2.1.1.1

Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \gamma u(1-u)(u-u_0)$$

де $0<u_0<1$ і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціонарним хвилям системи.

Если стац волна $\Rightarrow$ $u(\xi)$, $\xi = z - v_0 t$.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v_0\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v_0\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -v_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\tau v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - v_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - D\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \gamma u(1-u)(u-u_0)$$

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \tau v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + v_0\frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma u(1-u)(u-u_0) = 0$$

$$(D-\tau v_0^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + v_0\frac{\partial u}{\partial \xi} + \underbrace{\gamma u(1-u)(u-u_0)}_{f(u)} = 0 \qquad \boxed{Du'' + v_0 u' + f(u) = 0}$$

I случай без диссипации $v_0 = 0$.

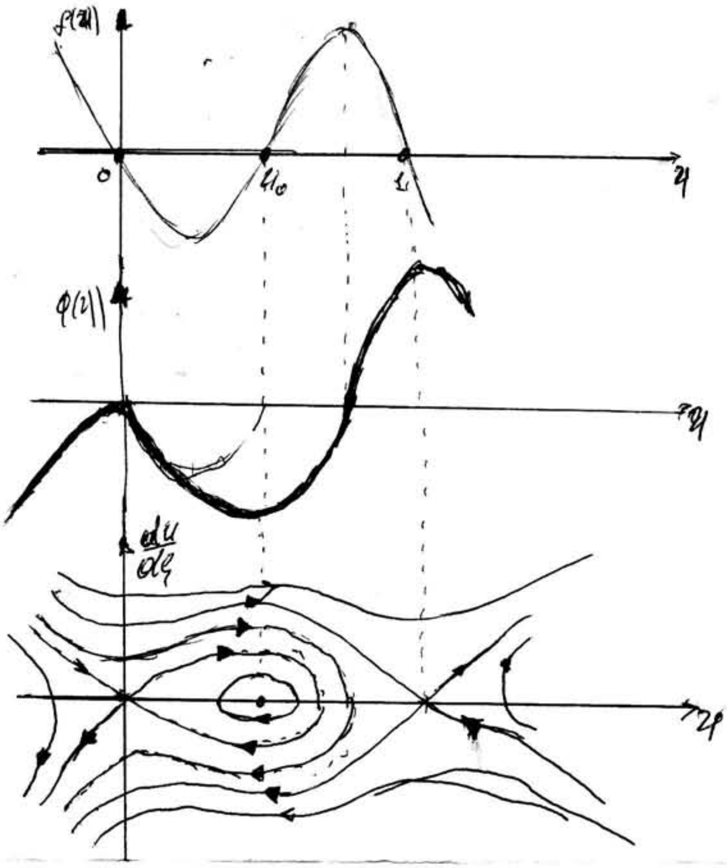
$$D\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(u) = 0; \quad f(u) = \gamma u[-u^2 + uu_0 + u - u_0];$$

$u_1 = 0$

$u_2 = u_0$ $\quad u_0 < 1$.

$u_3 = 1$.

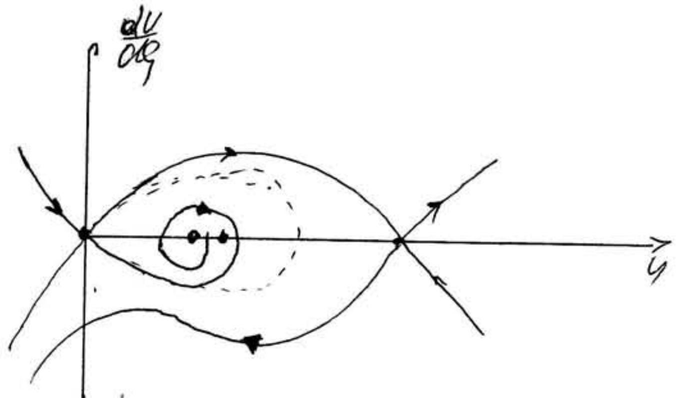
$$\Phi(u) = \int_0^u f(u)\,du =$$
$$= \gamma\int_0^u (-u^3 + u^2 + u^2u_0 - uu_0)\,du =$$
$$= \gamma\left[-\frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^3}{3}u_0 - \frac{u^2}{2}u_0\right]\Big|_0^u$$



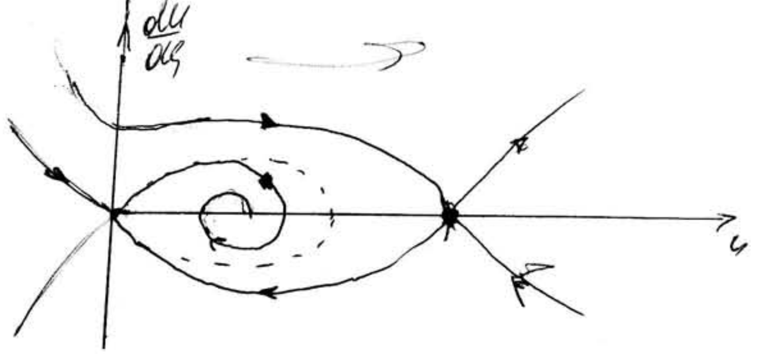
ТОЧНО

с ном. Анисимов

теперь если учтём диффузию.

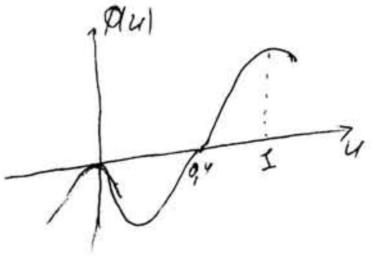


$v_0 < 0$

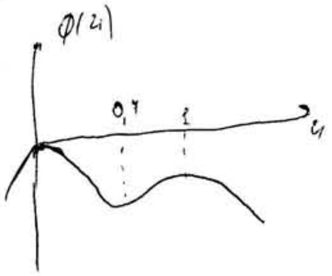


$v_0 > 0.$

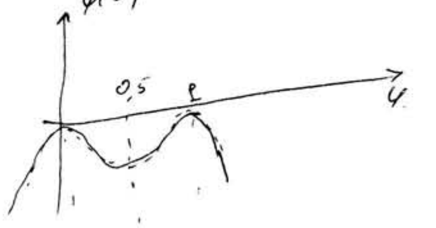
I если $u_0 \in [0; 0,5)$

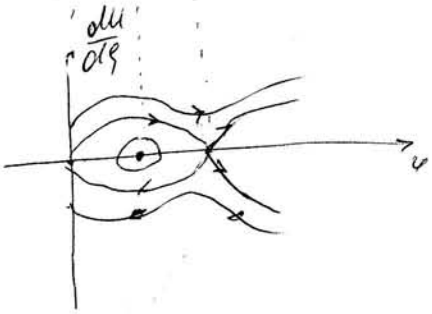


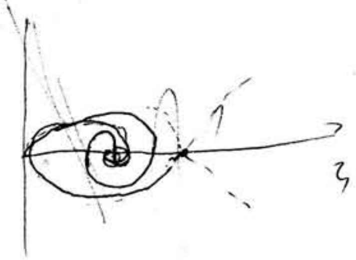
II если $u_0 \in (0,5; 1]$



III если $u_0 = 0,5$







$\boxed{2.1.3.2\,(3.3)}$ Нелінійне кінетичне рівняння з дифузією для середовищ автоколивного типу (λ-ω модель) має вигляд:

Рудавський А.
Трибрат М.

$$(*) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta,$$

де $\rho = |\eta|$, $\lambda(\rho)$ - монотонно спадна ф-я, така, що $\lambda(\rho_0) = 0$, $\omega(\rho)$ - довільна ф-я, D_1 та D_2 - сталі. Середовище неоднорідне: $\rho_0 = \rho_0(\vec{r})$, причому виконується умова $\rho_0(\vec{r} \to \infty) = \rho_\infty$. Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

Розв'язання

Підставляємо η в $(*)$ у вигляді $\eta = \rho e^{i\varphi}$. Виділяємо окремо дійсну і уявну частину і одримуємо систему р-нь:

$$(**)\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\lambda(\rho) + D_1[\Delta\rho + \rho(\nabla\varphi)^2] + D_2[2(\nabla\rho\nabla\varphi) + \rho(\Delta\varphi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(\rho) + D_1\left[\frac{2}{\rho}(\nabla\rho\nabla\varphi) + \Delta\varphi\right] + D_2\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + (\nabla\varphi)^2\right] \end{cases}$$

Для того щоб знайти рівняння для фазових розв'язок рівняння $(*)$ потрібно шукати у вигляді:

$$(1)\begin{cases} \eta(\vec{r}, t) = [\rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t)]\exp\{i[\omega_0 t + \psi(\vec{r}, t)]\}, \\ \text{тобто ми вважаємо, що } \rho(\vec{r}, t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ф-я координати!!!}}}{\rho_0(\vec{r})} + \delta\rho(\vec{r}, t),\ \varphi(t) = \omega_0 t + \psi(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Здоровий глузд підказує, що частота хвилі не може змінюватися при поширенні хвилі з одної точки в іншу, тому ми далі будемо вважати, що $\omega_0 \neq \omega_0(\vec{r})$

Підставимо вирази (1) в перше р-ня $(**)$:

$$(2)\quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = \lambda(\rho_0 + \delta\rho)(\rho_0 + \cancel{\delta\rho}) + D_1[\Delta(\rho_0 + \cancel{\delta\rho}) - (\rho_0 + \cancel{\delta\rho})(\nabla(\cancel{\omega_0 t} + \psi))^2] +$$
$$+ D_2[2\nabla(\rho_0 + \cancel{\delta\rho})\cdot\nabla(\cancel{\omega_0 t} + \psi) + (\rho_0 + \cancel{\delta\rho})\Delta(\cancel{\omega_0 t} + \psi)]$$

Червоним кольором позначимо доданки, які ми викидаємо, оскільки вважаємо, що $\delta\rho_0 \ll \rho_0 \ \forall \vec{r}$

Розкладемо ф-ю $\lambda(\rho)$ в ряд Тейлора в околі ρ_0 і введемо позначення:

$$\lambda(\rho_0 + \delta\rho) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda(\rho_0)} + \left.\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\delta\rho = -\frac{\delta\rho}{\tau_\rho\rho_0}\ ; \text{ де } \tau_\rho = -\left[\rho_0\left.\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\right]^{-1} -$$

час релаксації системи до стану з $\rho = \rho_0$

Отже дані рівняння (2) можна переписати:

$$0 = -\frac{\delta\rho}{\tau_\rho} + D_1\left[\Delta\rho_0 - \rho_0(\nabla\psi)^2\right] + D_2\left[2\nabla\rho_0\nabla\psi + \rho_0\Delta\psi\right]$$

$$\delta\rho = \tau_\rho\left\{D_1\left[\Delta\rho_0 - \rho_0(\nabla\psi)^2\right] + D_2\left[2\nabla\rho_0\nabla\psi + \rho_0\Delta\psi\right]\right\} \qquad (3)$$

Далі аналогічно попрацюємо з другим р-м (**):

$$\omega_0 + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega(\rho_0+\delta\rho) + D_1\left[\frac{2}{\rho_0+\cancel{\delta\rho}}\left(\nabla(\rho_0+\cancel{\delta\rho})\cdot\nabla(\cancel{\omega_0 t}+\psi)\right) + \Delta(\cancel{\omega_0 t}+\psi)\right] +$$

$$+ D_2\left[\frac{\Delta(\rho_0+\cancel{\delta\rho})}{\rho_0+\cancel{\delta\rho}} + \left(\nabla(\cancel{\omega_0 t}+\psi)\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \underbrace{\left.\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}}_{=\chi}\delta\rho + D_1\left[\frac{2}{\rho_0}\nabla\rho_0\nabla\psi + \Delta\psi\right] + D_2\left[\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} + (\nabla\psi)^2\right] \qquad (4)$$

Підставимо (3) в (4):

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \chi\tau_\rho\left\{D_1\left[\Delta\rho_0 - \rho_0(\nabla\psi)^2\right] + D_2\left[2\nabla\rho_0\nabla\psi + \rho_0\Delta\psi\right]\right\} +$$

$$+ D_1\left[\frac{2\nabla\rho_0\nabla\psi}{\rho_0} + \Delta\psi\right] + D_2\left[\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} + (\nabla\psi)^2\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \underbrace{(\chi\tau_\rho\rho_0 D_1 + D_2)}_{=a}(\nabla\psi)^2 + \underbrace{(D_2\rho_0\chi\tau_\rho + D_1)}_{=b}\Delta\psi + \underbrace{(2\chi\tau_\rho D_2 + 2D_1/\rho_0)}_{=c}\cdot\nabla\rho_0\nabla\psi +$$

$$+ \underbrace{\left[\chi\tau_\rho D_1 + \frac{D_2}{\rho_0}\right]\Delta\rho_0}_{=d}$$

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi + c\nabla\psi + d}$$

– рівняння для фазових хвиль в неоднорідному середовищі. Неоднорідність захована в третьому і четвертому доданку.

Шановний Читачу!!!

Якщо тебе мучить сумління і ти думаєш, що даний розв'язок це новий підхід, то хочемо тебе заспокоїти, що ти не один. Автори цього розв'язку повністю згідні з тобою. Але можемо тебе запевнити, що він не є більшим підходом ніж у конспекті Анісімова. Тому можеш спокійно катати і насолоджуватися контрольною роботою і всією красою синергетики.

Автори розв'язку

$\boxed{2.1.3.4}$ Користуючись рівнянням для фазових хвиль у двовимірному активному середовищі, дослідити взаємодію двох зустрічних фазових хвиль

Рудавський А

Розв'язання

(*) $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi$ – р-ня для фазових хвиль

Розглянемо дві хвилі з непаралельними хвильовими векторами $\vec{k}_1$ і $\vec{k}_2$ відповідно

$\vec{r} = (x, y)$

$\psi(\vec{r}, t) = \frac{b}{a}\ln Q(\vec{r}, t)$

Після підстановки у (*) утримаємо $\dfrac{\partial Q}{\partial t} = b\Delta Q$

Розглянемо ф-ю $\psi(\vec{r}, t) = -\vec{k}\vec{r} + ak^2 t$. Ця ф-я задов. р-ня (*)

Розглянемо двовимірний випадок

$$\underset{(x,y)}{Q(\vec{r}, t)} = A_1 \exp\left[-\frac{a}{b}\{\vec{k}_1\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_1^2 t\right] + A_2 \exp\left[-\frac{a}{b}\vec{k}_2\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_2^2 t\right]$$

Якщо показник першої експоненти значно більший від показника другої експоненти, тобто

$$-\frac{a}{b}\vec{k}_1\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_1^2 t \gg -\frac{a}{b}\vec{k}_2\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_2^2 t,$$

то другою експонентою можна знехтувати і для фази можна записати вираз: $\psi(\vec{r}, t) \approx -\vec{k}_1\vec{r} + ak_1^2 t$

це буде справедливе у області: $\frac{a}{b}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} \gg \frac{a^2}{b}(\vec{k}_2^2 - \vec{k}_1^2)t$,

тобто $\vec{r} \ll a(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)t$

В цій області існує фазова хвиля з хвильовим вектором $\vec{k}_1$ і частотою $\omega(\vec{k}_1)$.

Аналогічно в області $\vec{r} \gg a(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)t$ існує хвиля $\psi(\vec{r}, t) \approx \vec{k}_2\vec{r} + ak_2^2 t$

За межу між областями, зайнятими різними хвилями природно взяти $\vec{r} = a(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)t$. Ширина цієї області може бути оцінена з умови $-\frac{a}{b}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\Delta\vec{r} \sim 1 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta r} \sim \dfrac{b}{a(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)}$

Межа рухається зі швидкістю $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = a(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$

№2 2.1.1. $R(T) = [R_1 + R_2\,\theta(T-T_c)](1+\alpha T)$

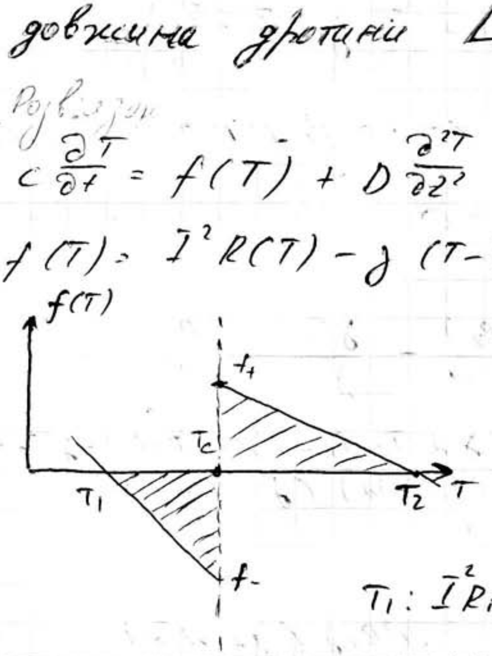
$$c\frac{\partial T}{\partial t} = I^2R(T) - \gamma(T-T_0) + D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Знайти I_{cr} та V_{min}, V_{max}, якщо довжина дротини L.

Розв'язок

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \text{ де}$$

$$f(T) = I^2R(T) - \gamma(T-T_0)$$



При $I = I_{cr}$: $\Delta P = \int_{T_1}^{T_2} f(T)\,dT = 0$

Температури T_1 і T_2 можна знайти з умови: $f(T)=0$

$$T_1:\ I^2R_1(1+\alpha T_1) - \gamma(T_1 - T_0) = 0$$

$$T_1 = \frac{\gamma T_0 + I^2R_1}{\gamma - I^2R_1\alpha}$$

$$T_2:\ I^2(R_1+R_2)(1+\alpha T_2) - \gamma(T_2 - T_0) = 0$$

$$T_2 = \frac{\gamma T_0 + I^2(R_1+R_2)}{\gamma - I^2(R_1+R_2)\alpha}.$$

Умова $\Delta P = 0$ означає рівність заштрихованих площ:

$$(T_c - T_1)\,|f_-(T_c)| = (T_2 - T_c)\,f_+(T_c)$$

$$(T_c - T_1)\cdot(\gamma(T_c - T_0) - I^2R_1(1+\alpha T_c)) =$$

$$= (T_2 - T_c)(I^2(R_1+R_2)(1+\alpha T_c) - \gamma(T_c - T_0)),$$

$$\cancel{T_c\,\gamma(T_c-T_0)} - T_c I^2 R_1(1+\alpha T_c) - T_1\gamma(T_c-T_0) + T_1 I^2 R_1(1+\alpha T_c) =$$

$$= T_2 I^2(R_1+R_2)(1+\alpha T_c) - T_2\gamma(T_c-T_0) - T_c I^2(R_1+R_2)(1+\alpha T_c) + \cancel{T_c\,\gamma(T_c-T_0)}$$

$$I^2(1+\alpha T_c)\{T_1 R_1 - T_2(R_1+R_2)\} + I^2 R_2 T_c(1+\alpha T_c) + \gamma(T_c-T_0)(T_2-T_1) = 0$$

Знайдемо:

$$T_2 - T_1 = \frac{\gamma T_0 + I^2(R_1+R_2)}{\gamma - I^2(R_1+R_2)\alpha} - \frac{\gamma T_0 + I^2 R_1}{\gamma - I^2\alpha R_1} =$$

$$= \frac{\gamma^2 T_0 + I^2\gamma(R_1+R_2) - I^2\gamma\alpha T_0 R_1 - I^4\alpha R_1(R_1+R_2) - \gamma^2 T_0 - I^2 R_1\gamma + I^2(R_1+R_2)\alpha\gamma T_0 + I^4\alpha R_1(R_1+R_2)}{(\gamma - I^2(R_1+R_2)\alpha)(\gamma - I^2\alpha R_1)} =$$

$$= \frac{I^2\gamma R_2 + I^2 R_2\alpha\gamma T_0}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)} = \frac{I^2 R_2\gamma(1+\alpha T_0)}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)}$$

$$T_1 R_1 - T_2(R_1+R_2) = -R_1(T_2-T_1) - T_2 R_2 =$$

$$= -\frac{I^2\gamma R_2 R_1 + I^2 R_2 R_1\alpha\gamma T_0}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)} - \frac{\gamma T_0 R_2 + I^2 R_2(R_1+R_2)}{\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2)} =$$

$$= \frac{-I^2\gamma R_2 R_1 - I^2 R_2 R_1\alpha\gamma T_0 - \gamma^2 T_0 R_2 - I^2 R_2\gamma(R_1+R_2) + I^2\alpha R_1\gamma T_0 R_2 + I^4\alpha R_1 R_2(R_1+R_2)}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)} =$$

$$= \frac{R_2\left(I^4\alpha R_1(R_1+R_2) - I^2\gamma R_1 - \gamma^2 T_0 - I^2\gamma(R_1+R_2)\right)}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)}$$

Підставляємо отримані вирази в р-ня і скорочуємо на I^2R_2 оскільки $I \neq 0$:

$$(1+\alpha T_c)\frac{I^4\alpha R_1(R_1+R_2) - I^2\gamma(2R_1+R_2) - \gamma^2 T_0}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)} +$$

$$+\gamma(T_c - T_0)\frac{\gamma(1+\alpha T_0)}{(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1)} + T_c(1+\alpha T_c) = 0$$

$$(\gamma - I^2\alpha(R_1+R_2))(\gamma - I^2\alpha R_1) = I^4\alpha^2 R_1(R_1+R_2) - I^2\alpha\gamma(2R_1+R_2) +$$
$$+\gamma^2.$$

$$I^4\alpha R_1(R_1+R_2)\{1+\alpha T_c + \alpha T_c(1+\alpha T_c)\} -$$
$$- I^2\gamma(2R_1+R_2)\{1+\alpha T_c + \alpha T_c(1+\alpha T_c)\} - \gamma^2 T_0(1+\alpha T_c) +$$
$$+\gamma^2(T_c - T_0)(1+\alpha T_0) + \gamma^2 T_c(1+\alpha T_c) = 0.$$

$$I^4\alpha R_1(R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 - I^2\gamma(2R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 +$$
$$+\gamma^2(-T_0 - \cancel{\alpha T_0 T_c} + T_c + \cancel{\alpha T_0 T_c} - T_0 - \alpha T_0^2 + T_c + \alpha T_c^2) = 0$$

$$I^4\alpha R_1(R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 - I^2\gamma(2R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 +$$
$$+\gamma^2(T_c - T_0)(2+\alpha(T_c+T_0)) = 0.$$

$$I_{1,2}^2 = \frac{\gamma(2R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 \pm \sqrt{\gamma^2(2R_1+R_2)^2(1+\alpha T_c)^4 - 4\alpha R_1(R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2 \times \gamma^2(T_c-T_0)(2+\alpha(T_c+T_0))}}{2\alpha R_1(R_1+R_2)(1+\alpha T_c)^2}$$

$$I_{1,2}^2 = \frac{\gamma(2R_1+R_2)(1+\alpha T_c) \pm \gamma\sqrt{(2R_1+R_2)^2(1+\alpha T_c)^2 - 4\alpha R_1(R_1+R_2)(T_c-T_0)(2+\alpha(T_c+T_0))}}{2\alpha R_1(R_1+R_2)(1+\alpha T_c)}$$

Обидва корені є додатніми (<u>як не дивно</u> !!!).

Тому $I_{cr\,1,2} = \sqrt{I_{1,2}^2}$.

При $I = I_{cr}$ в системі встановиться рівноваго, будуть існувати дві області з температурами T_1 і T_2, а отже і з опорами $R(T_1)$ та $R(T_2)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $V_{min} = I_{cr} R(T_1) L$

$V_{max} = I_{cr} R(T_2) L$.

№2.2.1.2.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = n q(T) - \gamma (T - T_0) + \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = W - n \int_{(V)} Q[T(\vec{r})]\, d\vec{r}$$

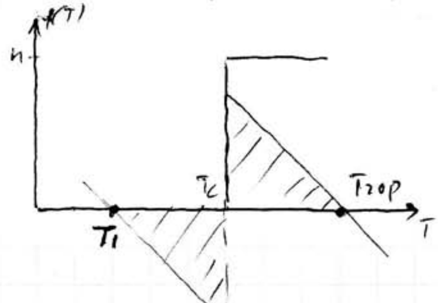
$$q(T) = Q(T) = \Theta(T - T_c).$$

Знайти: $T_{гор}$, $V_{вогн}$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + \chi \Delta T, \text{ де}$$

$$f(T) = n q(T) - \gamma (T - T_0)$$



Умова встановлення стаціонарного процесу горіння:

$$\Delta \mathcal{P} = \int_{T_1}^{T_{гор}} f(T)\, dT = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ площі трикутників рівні.

$$(T_c - T_1)|f_-(T_c)| = (T_{гор} - T_c)\, f_+(T)$$

Оскільки кут нахилу прямих однаковий, то

$$(T_c - T_1) = (T_{гор} - T_c) \Rightarrow$$

$$\gamma (T_c - T_0) = n - \gamma (T_c - T_0)$$

$$n_{кр} = 2\gamma (T_c - T_0).$$

$T_{гор}$ знайдемо з умови $f(T_{гор}) = 0$:

$$n_{кр} - \gamma (T_{гор} - T_0) = 0 \Rightarrow T_{гор} = \frac{n_{кр} + \gamma T_0}{\gamma} = 2T_c - T_0.$$

При стаціонарному процесі горіння:

$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, тоді

$$W - u_{кр} \int\limits_{(V)} Q[T(\vec{r})]\, d\vec{r} = 0.$$

Будемо вважати, що в області горіння встановилася температура $T_{гор}$, в іншій області $T = T_0$, тоді:

$$W - u_{кр} V_{гор} = 0$$

$$V_{гор} = \frac{W}{u_{кр}} = \frac{W}{2\gamma(T_c - T_0)}$$