1. Система Реслера, що описує динаміку деякої модельної хімічної реакції, має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -(y+z); \qquad \frac{dy}{dt} = x + \frac{y}{5}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{5} + z(x-\mu).$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки і напрямки власних векторів у фазовому просторі.

Решив систуму уравнений для станионарного случая, правые части равны нулю, получим

$$X_0 = \frac{1}{10}(5\mu + \sqrt{-4+25\mu^2}); \; Y_0 = \frac{1}{2}(-5\mu - \sqrt{-4+25\mu^2}); \; Z_0 = \frac{1}{2}(5\mu + \sqrt{-4+25\mu^2})$$

$$X_0 = \frac{1}{10}(5\mu - \sqrt{-4+25\mu^2}); \; Y_0 = \frac{1}{2}(-5\mu + \sqrt{-4+25\mu^2}); \; Z_0 = \frac{1}{2}(5\mu - \sqrt{-4+25\mu^2})$$

Линеаризируем систему около этих точек, подставив X = X_0+x, ..., получим теперь уже только для переменной линейной части

$$\frac{dx}{dt} = -(y+z); \qquad \frac{dy}{dt} = x + \frac{y}{5};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{10}(5(2xz + 5x\mu - z\mu) + (5x+z)\sqrt{-4+25\mu^2}).$$

$$\frac{dx}{dt} = -(y+z); \qquad \frac{dy}{dt} = x + \frac{y}{5};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{10}(5(2xz + 5x\mu - z\mu) - (5x+z)\sqrt{-4+25\mu^2}).$$

Пренебрегая порядками выше первого (xz) получим матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0 \\ \frac{1}{2}(5\mu - \sqrt{-4+25\mu^2}) & 0 & -\frac{1}{10}(5\mu + \sqrt{-4+25\mu^2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0 \\ \frac{1}{2}(5\mu + \sqrt{-4+25\mu^2}) & 0 & -\frac{1}{10}(5\mu - \sqrt{-4+25\mu^2}) \end{pmatrix}$$

Можем записать характерестическое уравнение для собственных чисел.

$$-\frac{1}{5}\sqrt{-4+25\mu^2} + (-1 - \frac{12\mu}{5} + \frac{13}{15}\sqrt{-4+25\mu^2})s + (\frac{1}{5} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{-4+25\mu^2})s^2 - s^3 = 0$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{-4+25\mu^2} + (-1 - \frac{12\mu}{5} - \frac{13}{15}\sqrt{-4+25\mu^2})s + (\frac{1}{5} - \frac{\mu}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{-4+25\mu^2})s^2 - s^3 = 0$$

НЕ СОВЕТУЮ его решать - получается (для первого, после симплифая) что-то вроде

$$\left\{\left\{s\to\frac{1}{300}\left(-10\left(-2+5m+\sqrt{-4+25m^2}\right)+\left(10\,2^{2/3}\left(-150+25m^2+76\sqrt{-4+25m^2}+5m\left(-74+\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)\right)\Big/\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}+10\,2^{1/3}\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}\right)\right\},\right.$$

$$\left\{s\to\frac{1}{600}\left(-20\left(-2+5m+\sqrt{-4+25m^2}\right)-\left(10\,i\,2^{2/3}\left(-i+\sqrt{3}\right)\left(-150+25m^2+76\sqrt{-4+25m^2}+5m\left(-74+\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)\right)\Big/\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}+10\,i\,2^{1/3}\left(i+\sqrt{3}\right)\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}\right)\right\},$$

$$\left.\left\{s\to\frac{1}{600}\left(-20\left(-2+5m+\sqrt{-4+25m^2}\right)+\left(10\,i\,2^{2/3}\left(i+\sqrt{3}\right)\left(-150+25m^2+76\sqrt{-4+25m^2}+5m\left(-74+\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)\right)\Big/\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}-10\,2^{1/3}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(10-250m^3-895\sqrt{-4+25m^2}-15m\left(-3+\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(3+2\sqrt{-4+25m^2}\right)+3\sqrt{6}\sqrt{\left(61875m^4+125m^3\left(62698+99\sqrt{-4+25m^2}\right)-25m^2\left(-197103+62302\sqrt{-4+25m^2}\right)-2\left(159700+62649\sqrt{-4+25m^2}\right)-5m\left(15494+187699\sqrt{-4+25m^2}\right)\right)}\right)^{1/3}\right)\right\}\right\}$$

Так как мы не можем найти собственные числа, то и собственные вектора тоже. Разве что можно записать, как их искать - подставить собственные числа в начальную (линеаризированную) систему, откуда и получить два соотношения между x,y,z. Они и дадут определить собственный вектор.

Так как никаких условий на мю наложить я не могу - не дано ничего - то и решать дальше не вижу смысла. Если что - отстаивать точку зрения о нерешаемости данного кубического уравнения. Больше ничего сказать не могу ;(

2. Динамічна система описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = y\,; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha\left(1-\gamma x^2\right)y - \omega_0^2 x\,.$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки і напрямки власних векторів у фазовому просторі.

Розвязок

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dx}{dt} = 0$ та $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ \alpha\left(1-\gamma x^2\right)y - \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ -\omega_0^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0)$ - стаціонарна точка.

Лінеаризуємо систему в околі стаціонарної точки: $\alpha\left(1-\gamma x^2\right)y - \omega_0^2 x \approx -\omega_0^2 x + \alpha y$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x + \alpha y \end{cases}$$

запишемо у матричній формі $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Показники Ляпунова є власними значеннями матриці А, розвяжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$. Тут σ – показник Ляпунова, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det\left(A - \sigma E\right) = \begin{vmatrix} -\sigma & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha - \sigma \end{vmatrix} = 0$

Е – одинична матриця.

$\sigma^2 - \alpha\sigma + \omega_0^2 = 0$ Розвязок: $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right]$

Власні вектори задовольняють системі:

$\left(A - \sigma_{1,2}E\right)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 0$ або $\begin{cases} -\sigma_{1,2}k + l = 0 \\ -\omega_0^2 k + \left(\alpha - \sigma_{1,2}\right)l = 0 \end{cases}$ Насправді ці два рівняння є повністю аналогічними, тому залишимо лише перше, з нього:

$l = \sigma_{1,2}k$ Тоді власні вектори $k\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_{1,2} \end{pmatrix}$ Для простоти $k = 1$.

Тоді остаточно запишемо показники Ляпунова та відповідні їм вектори:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \end{pmatrix}$$

3. Динамічна система описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha\left(1 - \gamma y^2\right)y - \omega_0^2 x.$$

Знайти показники Ляпунова в околі стаціонарної точки і напрямки власних векторів у фазовому просторі.

Розвязання

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dx}{dt} = 0$ та $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ \alpha\left(1 - \gamma y^2\right)y - \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ -\omega_0^2 x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ - стаціонарна точка.

Лінеаризуємо систему в околі стаціонарної точки: $\alpha\left(1 - \gamma y^2\right)y - \omega_0^2 x \approx -\omega_0^2 x + \alpha y$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x + \alpha y \end{cases}$$

запишемо у матричній формі $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Показники Ляпунова є власними значеннями матриці А, розвяжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$. Тут σ – показник Ляпунова, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det(A - \sigma E) = \left|\begin{pmatrix} -\sigma & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha - \sigma \end{pmatrix}\right| = 0$

Е – одинична матриця.

$\sigma^2 - \alpha\sigma + \omega_0^2 = 0$ Розвязок: $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right]$

Власні вектори задовольняють системі:

$\left(A - \sigma_{1,2}E\right)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 0$ або $\begin{cases} -\sigma_{1,2}k + l = 0 \\ -\omega_0^2 k + \left(\alpha - \sigma_{1,2}\right)l = 0 \end{cases}$ Насправді ці два рівняння є повністю аналогічними, тому залишимо лише перше, з нього:

$l = \sigma_{1,2}k$ Тоді власні вектори $k\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_{1,2} \end{pmatrix}$ Для простоти $k = 1$.

Тоді остаточно запишемо показники Ляпунова та відповідні їм вектори:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left[\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\right] \end{pmatrix}$$

4. Система Лоренца, що описує конвекцію в шарі рідини, який підігрівається знизу, має вигляд:

$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x); \qquad \frac{dy}{dt}=rx-y-xz; \qquad \frac{dz}{dt}=xy-bz.$$

Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в околі точки {0, 0, 0}. Коли ця точка буде стійкою?

Розвязання

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dx}{dt}=0$ та $\frac{dy}{dt}=0, \frac{dz}{dt}=0$.

$$\begin{cases}\sigma(y-x)=0\\ rx-y-xz=0\\ xy-bz=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} \qquad \vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$$ - стаціонарна точка.

Лінеаризуємо систему в околі стаціонарної точки, і запишемо у матричній формі

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Показники Ляпунова є дійсною частиною власних значень матриці А, розвяжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix}$. Тут λ – власні числа, $\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для власних чисел: $\det(A-\lambda E)=\left|\begin{pmatrix}-\sigma-\lambda & \sigma & 0\\ r & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -b-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$

Е – одинична матриця.

$(\lambda+b)(\lambda^2+\lambda(1+\sigma)-r\sigma)=0$ Розвязок: $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-1-\sigma\pm\sqrt{1+\sigma(\sigma+4r-2)}\right]$, $\lambda_3=-b$

Власні вектори задовольняють системі:

$(A-\lambda_{1,2}E)\begin{pmatrix}k\\l\\m\end{pmatrix}=0$ або $\begin{cases}-(\lambda_{1,2}+\sigma)k+\sigma l=0\\ rk-(1+\lambda_{1,2})l=0\\ m=0\end{cases}$ Насправді перші два рівняння є лінійно залежними, тому залишимо лише перше, з них: $l=\frac{\lambda_{1,2}+\sigma}{\sigma}k$. Тоді власні вектори: $k\begin{pmatrix}1\\ \frac{\lambda_{1,2}+\sigma}{\sigma}\\ 0\end{pmatrix}$ Для простоти $k=1$.

m=0, незалежно від λ_3, тому його не враховуватимемо, бо перші два рівняння є лінійно незалежними незалежно від нього.

Тоді остаточно запишемо показники Ляпунова та відповідні їм вектори:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-1-\sigma+\sqrt{1+\sigma(\sigma+4r-2)}\right] \qquad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\lambda_1+\sigma}{\sigma}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-1-\sigma-\sqrt{1+\sigma(\sigma+4r-2)}\right] \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_2+\sigma}{\sigma} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дослідимо точку (0,0,0) на стійкість. Щоб вона була стійкою необхідно, щоб усі показники Ляпунова були менші нуля, тоді одразу модна сказати, що b>0. Що до інших двох, має виконуватись система нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\sigma > \sqrt{1+\sigma(\sigma+4r-2)} \\ 1+\sigma > -\sqrt{1+\sigma(\sigma+4r-2)} \\ 1+\sigma(\sigma+4r-2) > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+\sigma > 0 \\ 1+\sigma(\sigma+4r-2) < 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} r > 1 \\ \sigma > 0 \\ b > 0 \\ r > \dfrac{1}{4\sigma}(2\sigma-1-\sigma^2) \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < \sigma < 0 \\ b > 0 \\ 1 > r > \dfrac{1}{4\sigma}(2\sigma-1-\sigma^2) \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} \sigma > -1 \\ r < \dfrac{1}{4\sigma}(2\sigma-1-\sigma^2) \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

5. Система Лоренца, що описує конвекцію в шарі рідини, який підігрівається знизу, має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x); \qquad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz; \qquad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в околі стаціонарних точок, відмінних від точки $\{0, 0, 0\}$. Коли такі точки існуватимуть? Коли вони будуть стійкими?

<u>Розв'язок:</u>

Знайдемо стаціонарні розв'язки:

$$\begin{cases} 0 = \sigma(y - x) \\ 0 = rx - y - xz \\ 0 = xy - bz \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x \\ 0 = rx - x - x^3 / b \\ z = xy / b = x^2 / b \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{b(\gamma - 1)} \\ x_3 = -\sqrt{b(\gamma - 1)} \end{cases}; \quad \begin{cases} (0,0,0) \\ \left(\sqrt{b(\gamma - 1)}, \sqrt{b(\gamma - 1)}, \gamma - 1\right) \\ \left(-\sqrt{b(\gamma - 1)}, -\sqrt{b(\gamma - 1)}, \gamma - 1\right) \end{cases}.$$

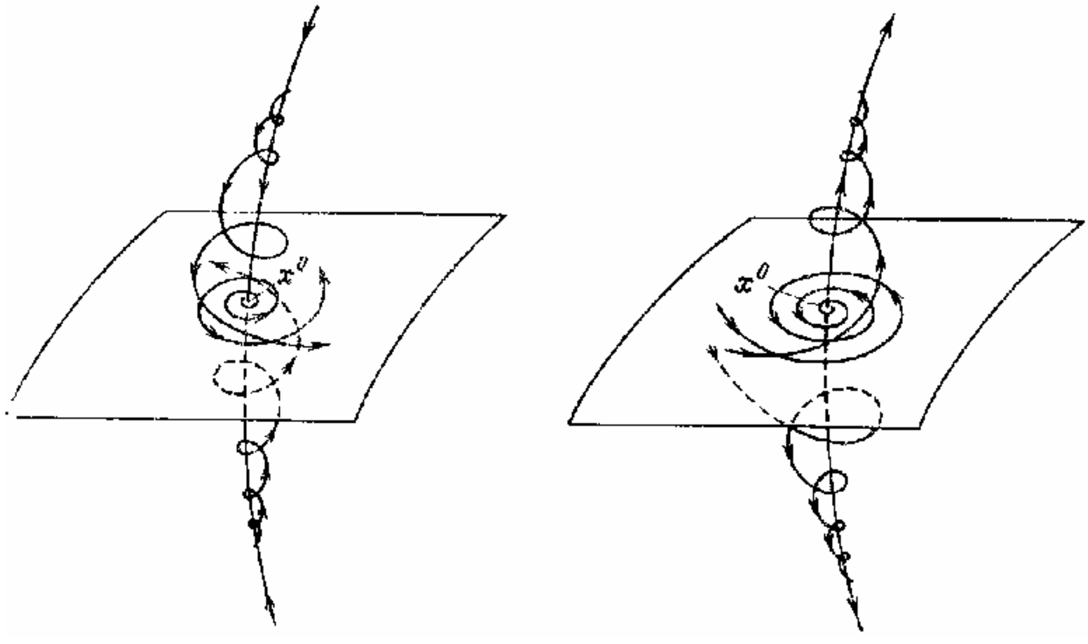
Знайдемо показники Ляпунова біля точки $\left(\sqrt{b(\gamma - 1)}, \sqrt{b(\gamma - 1)}, \gamma - 1\right)$. Для цього розкладемо систему рівнянь в ряд в околі цієї стаціонарної точки $x_i(t) = x_{i0} + \Delta x_i(t)$:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = \sigma(\Delta y - \Delta x) \\ \Delta\dot{y} = (r - z_0)\Delta x - \Delta y - x_0 \Delta z \\ \Delta\dot{z} = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y - b\Delta z \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(\gamma - 1)} \\ \sqrt{b(\gamma - 1)} & \sqrt{b(\gamma - 1)} & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідси знаходимо характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + \gamma)\lambda + 2b\sigma(\gamma - 1) = 0$$

Mathematica 5.0 видає аналітичний розв'язок цього рівняння розміром аж на два екрани. З нього можна зробити висновок, що ми маємо один дійсний корінь та два комплексно спряжені – тобто маємо стаціонарну точку типу сідло – фокус.



Стаціонарні точки будуть стійкими при умові:

$$\begin{cases} \sigma > b + 1 \\ 1 < r < r^* = \dfrac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)} \end{cases}$$

6. Система рівнянь, що описує генератор шуму КПР, має вигляд:

$$\frac{di}{d\tau} = i\left[\alpha - \gamma u^2\right] - v - u\,; \qquad \frac{du}{d\tau} = i\,; \qquad \varepsilon\frac{dv}{d\tau} = i - \beta v\left[(v - v_0)^2 + \delta\right].$$

Вважаючи параметри α, ε, та γ малими, знайти показники Ляпунова в околі точки {0, 0, 0}.

Попробуем линеаризировать систему, "отбросив" то, что мешает - высшие порядки малости. В первом уравнении отбросим $i*u^2$, в последнем v^2 и v^3, получим

$$\frac{di}{d\tau} = \alpha i - v - u\,; \qquad \frac{du}{d\tau} = i\,; \qquad \frac{dv}{d\tau} = i/\varepsilon - v\beta(\delta + {v_0}^2)/\varepsilon\,.$$

Имеем линейную систему, для которой можем записать матрицу:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\varepsilon & 0 & -\beta(\delta + {v_0}^2)/\varepsilon \end{pmatrix};$$

Можем записать для вычисления собственных чисел, расписав детерминант, получим характерестическое уравнение 3 степени для нахождения корней

$$\det\begin{pmatrix} \alpha - x & -1 & -1 \\ 1 & -x & 0 \\ 1/\varepsilon & 0 & -\beta(\delta + {v_0}^2)/\varepsilon - x \end{pmatrix} = -x/\varepsilon + (-\beta(\delta + {v_0}^2)/\varepsilon - x)(1 - \alpha x + x^2) = 0$$

Обозначив v = $-\beta(\delta + {v_0}^2)$ в Математике получим

$$\begin{aligned}&\{\{x \to \frac{1}{6e}(2(ae+v) + (2\,2^{1/3}((-3+a^2)e^2+v^2-e(3+av)))/(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3-3ae(3e+3e^2+v^2) + \\ &\quad \sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3+(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3} + \\ &\quad 2^{2/3}(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3-3ae(3e+3e^2+v^2)+\sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3 +} \\ &\quad \overline{(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{x \to \frac{1}{12e}(4(ae+v) - (2\,i\,2^{1/3}(-i+\sqrt{3})((-3+a^2)e^2+v^2-e(3+av)))/(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3- \\ &\quad 3ae(3e+3e^2+v^2)+\sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3+(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3} + \\ &\quad i\,2^{2/3}(i+\sqrt{3})(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3-3ae(3e+3e^2+v^2) + \\ &\quad \sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3+(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{x \to \frac{1}{12e}(4(ae+v) + (2\,i\,2^{1/3}(i+\sqrt{3})((-3+a^2)e^2+v^2-e(3+av)))/(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3- \\ &\quad 3ae(3e+3e^2+v^2)+\sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3+(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3} - \\ &\quad 2^{2/3}(1+i\sqrt{3})(2a^3e^3-9ev+18e^2v-3a^2e^2v+2v^3-3ae(3e+3e^2+v^2) + \\ &\quad \sqrt{(4(-(ae+v)^2+3e(1+e+av))^3+(2a^3e^3-3a^2e^2v-3ae(3e+3e^2+v^2)+v(-9e+18e^2+2v^2))^2)})^{1/3})\}\}\end{aligned}$$

Это бред, потому попробуем упростить. Например так - епсилон мало, пренебрегаем x по отношению к вэ делить на эпсилон, потому можно записать уравнение 2 степени:

$$-x - \beta(\delta + {v_0}^2)(1 - \alpha x + x^2) = 0$$

Сразу же находим корни:

$$\{\{x \to \frac{-1 + a\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2) + \sqrt{-4\,\mathrm{beta}^2\,(\mathrm{delta} + v^2)^2 + (-1 + a\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2))^2}}{2\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2)}\},$$

$$\{x \to -\frac{1 - a\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2) + \sqrt{-4\,\mathrm{beta}^2\,(\mathrm{delta} + v^2)^2 + (-1 + a\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2))^2}}{2\,\mathrm{beta}\,(\mathrm{delta} + v^2)}\}\}$$

При учете малых добавок эти два корня, по словам Анисимова, принципиально не изменятся, но появится еще и третий, про который я ничего не могу сказать ;(

7. Система Вольтерра для чисельності популяцій хижак-здобич у випадку обмежених харчових ресурсів має вигляд

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \qquad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_2 N_1 N_2$$

(усі коефіцієнти додатні). Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках.

Розв'язок:

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dN_1}{dt} = 0$ та $\frac{dN_2}{dt} = 0$.

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2 = 0 \\ \varepsilon_2 N_2 - \gamma_2 N_1 N_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1(-\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2) = 0 \\ N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) = 0 \end{cases}$$

Першим розв'язком є $N_1 = 0$ при цьому з другого рівняння $N_2 = 0$(оскільки $\varepsilon_2 > 0$. Отримали стаціонарну точку $(0,0)$.

Другим варіантом є $N_2 = \varepsilon_1 / \gamma_1$, тоді:

$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1 = 0$ звідси $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ отже стаціонарна точка $\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$.

А) Стаціонарна точка $(0,0)$, в її околі $N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$ - малі відхилення. Лінеаризуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -\varepsilon_1 n_1 + \gamma_1 n_1 n_2 \approx -\varepsilon_1 n_1 \\ \dot{n}_2 = \varepsilon_2 n_2 - \gamma_2 n_1 n_2 \approx \varepsilon_2 n_2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Показники Ляпунова є дійсною частиною власних значень матриці А, розв'яжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$. Тут σ – показник Ляпунова, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det(A - \sigma E) = \left|\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 - \sigma & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \sigma \end{pmatrix}\right| = 0$

Е – одинична матриця. Показниками Ляпунова є: $\sigma_1 = -\varepsilon_1$ та $\sigma_2 = \varepsilon_2$

Власні вектори задовольняють системі: $(A - \sigma_{1,2} E)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 0$

Для $\sigma_1 = -\varepsilon_1$ маємо $\begin{cases} 0k + 0l = 0 \\ 0k + l(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 0 \end{cases}$, тобто $l = 0$. Власний вектор (при $k = 1$) $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Для $\sigma_2 = \varepsilon_2$ маємо $\begin{cases} ((-\varepsilon_2 - \varepsilon_1))k + 0l = 0 \\ 0k + 0l = 0 \end{cases}$, тобто $k = 0$. Власний вектор (при $l = 1$) $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Для стійкості необхідні від'ємні показники Ляпунова. Напрямок ξ_1 стійкий , ξ_2 нестійкий, тобто в цілому стаціонарна точка нестійка.

Б) Стаціонарна точка $\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$, в її околі $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + n_1$, $N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + n_2$ - малі відхилення. Лінеаризуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -\varepsilon_1\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + n_1\right] + \gamma_1\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + n_1\right]\left[\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + n_2\right] \approx \varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} n_2 \\ \dot{n}_2 = \varepsilon_2\left[\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + n_2\right] - \gamma_2\left[\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + n_1\right]\left[\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + n_2\right] \approx -\varepsilon_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} n_1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \\ -\varepsilon_1 \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Рівняння для знаходження власних значень: $\det(A - \sigma E) = \left\| \begin{pmatrix} -\sigma & \varepsilon_2 \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \\ -\varepsilon_1 \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} & -\sigma \end{pmatrix} \right\| = 0$

$\sigma^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$. Розв'язками є:

$\sigma_{1,2} = \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \pm i \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$

Власні вектори задовольняють системі: $(A - \sigma_{1,2} E) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

Запишемо лише перше рівняння, яке містить усю інформацію про власні вектори:

$-\sigma_{1,2} a + \varepsilon_2 \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} b = 0$ для простоти $a = 1$, тоді:

$b = \dfrac{\sigma_{1,2}}{\varepsilon_2 \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}}$ остаточно отримали:

$$\sigma_1 = -i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = i\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \end{pmatrix}$$

Тобто показники Ляпунова $\mathrm{Re}(\sigma_{1,2}) = 0$. Тоді стаціонарна точка $\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right)$ в напрямку ξ_2 та ξ_1 є стійкою при довільних значеннях параметрів системи. Оскільки показники Ляпунова рівні нулю, ця точка відповідає точці типу центр на фазовій площині.

8. Система Вольтерра для чисельності популяцій хижак-здобич у випадку обмежених харчових ресурсів має вигляд

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \qquad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - (\varepsilon_2/K)N_2^2 - \gamma_2 N_1 N_2$$

(усі коефіцієнти додатні). Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точках.

Розв'язання

<= OR <

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dN_1}{dt} = 0$ та $\frac{dN_2}{dt} = 0$.

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2 = 0 \\ \varepsilon_2 N_2 - (\varepsilon_2/K)N_2^2 - \gamma_2 N_1 N_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1(-\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2) = 0 \\ N_2(\varepsilon_2 - (\varepsilon_2/K)N_2 - \gamma_2 N_1) = 0 \end{cases}$$

Першим розв'язком є $N_1 = 0$ при цьому з другого рівняння або $N_2 = 0$, або $\varepsilon_2 - (\varepsilon_2/K)N_2 = 0$, тобто $N_2 = K$. Отримали дві стаціонарні точки $(0,0)$ та $(0,K)$.

Другим варіантом є $N_2 = \varepsilon_1/\gamma_1$, тоді:

$$\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1} - \gamma_2 N_1 = 0 \qquad N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) \qquad \text{отже стаціонарна точка } \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right), \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right).$$

А) Стаціонарна точка $(0,0)$, в її околі $N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$ - малі відхилення. Лінеаризуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -\varepsilon_1 n_1 + \gamma_1 n_1 n_2 \approx -\varepsilon_1 n_1 \\ \dot{n}_2 = \varepsilon_2 n_2 - (\varepsilon_2/K)n_2^2 - \gamma_2 n_1 n_2 \approx \varepsilon_2 n_2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Показники Ляпунова є власними значеннями матриці А, розвяжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$. Тут σ – показник Ляпунова, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det(A - \sigma E) = \left|\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 - \sigma & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \sigma \end{pmatrix}\right| = 0$

Е – одинична матриця. Показниками Ляпунова є: $\sigma_1 = -\varepsilon_1$ та $\sigma_2 = \varepsilon_2$

Власні вектори задовольняють системі: $(A - \sigma_{1,2}E)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 0$

Для $\sigma_1 = -\varepsilon_1$ маємо $\begin{cases} 0k + 0l = 0 \\ 0k + l(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 0 \end{cases}$, тобто $l = 0$. Власний вектор (при $k = 1$) $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Для $\sigma_2 = \varepsilon_2$ маємо $\begin{cases} ((-\varepsilon_2 - \varepsilon_1))k + 0l = 0 \\ 0k + 0l = 0 \end{cases}$, тобто $k = 0$. Власний вектор (при $l = 1$) $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Для стійкості необхідні від'ємні показники Ляпунова. Напрямок ξ_1 стійкий , ξ_2 нестійкий, тобто в цілому стаціонарна точка нестійка.

Б) Стаціонарна точка $(0,K)$, в її околі $N_1 = n_1$, $N_2 = K + n_2$ - малі відхилення. Лінеаризуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -\varepsilon_1 n_1 + \gamma_1 n_1 (K + n_2) \approx (K\gamma_1 - \varepsilon_1)n_1 \\ \dot{n}_2 = \varepsilon_2 (K + n_2) - (\varepsilon_2/K)(K^2 + 2Kn_2 + n_2^2) - \gamma_2 n_1 (K + n_2) \approx -K\gamma_2 n_1 - \varepsilon_2 n_2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\gamma_1 - \varepsilon_1 & 0 \\ -K\gamma_2 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det(A-\sigma E)=\left|\begin{pmatrix} K\gamma_1-\varepsilon_1-\sigma & 0 \\ -K\gamma_2 & -\varepsilon_2-\sigma \end{pmatrix}\right|=0$

E – одинична матриця. Показниками Ляпунова є: $\sigma_1 = K\gamma_1-\varepsilon_1$ та $\sigma_2=-\varepsilon_2$

$$\left(A-\sigma_{1,2}E\right)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}=0$$

Для σ_1 маємо $\begin{cases} 0k+0l=0 \\ -K\gamma_2 k + l(-\varepsilon_2-K\gamma_1+\varepsilon_1)=0 \end{cases}$, нехай $l=1$. Власний вектор $\xi_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1+K\gamma_1}{K\gamma_2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для σ_2 маємо $\begin{cases} (K\gamma_1-\varepsilon_1+\varepsilon_2)k+0l=0 \\ -K\gamma_2 k+0l=0 \end{cases}$, отже $k=0$. Нехай $l=1$. $\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Напрямок ξ_2 стійкий. Для стійкості ξ_1 необхідно виконання умови $\varepsilon_1 > K\gamma_1$.

Отже при $\varepsilon_1 > K\gamma_1$ стаціонарна точка $(0,K)$ буде стійкою.

В) Стаціонарна точка $\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right),\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$, в її околі $N_1=\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)+n_1$, $N_2=\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}+n_2$ - малі відхилення. Лінеаризуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{n}_1=-\varepsilon_1\left[\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)+n_1\right]+\gamma_1\left[\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)+n_1\right]\left[\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}+n_2\right]\approx\varepsilon_2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)n_2 \\ \dot{n}_2=\varepsilon_2\left[\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}+n_2\right]-(\varepsilon_2/K)\left[\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)^2+2\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}n_2+n_2^2\right]-\gamma_2\left[\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)+n_1\right]\left[\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}+n_2\right]\approx-\varepsilon_1\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}n_1-\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}n_2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) \\ -\varepsilon_1\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Рівняння для знаходження показників Ляпунова: $\det(A-\sigma E)=\left|\begin{pmatrix} -\sigma & \varepsilon_2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) \\ -\varepsilon_1\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} & -\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}-\sigma \end{pmatrix}\right|=0$

$\sigma^2+\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\sigma+\varepsilon_1\varepsilon_2\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)=0$. Розв'язками є:

$$\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\right)^2-4\varepsilon_1\varepsilon_2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right]=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\left[-1\pm\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right]$$

Власні вектори задовольняють системі: $\left(A-\sigma_{1,2}E\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$

Запишемо лише перше рівняння, яке містить усю інформацію про власні вектори:

$-\sigma_{1,2}a+\varepsilon_2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)b=0$ для простоти $a=1$, тоді:

$b=\dfrac{\sigma_{1,2}}{\varepsilon_2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}$ остаточно отримали:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\left[-1+\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right] \qquad \xi_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1\gamma_2}{K-\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}\left[-1+\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right]}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{K\gamma_1}\left[-1-\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right] \qquad \xi_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1\gamma_2}{K-\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}\left[-1-\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)}\right]}\right)$$

Стаціонарна точка $\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right), \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ в напрямку ξ_2 є стійкою при довільних значеннях параметрів системи, щоб вона була стійкою необхідно $\sigma_1 < 0$. Можливі два варіанти виконання цієї умови.

Перший – дискримінант від’ємний, тобто показник містить дійсну від’ємну та комплексне частину. Для цього необхідно, щоб $\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) > \frac{1}{4}$.

Другий – показник містить лише дійсну від’ємну частину, для цього:

$$\sqrt{1-4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right)} < 1 \qquad 4\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) > 0 \qquad 1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1} > 0 \qquad \varepsilon_1 < K\gamma_1$$

Дана умова є якраз протилежною умові стійкості стаціонарної точки $(0, K)$.

Таким чином Стаціонарна точка $\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right), \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ є стійкою, якщо параметри системи задовольняють будь-яку з двох умов: або $\varepsilon_1 < K\gamma_1$, або $\frac{(K\gamma_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{K\gamma_1}\right) > \frac{1}{4}$.

9. Взаємні перетворення проміжних продуктів хімічної реакції Лотки, що мають концентрації X та Y, описуються системою кінетичних рівнянь:

$$\dot{X} = k_0 - k_1 XY\ , \qquad \dot{Y} = k_1 XY - k_2 Y\ .$$

Знайти показники Ляпунова і напрямки власних векторів у фазовому просторі в стаціонарних точок. Коли ці точки будуть стійкими?

Розвязання

Знайдемо стаціонарну точку системи, для цієї точки $\frac{dX}{dt} = 0$ та $\frac{dY}{dt} = 0$.

$$\begin{cases} k_o - k_1 XY = 0 \\ k_1 XY - k_2 Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} XY = k_0 / k_1 \\ Y = k_0 / k_2 \end{cases} \quad \begin{cases} X = k_2 / k_1 \\ Y = k_0 / k_2 \end{cases}$$

$\vec{r}_0 = (X_0, Y_0) = (k_2 / k_1, k_0 / k_2)$ - стаціонарна точка.

Лінеаризуємо систему в околі стаціонарної точки: $k_1 XY = k_1 (X_0 + x)(Y_0 + y) \approx k_0 + x k_0 k_1 / k_2 + y k_2$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \dfrac{k_0 k_1}{k_2} - y k_2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x \dfrac{k_0 k_1}{k_2} \end{cases}$$

запишемо у матричній формі $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_0 k_1}{k_2} & -k_2 \\ \frac{k_0 k_1}{k_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Показники Ляпунова є дійсними частинами власних значень матриці А, розв’яжемо спектральну задачу для матриці А: $A\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$. Тут σ – власні значення, $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ - власний вектор матриці А.

Рівняння для знаходження власних чисел: $\det\left(A - \sigma E\right) = \left|\begin{pmatrix} -\frac{k_0 k_1}{k_2} - \sigma & -k_2 \\ \frac{k_0 k_1}{k_2} & -\sigma \end{pmatrix}\right| = 0$

E – одинична матриця.

$\sigma^2 + \frac{k_0 k_1}{k_2}\sigma + k_1 k_0 = 0$ Розвязок: $\sigma_{1,2} = \frac{k_0 k_1}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4 k_1 k_0}$

Власні вектори задовольняють системі:

$\left(A - \sigma_{1,2} E\right)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = 0$ або $\begin{cases} (\frac{k_0 k_1}{k_2} + \sigma_{1,2}) k + k_2 l = 0 \\ \frac{k_0 k_1}{k_2} k - \sigma_{1,2} l = 0 \end{cases}$ Насправді ці два рівняння є лінійно залежними, тому залишимо лише друге, з нього:

$k = \frac{\sigma_{1,2} k_2}{k_0 k_1} l$ Тоді власні вектори $l\begin{pmatrix} \frac{\sigma_{1,2} k_2}{k_0 k_1} \\ 1 \end{pmatrix}$ Для простоти $l = 1$.

Тоді остаточно запишемо показники Ляпунова та відповідні їм вектори:

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{k_0 k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4 k_1 k_0}\right] \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 - \frac{4 k_2^{\,2}}{k_1 k_0}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \mathrm{Re}\left[\frac{k_0 k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4k_1 k_0}\right] \qquad\qquad \xi_2 = \left(\begin{array}{c} 1 - \sqrt{1 - \dfrac{4k_2^{\ 2}}{k_1 k_0}} \\ 1 \end{array}\right)$$

Стаціонарна точка буде стійкою, якщо від'ємними є усі показники Ляпунова, тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{k_0 k_1}{k_2} < -\sqrt{\left(\dfrac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4k_1 k_0} \\ \dfrac{k_0 k_1}{k_2} < \sqrt{\left(\dfrac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4k_1 k_0} \\ \left(\dfrac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4k_1 k_0 > 0 \end{cases}$$

, це можливо тільки за умови, що $\frac{k_0 k_1}{k_2} < 0$, тоді друга нерівність виконується автоматично, а з першої матимемо: (якщо $\frac{k_0 k_1}{k_2} \equiv -t, t > 0$) $t^2 > t^2 - 4k_1 k_0 \Rightarrow k_1 k_0 > 0$,

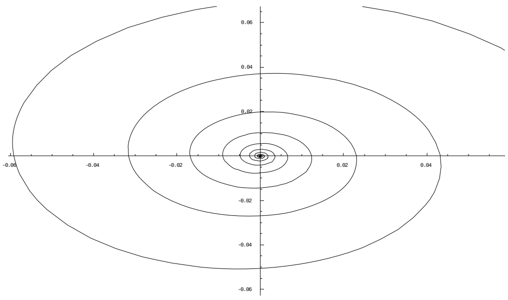
отже мають одночасно виконуватись умови: $\begin{cases} \dfrac{k_0 k_1}{k_2} < 0 \\ k_1 k_0 > 0 \\ k_1 k_0 > 4k_2^{\ 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 < 0 \\ k_1 k_0 > 0 \\ k_1 k_0 > 4k_2^{\ 2} \end{cases}$.

Для випадку, коли $\left(\frac{k_0 k_1}{k_2}\right)^2 - 4k_1 k_0 < 0$, має виконуватись нерівність $\frac{k_0 k_1}{k_2} < 0$.

10. Для лінійного дисипативного осцилятора побудувати відображення Пуанкаре і дослідити його властивості в залежності від параметра дисипації.

Розв'язок:

Розглянемо фазовий портрет лінійного дисипативного осцилятора:



В якості гіперповерхні, що перетинає фазовий портрет беремо додатній напрям вісі OX. Для рівняння вигляду:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

кожен наступний перетин з віссю відповідає зменшенню амплітуді у $e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}}$ разів. Отже, маємо точкове відображення вигляду:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \implies x_{n+1} = x_n e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Стаціонарна точка: $x^* = x^* e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}}$.

$\varphi'(x_n) = e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}} = const$, при $\varphi'(x^*) < 1$ стаціонарна точка є стійкою.

В залежності від знаку параметра дисипації δ ми отримаємо спіраль що скручується або розкручується. Ми маємо одну стійку стаціонарну точку $x^* = 0$ при $\delta > 0$. При $\delta = 0$ ми маємо одну єдину точку $x^* = x_0$, що є стійкою. При $\delta < 0$ стаціонарна точка $x^* = 0$ нестійка.

11. Відображення Ено має вигляд:

$$\bar{x} = y + 1 - ax^2; \qquad \bar{y} = bx.$$

Знайти нерухомі точки цього відображення. Коли ці точки будуть стійкими?

Развязываем систему для нахождения неподвижных точек, подставляя ихк и игрик со штрихом равны просто икс и игрик:

$x = bx + 1 - ax^2$ (1)

$y = bx$ (2)

Пары корней:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a} \qquad y_1 = b\frac{-1 - \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a} \qquad y_2 = b\frac{-1 + \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a}$$

Для изучения устойчивости ищем будем искать собственные числа матрицы s производных в этих точках. Если они по модулю больше единицы – неустойчива система, меньше – устойчива

$$\begin{pmatrix} \frac{d\bar{y}}{dx} & \frac{d\bar{y}}{dy} \\ \frac{d\bar{x}}{dx} & \frac{d\bar{x}}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -2ax & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} b-s & 0 \\ -2ax & 1-s \end{pmatrix} = (b-s)(1-s) + 2ax = b + s^2 - (1+b)s + 2ax$$

Для стационарных точек 1 и 2

$$b + s^2 - (1+b)s + 2ax_1 = b + s^2 - (1+b)s + 2a\frac{-1 - \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a} =$$

$$= s^2 - (1+b)s + (-\sqrt{4a + (b-1)^2} + (b-1)) + b$$

$$b + s^2 - (1+b)s + 2ax_2 = b + s^2 - (1+b)s + 2a\frac{-1 + \sqrt{4a + (b-1)^2} + b}{2a} =$$

$$= s^2 - (1+b)s + (\sqrt{4a + (b-1)^2} + (b-1)) + b$$

Решаем квадратные уравнения для первой точки

$$s^2 - (1+b)s + (-\sqrt{4a + (b-1)^2} + (b-1)) + b = 0$$

$$s_1 = \frac{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4((-\sqrt{4a + (b-1)^2} + (b-1)) + b)}}{2}$$

$$s_2 = \frac{(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 - 4((-\sqrt{4a + (b-1)^2} + (b-1)) + b)}}{2}$$

Полученные величины – собственные числа, которые, для устойчивости системы, должны быть меньше единицы по модулю.

Для второй точки – все то же самое, перед корнем из $\sqrt{4a + (b-1)^2}$ только надо всюду поменять знак.

$$\det\begin{pmatrix} \frac{d\bar{y}}{dx} & \frac{d\bar{y}}{dy} \\ \frac{d\bar{x}}{dx} & \frac{d\bar{x}}{dy} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b & 0 \\ -2ax & 1 \end{pmatrix} = b + 2ax$$

Для точек 1 и 2 детерминант равен

$$b + 2ax_1 = b + 2a\frac{-1-\sqrt{4a+(b-1)^2}+b}{2a} = b + (-1-\sqrt{4a+(b-1)^2}+b) = 2b-1-\sqrt{4a+(b-1)^2}$$

$$b + 2ax_2 = b + 2a\frac{-1+\sqrt{4a+(b-1)^2}+b}{2a} = b + (-1+\sqrt{4a+(b-1)^2}+b) = 2b-1+\sqrt{4a+(b-1)^2}$$

Условия устойчивости для этих точек такие -

$$2(b-1)-\sqrt{4a+(b-1)^2} < 0$$

$$2(b-1)+\sqrt{4a+(b-1)^2} < 0$$

Например, первое неравенство можно попробовать решить (при b-1>0) как-то так -

$$4(b-1)^2 < 4a + (b-1)^2$$

$$3(b-1)^2 < 4a$$

При (b-1)<0

Для первой:

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_1 = 1 + \sqrt{4a + (b-1)^2} > 1$$ для x.

Сразу же можем сказать: так как для икса данная производная ВСЕГДА больше 1ы, то по x точка ВСЕГДА неустойчива, а по y и анализировать не будем.

Для второй:

$\left.\frac{dX}{dx}\right|_2 = 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2} < 1$ для x и $\left.\frac{dY}{dy}\right|_2 = 1 - \sqrt{4a + (b-1)^2} < 1$ для y.

Так что по x вторая точка ВСЕГДА устойчива, а что до игрик - то для устойчивости нужно чтоб b умножить на эту скобку было меньше 1ницы. Соответственно, все, что мы можем сказать - первая точка неустойчива, вторая устойчива при таких параметрах, чтоб выполнялось это условие.

Искать, при каких именно параметрах a и b это будет выполняться - не считаю нужным в данной задаче.

12. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку [0, 1] має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x(1-x), \qquad 0 \le \mu \le 4.$$

Знайти стаціонарні точки цього відображення та дослідити їхню стійкість.

Розв'язок:

Кількість стаціонарних точок, взагалі кажучи, рівна кількості коренів рівняння $x = \mu x(1-x)$.

$\mu x^2 - \mu x + x = 0$. Очевидно, що рівняння має два корені : $x = 0$ та $x = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$.

Отже маємо дві стаціонарні точки данного відображення: $x = 0$ та $x = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$.

Будемо досліджувати стаціонарні точки на стійкість. Якщо $\left|\left(\dfrac{d\bar{x}}{dx}\right)_{x=x^*}\right| > 1$, точка x^* не стійка, і навпаки.

1) $x^* = 0$. $\left|\left(\dfrac{d\bar{x}}{dx}\right)_{x=0}\right| = |\mu|$, тобто для $\mu < 1$ точка $x = 0$ стійка, для всіх інших значень не стійка.

2) $x^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, $\left|\left(\dfrac{d\bar{x}}{dx}\right)_{x=\frac{\mu-1}{\mu}}\right| = |2 - \mu|$. Тобто для $\mu < 3$ точка стійка, для всіх інших значень μ - ні.

13. Однопараметричне квадратичне відображення на відрізку [0, 1] має вигляд:

$$\bar{x} = \mu x(1-x), \qquad 0 \le \mu \le 4 .$$

Дослідити умови існування циклу кратності 2 цього відображення.

Розв'язання

Точкове відображення задається виразом $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Існування циклу кратності m означає виконання умови

$$x_2 = \varphi(x_1)\ \ x_3 = \varphi(x_2) \quad .... \quad x_m = \varphi(x_{m-1}) \qquad x_1 = \varphi(x_m)$$

При чому жодні два елементи з набору 1..m не повторюються.

Для нашої задачі $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \mu x_n(1-x_n)$

З означення 2-кратного циклу:

$x_2 = \mu x_1(1-x_1) \qquad x_1 = \mu x_2(1-x_2)$ підставимо перше відношення у друге:

$$x_1 = \mu^2 x_1(1-x_1)[1-\mu x_1(1-x_1)] = \mu^2 x_1(1-x_1)[1-\mu x_1+\mu x_1^2] = \mu^2 x_1[1-\mu x_1+\mu x_1^2 - x_1 + \mu x_1^2 - \mu x_1^3]$$

$$x_1\left[1+\mu^2\left(\mu x_1^3 - 2\mu x_1^2 + x_1 + \mu x_1 - 1\right)\right] = 0$$

Першим розв'язком є $x_1 = 0$ але вона не підходить, бо це стаціонарна точка і вона переходить сама в себе $x_2 = \varphi(x_1 = 0) = \mu 0(1-0) = 0$.

$\mu^3 x_1^3 - 2\mu^3 x_1^2 + \mu^2(1+\mu)x_1 + 1 - \mu^2 = 0$ зробимо заміну: $y = \mu x_1$ тоді:

Корені я точно знаю та рішення підганяю під відомі вирази – але рішення вірне, якщо не подобається цей спосіб – самі розв'язуйте кубічне рівняння☺

$$y^3 - 2\mu y^2 + \mu(1+\mu)y + 1 - \mu^2 = 0 \Rightarrow \qquad y^3 - \mu y^2 - \mu y^2 - \left(y^2 - y^2\right) + \mu y + \mu y^2 + (y-y) + 1 - \mu^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left[y^3 - y^2(\mu+1) + y(\mu+1)\right] - \left[y^2(\mu-1) - y\left(\mu^2-1\right) + \left(\mu^2-1\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$y\left[y^2 - y(\mu+1) + (\mu+1)\right] - (\mu-1)\left[y^2 - y(\mu+1) + (\mu+1)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left[y^2 - y(\mu+1) + (\mu+1)\right]\left[y - (\mu-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} y - (\mu-1) = 0 \\ y^2 - y(\mu+1) + (\mu+1) = 0 \end{array}\right.$$

Другий розв'язок: $y = \mu - 1$ або $x_1 = (\mu-1)/\mu$ але це також стац. точка:

$x_2 = \mu\dfrac{\mu-1}{\mu}\left(1-\dfrac{\mu-1}{\mu}\right) = (\mu-1)\dfrac{\mu-\mu+1}{\mu} = \dfrac{\mu-1}{\mu} = x_1$ а це суперечить означенню циклу.

Остаточне рівняння для визначення циклу:

$$y^2 - y(\mu+1) + (\mu+1) = 0 \qquad y^{(1),(2)} = \frac{1}{2}\left[\mu+1 \pm \sqrt{(\mu+1)^2 - 4(\mu+1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\mu+1 \pm \sqrt{(\mu-1)^2 - 4}\right]$$

Або в термінах x: $\quad x^{(1),(2)} = \dfrac{1}{2\mu}\left[\mu+1 \pm \sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]$

По-перше, цикли можливі при $(\mu-1)^2 \ge 4$ або $\mu \ge 3$.

По-друге, це вже і є шуканий цикл: якщо при відображенні $x^{(1)}$ переходить у $x^{(2)}$ - це означає, що все вірно (навпаки працює за означенням циклів).

$$x^{(2)} = \mu x^{(1)}\left(1-x^{(1)}\right) = \mu\frac{1}{2\mu}\left[\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]\left[1-\frac{1}{2\mu}\left[\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2\mu\left[\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right] - \left[\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]^2}{2\mu} = \frac{1}{4\mu}\Big[2\mu^2 + 2\mu + 2\mu\sqrt{(\mu-1)^2-4} - \mu^2 - 2\mu - 1 -$$

$$-2\mu\sqrt{(\mu-1)^2-4} - 2\sqrt{(\mu-1)^2-4} - \mu^2 + 2\mu + 3\Big] = \frac{1}{2\mu}\left[\mu+1-\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right] \equiv x^{(2)}$$

Також важливою умовою існування циклу є його стійкість, цикл стійкий, якщо:

$$|A| = \left|\varphi'\left(x^{(1)}\right)\varphi'\left(x^{(2)}\right)\right| \le 1 \qquad \varphi'(x) = \mu(1-2x)$$

$$|A| = \left|\varphi'\left(x^{(1)}\right)\varphi'\left(x^{(2)}\right)\right| = \mu^2\left|\left(1-2x^{(1)}\right)\left(1-2x^{(2)}\right)\right| = \mu^2\left|1-2\left(x^{(1)}+x^{(2)}\right)+4x^{(1)}x^{(2)}\right| =$$

$$= \mu^2\left|1-\frac{1}{\mu}\left(\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}+\mu+1-\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right)+\frac{1}{\mu^2}\left[\mu+1+\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\mu+1-\sqrt{(\mu-1)^2-4}\right]\right| = \mu^2\left|1-\frac{2}{\mu}(\mu+1)+\frac{1}{\mu^2}\left[(\mu+1)^2-\left((\mu-1)^2-4\right)\right]\right| =$$

$$= \left|\mu^2-2\mu(\mu+1)+4(\mu+1)\right| = \left|-\mu^2+2\mu+4\right| = \left|\mu^2-2\mu-4\right| \le 1$$

$$|A| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A \le 1 \\ A \ge -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu^2-2\mu-4 \le 1 \\ \mu^2-2\mu-4 \ge -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu^2-2\mu-5 \le 0 \\ \mu^2-2\mu-3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\mu-1+\sqrt{6}\right)\left(\mu-1-\sqrt{6}\right) \le 0 \\ (\mu+1)(\mu-3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \in \left[1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right] \\ \mu \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \end{cases} \Rightarrow \qquad \mu \in \left[3, 1+\sqrt{6}\right]$$

Згадаємо, що була умова на існування коренів $\mu \ge 3$ - вона виконується.

Остаточно: стійкий цикл кратності 2 існує при при довільних значеннях μ, що лежать в діапазоні $\mu \in \left[3, 1+\sqrt{6}\right]$, тобто μ від 3 до $1+\sqrt{6}$. Цикл являє собою переходи між точками:

$$x^{(1),(2)} = \frac{1}{2\mu}\left[\mu+1 \pm \sqrt{(\mu-1)^2-4}\right] \qquad \mu \in \left[3, 1+\sqrt{6}\right]$$

14. Для відображення

$$\bar{x} = \mu + x + x^2$$

знайти стаціонарні точки. При яких значеннях μ вони існуватимуть? Чи будуть вони стійкими?

Розв'язання

Точкове відображення задається виразом $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Стаціонарною, є така точка x^*, для якої $x^* = \varphi(x^*)$, таким чином:

$x^* = x^* + \mu + x^{*2} \Rightarrow x_{1,2}{}^* = \pm\sqrt{-\mu}$. Ці точки існуватимуть при умові $\mu \le 0$.

Стаціонарна точка є стійкою, якщо $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x = x^*} < 1$, $\Rightarrow$ $2x_{1,2}{}^* + 1 < 1$, отже бачимо, що точка $\sqrt{-\mu}$ є нестійкою, а точка $-\sqrt{-\mu}$ є стійкою.

15. Для відображення

$$\bar{x} = 4x(1-x)$$

знайти цикл кратності 2.

Розв'язок:

Для циклу кратності 2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = 4x_1(1-x_1) \\ x_1 = 4x_2(1-x_2) \end{cases}$$

Підставимо друге рівняння у перше:

$$x_2 = 16x_2(1-x_2)(1-4x_2(1-x_2))$$

Перший розв'язок $x_2 = 0$ не є циклом кратності 2. Для інших розв'язків отримаємо кубічне рівняння:

$$64x_2^3 - 128x_2^2 + 80x_2 - 15 = 0$$

Отримали розв'язки: $x_{21} = 0{,}345492$, $x_{22} = 0{,}75$, $x_{23} = 0{,}904508$. З них розв'язок 0,75→0,75 не є циклом кратності 2. Цикл кратності 2: 0,345492→0,904508.

16. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H(\vec{I},\vec{\theta}) = \omega_0(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}\alpha(I_1^2 + I_2^2) + \beta I_1 I_2 .$$

Яким значенням дій відповідають резонансні тори порядків 1, 1/2 та 2/3?

Задача, по-моему, устная. Порядки резонансных торов означают, что $\omega_1/\omega_2 = 1, 1/2, 2/3$. Омеги ищутся из соотношения $\omega_i = \delta H/\delta I_i$, откуда сразу же можем записать три линейных уравнения для нахождения соотношения между И1 и И2. Судя по тому, что сказал Анисимов, и я с этим полностью согласен, кроме этих соотношений ничего мы больше из тех данных, что у нас есть, получить не можем.

Итак.

1.

$\delta H/\delta I_1 = \omega_1 = \omega_0 + \alpha I_1 + \beta I_2 = \delta H/\delta I_2 = \omega_2 = \omega_0 + \alpha I_2 + \beta I_1$

$\alpha I_1 + \beta I_2 = \alpha I_2 + \beta I_1$

Как решить такое линейное уравнение принципиально писать не буду ;)

1/2.

$\delta H/\delta I_1 = \omega_1 = \omega_0 + \alpha I_1 + \beta I_2 = 2\,\delta H/\delta I_2 = 2\,\omega_2 = 2\,\omega_0 + 2\,\alpha I_2 + 2\,\beta I_1$

$\alpha I_1 + 2\,\beta I_1 = \omega_0 + 2\,\alpha I_2 - \beta I_2$

$(\alpha + 2\,\beta) I_1 = \omega_0 + (2\,\alpha - \beta) I_2$

$I_1 = (\omega_0 + (2\,\alpha - \beta) I_2)/(\alpha + 2\,\beta)$

2/3.

$2\,\delta H/\delta I_1 = 2\,\omega_1 = 2\,\omega_0 + 2\,\alpha I_1 + 2\,\beta I_2 = 3\,\delta H/\delta I_2 = 3\,\omega_2 = 3\,\omega_0 + 3\,\alpha I_2 + 3\,\beta I_1$

$2\,\alpha I_1 + 3\,\beta I_1 = \omega_0 + 3\,\alpha I_2 - 2\,\beta I_2$

$(2\,\alpha + 3\,\beta) I_1 = \omega_0 + (3\,\alpha - 2\,\beta) I_2$

$I_1 = (\omega_0 + (3\,\alpha - 2\,\beta) I_2)/ (2\,\alpha + 3\,\beta)$

Что еще сказать по поводу этой задачи я не знаю. Разве что упомянуть, что т.к. гамильтониан от угла не зависит, то значения действия постоянны, т.к. дИ по дТ равно дАш по дТэта, т.е. нулю.

17. Гамільтоніан системи має вигляд $H(\vec{I},\vec{\theta}) = \omega_{01}I_1 + \omega_{02}I_2 + \frac{1}{2}\alpha(I_1^2 + I_2^2) + \beta I_1 I_2$.

На систему діє мала періодична сила. При яких значеннях I_1 та I_2 утвориться найбільший стохастичний шар?

<u>Розв’язок:</u>

Згідно з теоремою КАМ товщину стохастичного шару можна оцінити з співвідношення:

$$\left|\omega_1 m_1 - \omega_2 m_2\right| > c\left(m_1^2 + m_2^2\right)^{-3/2} = \frac{c}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$ c – мала константа.

Де права частина, взагалі кажучи, відповідає ширині стохастичного шару. Отже при найменших натуральних m_1 та m_2 ширина стохастичного шару буде найбільшою. $\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \omega_{01} + \alpha \cdot I_1 + \beta \cdot I_2$ та $\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \omega_{02} + \alpha \cdot I_2 + \beta \cdot I_1$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 = \frac{\omega_{01} + \alpha \cdot I_1 + \beta \cdot I_2}{\omega_{02} + \alpha \cdot I_2 + \beta \cdot I_1}$. Звідси маємо : $I_1 = \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{\alpha - \beta} + I_2$. Отже, якщо взаємозв’язок дій I_1 та I_2 такий, як вказано вище, то ширина стохастичного шару буде найбільшою.

18. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H\left(\vec{I},\vec{\theta}\right)=\omega_0\left(I_1+I_2\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(I_1^2+I_2^2\right)+\beta I_1 I_2 .$$

На систему діє мала періодична сила. Як співвідносяться товщини (за дією I_1) стохастичних шарів, що утворилися на місці резонансних торів порядків 1 та 1/2?

Розв'язання

Згідно з теоремою КАМ товщину стохастичного шару можна оцінити з співвідношення:

$\left|\omega_1 m_1-\omega_2 m_2\right|>c\left(m_1^2+m_2^2\right)^{-3/2}$ c – мала константа.

при утворенні стохастичного шару маємо: $\omega_{1,2}=\omega_{1,2}^0+\delta\omega_{1,2}$, де $\omega_{1,2}^0$ - для резонансних торів.

$$\left|\omega_1 m_1-\omega_2 m_2\right|=\left|\left(\omega_1^0 m_1-\omega_2^0 m_2\right)+m_1\delta\omega_1-m_2\delta\omega_2\right|=\left|m_1\delta\omega_1-m_2\delta\omega_2\right|>c\left(m_1^2+m_2^2\right)^{-3/2}$$

потрібно оцінити товщини за I_1, тому вважаємо $\delta I_1\neq 0$ та $\delta I_2=0$

$$\delta\omega_{1,2}=\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial I_1}\right)\delta I_1+\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial I_2}\right)\delta I_2=\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial I_1}\right)\delta I_1=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_1\partial I_{1,2}}\right)\delta I_1$$

$$\delta\omega_1=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_1^2}\right)\delta I_1=\left(\frac{\partial}{\partial I_1}\left(\omega_0+\alpha I_1+\beta I_2\right)\right)\delta I_1=\alpha\delta I_1$$

$$\delta\omega_2=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_1\partial I_2}\right)\delta I_1=\left(\frac{\partial}{\partial I_2}\left(\omega_0+\alpha I_1+\beta I_2\right)\right)\delta I_1=\beta\delta I_1$$

$\left|\omega_1 m_1-\omega_2 m_2\right|=\left|m_1\delta\omega_1-m_2\delta\omega_2\right|=\left|\alpha m_1-\beta m_2\right|\delta I_1>c\left(m_1^2+m_2^2\right)^{-3/2}$ або для ширини:

$\delta I_1\approx\dfrac{c\left(m_1^2+m_2^2\right)^{-3/2}}{\left|\alpha m_1-\beta m_2\right|}=\dfrac{cm_1^{-3}\left(1+p^2\right)^{-3/2}}{m_1\left|\alpha-\beta p\right|}=\dfrac{c}{m_1^4\left|\alpha-\beta p^{-1}\right|\left(1+p^{-2}\right)^{3/2}}$ тут $p=\dfrac{m_1}{m_2}$ - порядок резонансного тора.

Для тору порядку 1 маємо $p^{(1)}=\dfrac{m_1^{(1)}}{m_2^{(1)}}=1$, порядку ½ маємо $p^{(1/2)}=\dfrac{n_1^{(1/2)}}{n_2^{(1/2)}}=\dfrac{1}{2}$.

Тоді отримаємо:

$$\xi=\frac{\delta I_1^{(1)}}{\delta I_1^{(1/2)}}\approx\frac{n_1^4\left|\alpha-\beta\left(p^{(1/2)}\right)^{-1}\right|\left(1+\left(p^{(1/2)}\right)^{-2}\right)^{3/2}}{m_1^4\left|\alpha-\beta\left(p^{(1)}\right)^{-1}\right|\left(1+\left(p^{(1)}\right)^{-2}\right)^{3/2}}=\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\frac{\left|\alpha-2\beta\right|\left(1+2^2\right)^{3/2}}{\left|\alpha-\beta\right|\left(1+(1)^2\right)^{3/2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^4\left|\frac{\alpha-2\beta}{\alpha-\beta}\right|$$

Таким чином для однозначної відповіді на запитання потрібно знати не лише порядок торів але і значення m_1, n_1. Але, оскільки в першу чергу руйнуються тори, для яких числа з набору m_i або n_i найменші, запишемо $m_1=1$ та $n_1=1$, тоді:

$$\xi=\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}\left|\frac{\alpha-2\beta}{\alpha-\beta}\right|$$

19. Гамільтоніан системи має вигляд

$$H\left(I,\theta\right)=I^2+\varepsilon I\sin\theta, \qquad 0<\varepsilon<<1.$$

Перейти до нових змінних, у яких гамільтоніан буде залежати тільки від дії (з точністю до доданків першого порядку за ε).

Розвязок:
Проробимо ряд перетворень, сенс яких буде зрозумілий після того, як ми їх зробимо:

$$H(I,\theta)=I^2+\varepsilon I\sin\theta=I^2+\frac{2\varepsilon I\sin\theta}{2}+\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{4}-\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{4}=\left(I+\frac{\varepsilon\sin\theta}{2}\right)^2-\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{4}.$$

Позначимо через нову дію $J=I+\frac{\varepsilon\sin\theta}{2}\Rightarrow I=J-\frac{\varepsilon\sin\theta}{2}$, підставляючи, це в вираз для гамільтоніана, нехтуючи другими порядками малості по ε, отримаємо новий гамільтоніан, що залежить лише від *J*:

$$K(J)=J^2.$$

Розглянемо інший метод:
Ми маємо гамільтоніан: $H(I,\theta)=I^2+\varepsilon I\sin\theta=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\theta)$
Зробимо заміну змінних $(I,\theta)\to(J,\theta)$, таку, що новий гамільтоніан $K(J,\theta)=K(J)$ є лише функцію дії. Зробимо це в першому наближенні по ε.

Введемо твірну функцію $F_2(J,\theta)$ таку, що: $I=\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial\theta},\theta=\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial J}$, при цьому, розкладемо твірну функцію у ряд по ε: $F_2=F_{20}+\varepsilon F_{21}+o(\varepsilon)$. Зрозуміло , що в нульовому наближенні $F_{20}=J\theta$. Задача зводиться до знаходженні твірної функції. Перепишемо старий гамільтоніан через твірну функцію:

$$H_0\left(\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial\theta}\right)+\varepsilon H_1\left(\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial\theta},\theta\right)=K_0(J)+\varepsilon K_1(J) \text{ (1), при цьому:}$$

$$H_0\left(\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial\theta}\right)=H_0(I)+\varepsilon\frac{\partial H_0(I)}{\partial I}\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta};H_1\left(\frac{\partial F_2(J,\theta)}{\partial\theta},\theta\right)=H_1(I,\theta)+\varepsilon\frac{\partial H_1(I,\theta)}{\partial I}\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta},$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (1), нехтуючи доданками вище першого по ε, матимемо:

$$H_0(I)=K_0(J);\frac{\partial H_0(I)}{\partial I}\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta}+H_1(I,\theta)=K_1(J)\Rightarrow 2I\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta}+I\sin\theta=K_1(J)$$

Бачимо, що ліва частина залежить від θ, а права ні. Тобто ліва частина залежить від θ періодично з періодом 2π, і якщо рівняння усереднити, то ми матимемо, що $K_1(J)$=0, тобто

$$2I\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta}+I\sin\theta=0\Rightarrow\frac{\partial F_{21}(J,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{\sin\theta}{2},$$

а отже шукане перетворення координат має вигляд:

$$I=J-\frac{\varepsilon\sin(\theta)}{2},$$

а власне новий гамільтоніан:

$$K(J)=K_0(J)=J^2.$$