвилі збудження в нервовому волокні

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u) - u + u_0$$

($0 < u_0 < 1$ і всі параметри позитивні) задовольняє автомодельний розв'язок у вигляді хвилі збудження $du/d\xi = \sigma u(1-u)$, де $\xi = z - Vt$. Знайти швидкість поширення збудження по волокну V . Отримати функцію $u(\xi)$ і зобразити профіль хвилі.

2.1.1.3. Процес запалювання в одновимірному середовищі описується модельним рівнянням

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + f(u) = 0,$$

де

$$f(u) = \begin{cases} \gamma(T - T_0), & T < T_c; \\ \gamma(T - T_1), & T > T_c, \end{cases}$$

причому $T_0 < T_c < T_1$.

а) За яких умов у середовищі побіжить хвиля запалювання? Побудуйте її фазовий портрет.

б) Знайдіть залежність $u(\xi)$, швидкість та ширину фронту хвилі перекидання.

2.1.1.4. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m \vec{e}_n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m \vec{e}_n = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси. Оцінити швидкість хвилі переходу з одного стаціонарного стану в інший (так звана хвиля заселення).

Вказівка: ґрунтуючись на аналогії з нелінійним дисипативним осцилятором, записати співвідношення для балансу енергії.

2.1.1.5. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m n - n^2 - \alpha n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m \vec{e}_n = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси. Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. Розрахувати форму біжучого фронту, його швидкість і ширину.

2.1.1.6*. Для двовимірного бістабільного середовища побудувати числовий розв'язок, що відповідає поширенню хвилі перекидання від колового джерела. Побудувати залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняти її з результатом аналітичного розрахунку.

2.1.2. Автохвилі в середовищах із відновленням (збудливих середовищах)

Перейдемо тепер до автохвиль у середовищах із відновленням.

Середовища з відновленням (інакше їх називають збудливими середовищами) схожі на бістабільні, але в них один із стаціонарних станів є метастабільним, так що через деякий скінчений проміжок часу після збудження середовища спонтанно переходять в основний стан. Автохвилі в таких середовищах можна уявити собі як послідовність двох хвиль перекидання. Перша з них переводить систему з основного стану в метастабільний, а друга – знову в основний. Такі автохвилі дістали назву біжучих імпульсів.

Прикладами середовищ із відновленням можуть служити, наприклад, ліс, що знову виростає після лісової пожежі, нервово волокно, що може збуджуватись зовнішнім подразником, а потім спонтанно переходити в стан спокою, та інші.

2.1.2.1. Рівняння, що описують середовища з відновленням

Середовища з відновленням описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузиею:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v. \end{cases} \quad (2.1.34)$$

Для стаціонарного однорідного випадку система (2.1.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0; \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (2.1.34 \text{ а})$$

Нас цікавитиме випадок, коли система (2.1.34 а) має єдиний стійкий розв'язок $u=u_0, v=v_0$.

Аналітичне дослідження системи (2.1.34) можливе тоді, коли характерні часи зміни величин u і v істотно відмінні. Нехай, наприклад, величина u змінюється швидко, а величина v – повільно. Тоді для останньої дифузиею можна знехтувати, і система (2.1.34) набирає вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu f_2(u, v), \quad \mu \ll 1. \end{cases} \quad (2.1.34 \text{ б})$$

Систему (2.1.34 б) можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого і повільного руху.

2.1.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (якісний розгляд)

Конкретизуємо модель середовища з відновленням. Розглянемо знову середовище, в якому можливий процес горіння (див. п. 2.1.1.1). Нехай тепер горіння супроводжується виділенням інгібітору. Інгібітор – це речовина, що пригнічує процес горіння (зокрема, зменшує тепловиділення при горінні). Якщо інгібітор, який виділяється, буде накопичуватися, то через деякий час горіння стане неможливим. Отже, вважатимемо, що за відсутності горіння інгібітор з часом може розпадатися (або вивітрюватися), так що його рівноважна концентрація є монотонно зростаючою функцією температури.

Поведінка такого середовища описується системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузиею вигляду (2.1.34). Апроксимуючи кінетичну функцію для температури кубічним поліномом, як це було зроблено вище (п. 2.1.1.6), і вважаючи, що рівноважна концентрація інгібітору прямо пропорційна до температури, ці рівняння можна подати у формі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (2.1.35)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де параметр T_0 задовольняє умові $0 < T_0 < 1$.

Нехай при $n=0$ „різниця потенціалів”

$$\Delta\Phi \equiv \int_{T_1}^{T_3} f(T) dT \quad (2.1.36)$$

між станами $T=0$ і $T=1$ додатна, так що середовище може перейти зі стану $T=0$ у стан $T=1$. Тоді в середовищі побіжить хвиля запалювання. Але за фронтом цієї хвилі почнеться виділення інгібітору. Зростання концентрації інгібітору спричинить „опускання” графіка кінетичної функції (рис. 2.1.11 а). Коли концентрація інгібітору перевищить деяке порогове значення, знак „різниця потенціалів” зміниться, в результаті чого стан горіння перестане бути „енергетично вигідним”, і за хвилиною запалювання побіжить хвиля гасіння.

Легко зрозуміти, що швидкість хвилі гасіння v_e в усталеному режимі має дорівнювати швидкості хвилі запалювання v_i . Нехай, наприклад, $v_e < v_i$ ⁴. Тоді довжина імпульсу горіння буде збільшуватись. В результаті на його задньому фронті зростатиме концентрація інгібітору, збільшуватиметься „негативна різниця потенціалів” і, відповідно до формули (2.1.17), v_e зростатиме. Якщо ж $v_e > v_i$, імпульс горіння буде вкорочуватися, що спричинить зменшення швидкості його заднього фронту.

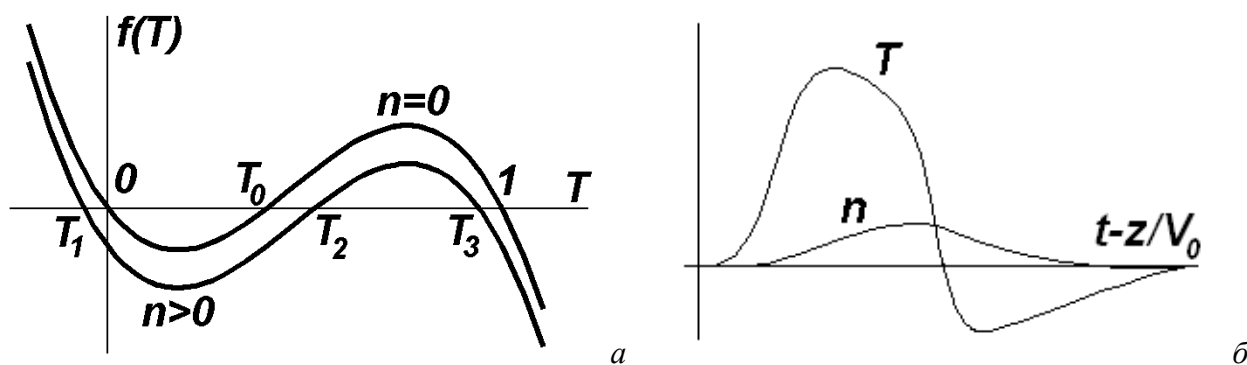


Рис. 2.1.11: а – зміна кінетичної функції при зміні концентрації інгібітору; б – профілі температури та концентрації інгібітору в біжучому імпульсі.

Як видно з рис. 2.1.11 а, зростання концентрації інгібітору приводить до зменшення як температури горіння, так і температури, що відповідає стаціонарному стану відсутності горіння. Тому температура в кінці імпульсу горіння буде дещо меншою, ніж на його початку, а температура за заднім фронтом імпульсу горіння – нижчою ніж перед переднім.

Крім того, за заднім фронтом горіння буде висока концентрація інгібітору, який розкладається протягом деякого часу релаксації (в біофізиці його називають часом рефрактерності).

В результаті формується так званий біжучий імпульс, профіль якого зображено на рис. 2.1.11 б. По суті він являє собою пару хвиль перекидання, що йдуть одна за одною.

2.1.2.3. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використані наближення

Перш за все з’ясуємо, чи має середовище, описуване рівняннями (2.1.35), єдиний стаціонарний однорідний стан. Система рівнянь для параметрів однорідного стаціонарного стану (2.1.34 а) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha T(1-T) - \beta n = 0; \\ n - \gamma T = 0. \end{cases} \quad (2.1.35 \text{ а})$$

⁴ Індокси походять від англійських слів ignition (запалювання) та extinction (гасіння).

Вона зводиться до рівняння

$$\alpha T (1-T) - \beta \gamma T = 0, \quad (2.1.36)$$

яке має єдиний дійсний корінь $T=0$ (і, відповідно, $n=0$) за виконання умови

$$1 - T_0^2 < 4\beta\gamma/\alpha. \quad (2.1.37)$$

Систему (2.1.35) вдається розв'язати аналітично в тому випадку, якщо дифузійною інгібітору можна знехтувати, а характерний час зміни концентрації інгібітору (за порядком величини він визначається параметром τ) значно перевищує характерний час зміни температури Δt (2.1.26). В цьому випадку можна вважати, що

– просторова зміна концентрації інгібітору є настільки плавною, що його дифузійною можна знехтувати;

– на фронтах імпульсу горіння концентрація інгібітору залишається незмінною, а в усіх інших областях просторова і часова зміна температури є настільки плавною, що похідними в першому рівнянні системи (2.1.35) можна знехтувати.

З урахуванням сказаного після переходу до автомодельної змінної $\xi = z - V_0 t$ система (2.1.35) набуває вигляду

$$\begin{cases} \chi \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V_0 \frac{dT}{d\xi} + \alpha T (1-T) - \beta n = 0; \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.1.35 \text{ б})$$

Фронти біжучого імпульсу описуються першим рівнянням при $n = \text{const}$. Проміжки між фронтами описуються редукованою системою (2.1.35 б):

$$\begin{cases} \beta n = \alpha T (1-T); \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.1.35 \text{ в})$$

Розв'язок першого рівняння системи (2.1.35 б) при $n=0$ нам уже відомий – це хвиля перекидання вигляду (2.1.23),

$$T(\xi) = \frac{\exp\left\{\sigma(\xi - \xi_0)\right\}}{1 + \exp\left\{\sigma(\xi - \xi_0)\right\}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2\chi}}, \quad (2.1.38)$$

(ξ_0 – константа інтегрування), що рухається зі швидкістю (див. (2.1.22))

$$V_0 = \sqrt{\frac{\alpha\chi}{2}} (1 - 2T_0). \quad (2.1.39)$$

Тепер, знаючи ширину фронту хвилі запалювання $1/\sigma$ та швидкість цієї хвилі V_0 , можна конкретизувати умову чинності даного розрахунку:

$$\tau \gg \Delta t \equiv \frac{1}{\sigma V_0} = \left[\alpha (1/2 - T_0) \right]^{-1}. \quad (2.1.40)$$

2.1.2.4. Імпульс горіння

Перейдемо тепер до аналізу імпульсу горіння. Лінеаризуємо праву частину першого рівняння системи (2.1.35 в), вважаючи, що $T = 1 - \delta T$, $0 < \delta T \ll 1$:

$$\beta n \approx \alpha (1 - T_0) \delta T = \alpha (1 - T_0) (1 - T), \quad (2.1.41)$$

звідки

$$T = 1 - \frac{\beta n}{\alpha (1 - T_0)}. \quad (2.1.41 \text{ а})$$

Тоді друге рівняння системи (2.1.35 в) набуває вигляду:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n - n_\infty}{\theta_1 V_0}, \quad (2.1.42)$$

де використано позначення

$$n_{\infty} = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1-T_0)}}, \quad \theta_1 = \frac{\tau}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1-T_0)}}. \quad (2.1.43)$$

Інтегруючи рівняння (2.1.42) з граничною умовою $n(\xi=0)=0$, де точка $\xi=0$ відповідає передньому фронту імпульсу горіння, отримуємо:

$$n(\xi) = n_{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\theta_1 V_0}\right) \right], \quad \xi < 0. \quad (2.1.44)$$

Для визначення тривалості імпульсу горіння слід використати умову рівності швидкостей його переднього та заднього фронтів. Це, в свою чергу, означає, що в кінці імпульсу горіння „різниця потенціалів” (2.1.36) між точкою горіння і точкою відсутності горіння повинна бути такою самою за величиною і протилежною за знаком щодо „різниці потенціалів” між цими точками перед початком імпульсу горіння (рис. 2.1.12).

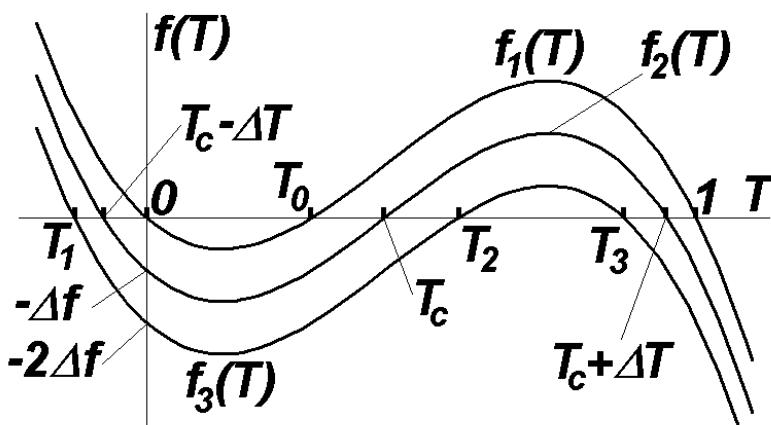


Рис. 2.1.12. До визначення тривалості імпульсу горіння.

Нехай $f_1(T)$ – кінетична функція першого рівняння системи (2.1.35), що відповідає відсутності інгібітору, $n=0$, а $f_2(T)$ та $f_3(T)$ – кінетичні функції, що відповідають ненульовим концентраціям інгібітору і задовольняють умовам

$$\int_{T_c - \Delta T}^{T_c + \Delta T} f_2(T) dT = 0, \quad \int_{T_1}^{T_3} f_3(T) dT = \int_0^1 f_1(T) dT.$$

(див. рис. 2.1.12). Очевидно, для отримання кривої $f_3(T)$ криву $f_1(T)$ необхідно опустити на величину $2\Delta f$, де Δf - величина на яку треба опустити криву f_1 , щоб отримати криву $f_2(T)$.

Крива f_2 є непарною функцією щодо аргументу, який відраховується від її середньої стаціонарної точки T_c :

$$f_2(T) = T - T_c \left[T - T_c^2 - \Delta T^2 \right] \quad (2.1.45)$$

Тоді з рівності

$$f_2(T) = f_1(T) - \Delta f \quad (2.1.46)$$

можна знайти параметри T_c , ΔT і Δf :

$$T_c = \frac{1+T_0}{3}, \quad \Delta T^2 = \frac{1-T_0+T_0^2}{3}, \quad \Delta f = \alpha \frac{1-2T_0}{27} \frac{1+T_0}{27} \frac{2-T_0}{27}. \quad (2.1.47)$$

Тепер максимальна концентрація інгібітору знаходиться із першого рівняння системи (2.1.35 в):

$$n_{\max} = \frac{2\Delta f}{\beta} = \frac{2\alpha}{27\beta} \frac{1-2T_0}{27} \frac{1+T_0}{27} \frac{2-T_0}{27}. \quad (2.1.48)$$

Відповідно довжину імпульсу горіння L_1 визначаємо з умови

$$n_{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{L_1}{\theta_1 V_0}\right) \right] = n_{\max}. \quad (2.1.49)$$

Таким чином,

$$L_1 = \theta_1 V_0 \ln \frac{n_{\max}}{n_{\infty} - n_{\max}}. \quad (2.1.49 \text{ a})$$

2.1.2.5. Довжина релаксації та фазовий портрет

Хвиля гасіння, що завершує імпульс горіння, буде цілком подібна до хвилі запалювання. Відмінність лише в тому, що відбуватиметься перехід зі стану T_3 в стан T_1 . Величини T_3 та T_1 неважко визначити з рис. 2.1.12 (точки T_1 , T_2 та T_3 дзеркально симетричні відповідно точкам 1, T_0 та 0 щодо точки T_c):

$$T_1 = \frac{1 - 2T_0}{3}, \quad T_3 = \frac{2(T_0 - 1)}{3}. \quad (2.1.50)$$

Для опису процесу релаксації після проходження імпульсу горіння знову скористаємося системою (2.1.35 в). Вважаючи тепер, що $T = -\delta T$, запишемо її перше рівняння у формі $\beta n \approx \alpha T_0 \delta T = -\alpha T_0 T$,

звідки

$$T = -\frac{\beta n}{\alpha T_0}. \quad (2.1.51 \text{ a})$$

Підставивши (2.1.51 а) до другого рівняння системи (2.1.35 в), можна отримати:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n}{\theta_2 V_0}, \quad (2.1.52)$$

де використане позначення

$$\theta_2 = \frac{\tau}{1 + \gamma\beta/\alpha T_0}. \quad (2.1.53)$$

Вважаючи тепер, що точка $\xi=0$ відповідає задньому фронту імпульсу горіння, і враховуючи, що $n(\xi=0) = n_{\max}$, після інтегрування рівняння (2.1.52) можна отримати:

$$n(\xi) = n_{\max} \exp\left(\frac{\xi}{\theta_2 V_0}\right). \quad (2.1.54)$$

Середовище набуде здатності до запалювання при $n \leq n_{\max}/2$, тому за (мінімальну) довжину релаксації (рефрактерності) можна прийняти величину

$$L_2 = \theta_2 V_0 \ln 2. \quad (2.1.55)$$

Профілі температури та концентрації інгібітору, що відповідають виконаному розрахунку, подані на рис. 2.1.13 а.

Оскільки система (2.1.35 б), яка використовувалася для аналізу біжучого імпульсу, відповідає системі з півтора ступенями вільності, то відповідний фазовий простір буде тривимірним. За координати можна, наприклад, узяти змінні n , T та $dT/d\xi$. Фазовий портрет біжучого імпульсу в цих координатах поданий на рис. 2.1.13 б. Ділянки АВ та CD, що лежать у площинах $n=0$ та $n=n_{\max}$ – це сепаратиси, що йдуть із сідла в сідло (пор. з рис. 2.1.6 г). Вони відповідають ділянкам швидкого руху – хвилі запалювання (АВ) та хвилі гасіння (CD). Ділянки ВС та DA відповідають повільному руху (ВС – імпульс горіння, DA – час релаксації).

Біжучі імпульси, подібні до розглянутого, характерні й для інших середовищ із відновленням (наприклад, імпульс збудження в нервовому волокні або домен сильного поля в діоді Ганна).

2.1.2.6. Періодичні хвилі в середовищах з відновленням

Рівняння типу (2.1.34 б) мають також розв'язки у вигляді періодичної послідовності хвиль. Якщо довжина такої хвилі λ задовольняє умові $\lambda \gg L$, де $L=L_1+L_2$ – повна довжина

біжучого імпульсу (з урахуванням довжини релаксації), то швидкість періодичної хвилі буде такою самою, як і в одиночного імпульсу. Зі зменшенням L швидкість спадає (поширення фронту йде на фоні залишкової концентрації інгібітору, через це і швидкість менша, бо зменшується різниця потенціалів, див. рис. 2.1.11 а).

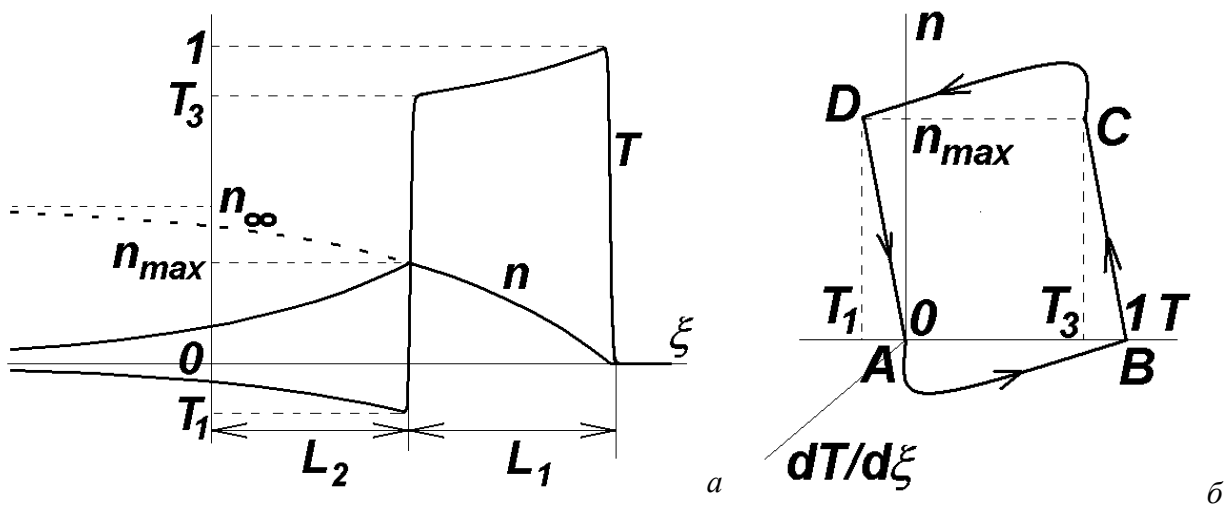


Рис. 2.1.13. Профілі (а) та фазовий портрет (б) біжучого імпульсу.

Періодична послідовність імпульсів описується розв'язками вигляду $u=u(\theta)$, $v=v(\theta)$, де $\theta=\omega t-kz$ – фаза хвилі, причому $u(\theta+2\pi)=u(\theta)$, $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$. Вони задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \omega \frac{du}{d\theta} = f_1(u, v) + Dk^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}; \\ \omega \frac{dv}{d\theta} = \mu f_2(u, v), \end{cases} \quad (2.1.34 \text{ в})$$

яку можна отримати з (2.1.34 б), і відповідають її граничному циклу. При довільних значеннях параметрів ω , k період руху вздовж граничного циклу – довільний. Вимагаючи, щоб він дорівнював 2π , можна отримати деякий зв'язок між ω і k – нелінійний закон дисперсії. При $k > k_{\max} \sim 2\pi/L$ розв'язки виявляються нестійкими. Нелінійна дисперсійна крива для періодичних хвиль подана на рис. 2.1.14.

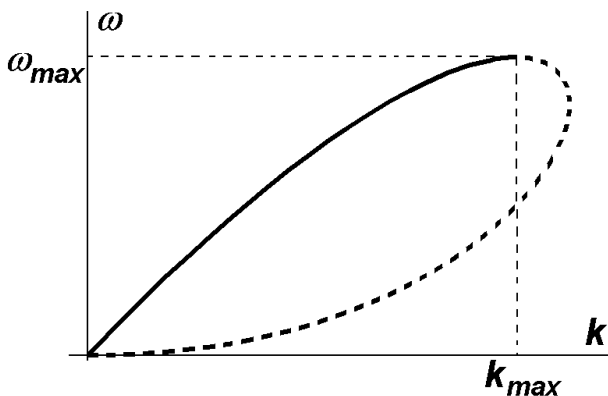


Рис. 2.1.14. Нелінійна дисперсійна крива для періодичних хвиль у середовищі з відновленням (штриховою лінією показана частина, що відповідає нестійким розв'язкам).

2.1.2.7. Спіральні хвилі в середовищі з відновленням: розрахунок форми фронту

Розглянемо поширення біжучого імпульсу вздовж тонкого кільця радіусу R . Якщо кільце тонке, задачу можна вважати одновимірною. Їй відповідає той самий розв'язок, що й періодичній послідовності імпульсів періодом $L=2\pi R$. Швидкість імпульсів зростає із збільшенням L і прямує до граничного значення V_0 , коли L необмежено зростає.

Будемо збільшувати зовнішній радіус кільця, спрямовуючи його до нескінченності. Прийдемо до задачі про біжучий імпульс, що обертається навколо отвору радіусу R.

Фронт не може бути прямою лінією, що обертається з частотою ω , бо в такому випадку далеко від кільця його швидкість необмежено зростатиме, тоді як вона має дорівнювати V_0 (тут і нижче залежністю швидкості фронту від його кривини нехтуємо). Отже, віддалені ділянки фронту відстають, в результаті чого сам фронт скручується в спіраль.

Нехай у стаціонарному режимі спіраль обертається з кутовою швидкістю ω . Положення її фронту визначається співвідношенням $\varphi(r,t) = \omega t - \chi(r)$, де функція $\chi(r)$ визначає форму спіралі (рис. 2.1.15 а). Як видно з рис. 2.1.15 б, швидкість V_τ точки перетину спіралі з кільцем $r = \text{const}$ складає величину $V_0 / \cos \alpha$, де α – кут між нормаллю до хвильового фронту і дотичною до кільця.

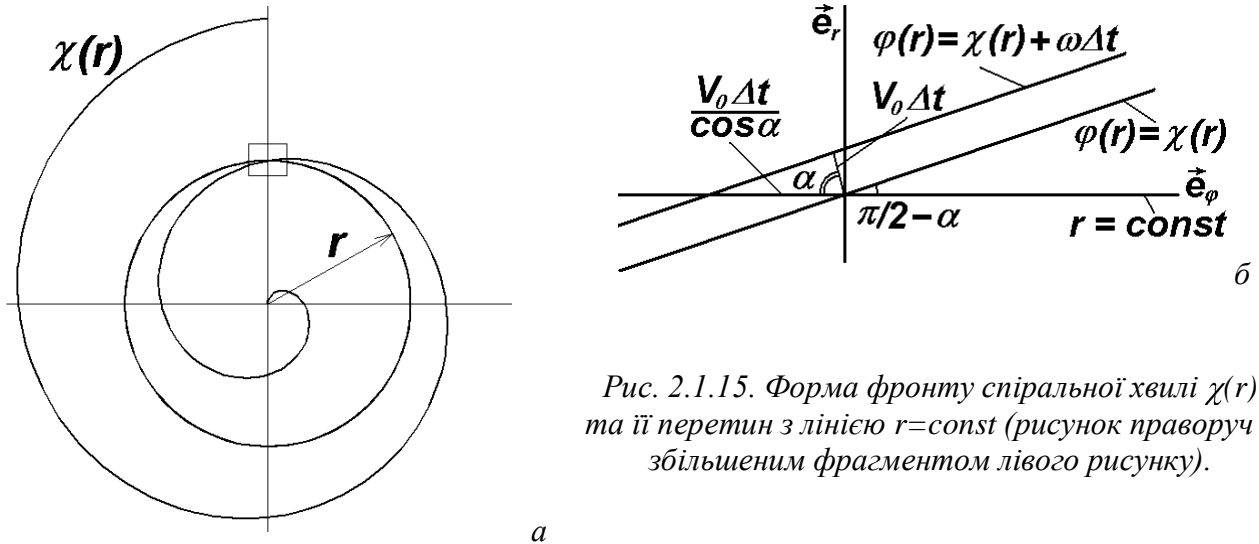


Рис. 2.1.15. Форма фронту спіральної хвилі $\chi(r)$ та її перетин з лінією $r = \text{const}$ (рисунок праворуч є збільшеним фрагментом лівого рисунку).

Як видно з того ж рис. 2.1.15 б, кут $\pi/2 - \alpha$ можна записати через похідну функції, що описує форму фронту:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{d[r \varphi]}{d r \varphi} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{d\chi}{dr} r \right]^{-1} \quad (2.1.56)$$

(враховано, що на рис. 2.1.15 б по осі абсцис відкладена величина $r\varphi$, по осі ординат – r). Тоді з можна знайти $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2}}. \quad (2.1.57)$$

Таким чином,

$$V_\tau = \frac{V_0}{\cos \alpha} = V_0 \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2}. \quad (2.1.58)$$

З іншого боку, оскільки спіраль обертається як ціле з частотою ω , то $V_\tau = \omega r$. Підставивши останнє співвідношення до (2.1.58), отримуємо рівняння щодо невідомої функції $d\chi(r)/dr$ у формі

$$\omega r = V_0 \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2}. \quad (2.1.59)$$

Частоту ω обертання спіралі визначимо з умови, що до центрального отвору радіусу R фронт підходить під прямим кутом ($\alpha = \pi/2$), тобто $V_0 = \omega R$. Тоді (2.1.59) набуває вигляду:

$$r = R \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2}. \quad (2.1.60)$$

Розв'язавши (2.1.60) щодо $d\chi(r)/dr$, отримаємо диференціальне рівняння, яке визначає форму фронту спіральної хвилі:

$$\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.1.61)$$

Таким чином, форма спіралі визначається співвідношенням

$$\chi(r) = \int_R^r dr \sqrt{R^2 - r^{-2}}. \quad (2.1.62)$$

При $r \gg R$ (2.1.62) набуває вигляду:

$$\chi(r) = \chi_0 + r/R, \quad (2.1.62 \text{ a})$$

тобто на великих відстанях від ядра спіраль є архімедовою (зі сталим кроком). Крок h такої спіралі визначається співвідношенням $\chi(r+h) - \chi(r) = 2\pi$, тобто $h = 2\pi R$.

Слід відзначити, що формула (2.1.62), яка описує форму спіральної хвилі, дає помилку при $r \rightarrow R$, оскільки в цій області слід, строго кажучи, брати до уваги залежність швидкості фронту хвилі від його кривини.

Крім однорукавних спіралей, у яких зміна азимутального кута на 2π відповідає одному періоду хвилі, у середовищах із відновленням можуть існувати (реально спостерігаються в експериментах) і багатукавні спіралі, у яких зміна азимутального кута на 2π відповідає цілому числу періодів (рис. 2.1.16).

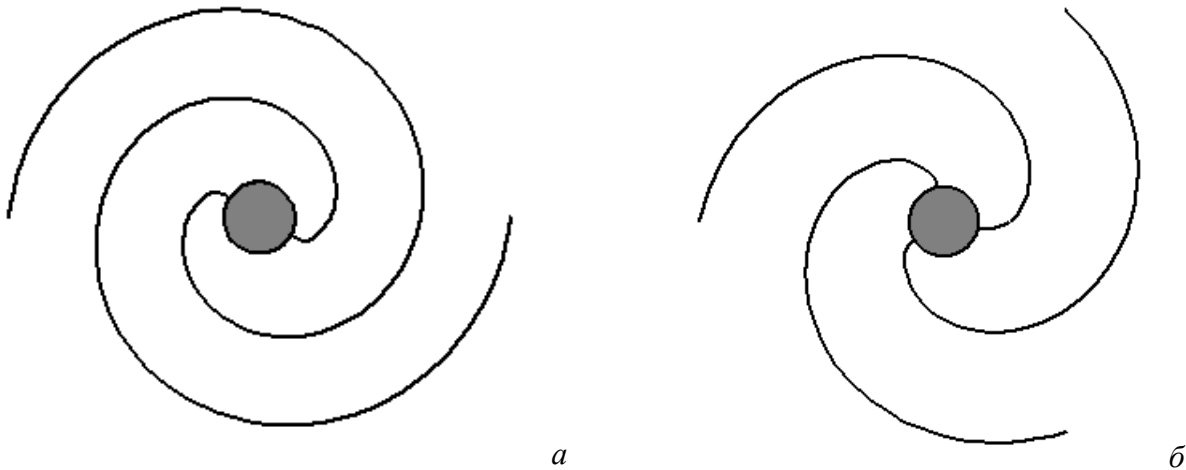


Рис. 2.1.16. Дворукавна (а) та трирукавна (б) спіралі.

2.1.2.8. Природа ядра спіральної хвилі

В експериментах спіральні хвилі спостерігаються і за відсутності центрального отвору. Всередині ядра при цьому зберігається стан спокою (рефрактерності).

Існує мінімальний період повторення імпульсів $L_{\min} = L_1 + L_2$. Якщо взяти отвір радіусом $R < R_{\min} = L_{\min} / (2\pi)$, край спіралі відірветься від цього отвору і буде вільно рухатись. Отже, мінімальний радіус ядра, навколо якого бігтиме спіральна хвиля, складає величину R_{\min} . Йому відповідає максимальна частота спіральної хвилі $\omega_{\max} = V_0 / R_{\min}$ та мінімальний крок спіралі $h_{\min} = 2\pi R_{\min} = L_{\min}$.

Така оцінка задовільно узгоджується з експериментом.

Фізично існування ядра спіралі (в рамках моделі горіння з виділенням інгібітору) можна пояснити тим, що кінець спіралі, що обертається навколо її ядра, безперервно виділяє інгібітор. В результаті концентрація інгібітору в ядрі весь час підтримується на рівні, який робить неможливим його запалювання.

2.1.2.9. Спіральні хвилі в неоднорідних та нестационарних середовищах

У неоднорідному середовищі з відновленням спостерігається ефект дрейфу спіральної хвилі: за певних умов її центр рухається по прямій лінії в напрямку, який визначається напрямком зміни властивостей середовища та деякими параметрами цього середовища. Швид-

кість такого дрейфу пропорційна швидкості поширення біжучого імпульсу та обернено пропорційна характерному розміру неоднорідності.

Якщо властивості активного середовища з часом змінюються – наприклад, модулюються за періодичним законом із деякою частотою, то центр спіральної хвилі буде рухатися по колу, радіус якого пропорційний до глибини модуляції та обернено пропорційний до різниці частот спіральної хвилі та модуляції. Коли ця різниця дорівнює нулеві (випадок резонансу), центр спіралі рухатиметься по прямій. Швидкість руху в обох випадках пропорційна добутку швидкості поширення біжучого імпульсу на глибину модуляції. Описане явище спостерігалося в експерименті, коли шар розчину, в якому відбувалася світлочутлива реакція Білоусова – Жаботинського, піддавали періодичному освітленню.

Природа обох згаданих ефектів пов'язана з можливістю подовження чи вкорочення вільних кінців фронту спіральної хвилі.

2.1.2.10. Автохвильові фронти в тривимірних середовищах

У тривимірних середовищах в принципі можливі автохвилі у вигляді вихорів. У них хвильовий фронт являє собою прямий циліндр, твірною якого є спіраль (рис. 2.1.17).

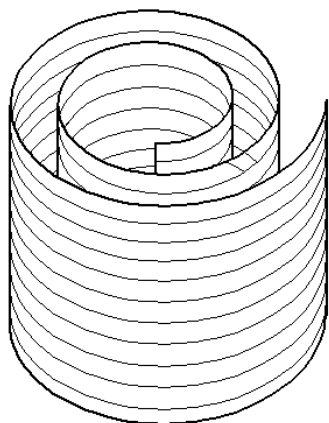


Рис.2.1.17. Хвильовий фронт вихору.

Але фронти автохвиль можуть мати й значно складнішу форму – наприклад, вісь вихору може бути скручена в кільце (так зване вихрове кільце). На великих відстанях від вихрового кільця фронт породженої ним хвилі буде сферичним.

2.1.2.11. Пейсмекери в середовищі з відновленням

В середовищах із відновленням експериментально спостерігаються також джерела концентричних хвиль – так звані пейсмекери, або провідні центри. Такі експерименти відомі, зокрема, для плівок розчинів, у яких протікає реакція Білоусова – Жаботинського⁵.

В літературі існує дві точки зору на механізм виникнення пейсмекерів у середовищах із відновленням. Одна з них полягає в тому, що джерелом концентричних хвиль є пара елементів середовища, які коливаються в протифазі та періодично збуджують один одного. Така ситуація в принципі можлива, якщо час рефрактерності буде меншим від часу перебування в збудженому стані.

Інша точка зору полягає в тому, що виникнення пейсмекерів пов'язане з локальними неоднорідностями середовища (домішки, бульбашки газу). В околі таких сторонніх включень елементи середовища спонтанно переходять в автоколивний режим.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.2

1. Якісно поясніть вигляд профілю температури для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням.

⁵ В залежності від режиму реакції такі розчини можуть описуватися як моделлю середовища з відновленням, так і моделлю автоколивного середовища (див. нижче п. 2.1.3).

2. Чим визначається максимальна концентрація інгібітору при поширенні біжучого імпульсу в середовищі з відновленням?
3. Як будується фазовий портрет для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням у випадку, коли дифузією інгібітору можна знехтувати?
4. Чому в середовищі з відновленням хвиля запалювання та хвиля гасіння, що формують біжучий імпульс, мають однакову швидкість?
5. Як зміниться профіль біжучого імпульсу при врахуванні дифузії інгібітору?
6. Чим визначається тривалість біжучого імпульсу?
7. У чому полягає якісна відмінність між солітонами Кортевега – де Вріза та біжучими імпульсами?
8. Порівняйте між собою залежності швидкості біжучого фронту в бістабільному середовищі та швидкості біжучого імпульсу в середовищі з відновленням від температури.
9. Як можна збудити періодичну хвилю в середовищі з відновленням?
10. Чому періодичні хвилі в середовищах із відновленням мають обмеження зверху на величину хвильового числа?
11. Як співвідносяться максимальні частоти хвиль у вигляді одиночної та потрійної спіралі в середовищах із відновленням?
12. У середовищі з відновленням навколо однакових отворів обертаються хвилі у вигляді одиночної та подвійної спіралей. Порівняйте частоти їхнього обертання.
13. Чи можливі пейсмекери в середовищах із відновленням?
14. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих імпульсів.
15. Чи залежать властивості хвиль у середовищах із відновленням від початкових та граничних умов? Як саме?

Задачі до підрозділу 2.1.2

2.1.2.1. Процес горіння, що супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \lambda n; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau},$$

де T – безрозмірна температура (відраховується від температури навколишнього середовища), n – концентрація інгібітору. Визначити умову, за якої рівняння описують середовище з відновленням (тобто система має єдиний стаціонарний однорідний розв'язок). При яких значеннях параметра T_0 від джерела високої температури побіжить хвиля запалювання?

2.1.2.2. Процес горіння, що супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \lambda n; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau},$$

де T – безрозмірна температура (відраховується від температури навколишнього середовища), n – концентрація інгібітору. Параметри рівняння відповідають розв'язку у вигляді біжучого імпульсу. Час релаксації інгібітору τ вважати великим. Як буде залежати швидкість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

2.1.2.3. Процес горіння, що супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \lambda n; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau},$$

де T – безрозмірна температура (відраховується від температури навколишнього середовища), n – концентрація інгібітору. Параметри рівняння відповідають розв'язку у вигляді біжучого імпульсу. Час релаксації інгібітору τ вважати великим. Як буде залежати мінімальна тривалість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

2.1.2.4. Спіральна хвиля в середовищі з відновленням обертається навколо отвору радіусу R . Знайти форму фронту хвилі для випадку, коли спіраль є подвійною. При якому мінімальному значенні R така спіраль ще буде прив'язана до отвору? Залежністю швидкості хвилі від кривини її фронту знехтувати.

2.1.2.5*. Підібрати числові значення коефіцієнтів і побудувати числовий розв'язок системи рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \frac{\partial n}{\partial x} - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Порівняти з результатом аналітичного розрахунку при $\tau \gg 1$, $D \rightarrow 0$.

2.1.2.6*. Побудувати числовий розв'язок системи рівнянь для середовища з відновленням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \frac{\partial n}{\partial x} - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

який відповідає періодичним хвилям. Скористатися періодичними за часом граничними умовами.

2.1.2.7*. Система рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням, має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - T \frac{\partial n}{\partial x} - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Числовими методами розрахувати швидкість стаціонарної хвилі в залежності від параметрів моделі.

2.1.2.8*. Для середовища з відновленням, описуваного системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - \beta n + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \end{cases}$$

побудувати нелінійну дисперсійну криву для періодичних коливань, користуючись числовими методами.

2.1.2.9*. Для середовища з відновленням, описуваного системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - T_0 \right) - \beta n + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \end{cases}$$

аналітично побудувати нелінійну дисперсійну криву для періодичних коливань, вважаючи величину $(\frac{1}{2} - T_0)$ малим параметром.

2.1.2.10*. Для двовимірного середовища з відновленням побудувати числовий розв'язок, що відповідає поширенню біжучого імпульсу від колового джерела. Побудувати залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняти її з результатом аналітичного розрахунку.

2.1.3. Автохвилі в автоколивних середовищах

Автоколивні середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних між собою автогенераторів. Прикладами таких середовищ можуть бути тонкі шари розчинів, у яких протікають реакції Білоусова-Жаботинського (хімічні реакції автокаталітичного типу, що супроводжуються періодичною зміною концентрації реагентів і, відповідно, забарвлення розчину), серцевий м'яз, що зазнає регулярних скорочень, та інші.

Якщо всі "елементарні генератори" коливаються з однаковою фазою, в автоколивному середовищі спостерігатимуться синфазні коливання в усьому просторі. Якщо фаза коливань змінюється в просторі, утворюються так звані фазові хвилі. Вони нагадують рекламу у вигляді біжучого рядка, коли зміна кольору локальних елементів рекламного щита створює ілюзію руху зображення як цілого.

2.1.3.1. λ - ω модель для автоколивного середовища

Для опису автоколивного середовища необхідно щонайменше два нелінійних кінетичних рівняння з дифузією вигляду (2.1.11).

Розглянемо автоколивне середовище, яке описується змінними $u=u(\mathbf{r},t)$, $v=v(\mathbf{r},t)$. Введемо замість них одну комплексну змінну $\eta=u+iv$. Нехай вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \lambda(\rho) \eta + i\omega(\rho) \eta + \mathcal{O}_1 - iD_2 \Delta \eta, \quad \rho = |\eta|. \quad (2.1.63)$$

Функція $\lambda(\rho)$ повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу $\rho=\rho_0$ (рис. 2.1.18). Функцію $\omega(\rho)$ вважатимемо додатною.

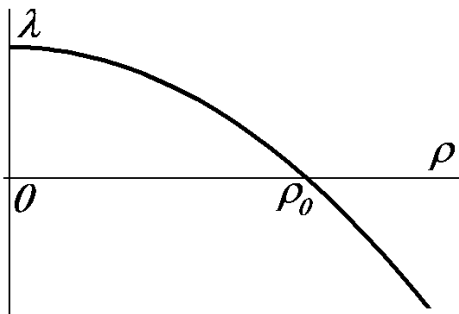


Рис. 2.1.18. Вигляд функції $\lambda(\rho)$.

Це так звана λ - ω модель, яка описує широкий клас автоколивних середовищ.

Частинним випадком λ - ω моделі є так зване узагальнене рівняння Гінзбурга-Ландау (це рівняння, запропоноване в 1950 році, описує поведінку надпровідника в магнітному полі в області температур поблизу точки переходу в надпровідний стан):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathcal{C}_1 + i\alpha_2 \bar{\eta} - \mathcal{B}_1 - i\beta_2 |\eta|^2 \eta + \mathcal{O}_1 - iD_2 \Delta \eta. \quad (2.1.64)$$

Воно зводиться до рівняння λ - ω моделі, якщо покласти $\lambda(\rho)=\alpha_1-\beta_1\rho^2$, $\omega(\rho)=\alpha_2-\beta_2\rho^2$.

Щоб з'ясувати властивості середовища, описуваного рівнянням (2.1.63), перейдемо від комплексної змінної до η чисто дійсних змінних ρ та φ , які вводяться із співвідношення $\eta=\rho \exp(i\varphi)$.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho \exp i\varphi] &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \exp i\varphi + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rho \exp i\varphi, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho \exp i\varphi] &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \exp i\varphi + 2i \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \exp i\varphi - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \exp i\varphi + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rho \exp i\varphi, \end{aligned}$$

і, отже,

$$\Delta [\rho \exp i\varphi] = \Delta \rho \exp i\varphi + 2i \nabla \rho \cdot \nabla \varphi \exp i\varphi - \rho \nabla \varphi^2 \exp i\varphi + i\rho \Delta \varphi \exp i\varphi. \quad (2.1.65)$$

Підставимо співвідношення $\eta = \rho \exp(i\varphi)$ з урахуванням (2.1.65) до (2.1.63), скоротимо на $\exp(i\varphi)$ і окремо прирівняємо до нуля дійсну та уявну частини отриманого виразу. Таким чином початкове комплексне рівняння (2.1.63) зводиться до системи двох чисто дійсних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda \rho + D_1 [\Delta \rho - \rho \nabla \varphi^2] + D_2 [2 \nabla \rho \cdot \nabla \varphi + \rho \Delta \varphi]; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega \rho + D_1 \left[\frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \varphi + \Delta \varphi \right] + D_2 \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} + \nabla \varphi^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.66)$$

Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (2.1.66). За умов $\partial \rho / \partial t = 0$, $\partial \rho / \partial x_i = 0$ воно зводиться до вигляду $\rho \lambda(\rho) = 0$, звідки $\rho_1 = 0$ або $\rho_2 = \rho_0$.

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (2.1.66) розв'язок у формі $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_{1,2} + \delta \rho \cdot \exp[\alpha t - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \quad (2.1.67)$$

та

$$\alpha_2 = \rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1 \quad (2.1.68)$$

(враховано, що $\lambda(\rho_0) = 0$). Оскільки $\lambda(0) > 0$, то перший корінь буде нестійким ($\alpha_1 > 0$, принаймні при невеликих k). Оскільки функція $\lambda(\rho)$ є монотонно спадною, тобто $d\lambda(\rho)/d\rho < 0$, то другий корінь, навпаки, завжди буде стійким ($\alpha_2 < 0$). Система релаксуватиме до стану $\rho = \rho_0$ за час

$$\tau_\rho = - \left[\rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \right]^{-1} \quad (2.1.69)$$

(при $k=0$).

Підставимо тепер корінь $\rho = \rho_0$ до другого рівняння системи (2.1.66). Оскільки $\omega(\rho_0) \neq 0$, то це рівняння взагалі не має однорідного стаціонарного розв'язку. За умови $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ воно набуває вигляду $d\varphi/dt = \omega(\rho_0) \equiv \omega_0$, звідки $\varphi(t) = \omega_0 t + \psi$. Відповідно комплексна змінна η набуває вигляду $\eta = \rho_0 \exp[i(\omega_0 t + \psi)]$.

Очевидно, цей розв'язок описує синфазні автоколивання аналізованого середовища.

Відзначимо, що використана при побудові цього розв'язку умова однорідності еквівалентна до умови відсутності зв'язку між сусідніми елементами середовища ($D_1 = D_2 = 0$). Отже, окремі елементи середовища являють собою автогенератори. Залежність $\omega(\rho)$ виражає закон неізохронності таких автогенераторів.

2.1.3.2. Рівняння для фазових хвиль

Будемо тепер шукати розв'язок рівняння (2.1.63) у формі

$$\eta(\vec{r}, t) = [\rho_0 + \delta \rho(\vec{r}, t)] \exp[i(\omega_0 t + \psi(\vec{r}, t))], \quad (2.1.70)$$

тобто вважати, що $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \delta \rho(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(t) = \omega_0 t + \psi(\mathbf{r}, t)$. Тоді система (2.1.66) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = \lambda(\rho_0 + \delta \rho) - \lambda(\rho_0) + D_1 [\Delta \delta \rho - \rho_0 \nabla \psi^2] + D_2 [2 \nabla \delta \rho \cdot \nabla \psi + \rho_0 \Delta \psi]; \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\omega(\rho_0 + \delta \rho) - \omega_0] + D_1 \left[\frac{2}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla \delta \rho \cdot \nabla \psi + \Delta \psi \right] + D_2 \left[\frac{\Delta \delta \rho}{\rho_0 + \delta \rho} + \nabla \psi^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.71)$$

Вважаючи, що $|\delta \rho| \ll \rho_0$, знехтуємо $\delta \rho$ всюди в першому з рівнянь системи (2.1.71), крім першого доданку в правій частині. Тут функцію $\lambda(\rho_0 + \delta \rho)$ розкладемо в ряд Тейлора і скористаємося позначенням (2.1.69). Отримаємо:

$$-\frac{\delta\rho}{\tau_\rho} - D_1\rho_0 \nabla\psi^2 + D_2\rho_0\Delta\psi = 0 \quad (2.1.72)$$

(зроблене є справедливим, якщо формально вважати величину τ_ρ малою того ж порядку, що й $\delta\rho$, тобто припустити, що час релаксації амплітуди коливань є малим). Тоді з (2.1.72) можна записати $\delta\rho$ як функцію ψ :

$$\delta\rho = \rho_0\tau_\rho \left[-D_1 \nabla\psi^2 + D_2\Delta\psi \right]. \quad (2.1.72 \text{ a})$$

У другому рівнянні системи (2.1.71) в першому доданку у правій частині розкладемо $\omega(\rho_0+\delta\rho)$ в ряд Тейлора, а всіма іншими доданками, пропорційними $\delta\rho$, знехтуємо. Отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\omega}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \delta\rho + D_1\Delta\psi + D_2 \nabla\psi^2 \quad (2.1.73)$$

(виконані дії є законними, якщо вважати величину $d\omega/d\rho$ великим параметром; це означає, що автогенератори, які є елементарними комірками досліджуваного активного середовища, характеризуються сильною неізохронністю). Нарешті, підставимо вираз (2.1.72 a) для $\delta\rho$ до (2.1.73) і остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a \nabla\psi^2 + b\Delta\psi, \quad (2.1.74)$$

де введено позначення

$$a = D_2 + D_1 \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad b = D_1 - D_2 \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (2.1.75)$$

(в силу зроблених вище припущень і чисельник, і знаменник других доданків у правих частинах формул (2.1.75) є великими параметрами, так що в результаті ці доданки сумірні з першими доданками).

Можна показати, що для рівняння Гінзбурга–Ландау (2.1.64) коефіцієнти a та b мають вигляд $a = -b_2(D_1+D_2)/\beta_1$, $b = \beta_2 D_2/\beta_1 + D_1$.

Рівняння (2.1.74) описує фазові хвилі в автоколивному середовищі. Воно є навіть більш загальним у порівнянні з початковим рівнянням (2.1.63).

Користуючись (2.1.74), оцінимо час релаксації фази ψ . Припустимо, що $|\nabla\psi| \sim \psi/L$, $\Delta\psi \sim \psi/L^2$, де L – характерний розмір, на якому фаза ψ помітно змінюється. Припустимо також, що $|\psi| \ll 1$. Тоді (2.1.74) можна переписати у формі

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx a \frac{\psi^2}{L^2} + b \frac{\psi}{L^2} \approx b \frac{\psi}{L^2} \quad (2.1.74 \text{ a})$$

(ми відкинули доданок другого порядку малізми за ψ). Тоді час релаксації фази можна оцінити як

$$\tau_\psi = \frac{L^2}{b}. \quad (2.1.76)$$

Рівняння (2.1.74) отримане за умови, що час релаксації амплітуди τ_ρ є малим. Фактично це означає, що $\tau_\rho \ll \tau_\psi$, або

$$L \gg \sqrt{b\tau_\rho} \quad (2.1.77)$$

(у правій частині нерівності стоїть довжина дифузії фази ψ за час τ_ρ для лінеаризованого рівняння (2.1.74)).

Таким чином, у рамках λ – ω моделі рівнянням (2.1.74) можна користуватися лише для опису достатньо довгих хвиль.

2.1.3.3. Синфазні автоколивання

Перейдемо тепер до аналізу ефектів, описуваних рівнянням (2.1.74). Перейдемо від фази ψ до нової функції Q , пов'язаної з фазою співвідношенням

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{b}{a} \ln Q(\vec{r}, t). \quad (2.1.78)$$

Маємо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (2.1.79)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln Q \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 1 \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

тому

$$\nabla \psi = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q, \quad \Delta \psi = \frac{b}{a} \left[-\frac{1}{Q^2} \nabla Q^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right]. \quad (2.1.80)$$

Підставивши (2.1.79) та (2.1.80) до (2.1.74), можна отримати:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} = a \left(\frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q \right)^2 + \frac{b^2}{a} \left[-\frac{1}{Q^2} \nabla Q^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right], \quad (2.1.81)$$

і остаточно

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b \Delta Q. \quad (2.1.81 \text{ a})$$

При $b > 0$ (2.1.81 a) являє собою звичайне рівняння дифузії. Будь-яка локальна неоднорідність з масштабом L розсмоктується і зникає за час порядку L^2/b . В середовищі встановлюється режим $Q = \text{const}$, або $\psi = \text{const}$, якому відповідають синфазні автоколивання (див. вище п. 2.1.3.1).

2.1.3.4. Біжучі фазові хвилі

Розглянемо тепер функцію

$$\psi(\vec{r}, t) = -\vec{k} \cdot \vec{r} + ak^2 t. \quad (2.1.82)$$

Безпосередня підстановка показує, що вона задовольняє рівняння (2.1.74). Тоді комплексна функція η матиме вигляд:

$$\eta(\vec{r}, t) = \rho_0 \exp[i\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r} + iak^2 t] = \rho_0 \exp\left[i\left[\omega_0 + ak^2 t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right]\right], \quad (2.1.83)$$

тобто в автоколивному середовищі поширюється фазова хвиля, що характеризується законом дисперсії $\omega(k) = \omega_0 + ak^2$ та фазовою швидкістю $v_{ph} = \omega/k = \omega_0/k + ak$.

Розв'язок (2.1.82) стійкий, якщо $b > 0$.

2.1.3.5. Взаємодія двох біжучих фазових хвиль

Проаналізуємо взаємодію двох фазових хвиль у найпростішій одновимірній моделі. Будемо вважати, що обидві хвилі поширюються в зустрічних напрямках уздовж осі x , причому $\psi(x, t) \rightarrow ak_1^2 t - k_1 x$ при $x \rightarrow -\infty$ і $\psi(x, t) \rightarrow ak_2^2 t - k_2 x$ при $x \rightarrow +\infty$.

Знову скористаємося змінною Q , введеною співвідношенням (2.1.78). Рівнянню (2.1.81 a) для цієї змінної відповідає розв'язок у вигляді:

$$Q(x, t) = A_1 \exp\left[-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t\right] + A_2 \exp\left[\frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t\right]. \quad (2.1.84)$$

Покажемо, що він справді задовольняє записаним вище граничним умовам. Справді, якщо показник першої експоненти в (2.1.84) значно більший від показника другої експоненти, тобто

$$-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t \gg \frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t, \quad (2.1.85)$$

то другою експонентою взагалі можна знехтувати, і для фази ψ можна записати вираз

$$\psi(x, t) \approx -k_1 x + a k_1^2 t, \quad (2.1.86)$$

що буде справедливим в області

$$x \ll at \ll \frac{1}{k_1 - k_2}. \quad (2.1.85 \text{ а})$$

Отже, в цій області (ліва піввісь x) існує фазова хвиля з хвильовим числом k_1 і частотою $\omega(k_1)$, яка біжить праворуч. В протилежному випадку, тобто при

$$x \gg at \gg \frac{1}{k_1 - k_2}, \quad (2.1.87)$$

можна записати, що

$$\psi(x, t) \approx k_2 x + a k_2^2 t. \quad (2.1.88)$$

Таким чином, в області, що задовольняє умові (2.1.87), тобто на правій півосі x , існує фазова хвиля з хвильовим числом k_2 і частотою $\omega(k_2)$, яка біжить ліворуч.

За межу між областями, зайнятими різними хвилями, природно прийняти точку $x = at(k_1 - k_2)$. Ширина цієї межі може бути визначена з умови, щоб різниця показників експонент в (2.1.84) при $t=0$ склала величину порядку одиниці:

$$\delta x \sim \frac{b}{a(k_1 + k_2)}. \quad (2.1.89)$$

Межа між областями, зайнятими різними хвилями, рухається зі швидкістю

$$V = \frac{dx}{dt} = a(k_1 - k_2) \quad (2.1.90)$$

праворуч, якщо $k_1 > k_2$, чи ліворуч, якщо $k_1 < k_2$. Іншими словами, коротші фазові хвилі поступово витісняють довші хвилі.

Цей результат неодноразово спостерігався в числових та натурних експериментах.

2.1.3.6. Пейсмекери

Пейсмекерами називають джерела концентричних фазових хвиль.

У лабораторних експериментах пейсмекери, придушені за рахунок впливу коротших фазових хвиль, після припинення впливу знову виникали на тому самому місці. Це дає підстави вважати, що причиною виникнення пейсмекерів є деякі локальні неоднорідності середовища.

Спробуємо описати виникнення пейсмекера в рамках λ - ω моделі. Для цього розглянемо двовимірне неоднорідне середовище, в якому $\omega_0 = \omega_0(r)$ (r – радіус у полярній системі координат). Нехай неоднорідність зосереджена в області з характерними розмірами r_0 поблизу початку координат, так що $\omega_0(r \rightarrow \infty) = \omega_\infty$ і $\omega_0(r \leq r_0) = \omega_\infty + \delta\omega$ (рис. 2.1.19). Тоді, врахувавши в (2.1.63) залежність $\omega_0(r)$, поклавши $\varphi(r, t) = \omega_\infty t + \psi(r, t)$ і виконавши перетворення, аналогічні до розглянутих у п. 2.1.3.2, можна отримати аналог рівняння для фазових хвиль (2.1.74), що враховує неоднорідність середовища:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0(r) - \omega_\infty + a \nabla^2 \psi + b \Delta \psi. \quad (2.1.91)$$

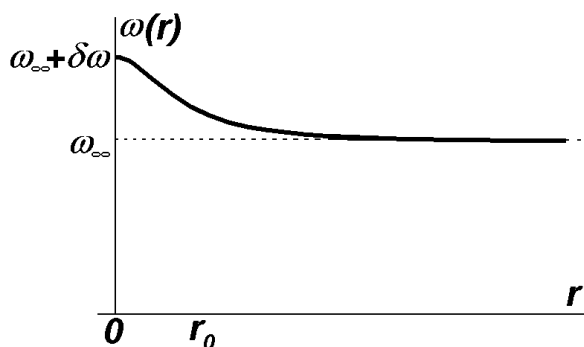


Рис. 2.1.19. Радіальна залежність частоти автоколиваний в області виникнення пейсмекера.

Можна твердити, що (2.1.91) еквівалентне до рівняння для λ - ω моделі при

$$r_0 \gg \sqrt{b\tau_p} \quad (2.1.92)$$

(пор. з (2.1.77)).

Знову скористаємося заміною (2.1.78). Тоді з (2.1.91) можна отримати аналог рівняння (2.1.81 а) у формі

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b\Delta Q + \frac{a}{b}[\omega_0 r - \omega_\infty]Q. \quad (2.1.93)$$

Формально рівняння (2.1.93) еквівалентне нестационарному рівнянню Шрьодінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi, \quad (2.1.93 \text{ а})$$

яке описує рух частинки в полі із заданим потенціалом $U(r)$. Рівняння (2.1.93 а) переходить у (2.1.93), якщо зробити заміни

$$\Psi \rightarrow Q, \quad \frac{i}{\hbar}t \rightarrow t, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U r = -\frac{a}{b}[\omega_0 r - \omega_\infty]. \quad (2.1.94)$$

У розглядуваній моделі в області $r \leq r_0$ маємо $\omega_0(r) > \omega_\infty$. В термінах квантової механіки це означає виникнення потенціальної ями – області, в якій $U(r) < 0$.

Рівняння Шрьодінгера (2.1.93 а) має загальний розв'язок

$$Q(r, t) = \sum_n C_n e^{\lambda_n t} \mu_n(r), \quad (2.1.95)$$

де λ_n і μ_n – відповідно власні числа і власні функції для рівняння

$$b\Delta \mu_n + \frac{a}{b}[\omega_0 r - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n, \quad (2.1.96)$$

яке легко отримати підстановкою (2.1.95) до (2.1.93 а).

Додатні значення λ_n в квантово-механічній задачі відповідають зв'язаним станам частинки в потенціальній ямі. Від'ємні значення утворюють суцільний спектр, але вони неістотні, бо відповідні експоненти в (2.1.95) швидко згасають.

Оскільки в аналізованому випадку $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то в розв'язку (2.1.95) існує власне значення $\lambda_0 = 0$ і відповідна власна функція $\mu_0(r)$.

Для будь-якого зв'язаного стану частинки в потенціальній ямі хвильова функція експоненціально спадає на великих відстанях від ями, тобто при $r \gg r_n$

$$\mu_n(r) \sim \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad r_n = \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}. \quad (2.1.97)$$

Зокрема, для $\lambda_0 = 0$ при $r \gg r_0$ маємо $\mu_0 \approx 1$, де r_0 – розмір потенціальної ями.

Нехай у потенціальній ямі є всього один зв'язаний стан, тобто існує лише одне додатне власне значення λ_1 , якому відповідає власна функція μ_1 . Тоді, нехтуючи згасаючим внеском від суцільного спектра, отримаємо при $r \gg r_0$:

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left\{ C_0 + C_1 \exp \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right] \right\}. \quad (2.1.98)$$

Цей розв'язок описує пейсмеркер, що народжується. Справді, якщо

$$\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \gg 1, \quad (2.1.99)$$

або

$$r < R \quad t = \sqrt{\lambda_1 b} \quad t, \quad (2.1.100)$$

то константою C_0 можна знехтувати поруч із експонентою, і (2.1.98) набуває вигляду:

$$\psi(r, t) \approx \frac{b}{a} \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right]. \quad (2.1.98 \text{ а})$$

Розв'язок (2.1.98 а) описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_{\infty} + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad (2.1.101)$$

і хвильовим числом

$$k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad (2.1.102)$$

що розходяться від центру. Чим глибша яма, тим більша λ_1 і, як випливає з (2.1.101)-(2.1.102), тим вища частота і менша довжина хвилі.

Навпаки, при $r > R(t)$ $\varphi \approx \text{const}$, тобто ця область залишається незбуреною (в ній існують синфазні автоколивання з частотою ω_{∞}).

Область, зайнята фазовими хвилями, розширюється з радіальною швидкістю

$$V_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{\lambda_1 b}. \quad (2.1.103)$$

Якщо в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних станів, картина істотно не зміниться. Треба лише замінити λ_1 на максимальне власне число λ_n .

В одно- і двовимірному випадку будь-яка яма (навіть дуже неглибока) містить хоча б один зв'язаний стан. Отже, як завгодно мале додатне збурення $\delta\omega$ породжує пейскекер. У тривимірному випадку зв'язаний стан з'являється лише для достатньо глибоких потенціальних ям, тобто за виконання умови

$$\delta\omega \gg \frac{b^2}{ar_0^2} \quad (2.1.104)$$

(чим більший радіус ями r_0 , тим менша „критична глибина” $\delta\omega_{\text{кр}}$, необхідна для виникнення пейскекера). При невиконанні умови (2.1.104) пейскекер не виникає.

Виконаний розрахунок справедливий лише тоді, коли радіус локалізації r_n (2.1.97) задовольняє умові (2.1.77), тобто при $\lambda_n \ll 1/\tau_p$, інакше рівняння для $\lambda-\omega$ моделі не зводиться до рівняння для фазових хвиль. Оскільки завжди

$$\lambda_n \leq \frac{a}{b} \delta\omega, \quad (2.1.105)$$

(максимальне власне значення λ_n обмежене глибиною потенціальної ями), отримаємо:

$$\delta\omega_{\text{max}} \ll \frac{b}{a\tau_p}, \quad (2.1.106)$$

тобто виконаний розрахунок справедливий лише для помірних збурень автоколивного середовища.

Як уже говорилося, при зіткненні двох фазових хвиль із різними хвильовими числами відбувається їх повне взаємне погашення, а межа рухається в напрямку області, заповненої довшими хвилями. Це означає, що за наявності двох пейскекерів у результаті конкуренції між ними врешті-решт перемаже той, якому відповідають найкоротші хвилі (найглибша яма).

2.1.3.7. Спіральні хвилі в автоколивних середовищах

В автоколивних середовищах можуть виникати також джерела спіральних хвиль – так звані ревербератори.

Зовні спіральні хвилі в автоколивних середовищах нагадують спіральні хвилі в середовищах із відновленням (див. п. 2.1.2.7): у них також можна виділити ядро, а на великих віддальх від нього вони мають форму архімедової спіралі (зі сталим кроком). Амплітуда збурення при поширенні такої хвилі дорівнює нулеві в центрі і прямує до сталої величини при віддаленні від нього. Але розміри ядра (тобто області, де амплітуда ще не досягла граничної величини) тепер будуть малими – порядку дифузійної довжини $(b\tau_p)^{1/2}$, де коефіцієнт b визначається формулою (2.1.75), а час релаксації амплітуди τ_p – формулою (2.1.69). Таким чином, для аналізу спіральних хвиль в автоколивному середовищі не можна користуватися рів-

нянням для фазових хвиль (2.1.74), а необхідно звертатися безпосередньо до базового рівняння (2.1.63).

Для простоти обмежимося випадком, коли $D_2=0$ (нижче позначатимемо $D \equiv D_1$). Тоді в полярних координатах r, θ шукатимемо розв'язок рівняння (2.1.63) у формі:

$$\eta = \rho r \exp[i\varphi(r, \theta, t)], \quad \varphi(r, \theta, t) = \omega t + \theta - \chi(r), \quad (2.1.107)$$

де ω – частота спіральної хвилі, а функція $\chi(r)$ визначає форму спіралі.

Підставивши (2.1.107) до (2.1.63) та прирівнявши до нуля окремо дійсну та уявну частини отриманого виразу, можна отримати систему двох рівнянь для невідомих функцій $\rho(r)$ та $\chi(r)$:

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[\frac{\lambda \rho}{D} - \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right] = 0; \quad (2.1.108)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{\omega - \omega \rho}{D} = 0. \quad (2.1.109)$$

З умови скінченності величин ρ та $d\chi/dr$ при $r \rightarrow 0$ можна записати граничні умови для цих функцій:

$$\rho(r \rightarrow 0) \sim r, \quad \left. \frac{d\chi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.1.110)$$

Крім того, слід вимагати виконання умови

$$\rho(r \rightarrow \infty) = \text{const} \equiv \rho_\infty \quad (2.1.111)$$

(на нескінченості амплітуда хвилі повинна залишатися обмеженою). Тоді з (2.1.108) відразу випливає, що при $r \rightarrow \infty$ виконуватиметься співвідношення

$$\chi(r \rightarrow \infty) = k_\infty r, \quad k_\infty = \pm \sqrt{\frac{\lambda \rho_\infty}{D}}, \quad (2.1.112)$$

тобто на великих відстанях від ядра спіраль справді буде архімедовою. Два знаки в (2.1.112) відповідають двом різним напрямкам закручування спіралі. В свою чергу, з (2.1.109) випливає, що частота спіральної хвилі визначається співвідношенням

$$\omega = \omega \rho_\infty. \quad (2.1.113)$$

Щоб знайти величину ρ_∞ , необхідно розв'язати систему рівнянь (2.1.108)-(2.1.109). Це вдається зробити аналітично, якщо залежність $\omega(\rho)$ є слабкою. Запишемо її у формі

$$\omega \rho = \omega_0 + \varepsilon \rho_0 - \rho, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (2.1.114)$$

де, як і в п. 2.1.3.1, величина ρ_0 задовольняє умові $\lambda(\rho_0)=0$, і $\omega_0 \equiv \omega(\rho_0)$.

В нульовому наближенні за малим параметром ε частота спіральної хвилі $\omega = \omega_0$. Тоді з (2.1.113) випливає, що $\rho_\infty = \rho_0$, а з (2.1.112) – що $k_\infty = 0$ (взагалі, з (2.1.109) випливає, що в цьому наближенні $d\chi/dr=0$). Отже, відповідно до (2.1.107), у даному випадку спіраль вироджується в промінь, що обертається навколо деякої точки з частотою ω_0 .

Тоді залежність $\rho(r)$ можна знайти з рівняння (2.1.108), яке тепер набуває вигляду

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[\frac{\lambda \rho}{D} - \frac{1}{r^2} \right] = 0. \quad (2.1.115)$$

Його можна розв'язати аналітично, задавши модельну функцію $\lambda(\rho)$:

$$\lambda \rho = \frac{D \rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^4} - \frac{4\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^4} \quad (2.1.116)$$

(рис. 2.1.20 а). Видно, що ця апроксимація якісно правильно описує поведінку функції $\lambda(\rho)$ на проміжку $0 \leq \rho < 2\rho_0$ (пор. з рис. 2.1.18).

Безпосередня підстановка показує, що рівняння (2.1.115) з граничними умовами (2.1.110)-(2.1.111) та функцією $\lambda(\rho)$ (2.1.116) задовольняє розв'язок

$$\rho r = \frac{\rho_0 r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (2.1.117)$$

(рис. 2.1.20 б).

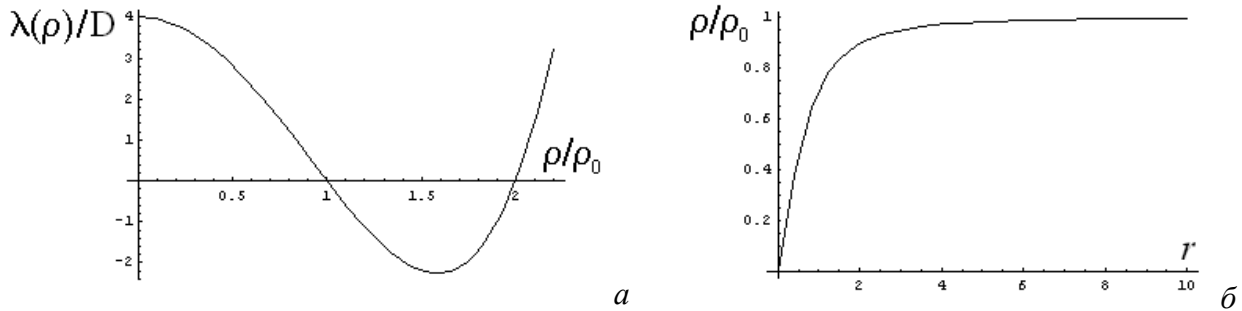


Рис. 2.1.20. Графіки модельної функції $\lambda(\rho)$ (а) та відповідного їй розв'язку $\rho(r)$ (б).

Врахування наступних наближень дозволяє в явному вигляді знайти невідомі величини ρ_∞ , k_∞ та ω .

Відзначимо, що в автоколивних середовищах, на відміну від середовищ із відновленням, багаторукавні спіральні хвилі виявляються нестійкими.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.3

1. Коли синхронні коливання у середовищах, описуваних λ - ω моделлю, є стійкими щодо збурень?
2. Який фізичний зміст функцій $\lambda(\rho)$ та $\omega(\rho)$ в рівнянні для λ - ω моделі?
3. Які припущення використовуються при виведенні рівняння для фазових хвиль?
4. Чи можна описувати короткі хвилі в автоколивному середовищі за допомогою рівняння для фазових хвиль?
5. Дайте фізичну інтерпретацію фазовим хвилям.
6. Чи існують фізичні обмеження на швидкість фазових хвиль?
7. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до фазових хвиль.
8. Якісно опишіть механізм виникнення пейсмерів.
9. опишіть часову еволюцію фазових хвиль в автоколивному середовищі, яке має два локальні максимуми для частоти локальних автоколивань.
10. Як властивості локального збурення впливають на характеристики відповідного пейсмерера?
11. Чи можливі спіральні хвилі в автоколивному середовищі?

Задачі до підрозділу 2.1.3

2.1.3.1. Знайти нелінійне дисперсійне рівняння для гармонічних фазових хвиль безпосередньо з нелінійного кінетичного рівняння з дифузиею λ - ω моделі. При якій мінімальній довжині ці хвилі ще можуть існувати?

2.1.3.2. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузиею для середовищ автоколивного типу (λ - ω модель) має вигляд

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathbf{L}(\rho) \eta + i\omega(\rho) \eta + \mathbf{O}_1 - iD_2 \Delta \eta,$$

де $\rho = |\eta|$, $\lambda(\rho)$ – монотонно спадна функція, така, що $\lambda(\rho_0) = 0$, $\omega(\rho)$ – довільна функція, D_1 та D_2 – сталі. Середовище неоднорідне: $\rho_0 = \rho_0(r)$, причому виконується умова $\rho_0(r \rightarrow \infty) = \rho_\infty$.

2.1.3.3. Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

2.1.3.4. Користуючись рівнянням для фазових хвиль у двовимірному автоколивному середовищі, дослідити взаємодію двох зустрічних фазових хвиль, хвильові вектори яких не є паралельними.

2.1.3.5. Узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау має вигляд:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \alpha_1 + i\alpha_2 \bar{\eta} - \beta_1 + i\beta_2 |\eta|^2 \eta + \gamma_1 + iD_2 \Delta \eta$$

(функція η комплексна, всі параметри дійсні). Знайти рівноважні значення амплітуди та частоти локальних автоколивань і характерний час релаксації амплітуди. Побудувати графік неізохронності локальних автоколивань.

2.1.3.6*. Користуючись рівнянням Гінзбурга-Ландау, дослідити числовими методами плоскі фазові хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

2.1.3.7*. Користуючись рівнянням Гінзбурга-Ландау, дослідити числовими методами поведінку пейсмейкера, який породжує хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

2.1.3.8*. Для рівняння Гінзбурга-Ландау числовими методами побудувати розв'язок, що відповідає спіральній хвилі. Дослідити поведінку багаторукавних спіралей.

2.1.3.9*. Побудувати клітинний автомат із елементарними комірками правильної шестикутної форми. Для автоколивного середовища змоделювати на ньому пейсмейкер та спіральну хвилю.

Контрольні питання до розділу 2.1

1. Назвіть особливості автохвильових процесів порівняно з іншими типами хвиль.
2. Назвіть загальні властивості середовищ, у яких можуть мати місце автохвильові процеси.
3. Як пов'язані властивості середовищ із типами автохвильових процесів, що можливі в цих середовищах?

2.2. Стационарні дисипативні структури

Стационарні дисипативні структури – це структури, які виникають у первісно однорідному середовищі, причому їхні властивості слабо залежать від початкових та граничних умов. Вище вже побіжно розглядалися такі структури на прикладі одновимірних стаціонарних станів у бруселяторі (див. п. 1.3.3.4). Але бруселятор – це лише зручна модельна система. У цьому підрозділі ми розглянемо реальні приклади стаціонарних дисипативних структур та механізми їхнього виникнення. Такі механізми можна умовно розділити на дві великі групи: це розподілений зворотний зв'язок та насичення аперіодичної нестійкості.

2.2.1. Дисипативні структури, обумовлені розподіленим зворотним зв'язком

Ми зустрічалися з формуванням структур (доменів), коли розглядали бістабільне середовище з $\Phi(u_1) = \Phi(u_3)$ (див. п. 2.1.1.7). Але там властивості доменів цілком визначалися початковими умовами, що не зовсім типово. Розглянута в п. 2.1.1.7 структура перебуває у стані байдужої рівноваги, який не відновлюється після збурень.

Більш характерним прикладом системи, в якій утворюється дисипативна структура, може служити баретер – пристрій, який на зорі розвитку радіоелектроніки використовувався як стабілізатор струму. Розглянемо принцип його роботи.

2.2.1.1. Баретер: принцип дії

Баретер являє собою залізна нитка, що вміщена в атмосферу водню й нагрівається електричним струмом. З експерименту відомо, що питомий опір такої нитки нелінійно залежить від температури (рис. 2.2.1). Для простори апроксимуємо цю залежність ступінчастою функцією.

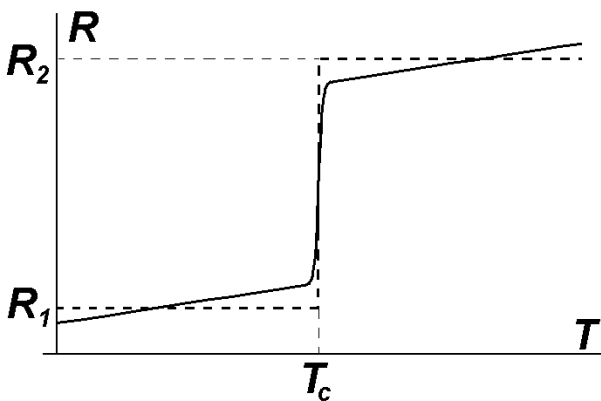


Рис. 2.2.1. Залежність питомого опору залісної нитки, вміщеної в атмосферу водню, від температури (суцільна лінія) та її апроксимація (штрихова лінія)

Температура в деякій точці нитки визначається виділенням тепла струмом, теплообміном з навколишнім середовищем та теплопровідністю самої нитки. Тому кінетичне рівняння для нитки має вигляд:

$$c \frac{dT}{dt} = f(x) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.2.1)$$

де

$$f(x) \equiv I^2 R(x) - \gamma(x) - T_0 \equiv Q_+ - Q_-, \quad (2.2.2)$$

кінетична функція, c – погонна теплоємність нитки (на одиницю довжини), κ – теплопровідність, T_0 – температура навколишнього середовища. Вигляд кінетичної функції для різних значень струму показано на рис. 2.2.2.

Розглянемо спочатку випадок, коли струм через дротину підтримується сталим. В інтервалі між деякими крайніми значеннями I_{\min} та I_{\max} система має два стійкі стани – з низькою (T_1) та з високою (T_2) температурою. Перехід між станами відбувається у вигляді хвилі перекидання, що витісняє (в залежності від параметрів) низькотемпературну (або, що те са-

ме, низькоомну) чи високотемпературну (високоомну) область. Це визначається, як вказува-
лося вище (див. п. 2.1.1.5), знаком інтеграла

$$\Delta\Phi = \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT.$$

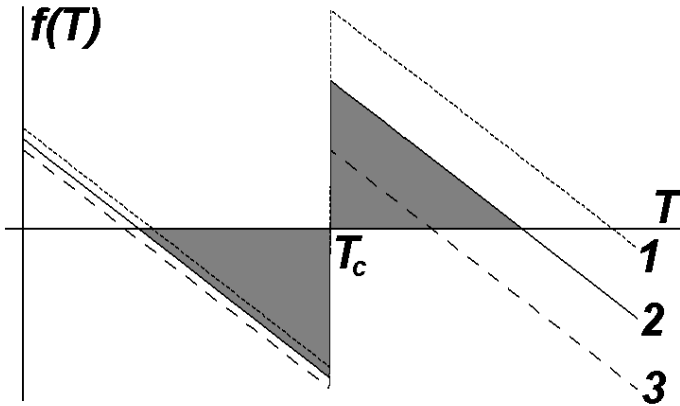


Рис. 2.2.2. Кінетична функція рівняння (2.2.1) для різних значень струму: $I_1 > I_2 = I_{cr} > I_3$.

При $\Delta\Phi > 0$ встановлюється стан з температурою T_2 , при $\Delta\Phi < 0$ – стан з температурою T_1 , при $\Delta\Phi = 0$ хвиля перекидання не поширюється.

Нехай тепер підтримується не струм через нитку, а напруга U на її кінцях. Тепер струм через нитку визначається формулою

$$I = \frac{U}{\int_0^l R(T(x)) dx}, \quad (2.2.3)$$

де l – довжина нитки.

Нехай $\Delta\Phi = 0$ для деякого $I = I_{cr}$ (рис. 2.2.2). Розглянемо спершу випадок $I > I_{cr}$. Тоді $\Delta\Phi > 0$. Це приводить до того, що на дротині від флуктуації з'являється високотемпературна (і, відповідно, високоомна) область, яка починає розширюватися. При цьому опір нитки зростає і, відповідно, струм через нитку зменшуватиметься, доки не встановиться значення $I = I_{cr}$ і хвиля перекидання не зупиниться. В результаті встановиться рівновага між ділянками з температурами T_1 і T_2 . Те саме буде, якщо в початковий момент часу виконувалася умова $I < I_{cr}$. При зміні напруги U в деяких межах розміри високотемпературної та низькотемпературної ділянок змінюватимуться, але струм залишатиметься рівним I_{cr} . Це явище називається баретуванням. Відповідно баретер являє собою стабілізатор струму.

2.2.1.2. Розрахунок характеристик дисипативної структури

Нехай довжини ділянок з T_1 і T_2 значно більші від ширини перехідного шару. Тоді формулу (2.2.3) можна переписати у формі

$$I = \frac{U}{R_2 l_2 + R_1 l_1}, \quad (2.2.3 \text{ a})$$

де $R_2 = R(T_2)$, $R_1 = R(T_1)$, $l_1 + l_2 = l$, l_1 і l_2 – довжини ділянок з температурами T_1 і T_2 . Оскільки в стаціонарному режимі $I = I_{cr}$, маємо:

$$\frac{U}{I_{cr}} = R_2 l_2 + R_1 (l - l_2),$$

звідки

$$l_2 = \frac{\frac{U}{I_{cr}} - R_1 l}{R_2 - R_1} \quad (2.2.4)$$

Отже, стаціонарна дисипативна структура виникає при $U_{\min} < U < U_{\max}$, де $U_{\min} = I_{cr} R_1 I$, $U_{\max} = I_{cr} R_2 I$.

На нитці не обов'язково має бути одна високотемпературна ділянка. Їх може бути багато (це визначається початковими умовами), але їхня сумарна довжина задається співвідношенням (2.2.4).

Головна причина виникнення дисипативної структури в баретері – наявність, крім локальної взаємодії, далекодіяного зворотного зв'язку. Він виявляється в тому, що при фіксованій прикладеній напрузі сила струму в кожній точці дротини залежить від стану всіх інших її точок (див. формулу (2.2.3)).

2.2.1.3. Утворення вогнища горіння

Нехай у реакторі обмеженого об'єму відбувається горіння деякої речовини. Нехай його коефіцієнт дифузії перевищує теплопровідність так, що за рахунок дифузії концентрація пального підтримується однаковою в усіх точках. Нехай пальне надходить у реактор зі сталою швидкістю Q . Тоді процес горіння описується рівняннями.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = nq T - \gamma T - T_0 + \kappa \Delta T; \\ \frac{dn}{dt} = w - n \int Q T(\vec{r}) d\vec{r}. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Тут n – концентрація пального (вважаємо, що швидкість дифузії пального велика, тому $n(\mathbf{r}) = \text{const}$), $q(T)$ – тепловиділення на одиницю маси пального, $Q(T)$ – швидкість зменшення пального при горінні (інтегрування здійснюється по всьому об'єму реактора). Обидві ці функції мають вигляд розмитої сходинок (рис. 2.2.3).

Нехай пальне в деякій точці реактора підпалене. Спершу зона горіння буде розширюватись. Але це приведе до збільшення втрат пального і, відповідно до зменшення його концентрації. Останнє, в свою чергу, сповільнить поширення фронту горіння. При деякому $n = n_{cr}$ цей фронт зупиниться, і виникне стаціонарна дисипативна структура – вогнище горіння. За інших початкових умов замість одного вогнища може виникнути кілька менших.

Як і в попередньому випадку, причиною виникнення вогнища горіння є розподілений зворотний зв'язок у системі – концентрація пального в кожній точці системи, як впливає з другого рівняння системи (2.2.5), залежить від стану всіх інших точок.

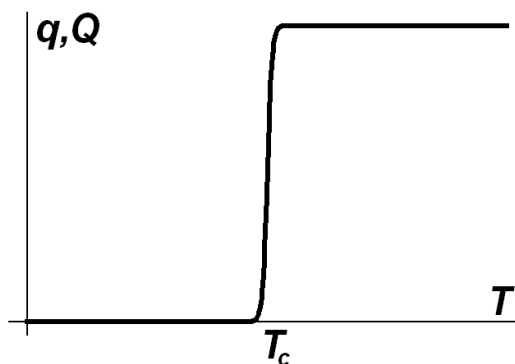


Рис. 2.2.3. Вигляд функцій, що характеризують тепловиділення та втрати пального при горінні.

2.2.1.4. Властивості дисипативних структур, обумовлених розподіленим зворотним зв'язком

Наведені приклади ілюструють основні властивості дисипативних структур, що виникають внаслідок існування в активному середовищі розподіленого зворотного зв'язку.

- Дисипативна структура – це стійке утворення, форма і розміри якого відновлюються після малих збурень. Можна сказати, що це певний стійкий стан розподіленої системи.
- Кожен такий стан характеризується певною областю притягання.

– Одна й та сама система може породжувати багато різних дисипативних структур, реалізація яких залежить від початкових умов.

Контрольні питання до підрозділу 2.2.1

1. Опишіть якісно механізм стабілізації струму в баретері.
2. З яких міркувань можна визначити величину струму, що підтримується в баретері при обмеженій зміні прикладеної напруги?
3. Як можна збільшити діапазон прикладених напруг, у якому баретер стабілізує струм?
4. Наведіть декілька (не менше трьох) прикладів дисипативних структур, виникнення яких обумовлене розподіленим зворотним зв'язком.

Задачі до підрозділу 2.2.1

2.2.1.1. Залежність погонного опору дротини баретера від температури має вигляд

$$R(T) = [R_1 + R_2 \Theta(T - T_c)] (1 + \alpha T),$$

де $\Theta(x)$ – функція Хевісайда. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузією має вигляд:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = I^2 R(T) - \gamma(T - T_0) + D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Знайти критичний струм та межі напруг, при яких має місце стабілізація струму, якщо довжина дротини баретера – L .

2.2.1.2. Горіння в реакторі, що має форму плоского шару, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi \Delta T; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_v Q(T, \vec{r}) d\vec{r},$$

де T – температура в даній точці реактора, T_0 – температура стінки реактора (підтримується сталюю), n – концентрація пального (вважається однорідною в усьому об'ємі реактора), W – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу, $q(T)$ – кількість теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при температурі T , $Q(T)$ – кількість пального, що витрачається за одиницю часу при горінні при температурі T , γ та χ – сталі. Вважаючи, що

$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c),$$

де $\Theta(x)$ – функція Хевісайда, $T_c > T_0$, визначити температуру в стаціонарному вогнищі горіння та об'єм цього вогнища.

2.2.1.3*. Горіння в одновимірному реакторі описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_{\vec{r}} Q(T, \vec{r}) d\vec{r},$$

де T – температура в даній точці реактора, T_0 – температура стінки реактора (підтримується сталюю), n – концентрація пального (вважається однорідною в усьому об'ємі реактора), W – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу, $q(T)$ – кількість теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при температурі T , $Q(T)$ – кількість пального, що витрачається за одиницю часу при горінні при температурі T , γ та χ – сталі. Вважаючи, що

$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c),$$

де $\Theta(x)$ – функція Хевісайда, $T_c > T_0$, визначити температуру в стаціонарному вогнищі горіння та довжину цього вогнища. Побудувати числовий розв'язок системи для випадків малого та великого початкових вогнищ. Порівняти результати числового та аналітичного розрахунків для довжини стаціонарного вогнища горіння.

2.2.2. Дисипативні структури, обумовлені аперіодичною нестійкістю

Дисипативні структури в системах, де немає розподіленого зворотного зв'язку, виникають в результаті розвитку аперіодичної нестійкості, яку можна розглядати як результат біфуркації Тюрінга (див. п. 1.3.3.3). В результаті насичення такої нестійкості в первісно однорідному середовищі виникають просторово-періодичні структури, основні характеристики яких (амплітуда, просторовий період) визначаються властивостями самого середовища і не залежать від граничних (якщо розміри однорідної області достатньо великі) та початкових умов.

Прикладами таких структур можуть бути, крім уже розглянутої моделі бруселятора, структура полярних сьайв, обумовлена розпадом електронних потоків в іоносфері на окремі джугти, перисті хмари з виявленою просторовою періодичністю, стратифікація кометних хвостів або плазмових хмар в активних експериментах в іоносфері та багато інших. Але, мабуть, найбільш відомим та ефектним прикладом таких дисипативних структур є утворення за певних умов регулярних періодичних смуг (так звані конвективні вали) або правильних шестикутних комірок течії рідини в шарі, що підігрівається знизу – явище конвекції Релея – Бенара. Розглянемо його більш детально.

2.2.2.1. Конвекція Релея – Бенара: опис моделі та вихідні рівняння

Розглянемо шар в'язкої рідини, що займає проміжок $0 < z < h$ (вісь z спрямовано вертикально вгору, див. рис. 2.2.4). У площині $z=0$ підтримується температура T_1 , в площині $z=h$ – температура T_2 ($\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$).

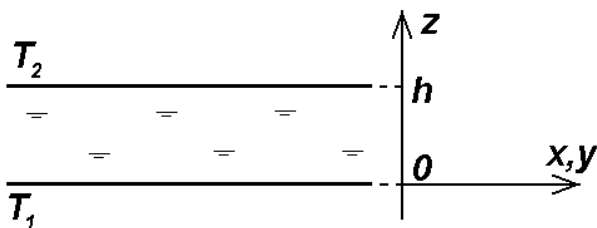


Рис. 2.2.4. Шар рідини, що підігрівається знизу

При невеликих значеннях різниці температур ΔT рідина залишається нерухою, так що передача тепла знизу вгору відбувається лише за рахунок теплопровідності. При переході ΔT через деяке критичне значення ΔT_{cr} починається конвекція.

Будемо характеризувати рідину полем температур $T(\mathbf{r}, t)$ та полем швидкостей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Для її опису скористаємося рівнянням Нав'є – Стокса, а також рівняннями теплопровідності та неперервності.

Рівняння Нав'є – Стокса являє собою, по суті, другий закон Ньютона для краплі рідини з урахуванням того, що положення краплі з часом змінюється. Тому повна похідна $d\mathbf{v}/dt$ набуває вигляду

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}. \quad (2.2.6)$$

Рівняння Нав'є – Стокса можна записати у вигляді

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = -\nabla p + \eta \Delta \bar{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla \nabla \cdot \bar{v} + \rho \bar{g}, \quad (2.2.7)$$

де ρ – густина рідини, p – її тиск, η – її коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість), $\bar{g} = -g\mathbf{e}_z$ – прискорення земного тяжіння. Доданки в правій частині визначають сили, що діють на краплю рідини. Перший з них відповідає тиску, другий та третій – тертю, четвертий – силі тяжіння.

Рівняння теплопровідності з урахуванням можливої конвекції рідини набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (2.2.8)$$

де χ – коефіцієнт температуропроводності, а символ Δ позначає лапласіан.

Нарешті, рівняння неперервності для рідини має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0. \quad (2.2.9)$$

Причиною конвекції є теплове розширення рідини, тому в останньому доданку рівняння (2.2.7) необхідно врахувати залежність густини рідини від температури. В першому наближенні вважатимемо цю залежність лінійною:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha \Theta), \quad (2.2.10)$$

де

$$\Theta = T - T_0, \quad T_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2), \quad \rho_0 = \rho(T_0). \quad (2.2.11)$$

В усіх інших рівняннях залежністю густини від температури можна знехтувати, тобто ρ можна замінити на ρ_0 . Тоді рівняння (2.2.9) набуде простого вигляду

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.2.9 \text{ а})$$

характерного для нестисливої рідини, а рівняння (2.2.7) з урахуванням (2.2.10) та (2.2.9 а) можна подати у формі

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} (1 - \alpha \Theta), \quad (2.2.7 \text{ а})$$

де $\nu = \eta / \rho_0$ – кінематична в'язкість рідини.

Очевидні граничні умови для температури мають вигляд

$$T(z=0) = T_1, \quad T(z=h) = T_2. \quad (2.2.12)$$

Вважатимемо граничні поверхні шару рідини вільними. Тоді на цих поверхнях повинні виконуватися граничні умови

$$v_z(z=0) = v_z(z=h) = 0 \quad (2.2.13)$$

2.2.2.2. Стаціонарний розв'язок рівнянь

Для стаціонарного і однорідного (в площині xy) випадку і нерухомої рідини ($\vec{v}=0$) рівняння (2.2.7 а)-(2.2.8) набувають вигляду

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g (1 - \alpha \Theta), \quad (2.2.7 \text{ б})$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dz^2} = 0. \quad (2.2.8 \text{ а})$$

Система (2.2.7 б)-(2.2.8 а) з урахуванням граничних умов (2.2.12) має розв'язок

$$\Theta(z) = \Delta T \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right), \quad p(z) = p_{ext} + \rho_0 g (h - z) \left(1 + \alpha \Delta T \frac{z}{2h} \right), \quad (2.2.14)$$

де p_{ext} – стала інтегрування, яка має зміст зовнішнього тиску. Графіки залежностей (2.2.14) подано на рис. 2.2.5 а-б.

2.2.2.3. Отримання та розв'язок рівнянь для малих збурень

Для дослідження стійкості (2.2.14) підставимо в систему рівнянь (2.2.7 а), (2.2.8), (2.2.9 а) розв'язок у вигляді

$$\Theta(\vec{r}, t) = \Theta_0(z) + \theta(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t) = p_0(z) + \delta p(\vec{r}, t) \quad (2.2.15)$$

та $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} - \alpha \vec{g} \theta; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta - \frac{\Delta T}{h} v_z = \chi \Delta \theta; \quad (2.2.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

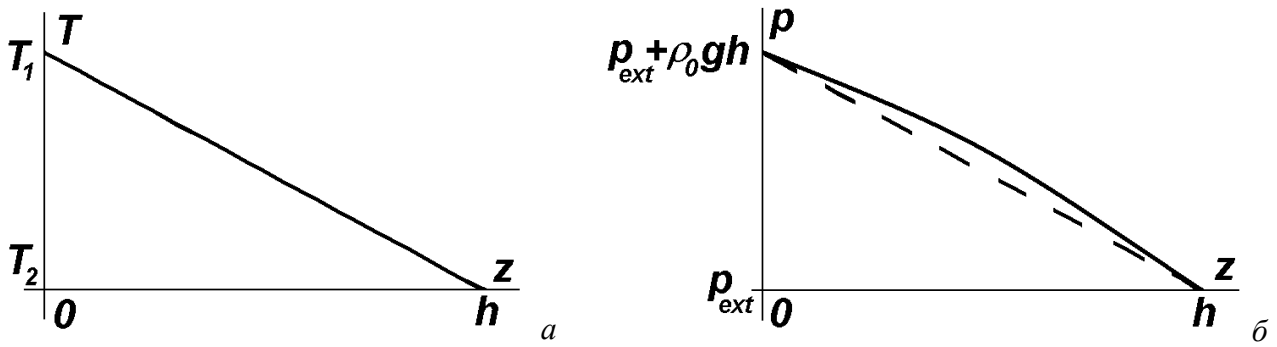


Рис. 2.2.5. Висотні залежності температури (а) та тиску (б) в шарі рідини, що підігрівається знизу, за відсутності конвекції.

Граничні умови (2.2.12) для нової змінної θ набувають вигляду

$$\theta|_{z=0} = \theta|_{z=h} = 0. \quad (2.2.12 \text{ а})$$

Лінеаризуємо систему (2.2.16), вважаючи величини θ , δp та v малими. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \nu \Delta v_x; & \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial y} + \nu \Delta v_y; & \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \alpha g \theta; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\Delta T}{h} v_z &= \chi \Delta \theta & \nabla \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.16 \text{ а})$$

Всі рівняння системи (2.2.16 а) – лінійні, однорідні, зі сталими коефіцієнтами. Тому розв’язок цієї системи можна шукати в експоненціальній формі. Підставимо в (2.2.16) розв’язки у формі

$$\begin{aligned} v_z \vec{r}, t &= v_{z,m} \sin k_z z \exp \lambda t - ik_x x - ik_y y, \\ v_{x,y} \vec{r}, t &= v_{x,y,m} \cos k_z z \exp \lambda t - ik_x x - ik_y y, \\ \theta \vec{r}, t &= \theta_m \sin k_z z \exp \lambda t - ik_x x - ik_y y, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\delta p \vec{r}, t = \delta p_m \cos k_z z \exp \lambda t - ik_x x - ik_y y, \quad k_z = \frac{n\pi}{h}, \quad n=1,2,3\dots$$

які задовольняють граничним умовам (2.2.12 а)-(2.2.13). Отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд:

$$\begin{aligned} \lambda + \nu k^2 v_{x,m} - \frac{ik_x}{\rho_0} \delta p_m &= 0; & \lambda + \nu k^2 v_{y,m} - \frac{ik_y}{\rho_0} \delta p_m &= 0; & \lambda + \nu k^2 v_{z,m} - \frac{k_z}{\rho_0} \delta p_m - \alpha g \theta_m &= 0; \\ \lambda + \chi k^2 \theta_m - \frac{\alpha \Delta T}{h} v_{z,m} &= 0; & i k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

де використані позначення

$$k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (2.2.19)$$

Щоб система (2.2.18) мала нетривіальні розв’язки, її визначник повинен дорівнювати нулеві, тобто повинна виконуватись умова

$$\Lambda^2 + \Lambda \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right) \kappa^2 + \left(\kappa^4 - R \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa^2} \right) = 0, \quad (2.2.20)$$

де використано позначення $\kappa_{x,y,z} = k_{x,y,z} h$, $\Lambda = \lambda h^2 / (\nu \chi)^{1/2}$, $P = \nu / \chi$ – число Прандтля, $R = \alpha g h^3 \Delta T / \nu \chi$ – число Релея.

Рівняння (2.2.20) можна розв’язати щодо нормованого часового інкременту Λ :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right) \kappa^2 \pm \sqrt{\left(\sqrt{P} - \frac{1}{\sqrt{P}} \right)^2 \kappa^4 + 4R \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa^2}} \right\}. \quad (2.2.21)$$

Очевидно, стаціонарний розв'язок (2.2.14) залишається стійким доти, доки $\Lambda_{1,2}$ будуть від'ємними. Якщо ж хоч один з двох коренів (в даному разі Λ_1) стане додатним, у системі буде розвиватися нестійкість, тобто почнеться конвекція.

2.2.2.4. Умови виникнення конвекції

Дослідимо залежність $\Lambda_1(\kappa_\perp)$. Як видно з (2.2.21),

$$\lim_{\kappa_\perp \rightarrow \infty} \Lambda_1 = -\infty.$$

Тому максимальне значення Λ_1 досягається при деякому скінченному значенні $\kappa_{\perp opt}$. В критичному випадку в нуль перетворюється як Λ_1 , так і похідна $\partial\Lambda_1/\partial\kappa_\perp$. Ці умови приводять до рівнянь

$$\kappa_z^2 + \kappa_\perp^2 = R\kappa_\perp^2, \quad 2\kappa_z^2 + \kappa_\perp^2 = R\kappa_z^2, \quad (2.2.22)$$

розв'язавши які, можна з'ясувати, що нестійкість починається для збурення з поперечним хвильовим числом

$$\kappa_{\perp opt} = \frac{\kappa_z}{\sqrt{2}} \quad (2.2.23)$$

при переході числа Релея через критичне значення

$$R_{cr} = \frac{27}{4} \kappa_z^4. \quad (2.2.24)$$

Граничні умови приводять до утворення дискретного набору значень κ_z (див. (2.2.17)). Зрозуміло, що нестійкість почне розвиватися при тому значенні κ_z , якому відповідає мінімальне значення R_{cr} , тобто при

$$\kappa_z = \pi \quad (n=1), \quad (2.2.25)$$

коли по висоті шару вкладається половина довжини стоячої хвилі. Тоді

$$\kappa_{\perp opt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.221, \quad R_{cr} = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 657.5. \quad (2.2.26)$$

Залежності $\Lambda_1(\kappa_\perp)$ подані на рис. 2.2.6.

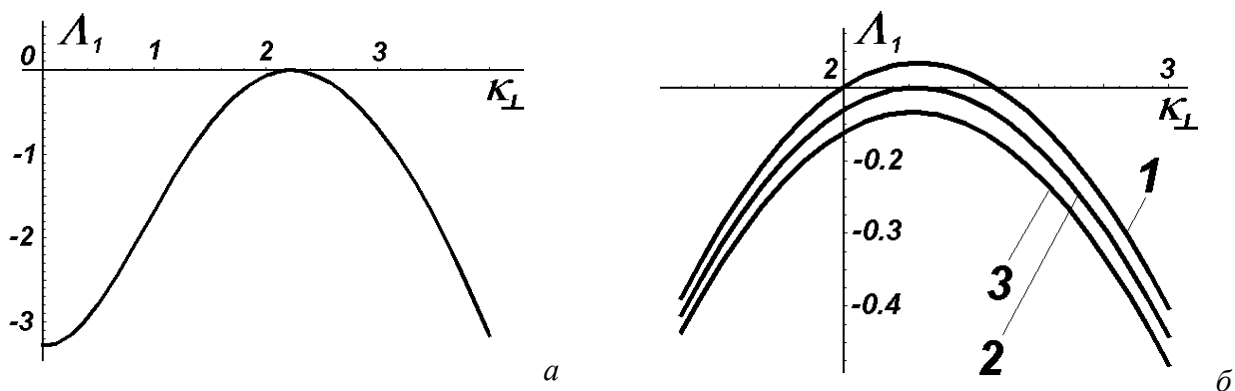


Рис. 2.2.6. Залежність $\Lambda_1(\kappa_\perp)$ для $R=R_{cr}$ (а) та для різних значень R ($R_1 > R_2 = R_{cr} > R_3$)

Як видно з рис. 2.2.6 а, при невеликому перевищенні числа Релея над критичним значенням (2.2.26) область значень κ_\perp , в якій розвивається нестійкість, є порівняно вузькою, і наближено можна вважати, що $\kappa_\perp = \kappa_{\perp opt}$. Підставивши до формули (2.2.21) значення κ_z (2.2.25) та $\kappa_{\perp opt}$ (2.2.26) і подавши число Релея у формі $R=R_{cr}(1+\varepsilon)$, де $0 < \varepsilon \ll 1$, отримаємо інкремент нестійкості при малій надкритичності:

$$\Lambda_1 = \frac{3\pi^2 \varepsilon}{2 \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right)}. \quad (2.2.21 \text{ а})$$

Видно, що в цьому випадку інкремент прямо пропорційний до надкритичності.

Побудована нами лінійна теорія аналогічна до лінійної теорії автогенератора: вона передбачає довжину хвилі, на якій розвивається аперіодична нестійкість, (аналог частоти автоколивань) та критичне значення числа Релея (аналог амплітудної умови самозбудження), а також інкремент малих коливань. Для того, щоб знайти амплітуду усталеного збурення (тобто, по суті, амплітуду утворюваної дисипативної структури), необхідна нелінійна теорія.

2.2.2.5. Нелінійна теорія ефекту Релея – Бенара для конвективних валів: отримання системи рівнянь для φ

Побудувати аналітично загальний розв'язок нелінійної системи (2.2.16) досі не вдалося. Але явище конвекції в шарі рідини з підігрівом знизу вдається аналітично описати при малих ступенях надкритичності, якщо апіорі задати структуру гаданого розв'язку. Найпростіша структура відповідає конвективним валам.

Будемо розглядати збурення, які не залежать від координати y (саме такі збурення відповідають конвективним валам), так що можна в рівняннях (2.2.16) покласти $v_y=0$. Будемо також шукати дві інші компоненти швидкості у формі:

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.2.27)$$

Тоді останнє рівняння системи (2.2.16) задовольняється автоматично⁶. Зазначимо, що ми, по суті, записали швидкість як ротор деякого вектора φ , який в аналізованому випадку має ненульову компоненту лише вздовж осі y : $\varphi=(0, \varphi, 0)$.

Підставивши (2.2.27) до першого рівняння системи (2.2.16) і спроектувавши його на напрямки x та z , можна отримати:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha g \theta \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

(враховано, що сила тяжіння спрямована проти осі z).

Із системи (2.2.28) можна виключити збурення тиску δp . Для цього друге з рівнянь (2.2.28) продиференціюємо за x і віднімемо від нього перше, продиференційоване за z . Отримане таким чином рівняння доповнимо другим рівнянням системи (2.2.16) із підстановкою (2.2.27). В результаті можна записати таку систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \varphi &= \nu \Delta \Delta \varphi + \alpha g \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \theta - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \chi \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Ця система рівнянь у частинних похідних для функцій φ та θ повинна бути доповнена граничними умовами для θ

$$\theta|_{z=0} = \theta|_{z=h} = 0. \quad (2.2.12 \text{ a})$$

та для φ

$$\varphi|_{z=0} = \varphi|_{z=h} = 0 \quad (2.2.30)$$

(остання умова є наслідком (2.2.13)).

2.2.2.6. Отримання системи Лоренца

Для випадку, коли число Релея $R = \alpha g h^3 \Delta T / \nu \chi$ не дуже сильно перевищує своє критичне значення (2.2.26), розв'язки системи (2.2.29), що задовольняють граничним умовам

⁶ Операція введення величини φ замість компонент швидкості аналогічна до подання магнітного поля як ротора від векторного потенціалу, можливість чого випливає з теореми Гауса для магнітного поля.

(2.2.12 а), (2.2.30), будемо шукати у формі

$$\begin{aligned} \varphi_{x,z,t} &= \sqrt{2} \frac{\chi h}{\pi k_{\perp}} \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] X t \sin k_{\perp} x \sin \frac{\pi z}{h}; \\ \theta_{x,z,t} &= \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \left[\sqrt{2} Y t \cos k_{\perp} x \sin \frac{\pi z}{h} - Z t \sin \frac{2\pi z}{h} \right], \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

причому горизонтальна компонента хвильового числа k_{\perp} визначається умовами (2.2.23) та (2.2.25):

$$k_{\perp} = \frac{\pi}{\sqrt{2}h}. \quad (2.2.32)$$

Як бачимо, швидкість утворює структури типу конвективних валів з амплітудою X , а збурення температури – такі самі структури з амплітудою Y плюс однорідну по x стоячу хвилю у вертикальному напрямку з амплітудою Z .

Підставимо розв'язки (2.2.31) до першого з рівнянь (2.2.29). При цьому слід узяти до уваги, що

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= - \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] \varphi, & \Delta \Delta \varphi &= \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right]^2 \varphi, \\ \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \varphi &= - \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Тоді, скоротивши на просторові залежності та врахувавши явний вигляд R_c та k_{\perp} , можна отримати таке рівняння:

$$\frac{dX}{d\tau} = -PX + PY, \quad (2.2.33)$$

де

$$\tau = \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] \chi t \quad (2.2.34)$$

– безрозмірний час.

Підставимо тепер розв'язок (2.2.31) до другого з рівнянь (2.2.29). Після деяких тригонометричних перетворень можна отримати:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \dot{Y} \cos k_{\perp} x \sin \frac{\pi z}{h} - \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \dot{Z} \sin \frac{2\pi z}{h} + \frac{\chi R_c \Delta T}{\pi R} \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] XY \sin \frac{2\pi z}{h} - \\ &- \sqrt{2} \frac{\chi R_c \Delta T}{\pi R} \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] XZ \cos k_{\perp} x \left(\sin \frac{3\pi z}{h} - \sin \frac{\pi z}{h} \right) - \sqrt{2} \frac{\chi \Delta T}{\pi} \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] X \cos k_{\perp} x \sin \frac{\pi z}{h} = \\ &= - \sqrt{2} \frac{\chi R_c \Delta T}{\pi R} \left[k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \right] Y \cos k_{\perp} x \sin \frac{\pi z}{h} + \frac{4\pi \chi R_c \Delta T}{Rh^2} \sin \frac{2\pi z}{h} \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Знехтуємо в (2.2.35) доданком, пропорційним до $\sin(3\pi z/h)$. Тоді рівняння розбивається на дві частини. Відділивши доданки, залежні від x , та доданки, що не залежать від x , скоротивши на координатні залежності і перейшовши до безрозмірного часу τ (2.2.34), отримаємо два рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

де використані позначення

$$r = \frac{R}{R_c}, \quad b = \frac{4}{1 + k_{\perp} h / \pi^2} = \frac{8}{3}. \quad (2.2.37)$$

Система рівнянь (2.2.33), (2.2.36) і являє собою шукану систему Лоренца. Вперше вона була отримана Б.Зальцманом у роботі: В. Salzman, Journ. Atmos. Sci., **19**, 329 (1963)). Пізніше вона була використана Лоренцом для розрахунків конвекції в атмосфері Землі.

За змістом задачі всі параметри в цих рівняннях додатні.

2.2.2.7. Стаціонарні точки системи Лоренца

Стаціонарні точки системи Лоренца знаходяться з рівнянь

$$X - Y = 0, \quad Y + XZ - rX = 0, \quad XY - bZ = 0, \quad (2.2.38)$$

які, в свою чергу, зводяться до кубічного рівняння

$$X \left[X^2 - b \quad 1 - r \right] = 0. \quad (2.2.38 \text{ a})$$

Трьом кореням рівняння (2.2.38 a) відповідають три стаціонарні точки:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0;$$

$$X_2 = Y_2 = \sqrt{b \ r - 1}, \quad Z_2 = r - 1;$$

$$X_3 = Y_3 = -\sqrt{b \ r - 1}, \quad Z_3 = r - 1. \quad (2.2.39)$$

Дві останні точки існують лише при $r > 1$.

Досить очевидно, що перша із трьох стаціонарних точок (2.2.39) відповідає відсутності конвекції, дві інші – усталеній конвективній течії (вони, по суті, відрізняються лише зсувом фази на π в напрямку x).

2.2.2.8. Стійкість стаціонарних точок системи Лоренца

Для з'ясування питання про стійкість стаціонарних точок систему Лоренца слід лінеаризувати за малими відхиленнями від положення рівноваги, підставити розв'язки в експоненціальній формі та прирівняти до нуля визначник отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд.

Тоді характеристичне рівняння для показників експоненти σ в околі першої стаціонарної точки набуває вигляду:

$$\left[\sigma^2 + P + 1 \quad \sigma + P \quad 1 - r \right] \sigma + b = 0. \quad (2.2.40)$$

Один з коренів рівняння (2.2.23), $\sigma = -b$, завжди від'ємний; два інші, якщо вони чисто дійсні, відповідно до теореми Вієта, будуть від'ємними за умови $r < 1$. Ця умова й визначає область стійкості першої стаціонарної точки.

Зрозуміло, що перша стаціонарна точка в тривимірному фазовому просторі системи Лоренца відповідає відсутності конвекції в шарі рідини. Вона втрачає стійкість за умови $r > 1$, тобто, як впливає з (2.2.37), при $R > R_c$, і перетворюється із стійкого вузла на сідло-вузол. Таким чином, умова виникнення конвективного руху, отримана на основі аналізу системи Лоренца, збігається з відповідним результатом лінійної теорії (див. п. 2.2.2.4).

Характеристичне рівняння для показників Ляпунова в околі другої та третьої стаціонарних точок можна записати у вигляді:

$$\sigma^3 + P + b + 1 \quad \sigma^2 + b \quad P + r \quad \sigma + 2Pb \quad r - 1 = 0. \quad (2.2.41)$$

Використовуючи критерій Рауса – Гурвиця, можна показати, що всі корені рівняння (2.2.41) матимуть від'ємні дійсні частини за умов

$$\begin{cases} r > 1, \\ r(P - b - 1) < P(P + b + 3). \end{cases} \quad (2.2.42)$$

При $P < b + 1$ друга нерівність автоматично впливає з першої. Це означає, що при малих числах Прандтля (точніше, при $P < 11/3$) друга та третя стаціонарні точки будуть стійкими

при будь-яких числах Релея, що задовольняють умові $R > R_c$. При $P > b+1$ система (2.2.42) еквівалентна до подвійної нерівності

$$1 < r < r^* \equiv \frac{P}{P-b+1}, \quad (2.2.42 \text{ a})$$

тобто при $P > 11/3$ друга та третя стаціонарні точки стійкі лише в обмеженому діапазоні значень числа Релея. При перевищенні порогу, що визначається значенням r^* , вони втрачають стійкість.

2.2.2.9. Властивості стаціонарних конвективних валів

Зрозуміло, що друга та третя стаціонарні точки описують стаціонарні конвективні вали. Відповідні їм розв'язки (2.2.31) відрізняються між собою лише зсувом фази на π в напрямку x . Ці розв'язки, як уже відзначалося, з'являються при $R > R_c$, тобто саме тоді, коли розв'язок, який відповідає відсутності конвекції, стає нестійким. Це – типова біфуркація, коли при переході керівного параметра через критичне значення система обирає один з двох можливих варіантів розвитку (див. п. 1.4.3.1).

Формули (2.2.39) визначають, по суті, амплітуду усталених конвективних валів. Використавши позначення $r=1+\varepsilon$, введене наприкінці п. 2.2.2.4, можна переписати вирази для амплітуд у формі

$$|X_{2,3}| = |Y_{2,3}| = \sqrt{b\varepsilon}, \quad Z_{2,3} = \varepsilon. \quad (2.2.39 \text{ a})$$

Порівнюючи (2.2.39 а) з виразом для інкременту (2.2.21 а), можна сказати, що амплітуди X та Y пропорційні кореневі з інкременту малих коливань, як і в автогенераторі Ван-дер-Поля. Амплітуда Z пропорційна до квадрату малих амплітуд X та Y . Доданок у розв'язку (2.2.31), пропорційний до Z , породжується нелінійністю системи Лоренца. В певному сенсі він аналогічний до вищих гармонік у спектрі нелінійного осцилятора, які описують ефект ангармонізму коливань. Як впливає з (2.2.39 а), при збільшенні ε він зростає швидше від X та Y . Так само в нелінійному осциляторі збільшення амплітуди коливань призводить до зростання відносного внеску вищих гармонік.

Строго кажучи, побудована тут теорія справедлива лише при малих ступенях надкритичності (при малих ε). Тим не менше на якісному рівні вона правильно описує поведінку системи при $r > r^*$, коли стаціонарні розв'язки з амплітудами (2.2.39 а) втрачають стійкість. Такий режим відповідає так званій слабкій гідродинамічній турбулентності (див. нижче п. 2.3.2).

2.2.2.10. Конвекція Релея – Бенара: виникнення шестикутних комірок

Найбільш загадковою рисою конвекції Релея - Бенара протягом багатьох десятиріч залишалося виникнення конвективних комірок шестикутної форми (рис. 2.2.7 а, б) Ця задача була розв'язана лише у 80-х роках ХХ століття (див.: Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий, А.А.Непомнящий. Устойчивость конвективных течений. М., Наука, 1989).

Для аналізу утворення конвективних комірок необхідно повернутися до рівнянь (2.2.7)-(2.2.9), доповнених граничними умовами (2.2.12)-(2.2.13). Знову, як це було зроблено вище (п. 2.2.2.6), апріорі задамо форму розв'язку: підставлятимемо його для всіх змінних (тиск, температура та три компоненти швидкості) у формі трьох пар хвиль:

$$f(\vec{r}, t) = f \sum_{l=1}^3 a_l t \exp\left[i \vec{k}_l \cdot \vec{r}_\perp\right] + a_l^* t \exp\left[-i \vec{k}_l \cdot \vec{r}_\perp\right], \quad (2.2.43)$$

$$\vec{r}_\perp = x, y,$$

де вектори \mathbf{k}_l утворюють правильний трикутник:

$$\vec{k}_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2 = k \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_3 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.2.44)$$

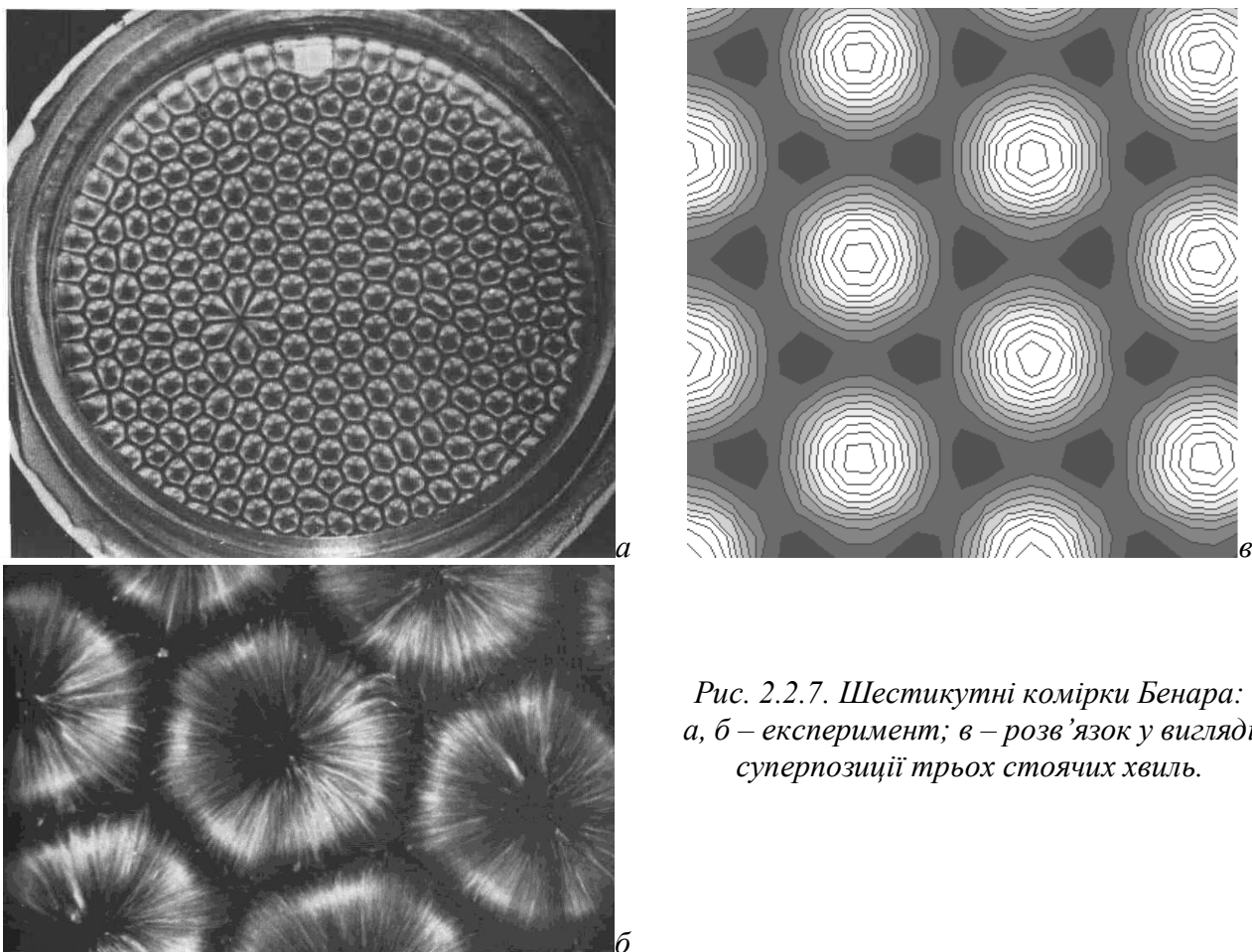


Рис. 2.2.7. Шестикутні комірки Бенара:
а, б – експеримент; в – розв’язок у вигляді
суперпозиції трьох стоячих хвиль.

Легко зрозуміти, що сума трьох пар стоячих хвиль вигляду (2.2.43)-(2.2.44) справді описує набір шестикутних комірок у площині (x, y) (див. рис. 2.2.7 в).

Вважатимемо, як і в п. 2.2.2.4, що число Релея можна подати у формі $R=R_{cr}(1+\epsilon)$, де $0<\epsilon\ll 1$, а значення R_{cr} дається формулою (2.2.26), тобто поріг виникнення нестійкості лише трохи перевищений. Тоді нестійкість можлива лише у вузькому діапазоні хвильових чисел \mathbf{k}_l навколо значення $k_{l,opt}$ (2.2.26). Отже, можна покласти $|\mathbf{k}_l|\approx k_{l,opt}$ (пор. з рівняннями (2.2.31)-(2.2.32)).

Тоді з рівнянь (2.2.7)-(2.2.9) та (2.2.12)-(2.2.13) можна отримати таку систему вкорочених рівнянь для амплітуд a_l :

$$\frac{da_l}{dt} = a_l \left(\lambda - \sum_{j=1}^3 K_{lj} |a_j|^2 \right) \quad (2.2.45)$$

де λ – інкремент малих збурень, що визначається формулою (2.2.22 а) (з урахуванням нормування, див. п. 2.2.2.3), а K_{lj} – симетрична матриця коефіцієнтів, усі елементи якої додатні. Із системи (2.2.45) неважко отримати рівняння для інтенсивностей мод:

$$\frac{dr_l}{d\tau} = 2r_l \left(1 - \sum_{j=1}^3 B_{lj} r_j \right), \quad r_l = \frac{K |a_l|^2}{\lambda}, \quad \tau = \lambda t, \quad B_{lj} = \frac{K_{lj}}{K}, \quad K \equiv K_{ll}. \quad (2.2.46).$$

Система (2.2.46) – це добре відома з курсу "Коливання та хвилі" система рівнянь для конкуренції мод у багаточастотному (в даному разі – тричастотному) автогенераторі⁷. Співіснування мод у багаточастотному автогенераторі можливе лише у випадку слабкого зв'язку між модами, тобто при $B_{lj} < 1$ ($j \neq l$). Але в нашому випадку можна показати, що при $j \neq l$ всі

⁷ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., Академпрес, 2003 (розділ 2.3, рівняння (2.4.23)).

$B_{ij} > 1$. Це означає, що в результаті конкуренції виживає одна єдина мода, тобто в системі встановлюватимуться конвективні вали.

Щоб усе таки отримати розв'язок у формі шестикутних комірок, слід урахувати, що фізичні параметри рідини (наприклад, її в'язкість) залежать від температури. Тоді, вважаючи цю залежність слабкою, а відповідний параметр Γ – малим, можна отримати аналог системи (2.2.46) у формі:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= \left[\gamma - |A_1|^2 - B(|A_2|^2 + |A_3|^2) \right] A_1 + A_2 A_3; \\ \frac{dA_2}{d\tau} &= \left[\gamma - |A_2|^2 - B(|A_1|^2 + |A_3|^2) \right] A_2 + A_3 A_1; \\ \frac{dA_3}{d\tau} &= \left[\gamma - |A_3|^2 - B(|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_3 + A_1 A_2, \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

де використані позначення

$$A_j = \frac{K}{\Gamma} a_j, \quad \tau = \frac{\Gamma^2}{K} t, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\Gamma^2}, \quad B = B_{jl} \quad j \neq l. \quad (2.2.48)$$

Легко бачити, що система (2.2.47) без урахування квадратичних доданків зводиться до раніше розглянутої системи (2.2.45). Без урахування кубічних доданків система (2.2.47) описує вибухову нестійкість, що має місце при параметричній взаємодії трьох хвиль, одна з яких є хвилею з від'ємною енергією⁸.

Стационарні розв'язки системи (2.2.47) у залежності від параметра γ (реально – від різниці температур ΔT) подані на рис. 2.2.8. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, штрихові – нестійким. Крива 1 відповідає відсутності конвекції, крива 2 – розв'язку

$$A_1 = \sqrt{\gamma}, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad (2.2.49)$$

що описує конвективні вали, криві 3-4 – розв'язкам

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma(2B+1)}}{2(2B+1)}, \quad (2.2.50)$$

які описують правильні шестикутні комірки. Нарешті, крива 5 відповідає розв'язку у вигляді неправильних шестикутних комірок:

$$A_1 = \frac{1}{B-1}, \quad A_2 = A_3 = \frac{\gamma(B-1)-1}{B-1(B+1)}. \quad (2.2.50)$$

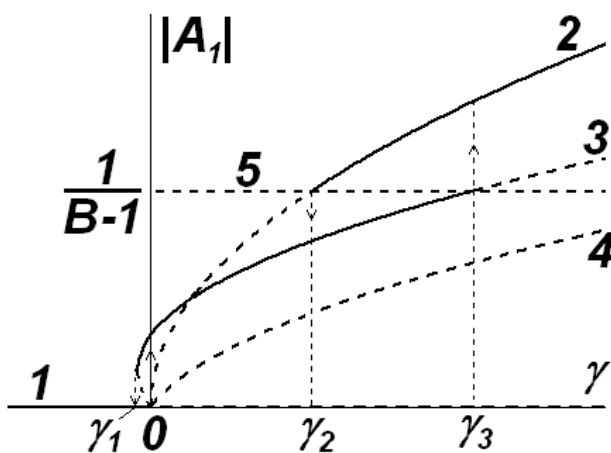


Рис. 2.2.8. Залежність амплітуд мод, що характеризують конвекцію Релея - Бенара, від нормованого інкременту малих збурень. 1 – відсутність конвекції, 2 – конвективні вали ($A_1 \neq 0, A_2 = A_3 = 0$), 3-4 – правильні шестикутні комірки ($A_1 = A_2 = A_3$), 5 – неправильні шестикутні комірки ($A_1 \neq A_2 = A_3$).

Нехай спочатку $\gamma < \gamma_1$, де

⁸ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., Академпрес, 2003 (п. 3.5.6).

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4(2B+1)}. \quad (2.2.52)$$

Тоді при поступовому зростанні γ в точці $\gamma=0$ виникнуть правильні шестикутні комірки, причому їхня амплітуда стрибком зросте від нуля до значення $A=1/2(B+1)$.

При подальшому зростанні γ біфуркація відбудеться в точці $\gamma=\gamma_3$, де

$$\gamma_3 = \frac{B+2}{B-1}^2. \quad (2.2.53)$$

При переході через цю точку замість шестикутних комірок виникнуть конвективні вали.

При зменшенні γ від початкового значення $\gamma>\gamma_3$ конвективні вали зникнуть лише при переході через точку $\gamma=\gamma_2$, де

$$\gamma_2 = \frac{1}{B-1}^2. \quad (2.2.54)$$

Оскільки $\gamma_3>\gamma_2$, сказане означає, що ділянка $\gamma_3>\gamma>\gamma_2$ характеризується гістерезисом. Ще одна ділянка гістерезису виникає при $0>\gamma>\gamma_1$ (рис. 2.2.8).

Слід підкреслити, що наведений вище розрахунок не є вичерпним, оскільки ґрунтується на апріорному заданні форми розв'язку вихідних рівнянь. Більш акуратний аналіз показує, що отримані структури можуть виявитися нестійкими до збурень іншої структури (наприклад, конвективні вали – до збурень у вигляді зигзагів, типу поперечних валів та інших).

Контрольні питання до підрозділу 2.2.2

1. Які рівняння використовують для аналізу конвекції Релея – Бенара?
2. Чому без урахування залежності параметрів рідини від температури теорія передбачає стійкість лише для конвективних валів?
3. Які властивості комірок Бенара залежать від початкових умов, а які – ні?
4. Які фактори спричиняють до формування шестикутних комірок Бенара?
5. В якому наближенні вдається аналітично проаналізувати формування шестикутних комірок Бенара?
6. Як можна розрахувати розмір комірок Бенара?
7. Чи пов'язані між собою розміри конвективних валів і шестикутних комірок для тієї самої системи?
8. Нехай у початковий момент часу $\gamma_3>\gamma>\gamma_2$, але $A_1 \neq 0$. Який режим конвекції встановиться в системі? Від чого це залежить?

Задачі до підрозділу 2.2.2

2.2.2.1. Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B(|A_2|^2 + |A_3|^2) \right] A_1 + A_2 A_3;$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B(|A_1|^2 + |A_3|^2) \right] A_2 + A_3 A_1;$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B(|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_3 + A_1 A_2,$$

де γ - інкремент малих коливань, B – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти область стійкості розв'язку, що відповідає відсутності конвекції.

2.2.2.2. Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B(|A_2|^2 + |A_3|^2) \right] A_1 + A_2 A_3;$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B(|A_1|^2 + |A_3|^2) \right] A_2 + A_3 A_1;$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B |A_1|^2 + |A_2|^2 \right] A_3 + A_1 A_2,$$

де γ - інкремент малих коливань, B – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти область стійкості розв'язку, що відповідає правильним гексагональним коміркам ($A_1=A_2=A_3$).

2.2.2.3. Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B |A_2|^2 + |A_3|^2 \right] A_1 + A_2 A_3;$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B |A_1|^2 + |A_3|^2 \right] A_2 + A_3 A_1;$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B |A_1|^2 + |A_2|^2 \right] A_3 + A_1 A_2,$$

де γ - інкремент малих коливань, B – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти область стійкості розв'язку, що відповідає неправильним гексагональним коміркам ($A_1 \neq A_2 = A_3$).

2.2.2.4*. Виходячи з розмірних рівнянь гідродинаміки та теплопередачі, отримати систему рівнянь для амплітуд трьох мод, що взаємодіють між собою при конвекції Релея – Бенара.

2.2.2.5*. Користуючись системою рівнянь

$$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B |A_2|^2 + |A_3|^2 \right] A_1 + A_2 A_3;$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B |A_1|^2 + |A_3|^2 \right] A_2 + A_3 A_1;$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B |A_1|^2 + |A_2|^2 \right] A_3 + A_1 A_2,$$

побудувати відповідний тривимірний фазовий портрет, що описує конкуренцію мод у конвекції Релея – Бенара.

Контрольні питання до розділу 2.2

1. Які властивості системи приводять до виникнення в ній дисипативних структур?
2. У чому полягає якісна відмінність між формуванням дисипативних структур у випадках баретування та конвекції Релея – Бенара?

Частина 3. ХАОС І ТУРБУЛЕНТНІСТЬ

Як уже відзначалося у Вступі, явище турбулентності є однією з форм самоорганізації, а турбулентну динаміку системи (наприклад, турбулентну течію) в загальному випадку можна розглядати, як нестационарну дисипативну структуру.

На сьогодні турбулентність залишається одним з найменш вивчених явищ у рамках класичної фізики. Однак уже зрозуміло, що в багатьох випадках при виникненні турбулентності системи з розподіленими параметрами можна звести до моделей систем зі скінченною кількістю ступенів вільності. Прикладом такого зведення є, зокрема, отримана вище система Лоренца (див. п. 2.2.2.6), що, як буде показано нижче (див. п. 3.3.2.2), описує також і турбулентний режим конвекції. З іншого боку, хаотична динаміка систем із невеликою кількістю ступенів вільності вивчена значно краще – особливо це стосується консервативних (гамільтонівських) систем. Тому наш розгляд турбулентності ми розпочнемо з аналізу хаотичної динаміки систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, проаналізувавши спочатку гамільтонівські, а потім і дисипативні системи.

3.1. Хаос у гамільтонівських системах

Щойно було відзначено, що на сьогодні найбільш вивченою є хаотична динаміка гамільтонівських систем, тобто автономних чи неавтономних консервативних систем з обмеженою кількістю ступенів вільності. Крім того, суттєво, що методи дослідження та кількісні характеристики хаотичного руху гамільтонівських систем у багатьох випадках переносяться на дисипативні системи.

3.1.1. Інтегровні гамільтонівські системи

Перш ніж розглянути хаотичну динаміку гамільтонівських систем, нагадаємо деякі відомі з попередніх курсів (теоретична механіка, колювання та хвилі) поняття, що стосуються гамільтонівських систем взагалі та інтегровних гамільтонівських систем зокрема.

Інтегровні гамільтонівські системи складають лише незначну частину всіх гамільтонівських систем. Але ці системи служать свого роду еталоном, з яким зручно порівнювати інші гамільтонівські системи. Наприклад, окремо виділяють клас систем, близьких до інтегровних. Чим далі знаходиться система від інтегровної, тим складнішою є її поведінка.

3.1.1.1. Рівняння Гамільтона

Будемо розглядати системи, які можна подати як набір частинок, що взаємодіють одна з одною. Закон залежності сили взаємодії від віддалі між частинками вважатимемо відомим. Очевидно, дисипація в таких системах відсутня. Стан подібної системи повністю задається положеннями та швидкостями (або імпульсами) всіх частинок, що входять до її складу. Системи такого типу зручно описувати за допомогою гамільтонівського формалізму.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, гамільтоніаном $H=H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ називають повну енергію системи, записану через її узагальнені імпульси $\mathbf{p}=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ та узагальнені координати $\mathbf{q}=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Якщо гамільтоніан системи не залежить від часу, така система, очевидно, буде консервативною (і автономною). Явна залежність гамільтоніана від часу відповідає неавтономній системі, тобто системі, на яку діє зовнішня сила.

З принципу найменшої дії можна вивести так звані рівняння Гамільтона – рівняння руху системи у формі:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, n. \quad (3.1.1)$$

Розв'язок рівнянь Гамільтона для системи з n ступенями вільності описує рух зображувальної точки в $2n$ -вимірному фазовому просторі $\{\mathbf{p},\mathbf{q}\}$.

Гамільтонівський формалізм застосовний і тоді, коли гамільтоніан явно залежить від часу.

3.1.1.2. Теорема Ліувілля

Розглянемо деяку обмежену замкнену область Ω_0 у фазовому просторі, яку назвемо фазовою краплею. Будемо розглядати точки цієї області як початкові умови для набору фазових траєкторій, задані в момент $t=0$. З плином часу зображувальні точки рухатимуться у фазовому просторі вздовж відповідних фазових траєкторій. Відповідно рухатиметься утворена ними фазова крапля, яку в момент t позначимо через Ω_t .

З рівнянь Гамільтона випливає умова нестисливості фазової рідини:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] = 0, \quad (3.1.2)$$

яку можна переписати у формі:

$$\int_{\Omega_0} d\bar{p}d\bar{q} = \int_{\Omega_t} d\bar{p}d\bar{q}. \quad (3.1.2 \text{ a})$$

Співвідношення (3.1.2)-(3.1.2 a) складають зміст теореми Ліувілля.

3.1.1.3. Канонічні перетворення

У формалізмі Гамільтона є два набори незалежних змінних, p_i та q_i , які фактично рівноправні. Вибір цих змінних є неоднозначним. Можна розглянути перехід до деякого іншого набору змінних P_i та Q_i , так що

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n), \quad (3.1.3)$$

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n).$$

Якщо при цьому канонічна форма рівнянь Гамільтона зберігається, тобто

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad (3.1.1 \text{ a})$$

де $H'(\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ – перетворений гамільтоніан, то перетворення (3.1.3) називають канонічними.

При канонічних перетвореннях фазовий об'єм повинен зберігатися:

$$\int_{\Omega} d\bar{q}d\bar{p} = \int_{\Omega} d\bar{P}d\bar{Q} \quad (3.1.4)$$

Оскільки диференціали в інтегралах (3.1.4) пов'язані між собою через якобіан перетворення, то останній має дорівнювати одиниці:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_1, \dots, P_n; \mathbf{Q}_1, \dots, Q_n}{\partial \mathbf{P}_1, \dots, P_n; \mathbf{Q}_1, \dots, Q_n} = \frac{\partial \mathbf{P}_1, \dots, P_n; q_1, \dots, q_n}{\partial \mathbf{P}_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n} = 1. \quad (3.1.4 \text{ a})$$

3.1.1.4. Змінні дія-кут

Канонічні перетворення можна використати для спрощення рівнянь руху. Оптимальним є випадок, коли $H' = H(\mathbf{P})$, тобто всі узагальнені координати є, як кажуть, циклічними змінними. Тоді

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_i} = f_i(\mathbf{P}_1, \dots, P_n). \quad (3.1.1 \text{ б})$$

Визначенні таким чином імпульси P_i є інтегралами руху. Знання їх дає можливість проінтегрувати рівняння Гамільтона. В результаті отримуємо:

$$P_i = const, \quad Q_i = f_i(P_1, \dots, P_n) t + \delta_i, \quad (3.1.5)$$

де набір сталих δ_i визначається з початкових умов.

Умова $H' = H(\mathbf{P})$ сама по собі ще не дозволяє однозначно ввести нові узагальнені імпульси та узагальнені координати.

Розглянемо гамільтонівську систему з одним ступенем вільності, яка здійснює фінітний рух. Такий рух обов'язково буде періодичним із деяким періодом $2\pi/\omega$. Нехай для цієї

системи $H=H(P)$. Накладемо умову на змінну Q : вимагатимемо, щоб на періоді $2\pi/\omega$ вона змінювалася на 2π . Це, в свою чергу, однозначно визначає змінну P . Введені таким чином змінні I, θ називаються змінними дія-кут. Можна показати, що дія визначається через “старі” змінні із співвідношення

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (3.1.6)$$

(інтеграл береться при заданому значенні повної енергії системи). Для найпростішої моделі лінійного осцилятора $I=E/\omega$, тобто дія лінійно пов’язана з повною енергією системи.

Таким чином, розв’язок рівнянь Гамільтона для системи з одним ступенем вільності у змінних дія-кут має вигляд:

$$I = const, \quad \theta = \omega I t + \delta. \quad (3.1.5 a)$$

Залежність $\omega(I)$ виражає закон неізохронності осцилятора, тобто останній у загальному випадку вважається нелінійним.

3.1.1.5. Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут

Фазовий портрет нелінійного осцилятора в координатах дія-кут зручно малювати в полярних координатах, де по радіусу відкладена дія I , а по куту – кут θ . Він являтиме собою набір концентричних кіл, кожному з яких внаслідок неізохронності відповідає своя частота обертання зображувальної точки (рис. 3.1.1 а).

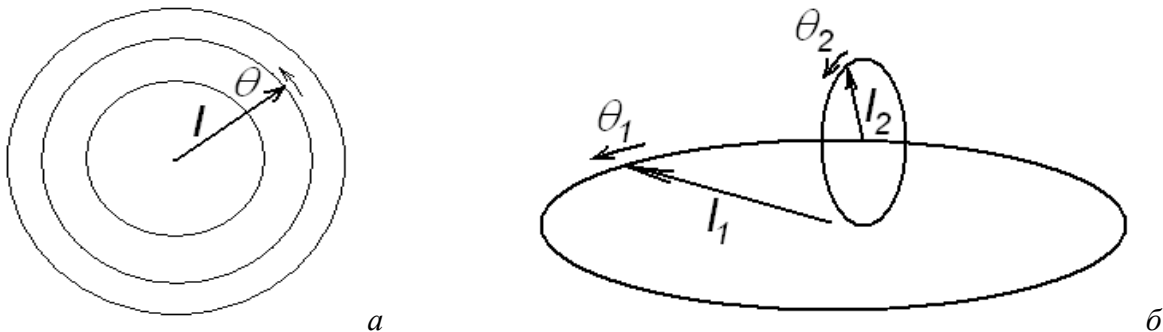


Рис. 3.1.1. Фазовий портрет в координатах дія-кут для системи з однією (а) та двома (б) ступенями вільності..

3.1.1.6. Інтегровні системи з багатьма ступенями вільності

Перейдемо тепер до розгляду систем із довільним числом ступенів вільності. Для таких систем перехід до змінних дія-кут можливий не завжди. Системи, для яких він можливий, називаються інтегровними. Як і для систем з одним ступенем вільності, для інтегрованих систем гамільтоніан залежить лише від дій і не залежить від кутів, а рух системи є періодичним по кожному з кутів із періодом 2π . В результаті рівняння руху набувають вигляду

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\theta}_j = \omega_j, \quad \omega_j \equiv \frac{\partial H}{\partial I_j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.1.1 в)$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\vec{I} = const, \quad \vec{\theta} = \vec{\omega} t + \vec{\delta}_0. \quad (3.1.5 б).$$

Питання про визначення інтегровності довільної системи звичайних диференціальних рівнянь залишається відкритим. Гіпотеза з цього приводу, що досі залишається недоведеною, була висловлена С.В.Ковалевською. Вона зводиться до того, що інтегровність пов’язана з наявністю деяких особливостей розв’язків цих рівнянь у комплексній площині.

Обговоримо тепер вигляд фазового портрету інтегрованої системи.

3.1.1.7. Фазовий портрет інтегрованої системи з двома ступенями вільності

Для систем з двома ступенями вільності фазовий простір чотирирівимірний. Умови $I_1 = \text{const}$ та $I_2 = \text{const}$ визначають у цьому просторі деяку двовимірну поверхню – поверхню тора. Відповідно фазова траєкторія, що відповідає цим значенням дії, лежить на поверхні тора і називається обмоткою тора (рис. 3.1.1 б).

В цьому випадку весь фазовий простір являє собою сукупність вкладених один в одного торів з радіусом I_1 та I_2 (у чотирирівимірному просторі напрямки I_1 та I_2 рівноправні). Аналогічна картина матиме місце для будь-якої інтегрованої системи з двома ступенями вільності. При цьому для нелінійних систем частоти обертання $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2)$ та $\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2)$ будуть, взагалі кажучи, змінюватися від тора до тора. В загальному випадку змінюватиметься й відношення частот ω_1/ω_2 .

Поведінка фазових траєкторій істотно залежить від того, чи буде відношення ω_1/ω_2 раціональним. Якщо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}, \quad (3.1.7)$$

де m, n – цілі числа, то через m витків навколо головної осі тора і n витків навколо допоміжної осі, фазова траєкторія замкнеться, тобто через час $T = 2\pi m/\omega_1 = 2\pi n/\omega_2$ система відновить початковий стан. Тори, для яких виконано умови вигляду (3.1.7), називаються резонансними.

Якщо відношення ω_1/ω_2 є ірраціональним, фазова траєкторія ніколи не замикається, хоча з плином часу вона буде як завгодно близько підходити до будь-якої точки на поверхні тора. У цьому випадку говорять, що фазова траєкторія утворює всюди щільну обмотку тора, а рух системи називають квазіперіодичним, або умовно періодичним. Відповідні тори називають нерезонансними.

У реальних ситуаціях (це стосується як натурних експериментів, так і числового моделювання) час спостереження за системою завжди буває обмеженим, тому при дуже великих m і n відрізнити періодичний і квазіперіодичний рух важко.

3.1.1.8. Резонансні та нерезонансні тори для системи з довільним числом ступенів вільності

Повернемося тепер до загального випадку інтегрованих системи з n ступенями вільності. Для таких систем $2n$ -вимірний фазовий простір у змінних дія-кут має структуру n -вимірних торів. Довільна фазова траєкторія лежить на поверхні одного з них.

Говорять, що n -вимірний тор є резонансним, якщо для відповідних значень I_1, I_2, \dots, I_n існує набір відмінних від нуля цілих чисел m_i , що задовольняють умові

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0. \quad (3.1.7 \text{ а})$$

На відміну від системи з двома ступенями вільності, при $n > 2$ умови (3.1.7 а) вже не достатньо для того, щоб рух на поверхні резонансного тора був строго періодичним і відбувався вздовж замкненої фазової траєкторії. Втім, будь-яка замкнена фазова траєкторія, очевидно, обов'язково лежатиме на поверхні саме резонансного тора. Отже, рух на поверхні резонансного тора при $n > 2$ може бути як періодичним, так і квазіперіодичним.

Для нерезонансного тора умова вигляду (3.1.7 а) не виконується при жодних значеннях m_i . Будь-яка фазова траєкторія всюди щільно заповнює поверхню нерезонансного тора, і рух є квазіперіодичним.

3.1.1.9. Умова невиродженості

Побудуємо квадратну матрицю з елементів $\partial \omega_i / \partial I_j = \partial^2 H(\mathbf{I}) / \partial I_i \partial I_j$. Якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля,

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0, \quad (3.1.8)$$

відповідна система називається невинродженою. Фактично умова невинродженості означає, що принаймні деякі елементи $\partial\omega_j/\partial I_j$ відмінні від нуля, тобто така система є неізохронною, а, отже, й нелінійною. Для невинроджених систем у фазовому просторі резонансні і нерезонансні тори певним чином чергуються.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.1

1. Чи однозначно вводяться змінні дія-кут? Яка умова однозначно визначає їхню величину?
2. Чи можливий граничний перехід між резонансними та нерезонансними торами в інтегровній системі?
3. Дайте фізичну інтерпретацію теореми Ліувілля.
4. В яких випадках рух інтегровної гамільтонівської системи буде ергодичним?

Задачі до підрозділу 3.1.1

3.1.1.1. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H(\varphi, \vec{\theta}) = \omega_0 (\varphi_1 + I_2) + \frac{1}{2} \alpha (\varphi_1^2 + I_2^2) + \beta I_1 I_2.$$

Яким значенням дій відповідають резонансні тори порядків 1, 1/2 та 2/3?

3.1.2. Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних

Нехай для деякої гамільтонівської системи з n ступенями вільності гамільтоніан можна подати у вигляді

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{I}) + \dots \quad (3.1.9)$$

Якщо $0 < \varepsilon \ll 1$, говорять, що така система є близькою до інтегровної.

Рух інтегровних гамільтонівських систем є регулярним (періодичним або квазіперіодичним). Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, демонструють зародження хаотичної динаміки.

Нагадаємо, що причиною виникнення хаотичної динаміки (непередбачуваності) в системах із невеликою кількістю ступенів вільності є поєднання нестійкості системи, яка виявляється в розбіжності з часом сусідніх зображувальних точок з часом, із обмеженістю (фінітністю) руху. Початкові умови, необхідні для передбачення руху системи, завжди відомі лише зі скінченною точністю. Внаслідок нестійкості початкова невизначеність з часом зростає, так що через деякий час вона виявляється за порядком величини такою самою, як передбачене значення. Це й означає непередбачуваність руху системи.

3.1.2.1. Канонічна теорія збурень для нелінійного осцилятора

Подивимося, чи не можна гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, просто звести до інтегровного випадку. Застосуємо для цього канонічну теорію збурень.

Канонічна теорія збурень оперує зі змінними дія-кут. Розглянемо спершу її застосування для систем з одним ступенем вільності.

Розглянемо гамільтоніан вигляду $H(I, \theta, \varepsilon)$, що залежить від малого параметра ε ($0 < \varepsilon \ll 1$). Розкладемо його в ряд Тейлора за малим параметром:

$$H(I, \theta, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta) + \varepsilon^2 H_2(I, \theta) + \dots \quad (3.1.10)$$

(змінні I, θ відповідають дії та куту при $\varepsilon=0$).

Рівняння Гамільтона для гамільтоніана (3.1.10) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial \theta} - \dots \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial I} + \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Ідея канонічного перетворення полягає у знаходженні для збуреного (порівняно з випадком $\varepsilon=0$) гамільтоніана $H(I, \theta, \varepsilon)$ нових змінних J, φ , для яких можливе канонічне перетворення до нового гамільтоніана K , причому $K=K(J)$. Для знаходження цих змінних необхідно спочатку відшукати твірну функцію $F_2=F_2(\theta, J)$, таку, що

$$I = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial \theta}, \quad \varphi = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial J}. \quad (3.1.12)$$

3.1.2.2. Рівняння Гамільтона – Якобі

Очевидно, твірна функція, як і початковий гамільтоніан, залежить від малого параметра ε . Розкладемо її в ряд Тейлора за цим параметром:

$$F_2(\theta, J) = F_{20}(\theta, J) + \varepsilon F_{21}(\theta, J) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, J) + \dots \quad (3.1.13)$$

При $\varepsilon=0$ нові змінні J, φ повинні збігатися зі старими I, θ . Тому, щоб задовольнити у цьому випадку співвідношення (3.1.12), слід покласти

$$F_{20}(\theta, J) = J\theta. \quad (3.1.14)$$

Прирівняємо старий гамільтоніан H у вигляді ряду (3.1.10) з урахуванням першого зі співвідношень (3.1.12) до нового гамільтоніана K . Отримаємо так зване рівняння Гамільтона – Якобі:

$$H_0\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \varepsilon^2 H_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \dots = K(J) \quad (3.1.15)$$

Замінімо похідні в аргументах доданків у лівій частині (3.1.15) за допомогою ряду (3.1.13) і подамо їх у вигляді рядів Тейлора за ε :

$$H_0 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta} \right) = H_0 \left(J + \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \dots \right) =$$

$$= H_0 J + \varepsilon \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \left[\frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \dots \quad (3.1.16)$$

$$H_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta \right) = H_1 J, \theta + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \dots \quad (3.1.17)$$

$$H_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta \right) + \dots = H_2 J, \theta + \dots \quad (3.1.18)$$

(у (3.1.16)-(3.1.18) залишені доданки, які відповідають членам до другого порядку мализни включно у лівій частині рівняння Гамільтона - Якобі (3.1.15)).

3.1.2.3. Знаходження елементів ряду для нового гамільтоніана

Новий гамільтоніан $K=K(J,\varepsilon)$ у правій частині (3.1.15), який у загальному випадку залежить від малого параметра ε , також можна розкласти в ряд Тейлора за ε :

$$K J, \varepsilon = K_0 J + \varepsilon K_1 J + \varepsilon^2 K_2 J + \dots \quad (3.1.19)$$

Тепер підставимо (3.1.16)-(3.1.19) до (3.1.15):

$$H_0 J + \varepsilon \left[H_1 J, \theta + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right] + \varepsilon^2 \left[H_2 J, \theta + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \dots =$$

$$= K_0 J + \varepsilon K_1 J + \varepsilon^2 K_2 J + \dots \quad (3.1.20)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε у лівій та правій частинах (3.1.20), можна отримати елементи ряду (3.1.19) у явному вигляді:

$$K_0 J = H_0 J ;$$

$$K_1 J = H_1 J, \theta + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} ;$$

$$K_2 J = H_2 J, \theta + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right)^2 ;$$

.....

3.1.2.4. Знаходження твірної функції

Перепишемо друге з рівнянь (3.1.21) у формі:

$$K_1 J = H_1 J, \theta + \omega_0 J \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}. \quad (3.1.21 \text{ а})$$

Усереднимо обидві частини (3.1.21 а) за θ на проміжку $[0, 2\pi]$. Оскільки ліва частина взагалі не залежить від θ , вона не зміниться. Отримаємо:

$$K_1 J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 J, \theta d\theta + \omega_0 J \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} d\theta. \quad (3.1.21 \text{ б})$$

Для розрахунку останнього інтегралу в правій частині (3.1.21 б) розкладемо функцію $F_{21}(\theta, J)$ в ряд Фур'є за θ (це можна зробити, оскільки вона періодична за θ з періодом 2π):

$$F_{21} J, \theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k J \exp ik\theta. \quad (3.1.22)$$

При підстановці (3.1.22) до (3.1.21 б) доданок, що відповідає значенню $k=0$, зникне при диференціюванні за θ . Решта доданків при інтегруванні перетворяться в нуль. Таким чином, рівняння (3.1.21 б) набуде вигляду

$$K_1 J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 J, \theta d\theta \equiv \overline{H_1 J, \theta} . \quad (3.1.21 \text{ в})$$

Таким чином, знаючи вигляд гамільтоніана $H_1(I, \theta)$, ми за допомогою (3.1.21 в) можемо знайти функцію $K_1(J)$. Тоді з рівняння (3.1.21 а) можна знайти похідну від твірної функції:

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} = \frac{K_1 J - H_1 J, \theta}{\omega_0 J} = -\frac{\tilde{H}_1 J, \theta}{\omega_0 J}, \quad (3.1.23)$$

де

$$\tilde{H}_1 J, \theta \equiv H_1 J, \theta - \overline{H_1 J, \theta} \quad (3.1.24)$$

– змінна частина гамільтоніана $H_1(I, \theta)$. Її також можна розкласти в ряд Фур'є за θ :

$$H_1 J, \theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k J \exp ik\theta , \quad (3.1.25)$$

тобто коефіцієнти $A_k(J)$ можна вважати відомими.

Підставимо (3.1.22) та (3.1.25) до (3.1.23). Прирівнявши коефіцієнти при однакових експонентах у правій та лівій частинах, можна знайти в явному вигляді коефіцієнти ряду (3.1.22)

$$B_k J = \frac{iA_k J}{k\omega_0 J}, \quad (3.1.26)$$

тобто твірну функцію (з точністю до доданків першого порядку за ε :

$$F_2 J, \theta = J\theta + \frac{i\varepsilon}{\omega_0 J} \sum_{k \neq 0} \frac{A_k J}{k} \exp ik\theta + \dots \quad (3.1.26 \text{ а})$$

В свою чергу, знаючи твірну функцію, із співвідношень (3.1.12) можна знайти нові змінні дія-кут. Скоригована частота, виходячи з (3.1.19), визначається співвідношенням

$$\omega J = \omega_0 J + \varepsilon \frac{\partial K_1 J}{\partial J}. \quad (3.1.27)$$

Як бачимо, секулярні доданки в цьому розрахунку не виникають. Процедура можна продовжити, шукаючи поправки вищих порядків за ε . Проблеми можуть виникнути лише при $\omega_0 \rightarrow 0$, тобто при русі вздовж сепаратриси. Ці результати є цілком передбачуваними, оскільки, як нам уже відомо, гамільтонівські системи з одним ступенем вільності завжди є інтегровними.

3.1.2.5. Канонічна теорія збурень для систем із багатьма ступенями вільності

Розглянемо тепер загальний випадок системи, близької до інтегровної, тобто системи з гамільтоніаном (3.1.9).

В нульовому наближенні за малим параметром ε рівняння руху мають вигляд:

$$\dot{\vec{I}} = -\nabla_{\theta} H_0 \vec{I} = 0, \quad \dot{\vec{\theta}} = -\nabla_I H_0 \vec{I} \equiv \vec{\omega}_0 \vec{I}, \quad (3.1.1 \text{ в})$$

де

$$\nabla_{\theta} \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}, \quad \nabla_I \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial I_k}. \quad (3.1.28)$$

Як і в попередньому випадку, спробуємо знайти набір канонічних змінних \mathbf{J} , ϕ , які перетворюють гамільтоніан $H(\mathbf{I}, \theta)$ у гамільтоніан $K(\mathbf{J})$. Нові змінні знаходимо із співвідношень, аналогічних до (3.1.12):

$$\vec{I} = \nabla_{\theta} F_2 \vec{J}, \vec{\theta}, \quad \vec{\theta} = \nabla_I F_2 \vec{J}, \vec{\theta}. \quad (3.1.29)$$

Твірну функцію $F_2(\mathbf{J}, \theta)$ можна записати аналогічно до (3.1.13)-(3.1.14):

$$F_2 \vec{J}, \vec{\theta} = \vec{\theta} \cdot \vec{J} + \varepsilon F_{21} \vec{J}, \vec{\theta} + \varepsilon^2 F_{22} \vec{J}, \vec{\theta} + \dots \quad (3.1.30)$$

Рівняння Гамільтона - Якобі з точністю до доданків першого порядку за ε має вигляд:

$$H_0 \vec{J} + \varepsilon \nabla_{\theta} F_{21} + \varepsilon H_1 \vec{J}, \vec{\theta} = K_0 \vec{J} + \varepsilon K_1 \vec{J} . \quad (3.1.31)$$

З нього легко отримати перші доданки розкладу гамільтоніана $K(\mathbf{J})$ в ряд Тейлора за малим параметром ε :

$$K_0 \vec{J} = H_0 \vec{J} ;$$

$$K_1 \vec{J} = H_1 \vec{J}, \vec{\theta} + \nabla_{\mathbf{J}} H_0 \vec{J} \cdot \nabla_{\theta} F_{21} \vec{J}, \vec{\theta} = H_1 \vec{J}, \vec{\theta} + \vec{\omega} \vec{J} \cdot \nabla_{\theta} F_{21} \vec{J}, \vec{\theta} . \quad (3.1.32)$$

Після усереднення по всіх кутах отримаємо:

$$K_1 \vec{J} = \frac{1}{2\pi^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n H_1 \vec{J}, \vec{\theta} .$$

Розкладемо поправку першого порядку до твірної функції $F_{21}(\mathbf{I}, \theta)$ та змінну частину поправки до гамільтоніана

$$\tilde{H}_1 \vec{J}, \vec{\theta} \equiv H_1 \vec{J}, \vec{\theta} - \overline{H_1 \vec{J}, \vec{\theta}} \quad (3.1.34)$$

в багатовимірні ряди Фур'є по кутах:

$$F_{21} \vec{J}, \vec{\theta} = \sum_{|\vec{m}| \neq 0} B_{\vec{m}} \vec{J} \exp i\vec{m} \cdot \vec{\theta} ; \quad (3.1.35)$$

$$H_1 \vec{J}, \vec{\theta} = \sum_{|\vec{m}| \neq 0} A_{\vec{m}} \vec{J} \exp i\vec{\omega} \cdot \vec{\theta} ; \quad (3.1.36)$$

$$\vec{m} = m_1, m_2, \dots, m_n .$$

Підставивши (3.1.35)-(3.1.36) до (3.1.32), можна отримати вираз для $F_{21}(\mathbf{I}, \theta)$:

$$F_{21} \vec{J}, \vec{\theta} = i \sum_{|\vec{m}| \neq 0} \frac{A_{\vec{m}} \vec{J} \exp i\vec{m} \cdot \vec{\theta}}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0 \vec{J}} . \quad (3.1.37)$$

Як бачимо, у випадку, коли частоти $\omega_{0i}(\mathbf{I})$ сумірні, тобто для деякого набору індексів підсумовування \mathbf{m} виконано умову резонансу вигляду

$$\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0 \vec{J} = 0 \quad (3.1.38)$$

(пор. із 3.1.7 а), сума (3.1.37) не буде збігатися. Це відома в класичній механіці проблема малих знаменників.

Таким чином, гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, вдається звести до інтегровного випадку лише тоді, коли йдеться про рух на нерезонансних торах. Для руху по резонансних торах мале неінтегровне збурення в гамільтоніані дає якісно новий ефект.

3.1.2.6. Теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера

Відповідь на питання про те, що відбувається з фазовими траєкторіями на поверхні резонансних торів під дією малого неінтегровного доданку до гамільтоніану, в загальних рисах дає теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера (теорема КАМ). Вона була сформульована А.М.Колмогоровим, він же висловив ідею її доведення (ДАН ССРСР, 1954, **98**, 574). Доведення теореми КАМ здійснив В.І.Арнольд (УМН, 1963, **18**, 85). Інший частинний випадок теореми КАМ дещо раніше довів Дж. Мозер (J.Moser, Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys., **K1**, 1 (1962)).

Розглянемо систему, близьку до інтегровної, з гамільтоніаном

$$H(\mathbf{Q}, \vec{I}) \approx H_0(\mathbf{Q}) + \varepsilon H_1(\mathbf{Q}, \vec{I}) , \quad (3.1.9)$$

причому $0 < \varepsilon \ll 1$. Вважатимемо інтегровну частину гамільтоніана невідродженою, так що виконано умову

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0(\vec{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0 . \quad (3.1.8)$$

Врахування неінтегровного збурення в гамільтоніані приводить до того, що нерезонансні тори лише трохи деформуються, а характер руху на них зберігається (такі тори називають інваріантними). Резонансні тори руйнуються, на їхньому місці виникають області, де рух носить нерегулярний характер, відмінний від періодичного та квазіперіодичного. Розмір цих областей прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Можна сказати точніше: чим більше величина

$$|\vec{m}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n m_k^2}, \quad (3.1.39)$$

яка характеризує порядок резонансу (3.1.38), тим менша за розмірами область утворюється на місці відповідного резонансного тора.

Інваріантні нерезонансні тори навколо області нерегулярного руху, що утворилася на місці резонансного тора, який характеризується співвідношенням $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, зберігаються за виконання умови

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| = \left| \sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right| > \frac{C \varepsilon}{|\vec{m}|^{n+1}}, \quad (3.1.40)$$

причому, як уже відзначалося, $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.1.2.7. Дифузія Арнольда

Існує якісна відмінність між поведінкою гамільтонівських систем, близьких до інтегровних, у випадках $n \leq 2$ та $n > 2$ (n – число ступенів вільності).

Системі з n ступенями вільності відповідає фазовий простір з розмірністю $2n$. Для автономної гамільтонівської системи зображувальна точка рухається на гіперповерхні сталої енергії, яка має розмірність $2n-1$. З іншого боку, інваріантні тори мають розмірність n . Такі тори можуть відділити області нерегулярного руху одну від одної, якщо їхня розмірність буде не більше ніж на одиницю меншою, ніж розмірність області, де рухається зображувальна точка, тобто від розмірності гіперповерхні сталої енергії. Справді, для того, щоб відділити два об'єми (розмірність 3), потрібна щонайменше поверхня (розмірності 2); лінія (розмірність 1) цього зробити не може. Таким чином, області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, будуть відділені одна від одної за виконання умови $n \geq (2n-1)-1$, або $n \leq 2$.

Можна сказати, що при $n \leq 2$ області нерегулярного руху затиснуті між інваріантними торами. Іншими словами, якщо зображувальна точка потрапила в проміжок між двома інваріантними торами, вона залишиться там назавжди. Це означає, що в процесі руху системи значення її дії практично не змінюватиметься. Отже, для таких систем за будь-яких початкових умов зберігається глобальна стійкість руху. Можна навіть говорити про орбітальну стійкість руху. Фазовий простір такої системи умовно зображений на рис. 3.1.2.

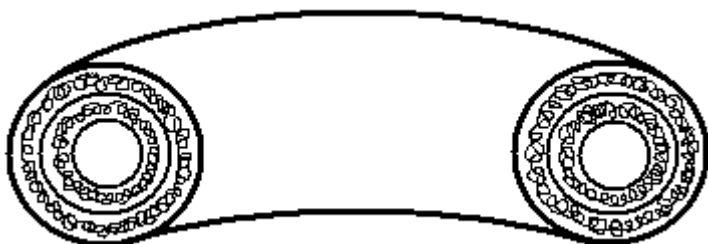


Рис. 3.1.2. Области нерегулярного руху, затиснуті між інваріантними торами, при $n \leq 2$.

При $n > 2$ інваріантні тори вже не можуть відділити області нерегулярного руху одна від одної. В результаті ці області межують одна з одною, утворюючи єдину складну мережу – так звану павутину Арнольда. Рухаючись уздовж цієї павутини, зображувальна точка може (залишаючись, зрозуміло, на гіперповерхні сталої енергії) відійти як завгодно далеко від свого початкового положення. При цьому, очевидно, може помітно змінюватися не тільки зна-

чення кута, але й значення дії. Такий рух зображувальної точки прийнято називати дифузиею Арнольда. Наслідком дифузії Арнольда є відсутність глобальної стійкості гамільтонівських систем, близьких до інтегровних, при $n > 2$.

Характерною особливістю дифузії Арнольда є відсутність порогу ε , необхідного для її виникнення.

На завершення слід відзначити, що умови теореми КАМ сформульовані таким чином, щоб її можна було строго довести математично. В дійсності її результати в більшості своїй залишаються справедливими і тоді, коли порушується, наприклад, умова невиводженості.

3.1.2.8. Теорема Пуанкаре – Біркгофа

Теорема КАМ нічого не говорить про те, як саме змінюється характер руху на резонансних торах під дією малого неінтегровного збурення в гамільтоніані. Відповідь на це питання дає теорема Пуанкаре – Біркгофа.

Перетнемо сім'ю незбурених двовимірних торів площиною. Лінії перетину являють собою набір концентричних кіл. Розглянемо одне з таких кіл G , що відповідає резонансному тору, та два сусідні кола G^+ та G^- по різні боки від нього, які відповідають нерезонансним торам (рис. 3.1.3 а). Нехай резонансному тору відповідають частоти ω_1 та ω_2 ($\omega_1/\omega_2 = m/n$), причому частота ω_1 відповідає обертанню по колу G .

Нехай тепер гамільтоніан зазнав малого неінтегровного збурення. Як впливає з теореми КАМ, криві G^+ та G^- лише дещо деформуються. Теорема Пуанкаре – Біркгофа стверджує, що від кривої залишиться тільки $2kn$ ($k=1, 2, 3, \dots$) нерухомих точок, причому стійкі (еліптичні, або центри) та нестійкі (гіперболічні, або сідла) точки чергуються. В результаті на місці кола G утворюється структура, показана на рис. 3.1.3 б.

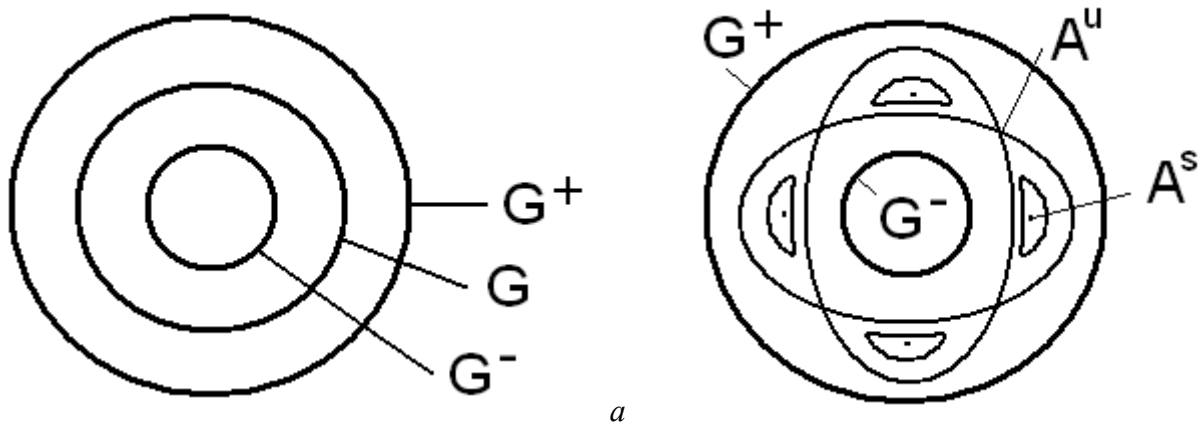


Рис. 3.1.3: а – лінії перетину з площиною резонансного (крива G) та сусідніх нерезонансних (криві G^+ та G^-) торів; б – стійкі (A^s) та нестійкі (A^u) точки ($kn=4$), що утворилися на місці зруйнованого резонансного тора, та фазові траєкторії, що їх оточують.

У чотиривимірному фазовому просторі кожній замкненій кривій, що оточує стійку нерухому точку, відповідає тор, на який намотана фазова траєкторія. Серед цих торів також можна виділити резонансні та нерезонансні. Застосовуючи до них теорему КАМ, приходимо до висновку, що резонансні тори руйнуються під дією неінтегровного збурення гамільтоніану. На площині, що перетинає тори, відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа, на місці замкнених кривих, що відповідали зруйнованим резонансним торам, виникають нові центри та сідла, оточені відповідними фазовими траєкторіями. Продовжуючи цей процес, приходимо до висновку, що в результаті утворюється дуже складна структура фрактального типу (рис. 3.1.4).

Як відомо, рух в околі сідлової точки є нестійким. Таким чином, саме в околах сідлових точок, що виникають в результаті руйнування резонансних торів під дією неінтегровного збурення в гамільтоніані, зароджується хаотична динаміка системи. В околі цих точок утво-

рюються так звані гомоклінічні структури – складні геометричні утворення, по яких і рухається зображувальна точка.

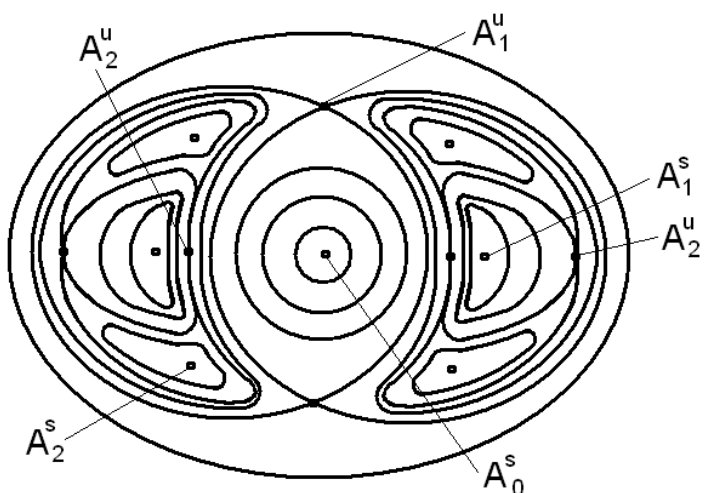


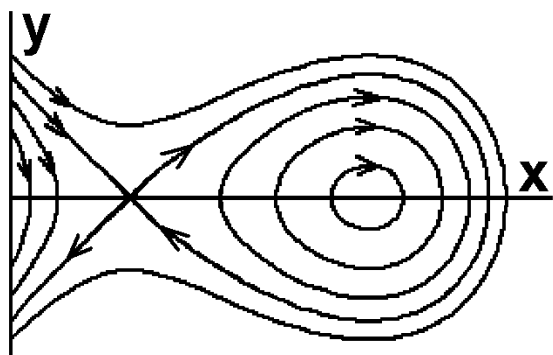
Рис. 3.1.4. Руйнування резонансних торів першого порядку. Показані стійкі та нестійкі точки нульового, першого та другого порядків.

3.1.2.9. Гомоклінічні структури

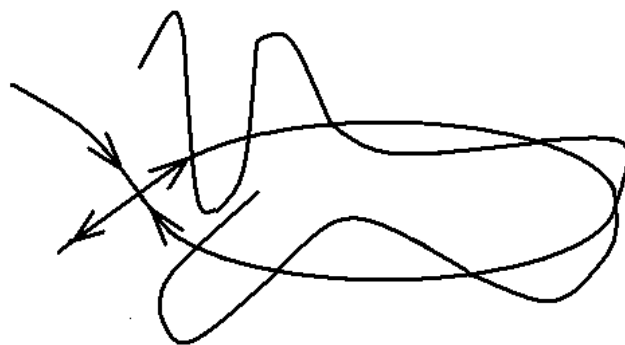
Утворення гомоклінічної структури найпростіше можна проілюструвати на прикладі консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю, на який діє періодична зовнішня сила:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = f_m \exp i p t . \quad (3.1.41)$$

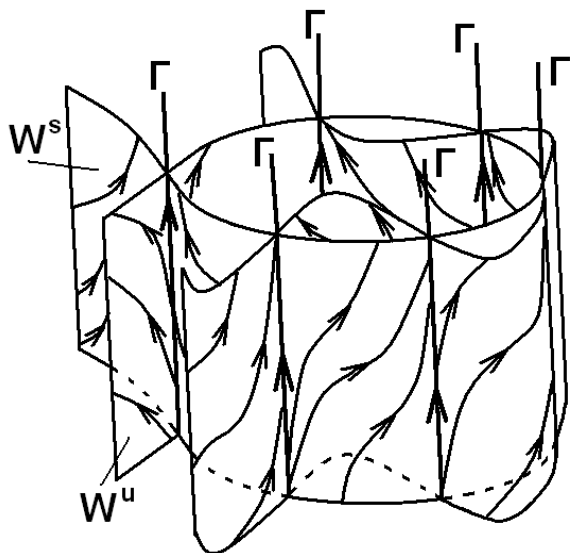
Фазовий портрет осцилятора за відсутності зовнішньої сили поданий на рис. 3.1.5 а. Він містить петлю сепаратриси, що починається та закінчується в сідловій точці.



а



б



в

Рис. 3.1.5: а – фазовий портрет автономного консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю; б – розщеплення петлі сепаратриси під дією періодичної зовнішньої сили; в – схематичне зображення тривимірного фазового портрету (Γ – сідлові траєкторії).

Наявність залежної від часу зовнішньої сили додає системі половину ступеню вільності, а розмірність її фазового простору зростає на одиницю i , таким чином, дорівнює трьом. За відсутності зовнішньої сили криві, показані на рис. 3.1.5 а, перетворюються на циліндричні поверхні (твірні яких перпендикулярні до площини xu), на які й навиваються фазові траєкторії. Відповідно замість сідлової точки утворюється деяка лінія – сідлова траєкторія, яка характеризується чотирма інваріантними многовидами (аналог асимптот на площині). Два з цих многовидів, по яких фазові траєкторії наближаються до сідлової траєкторії, називають стійкими, два інші – відповідно, нестійкими. В аналізованому випадку один із нестійких многовидів (який, власне, й утворює петлю сепаратриси) безпосередньо переходить у стійкий.

Під дією періодичної зовнішньої сили петля сепаратриси розщеплюється таким чином, що нестійкий многовид уже не переходить у стійкий (це схематично показано на рис. 3.1.5 б). Нестійкий многовид при наближенні до сідлової траєкторії здійснює осциляції, просторовий крок яких поступово зменшується, а амплітуда, навпаки, зростає. Аналогічні осциляції здійснює стійкий многовид при віддаленні від сідлової траєкторії. В результаті утворюється так звана гомоклінічна структура (рис. 3.1.5 в). Вона включає зчислену кількість сідлових траєкторій, між якими й блукають фазові траєкторії. Рух в околі кожної з таких сідлових траєкторій є нестійким, в результаті чого поведінка системи виявляється непередбачуваною.

3.1.2.10. Вуса та завитки

Ми розглянули утворення гомоклінічної структури для випадку петлі сепаратриси, що містить єдину сідлову точку. Однак щось подібне утворюється і в тому випадку, коли петля сепаратриси містить не одну, а дві сідлові точки (як на рис. 3.1.3 б).

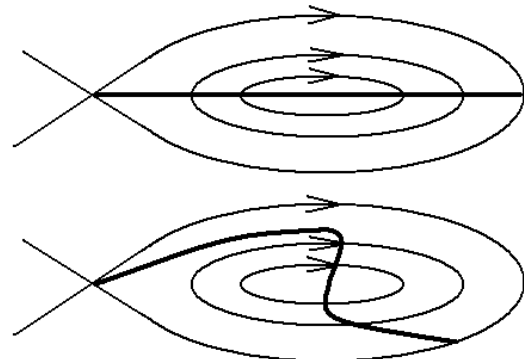
Розглянемо тепер, як буде деформуватися у фазовому просторі з часом відрізок лінії (зрозуміло, що такий відрізок відповідає певному неперервному набору початкових умов системи). Тут прийнято виділяти два характерних випадки.

Якщо розглянути відрізок, що потрапив, наприклад, на нестійкий многовид гомоклінічної структури, то з часом, при наближенні до сідлової траєкторії, на ньому утворюються характерні гомоклінічні осциляції. Такий об'єкт прийнято називати вусом (рис 3.1.6 а).

Нехай тепер відрізок початково вміщує точку типу центр (в площині xu). Якби коливання, що відповідають різним фазовим траєкторіям, відбувалися з однаковою частотою, відрізок обертався б як єдине ціле. Але внаслідок неізохронності обертання навколо центру цей відрізок з часом сильно деформується і перетворюється на так званий завиток (рис 3.1.6 б).



а



б

Рис. 3.1.6. Утворення вуса (а) та завитка (б).

3.1.2.11. Теорія КАМ і магнітне утримання плазми

Абстрактний фазовий простір, що відповідає гамільтонівським системам, близьким до інтегровних, може збігатися з реальним простором деяких фізичних систем. Прикладом та-

ких систем є тороїдальні магнітні пастки – стеларатори⁹ або токамаки¹⁰.

У тороїдальних магнітних пастках прагнуть створити магнітне поле, силові лінії якого були б спіралями, намотаними на послідовність вкладених торів, причому крок спіралі повинен змінюватися від тора до тора (рис. 3.1.7). Ці реальні поверхні можна розглядати як аналог КАМ-тора в тривимірному фазовому просторі деякої гамільтонівської системи з півтора ступенями вільності. Співвідношення частот обертання навколо головної осі (йому відповідає так званий тороїдальний кут φ) та навколо допоміжної осі (йому відповідає полоїдальний кут θ) ω_1/ω_2 є відомий у теорії магнітних пасток фактор безпеки q .

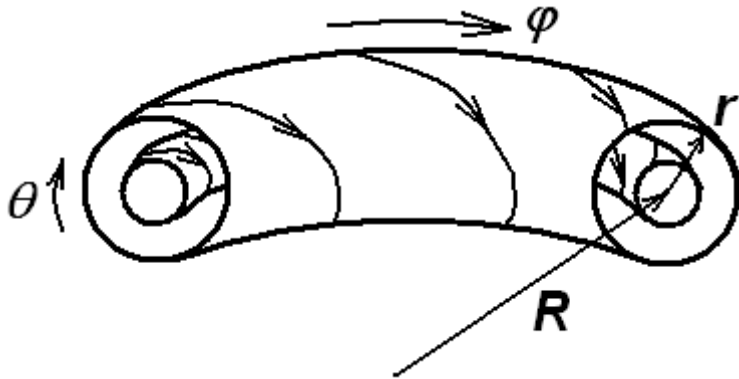


Рис. 3.1.7. Схематичне зображення силових ліній магнітного поля у тороїдальній магнітній пастці.

У системах типу стелараторів наявні два зовнішні магнітні поля: спіральне, яке змінюється за законом типу $\cos(m\theta - l\varphi)$, та тороїдальне поле вигляду

$$B_\varphi \vec{r} = \frac{B_0}{1 + r/R \cos\theta}, \quad (3.1.42)$$

де r і R – відповідно малий та великий радіуси тора.

Перша з компонент, в принципі, здатна утримувати плазмовий шнур, який вона охоплює, але така конфігурація є сама по собі нестійкою. Оскільки густина силових ліній на тому самому торі ближче до центру систему більша, ніж у віддалених точках, магнітний тиск, пропорційний до інтенсивності поля, виявляється неоднорідним, що й робить систему нестійкою. Щоб придушити дану нестійкість, накладається додаткове тороїдальне поле, яке вирівнює магнітний тиск.

У пастках стелараторного типу струми в плазмі малі, і магнітне поле створюється переважно зовнішніми обмотками. Але провідники, що живлять ці обмотки, несуть потужні струми і вносять помітні збурення у магнітне поле. Ці збурення відіграють роль неінтегрованих доданків у гамільтоніані. Під їхнім впливом резонансні тори (магнітні поверхні) руйнуються, і на їхньому місці виникають магнітні острівці, оточені хаотичними силовими лініями магнітного поля. Однак завдяки збереженню інваріантних торів і відсутності дифузії Арнольда глобальна стійкість системи зберігається, якщо розміри острівців невеликі (нагадаємо, що вони зростають із зростанням величини збурення і зменшуються при збільшенні порядку резонансу).

Цікаво відзначити, що в магнітних пастках вдається експериментально спостерігати КАМ-структури, що виникають на місці зруйнованих резонансних торів. Така можливість заснована на тому, що рух електронів у тороїдальних магнітних пастках повторює траєкторії силових ліній поля внаслідок мализни ларморівського радіусу (останній складає звичайно доли міліметра). Пучок електронів інjektують уздовж силової лінії, а в перерізі магнітної поверхні встановлюють напівпрозорий люмінесцентний екран. Перетинаючи цей екран багато (близько сотні) разів, пучок в результаті малює на екрані переріз магнітної поверхні, на

⁹ Від латинського stella – зірка. Термін запропонований американським дослідником Л.Спітцером. Мається на увазі, що в таких пастках має створюватися зоряна речовина.

¹⁰ Скорочення від російських слів «тороидальная магнитная камера».

яку намотана дана магнітна силова лінія. Дана методика була вперше запропонована групою дослідників із Харківського фізико-технічного інституту (Є.Д.Волков та ін.) в середині 1960х рр. Типове зображення магнітного острівця, отримане за допомогою цієї методики, наведене на рис. 3.1.8.

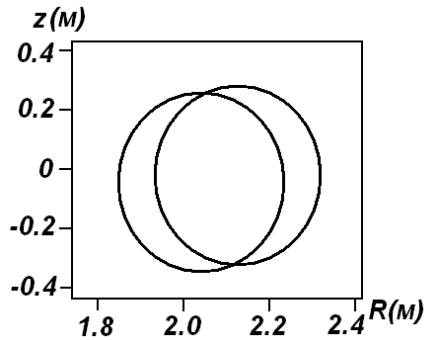


Рис. 3.1.8. Типове зображення магнітного острівця, отримане шляхом інжекції електронного пучка вздовж магнітної силової лінії.

3.1.2.12. Аналогія між теоремою КАМ та рухом заряджених частинок у токамаках

У системах типу токамаків вакуумне утримання окремого електрона неможливе. Магнітне поле, створене зовнішнім джерелом, має лише компоненту B_φ . Поле B_θ , що утримує плазму, створюється струмом j_φ , який протікає в цій плазмі. Таким чином, у токамаках здійснюється самоузгоджене утримання плазми.

Наявність сильного зовнішнього поля B_φ дозволяє звести рух електрона в токамаку до двовимірної у площині (r, θ) .

Магнітне поле \mathbf{B}_p , перпендикулярне до B_φ , прийнято називати полоїдальним. Його можна описати або за допомогою тороїдального вектор-потенціалу $\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, або за допомогою так званої функції полоїдального магнітного потоку $\Psi = -RA_\varphi$, так що

$$\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \varphi R A_\varphi = \nabla \varphi \times \nabla \Psi. \quad (3.1.43)$$

Вважаючи надалі, що $B_\varphi \gg B_p$, можна записати рівняння руху електрона у вигляді півторавимірної гамільтонівської системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \theta, \varphi); \\ \frac{dr}{d\varphi} &= -\frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

В рівняннях (3.1.44) в ролі часу виступає кут φ , в ролі дії – тороїдальний магнітний потік

$$\int_0^r B_\varphi r' r' dr' \approx \frac{B_\varphi r^2}{2},$$

в ролі кута – полоїдальний кут θ , в ролі гамільтоніана – функція полоїдального магнітного потоку Ψ .

Якщо $\partial \Psi / \partial \varphi = 0$, отримуємо інтегровний випадок (система з одним ступенем вільності, гамільтоніан явно не залежить від часу). Траєкторії $r=r(\theta)$ знаходяться з умови $\Psi(r, \theta) = \text{const}$. Справді, поділивши рівняння (3.1.44) одне на одне, можна отримати:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\partial \Psi / \partial \theta}{\partial \Psi / \partial r}, \quad (3.1.45)$$

або

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} d\theta \equiv d\Psi(r, \theta) = 0. \quad (3.1.45 \text{ a})$$

Відношення частот обертання електрона навколо головної та допоміжної осей складає величину

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\theta/dt}{d\varphi/dt} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (-RA_\varphi) = \frac{RB_\theta}{rB_\varphi} = \frac{1}{q r} \quad (3.1.46)$$

(враховано перше з рівнянь (3.1.44)).

У загальному випадку з урахуванням збурень, що виникають унаслідок руху плазми та струмів у провідниках живлення, з'являється залежність $\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi)$ (порушується аксіальна симетрія системи). У цьому випадку функцію $\Psi(r, \theta, \varphi)$ можна записати у вигляді ряду:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi_{00}(r) + \sum_{m,n} \Psi_{mn}(r) \cos m\theta - n\varphi, \quad (3.1.47)$$

де $\Psi_{mn}(r)$ – деякі функції, що задовольняють граничним умовам $\Psi_{mn}(r \rightarrow 0) \sim r^m$, $\Psi_{mn}(r=a)=0$ (тут a – малий радіус тороїдальної камери).

Збурення $\Psi_{mn}(r)$ є резонансними для рівноважного поля \mathbf{B} на раціональних поверхнях r_s , на яких $q(r_s) = m/n$. У відповідності до теореми КАМ ці тори руйнуються під дією збурення.

Доки області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, відділяються одна від одної інваріантними торами (незруйнованими магнітними поверхнями), радіальний транспорт плазми залишається утрудненим. Якщо ж збурення настільки велике, що такі області перекриваються, ні про яке утримання плазми говорити вже не доводиться.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.2

1. Опишіть процедуру введення нових змінних дія-кут для системи, близької до інтегрованої.
2. Чому резонансні тори у фазовому просторі руйнуються при появі в гамільтоніані малої неінтегрованої частини?
3. Чому мале неінтегровне збурення в гамільтоніані не змінює якісно поведінку фазових траєкторій на нерезонансних торах?
4. Чи можливий у теорії КАМ граничний перехід від резонансних торів до нерезонансних?
5. Чи є гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, орбітально стійкими?
6. Чи можлива дифузія Арнольда в системі з двома ступенями вільності?
7. Чи справедлива теорема КАМ для системи автономних осциляторів?
8. Чи справедлива теорема КАМ для системи зв'язаних лінійних осциляторів?
9. Які магнітні поверхні магнітних пасток звичайно руйнуються в першу чергу?
10. Чи можуть малі збурення магнітного поля порушити умови утримання плазми в тороїдальній магнітній пастці? Відповідь обґрунтувати.
11. Опишіть характер руйнування резонансних торів під дією малого неінтегровного збурення.

Задачі до підрозділу 3.1.2

3.1.2.1. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H(I, \theta) = I^2 + \varepsilon I \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Перейти до нових змінних, у яких гамільтоніан буде залежати тільки від дії (з точністю до доданків першого порядку за ε).

3.1.2.2. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H(I, \theta) = I^3 + \varepsilon I^2 \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Перейти до нових змінних, у яких гамільтоніан буде залежати тільки від дії (з точністю до доданків першого порядку за ε).

3.1.2.3. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H(I, \theta) = I^4 + \varepsilon I^3 \sin \theta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Перейти до нових змінних, у яких гамільтоніан буде залежати тільки від дії (з точністю до доданків першого порядку за ε).

3.1.3. Глобальний хаос та його характеристики

Ми бачили, що хаотична динаміка виникає в системах, близьких до інтегровних. Але доки неінтегровне збурення в гамільтоніані залишається малим, області нерегулярного руху займають лише невелику частку фазового простору. Збільшення неінтегровного збурення приводить до того, що області нерегулярного руху розширюються і в певний момент зливаються в одну, утворюючи суцільне стохастичне море. Іншими словами, хаотичними стають уже не окремі фазові траєкторії, а цілі групи таких траєкторій. Такий стан системи називають глобальним хаосом. Наявність глобального хаосу еквівалентна тому, що система володіє властивістю перемішування.

У цьому підрозділі ми розглянемо умову виникнення глобального хаосу та його основні кількісні характеристики – показники Ляпунова, ентропію Колмогорова - Синає, час розчеплення кореляцій.

3.1.3.1. Ізольовані резонанси

Розглянемо гамільтонівську систему, близьку до інтегровної, гамільтоніан якої можна подати у формі

$$H(\mathbf{Q}, \vec{I}) = H_0(\mathbf{Q}) + \varepsilon H_1(\mathbf{Q}, \vec{I}) . \quad (3.1.9)$$

Оскільки залежність від кожної з компонент вектора θ є періодичною з періодом 2π , збурення можна розкласти у багатовимірний ряд Фур'є за θ :

$$H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) = \sum_{\vec{m}} H_{\vec{m}}(\vec{I}) \exp i\vec{m} \cdot \vec{\theta} . \quad (3.1.48)$$

Можлива ситуація, коли в ряду Фур'є істотний лише один доданок. Це наближення відповідає врахуванню одного єдиного резонансу вигляду $\mathbf{m} \cdot \omega = 0$. Тоді рівняння Гамільтона набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= i\varepsilon m_j H_{\vec{m}}(\vec{I}) \exp i\vec{m} \cdot \vec{\theta} ; \\ \dot{\theta}_j &= \omega_j(\vec{I}) + \varepsilon \frac{\partial H_{\vec{m}}(\vec{I})}{\partial I_j} \exp i\vec{m} \cdot \vec{\theta} . \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

В нульовому наближенні за малим параметром ε із системи (3.1.49) можна отримати: $\mathbf{I} = \text{const}$, $\theta = \omega(\mathbf{I})t + \delta$. Підставимо вираз для θ до першого з рівнянь системи (3.1.49). Тепер його можна проінтегрувати за часом. Отримаємо:

$$I_j \approx I_j(0) - \varepsilon \frac{m_j H_{\vec{m}}(\vec{I}(0))}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}} \exp \left[i\vec{m} \cdot \vec{\omega} t + \delta \right] . \quad (3.1.50)$$

Зрозуміло, що розв'язок (3.1.50) втрачає чинність при $\mathbf{m} \cdot \omega(\mathbf{I}) < \varepsilon$. Ця умова й визначає область резонансу.

Наявність ізольованого резонансу ще не призводить до втрати інтегровності системи. Справді, в цьому випадку можна виконати канонічне перетворення і побудувати інтеграл руху вигляду $F = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}$, де \mathbf{n} – вектор, ортогональний до \mathbf{m} ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$). Отже, єдиний резонанс може значно спотворити рух в околі відповідного резонансного тора, але ще не вносить до системи елементів хаотичної поведінки.

3.1.3.2. Виникнення глобального хаосу

Абсолютно інша ситуація має місце за наявності кількох резонансів. Присутність двох або більшої кількості резонансів робить систему неінтегровною. Більш того, близько розташовані резонанси за певних умов породжують у системі глобальний хаос.

Проілюструємо сказане числовим розрахунком, виконаним у роботі G.H.Walker, J.Ford, Phys. Rev., **188**, 416 (1969). У цій роботі розглядається гамільтоніан вигляду

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = I_1 + I_2 + I_2^2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + \alpha I_1 I_2 \cos 2\theta_1 - 2\theta_2 + \beta I_1^{3/2} I_2 \cos 2\theta_1 - 3\theta_2 . \quad (3.1.51)$$

При $\alpha=\beta=0$ цей гамільтоніан є інтегровним. У загальному випадку (при $\alpha\beta\neq 0$) він містить два резонанси – $\omega_1/\omega_2=2/2$ та $\omega_1/\omega_2=3/2$.

При малих значеннях енергії системи резонанси є ізольованими. При переході енергії системи через деяке порогове значення резонанси починають взаємодіяти, утворюючи макроскопічну зону нестійкості. Розміри цієї зони зростають при подальшому збільшенні енергії системи (див. рис. 3.1.9).

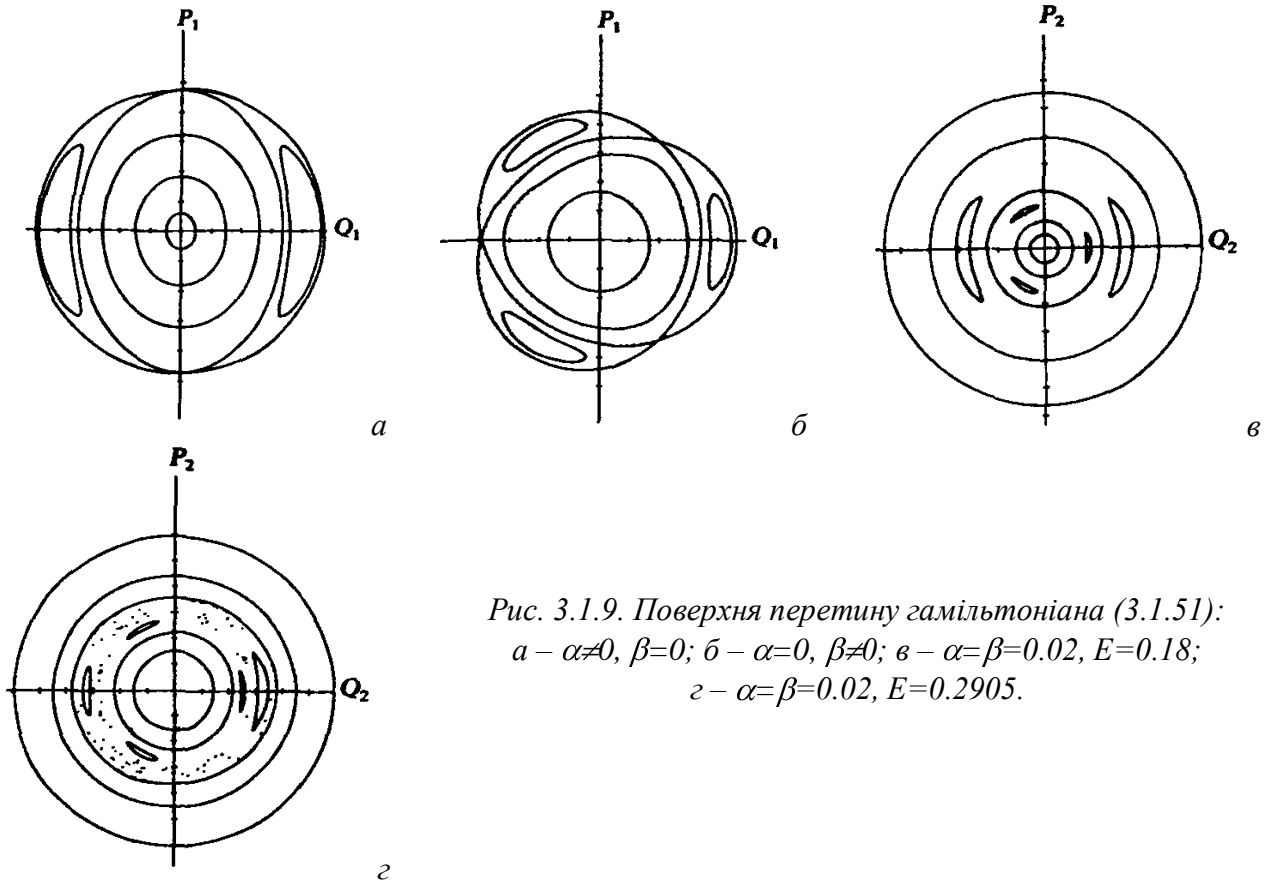


Рис. 3.1.9. Поверхня перетину гамільтоніана (3.1.51):
 а – $\alpha\neq 0, \beta=0$; б – $\alpha=0, \beta\neq 0$; в – $\alpha=\beta=0.02, E=0.18$;
 г – $\alpha=\beta=0.02, E=0.2905$.

3.1.3.3. Критерій Чирикова

Оцінити умови переходу системи до глобального хаосу можна за допомогою так званого критерію Чирикова (В. Chirikov, Phys. Reports, **52**, 263 (1979)). Суть його зводиться до того, що для виникнення глобального хаосу повинне відбутися перекриття резонансів, тобто віддаль між сусідніми резонансами (наприклад, за частотою $\delta\omega$ або за дією δI) повинна стати меншою від їхньої ширини (відповідно $\Delta\omega$ або ΔI):

$$\frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \approx \frac{\Delta I}{\delta I} \geq 1 \quad (3.1.52)$$

(рис. 3.1.10).

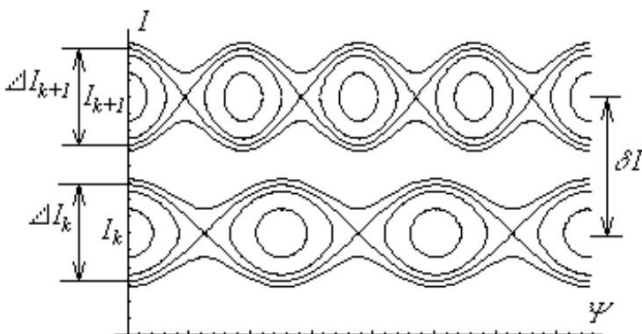


Рис. 3.1.10. Сусідні нелінійні резонанси (у координатах дія – кут). Показано ширину резонансів та віддаль між ними.

3.1.3.4. Системи з перемішуванням

Строго кажучи, навіть при виникненні глобального хаосу не всі траєкторії у фазовому просторі відповідають стохастичній динаміці. На рис. 3.1.9 г видно, що в області стохастичного руху зберігаються острівці регулярного руху в околі нерухомих точок типу центр (ці точки, відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа, виникають при руйнуванні резонансних торів різних порядків).

Однак, якщо нас цікавлять глобальні характеристики стохастичної поведінки, то наявністю острівців регулярного руху можна знехтувати. Тоді можна сказати, що поведінка систем із глобальним хаосом описується моделлю систем із перемішуванням.

Нагадаємо визначення систем із перемішуванням.

Розглянемо гамільтонівську систему, що здійснює фінітний рух. Тоді фазові траєкторії, що описують цей рух, будуть знаходитись у деякій обмеженій області D фазового простору. Під мірою довільної області A фазового простору (тут і нижче розглядаються лише такі області, що є частинами області D) будемо розуміти відношення об'єму області A до об'єму всієї області D :

$$\mu A = \frac{V_A}{V_D}, \quad V_A = \int_A d\vec{X}, \quad V_D = \int_D d\vec{X} \quad (3.1.53)$$

(вектор \mathbf{X} розмірністю $2n$ включає всі змінні, що визначають фазовий простір).

Нехай деяка фазова траєкторія системи $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$ задовольняє початковим умовам $\mathbf{X}(t=0)=\mathbf{X}_0$. Визначимо оператор потоку F_t як оператор, дія якого на точку \mathbf{X}_0 перетворює її в точку $\mathbf{X}(t)$:

$$F_t \vec{X}_0 = \vec{X}(t). \quad (3.1.54)$$

Для гамільтонівських систем в силу теореми Ліувілля фазовим об'єм є нестисливим, тобто для довільної області A , що рухається у фазовому просторі під дією оператора потоку,

$$\mu A = \mu F_t A. \quad (3.1.55)$$

Розглянемо дві довільні області A і B з мірами $\mu(A)$ і $\mu(B)$. Нехай область B залишається нерухомою, а область A еволюціонує з плином часу під дією оператора потоку F_t : $A_t = F_t A$. Позначимо через $A_t \cap B$ сукупність усіх частин області A_t , що входять до складу області B .

Говорять, що динамічна система має властивість перемішування, якщо при довільному виборі областей A та B виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu A_t \cap B}{\mu B} = \mu A. \quad (3.1.56)$$

Перепишемо (3.1.55) у формі:

$$\frac{V A_t \cap B}{V B} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{V A}{V D}. \quad (3.1.56 \text{ a})$$

Запис (3.1.56 a) вказує, що частка шматків області A , які потрапили до нерухомої області B , з часом стає такою самою, як частка області A в усій області D . Оскільки область B часом рівномірно заповнюють усю область D . Це твердження залишається справедливим при довільному початковому положенні та розмірах області A .

Таким чином, наявність перемішування в системі означає, що її фазові траєкторії є абсолютно нестійкими щодо малих збурень, тобто сусідні фазові траєкторії з часом розбігаються. Це випливає з того, що шматки як завгодно малої області A з часом рівномірно заповнюють усю область D . Наявність нестійкості за обмеженості області D означає, що поведінка системи з перемішуванням є непередбачуваною. Нарешті, оскільки з часом шматки області A не можуть знов зібратися разом, це означає, що поведінка такої системи є необоротною.

Наслідком перемішування є також розчеплення часових кореляцій.

3.1.3.5. Розчеплення часових кореляцій у системах із перемішуванням

Інтуїтивно зрозуміло, що шматки області A рівномірно заповнюють усю область D за деякий характерний час. Спробуємо визначити цей час більш формально.

Розглянемо довільні інтегровні функції f і g в замкненій області D фазового простору динамічної системи. Визначимо їхні фазові середні, як

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_D} \int_D f \bar{x} d\bar{x}; \quad \langle g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_D g \bar{x} d\bar{x}. \quad (3.1.57)$$

Нехай у початковий момент часу стан системи визначається умовою $\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_0$. Відповідно можна записати, що момент t $\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$. Визначимо корелятор функцій f і g як фазове середнє від добутку $f[\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)] \cdot g(\mathbf{X}_0)$:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_D f[\bar{X}, \bar{X}_0, t] g \bar{X}_0 d\bar{X}_0. \quad (3.1.58)$$

Враховуючи нестисливість фазового об'єму, корелятор (3.1.58) можна переписати в еквівалентній формі

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_D f \bar{X} g[\bar{X}_0, \bar{X}, t] d\bar{X} \quad (3.1.58 \text{ a})$$

Можна сказати, що корелятор кількісно визначає пам'ять системи про її початкові умови. Очевидно, якщо такої пам'яті немає, тобто залежність f від \mathbf{X}_0 у правій частині (3.1.58) відсутня, підінтегральний вираз у (3.1.57) розбивається на добуток двох незалежних функцій, і корелятор перетворюється просто на добуток фазових середніх:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_D f \bar{X} g \bar{X}_0 d\bar{X}_0 = \langle f \rangle \frac{1}{V_D} \int_D g \bar{X}_0 d\bar{X}_0 = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (3.1.59)$$

(оскільки ліва частина не може залежати ні від \mathbf{X} , ні від \mathbf{X}_0 , то величина, що виноситься з під знаку інтеграла, усереднюється по області інтегрування).

Покажемо, що за наявності перемішування при $t \rightarrow \infty$ відбувається розчеплення кореляцій, тобто для довільних функцій f та g виконується співвідношення

$$\langle fg \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (3.1.60)$$

Розглянемо спершу випадок, коли

$$f_A \bar{X} = \begin{cases} 1, & \bar{X} \in A; \\ 0, & \bar{X} \notin A; \end{cases} \quad g_B \bar{X} = \begin{cases} 1, & \bar{X} \in B; \\ 0, & \bar{X} \notin B. \end{cases}$$

де A і B – довільні частини області D .

Нехай область B нерухома, а область A еволюціонує під дією потоку F_t : $A_t = F_t A$. При великих t внаслідок перемішування

$$\mu A_t \cap B \approx \mu A \mu B.$$

З іншого боку

$$\mu A \cap B = \frac{1}{V_D} \int_D g_B \bar{X}_0 f_A \bar{X}_0 d\bar{X}_0 = \frac{1}{V_D} \int_D g_B \bar{X}_0 f_A[\bar{X}, \bar{X}_0, t] d\bar{X}_0 = \langle f_A, g_B \rangle;$$

$$\mu A \mu B = \frac{1}{V_D} \int_D f_A \bar{X} d\bar{X} \cdot \frac{1}{V_D} \int_D g_B \bar{X} d\bar{X} = \langle f_B \rangle \langle g_A \rangle.$$

Отже, в аналізованому випадку справді виконується умова (3.1.60).

Розіб'ємо тепер область D на дрібні області A_j , що не перетинаються. Розмір цих областей оберемо настільки малим, що в кожній з них значення функцій f та g можна вважати сталими. Тоді

$$f \bar{X} \approx \sum_j \phi_j f_{A_j} \bar{X}, \quad g \bar{X} \approx \sum_j \gamma_j g_{A_j} \bar{X},$$

де

$$f_{A_j} \bar{X} = g_{A_j} \bar{X} = \begin{cases} 1, & \bar{X} \in A; \\ 0, & \bar{X} \notin A. \end{cases}$$

Введені таким чином функції f_{A_j} та g_{A_j} збігаються зі щойно розглянутими. Тоді для системи з перемішуванням

$$\langle f, g \rangle \approx \sum_{j,k} \phi_j \gamma_k \langle f_{A_j} \bar{X} g_{A_k} \bar{X}_0 \rangle = \sum_{j,k} \phi_j \gamma_k \langle f_{A_j} \rangle \langle g_{A_k} \rangle = \sum_j \phi_j \langle f_{A_j} \rangle \sum_k \gamma_k \langle g_{A_k} \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Отже, система з перемішуванням із плином часу справді „забуває” про свої початкові умови.

Введемо тепер величини

$$\tilde{f} \bar{X} = f \bar{X} - \langle f \rangle, \quad \tilde{g} \bar{X} = g \bar{X} - \langle g \rangle \quad (3.1.61)$$

і побудуємо їхній корелятор:

$$R(f, g, t) \equiv \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \langle f, g \rangle - 2\langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f \rangle \langle g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (3.1.58 \text{ б})$$

Як впливає з (3.1.60),

$$R(f, g, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.59 \text{ а})$$

Характерний час спадання корелятора $R(f, g, t)$ і можна розглядати як деяку кількісну характеристику процесу перемішування – характерний час розчеплення кореляцій, або характерний час перемішування. Його точне визначення обирається в залежності від конкретної задачі.

3.1.3.6. Показники Ляпунова

Говорячи про системи з перемішуванням, ми вказували, що у фазовому просторі таких систем сусідні зображувальні точки розбігаються. З іншого боку, в силу теореми Ліувілля об'єм фазової краплі має залишатися сталим. Тому, якщо в деякому напрямку ця крапля з часом розтягається, в певному іншому напрямку вона повинна стискатися. Кількісно цей процес описується за допомогою так званих показників Ляпунова.

Розглянемо найбільш загальний випадок динамічної системи, що задається диференціальним рівнянням вигляду

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f} \bar{x}, \quad \bar{x} = x_1, x_2, \dots, x_N, \quad (3.1.62)$$

з початковими умовами $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$ (N – розмірність фазового простору). Розглянемо тепер деяку близьку фазову траєкторію:

$$\bar{x}_1(t) = \bar{x}(t) + \bar{\xi}(t), \quad |\bar{\xi}(0)| = \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.1.63)$$

Розрахуємо величину

$$\Sigma_{\bar{\xi}(0)} = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{t} \ln \left| \frac{|\bar{\xi}(t)|}{|\bar{\xi}(0)|} \right| \right]. \quad (3.1.64)$$

Покажемо, що при всіх можливих поворотах вектора $\bar{\xi}(0)$ величина Σ буде змінюватися стрибком і набувати значень зі скінченного набору $\{\sigma_j\}$, $j=1, \dots, N$. Ці величини називають (глобальними) показниками Ляпунова.

Вважатимемо величину $|\bar{\xi}(t)|$ малою. Підставимо розв'язок (3.1.63) до (3.1.62) і розкладемо обидві частини рівняння (3.1.62) в ряд Тейлора, обмежившись лінійними доданками:

$$\dot{\bar{x}} + \dot{\bar{\xi}} = \bar{f} \bar{x} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \xi_i(t). \quad (3.1.65)$$

Звідси з урахуванням (3.1.62) впливає, що

$$\dot{\bar{\xi}} = \mathbf{A} \bar{\xi}, \quad (3.1.65 \text{ а})$$

де

$$\mathbf{A} = a_{ij} , \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}(t)} . \quad (3.1.66)$$

В загальному випадку елементи матриці (3.1.66) залежать від часу: $a_{ij}=a_{ij}(t)$. Але спочатку розглянемо випадок, коли $a_{ij}=\text{const}$. Тоді розв'язок рівняння (3.1.65 а) має вигляд

$$\vec{\xi} t = \sum_{j=1}^N C_j \vec{e}_j \exp \sigma_j t , \quad (3.1.67)$$

де C_j – сталі інтегрування, \vec{e}_j та σ_j – відповідно власні вектори та власні значення матриці (3.1.66).

Якщо вектор $\xi(0)$ спрямований уздовж деякого власного вектора \vec{e}_j , то всі $C_i=0$ ($i \neq j$). Тому при довільному t вектор $\xi(t)$ залишається паралельним до \vec{e}_j , а його величина змінюється за законом $|\xi(t)| \sim \exp(\sigma_j t)$. Тоді, очевидно, $\Sigma(\xi(0))=\sigma_j$.

В загальному випадку вектор $\xi(0)$ має складові вздовж кількох або навіть усіх векторів \vec{e}_j . Тому при великих t величина Σ визначається максимальним значенням σ_j . Отже, змінюючи положення $\xi(0)$, будемо діставати різні значення σ_j .

Значення σ_j , що визначаються з розв'язку рівняння

$$\det a_{ij} - \delta_{ij} \sigma = 0 , \quad (3.1.68)$$

яке має вигляд полінома N -го порядку, взагалі кажучи, є комплексними. Точніше, оскільки матриця a_{ij} дійсна, матимемо пари комплексно-спряжених значень. У цьому випадку на площині, що задається відповідною парою власних векторів \vec{e}, \vec{e}' , розв'язок має вигляд:

$$\vec{\xi} t = \left[\vec{e} C \cos t \operatorname{Im} \sigma + \vec{e}' C' \sin t \operatorname{Im} \sigma \right] \exp t \operatorname{Re} \sigma , \quad (3.1.67 \text{ а})$$

тобто в цьому випадку $|\xi(t)| = \exp(t \operatorname{Re} \sigma)$. Отже, парі комплексно-спряжених власних чисел відповідає двічі вироджений показник Ляпунова $\operatorname{Re} \sigma$. Таким чином, для сталої матриці a_{ij} показники Ляпунова збігаються з дійсними частинами її власних значень.

В загальному випадку, як уже вказувалося, $a_{ij}=a_{ij}(t)$. У такому випадку загальний розв'язок системи (3.1.65 а) записується у вигляді суперпозиції N лінійно незалежних розв'язків:

$$\vec{\xi} t = \sum_{j=1}^N C_j \vec{\xi}_j t . \quad (3.1.67 \text{ б})$$

Враховуючи, що елементи матриці a_{ij} залишаються обмеженими, для пізніх моментів часу можна записати:

$$\vec{\xi}_j t = \vec{\Phi}_j t \exp \sigma_j t , \quad (3.1.69)$$

де функції $\Phi_j(t)$ змінюються повільніше від експонент. Тому Σ знову набирає значень лише з набору $\sigma_j, j=1,2,\dots,N$.

Якщо вектор $\xi(0)$ зорієнтований довільним чином, то $\Sigma(\xi(0))$ дасть максимальний показник Ляпунова (при довільному $\xi(0)$ відмінні від нуля всі проекції на напрямки власних векторів \vec{e}_j).

3.1.3.7. Властивості показників Ляпунова

Перерахуємо основні властивості показників Ляпунова:

1. Число показників Ляпунова дорівнює розмірності n фазового простору системи. Впорядкуємо їх за величиною:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n .$$

2. Один з показників Ляпунова, що відповідає зсуву вздовж фазової траєкторії, яка не закінчується в особливій точці, завжди дорівнює нулеві.

3. Сума всіх показників Ляпунова дорівнює середньому вздовж фазової траєкторії значенню величини $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(d\xi/dt)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{div} \dot{\xi} \, dt = \sum_{j=1}^N \sigma_j. \quad (3.1.70)$$

Зокрема, для гамільтонівських систем

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j = 0, \quad (3.1.70 \text{ a})$$

оскільки для таких систем фазовий об'єм зберігається.

4. Для гамільтонівських систем має місце симетрія:

$$\sigma_i = -\sigma_{2k-i+1}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.1.71)$$

де k – число ступенів вільності ($N = 2k$). Отже, для гамільтонівських систем принаймні два показника Ляпунова дорівнюють нулеві.

3.1.3.8. Ентропія Колмогорова - Синає

Існування динамічних систем із перемішуванням призводить до потреби у деякій універсальній характеристиці таких систем. Вона, очевидно, має бути інваріантом.

В 1958 р. А.М.Колмогоров ввів новий метричний інваріант динамічних систем h , названий ентропією, який визначає, чи є в системі перемішування (А.Н.Колмогоров. ДАН СРСР, 1958, **119**, 861; 1959, **125**, 754). Це визначення пізніше було розвинене Я.Г.Синаєм (Я.Г.Синає. ДАН СРСР, 1959, **124**, 768; 1959, **125**, 1200).

Оскільки перемішування означає появу досить складної динаміки фазових траєкторій, то для її опису природно застосовувати поняття ентропії.

Нехай, наприклад, фазова крапля у фазовому просторі має об'єм $\Delta\Gamma$. Тоді її ентропія дорівнює $S = \ln \Delta\Gamma$ (сталу Больцмана вважатимемо одиницею). Ця формула аналогічна до відомого співвідношення $S = k_B \ln N$, де N – число мікроскопічних станів, що відповідають тому самому макроскопічному стану.

Але для гамільтонівських систем внаслідок теореми Ліувілля об'єм фазової краплі буде зберігатися в процесі її еволюції, тому формально й ентропія S при цьому не змінюватиметься. В той же час структура фазової краплі буде змінюватись. В ній з'являються свого роду порожнини (хоча топологічних змін при цьому не відбувається). З часом пазирчата структура стає все дрібнішою, а об'єм, у якому вона знаходиться, зростає (рис. 3.1.11).



Рис.3.1.11. Еволюція фазової краплі в гамільтонівській системі з перемішуванням.

Введемо величину ϵ , що має розмірність фазового об'єму, і грубо намалюємо структуру фазової краплі з точністю то ϵ (тобто лініями завтовшки $\epsilon^{1/N}$, де N – розмірність фазового простору). Так виникає огрублений фазовий об'єм ΔG . Для нього теорема Ліувілля вже не справджується, і $\Delta G(t)$ з часом зростатиме, оскільки він відчуває розтягання, але не відчуває стиснення (починаючи з деякого моменту часу).

Величина площі гіперповерхні, що вміщує всі нестійкі напрямки у фазовому просторі у системах з локальною нестійкістю зростає експоненціально:

$$D(\epsilon) = D_0 \exp(h_0 t), \quad (3.1.72)$$

де інкремент h_0 , взагалі кажучи, є функцією координат фазового простору. Якщо всі нестійкі напрямки мають показники Ляпунова, що зберігаються з часом, то

$$h_0 = \sum_{i < k} \sigma_i.$$

Для елемента ΔG матимемо:

$$\Delta G t = \Delta G_0 \exp ht, \quad h = \langle h_0 \rangle. \quad (3.1.73)$$

Отже, показник зростання об'єму ΔG є результат усереднення інкременту локальної нестійкості по всьому фазовому просторі.

Тоді

$$\bar{S} = \ln \Delta G t = \ln \Delta G_0 e^{ht} = ht + \ln \Delta G_0 \quad (3.1.75)$$

При точності округлення ε не слід брати ΔG_0 меншим від ε . Тому можна покласти $\Delta G_0 = \varepsilon$. Отримаємо:

$$\bar{S} = ht + \ln \varepsilon. \quad (3.1.75 \text{ а})$$

Для розрахунку ентропії з більшою точністю слід перейти до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Величина

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \Delta G t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (ht + \ln \varepsilon) = h \quad (3.1.76)$$

і являє собою ентропію Колмогорова - Синаєва, або КС-ентропію.

3.1.3.9. Властивості КС-ентропії

Основні властивості ентропії Колмогорова - Синаєва такі:

1. К-С ентропія h визначає швидкість зростання ентропії S в результаті перемішування траєкторій у фазовому просторі.
2. Ентропія h , інкремент локальної нестійкості h_0 і обернений час розщеплення кореляцій $1/\tau_c$ є величинами одного порядку.
3. Ентропія h є метричним інваріантом системи, тобто її величина не залежить від способу розбиття фазового простору та його округлення.

Якщо система здійснює регулярний рух, то потік фазової рідини є ламінарним. В цьому випадку $h=0$. Поява додатної ентропії при $h>0$ пов'язана з перетворенням ламінарної течії фазової рідини на турбулентну.

3.1.3.10. Спектральні властивості хаосу

Ще одна відмінність між періодичним чи квазіперіодичним рухом та перемішуванням виявляється у спектральних властивостях системи.

Спираючись на визначення корелятора (3.1.58 б), можна ввести спектральну густину корелятора:

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(f, f, t) \exp -i\omega t dt. \quad (3.1.77)$$

Для регулярного (періодичного або квазіперіодичного) руху спектр $R(\omega)$ виявляється дискретним:

$$R(\omega) = \sum_i R_i \delta(\omega - \omega_i) \quad (3.1.78)$$

(набір частот ω_i може бути й нескінченим). Навпаки, за наявності перемішування спектр частот виходить неперервним.

На практиці (це стосується як натурних, так і числових експериментів) спектр (3.1.77) досліджувати незручно. Тому частіше аналізують безпосередньо спектр потужності сигналу.

3.1.3.11. Спектр потужності

Для регулярного руху на поверхні тора у фазовому просторі змінні, що характеризують рух системи, можуть бути подані у формі

$$\vec{q}(t) = \sum_{\vec{m}} \vec{q}_{\vec{m}} \exp \left[i \vec{m} \cdot \vec{\omega} t + \vec{\delta} \right], \quad (3.1.79)$$

де $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ – набір частот, що відповідає даному тору (пор. із формулою (3.1.50)). Спектр такого сигналу міститиме частоти ω_i та їхні комбінації $\vec{m} \cdot \vec{\omega}$.

Спектр потужності (спектральна інтенсивність) $I(\omega)$ звичайно вводиться як перетворення Фур'є від автокореляційної функції $B_i(t)$ деякої змінної q_i :

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_i(t) \exp i\omega t dt, \quad (3.1.80)$$

де

$$B_i(t) = \langle q_i(0) q_i(t) \rangle \quad (3.1.81)$$

(усереднення в (3.1.81) здійснюється за ансамблем реалізацій; його можна також розглядати як усереднення за фазовим об'ємом, у якому еволюціонує система). Співвідношення (3.1.80) являє собою частинний випадок теореми Вінера - Хінчина.

Розрахуємо величину $B_i(t)$ для регулярного руху (3.1.79). За область фазового простору, в якій еволюціонує система, зручно взяти поверхню відповідного тора. Оскільки кожна траєкторія однозначно задається початковою фазою δ , досить виконати усереднення за компонентами δ на інтервалі $[0, 2\pi]$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} B_i(t) &= \left\langle \sum_{\bar{m}, \bar{m}'} q_{i, \bar{m}} q_{i, \bar{m}'} \exp \left[i \bar{m} \bar{\omega} t + \bar{\delta} + i \bar{m}' \cdot \bar{\delta} \right] \right\rangle = \\ &= \sum_{\bar{m}, \bar{m}'} q_{i, \bar{m}} q_{i, \bar{m}'} \exp \left[i \bar{m} \cdot \bar{\omega} t \right] \left\langle \exp \left[i \bar{m} + \bar{m}' \cdot \bar{\delta} \right] \right\rangle = \sum_{\bar{m}, \bar{m}'} |q_{i, \bar{m}}|^2 \exp \left[i \bar{m} \cdot \bar{\omega} t \right] \end{aligned} \quad (3.1.82)$$

(враховано, що $q_{i, -\bar{m}} = (q_{i, \bar{m}})^*$ — це впливає з властивостей рядів Фур'є).

Очевидно, спектр потужності (3.1.80) для автокореляційної функції (3.1.82) буде дискретним.

Якщо частоти ω несумірні, фазове середнє збігається із середнім за часом, і спектральну інтенсивність можна знайти за однією єдиною фазовою траєкторією:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T q_i(t) \exp i\omega t dt \right|^2. \quad (3.1.83)$$

3.1.3.12. Спектр потужності хаотичного руху

В хаотичному режимі для розрахунку спектральної інтенсивності на практиці можна користуватися формулою (3.1.83), використовуючи єдину фазову траєкторію (хоча, строго кажучи, розрахована таким чином величина вже не збігатиметься зі спектральною інтенсивністю (3.1.80), оскільки не зрозуміло, що виступає в ролі ансамблю, за яким здійснюється усереднення). Спектр нерегулярної траєкторії буде значно складнішим, ніж для регулярної. Як правило, спостерігається кілька піків, оточених "густою травою". Можна довести, що для систем із перемішуванням спектр (3.1.83) має бути неперервним.

Втім, існує кілька обставин, які ускладнюють аналіз спектрів.

По-перше, на практиці часовий інтервал спостереження завжди обмежений, і це буде приводити до розширення спектральних ліній. Так, якщо гармонічний сигнал $q(t) = A \exp(i\Omega t)$ спостерігається на проміжку часу $|t| < T$, то замість δ -функції отримаємо функцію

$$I_T(\omega) = \frac{2|A|^2 \sin^2 \frac{\omega - \Omega}{2} T}{\pi (\omega - \Omega)^2 T}.$$

В результаті замість дискретного спектру спостерігається неперервний.

По-друге, в реальних ситуаціях (включаючи комп'ютерне моделювання) в досліджуваних системах завжди присутні шуми різноманітної природи, які формують неперервний "п'єдестал" навіть для дискретного спектру.

Тим не менше на практиці аналіз спектрів у багатьох випадках дозволяє відділити регулярний та нерегулярний (хаотичний) рух.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.3

1. За яких умов у гамільтонівських системах виникає глобальний хаос?

2. Чи існує в гамільтонівських системах із глобальним хаосом мережа Арнольда?
3. Чи залежить швидкість розбігання сусідніх зображувальних точок у фазовому просторі системи з локальною нестійкістю від їхнього взаємного розташування?
4. Чи може бути гамільтонівською система з двома ступенями вільності, яка має чотири різних показники Ляпунова?
5. Гамільтонівська система з двома ступенями вільності має показник Ляпунова $\sigma_1=3$. Якими будуть інші показники Ляпунова цієї системи?
6. Який фізичний зміст часу розчеплення кореляцій для гамільтонівської системи? Від чого залежить цей час?
7. Для визначення огрубленого фазового об'єму користуються n-вимірними кубами з ребром ε . Характерний розмір фазової краплі в початковий момент часу – a ($a \gg \varepsilon$). Через який час огрублений фазовий об'єм почне зростати?
8. Чим визначається проміжок часу, на якому можна визначити КС-ентропію для гамільтонівської системи?
9. Запропонуйте можливі алгоритми визначення КС-ентропії в числовому експерименті.
10. Які висновки про рух гамільтонівської системи можна зробити, досліджуючи спектральну інтенсивність її руху?
11. Чи може КС-ентропія бути від'ємною?

Задачі до підрозділу 3.1.3

3.1.3.1. Динамічна система описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha (-\gamma x^2 \overline{y} - \omega_0^2 x).$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки і напрямки власних векторів у фазовому просторі.

3.1.3.2. Динамічна система описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha (-\gamma y^2 \overline{y} - \omega_0^2 x).$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки і напрямки власних векторів у фазовому просторі.

3.1.3.3. Система рівнянь, що описує генератор шуму КПП, має вигляд:

$$\frac{di}{d\tau} = i \left[-\gamma u^2 \overline{v} - v - u \right]; \quad \frac{du}{d\tau} = i; \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = i - \beta v \left[\gamma - v_0 \overline{v} \right] + \delta.$$

Вважаючи параметр ε малим, знайти показники Ляпунова в околі точки $\{0, 0, 0\}$.

3.1.3.4. Система Вольтерра для чисельності популяцій хижак-здобич у випадку необмежених харчових ресурсів має вигляд

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \quad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_2 N_1 N_2$$

(усі коефіцієнти додатні). Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках. Коли ці точки будуть стійкими?

3.1.3.5. Система Вольтерра для чисельності популяцій хижак-здобич у випадку обмежених харчових ресурсів має вигляд

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \quad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \left(\varepsilon_2 / K \right) \overline{N}_2^2 - \gamma_2 N_1 N_2$$

(усі коефіцієнти додатні). Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках. Коли ці точки будуть стійкими?

3.1.3.6. Взаємні перетворення проміжних продуктів хімічної реакції Лотки, що мають концентрації X та Y , описуються системою кінетичних рівнянь:

$$\dot{X} = k_0 - k_1 XY, \quad \dot{Y} = k_1 XY - k_2 Y.$$

Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках. Коли ці точки будуть стійкими?

3.1.4. Точкові відображення

Для опису хаотичної динаміки систем із багатьма ступенями вільності в багатьох випадках дуже зручним виявляється так званий метод точкових відображень, або відображень Пуанкаре. У цьому розділі ми розглянемо деякі загальні властивості точкових відображень, а потім подивимось, як цей метод застосовується для аналізу найпростішої динамічної системи – так званого б'їльярду Синая.

3.1.4.1. Відображення Пуанкаре

Нехай деяка динамічна система задається диференціальними рівняннями вигляду:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (3.1.84)$$

з початковими умовами $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0$.

Виберемо у фазовому просторі цієї динамічної системи деяку гіперповерхню Λ , яку фазові траєкторії перетинають, не дотикаючись до неї (рис. 3.1.12). Будемо позначати точками на цій поверхні місця перетину її фазовою траєкторією в певному напрямку (наприклад, згори вниз). Дістанемо деякий набір точок A, B, C, \dots , що послідовно переходять одна в одну. Оскільки рівняння руху з початковими умовами однозначно задає фазову траєкторію, то кожна точка в цій послідовності однозначно визначається положенням попередньої точки. Іншими словами, існує деяка функція φ , що пов'язує між собою координати кожної пари сусідніх точок у послідовності A, B, C, \dots . Нехай \vec{x}_n – координати n -ї точки послідовності. Тоді для довільного n

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{\varphi}(\vec{x}_n) \quad (3.1.85)$$

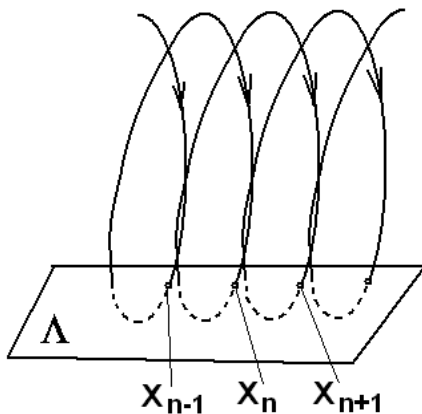


Рис. 3.1.12. Точкове відображення, що виникає при багатократному перетині гіперповерхні Λ фазовою траєкторією.

Говорять, що співвідношення (3.1.85) визначає *точкове відображення, або відображення Пуанкаре*. Послідовно застосовуючи його, отримуємо послідовність $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots$, що однозначно задається відображенням φ і початковою точкою \vec{x}_0 . Номер n відіграє роль дискретного часу.

Використання точкового відображення (3.1.85) замість рівняння (3.1.84) дає можливість зменшити розмірність фазового простору досліджуваної системи на одиницю. Крім того, виявляється, що властивості динамічної системи (3.1.84) великою мірою визначаються властивостями породжуваного нею відображення (3.1.85). Зокрема, періодичним розв'язком (3.1.84) будуть відповідати так звані *нерухомі точки відображення* (3.1.85).

Відзначимо, що точкові відображення вигляду (3.1.85) можуть бути визначені і поза великим зв'язком з конкретними системами диференціальних рівнянь.

3.1.4.2. Нерухомі точки та мультиплікатори

Розглянемо більш детально властивості відображення (3.1.85). Точка \vec{x}^* називається *нерухомою точкою відображення* φ , якщо вона задовольняє співвідношенню

$$\bar{x}^* = \bar{\varphi} \bar{x}^* . \quad (3.1.86)$$

Іншими словами, нерухома точка – це точка, яка не змінюється під дією відображення. Очевидно, такій точці відповідає замкнена траєкторія у фазовому просторі.

У теорії відображень нерухомі точки відіграють таку саму роль, як стаціонарні точки в теорії диференціальних рівнянь.

Знайдемо умови стійкості нерухомої точки. Для цього покладемо $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}_n$, вважаючи, що $|\delta \mathbf{x}_n| \ll |\mathbf{x}^*|$ і підставимо до (3.1.85). Функцію в правій частині розкладаємо в багатовимірний ряд Тейлора, обмежуючись лінійними доданками. Отримаємо:

$$\bar{x}^* + \delta \bar{x}_{n+1} = \bar{\varphi} \bar{x}^* + \delta \bar{x}_n \approx \bar{\varphi} \bar{x}^* + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^i} \delta x_n^i , \quad (3.1.87)$$

або, з урахуванням (3.1.86),

$$\delta x_{n+1}^i = b_{ij} \delta x_n^j , \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^*} . \quad (3.1.88)$$

Матриця з елементами b_{ij} являє собою, по суті, якобіан відображення (3.1.85). Власні значення цієї матриці α_k називаються мультиплікаторами. Це, по суті, коефіцієнт передачі зорієнтованого певним чином (у напрямку одного з власних векторів матриці b_{ij}) початкового збурення $\delta \mathbf{x}$ за один прохід. Значення мультиплікаторів α знаходяться з рівняння:

$$\det b_{ij} - \alpha \delta_{ij} = 0 , \quad (3.1.89)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Нерухома точка \mathbf{x}^* є стійкою, якщо всі мультиплікатори α_k задовольняють умові $|\alpha_k| < 1$. Якщо серед мультиплікаторів α_k є такі, що для них $|\alpha_k| > 1$, нерухома точка \mathbf{x}^* буде нестійкою.

В автономних системах один з мультиплікаторів, що відповідає еволюції системи уздовж періодичної траєкторії, завжди дорівнює одиниці. Тому число „нетривіальних” мультиплікаторів у системі з N-вимірним фазовим простором дорівнює N-1.

Для двовимірних відображень (N-1=2), очевидно, можливі лише три випадки:

$|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| > 1$ – повністю нестійка нерухома точка, якій у фазовому просторі відповідає нестійкий граничний цикл (рис. 3.1.13 а);

$|\alpha_1| < 1, |\alpha_2| < 1$ – стійка нерухома точка, якій відповідає стійкий граничний цикл (рис. 3.1.13 б);

$|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| < 1$ – сідлова нерухома точка, якій відповідає так званий сідловий граничний цикл (рис. 3.1.13 в).

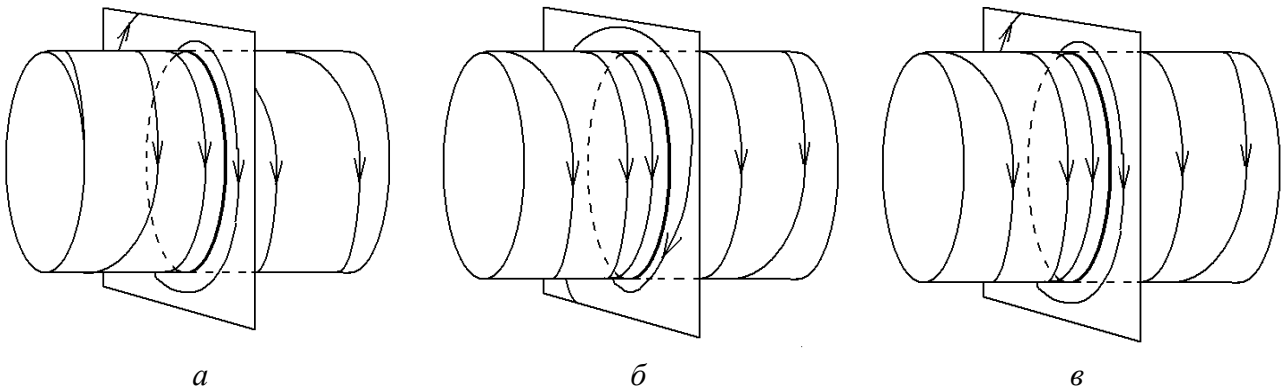


Рис. 3.1.13: а – нестійкий граничний цикл; б – стійкий граничний цикл; в – сідловий граничний цикл.

Розташуємо всі α_k за величиною модуля:

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_k| \leq \dots \leq |\alpha_N| .$$

Тут α_k – найбільший мультиплікатор, який ще задовольняє умові $|\alpha_k| \leq 1$. Тоді у фазовому просторі є k стійких та N-k нестійких напрямків.

Показник розтягання визначимо так: нехай у напрямку власного вектора із номером „i” має місце розтягання з характерним числом α_i ($|\alpha_i| > 1$). Тоді за n кроків довжина вектора зросте як

$$d_i^n = |\alpha_i|^n d_i^0 = d_i^0 \exp(\sigma_i n), \quad (3.1.90)$$

де $\sigma_i = \ln|\alpha_i|$. Величини σ_i – це не що інше як показники Ляпунова.

Для гамільтонівських систем $\det(a_{ij})=1$, $N=2n$ (n – кількість ступенів вільності). Тоді

$$\prod_{i=1}^{2n} \alpha_i = 1. \quad (3.1.91)$$

Зокрема, при $N=1$ маємо $\alpha_1, \alpha_2 = 1$, тобто відповідна нерухома точка відображення (якщо вона нестійка) буде сідловою.

3.1.4.3. Цикли для одновимірних відображень

Розглянемо окремо одновимірні відображення вигляду

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (3.1.92)$$

Графік залежності (3.1.92) називають діаграмою Ламерея (рис. 3.1.14).

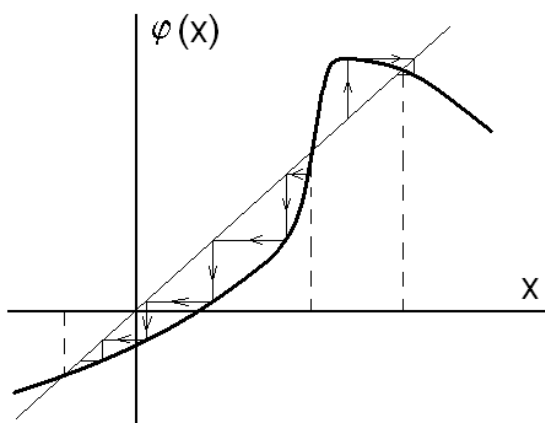


Рис. 3.1.14. Діаграма Ламерея.

На діаграмі Ламерея нерухомі точки – точки перетину графіка $\varphi(x)$ і прямої $y=x$. Вони стійкі, якщо $|\varphi'(x)| < 1$, і нестійкі в протилежному випадку.

Крім нерухомих точок, одновимірні відображення можуть мати цикли. Циклом порядку m (або ж m-кратним циклом) точкового відображення називається послідовність точок x_1, x_2, \dots, x_m , що задовольняють співвідношенням:

$$x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots, x_m = \varphi(x_{m-1}), x_1 = \varphi(x_m), \quad (3.1.93)$$

причому всі точки послідовності – різні. Точки циклу називаються іноді m-кратними нерухомими точками (рис. 3.1.15).

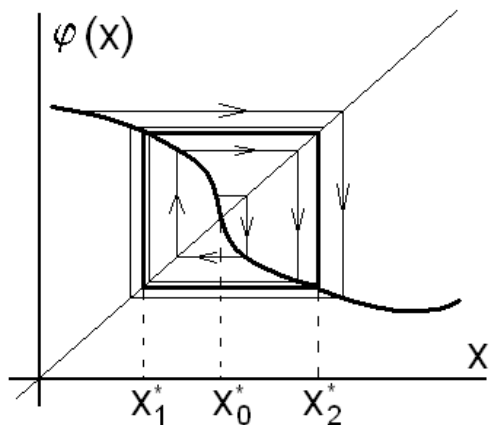


Рис. 3.1.15. Двократний стійкий цикл x_1^*, x_2^* та нестійка нерухома точка x_0^* .

Оскільки для m -кратних нерухомих точок

$$x_1 = \varphi^m x_1 \equiv \varphi \varphi \varphi \dots \varphi x_1 \quad (3.1.94)$$

(відображення φ послідовно діє m разів), то кожна з точок x_1, x_2, \dots, x_m одночасно є нерухомою точкою відображення φ^m . Тому умова стійкості m -кратної нерухомої точки має вигляд

$$|\varphi' x_1 \varphi' x_2 \dots \varphi' x_m| < 1, \quad (3.1.95)$$

де $\varphi'(x) \equiv d\varphi/dx$.

3.1.4.4. Властивості монотонно зростаючих відображень

В залежності від вигляду функції φ одновимірні відображення бувають взаємно однозначні і не взаємно однозначні. Розглянемо спочатку взаємно однозначні відображення.

Відображення (3.1.92) називається взаємно однозначним, якщо рівність $\varphi(x)=\varphi(y)$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x=y$. Іншими словами, $\varphi(x)$ або монотонно зростає, або монотонно спадає на всьому інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Розглянемо спочатку випадок $\varphi'(x) > 0$. З рис. 3.1.16 а видно, що серед нерухомих точок стійкі та нестійкі чергуються, причому інтервал стійкості стійкої точки лежить між сусідніми нестійкими точками. Іншими словами, якщо послідовність нерухомих точок є $\dots < x_{k-1}^* < x_k^* < x_{k+1}^* < \dots$, причому x_k^* – стійка точка, то x_{k-1}^* та x_{k+1}^* – нестійкі точки, а область стійкості точки x_k^* складає проміжок $(x_{k-1}^*; x_{k+1}^*)$.

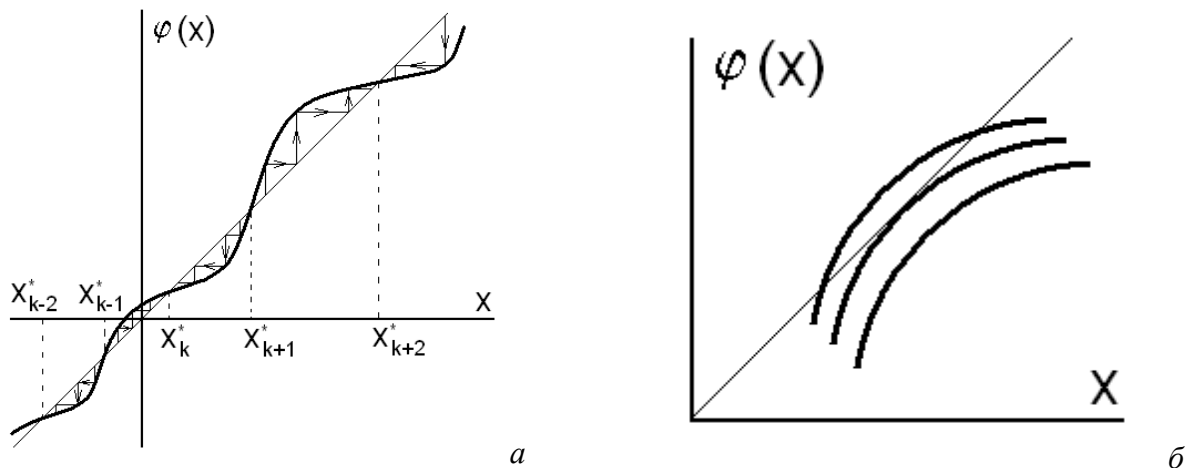


Рис. 3.1.16. Властивості монотонно зростаючого відображення:
а – чергування стійких та нестійких нерухомих точок;
б – утворення (зникнення) пари стійка - нестійка нерухома точка.

Особливий випадок має місце, коли графік $y=\varphi(x)$ дотикається до прямої $y=x$ (рис. 3.1.16 б). Цей випадок відповідає біфуркації точкового відображення, коли виникає (чи зникає) пара – стійка та нестійка рухома точки. Якщо (3.1.92) є деяке відображення Пуанкаре, то даному випадку відповідає народження (зникнення) у фазовому просторі динамічної системи пари граничних циклів – стійкого та нестійкого (як при задоволенні умови самозбудження автогенератора в жорсткому режимі).

3.1.4.5. Властивості монотонно спадних відображень

Тепер розглянемо випадок, коли $\varphi'(x) < 0$. В цьому випадку може існувати єдина нерухома точка $x^* = \varphi(x^*)$, що може бути стійкою або нестійкою.

Відзначимо, що відображення $F(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$ належить до розглянутого раніше типу з додатною похідною. Справді,

$$F' x = \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{\varphi x} \cdot \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_x \geq 0 \quad (3.1.96)$$

(бо обидва співмножники від'ємні). Ясно, що стаціонарним точкам відображення (крім x^*) будуть відповідати двократні цикли відображення φ . Отже, тепер вся пряма x розбивається на область притягання нерухомої точки x^* (якщо вона стійка) і області притягання стійких циклів. Межами цих областей служать нестійкі двократні цикли.

Для взаємно однозначного відображення з $\varphi'(x) \leq 0$ можливі два типи біфуркації: перехід від стійкої нерухомої точки до нестійкої, оточеної стійким циклом, (рис. 3.1.17 а, б) і народження (зникнення) пари стійкий-нестійкий цикл (рис. 3.1.17 а, в). Перший із цих біфуркацій відповідає подвоєнню періоду коливань.

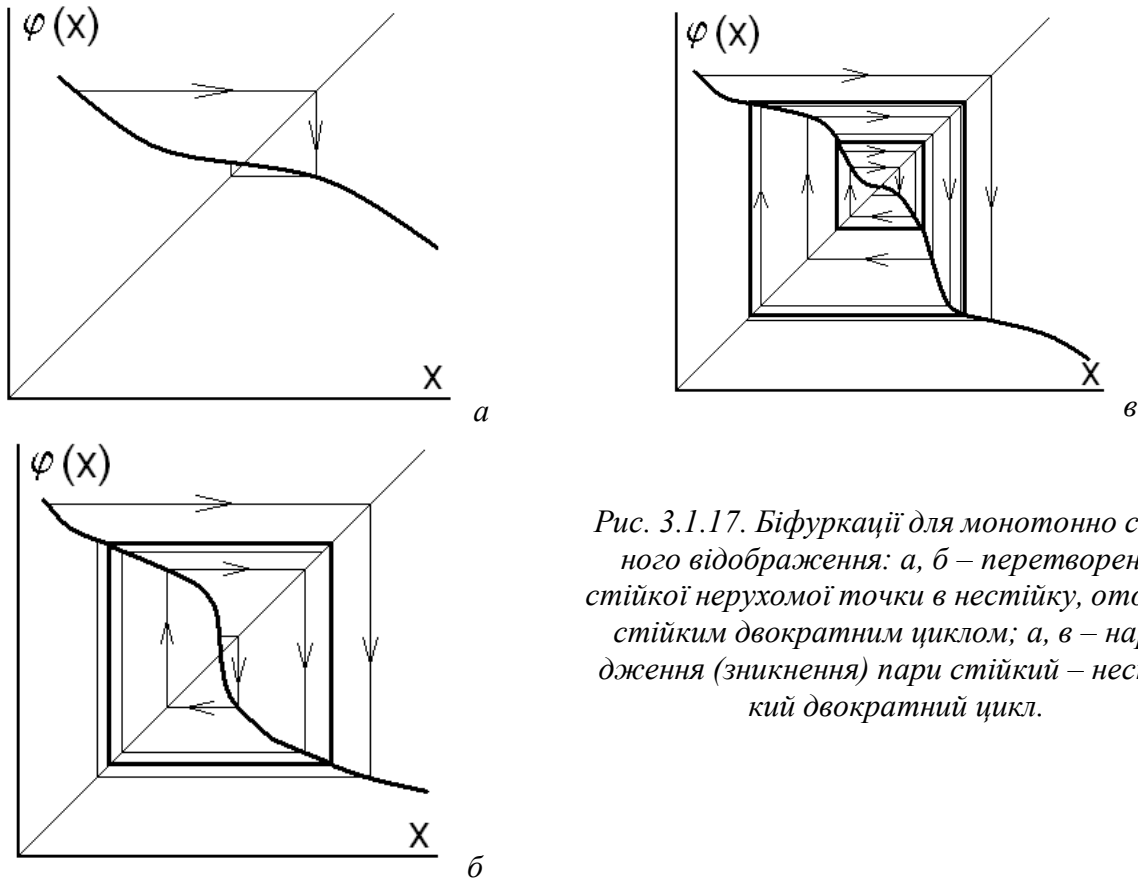


Рис. 3.1.17. Біфуркації для монотонно спадного відображення: а, б – перетворення стійкої нерухомої точки в нестійку, оточену стійким двократним циклом; а, в – народження (зникнення) пари стійкий – нестійкий двократний цикл.

3.1.4.6. Немонотонні відображення

Розглянемо тепер більш складний випадок однозначних, але не взаємно однозначних відображень. Характерною особливістю таких відображень є можливість виникнення надзвичайно складної динаміки – аперіодичних послідовностей, коли при деяких початкових умовах у відображення відсутні будь-які нерухомі точки (довільної кратності). Це впливає з того, що при спробі відтворення послідовності точок у зворотному напрямку внаслідок неоднозначності відображення φ^{-1} кожного разу виникатиме питання, яку з гілок обрати.

Виявляється, що немонотонне відображення, яке складається з кількох гілок, кожна з яких відображає частину деякого відрізка у весь цей відрізок, має нескінченну кількість різних кратних нерухомих точок. Продемонструємо це на простому прикладі відображення $\varphi(x) = \{2x\}$, що відображає відрізок $[0, 1]$ сам у себе (рис. 3.1.18 а). Тут символ $\{ \}$ означає дробову частину числа.

Зворотне відображення, очевидно, матиме дві гілки – $g_1(x) = (1+x)/2$ та $g_2(x) = x/2$ (рис. 3.1.18 б). Цикл прямого відображення, очевидно, буде циклом і для підібраних відповідним чином гілок зворотного відображення. Наприклад, цикл кратності 2 можна побудувати, взявши послідовно відображення g_1 та g_2 . Маємо:

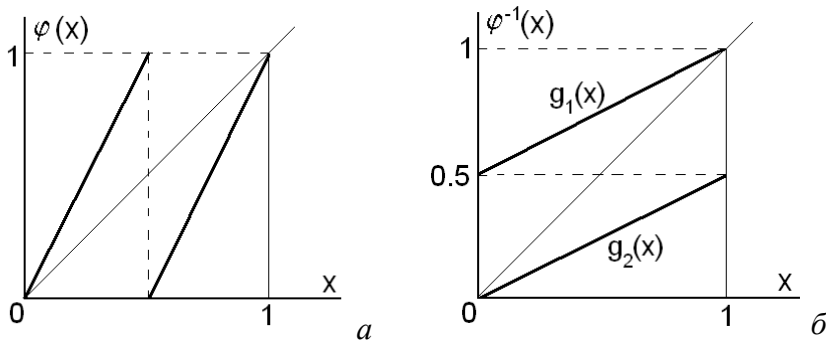


Рис. 3.1.18. Графік відображення $\varphi(x)=\{2x\}$ (а) та зворотного відображення (б).

$$g_2 \circ g_1 \circ x = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4}.$$

Стационарна точка цього відображення знаходиться з рівняння

$$\frac{1}{4} + \frac{x}{4} = x.$$

Ця точка $x^* = 1/3$. Підставляючи її до відображення $\varphi(x)$, отримуємо:

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{ \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3}; \quad \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \left\{ \frac{4}{3} \right\} = \frac{1}{3}.$$

Отже, точки $1/3$ та $2/3$ справді утворюють двократний цикл відображення $\varphi(x)$. Взявши, наприклад, відображення $g_1(g_1(g_2(x)))$ або $g_1(g_2(g_2(x)))$, можна аналогічно знайти цикли кратності 3, тощо.

3.1.4.7. Теорема Шарковського

Існує ряд теорем, за допомогою яких можна з'ясувати, коли точкові відображення характеризуються складною нерегулярною динамікою. Одна з них – це теорема Шарковського (А.Н.Шарковский. Укр. мат. журн., 1964, **16**, 61).

Нехай φ є неперервне відображення лінійної області \mathbb{R} в \mathbb{R} , і воно має n -кратний зворотний цикл. Тоді відображення φ має і цикли кратності m , де m – будь-яке число, що передре n у послідовності:

$3 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow 9 \leftarrow \dots \leftarrow (2n-1) \leftarrow \dots \leftarrow 2 \cdot 3 \leftarrow 2 \cdot 5 \leftarrow 2 \cdot 7 \leftarrow \dots \leftarrow 2^2 \cdot 3 \leftarrow 2^2 \cdot 5 \leftarrow 2^2 \cdot 7 \leftarrow \dots \leftarrow 2^3 \leftarrow 2^2 \leftarrow 2 \leftarrow 1$,

причому такі цикли відповідають початковим умовам множини ненульової міри.

Пізніше окремий випадок теореми Шарковського, проаналізований Лі та Йорке, став відомий під назвою „Період три народжує хаос”.

Якщо для одновимірного обмеженого відображення в усій області значень x виконано нерівність $|\varphi'/\varphi| > 1$, то таке відображення (його називають розтягаючим) характеризується нестійкістю: сусідні точки експоненціально розбігаються. Але, оскільки таке відображення завжди немонотонне, ці точки залишаються в межах скінченного інтервалу, переплутуючись при цьому. Фактично таке відображення гарантує хаотичну динаміку системи.

3.1.4.8. Більярди Синая

Історично одним з перших прикладів реальних (чи, принаймні, близьких до реальності) систем, що демонструють непередбачувану поведінку, були більярди Синая (Я.Г.Синай. ДАН СРСР, 1963, **153**, 1261; УМН, 1970, **25**, 141). Приклад такого більярду наведений на рис. 3.1.19. Як видно з цього рисунку, сусідні кулі, що рухалися паралельно одна одній, вже після кількох відбиттів від стінок розходяться на велику віддаль.

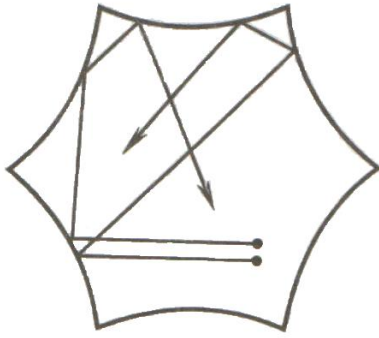


Рис. 3.1.19. Схема одного з більярдів Синая.

3.1.4.9. Зв'язок між кутом падіння та кутом відбиття

Найпростішою моделлю більярду Синая може служити відбиття точкової кульки від набору однакових кіл, що заповнюють деяку площину (рис. 3.1.20 а). Нехай характерна віддаль між центрами кіл – R , радіус окремого кола – r .

Розглянемо одноразове відбиття точкової кульки від такого кола. Спробуємо зв'язати кут падіння α з кутом відбиття β (рис. 3.1.20 б).

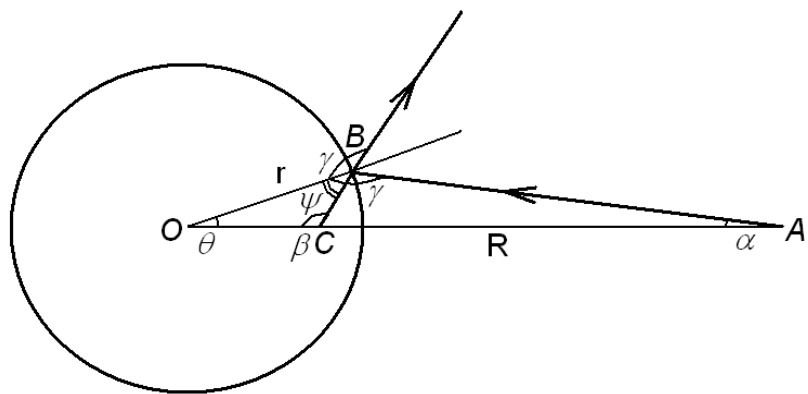
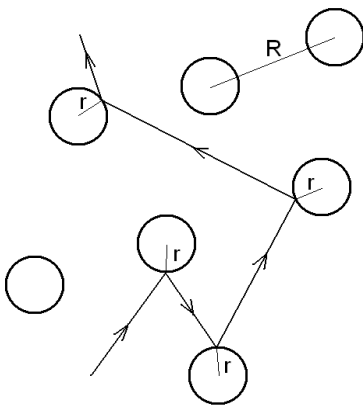


Рис. 3.1.20: а – найпростіша модель більярду Синая; б – одноразове відбиття точкової кульки від кола.

З трикутника АВО за теоремою синусів

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \gamma}{R}. \quad (3.1.97)$$

Оскільки завжди $\gamma > \pi/2$, то, як випливає з (3.1.97),

$$\gamma = \pi - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right). \quad (3.1.98)$$

Оскільки $\psi = \pi - \gamma$, то з трикутника ОВС можна записати, що

$$\beta = \pi - \theta - \psi = \pi - \theta - \pi - \gamma = \gamma - \theta. \quad (3.1.99)$$

З іншого боку, як випливає з трикутника АВО,

$$\theta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \alpha - \pi + \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) = \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \alpha. \quad (3.1.100)$$

(враховано рівність (3.1.98)). Підставивши (3.1.100) та (3.1.98) до (3.1.99), отримаємо остаточний вираз для шуканого кута β :

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) - \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right) + \alpha = \pi + \alpha - 2 \arcsin\left(\frac{R}{r} \sin \alpha\right). \quad (3.1.101)$$

Якщо $\alpha \rightarrow 0$, то співвідношення (3.1.101) спрощується:

$$\beta \approx \pi + \alpha \left(1 - 2 \frac{R}{r}\right). \quad (3.1.101 \text{ а})$$

Зміна кута α на величину $d\alpha$ після відбиття породжує зміну кута β на величину

$$d\beta = d\alpha \left(1 - 2 \frac{R}{r} \right). \quad (3.1.101 \text{ б})$$

Як випливає з (3.1.101 б), $|d\alpha/d\beta| > 1$ при $R > r$, а останнє співвідношення за умовою задачі виконується завжди.

3.1.4.10. Побудова модельного відображення

Узагальнюючи співвідношення (3.1.101 б) та беручи до уваги, що значення кутів α та β знаходяться на проміжку $[0, 2\pi]$, приходимо до відображення вигляду

$$x_{n+1} = \{Kx_n\} \quad (0 < x < 1), \quad (3.1.102)$$

де символ $\{ \}$, як і раніше, означає дробову частину, K – параметр.

Якщо $K < 1$, то $x_n = Kx_{n-1} = \dots = K^n x_0$, тобто $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Якщо $K > 1$, ситуація повністю змінюється, бо умова $|dx_{n+1}/dx_n| = K > 1$, як ми вже знаємо, (див. кінець п. 3.1.4.3) означає наявність локальної нестійкості.

3.1.4.11. Розрахунок КС-ентронії

Можна записати, що

$$\delta x_{n+1} = K \delta x_n = \dots = K^{n+1} \delta x_0 = e^{(n+1) \ln K} \delta x_0. \quad (3.1.103)$$

Отже, оскільки номер кроку можна ототожнити з дискретним часом, то

$$h_0 = \ln K = h, \quad (3.1.104)$$

оскільки $h_0 = \text{const}$ на відрізку $[0, 1]$.

3.1.4.12. Розрахунок часу розчеплення кореляцій

Покажемо, що час розщеплення кореляції в цьому випадку задовольняє умові $\tau_c \sim 1/h$, тобто пам'ять про початкові умови забувається тим швидше, чим більший параметр K .

Справді, оцінимо корелятор $R_n(f, g)$, вибравши функції f та g у формі

$$f(x_m) = \exp i2\pi x_m, \quad g(x_n) = \exp -i2\pi x_n$$

(параметр K у відображенні (3.1.102) вважаємо нецілим числом). Функції f та g вибрані так, що

$$f(x_m) = f(Kx_m), \quad g(x_m) = g(x_m).$$

Корелятор $R_n(f, g)$ можна подати у формі (див. формулу (3.1.58 б))

$$R_n(f, g) = \langle f(x_n), g(x_0) \rangle = \langle f(x) \rangle \langle g(x) \rangle. \quad (3.1.105)$$

Для обраних функцій f та g

$$\langle f \rangle = \langle g^* \rangle = \int_0^1 \exp i2\pi x \, dx = \frac{\exp i2\pi x}{i2\pi} \Big|_0^1 = 0.$$

Тоді (3.1.105) набуває вигляду:

$$R_1(f, g) = \int_0^1 dx_0 \exp i2\pi Kx_0 \exp -i2\pi x_0 = \frac{\exp[i2\pi(K-1)x_0] - 1}{i2\pi(K-1)};$$

$$R_n(f, g) = \int_0^1 dx_0 \exp i2\pi K^n x_0 \exp -i2\pi x_0 = \frac{\exp[i2\pi(K^n-1)x_0] - 1}{i2\pi(K^n-1)}, \quad (3.1.106)$$

тобто при $K \gg 1$

$$|R_n| \sim \frac{1}{K^n} = \exp -n \ln K. \quad (3.1.107)$$

Як випливає з (3.1.107), для системи, описуваної відображенням (3.1.102),

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \ln k, \quad h \sim \frac{1}{\tau_c}$$

(пор. з п. 3.1.3.5).

Контрольні питання до підрозділу 3.1.4

1. Що таке нерухома точка для точкового відображення? Коли вона буде стійкою? Які фазові траєкторії у фазовому просторі відповідають їй?
2. Що таке цикл кратності m для точкового відображення? Які фазові траєкторії у фазовому просторі відповідають йому? Коли він буде стійким?
3. Яке відображення відповідає нестійкому рухові системи?
4. Як пов'язані між собою мультиплікатори та показники Ляпунова?
5. Які біфуркації можливі в системах, описуваних монотонно зростаючими відображеннями?
6. Які біфуркації можливі в системах, описуваних монотонно спадними відображеннями?
7. Відображення має цикл кратності 12. Цикли ще якої кратності воно має?
8. Чому в більярді Синая виникає нестійкість?

Задачі до підрозділу 3.1.4

3.1.4.1. Для лінійного слабкодисипативного осцилятора побудувати відображення Пуанкаре і дослідити його властивості в залежності від параметру дисипації.

3.1.4.2. Відображення Ено має вигляд:

$$\bar{x} = y + 1 - ax^2; \quad \bar{y} = bx.$$

Знайти нерухомі точки цього відображення. Коли ці точки будуть стійкими?

3.1.4.3. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку $[0, 1]$ має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x \left(-x \right), \quad 0 \leq \mu \leq 4.$$

Знайти стаціонарні точки цього відображення та дослідити їхню стійкість.

3.1.4.4. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку $[0, 1]$ має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x \left(-x \right), \quad 0 \leq \mu \leq 4.$$

Дослідити умови існування та стійкості циклу кратності 2 цього відображення.

3.1.4.5. Для відображення

$$\bar{x} = \mu + x + x^2$$

знайти стаціонарні точки. При яких значеннях μ вони існуватимуть? Чи будуть вони стійкими?

3.1.4.6. Для відображення

$$\bar{x} = 4x \left(-x \right)$$

знайти цикл кратності 2.

3.1.5. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора: побудова відображення та аналіз руху

Як відомо, однією з найпростіших моделей, яка демонструє хаотичну динаміку, є нелінійний консервативний осцилятор, на який діє зовнішня сила, що залежить від часу. Нехай зовнішня сила являє собою періодичну послідовність коротких імпульсів, проміжок між якими значно менший від їхньої тривалості. Тоді для такої системи можна побудувати точкове відображення, яке дозволяє проаналізувати рух системи на великих проміжках часу і виявити області параметрів, коли такий рух стає хаотичним.

3.1.5.1. Опис моделі

Розглянемо систему, що описується в координатах дія-кут гамільтоніаном вигляду:

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t) . \quad (3.1.108)$$

Перший доданок у правій частині (3.1.108) відповідає власним коливанням осцилятора, який ми надалі вважатимемо нелінійним, другий – потенціалу зовнішньої сили. Гамільтоніан (3.1.108) породжує рівняння руху у формі:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} , \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} , \end{aligned} \quad (3.1.109)$$

де $\omega(I) \equiv dH_0/dI$.

Будемо вважати, що зовнішня сила являє собою деяку послідовність ударів. Тоді, як впливає з першого рівняння системи (3.1.109), дія змінюватиметься лише під час ударів, а в проміжках між ударами вона зберігатиметься. Прийmemo також, що тривалість окремих ударів τ значно менша від характерного проміжку T між ударами.

Нехай до того ж інтервали T між ударами однакові. Тоді гамільтоніан у “старих” координатах можна записати у вигляді

$$H(p, q, t) = H_0(p, q) + \varepsilon V(q, T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT) , \quad (3.1.108 \text{ а})$$

де $t_0 - nT$ – моменти ударів (враховано, що потенціал збурення залежить від координати, але не від швидкості). В координатах дія-кут можна записати:

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT) . \quad (3.1.108 \text{ б})$$

Саме систему, описувану гамільтоніаном (3.1.108 б), ми будемо розглядати нижче. Цей гамільтоніан породжує рівняння руху у формі

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT) , \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - nT) . \end{aligned} \quad (3.1.109 \text{ а})$$

3.1.5.2. Побудова відображення

За відсутності зовнішньої сили рух нелінійного осцилятора зручно описувати змінними дія-кут. Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис. 3.1.1 а. В загальному випадку фазовий простір системи, описуваної рівняннями (3.1.109 а), буде тривимірним, тобто у фазовому просторі додається вісь часу, перпендикулярна до площини дія-кут.

Наявність періодичної зовнішньої сили дозволяє побудувати відображення природним чином. Для цього ототожнимо кут θ з полярним кутом тора, дію I – з малим радіусом тора, а вісь часу – з тороїдальним кутом, причому зміна цього кута на 2π відповідає зміні часу на період зовнішньої сили T (рис. 3.1.21). Тоді моментам ударів відповідає півплощина, обмежена головою віссю тора, яка визначається значенням тороїдального кута t_0 . А за гіпер-

поверхню Λ (див. п. 3.1.4.1), яку перетинають фазові траєкторії, оберемо таку саму півплощину, яка відповідає моментам часу безпосередньо перед ударами, t_0-0 .

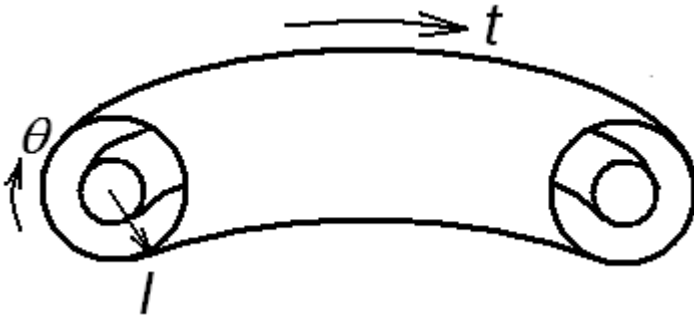


Рис. 3.1.21. Структура фазового простору.

Отже, визначимо відображення \mathbf{T} таким чином:

$$\bar{I}, \bar{\theta} = \mathcal{F}(I, \theta), \quad (3.1.110)$$

де

$$I = I(t_0 - 0); \quad \theta = \theta(t_0 - 0);$$

$$\bar{I} \equiv I(t_0 + T - 0); \quad \bar{\theta} = \theta(t_0 + T - 0).$$

Як уже говорилося, рух аналізованої системи можна розділити на миттєву зміну дії та кута в момент удару та вільні коливання в проміжках між ударами. Відповідно до цього відображення \mathbf{T} також можна розділити на два – відображення \mathbf{T}_δ , що описує удар, та відображення \mathbf{T}_R , що описує обертання (rotation) по колу радіусу I :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_R \mathcal{F}_\delta. \quad (3.1.111)$$

Для відображення \mathbf{T}_R , відповідно до другого рівняння системи (3.1.109 а), маємо:

$$\mathcal{F}_R(I, \theta) = (I, \theta + \omega(I)T). \quad (3.1.112)$$

Щоб отримати відображення \mathbf{T}_δ , проінтегруємо рівняння руху (3.1.109 а) в малому околі моменту удару t_0 (на проміжку $[t_0-0, t_0+0]$). Оскільки координата q неперервна, то й функція $V(q) = V(I, \theta)$ також неперервна. Маємо:

$$\Delta I \equiv I(t_0 + 0) - I(t_0 - 0) = \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{I} dt = -\varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta};$$

$$\Delta \theta \equiv \theta(t_0 + 0) - \theta(t_0 - 0) = \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{\theta} dt = \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial I}. \quad (3.1.113)$$

Рівняння (3.1.113) і визначають перетворення \mathbf{T}_δ :

$$\mathcal{F}_\delta(I, \theta) = \left(I - \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta}, \theta + \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial I} \right). \quad (3.1.114)$$

Підставляючи (3.1.112) і (3.1.114) до (3.1.111), остаточно маємо:

$$\bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial \theta}(I, \theta), \quad \bar{\theta} = \theta + \omega(I)T + \varepsilon T \frac{\partial V}{\partial I}(I, \theta). \quad (3.1.115)$$

Відображення (3.1.115) відоме в літературі як універсальне відображення.

Якщо припустити, що потенціал зовнішньої сили залежить тільки від кута, $V = V(\theta)$, то відображення (3.1.115) можна ще спростити:

$$\bar{I} = I - \varepsilon T V'(\theta), \quad \bar{\theta} = \theta + T\omega[I - TV'(\theta)] \quad (3.1.115 \text{ а})$$

Для того, щоб додатково спростити відображення (3.1.115 а), врахуємо, що функція $V(\theta)$ має бути періодичною, і покладемо $V(\theta) = V_0 \cos \theta$. Функцію $\omega(I)$ розкладемо в ряд Тейлора, обмежившись лінійним доданком: $\omega(I) = \omega_0 + \omega'I$. Тоді замість (3.1.115 а) можна записати:

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left(1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right), \quad (3.1.115 \text{ б})$$

де використано константи $I_0 = V_0 T$, $\alpha = \omega' I_0 / I$. Максимально спрощений варіант універсального відображення у формі (3.1.115 б) прийнято називати стандартним відображенням. Цьому відображенню відповідає гамільтоніан

$$H(I, \theta, t) = \omega_0 I + \frac{\alpha \omega_0 T}{2I_0} I^2 - \varepsilon I_0 T \cos \theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (3.1.108 \text{ в})$$

3.1.5.3. Умови виникнення нестійкості

Якобіан відображення (3.1.115 а) має вигляд:

$$\bar{J} = \frac{\partial \bar{I}, \bar{\theta}}{\partial I, \theta} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon T V'' \theta \\ \omega' \bar{I} T & 1 - \varepsilon T^2 \omega' \bar{I} V'' \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1.116)$$

Тоді значення мультиплікаторів знаходимо з рівняння (3.1.89)

$$\det \mathcal{F} - \sigma \mathcal{F} = 0,$$

або

$$(1 - \sigma)(1 - \sigma + K) - K = 0, \quad (3.1.117)$$

де використано позначення

$$K = K(I, \theta) \equiv -\varepsilon T^2 \omega' \bar{I} V'' \theta \quad (3.1.118)$$

Для стандартного відображення (3.1.115 б) $K = K_0 \cos \theta$, де $K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T$.

Як впливає з (3.1.117), мультиплікатори відображення (3.1.115 а) мають вигляд

$$\sigma_{1,2} = 1 + \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K}{2} \left(2 + \frac{K}{2} \right)}. \quad (3.1.117 \text{ а})$$

Відображення буде нестійким при $|\sigma| > 1$, тобто при $K > 0$ ($\sigma_1 > 1$) і при $K < -4$ ($\sigma_2 < -1$).

Для стандартного відображення, коли $K = K_0 \cos \theta$, видно, що яким би великим не був параметр K_0 , завжди знайдуться такі θ , що K потрапить в область стійкості. Це ускладнює можливість теоретичного аналізу межі виникнення стохастичності.

3.1.5.4. Фазовий портрет

Додатково спростимо стандартне відображення, опустивши постійний зсув фази $\omega_0 T$ (що еквівалентно переходу в систему координат, що обертається) і перейшовши до безрозмірної дії, $\alpha \omega_0 T I / I_0 \rightarrow I$. Тоді воно набуде вигляду:

$$\bar{I} = I + K_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi} \quad (3.1.115 \text{ в})$$

(підкреслено, що кут θ змінюється на проміжку $[0, 2\pi]$).

Нерухомі точки цього відображення знаходяться зі звичайної умови (3.1.86):

$$\bar{I} = I, \quad \bar{\theta} = \theta.$$

Звідси можна отримати два набори особливих точок:

$$(I_1, \theta_1) = (\pi m; 0), \quad (I_2, \theta_2) = (\pi m; \pi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.119)$$

Для першого з наборів $K_1 = K_0 \cos \theta = K_0 > 0$. Отже, ці точки завжди нестійкі, а точніше, гіперболічні, оскільки для гамільтонівських систем будь-яка нестійка точка буде гіперболічною. Для другого набору $K_2 = -K_0$, тобто ці точки стійкі (еліптичні), якщо $0 < K_0 < 4$.

Фазовий портрет системи для малих k_0 наведений на рис. 3.1.22 а (у полярних координатах).

Із зростанням параметра K_0 в системі відбуваються біфуркації народження кратних періодів, а при $K_0 \sim 1$ в околі сепаратриси з'являється широкий стохастичний шар (рис. 3.1.22 б). Окремі стохастичні шари відділені інваріантними кривими (слідами інваріантних торів на площині Λ), що існують внаслідок теореми КАМ. Оскільки число ступенів ві-

льності менше двох, окремі стохастичні шари ізольовані один від одного, тобто дифузія Арнольда відсутня.

При подальшому зростанні параметра K_0 ширина резонансів збільшується, відбувається їхнє перекриття, інваріантні тори руйнуються, і окремі стохастичні шари зливаються в стохастичне море (рис. 3.1.22 в), в якому, однак, існують острівці стійкості. Їхній розмір має порядок $1/K_0$. Цей випадок відповідає переходу до глобального хаосу.

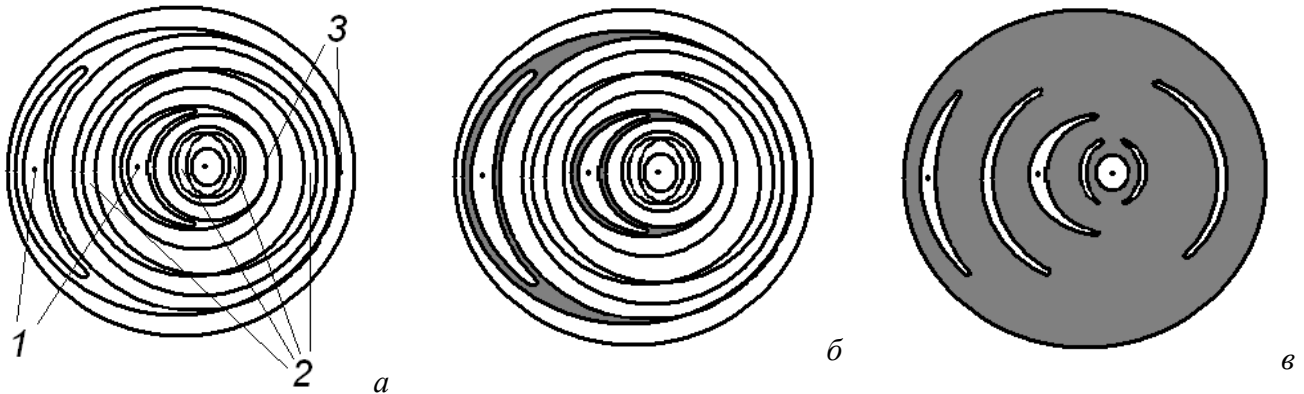


Рис. 3.1.22. Стандартне відображення для різних значень параметра K_0 : а – $K_0 \rightarrow 0$ (1, 3 – нерухомі точки вигляду (3.1.119), 2 – резонансні тори вищих порядків); б – $K_0 \approx 1$ (на місці сепаратрис утворилися стохастичні шари, але інваріантні тори зберігаються); в – $K_0 > 1$ (інваріантні тори зруйнувалися, утворилося єдине стохастичне море).

Як показує числове моделювання, область переходу до стохастичного режиму відбувається в дуже вузькому діапазоні значень K_0 (при $K_0 < 0,97$ утворюється стохастичний шар в околі сепаратриси, при $K_0 > 0,97$ стохастичні шари зливаються утворюючи стохастичне море).

Наявність острівців є фундаментальною властивістю реальних фізичних систем. Сама структура острівців є надзвичайно складною. Існують системи острівців різних порядків, розміри яких все більше зменшуються.

Описані тут результати для стандартного відображення переносяться і на універсальне відображення, відмінність виявляється лише у формі та кількості острівців.

3.1.5.5. Оцінка часу перемішування за кутом

Досі у всі формули, що описували стандартне відображення, входив лише добуток εV_0 . Для того, щоб визначити параметр ε незалежно, вважатимемо, що $I_0 \sim I$.

Якщо параметр ε малий, то, як впливає з (3.1.115 б), для стандартного відображення відносна зміна дії на один крок відображення є малою:

$$\frac{\Delta I}{I} \equiv \frac{|\bar{I} - I|}{I} = \frac{I_0}{I} |\sin \theta| \sim \varepsilon \ll 1. \quad (3.1.120)$$

Іншими словами, час перемішування за дією τ_1 , протягом якого відносна зміна дії стає величиною порядку одиниці, значно перевищує проміжок часу T між двома зовнішніми ударами.

Зі співвідношень (3.1.115 в) можна оцінити також відносну зміну кута на одному кроці відображення:

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} \equiv \frac{|\bar{\theta} - \theta|}{\theta} = \frac{|I + K_0 \sin \theta|}{\theta}. \quad (3.1.121)$$

Якщо $K_0 \gg 1$, відносна зміна кута на одному кроці відображення вже не буде малою.

Умови $K_0 \gg 1$ та $\varepsilon \ll 1$ можуть бути задоволені одночасно. Тоді характерний час перемішування за кутом τ_θ буде значно меншим від часу перемішування за дією τ_1 . Це означає, зокрема, що на проміжку часу $\tau_\theta \ll t \ll \tau_1$ процес перемішування за кутом (за фазою) можна

розглядати незалежно від зміни дії. Звідси випливає, що розрахунок часу перемішування за кутом для стандартного відображення можна повести, вважаючи дію фіксованою.

Побудуємо корелятор $R_n(f,g)$, вибравши функції f та g аналогічно до того, як це було зроблено в п. 3.1.4.4:

$$f(\theta_n) = \exp ir\theta_n, \quad g(\theta_0) = \exp -is\theta_0,$$

$$R_n(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \exp[i r\theta_n - s\theta_0] \quad (3.1.122)$$

де r, s – додатні числа, n – номер кроку відображення.

Зв'язок між θ_{n-1} та θ_n , що задається співвідношенням (3.1.115 б), перепишемо у формі $\theta_n = \theta_{n-1} + \omega T + K_0 \sin \theta_{n-1}$,

нехтуючи на проміжку часу $t \ll \tau_1$ зміною частоти ω внаслідок зміни дії. Тоді, підставивши цей вираз до (3.1.122), можна записати:

$$R_n(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \exp[i r\theta_{n-1} + r\omega T - rK_0 \sin \theta_{n-1} - s\theta_0]. \quad (3.1.122 \text{ а})$$

Далі можна скористатися відомим співвідношенням

$$\exp iz \sin \theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \exp im\theta, \quad (3.1.123)$$

де $J_m(x)$ – функція Бесселя порядку m .

Підставивши (3.1.123) до (3.1.122 а) і продовжуючи ітераційний процес, можна в решті решт отримати:

$$\begin{aligned} R_n(f,g) &= \exp ir\omega T \sum_{m=-\infty}^{\infty} -1^m J_m(rK_0) R_{n-1}(f,g) \Big|_{r-m,s} = \\ &= \exp inr\omega T \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} -1^{\sum_{k=1}^n m_k} \exp\left(i\omega T \sum_{k=1}^n m_k\right) \times \\ &\times J_{m_1}(rK_0) J_{m_2}(r-m_1 K_0) \dots J_{m_n}\left[\left(r - \sum_{k=1}^{n-1} m_k\right) K_0\right] R_0(f,g) \Big|_{r-\sum_{k=1}^n m_k,s}. \end{aligned} \quad (3.1.122 \text{ б})$$

Для оцінки корелятора $R_n(f,g)$ у формі (3.1.122 б) скористаємося асимптотикою функцій Бесселя $J_m(x) \sim x^{-1/2}$ і тим, що для цілих значень r та s $R_0(f,g) = \delta_{rs}$. Отримуємо:

$$R_n(f,g) \sim K_0^{n/2} \exp inr\omega T = \exp\left(-\frac{nT \ln K_0}{2T}\right) \exp inr\omega T. \quad (3.1.124)$$

Отже, час перемішування за кутом τ_θ визначається співвідношенням

$$\tau_\theta = \frac{2T}{\ln K_0}. \quad (3.1.125)$$

Контрольні питання до підрозділу 3.1.5

1. Які реальні системи можуть, на Вашу думку, бути описані моделлю універсального відображення?
2. Який характер нелінійності має осцилятор, що відповідає моделі стандартного відображення?
3. Що є причиною утворення острівців вищих порядків на фазовому портреті стандартного відображення?
4. Опишіть і поясніть залежність часу перемішування за кутом від властивостей моделі нелінійного осцилятора, на який діють короткі удари.
5. За яких умов час перемішування за дією для стандартного відображення буде значно меншим від часу перемішування за кутом?

Задачі до підрозділу 3.1.5

3.1.5.1. Доведіть, що стандартне відображення

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left(1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right)$$

буде нестійким при $K > 0$ та при $K < -4$, де $K = \varepsilon \alpha \omega_0 T \cos \theta$.

3.1.5.2*. За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет стандартного відображення

$$\bar{I} = I + \varepsilon I_0 \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \omega_0 T \left(1 + \frac{\alpha \bar{I}}{I_0} \right)$$

для різних значень параметра $K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T$.

3.1.5.3. Оцініть час перемішування для математичного маятника, на який діють імпульси заданої амплітуди A тривалістю τ ($\omega_0 \tau \ll 1$).

3.2. Хаос у дисипативних системах

У попередньому розділі 2.1 розглядалася хаотична динаміка гамільтонівських систем. Однак значна частина реальних систем (зокрема, практично всі макросистеми) є дисипативними.

У цьому розділі ми спочатку розглянемо загальні властивості хаотичної динаміки в дисипативних системах, а потім розберемо два приклади таких систем – стандартне дисипативне відображення та генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича.

3.2.1. Загальні властивості хаотичного руху дисипативних систем

У дисипативних системах стохастична динаміка має свою специфіку. Виявляється, що стохастична динаміка дисипативних систем еквівалентна існуванню в їхньому фазовому просторі деякого особливого об'єкта – дивного атрактора.

3.2.1.1. Прості атрактори

Для дисипативних систем теорема Ліувілля вже не справджується, і об'єм фазової краплі з часом змінюється. Він може як зростати, так і зменшуватись, але в середньому з часом він зменшується (це добре видно на прикладі автогенератора, див. рис. 3.2.1). В результаті при $t \rightarrow +\infty$ всі зображувальні точки опиняються на деякій підмножині фазового простору з нульовою мірою, яка називається атрактором. Точніше кажучи, атрактор – це деяка підмножина B фазового простору, що задовольняє таким умовам:

- вона інваріантна щодо дії оператора потоку, $F_t B = B$;
- існує деякий окіл U , що стискається до B під дією оператора потоку;
- множину B не можна розбити на дві інваріантні підмножини, що не перетинаються.

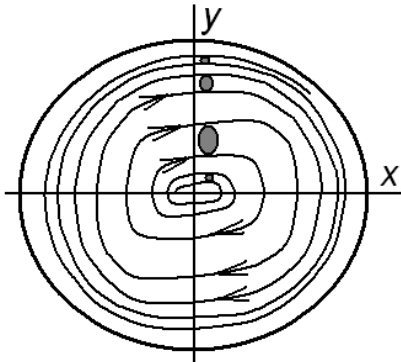


Рис. 3.2.1. Зміна об'єму фазової краплі на фазовій площині автогенератора.

Прикладами атракторів на фазовій площині можуть бути стаціонарні точки (стійкий фокус, стійкий вузол) та стійкі граничні цикли.

У фазовому просторі з розмірністю вище трьох, крім стаціонарних точок та граничних циклів, з'являється ще один різновид атракторів – багатовимірні інваріантні тори, що відповідають автоколиванням із кількома некретними частотами.

Всі згадані типи атракторів називають простими атракторами.

Крім атракторів, у фазовому просторі дисипативних систем можуть існувати й такі об'єкти, до яких зображувальні точки з деякого околу притягаються при $t \rightarrow \infty$. Такі об'єкти дістали назву репелерів. Репелери, як і атрактори, інваріантні щодо дії оператора потоку. Прикладами репелерів можуть служити нестійкий фокус, нестійкий вузол та нестійкий граничний цикл.

Відзначимо, що вже в тривимірному фазовому просторі можуть існувати стаціонарні точки, що є комбінаціями стійкого та нестійкого типів (рис. 3.2.2).

3.2.1.2. Дивні атрактори

Крім простих атракторів, у фазовому просторі можуть існувати ще так звані *дивні атрактори*, які не є ні стаціонарними точками, ні граничними циклами, ні інваріантними тора-

ми. Вони поєднують стійкість із нестійкістю. Зображувальні точки з часом притягаються до дивного атрактора, але на самому аттракторі сусідні зображувальні точки з часом розбігаються, тобто має місце нестійкість (щось схоже має місце для стаціонарних точок типу сідло-фокус та сідло-вузол, рис.3.2.2).

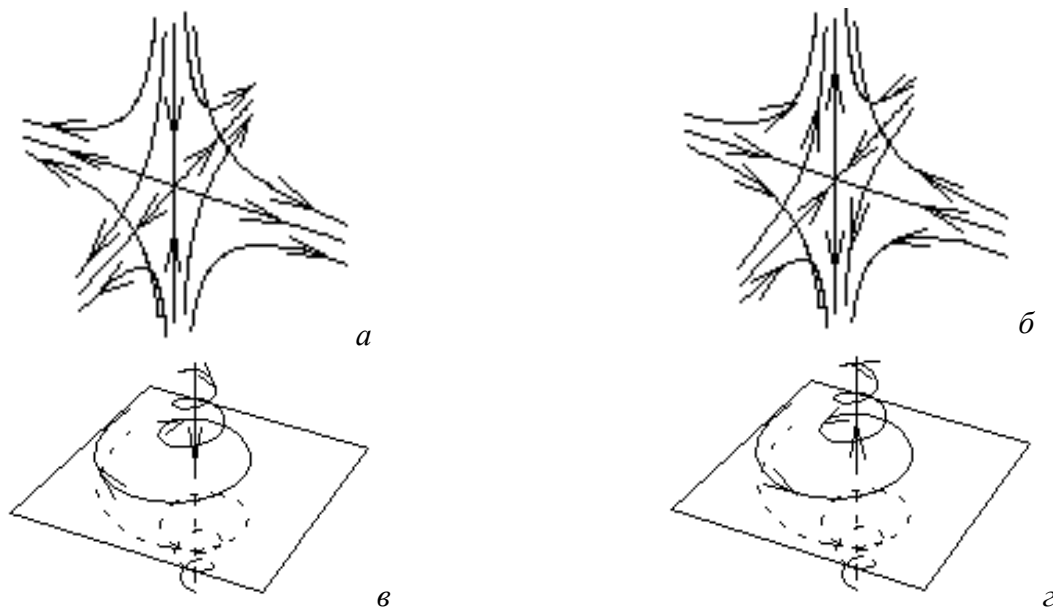


Рис. 3.2.2. Особливі точки типу сідло-вузол (а, б) та сідло-фокус (в, г) у тривимірному фазовому просторі.

Поняття дивного атрактора було введено Д.Рюелем та Ф.Такенсом (див.: Д.Рюэль, Ф.Такенс. В кн.: «Странные аттракторы». М., Мир, 1981. С. 117-151). Зупинимося на ньому більш детально.

Прості аттрактори є підмножинами фазового простору динамічних систем. Підмножина простору M – це будь-яка підмножина W простору M' (M' включається до M), яка має в кожній точці єдину дотичну гіперплощину, тобто W вкладена в M гладенько. Наприклад, граничний цикл та двовимірний інваріантний тор – це приклади одновимірного та двовимірного підмножин.

Але у фазовому просторі дисипативних систем з розмірністю не менше трьох можуть існувати обмежені притягальні множини, що є аттракторами, але при цьому не є підмножинами. Саме такі об'єкти називаються дивними аттракторами.

Дивні аттрактори мають надзвичайно складну геометричну структуру: вони належать до фракталів і характеризуються нецілою геометричною розмірністю.

Поведінка фазових траєкторій на дивному аттракторі аналогічна поведінці гамільтонівських систем із перемішуванням, їй відповідає стохастична динаміка системи. Зокрема, на дивному аттракторі можна визначити КС-ентропію та час перемішування.

Зокрема, зміна огрубленого фазового об'єму для дисипативної системи, що має дивний аттрактор у фазовому просторі, визначається співвідношенням:

$$\Delta G(t) = \Delta G(0) \exp[h_0(t - t_0)]. \quad (3.2.1)$$

Час t_0 у формулі (3.2.1) повинен задовольняти умові $t_0 > t_0^*$, де t_0^* – час, за який зображувальні точки, що належать фазовій краплі ΔG_0 , потрапляють на дивний аттрактор.

Із викладеного вище зрозуміло, що дивні аттрактори можуть існувати лише в таких дисипативних системах, які є або відкритими (до яких надходить енергія ззовні), або нерівноважними (тобто мають великий запас внутрішньої енергії). В протилежному випадку коливання в дисипативній системі з часом повинні згасати.

3.2.1.3. Квазіатрактори

Крім дивних атракторів, у фазовому просторі дисипативних систем можуть існувати й такі об'єкти, які поруч із нестійкими траєкторіями містять і стійкі траєкторії періодичного руху, але з дуже малими областями притягання. За рахунок флуктуацій зображувальна точка може перестрибувати з однієї стійкої траєкторії на іншу. В результаті рух системи сприймається як хаотичний. Такі об'єкти у фазовому просторі прийнято називати квазіатракторами.

Інший варіант квазіатрактора реалізується тоді, коли фазова траєкторія дисипативної динамічної системи має надзвичайно складну форму, але врешті решт прямує до простого атрактора. По-перше, час спостереження за рухом системи може виявитися меншим від часу її наближення до простого атрактора. По-друге, наявність флуктуацій може відкидати систему від простого атрактора, повертаючи її на траєкторію складного руху. В обох випадках рух системи зовні сприйматиметься як стохастичний.

Отже, про квазіатрактори говорять тоді, коли рух системи, взагалі кажучи, не є стохастичним, але сприймається як стохастичний через наявність флуктуацій або недостатньо тривалий час спостереження.

Контрольні питання до пункту 3.2.1

1. Чому в фазовому просторі дисипативних систем виникають атрактори?
2. Порівняйте перемішування та його характеристики в гамільтонівських та дисипативних системах.
3. Назвіть особливості хаотичної динаміки дисипативних систем у порівнянні з гамільтонівськими.
4. Як, на вашу думку, виглядає граничний перехід між гамільтонівськими та дисипативними системами з хаотичною динамікою?
5. Які властивості дивних атракторів у фазовому просторі дисипативних систем Вам відомі?
6. Які геометричні властивості дивних атракторів Вам відомі?

3.2.2. Автогенератор із параметричним збудженням

Порівняно простим прикладом дисипативної динамічної системи, яка демонструє хаотичну поведінку, може служити автогенератор, що збуджується параметрично. Цю модель, запропоновану Г.М.Заславським (Zaslavsky G.M. // Phys. Lett., **69A**, 145 (1978)), навряд чи можна реалізувати в експерименті. Але для неї вдається порівняно просто побудувати відображення, яке відоме в літературі як стандартне дисипативне відображення, а також аналітично дослідити вигляд дивного атрактора.

3.2.2.1. Побудова моделі

Розглянемо динамічну систему, що описується гамільтоніаном вигляду

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, f(t)). \quad (3.2.2)$$

Цей гамільтоніан породжує рівняння руху у формі

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta}(I, \theta, f(t)), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}(I, \theta, f(t)), \quad \omega(I) \equiv \frac{\partial H_0}{\partial I} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

(пор. з п. 3.1.5.1).

Тепер введемо до моделі дисипацію. Припустимо, що за відсутності збурення (при $\varepsilon=0$) система має стійкий граничний цикл при $I=I_0$. Тоді рівняння руху матимуть вигляд

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0), \quad \dot{\theta} = \omega(I). \quad (3.2.4)$$

Рівняння (3.2.4) якісно подібні до вкорочених рівнянь для інтенсивності та фази автогенератора типу Ван-дер-Поля (поблизу стійкого граничного циклу). Вони описують усталення коливальних в автогенераторі. Усталені коливання такого автогенератора характеризуються значенням дії I_0 (нагадаємо, що дія пов'язана з амплітудою коливальних) та частотою $\omega_0 \equiv \omega(I_0)$.

Додавши до рівнянь (3.2.4) малі доданки з рівнянь (3.2.3), можна отримати:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\gamma(I - I_0) - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta}(I, \theta, f(t)), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}(I, \theta, f(t)). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Рівняння (3.2.5) і описують модель, яка розглядатиметься нижче.

Зробимо деякі додаткові спрощення, аналогічні тим, які були прийняті при отриманні стандартного відображення (п. 2.1.5.2). По-перше, вважатимемо зовнішню силу періодичною з періодом T : $f(t+T)=f(t)$. По-друге, оберемо потенціал збурення у найпростішій формі:

$$V(I, \theta) = V(\theta) = \frac{I_0}{T} \cos \theta. \quad (3.2.6)$$

(тим самим ми однозначно визначаємо безрозмірну константу ε).

Перейдемо до безрозмірних величин:

$$y = \frac{I - I_0}{I_0}, \quad x = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \Gamma = \gamma T. \quad (3.2.7)$$

Введена таким чином змінна y являє собою безрозмірну віддаль (за дією I) від зображувальної точки до граничного циклу, x та τ – відповідно нормований кут та безрозмірний час.

В результаті рівняння (3.2.5) набувають вигляду:

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y - \varepsilon f(\tau) \cos 2\pi x, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega(y)}{2\pi}. \quad (3.2.5 \text{ a})$$

Рівняння (3.2.5 a) описують автогенератор, на який діє сила, що залежить від фази коливальних. Таку силу можна назвати параметричною.

Продовжимо спрощувати модель. Функцію $\omega(y)$ розкладемо в ряд Тейлора, обмежившись лінійним доданком:

$$\omega y = \omega_0 (1 + \alpha y), \quad (3.2.8)$$

де α – безрозмірний параметр нелінійності.

Нарешті, конкретизуємо вигляд функції $f(t)$. Як і при побудові універсального відображення (п. 2.1.5), вважатимемо, що ця функція являє собою періодичну послідовність коротких ударів:

$$f(t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n). \quad (3.2.9)$$

Підставляючи (3.2.8)-(3.2.9) до (3.2.5 а), отримаємо остаточну форму рівнянь руху досліджуваної системи:

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y + \varepsilon \cos 2\pi x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha y). \quad (3.2.5 б)$$

Рівняння (3.2.5 б) описують автогенератор, на який діє періодична послідовність коротких ударів, причому величина і знак сили залежить від фази коливань.

3.2.2.2. Побудова стандартного дисипативного відображення

Можна вважати, що структура фазового простору для системи (3.2.5 б) аналогічна до задачі про рух нелінійного консервативного осцилятора під дією послідовності коротких ударів, яка приводить до стандартного відображення (див. п. 2.1.5.2).

Аналогічно до названої задачі можна вважати, що рух системи можна розділити на миттєву зміну дії під впливом миттєвих ударів та вільні коливання, що описуються системою (3.2.4).

Зміна величин x та y в результаті удару знаходиться в результаті інтегрування рівнянь (3.2.5 б) на проміжку від моменту $\tau_0 - 0$ перед ударом до моменту $\tau_0 + 0$ після удару:

$$y(\tau_0 + 0) = y(\tau_0 - 0) + \varepsilon \cos[2\pi x(\tau_0 - 0)], \quad x(\tau_0 + 1 - 0) = x(\tau_0 + 0). \quad (3.2.10)$$

На проміжку від моменту $\tau_0 + 0$ після удару до моменту $\tau_0 + 1 - 0$ перед наступним ударом зміна величин x та y визначається співвідношеннями, які можна отримати в результаті інтегрування рівнянь (3.2.5 б):

$$y(\tau_0 + 1 - 0) = y(\tau_0 + 0) \exp(-\Gamma), \quad (3.2.11)$$

$$x(\tau_0 + 1 - 0) = x(\tau_0 + 0) + \frac{T}{2\pi} \int_{\tau_0 + 0}^{\tau_0 + 1 - 0} \omega[y(\tau)] d\tau = x(\tau_0 + 0) + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)] y(\tau_0 + 0).$$

Об'єднуючи співвідношення (3.2.10) та (3.2.11), можна записати:

$$\bar{y} = y + \varepsilon \cos 2\pi x \exp(-\Gamma),$$

$$\bar{x} = x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)] y + \varepsilon \cos 2\pi x = x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha \mu y) + \frac{K_0 \mu}{2\pi} \cos 2\pi x. \quad (3.2.12)$$

де використано позначення

$$\mu = \frac{1}{\Gamma} [1 - \exp(-\Gamma)], \quad K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T \quad (3.2.13)$$

Враховавши, що кут θ змінюється на проміжку $[0, 2\pi]$, а величина x – відповідно на проміжку $[0, 1]$, перепишемо відображення у формі

$$\bar{y} = y + \varepsilon \cos 2\pi x \exp(-\Gamma),$$

$$\bar{x} = \left\{ x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha \mu y) + \frac{K_0 \mu}{2\pi} \cos 2\pi x \right\}, \quad (3.2.12 а)$$

де фігурні дужки, як і раніше, позначають дробову частину числа.

Перейшовши в систему відліку, що обертається, (це дозволяє виключити постійний поворот на кут $\omega_0 T$) і скориставшись позначенням

$$z = y \frac{\alpha \mu \omega_0 T}{2\pi} \exp(-\Gamma), \quad (3.2.14)$$

запишемо остаточно:

$$\bar{z} = z \exp -\Gamma + \frac{\mu K_0}{2\pi} \cos 2\pi x, \quad \bar{x} = x + \bar{z}. \quad (3.2.12 \text{ б})$$

Будемо називати відображення (3.2.12 б) стандартним дисипативним відображенням. Нагадаємо, що змінна z відповідає нормованому відхиленню дії від значення, що відповідає усталеним коливанням, а змінна x – відхиленню фази коливань від значення $\omega_0 t$.

Якщо $\Gamma \rightarrow 0$, то $\mu=1$, і відображення (3.2.12 б) переходить (із точністю до позначень та перенормувань) у стандартне відображення (3.1.115 в), властивості якого були детально розібрані у пп. 3.1.5.4-3.1.5.5.

3.2.2.3. Нерухомі точки, мультиплікатори та умова виникнення стохастичності

Нерухомі точки стандартного дисипативного відображення знаходяться із співвідношень

$$z^* = z^* \exp -\Gamma + \frac{\mu K_0}{2\pi} \sin 2\pi x^*, \quad x^* = x^* + z^*. \quad (3.2.12 \text{ в})$$

З другого рівняння (3.2.12 в) випливає, що z^* – довільне ціле число. Відповідні йому значення x^* легко визначаються з першого рівняння (3.2.12 в). В результаті отримуємо:

$$z^* = n, \quad x_1^* = \frac{1}{2\pi} \arcsin \left(2\pi \frac{\Gamma}{K_0} n \right) + m, \\ x_2^* = -\frac{1}{2\pi} \arcsin \left(2\pi \frac{\Gamma}{K_0} n \right) + m + \frac{1}{2}. \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.15)$$

(кожному значенню z^* відповідають два значення x^*). Зокрема, при $n=m=0$ маємо: $z^*=0$, $x_1^*=0$, $x_2^*=1/2$.

Матриця b_{ij} (див. формулу (2.1.88)) має вигляд:

$$b_{ij} = \frac{\partial \bar{x}, \bar{z}}{\partial x, z} = \begin{bmatrix} 1 - \mu K_0 \sin 2\pi x & -\mu K_0 \sin 2\pi x \\ \exp -\Gamma & \exp -\Gamma \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Тоді якобіан відображення (3.2.12 б) визначається співвідношенням

$$J = \det b_{ij} = \exp -\Gamma < 1, \quad (3.2.17)$$

тобто об'єм фазової краплі в процесі еволюції системи буде експоненціально зменшуватися з часом, що характерно для дисипативних систем.

Мультиплікатори $\alpha_{1,2}$ знаходимо з рівняння

$$\det b_{ij} - \alpha \delta_{ij} = 0, \quad (3.1.89)$$

яке в нашому випадку набуває вигляду

$$\alpha^2 - \alpha \left[1 - \mu K_0 \sin 2\pi x + \exp -\Gamma \right] + \exp -\Gamma = 0. \quad (3.2.18)$$

Якщо виконано умову $|\mu K_0 \sin 2\pi x| \gg 1 > \exp(-\Gamma)$, то за теоремою Вієта корені рівняння (3.2.18) можна оцінити як

$$\alpha_1 \approx \mu K_0 \sin 2\pi x, \quad \alpha_2 \approx \frac{\exp -\Gamma}{\mu K_0 \sin 2\pi x}. \quad (3.2.18 \text{ а})$$

Як впливає з рівнянь (3.2.12 б),

$$\left| \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} - 1 \right| = \mu K_0 |\sin 2\pi x|. \quad (3.2.19)$$

Тоді умову локальної нестійкості для x можна записати у формі

$$\mu K_0 = \frac{K_0}{\Gamma} \left[1 - \exp -\Gamma \right] \gg 1 \quad (3.2.20)$$

(пор. з умовою $K_0 \gg 1$ для стандартного відображення, див. п. 3.1.5.4). Якщо $\Gamma \geq 1$, умову локальної нестійкості (3.2.20) можна переписати у формі

$$K_0 \gg \Gamma. \quad (3.2.20 \text{ a})$$

3.2.2.4. Структура дивного атрактора

Спробуємо аналітично дослідити структуру дивного атрактора, який відповідає системі, описуваній рівняннями (3.2.5 б). Розглядатимемо відображення (3.2.12 а).

Припустимо, що $\Gamma \geq 1$, так що $\exp(-\Gamma) \ll 1$. Тоді можна вважати, що ліва частина першого з рівнянь (3.2.12 а) є малою. Це, в свою чергу, означає, що в дужках у правій частині цього рівняння перший доданок можна вважати значно меншим від другого. Знехтувавши цим малим доданком, запишемо:

$$y = \varepsilon \exp -\Gamma \cos 2\pi x. \quad (3.2.21)$$

(тут і нижче риси над x та y опускаємо).

За допомогою цього рівняння можна подати $\cos 2\pi x$ через y і підставити цей вираз до другого з рівнянь (3.2.12). Тоді воно набуде вигляду

$$x = \left\{ x + \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{\alpha \omega_0 T}{2\pi \Gamma} y \exp \Gamma \right\}.$$

(ми послідовно відкинули $\exp(-\Gamma)$ поруч із одиницею). Нарешті, припустимо, що $\omega_0 T \geq 2\pi$, і знехтуємо x поруч із цією величиною, оскільки $0 < x < 1$. Отримаємо:

$$x = \left\{ \frac{\omega_0 T}{2\pi} \left[1 + y \frac{\alpha}{\Gamma} \exp \Gamma \right] \right\}. \quad (3.2.22)$$

Рівняння (3.2.22) визначає сім'ю відрізків на площині xy , які мають нахил

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\pi \Gamma}{\alpha \omega_0 T} \exp -\Gamma. \quad (3.2.23)$$

Крайні значення y оцінимо зі співвідношення (3.2.21), взявши замість x нерухомі точки $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1/2$ (див. п. 3.2.2.3). Отримаємо відповідно:

$$y_1 = \varepsilon \exp -\Gamma, \quad y_2 = -\varepsilon \exp -\Gamma. \quad (3.2.24)$$

Значить, y змінюється в діапазоні значень $\Delta y = 2\varepsilon \exp(-\Gamma)$. Тоді, якби x змінювалося в довільних межах, відповідна зміна x склала б величину

$$\Delta x = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Delta y = \frac{\varepsilon \alpha \omega_0 T}{\pi \Gamma}. \quad (3.2.25)$$

Насправді x , як уже говорилося, змінюється на відрізку $[0, 1]$. Тому графік залежності (3.2.22) буде складатися з окремих відрізків, кількість яких можна оцінити як цілу частину величини Δx (3.2.25).

Крайні точки залежності (3.2.22) за координатою x можна знайти з першого із співвідношень (3.2.12 а):

$$\begin{aligned} x_1 = \bar{x} \quad x_1^*, y = 0 &= \frac{\omega_0 T}{2\pi} + \frac{K_0}{2\pi \Gamma}, \\ x_2 = \bar{x} \quad x_2^*, y = 0 &= \frac{1}{2} + \frac{\omega_0 T}{2\pi} - \frac{K_0}{2\pi \Gamma}. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Схематичне зображення графіка залежності (3.2.22) подане на рис. 3.2.3 а.

Насправді врахування доданків, відкинутих при отриманні формули (3.2.22), показує, що кожен відрізок на рис. 3.2.3 а розщеплюється на сім'ю подібних відрізків. У результаті графік дивного атрактора утворює множину канторівського типу, по якій і відбуваються стохастичні блукання зображувальної точки. Графік, отриманий в результаті числового розрахунку за формулами (3.2.12 а), поданий на рис. 3.2.3 б.

Збільшення дисипації призводить до зменшення кількості відрізків на рис. 3.2.3 а. Врешті решт при дуже великих значеннях Γ дивний аттрактор "вмирає" – від нього залишаються тільки крайні точки. Це означає, що фазова траєкторія, по суті, збігається з граничним циклом, і на площині xy залишаються тільки точки перетину з цим циклом.

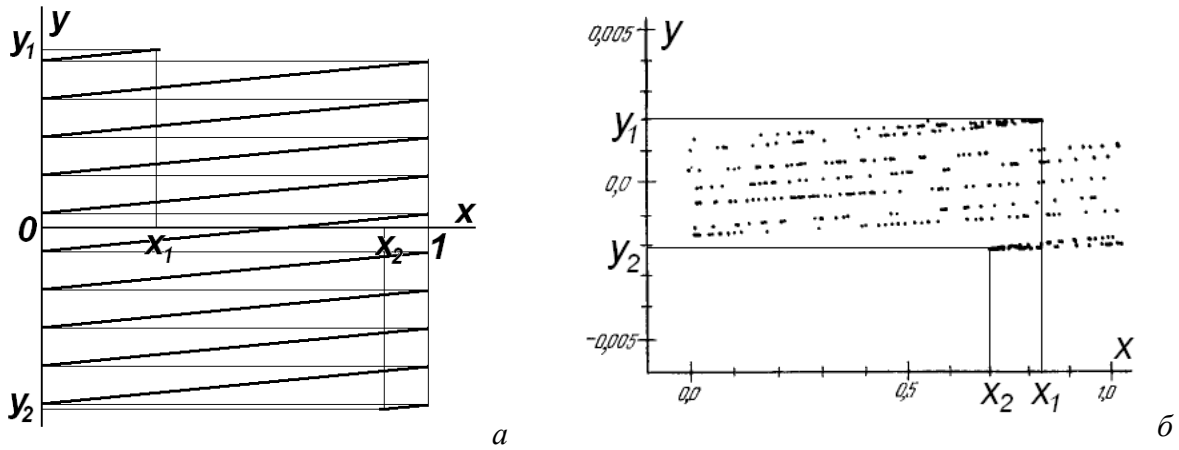


Рис. 3.2.3. Дивний атрактор для стандартного дисипативного відображення:
 а – схематичне зображення на основі формули (3.2.22);
 б – результат числового розрахунку ($\Gamma=5$, $\alpha=0.3$, $\varepsilon=0.3$, $K_0=9.03$).

Формулою (3.2.22), взагалі кажучи, не можна користуватися при малих значеннях Γ . Тим не менше з неї випливає, що при малих Γ дивний атрактор все більш щільно заповнює область фазового простору, де відбувається еволюція системи. Це відповідає граничному переходу при $\Gamma \rightarrow 0$ до режиму перемішування, коли кожна фазова траєкторія (крім тих, що відповідають острівцям регулярного руху) щільно заповнює всю область фазового простору, де відбувається рух системи.

3.2.2.5. Оцінка фрактальної розмірності дивного атрактора

Нагадаємо спочатку визначення фрактальної (хаусдорфової) розмірності об'єкта в k -вимірному фазовому просторі.

Будемо покривати об'єкт k -вимірними кубами з ребром ε . Нехай для цього потрібно $N(\varepsilon)$ кубів. Тоді фрактальна розмірність d_F визначається співвідношенням

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N \varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (3.2.27)$$

Розглянемо тепер деяку двовимірну область, яка еволюціонує під дією відображення Пуанкаре. Нехай це відображення характеризується сталими (незалежними від номеру кроку) мультиплікаторами $\alpha_{1,2}$, причому $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| > 1$.

Нехай на n -му кроці відображення розмір ε_n , який входить до формули (3.2.27), визначається співвідношенням $\varepsilon_n = C|\alpha_1|^n$, де C – деяка константа. Тоді $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При великих значеннях n досліджувана область являтиме собою вузьку смугу, довжина якої буде пропорційна до $|\alpha_2|^n$. Отже, число $N_n \equiv N(\varepsilon_n)$ можна оцінити як

$$N_n = C_1 \frac{|\alpha_2|^n}{\varepsilon_n} = C_2 \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right|^n, \quad (3.2.28)$$

де C_1 та C_2 – деякі константи. Підставляючи (3.2.28) до (3.2.27), легко отримати, що

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_2 + n \ln \alpha_2 - n \ln \alpha_1}{\ln C - n \ln \alpha_1} = 1 + \frac{\ln \alpha_2}{\ln 1/\alpha_1}. \quad (3.2.29)$$

Якщо відображення відповідає гамільтонівській системі, то для неї $|\alpha_1 \alpha_2| = 1$, і, відповідно до формули (3.2.29), $d_F = 2$. Це результат того, що у випадку перемішування стохастична траєкторія рівномірно заповнює область фазового простору, що відповідає фінитному рухові системи.

Для дисипативної системи об'єм фазової краплі з часом повинен стискатися, так що (принаймні для великих n , коли точки досліджуваної області наближаються до дивного атрактора) $|\alpha_1 \alpha_2| < 1$, і, відповідно, $1 < d_F < 2$.

Повернемося тепер до стандартного дисипативного відображення ((3.2.12 б). Для нього мультиплікатори визначаються формулами (3.2.18 а). Вони залежать від x , a , отже, й від номера кроку. Тоді в формулі для фрактальної розмірності (3.2.9) мультиплікатори $\alpha_{1,2}$ треба замінити їхніми середніми геометричними (по всіх кроках відображення) значеннями:

$$\alpha_{1,2} \rightarrow A_{1,2} \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \alpha_{1,2}^1 \alpha_{1,2}^2 \alpha_{1,2}^3 \dots \alpha_{1,2}^m \right|^{1/m}, \quad (3.2.30)$$

де верхній індекс у круглих дужках вказує на номер кроку.

Величина в правій частині (3.2.30) має не випадкову границю. Щоб знайти цю границю, подамо праву частину (3.2.30) у формі

$$A_{1,2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln |\alpha_{1,2}^i| \right\}. \quad (3.2.30 \text{ а})$$

Усереднення в правій частині (3.2.30 а) дає:

$$A_{1,2} = \exp \left\langle \ln |\alpha_{1,2}| \right\rangle, \quad (3.2.30 \text{ б})$$

де використане позначення

$$\langle f \alpha \rangle = \int dx dy f[\alpha(x, y)] w(x, y), \quad (3.2.31)$$

$w(x, y)$ – стаціонарна функція розподілу на стохастичному аттракторі.

Підставимо (3.2.30 б) до (3.2.29) з урахуванням заміни (3.2.30). Отримаємо:

$$d_F = 1 + \frac{\langle \ln A_2 \rangle}{\Gamma + \langle \ln A_2 \rangle} = 1 + \frac{h}{\Gamma + h}, \quad (3.2.32)$$

де $h = \langle \ln A_2 \rangle$ – КС-ентропія (див. п. 3.1.3.5).

При малих h фрактальна розмірність дивного атрактора близька до двійки. Для випадку $|\mu K_0| \gg \Gamma \geq 1$ можна вважати, що $h \approx \ln(\mu K_0)$, і

$$d_F \approx 1 + \frac{h}{\Gamma + h} \approx 2 - \frac{\Gamma}{h} \approx 2 - \frac{\Gamma}{\ln \mu K_0}. \quad (3.2.32 \text{ а})$$

Як випливає з (3.2.32 а), фрактальна розмірність менша від двійки на величину, що дорівнює відношенню коефіцієнта дисипації (коефіцієнта стиснення фазового об'єму) до коефіцієнту розбіжності траєкторій (інкременту локальної нестійкості).

Контрольні питання до пункту 3.2.2

1. Опишіть, як виглядає фазовий портрет системи, описуваної рівняннями (3.2.5 б).
2. Як змінюватиметься фрактальна розмірність дивного атрактора, що відповідає стандартному дисипативному відображенню, при зміні параметра Γ від нуля до нескінченності?

Задачі до пункту 3.2.2

3.2.2.1. Покажіть, що система рівнянь

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Gamma y - \varepsilon f \tau \cos 2\pi x, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega y T}{2\pi}$$

з урахуванням співвідношення

$$\omega y = \omega_0 (1 + \alpha y)$$

справді зводиться до рівняння, коефіцієнт якого залежить від часу (рівняння параметричного осцилятора).

3.2.2.2. За допомогою комп'ютера побудуйте фазовий портрет, що відповідає стандартному дисипативному відображенню

$$\bar{z} = z \exp \left[-\Gamma + \frac{\mu K_0}{2\pi} \cos 2\pi x \right], \quad \bar{x} = x + \bar{z}.$$

3.2.3. Генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича

Одним з порівняно простих прикладів реальних дисипативних систем, що здатні демонструвати хаотичну динаміку, є так званий генератор шуму Кияшка – Піковського – Рабиновича (генератор КПР), який було вперше описано в роботі: С.В.Кияшко, А.С.Піковський, М.И.Рабинович // Радиотехника и электроника, 25, 336 (1980). У цьому пункті ми отримаємо рівняння, що описують роботу даної схеми, опишемо характерні режими її роботи та вигляд дивного атрактора.

3.2.3.1 Схема та рівняння руху

Схема генератора КПР (рис. 3.2.4 а.) нагадує схему звичайного генератора Ван-дер-Поля з контуром у колі сітки, але в цей контур додатково увімкнений тунельний діод з N-подібною вольт-амперною характеристикою $I_D(V)$ (рис. 3.2.4 б). Остання має дві зростаючі ділянки – А та В, розділені спадною ділянкою (стани, що їй відповідають, є нестійкими і не реалізуються). Омичний опір діода на ділянці А (в області від'ємних та малих додатних напруг), а також при великих додатних напругах на ділянці В можна вважати невеликим, на початку ж ділянки В він є значно більшим.

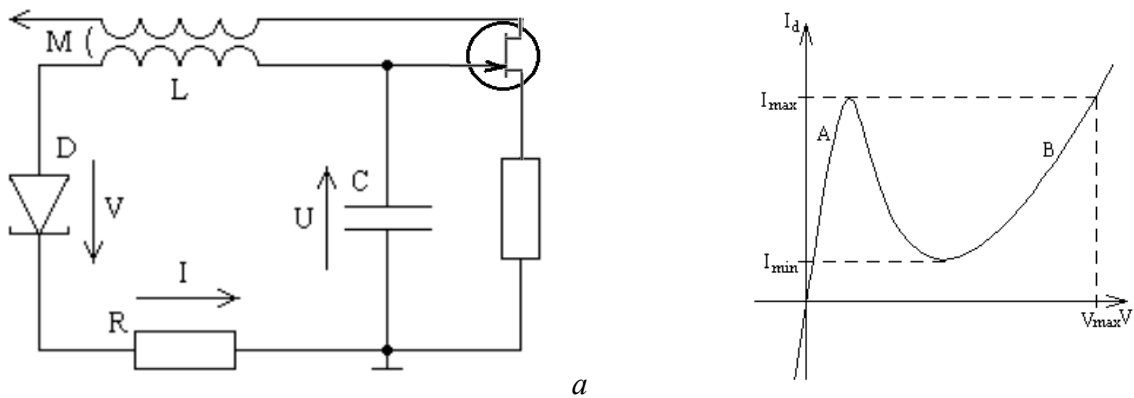


Рис. 3.2.4: а – схема генератора КПР; б – вольт-амперна характеристика тунельного діода.

Крім тунельного діода, в схемі є ще один нелінійний елемент – лампа¹¹ з анодно-сітковою характеристикою, яку зручно апроксимуватимемо кубічним поліномом:

$$I_A = SU - \frac{SU^3}{3K^2}. \quad (3.2.25)$$

Складемо систему диференціальних рівнянь, що описує роботу генератора. Позначивши через I струм у коливному контурі, а через U та V – падіння напруги відповідно на конденсаторі та на тунельному діоді (рис. 3.2.4 а), можна записати другий закон Кірхгофа для контуру (з урахуванням взаємної індукції M та апроксимації (1.11.1)) у формі

$$L \frac{dI}{dt} + RI - M \frac{d}{dt} \left(SU - \frac{SU^3}{3K^2} \right) + U + V = 0. \quad (3.2.26)$$

Диференціюючи рівняння, що пов'язує між собою заряд конденсатора та напругу на ньому, дістанемо:

$$C \frac{dU}{dt} = I. \quad (3.2.27)$$

Врахуємо, що р-п перехід тунельного діода має деяку ємність C_1 , яку ми вважатимемо малою ($\epsilon \equiv C_1/C \ll 1$). Тому повний струм через цей діод складатиметься із струму провідності $I_D(V)$ та струму зміщення $C_1 dV/dt$:

$$I = I_D + C_1 \frac{dV}{dt}. \quad (3.2.28)$$

¹¹ Замість лампи може бути використаний польовий транзистор.

Виключимо з (3.2.26) похідну dU/dt за допомогою (3.2.27) і перейдемо до безрозмірних змінних:

$$\tau = \omega t, \quad u = \frac{U}{U_\infty}, \quad v = \frac{V}{U_\infty}, \quad i = \frac{\rho I}{U_\infty}, \quad (3.2.29)$$

де $\omega^2 = 1/LC$, $\rho^2 = L/C$, $U_\infty^2 = K^2/\omega MS$. Тоді рівняння (3.2.26)–(3.2.28) можна переписати у вигляді системи

$$\frac{di}{d\tau} = \gamma - u^2 i - v - u, \quad \frac{du}{d\tau} = i, \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = i - i_d v, \quad (3.2.30)$$

де використане позначення $\gamma = K^2/U_\infty^2 - R/\rho$.

Система (3.2.30) містить три диференціальних рівняння першого порядку з незалежними від часу правими частинами і, отже, описує систему з півтора ступенями вільності.

Вольт-амперну характеристику тунельного діода зручно замінити її кусково-лінійною апроксимацією:

$$i_d v = \begin{cases} v/r_A, & v < v_1; \\ 2v_1 - v / r_A, & v_1 \leq v < 2v_1 r_B / r_A + r_B; \\ v/r_B, & v \geq 2v_1 r_B / r_A + r_B \end{cases} \quad (3.2.31)$$

(рис. 3.2.5). Тут використано позначення: $v_1 = V_1/U_\infty$; $r_A = R_A/\rho$; $r_B = R_B/\rho$; величина V_1 показана на рис. 3.2.5 а, а R_A та R_B – це опори тунельного діода відповідно на ділянках А та В.

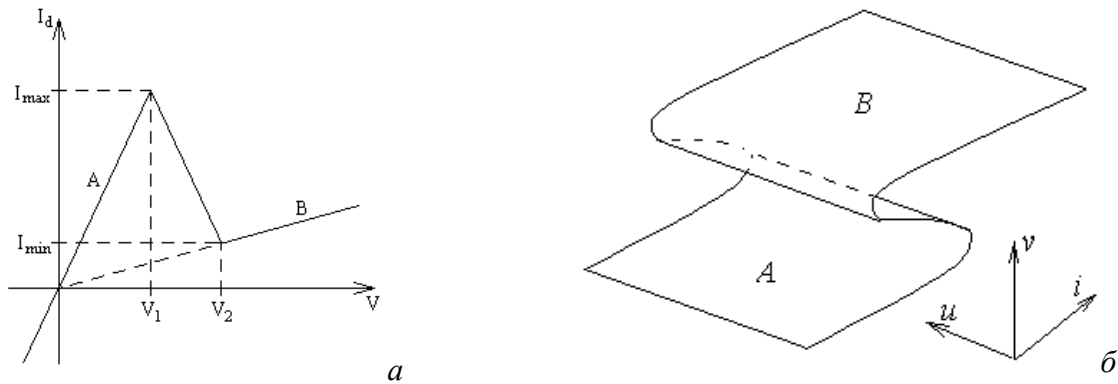


Рис. 3.2.5: а – апроксимація вольт-амперної характеристики тунельного діода; б – поверхня повільного руху

Систему рівнянь (3.2.30) з урахуванням апроксимації (3.2.31) можна розв'язувати як аналітично, так і числовими методами. В результаті числового розв'язку були побудовані часові епюри напруг u , v та струму i , а також фазовий портрет системи. Крім цього, будувалося точкове відображення, тобто залежність $u_{n+1} = F(u_n)$ (за гіперплощину, що перетинається фазовими траєкторіями, обиралася додатна піввісь u).

Обговоримо спочатку способи аналітичного розв'язку рівнянь (3.2.30)–(3.2.31).

3.2.3.2. Ділянки швидкого та повільного руху

Система (3.2.30) містить малий параметр ε при похідній в одному з рівнянь, тому її розв'язок можна будувати шляхом виділення ділянок швидкого та повільного руху. Як впливає з останнього рівняння (3.2.30), траєкторії повільного руху лежать на поверхні $i = i_d(v)$ (рис. 3.2.5 б). Поверхню повільного руху, що відповідає першій зростаючій ділянці залежності $i_d(v)$ (перший рядок у (3.2.31)), будемо називати поверхнею А, а ту, що відповідає другій зростаючій ділянці (третій рядок у (3.2.31)) – поверхнею В. Поверхня повільного руху, що відповідає спадній ділянці вольт-амперної характеристики діода, є нестійкою. Траєкторії швидкого руху – це прями, паралельні до осі v . Справді, поділивши, наприклад, третє рівнян-

ня системи (3.2.30) на друге, приходимо до висновку, що нахил траєкторії швидкого руху dv/du обернено пропорційний до малого параметра ϵ .

Розглянемо повільний рух окремо на поверхнях А та В. Завдяки обраній апроксимації вольт-амперної характеристики діода та малізні параметра ϵ третє рівняння в системі (3.2.30) можна замінити на $i=v/r_A$ або $i=v/r_B$ відповідно для кожної з поверхонь. Тоді система (3.2.30) зводиться до двох рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} - \gamma - r_A - u^2 \frac{du}{dt} + u &= 0, \\ \frac{d^2u}{dt^2} - \gamma - r_B - u^2 \frac{du}{dt} + u &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Кожне з рівнянь (3.2.32) являє собою рівняння Ван-дер-Поля. Перше з рівнянь (3.2.32) описує роботу схеми при $V < V_1$, друге – при $V > V_2$.

3.2.3.3. Характерні режими роботи

Діаграма характерних режимів роботи генератора КПР в залежності від керуючих параметрів γ та v_1 , побудована на основі числового розв'язку системи (3.2.30) з урахуванням апроксимації (3.2.31), подана на рис. 3.2.6. Якісно такі самі результати можна отримати й при апроксимації вказаної характеристики кубічною параболою.

Цікаво відзначити, що деякі з областей за своєю структурою нагадують фрактали.

Розберемо режими, показані на рис. 3.2.6, більш детально.

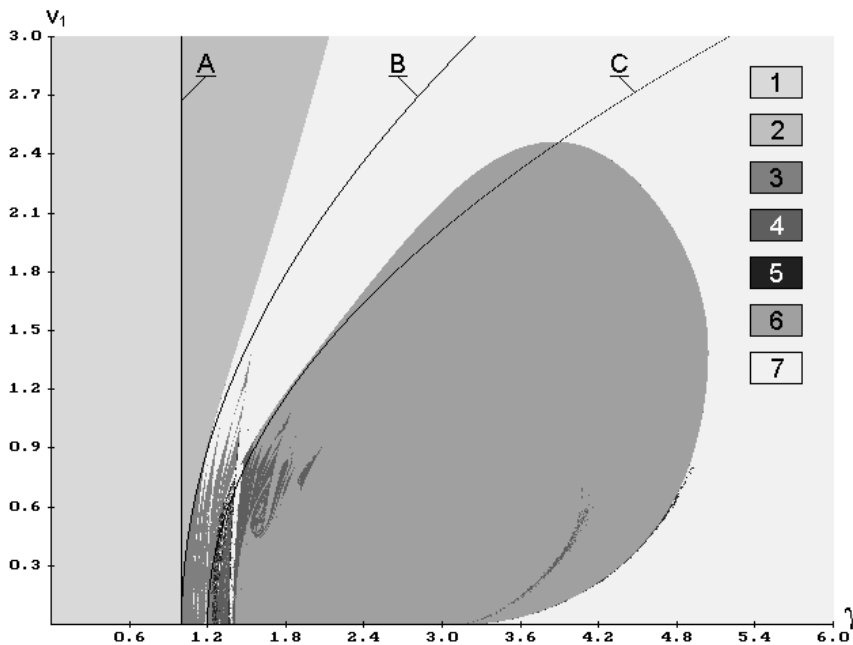


Рис. 3.2.6. Діаграма режимів роботи генератора КПР: 1 – згасаючі коливання; 2 – квазігармонічні коливання; 3, 4, 5 – хаотичні режими; 6, 7 – релаксаційні режими.

3.2.3.4. Робота схеми при малих коефіцієнтах зворотного зв'язку

З першого рівняння (3.2.32) видно, що при $\gamma < r_A$ амплітудна умова генерації не виконується, і розв'язком системи є майже лінійні (при невеликих відхиленнях від положення рівноваги) згасаючі коливання. Їм відповідає область 1 на рис. 3.2.6.

При переході γ через критичне значення r_A (йому відповідає пряма А на рис. 3.2.6), коли ефективний інкремент коливань з урахуванням омичного опору тунельного діода на ділянці А характеристики діода (рис.3.2.5 а) проходить через нуль, відбувається біфуркація Андронова – Хопфа, тобто самозбудження автогенератора, і в ньому встановлюються незгасаючі квазігармонічні коливання. Їм відповідає область 2 на рис. 3.2.6. Для випадку $0 < (\gamma - r_A) \ll 1$ перше рівняння (3.2.32) можна розв'язати наближено, застосувавши метод пові-

льних амплітуд. Таким чином отримаємо розв'язок $u=a(\tau)\cos \tau$, в якому амплітуда змінюється з часом за законом

$$a \tau = \frac{a_\infty}{\sqrt{1 + \left[\left(\frac{a_\infty}{a_0} \right)^2 - 1 \right] \exp[-(\gamma - r_A)\tau]}}, \quad a_\infty = 2\sqrt{\gamma - r_A}, \quad (3.2.33)$$

де a_∞ – амплітуда коливань напруги в усталеному режимі.

Зазначимо, що в розглянутих режимах безрозмірна амплітуда струму в колі не повинна перевищувати значення $i_{\max} = v_1/r_A$ (I_{\max} на рис.3.2.5 а), тобто діод виступає як звичайний лінійний резистор.

Фазовий портрет генератора КІР у режимах 1 та 2 подано відповідно на рис. 3.2.7 а та 3.2.7 б.

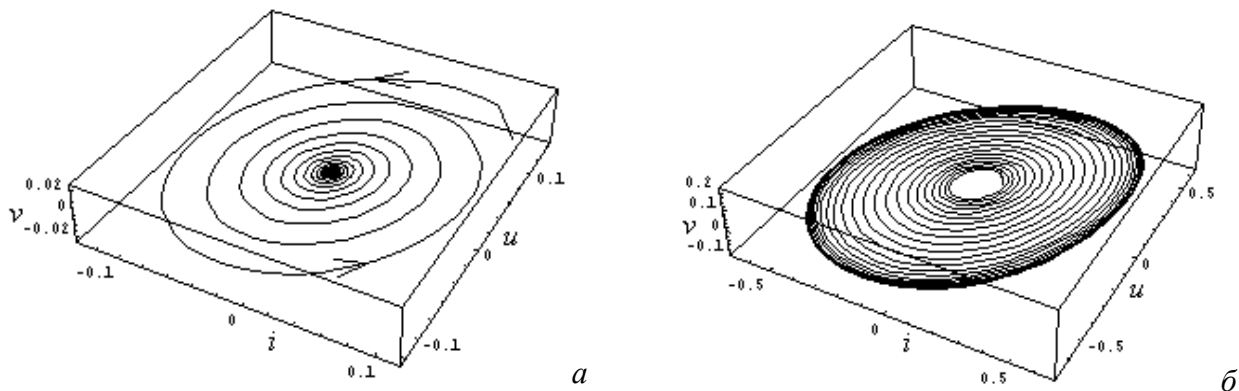


Рис. 3.2.7. Фазовий портрет генератора КІР в режимах згасаючих (а) та квазігармонічних (б) коливань. Фазові траєкторії лежать на ділянці А поверхні повільного руху (рис. 3.2.5 б).

3.2.3.5. Мономодальний режим стохастичних коливань

При подальшому збільшенні γ , коли усталена амплітуда (3.2.33) перевищує значення $i_{\max} = \rho I_{\max}/U_\infty$, тобто при

$$2\sqrt{\gamma - r_A} > \frac{v_1}{r_A} \quad (3.2.34)$$

(умові (3.2.34) відповідає перехід через криву В на рис. 3.2.6), коливання змінюють форму та набувають хаотичного характеру.

Справді, при переході струму через значення i_{\max} відбувається стрибок з однієї зростаючої ділянки вольт-амперної характеристики тунельного діода (низькоомної) на іншу (високоомну). На фазовому портреті спостерігається відповідний стрибок між поверхнями повільного руху А та В. При цьому омичний опір тунельного діода різко зростає (при тому самому значенні струму зростає падіння напруги на діоді), що призводить до аперіодичного згасання коливань у контурі. Після зменшення струму до значення $i_{\min} = 2v_1/(r_A + r_B)$ (розмірне I_{\min} на рис.3.2.5 а) відбувається зворотній стрибок між поверхнями А і В.

Оскільки ймовірність потрапити на попередню фазову траєкторію практично відсутня, зростання коливань починається з новими амплітудою та фазою. Таким чином, саме немонотонність вольт-амперної характеристики тунельного діода та наявність у нього малої ємності разом із нестійкістю, обумовленою позитивним зворотним зв'язком, приводить до стохастизації коливань.

В процесі моделювання було виявлено три якісно різні режими стохастичних коливань. Перший з них - це режим, описаний у [1-3] (режим 3 на рис.3.2.6). При цьому залежності струму та напруг з часом являють собою випадкові послідовності радіоімпульсів з експоненціальною обвідною (рис. 3.2.8 а). Видно, що величини i та u змінюються з часом неперере-

рвно, а величина v зазнає стрибків, що узгоджується з висловленими вище якісними міркуваннями.

Фазовий портрет для цього режиму показано на рис. 3.2.8 б. Фазова траєкторія на рис. 3.2.8 б являє собою дивний атрактор, який має характерну фрактальну структуру. Фрактальна розмірність цього атрактора лежить, очевидно, в межах від одиниці до двійки. Область нестійкості на дивному атракторі припадає на ділянку А поверхні повільного руху.

Стрибки між поверхнями повільного руху призводять до формування максимумів і різких спадів на діаграмі Ламерея для точкового відображення. Для режиму 3 діаграма Ламерея показана на рис. 3.2.8 в. Вона має один різкий максимум. Відображення такого типу називають мономодальним. Такий режим хаотичних коливань можна описати за допомогою мономодального відображення, Тому й відповідний режим стохастичних коливань генератора КПР можна назвати мономодальним.

Саме мономодальний режим було експериментально та теоретично досліджено роботах Кияшка, Піковського та Рабиновича.

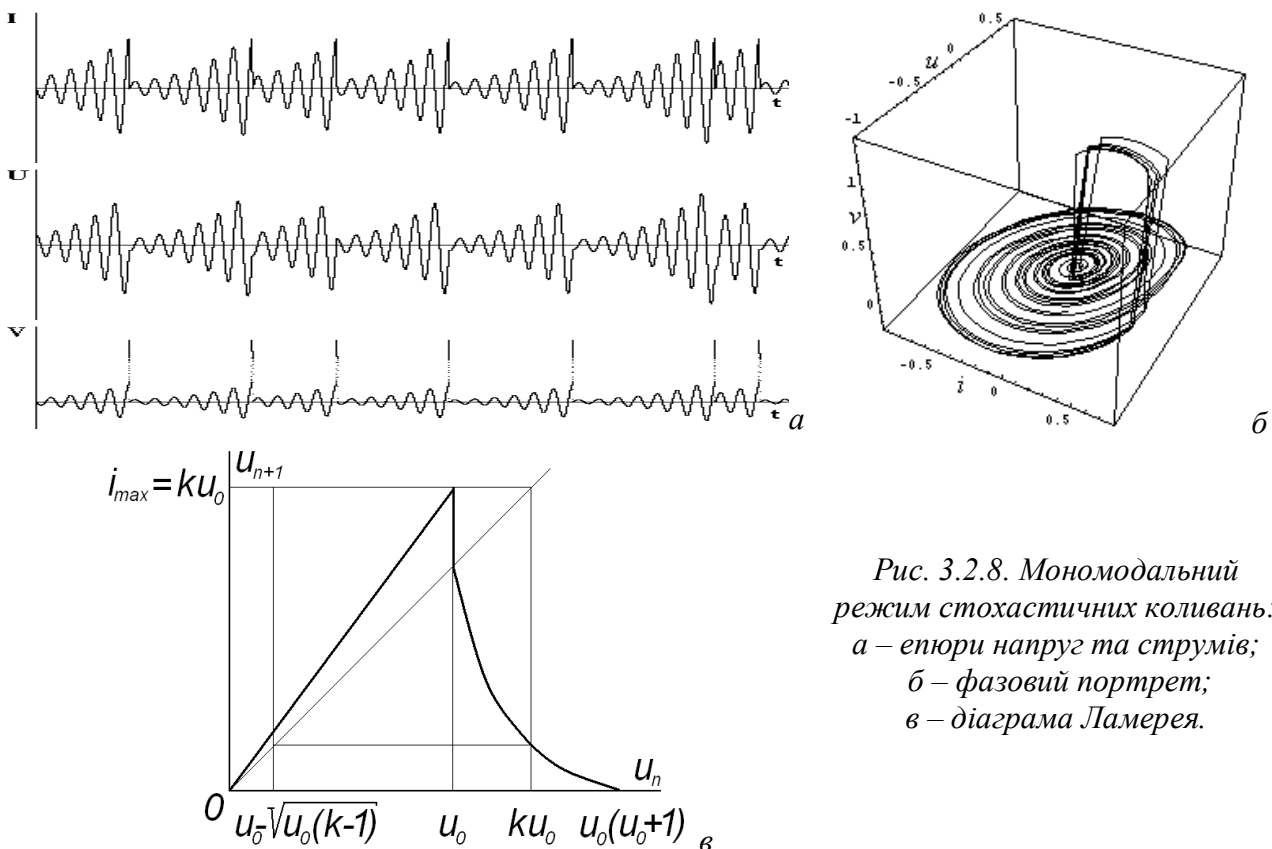


Рис. 3.2.8. Мономодальний режим стохастичних коливань:
а – епюри напруг та струмів;
б – фазовий портрет;
в – діаграма Ламерея.

3.2.3.6. Статистика генератора КПР у мономодальному режимі

Опишемо тепер, як побудувати точкове відображення для мономодального режиму, показане на рис. 3.2.8 в. Для того, щоб побудувати ту частину відображення, яка описує рух на поверхні А(рис. 3.2.5 б), скористаємося першим з рівнянь (3.2.32), в якому знехтуємо нелінійним доданком (це справедливо, якщо на межі ділянки А поверхні повільного руху амплітуда коливань значно менша від того усталеного значення, яке визначається нелінійністю лампи або польового транзистора). В цьому наближенні вказане рівняння описує коливання з безрозмірною частотою $\omega=1$, амплітуда яких зростає з безрозмірним часовим інкрементом $(\gamma-r_A)/2$. Тоді зв'язок між амплітудами напруги u в сусідніх точках перетину додатної півосі u (тобто через період коливань частоти $\omega=1$, див. рис. 3.2.9 а) буде визначатися співвідношенням $u_{n+1}=\varphi_1(u_n)=ku_n$, де $k=\exp[\pi(\gamma-r_A)]>1$. Це співвідношення залишається справедливим при $u_0-(u_0(k-1))^{1/2}<u_n<u_0$, де $u_0=i_{max}/k$.

Інша ділянка відображення відповідає випадку, коли зображувальна точка зістрибує з ділянки А поверхні повільного руху на ділянку В, рухається по ній, а потім стрибком повертається на ділянку А (рис. 3.2.9 б). Як видно з рис. 3.2.9 б, цьому випадку повинна відповідати спадна ділянка відображення. Її можна апроксимувати ділянкою квадратної параболи вигляду $u_{n+1} = \varphi_2(u_n) = u_0 - (u_n - u_0)^{1/2}$. Це відображення справедливе при $u_0 < u_n < ku_0$.

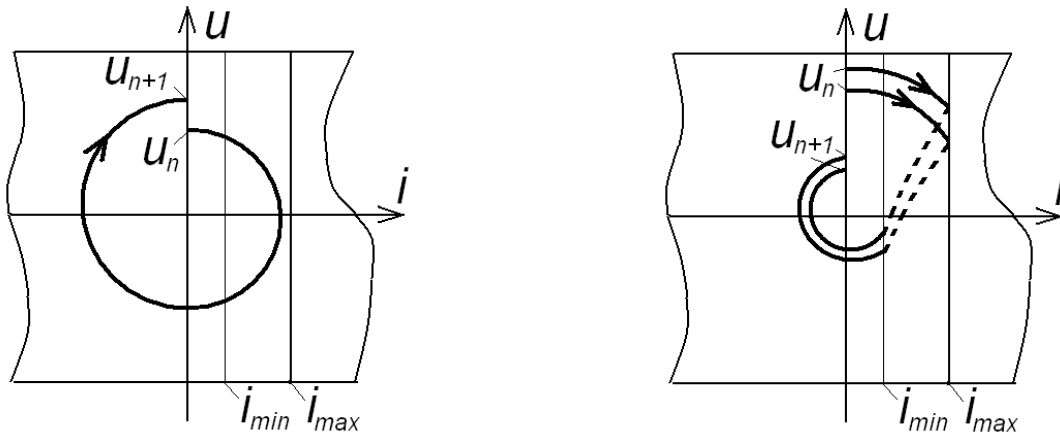


Рис. 3.2.9. До побудови відображення для моноmodalного режиму стохастичних коливань. Показано поверхню повільного руху з боку негативної частини осі v (див. рис. 3.2.5 б) та відрізки фазових траєкторій на ній.

Побудоване таким чином відображення φ носить модельний характер. Однак воно є якісно правильним, що підтверджують числові розрахунки.

Відображення φ_1 є розтягальним, $|d\varphi_1/du_n| = k > 1$. Відображення φ_2 є розтягальним там, де $u_n < u_0 + 1/2$ (якщо $(k-1)u_0 < 1/2$, то відображення φ_2 є розтягальним на всій робочій ділянці). Крім того, сумарне відображення φ є обмеженим (воно перетворює відрізок $[u_0 - (u_0(k-1))^{1/2}, ku_0]$ сам у себе) і немонотонним. Отже, досліджувана система буде демонструвати хаотичну динаміку.

З точки зору відображення Пуанкаре, число максимумів, або, що те саме, число періодів коливань в одному радіоімпульсі (див. рис. 3.2.8 а) – це число ітерацій відображення на відрізок φ_1 .

Розіб'ємо відрізок $[u_0 - (u_0(k-1))^{1/2}, ku_0]$ на ділянки d_i та Δ_i (рис. 2.1.10 а). Будемо цікавитися не координатами точки u_n , а лише номером ділянки, на яку вона потрапляє. Кожній траєкторії при цьому відповідатиме певна послідовність ділянок.

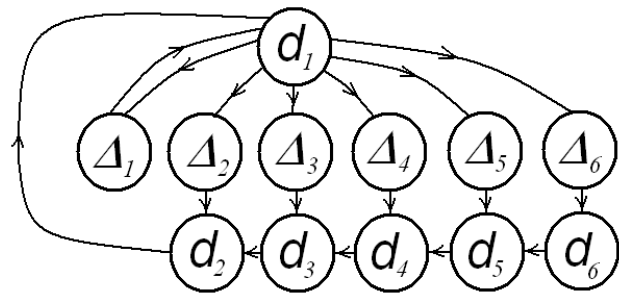
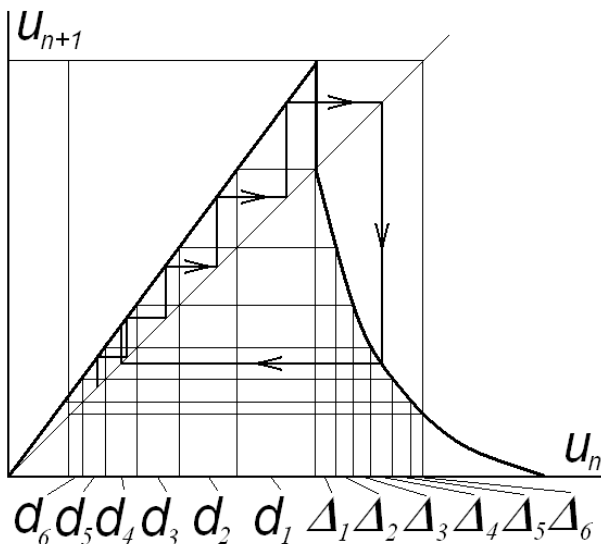


Рис. 3.2.10. До побудови статистики генератора КІР у моноmodalному режимі: а – сходи Ламерея і розбивка осі абсцис на ділянки; б – схема можливих переходів між ділянками.

Для визначення статистики сигналу потрібно знати ймовірності переходу з однієї ділянки в іншу. В даному ймовірність переходів визначається такими правилами:

- якщо з ділянки можливий лише один перехід, то його ймовірність дорівнює одиниці; це стосується переходів, які починаються зі всіх ділянок, крім d_1 ;
- з ділянки d_1 можливі різні переходи; прийнемо, що ймовірності переходів $d_1 \rightarrow \Delta_i$ пропорційна довжинам відрізків Δ_i , які, в свою чергу, пропорційні довжинам відрізків d_i , тобто величині k^{-i} .

Схема переходів між відрізками показана на рис. 3.2.10 б. З неї видно, що ймовірність $P(n)$ того, що радіоімпульс міститиме періодів коливань, пропорційна до ймовірності потрапляння з ділянки d_1 на ділянку Δ_n , тобто величині k^{-n} . Точніше,

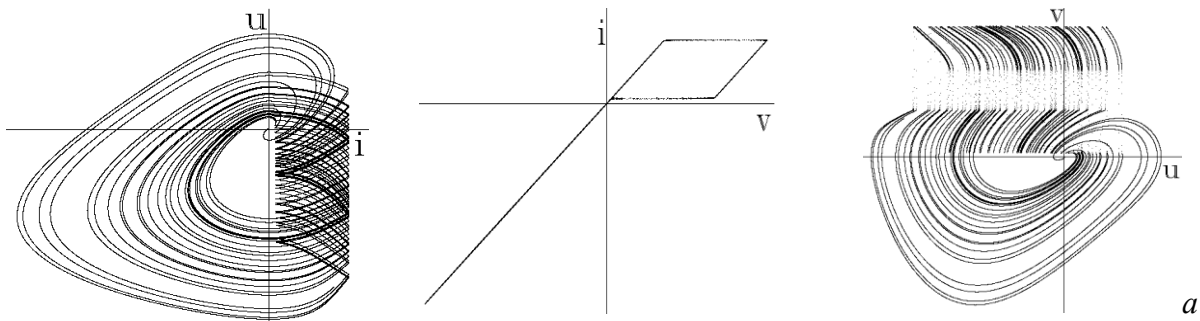
$$P_n = \frac{f_n}{k^n}, \quad (3.2.35)$$

де повільна залежність $f(n)$ визначається обраною апроксимацією ϕ_2 та умовою нормування. Ця формула задовільно описує статистику реального генератора КІР.

3.2.3.7. Мультимодальні режими стохастичних коливань

При подальшому збільшенні γ інкремент коливань стає настільки великим, що зображувальна точка за один оберт у площині iu здійснює не на одну, а декілька пар стрибків між поверхнями А та В. Таким чином, реалізуються інші стохастичні режими, якісно відмінні від мономодального. Ці режими можна назвати мультимодальними, оскільки їм відповідає мультимодальне відображення.

Другий режим стохастичних коливань (режим 4 на рис. 3.2.6) реалізується при більших значеннях γ . В цьому випадку схема генерує пакети однополярних імпульсів струму та напруги на тунельному діоді, причому кількість імпульсів в одному пакеті випадкова (рис.3.2.11). З рисунку видно, що під час одного оберту зображувальної точки навколо осі v може відбутися вже не одна, а кілька пар стрибків між поверхнями повільного руху. Після першої пари стрибків між цими поверхнями відхилення від стану рівноваги $i=0, u=0$ зростає настільки швидко, що на цьому самому оберті встигають відбутися ще кілька пар стрибків. Відзначимо також, що напруга на сітці лампи u змінюється плавно, без стрибків, причому зростаючій ділянці відповідають перескоки між поверхнями, а спадаючій - швидке зростання амплітуди на тій поверхні повільного руху, що проходить через початок координат. Цьому режиму відповідає мультимодальне відображення (рис.3в).



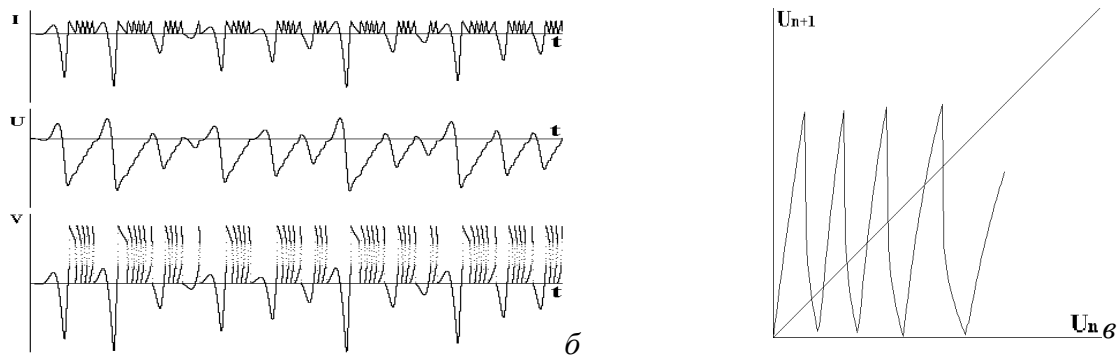


Рис. 3.2.11. Другий режим стохастичних коливань: а— проекції фазового портрету на площини iu , iv та uv ; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея.

Ще один шумовий режим (режим 5 на рис. 3.2.6) являє собою квазігармонічні коливання напруги на сітці лампи, амплітуда яких випадково змінюється від періоду до періоду (рис. 3.2.12). У цьому режимі серед фазових траєкторій на другій поверхні повільного руху (що відповідає високоомній ділянці вольт-амперної характеристики діода) виникає атрактор (рис. 3.2.12 в). В цьому режимі, на відміну від усіх інших, вона виходить за лінію $I=I_{\max}$, і тому під час одного оберту зображувальної точки навколо осі v відбувається одна пара перескоків між площинами повільного руху, і між цими перескоками проходить деякий (досить великий в порівнянні з першим стохастичним режимом) час. Як і в попередніх випадках, максимуми на графіку поворотного відображення обумовлені стрибками між поверхнями повільного руху.

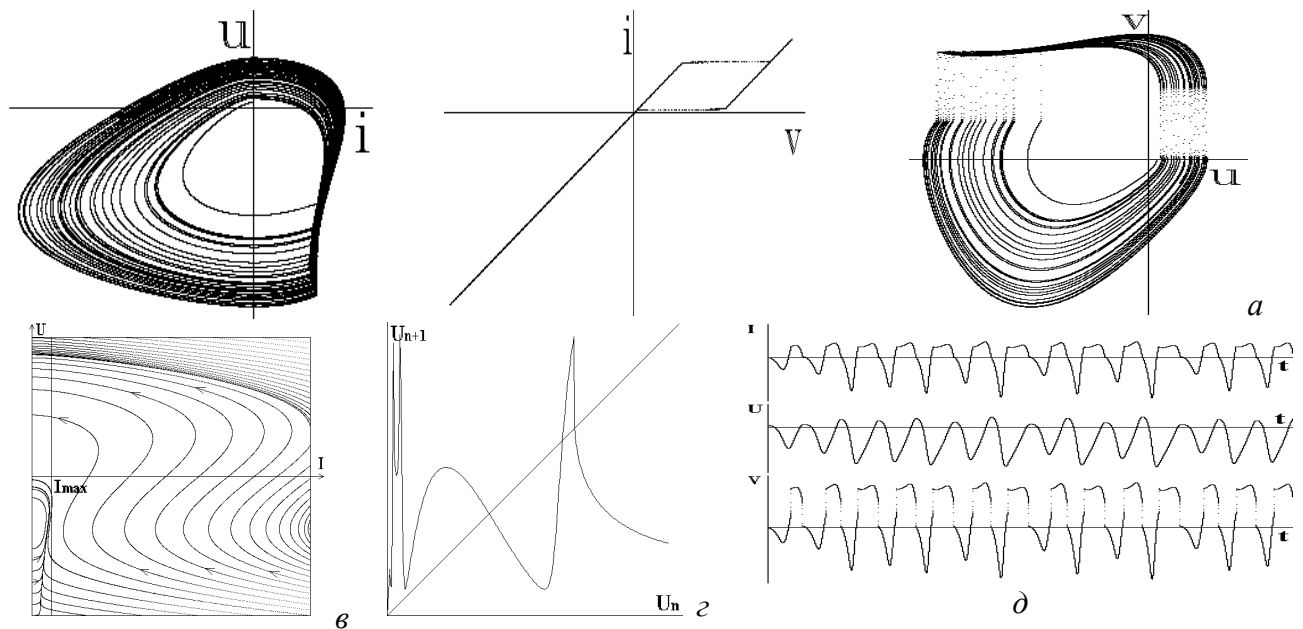


Рис. 3.2.12. Третій режим стохастичних коливань: а – проекції фазового портрету на площини iu , iv та uv ; б – часові епюри струму та напруг; в— фазовий портрет на поверхні повільного руху, що відповідає високоомній ділянці ВАХ діода; г – діаграма Ламерея.

3.2.3.8. Перехід від моноmodalного до мультимодальних режимів

Для дослідження переходу між різними стохастичними режимами розглянемо фазову траєкторію, що проходить по самому краю поверхні А (рис. 3.2.13). В точках 1, 2 та 3 відбуваються стрибки між поверхнями. Частина траєкторії від точки 1 до точки 2 лежить на поверхні А, тому наближено її форму в полярних координатах ($r=(u^2+i^2)^{1/2}$, $\varphi=\arctg(u/i)$) можна описати формулою (3.2.33), в якій слід покласти $a_0=v_1/r_A$ та замінити τ на φ .

У проміжку між точками 2 та 3 фазова траєкторія лежить на поверхні В. З другого рівняння (3.2.32) можна отримати фазовий портрет на цій поверхні. Умова $(r_B - \gamma) \gg 1$ дозволяє виділити на поверхні В траєкторію повільного руху

$$i = -\frac{u}{r_B - \gamma + u^2} \quad (3.2.36)$$

(тепер малим параметром служить величина $(r_B - \gamma)^{-1}$). Тоді ділянка 2-3 (рис. 3.2.13) лежить на траєкторії швидкого руху, яку можна вважати відрізком прямої, нахиленої під кутом $\psi = -\text{arcctg}(r_B - \gamma)$ до осі i .

Якщо точка 3 знаходиться ближче до початку координат, ніж точка 1 (рис. 3.2.13 а), то маємо моноmodalний хаотичний режим. У протилежному випадку (рис. 3.2.13 б) точка 3 знаходиться досить далеко від початку координат, і тому виникає ще один стрибок між поверхнями А і В. Біфуркаційні значення керуючих параметрів можна знайти з умови, що точки 1 та 3 збігаються:

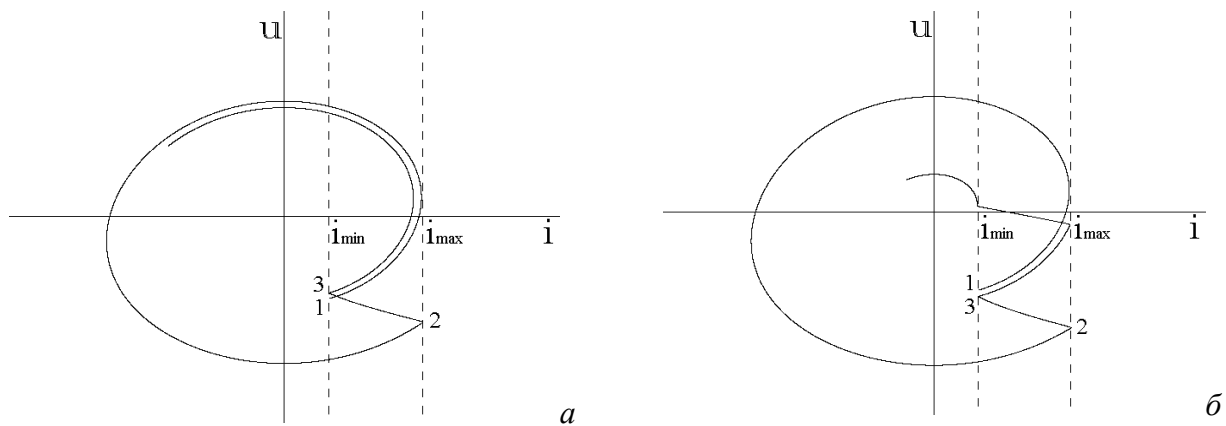


Рис. 3.2.13. Фазові траєкторії, що відповідають моноmodalному (а) та мультиmodalному (б) режимам.

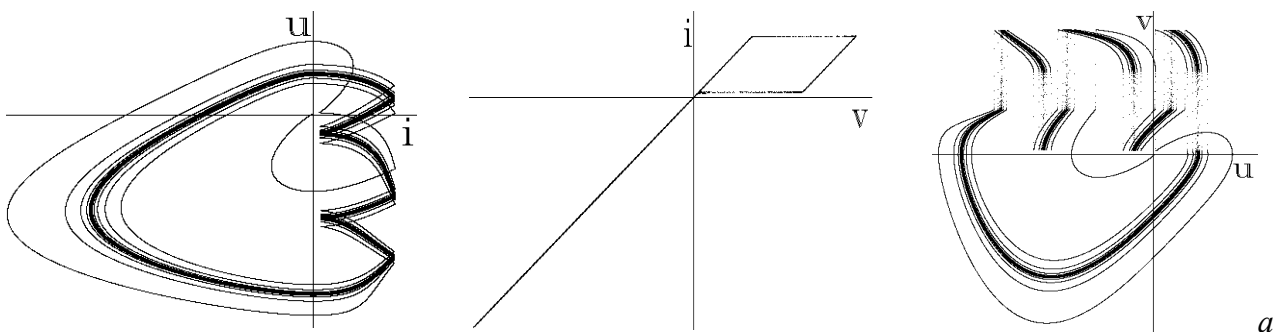
$$a \tau_2 \sin \varphi_2 - i_{\max} - i_{\min} \operatorname{tg} \psi = a \tau_1 \sin \varphi_1, \quad (3.2.37)$$

де τ_1 та φ_1 – момент часу й полярний кут, що відповідають точці 1, а τ_2 та $(2\pi - \varphi_2)$ – ті самі величини в точці 2. Вони пов'язані між собою співвідношеннями $a(\tau_1) \cos \varphi_1 = i_{\max}$; $\varphi_1 = \tau_1$; $a(\tau_2) \cos \varphi_2 = i_{\min}$; $2\pi - \varphi_2 = \tau_2$.

Записані вище вирази утворюють систему рівнянь, яку можна наближено розв'язати аналітично щодо v_1 . Однак аналітичний розв'язок виражається досить громіздкою формулою, яку зручніше апроксимувати виразом

$$\gamma = r_A + \left(\frac{v_1}{1.5r_A} \right)^2 + 0.2. \quad (3.2.38)$$

Формула (3.2.38) правильно описує межу між моноmodalним та мультиmodalним режимами у відповідному інтервалі значень параметрів (крива С на рис. 3.2.6).



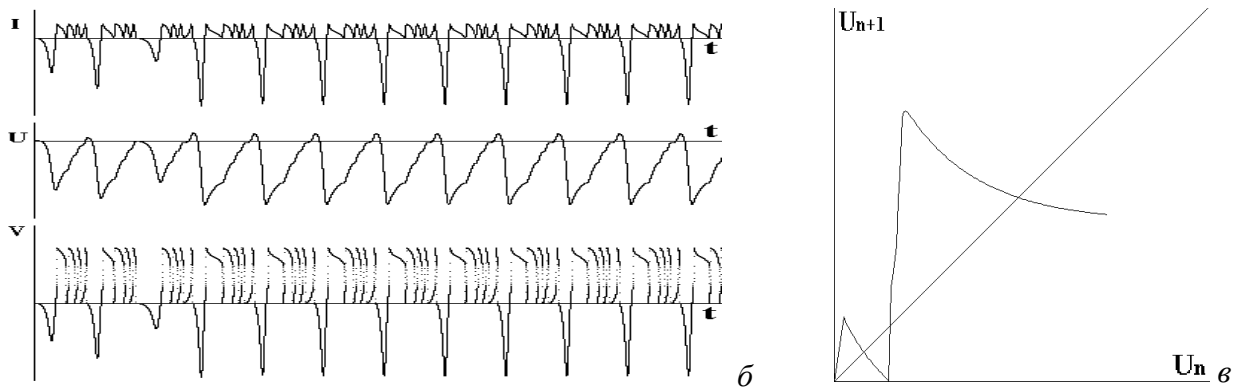


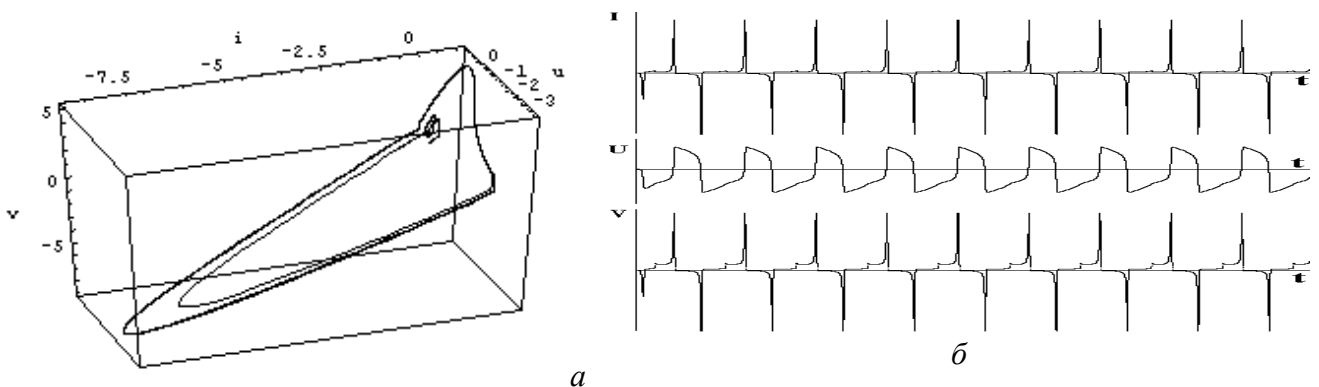
Рис. 3.2.14. Перший режим релаксаційних коливань: а – проєкції фазового портрету на площини iu , iv та uv ; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея.

3.2.3.9. Релаксаційні коливання

З подальшим збільшенням γ коливання знов набувають регулярності. Це демонструє графік поворотного відображення, на якому з'являється стійка стаціонарна точка, оскільки тепер похідна функції $u_{n+1}=F(u_n)$ в точці перетину її графіка з бісектрисою координатного кута по модулю менша одиниці. Інакше можна сказати, що для великих значень γ амплітуда коливань, що встановлюються в колі, виходить на граничний цикл за час, менший від одного періоду коливань.

Перший тип релаксаційних коливань (режим б на рис.3.2.6) нагадує стохастичні коливання в режимі 5 (за період коливань має місце декілька пар стрибків між ділянками А і В поверхні повільного руху), але тепер кількість імпульсів струму в кожному пакеті одна й та сама (рис. 3.2.14).

Для дуже великих значень γ амплітуда коливань, що встановлюються в колі, стає набагато більшою, аніж характерний розмір ділянки немонотонності на вольт-амперній характеристиці тунельного діода, тому в цьому випадку (другий режим релаксаційних коливань) діод, по суті, знову відіграє роль лінійного опору (режим 7 на рис.2). В режимі 7 за період коливань має місце одна пара стрибків між ділянками А і В (див. рис. 3.2.15). Відповідні коливання подібні до звичайних релаксаційних автоколивань, описуваних рівнянням Ван дер Поля (рис.5б). Слід тільки взяти до уваги, що при додатних та від'ємних значеннях напруги v опір тунельного діода, а, отже, й інкремент і амплітуда релаксаційних коливань виявляються неоднаковими.



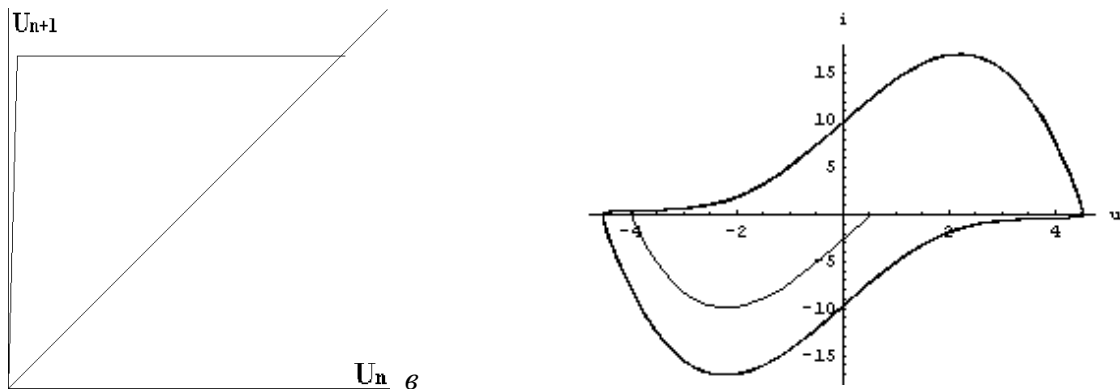


Рис. 3.2.15. Другий режим релаксаційних коливань: а – проєкції фазового портрету на площини iu , iv та uv ; б – часові епюри струму та напруг; в – діаграма Ламерея; г – фазовий портрет релаксаційних коливань для рівняння Ван дер Поля.

3.2.3.10. Особливості біфуркацій

В процесі моделювання виявилось, що на межі хаотичної та регулярної динаміки виникають деякі особливості, що зазвичай притаманні таким біфуркаціям.

На межі режимів 4 та 6 (рис.3.2.6) спостерігався гістерезис, тобто залежність форми коливань від початкових умов. Тут при малих початкових амплітудах реалізуються стохастичні коливання, а при великих – зображувальна точка виходить на граничний цикл. Як видно з графіка поворотного відображення (рис. 3.2.16 а), для малих значень u маємо деяку область, з якої не може вийти зображувальна точка, і в якій немає стійких стаціонарних точок. Але, якщо початкове значення u обрати досить великим, то система потрапляє в стійку стаціонарну точку, якій відповідає режим релаксаційних коливань.

Перехід від режиму регулярних релаксаційних коливань 7 до стохастичного режиму 4 (рис. 3.2.6) відбувався двома шляхами: через послідовні подвоєння періоду (за сценарієм Фейгенбаума) або через переміжність (за сценарієм Помо – Манервіля).

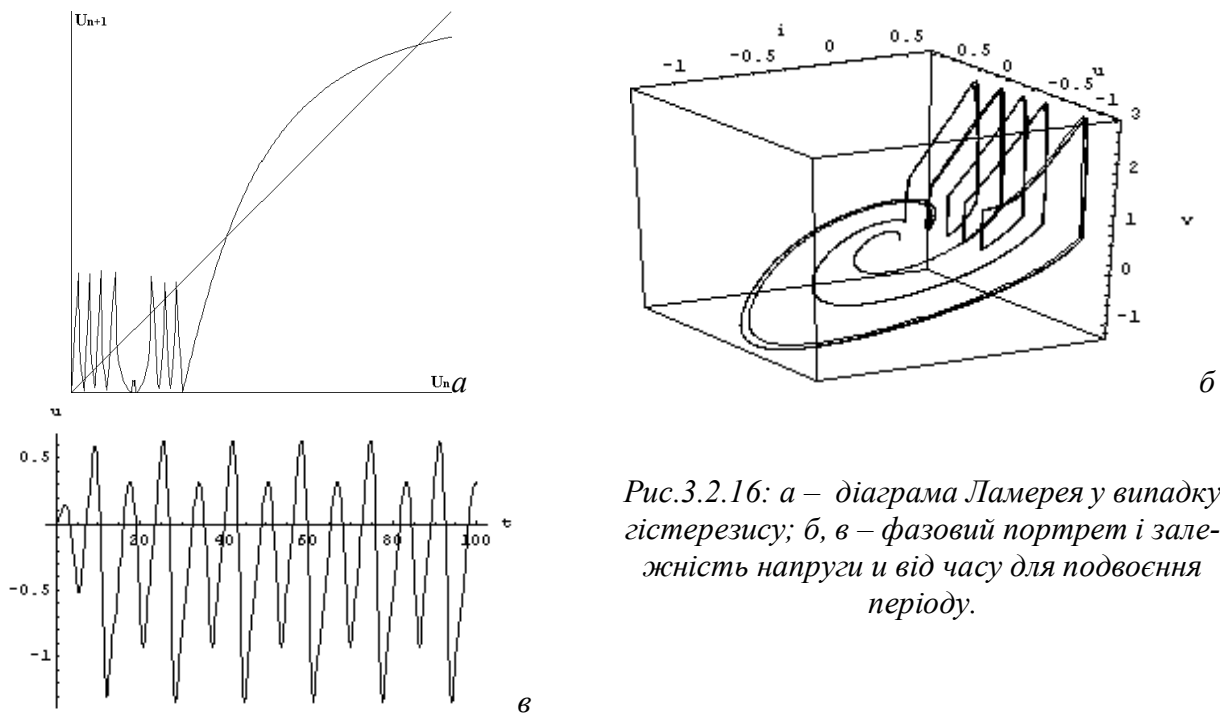


Рис.3.2.16: а – діаграма Ламерея у випадку гістерезису; б, в – фазовий портрет і залежність напруги u від часу для подвоєння періоду.

На рис. 3.2.16 б, в показано фазовий портрет та епюру напруги u для випадку подвоєного періоду (виникає граничний цикл кратності два). Зазначимо, що для цього випадку на

графіку поворотного відображення в точці перетину графіка функції $u_{n+2}=F(u_n)$ з прямою $u_{n+2}=u_n$ похідна за модулем менша від одиниці, тобто відповідний стан є стійким.

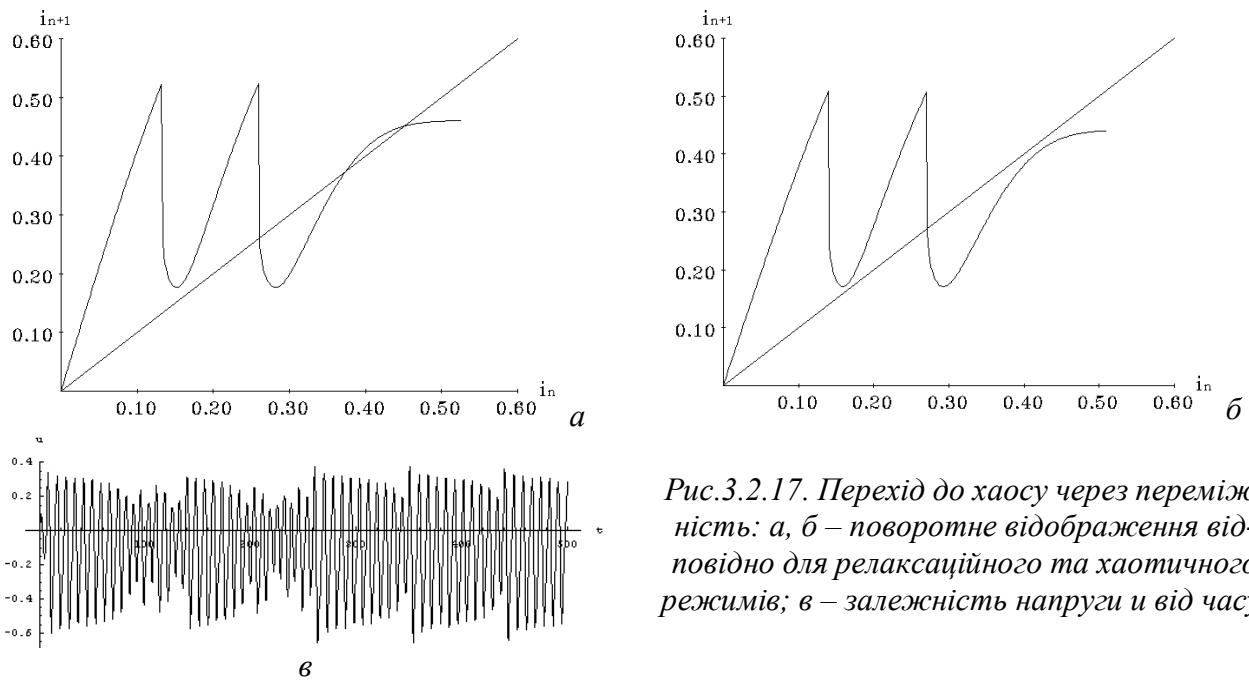


Рис.3.2.17. Перехід до хаосу через переміжність: а, б – поворотне відображення відповідно для релаксаційного та хаотичного режимів; в – залежність напруги u від часу.

При переході до хаосу через переміжність (за сценарієм Помо – Манервіля) спочатку спостерігаються регулярні коливання. При подальшій зміні керуючого параметра вони починають зрідка перериватися хаотичним рухом (рис. 3.2.17 в). При подальшій зміні параметра в коливаннях залишається все менше регулярності, і вони набувають хаотичного характеру. Справді, на графіку поворотного відображення для релаксаційного режиму (рис. 3.2.17 а) існує стійка стаціонарна точка, яка зникає в хаотичному режимі (рис. 3.2.17 б).

Контрольні питання до підрозділу 3.2.3

1. Які сценарії переходу до хаосу можна реалізувати в генераторі шуму КПР?
2. Оцініть розмірність дивного атратора для генератора шуму КПР.
3. Що треба змінити в генераторі КПР, щоб збільшити середню довжину пачок коливань у моноmodalьному режимі стохастичних коливань?

3.3. Гідродинамічна турбулентність

Поняття турбулентності (від латинського *turbulentus* – невпорядкований, бурхливий) прийнято застосовувати до систем із розподіленими параметрами (рідких та газоподібних середовищ або хвильових полів) у тому ж розумінні, що і поняття хаосу – для систем із скінченною кількістю ступенів вільності: це складний непередбачуваний рух системи за відсутності випадкових зовнішніх сил або флуктуацій. Інколи турбулентність називають просторово-часовим хаосом, підкреслюючи тим самим хаотичний характер руху як у просторі, так і в часі.

Історично поняття турбулентності виникло в гідродинаміці при описі течій великої швидкості, які супроводжуються виникненням вихорів. Відповідно до цього ми спочатку розглянемо гідродинамічну турбулентність, а вже потім перейдемо до турбулентності хвильових полів.

3.3.1. Загальні поняття

Розберемо спочатку деякі загальні поняття, що стосуються гідродинамічної турбулентності: рівняння, що її описують, вигляд фазового портрету, а також класифікацію видів гідродинамічної турбулентності.

3.3.1.1. Рівняння Нав'є – Стокса. Ламінарна та турбулентна течія

Ми вже стикалися з рівнянням Нав'є – Стокса при аналізі руху шару рідини, який підігривається знизу (див. п. 1.2.2, рівняння (1.2.7)). вважаючи рідину нестисливою та нехтуючи силою ваги, перепишемо його у формі:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (3.3.1)$$

(нагадаємо, що \mathbf{v} – швидкість течії, p – тиск, ρ – густина рідини, η – коефіцієнт в'язкості).

Для стаціонарної течії рівняння Нав'є – Стокса спрощується й набуває вигляду

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (3.3.1 \text{ а})$$

де $\nu = \eta / \rho$ – кінематична в'язкість.

Нелінійний доданок $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ у рівнянні (3.3.1 а) має порядок v^2/l , де l – характерний масштаб течії (наприклад, це може бути радіус труби, по якій тече рідина). Дисипативний доданок $\nu \Delta \mathbf{v}$ можна оцінити як $\nu v/l^2$. Тоді відношення цих доданків дасть безрозмірну величину

$$\frac{|\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}|}{|\nu \Delta \vec{v}|} \sim \frac{v^2 l^2}{l \nu v} = \frac{lv}{\nu} \equiv R, \quad (3.3.2)$$

яку називають числом Рейнольдса.

Якщо $R \ll 1$, то нелінійність неістотна, і стаціонарна течія описується лінійним рівнянням

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v}. \quad (3.3.1 \text{ б})$$

Разом із рівнянням неперервності для нестислової рідини

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.3.3)$$

рівняння (3.3.1 б) повністю описує рух рідини. Така течія називається ламінарною.

При $R \geq 1$ нелінійним доданком у рівнянні Нав'є – Стокса вже не можна знехтувати. По суті, умова $R \geq 1$ в чомусь аналогічна до умови самозбудження автогенератора: при її виконанні в течії розвивається нестійкість, в результаті чого з'являються вихори. Зупинимося на цьому питанні детальніше.

Причиною виникнення вихорів у течії є так звана нестійкість Кельвіна - Гельмгольца. Механізм її дії найпростіше пояснити на прикладі поведінки межі між рухомою та нерухомою рідиною. Отже, розглянемо модель рідини, нижній шар якої (область $x < 0$) є нерухомим, а верхній (область $x > 0$) рухається з деякою швидкістю v_0 (рис. 3.3.1 а). Нехай на межі двох областей утворилося гармонічне в просторі збурення. Тоді там, де це збурення заходить в

область $x > 0$, швидкість течії поблизу межі зростатиме, а там, де збурення заходить в область $x < 0$ – навпаки, зменшуватиметься (рис. 3.3.1 б). В областях, де швидкість течії зростає, відповідно до закону Бернуллі тиск рідини зменшиться, а в областях, де швидкість зменшується – тиск, навпаки, зростатиме. Під дією цього просторово змінного тиску початкове збурення межі зростатиме. В результаті й виникатимуть вихори.

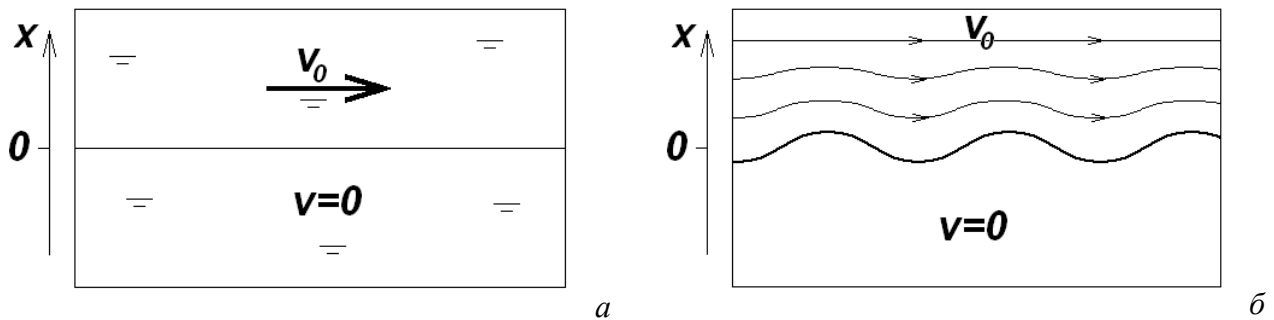


Рис. 3.3.1. До пояснення нестійкості Кельвіна - Гельмгольца.

Розмір вихорів, що виникають у течії, визначається її характерним розміром l (тобто, по суті, граничними умовами) та числом Рейнольдса R . Якщо число Рейнольдса невелике, то виникають стаціонарні вихори з характерними розмірами порядку l . При подальшому зростанні числа Рейнольдса вихори починають відриватися від місця свого виникнення і зноситися за течією. Крім того, в течії починають з'являтися вихори все більш дрібних масштабів, подібно до того, як у спектрі автогенератора при переході від квазігармонічного до релаксаційного режиму з'являються вищі гармоніки основної частоти. Нарешті, при $R \gg 1$ рух рідини набуває надзвичайно складного, нестационарного й непередбачуваного характеру. Саму таку течію називають турбулентною.

Ілюстрацією до викладеного вище може служити рис. 3.3.2, на якому схематично показані лінії течії рідини, що обтікає довгий циліндр, при різних значеннях числа Рейнольдса.

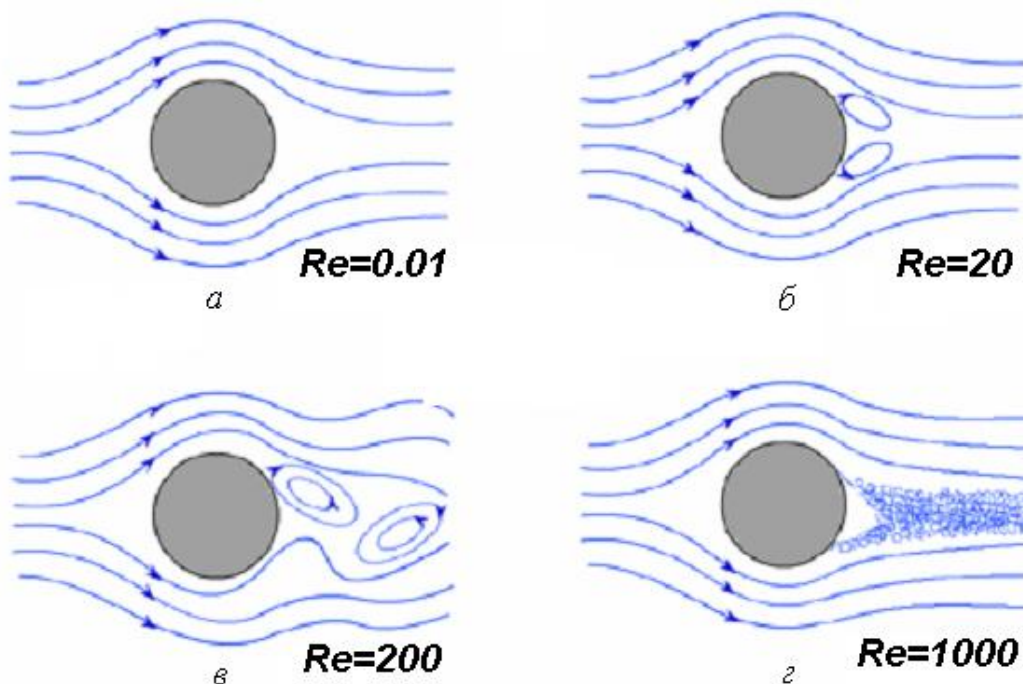


Рис. 3.3.2. Обтікання довгого циліндра рідиною при різних значеннях числа Рейнольдса: а – ламінарна течія; б – поява вихорів; в – відрив вихорів, або доріжка вихорів; г – розвинена турбулентність.

Можна сказати, що фактичним керівним параметром, що визначає характер течії в трубі, є різниця тисків між кінцями труби. При малих різницях тисків швидкість течії буде малою, а сама течія – ламінарною. При зростанні різниці тисків зростатиме швидкість течії, все більшу роль відіграватиме нелінійним доданок у рівняння Нав'є – Стокса, і течія поступово набуде турбулентного характеру. Можна сказати, що в даному прикладі саме різниця тисків визначає міру нерівноважності системи. В будь-якому випадку нерівноважність системи є необхідною передумовою виникнення турбулентної течії.

Ситуація, якісно подібна до описаної вище, має місце й у випадку конвекції Релея – Бенара (див. п. 2.2.2). Аналогом ламінарної течії в цьому випадку виступає режим відсутності конвекції, який має місце при малій різниці температур між нижньою та верхньою межами шару рідини (або при великій в'язкості рідини). При зростанні різниці температур (зменшенні в'язкості рідини) з'являються конвективні потоки, причому спочатку виникають регулярні структури, а при подальшому зростанні ступеню нерівноважності течія набуває турбулентного характеру.

3.3.1.2. Утворення дивного атрактора у функціональному просторі

Рівняння Нав'є – Стокса (3.3.1) описує систему з розподіленими параметрами. Системам із розподіленими параметрами відповідає континуум ступенів вільності. Відповідно до цього й фазовий простір таких систем буде нескінченновимірним (точніше, матиме континуум ступенів вільності). Такий фазовий простір прийнято називати функціональним. Кожна точка цього простору відповідає певному розподілу величин, що характеризують систему (наприклад, полю швидкості для гідродинамічної течії). Розв'язок відповідного рівняння в частинних похідних, яке описує систему, задає фазову траєкторію у функціональному просторі.

Гідродинамічна течія належить до дисипативних систем, відповідно до цього рівняння Нав'є – Стокса містить дисипативний доданок. Як ми вже знаємо, в процесі еволюції дисипативних систем об'єм фазової краплі зменшується, і вона потрапляє на деякий атрактор. В принципі, можливі й нескінченновимірні атрактори (хоча це питання досі вивчене недостатньо). Але в багатьох випадках атрактори у функціональному просторі можуть мати скінчену геометричну розмірність. Такі атрактори можуть бути як простими (стаціонарні точки, граничні цикли), так і дивними. Саме дивні атрактори визначають турбулентний рух.

Наявність атрактора зі скінченною геометричною розмірністю у функціональному просторі системи означає, що усталений рух системи можна повністю описати скінченною кількістю рівнянь у повних похідних, що є величезним спрощенням порівняно з рівнянням у частинних похідних.

Найменшу кількість незалежних змінних, які однозначно визначають усталений рух нерівноважної дисипативної системи з розподіленими параметрами, називають розмірністю вкладення атрактора d_e . З геометричної точки зору розмірність вкладення атрактора – це мінімальна розмірність фазового простору, до якого може бути вкладений (тобто вміщений без самоперетинів) гладенький підмноговид, що повністю утримує цей атрактор. Зрозуміло, що розмірність вкладення має завжди бути більшою від розмірності атрактора.

Можна показати, що будь-який гладенький многовид розмірності m завжди може бути вкладений у простір з розмірністю $2m+1$. Скажемо, крива (розмірність 1) завжди може бути вкладена в тривимірний простір. На площину таку криву можна вкласти не завжди (це не можна зробити, наприклад, із обмоткою тора). Дивний атрактор із фрактальною розмірністю d_F завжди можна вкласти в простір із цілою розмірністю $k \geq 2d_F+1$. В деяких випадках розмірність вкладення може бути й меншою – включно до значення $[d_F]+1$, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

3.3.1.3. Різновиди гідродинамічної турбулентності

Якщо розмірність вкладення дивного атрактора для гідродинамічної турбулентності невелика (скажемо, не перевищує десяти), таку гідродинамічну турбулентність називають слабкою. Усталений режим такої турбулентності описується невеликою кількістю рівнянь у повних похідних, у фазовому просторі якої існує дивний атрактор. Можна сказати, що властивості такої турбулентності по суті нічим не відрізняються від хаотичної динаміки дисипативних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності, яка була розглянута в розділі 3.2. Очевидно, для течії, описуваної рівнянням Нав'є – Стокса (3.3.1), режим слабкої турбулентності буде реалізуватися при помірних значеннях числа Рейнольдса. Більш детально про режим слабкої гідродинамічної турбулентності буде говоритися нижче (п. 3.3.2).

Як впливає з виконаних вище оцінок, дисипативний доданок у рівнянні Нав'є – Стокса буде істотним лише для вихорів малих характерних масштабів (при $R \leq 1$), причому зі збільшенням швидкості течії цей масштаб зменшуватиметься. З іншого боку, як уже говорилося, нестійкість, що приводить до виникнення вихорів, розвивається на великих масштабах. Таким чином, при великих швидкостях течії енергія надходить у систему у вигляді великомасштабних вихорів, а розсіюється на дрібномасштабних вихорах. Отже, в такій течії відбувається перекачування енергії від великих просторових масштабів до малих через деякий проміжний інтервал масштабів, на яких відсутнє як надходження енергії до системи, так і її розсіювання. Цей інтервал прийнято називати інерційним.

Наявність процесу перекачування енергії від великих до малих масштабів через інерційний інтервал характеризує розвинену гідродинамічну турбулентність. Розвинена гідродинамічна турбулентність буде детальніше розглянута у п. 3.3.3.

Контрольні питання до пункту 3.3.1

7. Що таке ламінарний та турбулентний режими течії? Відповідь дайте на основі аналізу рівняння Нав'є – Стокса.
8. Чому при збільшенні числа Рейнольдса в турбулентній течії з'являються вихори все менших розмірів?
9. Який доданок у рівнянні Нав'є – Стокса породжує турбулентність? Звідки виникає цей доданок?
10. Поясніть якісно механізм виникнення вихорів при обтіканні течією циліндричної перешкоди (рис. 3.3.2). Чому при великих швидкостях течії ці вихори починають відриватися від місця свого виникнення?
11. Виходячи з рівняння Нав'є - Стокса, спробуйте відповісти на питання, на скільки частин буде розпадатися вихор у дуже швидкій течії.
12. Запропонуйте якісне пояснення механізму ділення вихорів при великих швидкостях течії.

3.3.2. Слабка гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося, слабка гідродинамічна турбулентність в усталеному режимі характеризується малою кількістю ступенів вільності (умовно кажучи, до десяти), тобто її можна описати порівняно невеликою кількістю рівнянь у повних похідних. Виявляється, що розмірність вкладення дивного атрактора (тобто, по суті, кількість рівнянь першого порядку, необхідних для опису системи, можна визначити експериментально. Методи, за допомогою яких це можна зробити, описані нижче.

Крім того, ми розглянемо відносно простий приклад слабкої гідродинамічної турбулентності – так звану систему рівнянь Лоренца, яка була отримана для опису турбулентного режиму конвекції в шарі в'язкої рідини, що підігрівається знизу.

3.3.2.1. Методи експериментального визначення розмірності вкладення

Для експериментального визначення розмірності вкладення дивного атрактора системи з розподіленими параметрами, яка здійснює усталений турбулентний рух, необхідно виміряти яку-небудь величину $x(t)$, що характеризує систему (наприклад, миттєвий тиск або одну з компонент швидкості в деякій точці потоку), через рівні проміжки часу. Отримаємо послідовність значень $\{x_n\}=x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$.

Геометричний метод

Найпростіший метод експериментального визначення розмірності вкладення, який умовно можна назвати геометричним, було запропоновано в роботі: N.H.Packard, J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, R.S.Shaw, Phys. Rev. Lett., **45**, 712 (1980).

Нехай рух системи описується одним єдиним диференціальним рівнянням першого порядку. Тоді послідовність $\{x_n\}$ однозначно визначається початковим значенням x_1 . Кожна наступна точка є одна й та сама функція попередньої, $x_{n+1}=f(x_n)$, оскільки проміжок часу між усіма вимірами однаковий. Отже, всі пари точок (x_{n+1}, x_n) послідовності $\{x_n\}$ мають лежати на одній кривій $x_{n+1}=f(x_n)$.

Якщо рух системи описується не одним, а двома диференціальними рівняннями першого порядку, то в площині (x_{n+1}, x_n) точки лежатимуть безладно. Зате в тривимірному просторі (x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) набори точок лягатимуть на деяку поверхню $x_{n+1}=F(x_n, x_{n-1})$.

Якщо рух системи описується більш ніж двома рівняннями, геометричний метод стає незручним.

Метод підпоследовностей

Інший метод, який можна умовно назвати методом підпоследовностей, було запропоновано в роботі: С.Н.Лукашук, А.А.Предтеченский, Г.Е.Фалькович, А.И.Черных, Препринт №280 Ин-та автоматики и электрометрии СО АН СССР №280, Новосибирск, 1985.

Оберемо в послідовності $\{x_n\}$ всі можливі підпоследовності довжиною k і розглянемо набір векторів $w^{(n)}=\{x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_{n-1}, x_n\}$. Всі такі вектори належать деякому k -вимірному простору.

Зафіксуємо одну з підпоследовностей, яка починається з номера 0 , і позначимо відповідний вектор як $w^{(0)}$. Розглянемо відстань $\rho_k(n, n_0)$ між довільним вектором $w^{(n)}$ та вектором $w^{(0)}$:

$$\rho_k(n, n_0) \equiv \left| w^{(n)} - w^{(0)} \right| = \left[\sum_{i=1}^k (x_{n-k+i} - x_{n_0-k+i})^2 \right]^{1/2}, \quad (3.3.4)$$

а також величину

$$r(n, n_0) \equiv \left| x_{n+1} - x_{n_0+1} \right|. \quad (3.3.5)$$

Побудуємо графік залежності $r(\rho)$ для різних значень n .

Наявність функціональної залежності між елементом x_{n+1} та k попередніми елементами послідовності $\{x_n\}$ означає, що існує деяка функція $x_{n+1}=f(w^{(n)})$. Тому

$$r_{n, n_0} \equiv \left| f[w^{(n)}] - f[w^{(0)}] \right|. \quad (3.3.6)$$

Очевидно, в цьому випадку $\rho_k(n, n_0) \rightarrow 0$ при $w^{(n)} \rightarrow w^{(0)}$. При цьому і $r(n, n_0) \rightarrow 0$.

Якщо ж функціональна залежність між x_{n+1} та $w^{(n)}$ відсутня, то $r(n, n_0)$ не прямуватиме до нуля при зменшенні $\rho_k(n, n_0)$.

Якщо функціональна залежність при заданому k досягнута, то в області малих значень ρ відповідні значення r також є малими, тобто точки на графіку $r(\rho)$ поблизу початку координат лежать нижче деякої прямої вигляду $r=C\rho$. Розмірність вкладення визначається мінімальним значенням k , для якого ця властивість виконується (рис. 3.3.3).

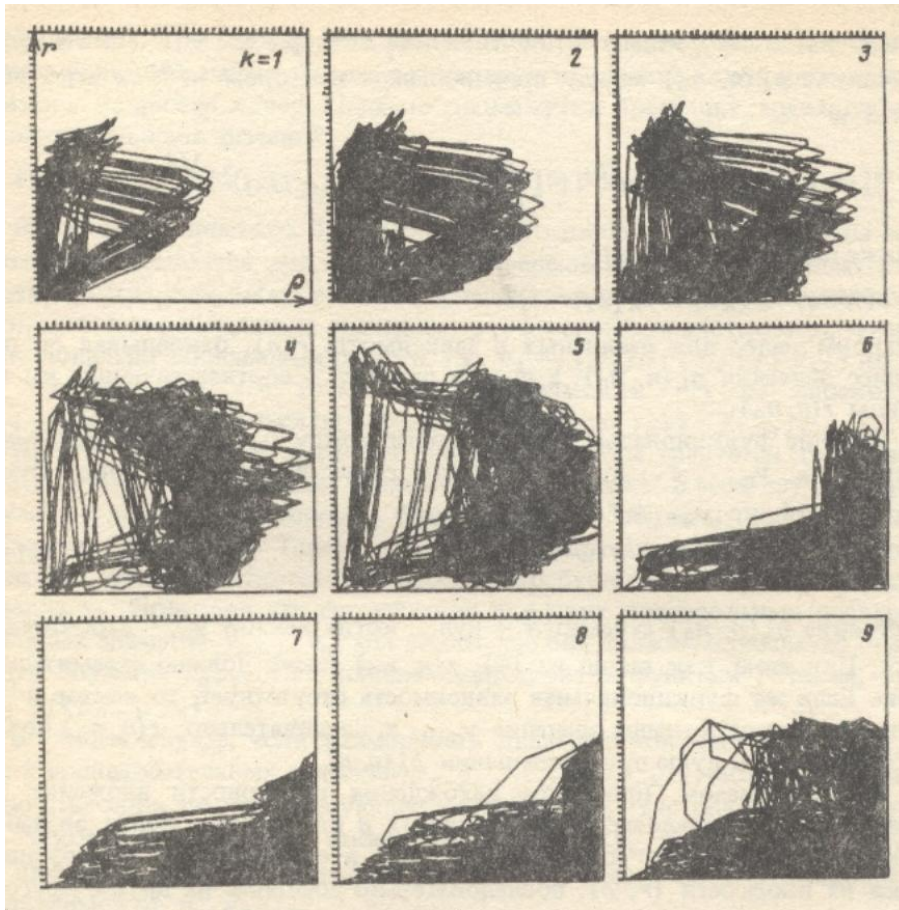


Рис. 3.3.3. Перевірка функціональної залежності $(k+1)$ -ї координати від k попередніх за методом підпоследностей: розмірність вкладення – 5.

Метод Грассбергера – Прокаччіа

Найбільш інформативним є так званий метод Грассбергера – Прокаччіа (P.Grassberger, I.Procaccia, Phys. Rev. Lett., 50, 346 (1983)).

Задано деяким значенням параметра l і підрахуємо кореляційний інтеграл

$$C_k(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n, n'=1}^N \theta[l - \rho_k(n, n')], \quad (3.3.7)$$

де N – повне число елементів у послідовності $\{x_n\}$, $\theta(z)$ – функція Хевісайда,

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Внесок до кореляційного інтегралу дають лише ті пари векторів $w^{(n)}$ та $w^{(n')}$, віддаль між якими не перевищує заданої величини l . При малих l має місце співвідношення $C_k(l) \sim l^{\alpha(k)}$.

Величину $\alpha(k)$ можна знайти, побудувавши залежність $\ln[C_k(l)]$ від $\ln(l)$. Такі графіки можна побудувати для різних значень k . Починаючи з деякого значення k_0 , величина $\alpha(k)$ перестає залежати від k . Це значення k_0 дає розмірність вкладення атрактора, а відповідне

значення $\alpha(k_0)$ – так звану кореляційну розмірність даного атрактора v (рис. 3.3.4). В загальному випадку $v \leq d_F$. Рівність $v = d_F$ має місце лише при рівномірному розміщенні точок на аттракторі.

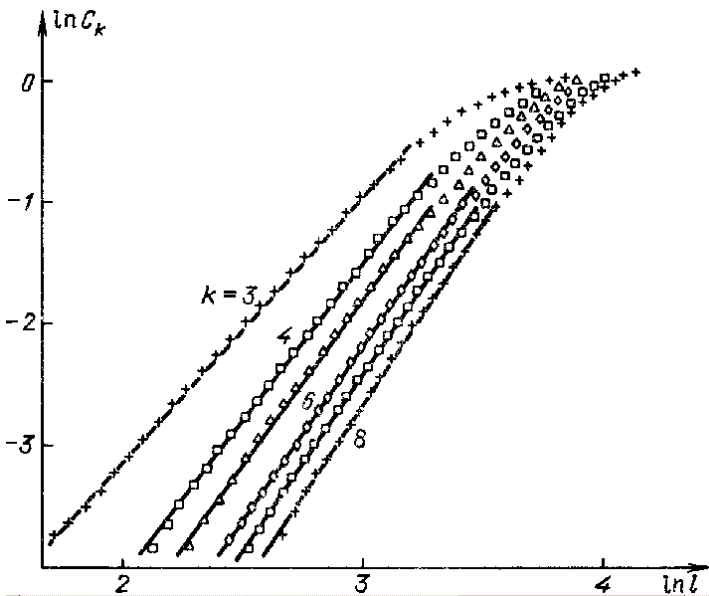


Рис. 3.3.4. Експериментальне визначення розмірності вкладення та кореляційної розмірності атрактора за методом Грассбергера – Прокаччіа: розмірність вкладення – 5, кореляційна розмірність – 2.8.

Для систем із великою розмірністю вкладення використання процедури Грассбергера – Прокаччіа різко ускладнюється через стрімке зростання потрібної кількості експериментальних точок N . Тому на практиці нею можна користуватися, як правило, лише для випадку слабкої гідродинамічної турбулентності.

3.3.2.2. Слабка турбулентність у шарі рідини, який підігрівається знизу: аналіз системи Лоренца

Наприкінці п. 3.3.1.2 вже відзначалася аналогія між виникненням турбулентності в потоці рідини та в шарі рідини, який підігрівається знизу. Тому режим слабкої турбулентності можна розглянути на прикладі системи Лоренца (див. п. 2.2.2.6, рівняння (2.2.33), (2.2.36)) – системи трьох диференціальних рівнянь у повних похідних, яка в певному наближенні описує конвективні течії в шарі рідини, що підігрівається знизу:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -PX + PY, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що величини X та Y характеризують відповідно амплітуди швидкості та збурення температури, а величина Z – “нелінійне спотворення” профілю температури (ефект, аналогічний до ангармонізму нелінійного осцилятора), $b=8/3$, r – число Релея, нормоване на його критичне значення, P – число Прандтля. Число Прандтля визначається властивостями рідини, а число Релея в експерименті можна змінювати, змінюючи, наприклад, різницю температур між нижньою та верхньою поверхнями шару рідини.

З’ясуємо спершу деякі загальні властивості системи Лоренца (3.3.14), (3.3.17).

Ця система відповідає тривимірному фазовому простору. Її дивергенція однакова в усьому фазовому просторі й від’ємна:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -P - 1 - b < 0, \quad (3.3.19)$$

Отже, ця система є дисипативною (що, власне кажучи, впливає і з процедури отримання рівнянь), і в усьому фазовому просторі фазові краплі з часом стискаються.

Система Лоренца симетрична щодо заміни змінних $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$. Отже, її фазовий портрет симетричний щодо осі z .

Стационарні точки системи Лоренца детально обговорювалися в п. 1.2.2.4. Як уже вказувалося, при $P > b+1 = 11/3$ та $r > r^*$ всі вони виявляються нестійкими.

Як показує числовий розрахунок, за виконання умови $P > 11/3$ ще при $r < r^*$ у фазовому просторі, крім двох простих атракторів – стійких фокусів, що відповідають конвективним валам, з'являється спочатку пара сідлових граничних циклів, які при зростанні числа Релея поступово ускладнюються і врешті решт перетворюються на дивний атрактор – так званий атрактор Лоренца (рис. 3.3.5). При $r > r^*$ атрактор Лоренца залишається єдиним атрактором у фазовому просторі, тобто система демонструє турбулентну поведінку незалежно від початкових умов.

В процесі руху на атракторі Лоренца осциляції навколо двох нестійких стаціонарних точок чергуються з випадковими перестрибуваннями між околами цих точок.

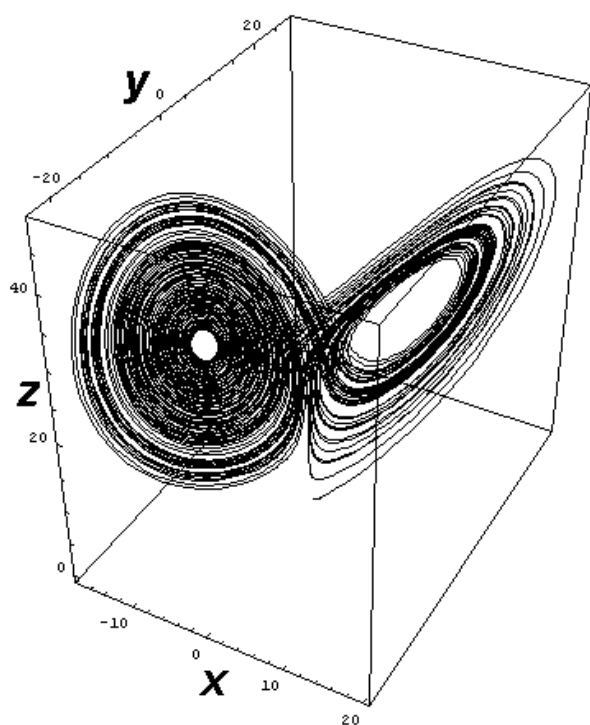


Рис. 3.3.5. Фазовий портрет системи Лоренца ($P=10$, $r=28$, $b=8/3$).

Існування атратора Лоренца означає, що рух рідини в шарі, що підігрівається знизу, якраз відповідає режиму слабкої гідродинамічної турбулентності.

З фізичної точки зору використання системи Лоренца при великих числах Релея є некоректним, оскільки при цьому порушуються припущення, які були використані при її отриманні. Тому, хоч були спроби використати систему Лоренца для опису руху повітря в атмосфері (по суті, для передбачення погоди), сьогодні вона має переважно історичне значення. Це значення полягає в тому, що атрактор Лоренца був першим дослідженим дивним атрактором.

Саме при розв'язанні системи Лоренца числовими методами було вперше помічено, що дуже мала зміна початкових умов з часом приводить до радикальної зміни розв'язку (рис. 3.3.6 а, б). Видно, що при $t < 20$ залежності, наведені на рис. 3.3.5 а та рис. 3.3.5 б, практично збігаються. Але вже при $t > 25$ вони йдуть зовсім по-різному. Таким чином, ці рисунки ілюструють розбіжність із часом первісно сусідніх зображувальних точок на дивному атракторі (див. п. 3.2.1.2).

На основі своїх розрахунків Лоренц сформулював так званий ефект метелика: рух повітря, обумовлений польотом метелика в джунглях Амазонки, через деякий час може спри-

чинити радикальну зміну погоди в Сибіру. На якісному рівні цей висновок вважається справедливим і сьогодні. Вважається, що характерний час перемішування для атмосфери Землі складає порядку двох тижнів. Це і є той час, на який можна реально передбачати погоду.

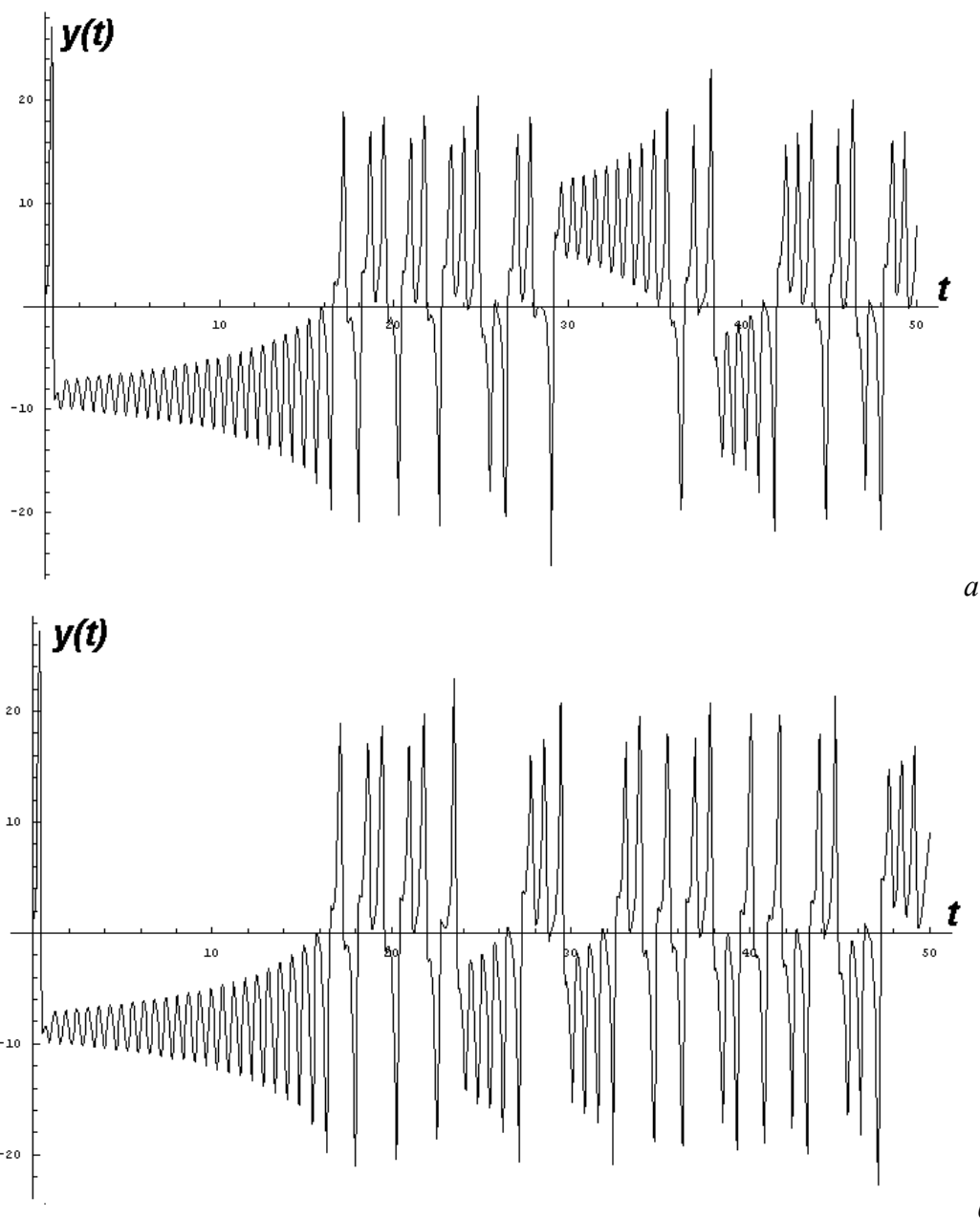


Рис. 3.3.6. Результати числового розв'язку системи Лоренца ($P=10, r=28, b=8/3$) для початкових умов $x(0)=z(0)=0, y(0)=1.00$ (а) та $x(0)=z(0)=0, y(0)=1.01$ (б).

3.3.2.3. Перехід до просторово-часового хаосу

Нагадаємо (див. п. 2.2.2.6), що при отриманні системи Лоренца було зроблене жорстке припущення про структуру течії. Саме початкові рівняння в частинних похідних (рівняння Нав'є - Стокса, рівняння теплопровідності та рівняння неперервності) вдалося звести до невеликої кількості рівнянь у повних похідних (за часом).

В дійсності таке припущення залишається справедливим лише при невеликому ступені нерівноважності системи. При переході керівного параметра, що характеризує нерівноважність, через деяке критичне значення в системі починають утворюватися нерегулярні просторові структури, тобто спектр хвильових чисел також стає неперервним. У цьому випадку говорять про виникнення просторово-часового хаосу. Саме такий хаос ототожнюється з розвиненою турбулентністю.

Очевидно, народження просторово-часового хаосу призводить до помітного збільшення кількості ступенів вільності, який характеризує рух системи, або, що те саме, до суттєвого зростання розмірності відповідного дивного атратора у функціональному просторі (див. п. 3.3.1.2).

Сказане вище можна проілюструвати на прикладі характерних режимів конвекції Релея - Бенара, діаграма яких наведена на рис. 3.3.6.

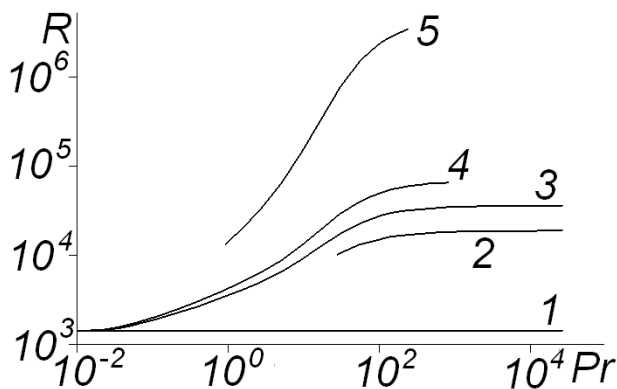


Рис. 3.3.6. Области існування різних режимів конвекції Релея - Бенара (експеримент, з роботи Р.Крішнамурті, 1973): R – число Релея, Pr – число Прандтля.

При дуже малих значеннях числа Релея R конвекція в системі відсутня при будь-яких значеннях числа Прандтля Pr (пор. з п. 2.2.2.4). При переході через критичне значення R_1 (при фіксованому значенні Pr) виникають стаціонарні конвективні вали (як це й передбачає розв'язок системи Лоренца, див. п. 2.2.2.8). При переході через критичне значення R_2 течія залишається стаціонарною, але стає тривимірною (в цьому режимі можуть, зокрема, виникати шестикутні комірки). Далі, при переході через наступне критичне значення R_3 , цей стаціонарний режим набуває коливного характеру (при $Pr < 5$ стаціонарні конвективні вали безпосередньо переходять у нестаціонарний режим). При переході через значення R_4 часові коливання стають нерегулярними, а їхній спектр – суцільним. Нарешті, при перевищенні критичного значення R_5 ускладнюється й просторова структура течії – народжується просторово-часовий хаос, або розвинена турбулентність.

3.3.3. Розвинена гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося вище (п. 3.3.1.3), розвинена гідродинамічна турбулентність характеризується тим, що при великих значеннях числа Рейнольдса нестійкість у потоці рідини, що приводить до виникнення вихорів, розвивається на великих масштабах (порядку характерного масштабу течії l), розсіювання енергії відбувається на малих масштабах, а проміжні масштаби утворюють так званий інерційний інтервал, через який потік енергії передається від великих масштабів до малих.

У цьому пункті буде більш детально розглянуто якісну картину розвиненої гідродинамічної турбулентності та викладено теорію Колмогорова – Обухова, яка на основі аналізу розмірностей дозволяє передбачити спектр турбулентності.

3.3.3.1. Пульсації різних масштабів у турбулентному потоці

Розвинена гідродинамічна турбулентність характеризується надзвичайно нерегулярною, безладною зміною швидкості з часом у кожній точці потоку, а також від точки до точки в просторі для фіксованого моменту часу.

Під середньою швидкістю руху u будемо розуміти миттєву швидкість течії v в кожній точці простору, усереднену за великий проміжок часу. Середня швидкість u від точки до точки змінюється плавно. Величину $v-u$, що демонструє нерегулярні зміни в просторі та в часі, називатимемо пульсаційною складовою швидкості.

Пульсаційну складову швидкості можна якісно розглядати як набір турбулентних пульсацій різних масштабів. Під масштабом λ розуміють ті характерні відстані, на яких шви-

дкість руху істотно змінюється. Можна вважати, що швидкість v_λ , що відповідає масштабу λ – це пульсаційна складова швидкості, усереднена на довжині λ .

Як уже говорилося, при зростанні числа Рейнольдса спочатку з'являються великомасштабні пульсації, а потім – пульсації з усе меншими масштабами.

Основна енергія турбулентного потоку зосереджена в найбільш великомасштабних пульсаціях (з розмірами порядку l). Їхня швидкість є величиною порядку зміни Δu середньої швидкості u на довжині l . Частоти цих пульсацій у фіксованій точці спостереження складають величину порядку u/l . Це обумовлено тим, що вихори рухаються повз нерухомого спостерігача із середньою швидкістю потоку u .

Дрібномасштабні пульсації характеризуються значно меншими пульсаційними швидкостями порівняно з пульсаціями масштабу l і несуть лише невелику частку кінетичної енергії турбулентного потоку. Характерні частоти пульсацій масштабу λ складають величину u/λ . Пульсаційна швидкість v_λ , що визначає зміну миттєвої швидкості на довжині λ в деякий момент часу, при $\lambda \ll l$ набагато менша від величини Δu , але набагато більша від зміни середньої швидкості u на цій самій довжині.

3.3.3.2. Роль дисипації для пульсацій різних масштабів

Визначимо число Рейнольдса для турбулентних пульсацій масштабу λ :

$$R_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \quad (3.3.26)$$

(пор. із формулою (3.3.2)). Величина R_λ тим менша, чим менше λ (зі зменшенням λ зменшується й пульсаційна швидкість v_λ).

При великих R для пульсацій помірних масштабів λ величини R_λ також є великими. Але великі значення числа Рейнольдса означають, що в'язкістю можна знехтувати (див. п. 3.3.1.1). Отже, для пульсацій не дуже малих масштабів, для яких виконана умова $R_\lambda \gg 1$, в'язкість є неістотною, і дисипація енергії майже не відбувається.

Дисипація енергії відбувається переважно для малих масштабів, $\lambda \leq \lambda_0$, де порогове значення λ_0 визначається з умови $R_{\lambda_0} \sim 1$. З точки зору загальної картини руху рідини в турбулентному потоці такі масштаби неістотні.

Область масштабів $l \ll \lambda \ll \lambda_0$ відповідає інерційному інтервалу. В цьому інтервалі відсутнє як надходження енергії в систему, так і її розсіювання, а відбувається лише перекачування енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних.

Отже, для розвиненої гідродинамічної турбулентності характерний перехід енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних майже без дисипації. Для підтримання стаціонарного стану такого потоку необхідні зовнішні джерела енергії, які віддають її у великомасштабні пульсації.

3.3.3.3. Аналіз великомасштабних пульсацій за методом розмірностей

Оскільки для пульсацій масштабу $\lambda \gg \lambda_0$ в'язкість неістотна, то величини, що характеризують рух із такими масштабами, не можуть залежати від кінематичної в'язкості ν . Ця обставина звужує круг величин, що визначають турбулентний рух. В результаті аналіз такого руху вдається провести на основі міркувань, пов'язаних із розмірністю.

Оцінімо за порядком величини дисипацію енергії при турбулентному русі великого масштабу (порядку l). Ця дисипація обумовлена не в'язкими втратами, а передачею енергії на збудження пульсацій менших масштабів.

Нехай E – середня потужність розсіювання на одиницю маси. Вона має розмірність $\text{ерг}/(\text{г}\cdot\text{с}) = (\text{г}\cdot\text{см}^2)/(\text{с}^2\cdot\text{г}\cdot\text{с}) = (\text{см}^2/\text{с}^3)$. В силу сказаного вище ця величина має залежати лише від густини рідини ρ , характерного масштабу течії l та амплітуди пульсацій Δu . Оскільки розмірність E не містить маси, то залежності від ρ теж не буде. Тоді, виходячи з міркувань розмірності, можна сконструювати єдину комбінацію величин l та Δu , яка матиме розмірність E :

$$E = f \Delta u, l \sim \frac{\Delta u^3}{l}. \quad (3.3.27)$$

Формула (3.3.27) підтверджує, що потужність для втрат великомасштабних пульсацій визначається саме перекачуванням енергії в пульсації менших масштабів, оскільки вона залежить лише від швидкості та характерного розміру цих пульсацій.

Різниця тиску Δp на межах області турбулентного руху може, в принципі, залежати від ρ , l та Δu . Виходячи з міркувань розмірності, можна записати:

$$\Delta p \sim \rho \Delta u^2. \quad (3.3.28)$$

Як бачимо, ця величина виявляється незалежною від розмірів області турбулентного руху. Якщо величина Δp відома, то з (3.3.28) випливає оцінка для пульсаційної швидкості найбільшого масштабу l :

$$\Delta u \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (3.3.29)$$

3.3.3.4. Локальні властивості розвиненої турбулентності

Розглянемо тепер властивості розвиненої турбулентності на масштабах $\lambda \ll l$. Їх прийнято називати локальними властивостями турбулентності.

Природно припустити, що на далеких відстанях d від стінок ($d \gg \lambda$) локальні властивості розвиненої турбулентності характеризуються однорідністю та ізотропністю. Це, зокрема, означає, що на ділянках із характерними розмірами порядку λ властивості турбулентного руху не залежать від напрямку середньої швидкості \mathbf{u} .

Якщо масштаб пульсацій задовольняє умові $\lambda_0 \ll \lambda \ll l$, тобто потрапляє в інерційний інтервал, то локальні властивості турбулентності мають залежати лише від E , ρ та λ і не повинні залежати від v , l та Δu .

Тоді зміна пульсаційної швидкості на масштабі λ , виходячи з міркувань розмірності, визначається співвідношенням

$$v_\lambda \sim E \lambda^{1/3}. \quad (3.3.30)$$

Величина v_λ , як уже вказувалося, характеризує одночасно й швидкість руху рідини у вихорах масштабу λ .

Співвідношення (3.3.30) відоме в літературі як закон Колмогорова – Обухова.

Турбулентність характеризується локальною нестійкістю. Нехай дві маленькі крапельки рідини знаходяться на малій відстані λ . Зміна цієї відстані з часом визначається швидкістю v_λ : $v_\lambda = d\lambda/dt$. Тоді, інтегруючи співвідношення (3.3.30), можна отримати закон зростання віддалі між сусідніми крапельками з часом:

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim E \lambda^{1/3},$$

звідки

$$\lambda t \sim E^{1/2} t^{3/2}. \quad (3.3.31)$$

Відповідно до (3.3.31), час, за який сусідні крапельки розходяться на віддаль λ , яка значно перевищує початкову відстань між ними, складає

$$t \lambda \sim \frac{\lambda^{2/3}}{E^{1/3}}. \quad (3.3.31 \text{ a})$$

Оцінимо співвідношення між v_λ та Δu . Для цього запишемо Δu через E та l із формули (3.3.27):

$$\Delta u \sim E l^{1/3}. \quad (3.3.27 \text{ a})$$

Поділивши (3.3.30) на (3.3.27 a), отримаємо:

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}. \quad (3.3.32)$$

Як уже згадувалося, турбулентний потік рідини можна уявити собі як набір вихорів різних масштабів, які зносяться із середньою швидкістю u . Тому зміну швидкості потоку за час $\tau \ll T=l/u$ в певній нерухомій точці простору можна записати, замінивши у формулі (3.3.30) масштаб λ на пройдений шлях $u\tau$:

$$v_\tau \sim Eu\tau^{1/3}. \quad (3.3.30 \text{ a})$$

Зовсім інакше виглядає зміна швидкості за час τ для деякої виділеної краплі рідини, яка рухається в потоці. Ця величина має залежати лише від E та τ . Тоді на основі аналізу розмірності можна записати:

$$v_\tau' \sim E\tau^{1/2}. \quad (3.3.33)$$

Зрозуміло, що при $\tau \ll T$ виконується нерівність $v_\tau' \ll v_\tau$.

3.3.3.5. Оцінка порогового масштабу дисипації

Знаючи залежність v_λ від λ , ми можемо тепер явно оцінити масштаб λ_0 , який визначає поріг дисипативних ефектів (див. п. 3.3.2.2). Справді, підставивши v_λ з (3.3.32) до формули (3.3.26), можна отримати:

$$R_\lambda \sim \frac{\lambda v_\lambda}{\nu} \sim \frac{\lambda}{\nu} \Delta u \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3} \sim \frac{l \Delta u}{\nu} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3} \sim R \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}. \quad (3.3.26 \text{ a})$$

Як уже вказувалося, пороговий масштаб дисипації λ_0 визначається з умови $R_{\lambda_0} \sim 1$. Тоді з урахуванням (3.3.26 a) можна записати:

$$\lambda_0 \sim \frac{l}{R^{3/4}}. \quad (3.3.34)$$

Формула (3.3.34) підтверджує висловлені раніше міркування про те, що ширина інерційного інтервалу зростає зі зростанням числа Рейнольдса.

Швидкість, що відповідає цьому масштабу, легко знайти з (3.3.32):

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u \left(\frac{\lambda_0}{l}\right)^{1/3} \sim \frac{\Delta u}{R^{1/4}}. \quad (3.3.35)$$

Тепер можна знайти умову існування інерційного інтервалу

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0 \sim \frac{l}{R^{3/4}}. \quad (3.3.36)$$

Як випливає з (3.3.36), вона зводиться до вимоги $R \gg 1$.

3.3.3.6. Колмогорівські спектри

Закон Колмогорова – Обухова можна переписати в спектральній формі.

Введемо замість масштабів λ хвильові числа $k \sim 1/\lambda$. Нехай $W(k)dk$ є кінетична енергія рідини на одиницю маси в заданому інтервалі $[k, k+dk]$. Розмірність величини $W(k)$ – $(\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{см}) / (\text{с}^2 \cdot \text{г}) = \text{см}^3 / \text{с}^2$. Очевидно, вона має залежати лише від k та від E . Тоді з міркувань розмірності випливає, що

$$W k \sim \frac{E^{2/3}}{k^{5/3}}. \quad (3.3.37)$$

Інтегруючи (3.3.37) по k , маємо:

$$\int_k^\infty W k dk \sim \frac{E^{2/3}}{k^{2/3}} \sim E \lambda^{2/3}. \quad (3.3.37 \text{ a})$$

Інтеграл (3.3.37 a) визначає повну кінетичну енергію (на одиницю маси) пульсацій з масштабами, що не перевищують λ . Отже, він має бути величиною порядку v_λ^2 . Тоді для v_λ виходить оцінка, що збігається із законом Колмогорова – Обухова у формі (3.3.30).

Співвідношення (3.3.37) визначає так званий колмогорівський спектр – ділянку спектральної інтенсивності розвинутої гідродинамічної турбулентності, яка відповідає інерційному інтервалу.

Формула (3.3.37) характеризує спектр хвильових чисел. Аналогічне співвідношення можна отримати й для частотного спектру, зробивши заміну $k \sim u/\lambda$. З урахуванням того, що $W(\omega)d\omega = W(k)dk$, можна записати:

$$W(\omega) d\omega \sim E^{2/3} \left(\frac{\omega}{u} \right)^{-5/3} \frac{d\omega}{u},$$

звідки

$$W(\omega) \sim \frac{Eu^{2/3}}{\omega^{5/3}}. \quad (3.3.38)$$

Частота ω , що фігурує у формулі (3.3.38), визначає повторюваність у часі руху в деякій нерухомій точці спостереження. Повторюваність руху деякої виділеної краплі рідини (як у формулі (3.3.33)) будемо характеризувати частотою ω' . Енергетичний спектр $W(\omega')$ повинен залежати лише від E та ω' і не повинен залежати від u . Тому з міркувань розмірності виходить співвідношення

$$W(\omega') \sim \frac{E}{\omega'^2}. \quad (3.3.39)$$

На масштабах $\lambda \ll \lambda_0$ турбулентність відсутня, швидкість змінюється плавно. Розкладаючи невідому залежність $v(\lambda)$ в ряд Тейлора, обмежуючись лінійним за λ доданком та враховуючи, що $v(0)=0$, можна записати, що $v(\lambda) = \text{const} \cdot \lambda$. Оскільки останнє співвідношення можна вважати справедливим аж до масштабів λ_0 , то на дисипативній ділянці масштабів справедливе співвідношення

$$v_\lambda \sim \frac{v_{\lambda_0}}{\lambda_0} \lambda \sim R^{1/2} \Delta u \frac{\lambda}{l} \quad (3.3.40)$$

(враховано формули (3.3.34)-(3.3.35)).

Таким чином, частотний спектр розвинутої турбулентності має вигляд, показаний на рис. 3.3.6.

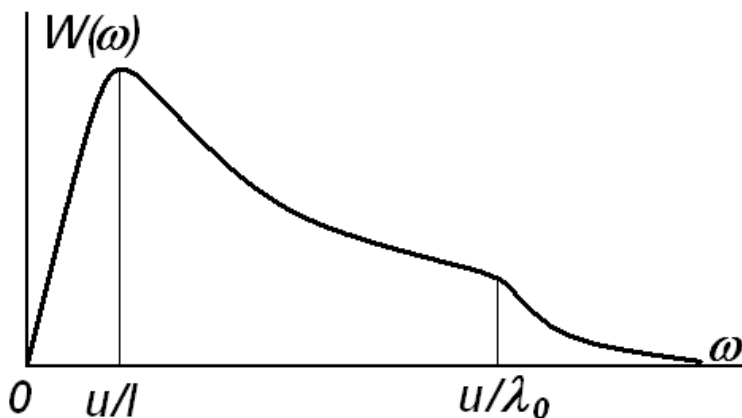


Рис. 3.3.6. Частотна залежність спектральної інтенсивності для розвинутої гідродинамічної турбулентності.

Слід зазначити, що ситуації, подібні до розглянутої вище, коли енергія надходить у систему на одних масштабах і поглинається на інших, реалізуються в багатьох системах, що характеризуються турбулентною динамікою. Спектри, що відповідають інерційному інтервалу масштабів, для таких систем теж прийнято називати колмогорівськими.

Контрольні питання до пункту 3.3.3

13. Що таке розвинута гідродинамічна турбулентність?

14. Чому дисипація в рідині істотна тільки на малих масштабах? Від чого залежать ці масштаби? Відповідь дайте на основі аналізу рівняння Нав'є – Стокса.
15. Чим, на Вашу думку, визначається ширина колмогорівського спектру для течії в трубі?
16. Які міркування покладені в основу теорії Обухова – Колмогорова?

Контрольні питання до пункту 3.3.3

17. Що виступає аналогом фазового простору для систем із розподіленими параметрами?
18. Що являє собою фазовий портрет дисипативної системи з розподіленими параметрами, яка здійснює турбулентний рух?
19. Чому в деяких випадках турбулентну гідродинамічну течію вдається описати невеликою кількістю рівнянь у повних похідних?
20. Який принцип лежить в основі експериментальних методів вимірювання розмірності вкладення?
21. В чому перевага методу Грассбергера – Прокаччіа порівняно з іншими методами вимірювання розмірності вкладення?
22. Оцініть фрактальну розмірність атратора Лоренца.