Задача №1

Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2\gamma u(1-u)(u-u_0),$$

де $0<u_0<1$ і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціонарним хвилям системи.

Перейдемо до нових змінних: $\xi = z - vt$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t}=-v\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$v^2\tau\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-v\frac{\partial u}{\partial \xi}-D\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\gamma u(1-u)(u-u_0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(v^2\tau-D)-v\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\gamma u(1-u)(u-u_0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{v}{v^2\tau-D}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{2\gamma u}{v^2\tau-D}(1-u)(u-u_0)=0,$$

Позначимо $f(u)=\dfrac{2\gamma}{v^2\tau-D}u(1-u)(u-u_0)$

У стаціонарному випадку v=0, тому другим доданком можна знехтувати. Таким чином отримаємо рівняння:

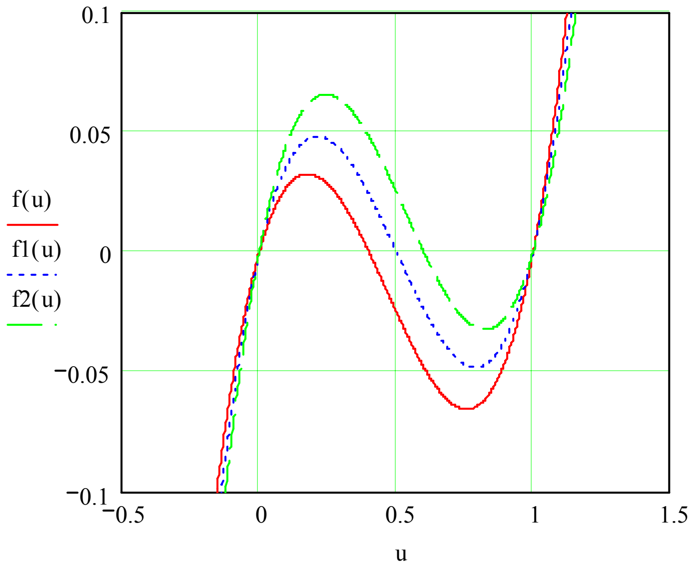
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+f(u)=0$$

Тоді $\int\limits_0^u f(u)du=\Phi(u)$ - потенціал

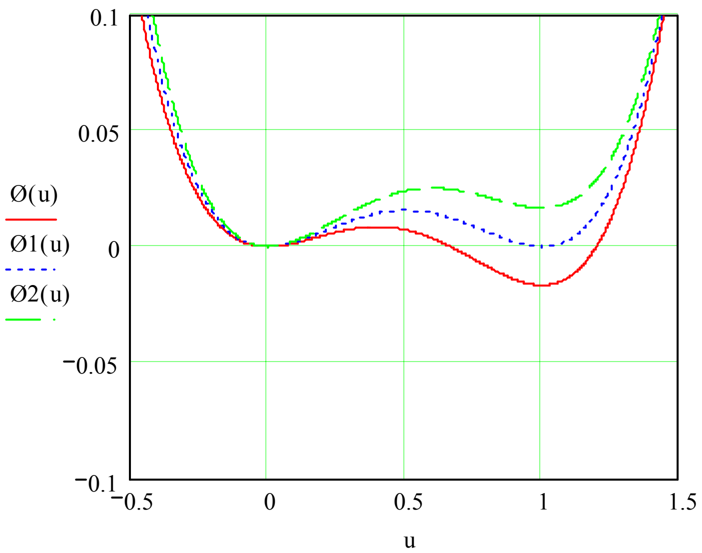
$$\Phi(u)=\int\frac{2\gamma}{-D}u(1-u)(u-u_0)=$$

$$=\frac{2\gamma}{-D}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u_0u^2}{2}-\frac{u^4}{4}+\frac{u_0u^3}{3}\right]\Bigg|_0^u$$

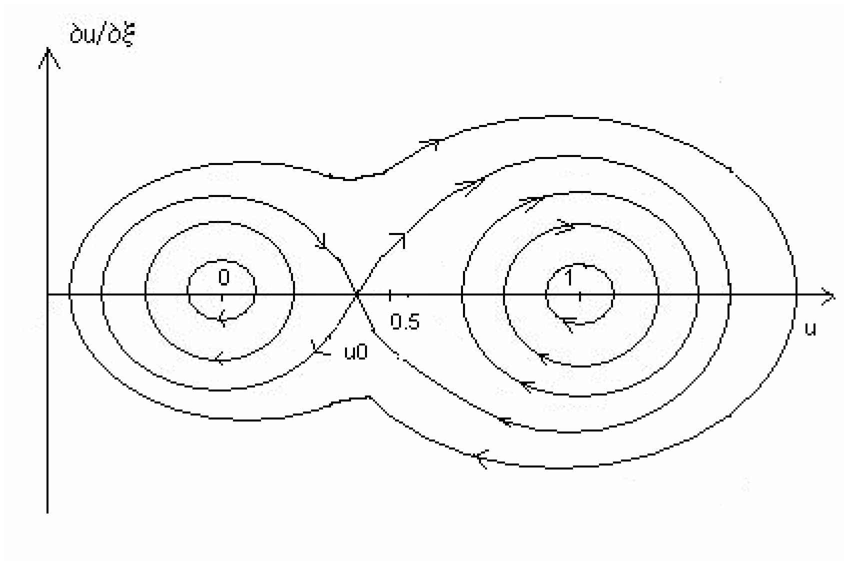
$f(u) := -u\cdot(1-u)\cdot(u-0.4) \qquad f1(u) := -u\cdot(1-u)\cdot(u-0.5) \qquad f2(u) := -u\cdot(1-u)\cdot(u-0.6)$



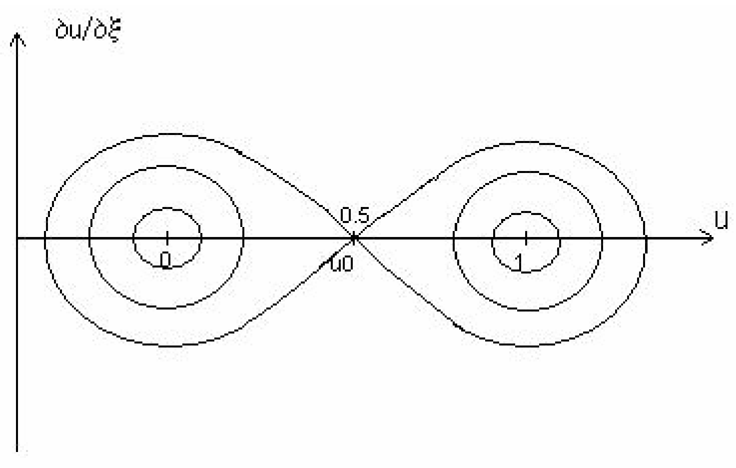
$$\text{Ø}(u) := \int_0^u f(u)\,du \qquad \text{Ø}1(u) := \int_0^u f1(u)\,du \qquad \text{Ø}2(u) := \int_0^u f2(u)\,du$$



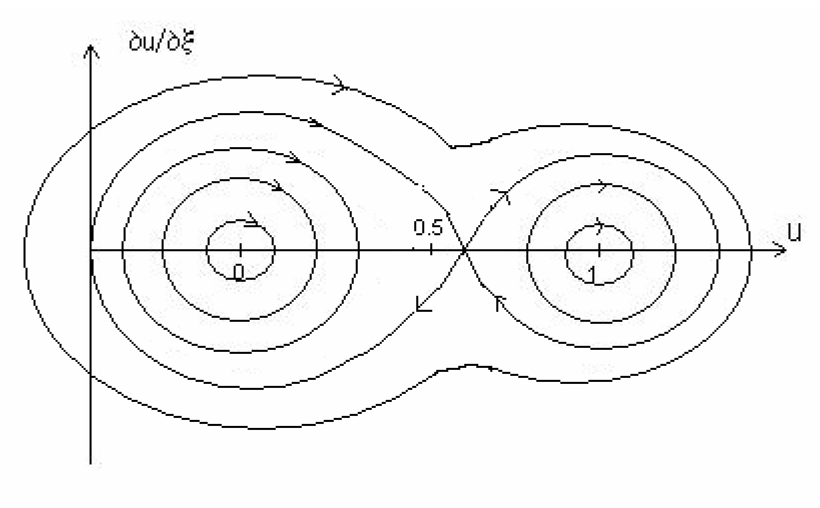
u0=0.4



u0=0.5



u0=0.6



2. Показати, що рівнянню для хвилі збудження в нервовому волокні $\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2\gamma u(1-u)(u-u_0)$, ($0<u_0<1$ і всі параметри позитивні) задовольняє модельний розв`язок у вигляді хвилі збудження $du/d\xi=\sigma u(1-u)$, де ξ=z-Vt. Знайти швидкість поширення збудження по волокну V. Отримати функцію u(ξ) і зобразити профіль хвилі.

Зробивши заміну ξ=z-Vt, ($\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{du}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}=-V\frac{du}{d\xi}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{d\xi}$)одержимо

рівняння: $(\tau V^2-D)\frac{d^2u}{d\xi^2}-V\frac{du}{d\xi}+2\gamma u(1-u)(u-u_0)=0$, зробимо заміну $w=du/d\xi$,

врахувавши, що $\frac{d^2u}{d\xi^2}=\frac{du}{du}\frac{dw}{d\xi}=w\frac{dw}{du}$, одержимо:.

Підставляючи розв`язок у вигляді: $w=\sigma u(1-u)$ та скорочуючи на $u(1-u)$ маємо: $(\tau V^2-D)\sigma^2(1-2u)-V\sigma+2\gamma(u-u_0)=0$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях u одержимо систему рівнянь відносно σ та V: $\begin{cases}\sigma^2(\tau V^2-D)-\sigma V-2\gamma u_0=0\\ \sigma^2(D-\tau V^2)+\gamma=0\end{cases}$, розв`яжемо її:

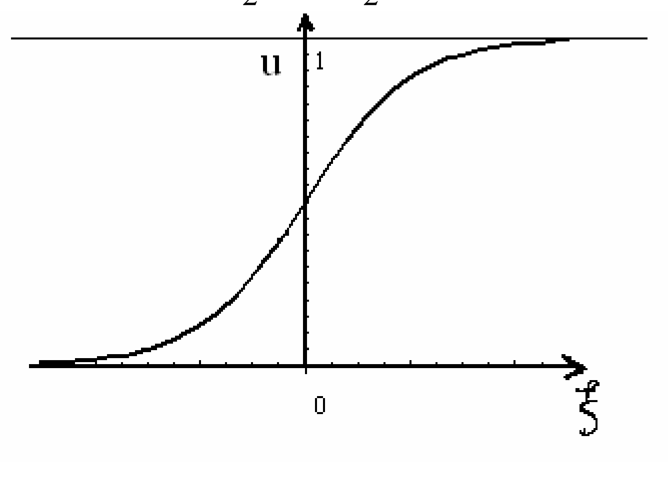
$\sigma^2=\frac{\gamma}{\tau V^2-D}$ (з 2 р-ня); $\gamma^2(1-2u_0)^2=\frac{\gamma V^2}{\tau V^2-D}$ (з 1 р-ня) $\Rightarrow$ $V^2=\frac{D\gamma(1-2u_0)^2}{\gamma\tau(1-2u_0)^2-1}$;підставивши в вираз для σ маємо: $\sigma^2=\frac{\gamma}{D}(\gamma\tau(1-2u_0)^2-1)$;остаточно маємо:

$V=\pm\frac{\sqrt{D\gamma}(1-2u_0)}{\sqrt{\gamma\tau(1-2u_0)^2-1}}$; $\sigma=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{D}}\sqrt{\gamma\tau(1-2u_0)^2-1}$, отож це рівняння дійсно задовольняє розв`язок.

Визначимо функцію u(ξ) розв`язавши р-ня $du/d\xi=\sigma u(1-u)$; З граничними умовами: $\xi\to+\infty, u=1; \xi\to-\infty, u=0;$ маємо: $(\frac{1}{u}+\frac{1}{(1-u)})du=\sigma d\xi$, Розв`язок $\ln(\frac{u}{u-1})=\sigma\xi+C$,

враховуючи граничні умови маємо: $\frac{u}{u-1}=-\exp(\sigma\xi)$, перетворюючи

одержимо: $u(\xi)=\frac{1}{2}(1+th(\frac{\sigma\xi}{2}))$; Фронт хвилі перемикання має вигляд:



3. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n) n + D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

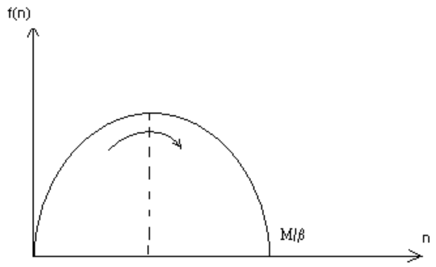
де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \ge M/\beta \end{cases}$$

- функція, що характеризує харчові ресурси. Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. Оцінити швидкість хвилі переходу з одного стаціонарного стану в інший (так звана хвиля заселення).

Вказівка: ґрунтуючись на аналогії з нелінійним дисипативним осцилятором, записати співвідношення для балансу енергії.

$f(n) = \alpha\, m(n)\, n$



Перейдемо до

$\xi = z - Vt$;

$\delta n/\delta t = \delta n/\delta\xi\ \delta\xi/\delta t = -V\ \delta n/\delta\xi$;

$\delta^2 n/\delta z^2 = \delta^2 n/\delta\xi^2$;

$D\ \delta^2 n/\delta\xi^2 + V\ \delta n/\delta\xi + \alpha\ m(n)\ n = 0$;

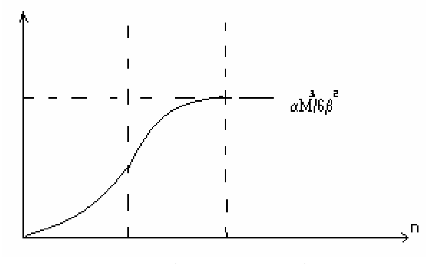
1. Для стаціонарних хвиль $V = 0$;

$D\ \delta^2 n/\delta\xi^2 + \alpha\ m(n)\ b = 0$;

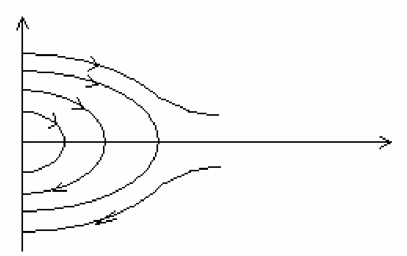
Φ - потенціал,

$\Phi = \int \alpha\ m(n)\ n\ dn = \int \alpha\ (M - \beta n)\ n\ dn = \alpha M\ n^2/2 - \alpha\beta\ n^3/3,\ n < M/\beta$;

$\Phi = \alpha M^3/6\beta^2,\ n > M/\beta$;



Можемо побудувати фазовий портрет



2. Знайдемо швидкість переходу з одного стану у інший.

$V = \int f(n)\ dn / \int (dn/d\xi)^2\ d\xi$

По аналогії з дисипативним осцилятором, запишемо рівняння для балансу енергї. Аналог маси D, аналог швидкості $dn/d\xi$, аналог пот. енергії - потенціал Φ.

Кінетична енергія $D\ (dn/d\xi)^2/2$, потенціальна - $\Phi = \alpha M^3/6\beta^2$

$D\ (dn/d\xi)^2 = \alpha M^3/3\beta^2 \quad \Rightarrow$

$\int (dn/d\xi)^2\ d\xi = \int dn/d\xi\ dn = (\alpha M^3/3D\beta^2)^{1/2} * M/\beta = M^2/\beta^2\ (\alpha M/3D)^{1/2}$

$\int f(n)\ dn = \int \alpha\ (M - \beta n)\ n\ dn = \alpha M^3/6\beta^2$

$V = [\alpha M^3/6\beta^2\ ] / [M^2/\beta^2\ (\alpha M/3D)^{1/2}] = \mathbf{(3\ \alpha\ M\ D)^{1/2} / 6}$

Задача про нелегку долю популяції, що розмножується статевим шляхом...

4. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 - \alpha n + D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

- функція, що характеризує харчові ресурси. Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. Розрахувати форму біжучого фронту, його швидкість і ширину.

Отже, любі друзі™, ми починаємо наш сказ, тому що не знайшлося в мене іншого, здатного для друку слова, щоб точніше охарактеризувати сутність того розв'язку, який випала доля побудувати... А якщо хтось має повний чемодан критики з цього приводу, відповім, що не завжди треба показувати, що ти все знаєш – деяким викладачам дуже імпонує, що в їх предметі студенти не розуміються...

Розглянемо одновимірне нелінійне кінетичне рівняння з дифузією для бістабільного середовища:

$$\frac{dn}{dt} = f(n) + D\frac{d^2 n}{dz^2};$$

Як можна легко побачити, саме таким є вигляд нашого рівняння, якщо

$$f(n) = m(n)n^2 - \alpha n; \quad \text{де, як відомо з умови,}$$

$$m(n) = M - \beta n, \text{ if } \quad 0 < n < \frac{M}{\beta},$$

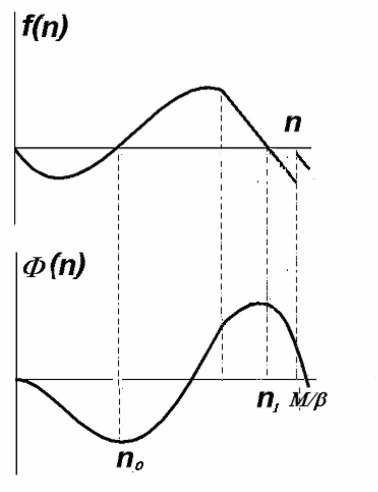
$$m(n) = 0, \text{ if } \quad n \geq \frac{M}{\beta};$$

Таким чином, функція $f(n)$ також визначається, як показано нижче:

$$f(n) = -\beta n^3 + Mn^2 - \alpha n \quad \text{if} \quad 0 < n < \frac{M}{\beta},$$

$$f(n) = -\alpha n, \quad \text{if} \quad n \geq \frac{M}{\beta};$$

Отже, намалюємо вигляд $f(n)$ - кінетичної функції і її потенціалу $\Phi(n)$



Тобто поки що фортуна до нас повернута обличчям, і фазова картинка буде такою ж, як і на лекціях.

$n = n(\xi); \quad \xi = z - V_0 t$;

Стаціонарна хвиля – це хвиля, для якої з часом не змінюється а ні швидкість, а ні форма...

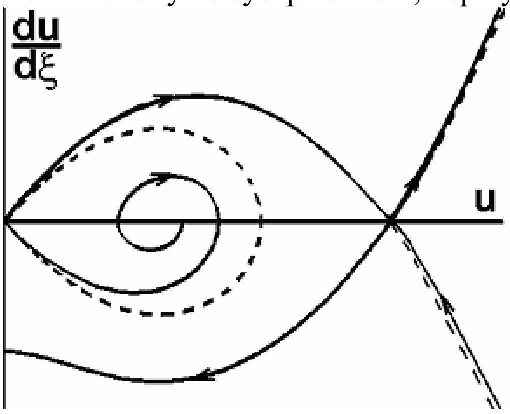
тоді рівняння зводиться до рівняння (сам розумію, звучить коряво, але зараз не до „ізящності словєсной”) нелінійного дисипативного осцилятора,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -V_0\frac{\partial n}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2};$$

$$Dn'' + V_0 n' + m(n)n^2 - \alpha n = 0;$$

чий фазовий портрет, ми, наче б то, вміємо малювати

Пани та панухі! Зустрічайте її, першу відповідь на вашу задачу(!):



Рівняння вдається проінтегрувати до кінця, якщо обрати модельну функцію f(n) у формі

$$f(n) = n(n - n_0)(n_1 - n);$$

де n_0, n_1 - корені рівняння $f(n) = -\beta n^3 + Mn^2 - \alpha n = 0;$

$n_{0,1} = \dfrac{M \mp (M^2 - 4\alpha\beta)^{1/2}}{2\beta}$. Відповідно ці точки є min (n_0) і max (n_1) потенціалу Φ(n)

Тоді задачу вдається аналітично розв’язати до кінця.

Рівняння для стаціонарної хвилі при цьому набуває вигляду:

$$\frac{D}{\beta}\frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} + \frac{V_0}{\beta}\frac{\partial n}{\partial \xi} + n(n - n_0)(n_1 - n); \quad D_1 = \frac{D}{\beta}; V = \frac{V_0}{\beta}; \quad w = \frac{dn}{d\xi};$$

У фазових змінних це рівняння набуває вигляду:

$$D_1 w\frac{dw}{dn} + Vw + n(n - n_0)(n_1 - n);$$

Шукаємо розв’язок (1.1.13 б) у вигляді:

$$w(n) = \sigma n(n_1 - n);$$

Після підстановки і потрібних скорочень, отримаємо рівняння:

$$n(1 - 2D_1\sigma^2) + (D_1\sigma^2 n_1 + V\sigma - n_0) = 0; \qquad \sigma = \pm\frac{1}{\left(\dfrac{2D_1}{\beta}\right)^{1/2}}; \qquad V = \frac{n_0 - \frac{1}{2}n_1}{\sigma};$$

Тепер співвідношення (1.1.19), яке з урахуванням явного вигляду функції w(u) має вигляд:

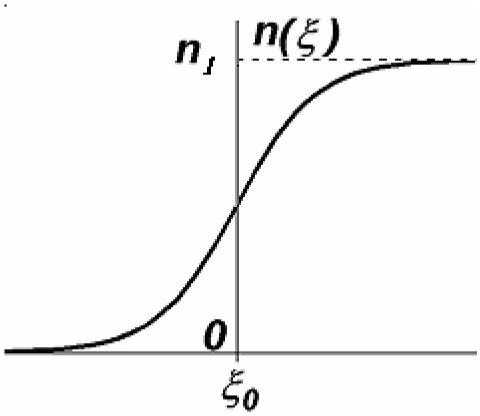
$\frac{dn}{d\xi} = \sigma n(n_1 - n);$ Інтегруючи його, отримаємо:

$$\frac{1}{n_1}\int\left(\frac{dn}{n} + \frac{dn}{n_1 - n}\right) = \int \sigma d\xi; \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{n}{n_1 - n}\right) = \sigma n_1(\xi - \xi_0); \quad \rightarrow$$

$$n(\xi) = \frac{n_1 \exp(\sigma n_1(\xi - \xi_0))}{1 + \exp(\sigma n_1(\xi - \xi_0))} = \frac{n_1}{2}\left(1 + th\left(\frac{\sigma n_1(\xi - \xi_0)}{2}\right)\right);$$

Отже, при $\xi \rightarrow \infty, n \rightarrow n_1$ а при $\xi \rightarrow -\infty, n \rightarrow 0;$

Ширину фронту хвилі оцінимо як $\Delta\xi \approx \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{2D}{\beta}}$;



У зв’язку з тим, що все, що хотілося представити, я зробив, хочу виразити велику подяку Молочко Павлу Вікторовичу і Анісімову Ігорю Олексійовичу за той вклад, який вони особисто внесли у роз’язок цієї задачі.

5. Процес горіння супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T-T_0)(1-T) - \lambda n \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{n-\gamma T}{\tau} \end{cases}$$

де T безрозмірна тепр-ра, що відраховується від навколишнього середовища. n- концентрація інгібітору.

Единий, стійкий, однорідний стан означає, що система перетворюється на:

$$\begin{cases} T(T-T_0)(1-T) - \lambda n = 0 \\ n - \gamma T = 0 \end{cases}$$

звідси $T(T-T_0)(1-T)-\lambda\gamma T=0$. яке має єдиний дійсний корінь T=0 (і відповідно n=0) за виконання умови $\left(1-T_0\right)^2 < 4\lambda\gamma$.

Розглянемо умови початку хвиді запалювання. Для цього дослідимо функцію $f\left(T\right) = T\left(T-T_0\right)\left(1-T\right)$. Такій функції відповідає потенціал $\Delta\Phi \equiv \int\limits_{T_1}^{T_3} f\left(T\right)dT$.

Необхідною умовою існування хвилі запалювання є додатність ΔΦ.

$$\Delta\Phi \equiv \int\limits_0^1 f\left(T\right)dT > 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1 T(T-T_0)(1-T)dT = \int\limits_0^1 (-T^3 + (1+T_0)T^2 - T_0 T)dT = \frac{1}{12} - T_0\frac{1}{6} > 0$$

$$T_0 < \frac{1}{2}$$

Тобто при умові, що $T_0 < \dfrac{1}{2}$ побіжить хвиля запалювання.

6. Процес горіння супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T-T_0)(1-T) - \lambda n \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{n-\gamma T}{\tau} \end{cases}$$

де T безрозмірна тепр-ра, що відраховується від навколишнього середовища. n- концентрація інгібітору.
Параметри рівняння відповідають розв'язку у вигляді біжучого імпульсу. Час релаксації інгібітору – великий. Знайти залежність V(n).

Розв'язок:

Будемо шукати його розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, тобто хвилі, що поширюється в просторі з постійною швидкістю без зміни своєї форми: T=T(ξ), $\xi = x - V_0 t$. Тоді рівняння зводиться до вигляду:

$$\begin{cases} -V\dfrac{\partial T}{\partial \xi} = K\dfrac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + T(T-T_0)(1-T) - \lambda n \\ -V\dfrac{\partial n}{\partial \xi} = -\dfrac{n-\gamma T}{\tau} \end{cases}$$

У фазових змінних (u=dT/dξ) це рівняння набуває вигляду:

$$Ku\frac{\partial u}{\partial T} + Vu + T(T-T_0)(1-T) - \lambda n = 0$$

Оскільки час релаксації інгібітору великий вважаємо $\boldsymbol{\lambda n}$ = const і шукаємо розв'язок у вигляді поліному:

$$u(T) = AT^2 + BT + C$$

Після підстановки та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $\boldsymbol{T}$ отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2KA^2 = 1 \\ 3KAB + VA + T_0 + 1 = 0 \\ KB^2 + 2KAC + VB - T_0 = 0 \\ KBC + VC - \lambda n = 0 \end{cases}$$

Звідси отримуємо значення для ***A, B, C***:

$$\begin{cases} A = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2K}} \\ B = -\dfrac{VA + T_0 + 1}{3KA} = -\dfrac{V}{3K} \mp \dfrac{(T_0+1)}{3}\sqrt{\dfrac{2}{K}} \\ C = \dfrac{\lambda n}{V + KB} = \dfrac{\lambda n}{\dfrac{2}{3}V \mp \dfrac{(T_0+1)}{3}\sqrt{2K}} \end{cases}$$

Підставимо все це в третє рівняння системи і отримаємо рівняння для $\boldsymbol{V}$:

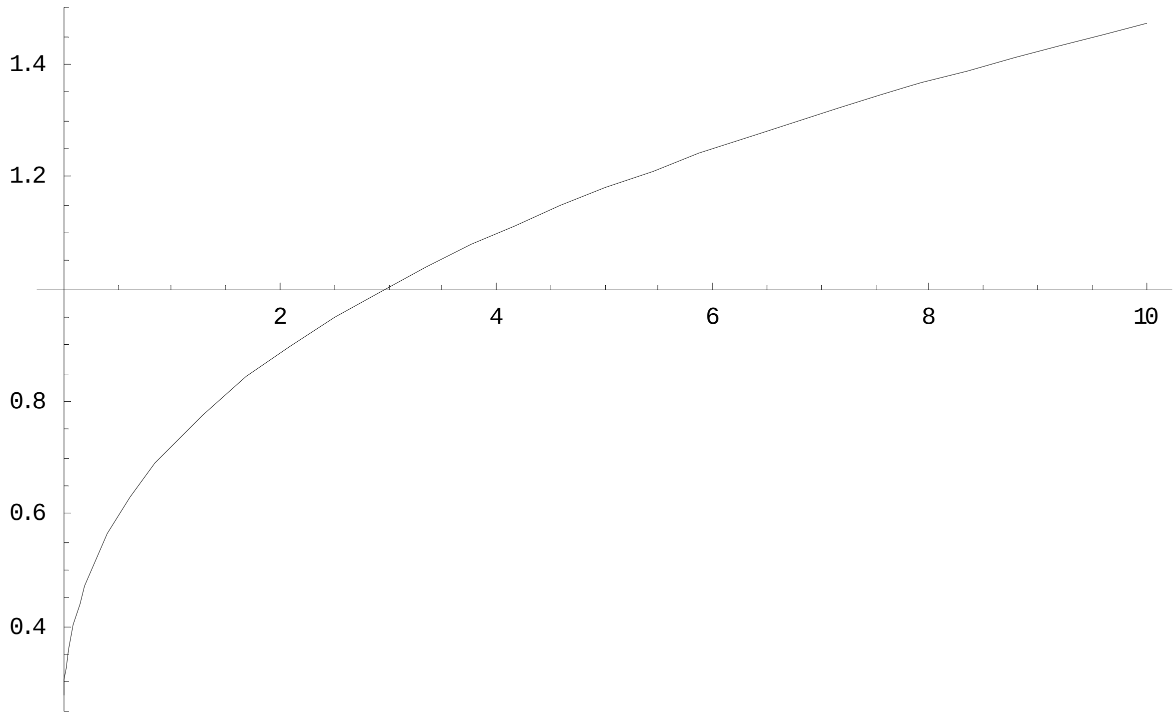
$$K\left(-\frac{V}{3K} \mp \frac{(T_0+1)}{3}\sqrt{\frac{2}{K}}\right)^2 \pm \frac{\sqrt{2K}\lambda n}{\dfrac{2}{3}V \mp \dfrac{(T_0+1)}{3}\sqrt{2K}} + V\left(-\frac{V}{3K} \mp \frac{(T_0+1)}{3}\sqrt{\frac{2}{K}}\right) - T_0 = 0$$

Це рівняння кубічне за $\boldsymbol{V}$, а $\boldsymbol{\lambda n}$ відіграє тут роль вільного члену і призводить лише до зсуву кубічної параболи по вісі $\boldsymbol{y}$.

Якщо все це ввести у математику 4.2, то з отриманих коренів єдиним фізичним є наступний (тут ***Ln*** це ***λn***):

$$\left(1 - T0 + T0^2\right) \Big/ \left(\sqrt{\frac{1}{K}} \left(-2\sqrt{2} + 27\sqrt{2}\, L\, n + 3\sqrt{2}\, T0 + 3\sqrt{2}\, T0^2 - 2\sqrt{2}\, T0^3 + \sqrt{-216\, L\, n + 1458\, L^2 n^2 + 324\, L\, n\, T0 - 54\, T0^2 + 324\, L\, n\, T0^2 + 108\, T0^3 - 216\, L\, n\, T0^3 - 54\, T0^4}\right)^{1/3}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{K}}} \left(\left(-2\sqrt{2} + 27\sqrt{2}\, L\, n + 3\sqrt{2}\, T0 + 3\sqrt{2}\, T0^2 - 2\sqrt{2}\, T0^3 + \sqrt{-216\, L\, n + 1458\, L^2 n^2 + 324\, L\, n\, T0 - 54\, T0^2 + 324\, L\, n\, T0^2 + 108\, T0^3 - 216\, L\, n\, T0^3 - 54\, T0^4}\right)^{1/3}\right)$$

Графік цієї залежності V(n) для T0=0,25; K=0,1 і L=1 має вигляд:



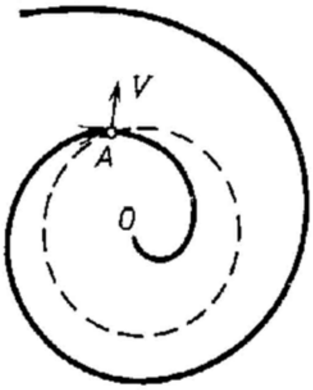
8. Спіральна хвиля в середовищі з відновленням обертається навколо отвору радіусу R. Знайти форму фронту хвилі для випадку, коли спіраль є подвійною. При якому мінімальному значенні R така спіраль ще буде прив'язана до отвору? Залежністю швидкості хвилі від кривини її фронту знехтувати.

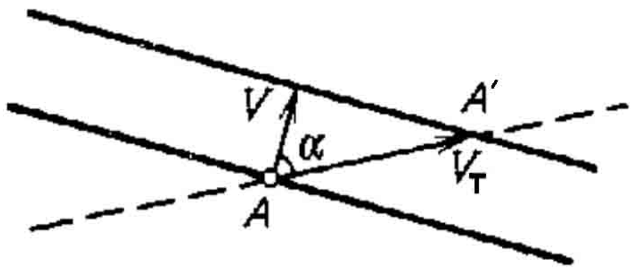
Розв'язування Спершу розглянемо обертання однієї спіралі. Особливості, пов'язані з другою хвилею будуть розглянуті пізніше.

Отже, вважаємо, що в усталеному режимі в полярних координатах спіраль описується формулою $\varphi = \omega \cdot t - \chi(r)$, (1)

де ω - циклічна частота;

$\chi(r)$ - деяка функція, що описує форму спіралі.





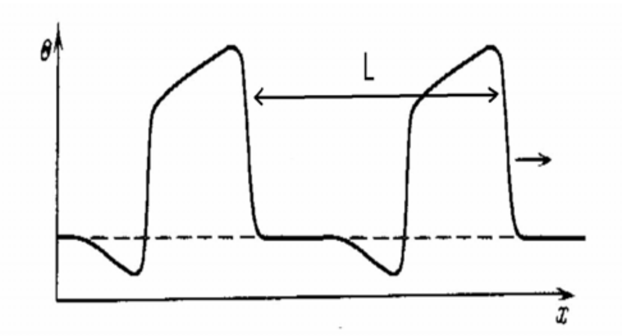
Таким чином форма спіралі не залежить від часу. З часом відбувається лише її поворот з частотою ω. Побудуємо коло радіусом *r* і з центром в початку координат. Точку перетину кола і спіралі позначимо А. З часом положення цієї точки буде змінюватись зі швидкістю $V_T=\omega r$ (2). Побудуємо положення лінії фронту в два близькі моменти часу. Фронт зміщується вздовж нормалі зі швидкістю V. Як видно з рисунка, точка А зміщується зі швидкістю $V_T=V/\cos(\alpha)$ (3). де α- кут між нормаллю до фронту і дотичною до кола в точці А. Враховуючи, що лінія фронту задана як $\varphi = \omega \cdot t - \chi(r)$, можна записати, що $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \cdot \chi_r^2}}$ (4), де $\chi_r = \frac{\partial \chi}{\partial r}$. Прирівнявши праві частини (2), (3) та використавши (4), отримаємо $V = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \chi_r^2}}$ (5). Про величину V буде сказано пізніше, а зараз вважатимемо її відомою. Частоту обертання навколо отвору радіуса R можна розрахувати виходячи з міркувань, що обертаючись навколо отвору, край хвилі не входить і не віддаляється від нього, тобто фронт підходить до отвору під прямим кутом.

Таким чином $\chi_r(R) = 0$. Підставивши цю умову в (5), отримаємо V=ωR (6). Звідси виражаємо ω та підставляємо в (5): $\frac{1}{r^2} + \chi_r^2 = \frac{1}{R^2}$ (7). З (7) інтегруванням знаходимо вираз для форми фронту. $\chi(r) = \int_R^r \sqrt{\frac{1}{R^2 -} - \frac{1}{r^2}} dr$ (8). Як і потрібно, χ(r) – монотонна функція, а це і вказує на те, що фронт хвилі – спіраль.

Крок спіралі h визначається з умови $\chi(r+h) - \chi(r) = \int_r^{r+h} \sqrt{\frac{1}{R^2 -} - \frac{1}{r^2}} dr = 2\pi$ (9).

При великих r h стале і дорівнює h≈2πR (10). Спіраль зі сталим кроком називають архімедовою.

Тепер можна сказати кілька слів про величину V (цього пункту нема в завданні задачі і цей абзац можна не писати). Залежністю швидкості нормального зміщення ми нехтували. Умову (6) можна переписати у вигляді $2\pi R=TV$ (11). T – проміжок часу між двома проходженнями хвилі через будь-яку точку середовища. Обертання хвилі по колу з періодом T можна розглядати як поширення періодичності плоских імпульсів з періодом T. Так як середовище може не повністю відновитись за час T після проходження попереднього імпульсу, то швидкість поширення наступної хвилі вже буде меншою в порівнянні із швидкістю одиночної хвилі. Тому в загальному випадку в (11) слід враховувати залежність швидкості V від періоду обертання: $2\pi R= V(T)\cdot T$. Якщо врахувати, що в нас хвиля подвійна (навколо отвору обертаються дві спіральні хвилі) , то при періоді обертання однієї хвилі T, інтервал між двома збудженнями довільної точки середовища буде T/2. Тому для нашого випадку (11) треба записати у вигляді: $2\pi R=V(T/2)\cdot T$. Звичайно, якщо T дуже велике, то середовище встигає відновитись за час між двома проходженнями хвилі і фронт зміщується зі швидкістю V_o – швидкістю одиночного плоского імпульсу. Врахування залежності V(T/2) ніяк не впливає на форму спіралі, ця залежність визначає частоту обертання.



Якщо радіус отвору R зменшувати, то наступить такий момент, коли період між проходженням хвилі буде таким малим, що середовище не встигатиме відновлюватись і хвиля з таким періодом не зможе існувати. При розв’язуванні задачі про послідовність плоских імпульсів в середовищі з відновленням знаходиться мінімальна відстань між передніми фронтами двох сусідніх імпульсів L_{min} при якій така послідовність ще може існувати. В нашій задачі по колу циркулюють дві спіральні хвилі, їх краї розташовані на кінцях діаметра кола, тому якщо половина довжини кола утвореного отвором буде меншою за L_{min}, то хвиля не зможе циркулювати навколо такого отвору і відірветься від нього перейшовши на граничний радіус обертання, який визначається для випадку подвійної спіральної хвилі з умови $\pi R_{min}=L_{min}$.

№9.Знайти нелінійне дисперсійне рівняння для гармонічних фазових хвиль безпосередньо з нелінійного кінетичного рівняння з дифузією $\lambda - \omega$ моделі. При якій довжині ці хвилі ще можуть існувати?

A-la розв'язок.

Безпосередньо кінетичне дифузійне рівняння записується у вигляді:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\lambda(\rho) + i\omega(\rho)\right]\eta + \left(D_1 - iD_2\right)\Delta\eta \qquad (1)$$

до цього рівняння підставляється η у вигляді комплексної змінної $\eta = \rho e^{i\varphi}$, завдяки чому, за рахунок виділення окремо дійсної та уявної частин, це рівняння розпадається на систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda(\rho)\rho + D_1\left[\Delta\rho - \rho(\nabla\varphi)^2\right] + D_2\left[2(\nabla\rho\cdot\nabla\varphi) + \rho\Delta\varphi\right]; \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(\rho) + D_1\left[\dfrac{2}{\rho}(\nabla\rho\cdot\nabla\varphi) + \Delta\varphi\right] + D_2\left[\dfrac{\Delta\rho}{\rho} + (\nabla\varphi)^2\right]. \end{cases} \qquad (2)$$

Для фазових хвиль підстановкою $\eta = \rho e^{i[\omega_0 t + \psi(\vec{r},t)]}$ отримується саме рівняння для ф.хвиль:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi\,, \qquad (3)$$

де $\quad a = D_2 + D_1 \left.\dfrac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}, \qquad b = D_1 - D_2 \left.\dfrac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}.$

Більш детальні викладки—см. задачу №10.

Тепер, оскільки вимагається самим знайти дисперсійне рівняння, то візьмемо функцію ψ в загальному вигляді, виходячи з міркувань, що в нас повинна бути гармонічна фазова хвиля...

$\psi = A\vec{r} + Bt$, де A буде грати роль хвильового вектора (з фізичних міркувань) хвилі. підставимо цей розв'язок до рівняння (3), та отримаємо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B; \nabla\psi = A; \Delta\psi = 0.$$

$$B = aA^2$$

Якщо A-це хвильовий вектор, то функція ψ набуває такого вигляду:

$$\psi = \vec{k}\vec{r} + a\vec{k}^2 t\,,$$

тобто повний вираз для η буде такий:

$\eta = \rho e^{i[\omega_0 t + (\vec{k}\vec{r}) + a\vec{k}^2 t]}$, тут знак перед $(\vec{k}\vec{r})$ визначається напрямком поширення гармонічної фаз.хвилі (в лекціях просто перед цим доданком стоїть мінус), тобто з цього виразу можна записати дисперсійне співвідношення:

$\omega(\vec{k}) = \omega_0 + a\vec{k}^2$, що і потрібно було знайти...

Користуючись (3), оцінимо час релаксації фази ψ. Припустимо, що $|\nabla\psi| \sim \psi/L$, $\Delta\psi \sim \psi/L^2$, де L – характерний розмір, на якому фаза ψ помітно змінюється. Припустимо також, що $|\psi| << 1$. Тоді (3) можна переписати у формі

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx a\frac{\psi^2}{L^2} + b\frac{\psi}{L^2} \approx b\frac{\psi}{L^2} \qquad (3a)$$

(ми відкинули доданок другого порядку мализни за ψ). Тоді час релаксації фази можна оцінити як

$$\tau_{\psi} = \frac{L^2}{b}.$$

Рівняння (3) отримане за умови, що час релаксації амплітуди τ_ρ є малим. Фактично це означає, що $\tau_\rho << \tau_\varphi$, або

$L >> \sqrt{b\tau_\rho}$ (у правій частині нерівності стоїть довжина дифузії фази ψ за час τ_ρ для лінеаризованого рівняння (3)).

Таким чином, в рамках λ–ω моделі рівнянням (3) можна користуватися лише для опису достатньо довгих хвиль.

Задача10

Нелінійне кінетичне рівняння з дифузією для середовищ автоколивного типу (λ-ω модель) має вигляд $\frac{\partial\eta}{\partial t}=[\lambda(\rho)+i\omega(\rho)]\eta+(D_1-iD_2)\Delta\eta$,

де $\rho=|\eta|$, $\lambda(\rho)$ – монотонно спадна функція, така, що $\lambda(\rho_0)=0$, $\omega(\rho)$ – довільна функція, D_1 та D_2 - сталі. Середовище неоднорідне: $\rho_0=\rho_0(r)$, причому виконується умова $\rho_0(r\to\infty)=\rho_\infty$. Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

Для опису автоколивного середовища необхідно щонайменше два нелінійних кінетичних рівняння з дифузією вигляду (1.1.11).

Розглянемо автоколивне середовище, яке описується змінними $u=u(\mathbf{r},t)$, $v=v(\mathbf{r},t)$. Введемо замість них одну комплексну змінну $\eta=u+iv$. Нехай вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=[\lambda(\rho)+i\omega(\rho)]\eta+(D_1-iD_2)\Delta\eta, \qquad \rho=|\eta|. \tag{1.1.63}$$

Функція $\lambda(\rho)$ повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу $\rho=\rho_0$ (рис. 1.1.16). Функцію $\omega(\rho)$ вважатимемо додатною.

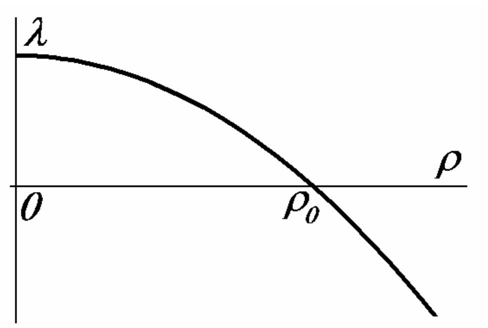


Рис. 1.1.16. Вигляд функції $\lambda(\rho)$.

Щоб з'ясувати властивості середовища, описуваного рівнянням (1.1.63), перейдемо від комплексної змінної до η чисто дійсних змінних ρ та φ, які вводяться із співвідношення $\eta=\rho\exp(i\varphi)$.

Врахуємо, що

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\exp(i\varphi)\right]=\frac{\partial\rho}{\partial x}\exp(i\varphi)+i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\rho\exp(i\varphi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\rho\exp(i\varphi)\right]=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\exp(i\varphi)+2i\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\exp(i\varphi)-\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\exp(i\varphi)+i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\rho\exp(i\varphi),$$

і, отже,

$$\Delta\left[\rho\exp(i\varphi)\right]=(\Delta\rho)\exp(i\varphi)+2i(\nabla\rho\cdot\nabla\varphi)\exp(i\varphi)-\rho(\nabla\varphi)^2\exp(i\varphi)+i\rho(\Delta\varphi)\exp(i\varphi). \tag{1.1.65}$$

Підставимо співвідношення $\eta=\rho\exp(i\varphi)$ з урахуванням (1.1.65) до (1.1.63), скоротимо на $\exp(i\varphi)$ і окремо прирівняємо до нуля дійсну та уявну частини отриманого виразу. Таким чином початкове комплексне рівняння (1.1.63) зводиться до системи двох чисто дійсних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=\lambda(\rho)\rho+D_1\left[\Delta\rho-\rho(\nabla\varphi)^2\right]+D_2\left[2(\nabla\rho\cdot\nabla\varphi)+\rho\Delta\varphi\right];\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\omega(\rho)+D_1\left[\dfrac{2}{\rho}(\nabla\rho\cdot\nabla\varphi)+\Delta\varphi\right]+D_2\left[\dfrac{\Delta\rho}{\rho}+(\nabla\varphi)^2\right].\end{cases} \tag{1.1.66}$$

Будемо тепер шукати розв'язок рівняння (1.1.63) у формі

$$\eta(\vec{r},t)=\left[\rho_0+\delta\rho(\vec{r},t)\right]\exp\left\{i\left[\omega_0 t+\psi(\vec{r},t)\right]\right\}, \tag{1.1.70}$$

тобто вважати, що $\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0+\delta\rho(\mathbf{r},t)$, $\varphi(t)=\omega_0 t+\psi(\mathbf{r},t)$. Тоді система (1.1.66) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta\rho}{\partial t} = \lambda(\rho_0+\delta\rho)(\rho_0+\delta\rho) + D_1\left[\Delta\delta\rho - (\rho_0+\delta\rho)(\nabla\psi)^2\right] + D_2\left[2(\nabla\delta\rho\cdot\nabla\psi) + (\rho_0+\delta\rho)\Delta\psi\right]; \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\omega(\rho_0+\delta\rho)-\omega_0\right] + D_1\left[\dfrac{2}{\rho_0+\delta\rho}(\nabla\delta\rho\cdot\nabla\psi)+\Delta\psi\right] + D_2\left[\dfrac{\Delta\delta\rho}{\rho_0+\delta\rho}+(\nabla\psi)^2\right]. \end{cases}$$
(1.1.71)

Вважаючи, що $|\delta\rho| \ll \rho_0$, знехтуємо $\delta\rho$ всюди в першому з рівнянь системи (1.1.71), крім першого доданку в правій частині. Тут функцію $\lambda(\rho_0+\delta\rho)$ розкладемо в ряд Тейлора і скористаємося позначенням (1.1.69). Отримаємо:

$$-\frac{\delta\rho}{\tau_\rho} - D_1\rho_0(\nabla\psi)^2 + D_2\rho_0\Delta\psi = 0 \qquad (1.1.72)$$

(зроблене є справедливим, якщо формально вважати величину τ_ρ малою того ж порядку, що й $\delta\rho$, тобто припустити, що час релаксації амплітуди коливань є малим). Тоді з (1.1.72) можна записати $\delta\rho$ як функцію ψ:

$$\delta\rho = \rho_0\tau_\rho\left[-D_1(\nabla\psi)^2 + D_2\Delta\psi\right]. \qquad (1.1.72\text{ а})$$

У другому рівнянні системи (1.1.71) в першому доданку у правій частині розкладемо $\omega(\rho_0+\delta\rho)$ в ряд Тейлора, а всіма іншими доданками, пропорційними $\delta\rho$, знехтуємо. Отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left.\frac{d\omega}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\delta\rho + D_1\Delta\psi + D_2(\nabla\psi)^2 \qquad (1.1.73)$$

(***виконані дії є законними, якщо вважати величину dω/dρ великим параметром).*** Нарешті, підставимо вираз (1.1.72 а) для $\delta\rho$ до (1.1.73) і остаточно отримаємо:

ось, вона – відповідь!

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi, \qquad (1.1.74)$$

де введено позначення

$$a = D_2 + D_1\left.\frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}, \qquad b = D_1 - D_2\left.\frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}. \qquad (1.1.75)$$

Залежність $\omega(\rho)$ виражає закон неізохронності таких автогенераторів.

Х-я, що виводиться далі була в минулому році включена ІОА в умову, так що її теж можна використати:

Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (1.1.66). За умов $\partial\rho/\partial t=0$, $\partial\rho/\partial x_i=0$ воно зводиться до вигляду $\rho\lambda(\rho)=0$, звідки $\rho_1=0$ або $\rho_2=\rho_0$.

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (1.1.66) розв'язок у формі $\rho(\mathbf{r}, t)=\rho_{1,2}+\delta\rho\cdot\exp[\alpha t-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$, вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови $\partial\varphi/\partial x_i=0$ можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \qquad (1.1.67)$$

та

$$\alpha_2 = \rho_0\left.\frac{d\lambda}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1 \qquad (1.1.68)$$

(враховано, що $\lambda(\rho_0)=0$). Оскільки $\lambda(0)>0$, то перший корінь буде нестійким ($\alpha_1>0$,принаймні при невеликих k). Оскільки функція $\lambda(\rho)$ є монотонно спадною, тобто $d\lambda(\rho)/d\rho<0$, то другий корінь, навпаки, завжди буде стійким ($\alpha_2<0$). Система релаксуватиме до стану $\rho=\rho_0$ за час

$$\tau_\rho = -\left[\rho_0\left.\frac{d\lambda}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\right]^{-1} \qquad (1.1.69)$$

(при k=0).

Підставимо тепер корінь $\rho=\rho_0$ до другого рівняння системи (1.1.66). Оскільки $\neq 0$, то це рівняння взагалі не має однорідного стаціонарного розв'язку. За умови $\partial\varphi/\partial x_i=0$ воно набуває вигляду $d\varphi/dt=\omega(\rho_0)\equiv\omega_0$, звідки $\varphi(t)=\omega_0 t+\psi$. Відповідно комплексна змінна η набуває вигляду $\eta=\rho_0 \exp[i(\omega_0 t+\psi)]$.

Очевидно, цей розв'язок описує синфазні автоколивання аналізованого середовища.

Відзначимо, що використана при побудові цього розв'язку умова однорідності еквівалентна до умови відсутності зв'язку між сусідніми елементами середовища ($D_1=D_2=0$). Отже, окремі елементи середовища являють собою автогенератори

11. Рівняння для фазових хвиль.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a\left(\nabla\psi\right)^2+b\Delta\psi$$

$$\psi\left(\vec r,t\right)=-\vec k\vec r+ak^2t\,. \qquad (1.1.82)$$

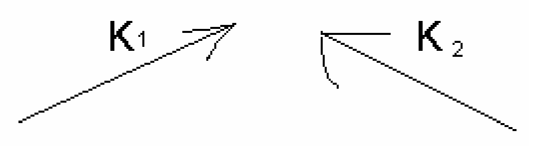
Безпосередня підстановка показує, що вона задовольняє рівняння (1.1.74). Тоді комплексна функція η матиме вигляд:

$$\eta\left(\vec r,t\right)=\rho_0\exp\left(i\omega_0t-\vec k\vec r+iak^2t\right)=\rho_0\exp\left\{i\left[\left(\omega_0+ak^2\right)t-\vec k\vec r\right]\right\}, \qquad (1.1.83)$$

тобто в автоколивному середовищі поширюється фазова хвиля, що характеризується законом дисперсії $\omega(k)=\omega_0+ak^2$ та фазовою швидкістю $v_{ph}=\omega/k=\omega_0/k+ak$.

Розв’язок (1.1.82) стійкий, якщо b>0.

Проаналізуємо взаємодію двох фазових хвиль у двовимірній моделі. Будемо вважати, що обидві хвилі поширюються в зустрічних напрямках уздовж осі x, і в паралельних вздовж y.

	$\mathrm{singn}(k_{1x})=-\,\mathrm{singn}(k_{2x})$ $\mathrm{singn}(k_{1y})=\mathrm{singn}(k_{2y})$

Якщо хвилі антипаралельні, то вони, очевидно, взаємодіяти не будуть.

Причому $\psi(\mathbf{r},t)\to ak_1^2t-\mathbf{k_1r}$ при $\mathbf{k_1r}\to\infty$ і $\psi(\mathbf{r},t)\to ak_2^2t-\mathbf{k_2r}$ при $\mathbf{k_2r}\to+\infty$.

Знову скористаємося змінною Q, введеною співвідношенням (1.1.78).

$$\psi\left(\vec r,t\right)=\frac{b}{a}\ln Q\left(\vec r,t\right). \qquad (1.1.78)$$

\\

необов’язкова частина

Маємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{b}{a}\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad (1.1.79)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln Q\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=1\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{Q}\frac{\partial^2Q}{\partial x^2}\right),$$

тому

$$\nabla\psi=\frac{b}{a}\frac{1}{Q}\nabla Q, \qquad \Delta\psi=\frac{b}{a}\left[-\frac{1}{Q^2}\left(\nabla Q\right)^2+\frac{1}{Q}\Delta Q\right]. \qquad (1.1.80)$$

Підставивши (1.1.79) та (1.1.80) до (1.1.74), можна отримати:

$$\frac{b}{a}\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial t}=a\left(\frac{b}{a}\frac{1}{Q}\nabla Q\right)^2+\frac{b^2}{a}\left[-\frac{1}{Q^2}\left(\nabla Q\right)^2+\frac{1}{Q}\Delta Q\right], \qquad (1.1.81)$$

і остаточно

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=b\Delta Q. \qquad (1.1.81\text{ a})$$

кінець необов’язкової частини

\\\

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=b\Delta Q. \qquad (1.1.81\text{ a})$$

Рівнянню (1.1.81 а) для цієї змінної відповідає розв’язок у вигляді:

$$Q(r,t) = A_1 \exp\left[\frac{a}{b}\vec{k}_1\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_1^2 t\right] + A_2 \exp\left[\frac{a}{b}\vec{k}_2\vec{r} + \frac{a^2}{b}k_2^2 t\right]. \qquad (1.1.84)$$

Покажемо, що він справді задовольняє записаним вище граничним умовам. Справді, якщо показник першої експоненти в (1.1.84) значно більший від показника другої експоненти, тобто

$$-\frac{a}{b}|\,k_{1x}\,|\,x + \frac{a}{b}k_{1y}y + \frac{a^2}{b}k_1^2 t >> \frac{a}{b}|\,k_{2x}\,|\,x + \frac{a^2}{b}k_2^2 t + \frac{a}{b}k_{2y}y\,, \qquad (1.1.85)$$

то другою експонентою взагалі можна знехтувати, і для фази ψ можна записати вираз

$$\psi(x,t) \approx -k_1 x + ak_1^2 t\,,$$

$$\psi(\vec{r},t) \approx k_{1x}x + k_{1y}y + ak_1^2 t \qquad (1.1.86)$$

що буде справедливим в області

$$x << at(k_{1x} + k_{2x}). \qquad (1.1.85\text{ a})$$

Отже, в цій області (ліва піввісь x) існує фазова хвиля з хвильовим числом k_1 і частотою $\omega(k_1)$, яка біжить праворуч. В протилежному випадку, тобто при

$$x >> at(k_{1x} + k_{2x}) \qquad (1.1.87)$$

можна записати, що

$$.\qquad \psi(\vec{r},t) \approx k_{2x}x + k_{2y}y + ak_2^2 t \qquad (1.1.88)$$

Таким чином, в області, що задовольняє умові (1.1.87), тобто на правій півосі x, існує фазова хвиля з хвильовим числом k_2 і частотою $\omega(k_2)$, яка біжить ліворуч.

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r} + a(k_2^2 - k_1^2)t = 0$$

про диференціюємо і розкладемо по напрямках x і y

$$(k_{2z} - k_{1x})v_x + (k_{2y} - k_{1y})v_y = a(k_1^2 - k_2^2)t$$

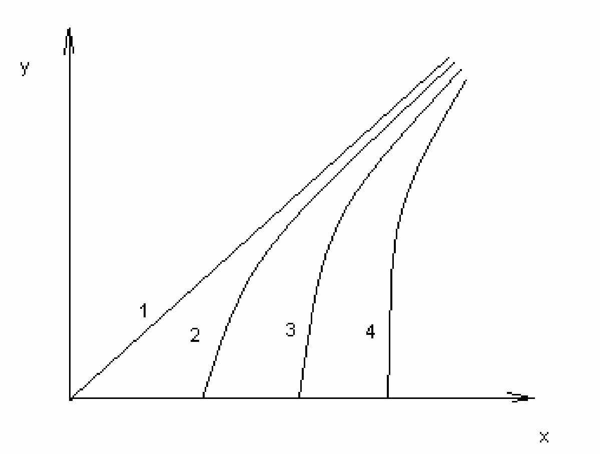
окремо по компонентах:

$$v_x = \frac{a(k_{1x}^2 - k_{2x}^2)t}{(k_{2x} - k_{1x})} = -a(k_{2x} + k_{1x})$$

$$v_y = \frac{a(k_{1y}^2 - k_{2y}^2)t}{(k_{2y} - k_{1y})} = -a(k_{2y} + k_{1y})$$

межа, на якій взаємодіють хвилі, спочатку була прямою лінією, а потім викривлюється.

Ну, щось типу того:



t1<t2<t3<t4

праворуч, якщо $k_{1x}>k_{2x}$, чи ліворуч, якщо $k_{1x}<k_{2x}$. Іншими словами, коротші фазові хвилі поступово витісняють довші хвилі.

Цей результат неодноразово спостерігався в чисельних та натурних експериментах.

12 Узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(\alpha_1+i\alpha_2)u-(\beta_1+i\beta_2)|u|^2u+(d_1+id_2)\Delta u$$

(функція η комплексна, всі параметри дійсні). Знайти рівноважні значення амплітуди та частоти локальних автоколивань і характерний час релаксації амплітуди. Побудувати графік неізохронності локальних автоколивань.

$\frac{\partial u}{\partial t}=(a_1+ia_2)\cdot u-(b_1+ib_2)\,|\,u\,|^2\;u+(d_1+id_2)\Delta u$ Розв’язок рівняння шукаєммо у вгляді: $u=\rho\cdot\exp(i\cdot\varphi)$ і підставимо його в рівняння відкинувши доданок з Δu задяки розгляду малого об’єму системи. Рівняння відповідно розіб’ється на систему:

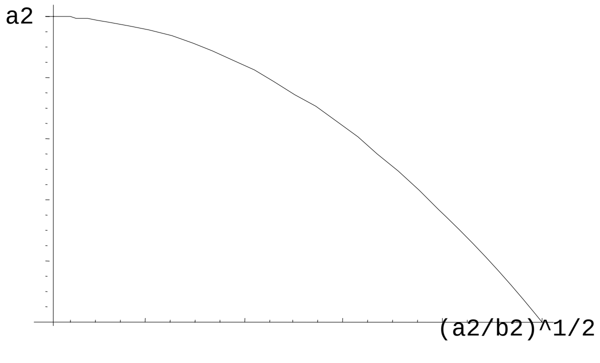
$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}=a_1\rho-b_1\rho^3 \quad (1)\\ \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a_2\rho-b_2\rho^3\,(2)\end{cases}$$

1) З першого рівняння $\frac{\partial\rho}{\partial t}=a_1\rho-b_1\rho^3=0$ знаходимо стаціонарні розв’язки: $\rho_1=0,\rho_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$ стійким є розв’язок $\rho_2=\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$.

2) Час релаксації амплітуди: нехай $\rho=\rho_0+\delta\rho(r,t)$, $|\,\delta\rho\,|<<\rho_0$ $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho)=a_1\rho_0+a_1\delta\rho-b_1(\rho_0^3+3\rho_0^2\delta\rho)$ обмежившись лінійними по $\delta\rho$ членами: $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho)=a_1\delta\rho-3b_1\rho_0^2\delta\rho=-2a_1\delta\rho$ $\quad\delta\rho=\exp(-2a_1(t-t_0))$, час релаксації $\tau=\frac{1}{2a_1}$

3) З другого рівняння отримуємо частоту локальних коливань: $\omega=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\omega(\rho)=a_1-b_2\rho^2$

звідки частота лок. коливань 1) $\omega(\rho_2)=a_2-b_2\frac{a_1}{b_1}$ -рівноважне значення амплітуди 2) $\omega(0)=a_2$.



Задача 13

I_{cr} з умови $\left|\int\limits_{T_1}^{T_c} f(T)\,dT\right| = \left|\int\limits_{T_c}^{T_2} f(T)\,dT\right|$

а) $T < T_c$ $\qquad \Theta(T - T_c) = 0$.

$$f(T) = R_1 I_{cr}^2 (1 + \alpha T) - \gamma (T - T_0) \qquad f(T_1) = 0 \qquad T_1 = \frac{\gamma T_0 + I_{cr}^2 R_1}{\gamma + \alpha I_{cr}^2 R_1}$$

$$f(T) = -aT + b \qquad T_1 = \frac{b}{a}$$

$$I_1 = \left|\int\limits_{b/a}^{T_c} (-aT + b)\,dT\right| = \left|-\frac{a}{2}\left(T_c^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + b\left(T_c - \frac{b}{a}\right)\right| = \frac{1}{2a}(aT_c - b)^2$$

$$a = \gamma - \alpha I_{cr}^2 R_1 \qquad b = \gamma T_0 + I_{cr}{}^2 R_1$$

б) $T > T_c$ $\qquad \Theta(T - T_c) = 0$

$$f(T) = R I_{cr}^2 (1 + \alpha T) - \gamma (T - T_0)$$

далі все за аналогією.

$$I_1 = \left|\int\limits_{T_c}^{d/c} (-cT + d)\,dT\right| = \frac{1}{2c}(cT_c - d)^2$$

Підставляємо явні a, b, c, d :

$$I_{cr}{}^2 = x \qquad a = \gamma - \alpha R_1 x \qquad b = \gamma T_0 + R_1 x \qquad R_1 + R_2 = R$$

$$\frac{\left[(\gamma - \alpha R_1 x) T_c - \gamma T_0 - R_1 x\right]^2}{2(\gamma - \alpha R_1 x)} = \frac{\left[(\gamma - \alpha R_1 x - \alpha R_2 x) T_c - \gamma T_0 - R_1 x - R_2 x\right]^2}{2(\gamma - \alpha R_1 x - \sigma R_2 x)}$$

$$\frac{\left[\gamma T_c - \gamma T_0 - (\alpha T_c + 1) R_1 x\right]^2}{(\gamma - \alpha R_1 x)} = \frac{\left[\gamma T_c - \gamma T_0 - (\alpha T_c + 1) R x\right]^2}{\gamma - \alpha R x}$$

$$(\gamma - \alpha R x)\left[\gamma T_c - \gamma T_0 - (\alpha T_c + 1) R_1 x\right]^2 = (\gamma - \alpha R_1 x)\left[\gamma T_c - \gamma T_0 - (\alpha T_c + 1) R x\right]^2$$

$$(\gamma - \alpha R x)\left[\gamma^2 (T_c - T_0)^2 - 2\gamma(\alpha T_c + 1)(T_c - T_0) R_1 x + (1 + \alpha T_c)^2 R_1^2 x^2\right] =$$
$$= (\gamma - \alpha R_1 x)\left[\gamma^2 (T_c - T_0)^2 - 2\gamma(\alpha T_c + 1)(T_c - T_0) R x + (1 + \alpha T_c)^2 R^2 x^2\right]^2$$

$$x^3\left[-\alpha RR_1^2\left(1+\alpha T_c\right)^2+\alpha R_1R^2\left(1+\alpha T_c\right)^2\right]+$$
$$+x^2\left[\gamma R_1^2\left(1+\alpha T_c\right)+2\gamma\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)\left(T_c-T_0\right)-\gamma R^2\left(1+\alpha T_c\right)^2-2\gamma\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)\left(T_c-T_0\right)\right]+$$
$$+x\left[-2\gamma^2R_1\left(1+\alpha T_c\right)\left(T_c-T_0\right)-\alpha\gamma^2R\left(T_c-T_0\right)^2+2\gamma^2R\left(1+\alpha T_c\right)\left(T_c-T_0\right)+\alpha\gamma^2R_1\left(T_c-T_0\right)^2\right]+$$
$$+\gamma^3\left(T_c-T_0\right)^2-\gamma^3\left(T_c-T_0\right)^2=0$$

$x\begin{pmatrix} x^2\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)^2\left(R-R_1\right)+x\left[\left(1+\alpha T_c\right)^2\left(R_1^2-R^2\right)\right]+ \\ +2\gamma^2\left(1+\alpha T_c\right)^2\left(T_c-T_0\right)\left(R-R_1\right)+\alpha\gamma^2\left(T_c-T_0\right)^2\left(R_1-R\right)\end{pmatrix}=0$ - Єто так MathType нарисовал

$x=0$ – тривіальне і галіме.

$$\alpha R_1R_2R\left(1+\alpha T_c\right)^2x^2-\gamma R_2\left(R_1+R\right)\left(1+\alpha T_c\right)^2x+\gamma^2\left(T_c-T_0\right)R_2\left[2\left(1+\alpha T_c\right)-\alpha\left(T_c-T_0\right)\right]=0$$

$$\alpha R_1R\left(1+\alpha T_c\right)^2x^2-\gamma\left(R_1+R\right)\left(1+\alpha T_c\right)^2x+\gamma^2\left(T_c-T_0\right)\left[2\left(1+\alpha T_c\right)-\alpha\left(T_c-T_0\right)\right]=0$$

$$D=\gamma^2\left(R_1+R\right)^2\left(1+\alpha T_c\right)^4-4\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)^2-\gamma^2\left(T_c-T_0\right)\left[2\left(1+\alpha T_c\right)-\alpha\left(T_c-T_0\right)\right]=$$
$$=\gamma^2\left(1+\alpha T_c\right)^2\left[\left(R_1+R\right)^2\left(1+\alpha T_c\right)^2-4\alpha RR_1\left(T_c-T_0\right)\left[2\left(1+\alpha T_c\right)-\alpha\left(T_c-T_0\right)\right]\right]$$

$$I_{cr}^2=x\Rightarrow I_{cr}=\sqrt{x}$$

$$I_{cr}=\sqrt{\frac{\gamma\left(R_1+R\right)\left(1+\alpha T_c\right)^2\pm\sqrt{D}}{2\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)^2}}$$

I_{cr} можна представити у вигляді:

$I_{cr}=\sqrt{\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-l}}{\varphi}}$ тут $l>0$ тому $\pm\Rightarrow+$

$I_{cr}=\sqrt{\dfrac{\gamma\left(R_1+R\right)\left(1+\alpha T_c\right)^2\pm\sqrt{D}}{2\alpha RR_1\left(1+\alpha T_c\right)^2}}$ $\quad R=R_1+R_2$

межі напруги $I_{cr}RL\le U\le I_{cr}R_2L$

(14)

Горіння в реакторі, що має форму плоского шару, описується системою рівнянь $\frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi\Delta T$; $\frac{\partial n}{\partial t} = W - n\int_{(v)} Q[T(\vec{r})]d\vec{r}$,

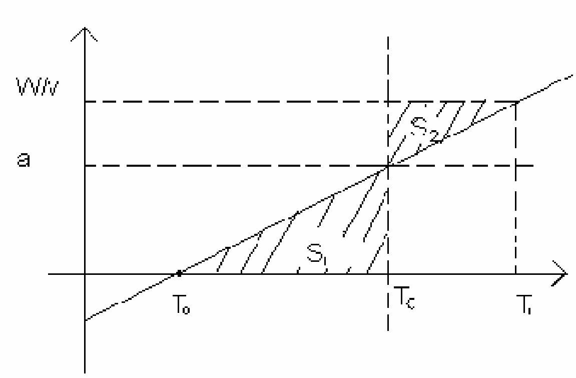
Де T – температура в даній точці реактора, T_0 - температура стінки реактора (підтримується сталою), n – концентрація пального(підтримується однорідною в усьому об'ємі реактора), W – кількість пального, що надходить у реактор за одиницю часу, q(T) – к-сть теплоти, що виділяється при згорянні одиниці пального при т-рі T, Q(T) – к-сть пального, що витрачається за одиницю часу при горінні при т-рі T, γ та χ - сталі. Вважаючи, що q(T) = Q(T) = Θ (T-T_c), де Θ (x) – ф-ція Хевісайда, $T_c > T_0$, визначити т-ру в стаціонарному вогнищі горіння та об'єм цього вогнища.

Розв'язання:

Для стаціонарного випадку $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, тоді $W - n\int_{(r)} Q[T(\vec{r})]d\vec{r}$ =0.

$Q(T) = \Theta(T - T_c)$, де T_c – т-ра запалювання (T > T_c), тоді $Q[T(\vec{r})]$=1, звідки

$W = n\int_{(v)} d\vec{r} = nv$ => n = W/v –концентрація пального.



У стац. стані площі $S_1 = S_2$, =>

$$\frac{1}{2}(T_c - T_0)a = (\frac{W}{V} - a)(T_1 - T_c)\frac{1}{2} \quad (1)$$

З р-ння прямої $\gamma(T_1 - T_0) = \frac{W}{V}$ =>

=> $T_1 = \frac{W}{\gamma V} + T_0$

Підставимо в р-ння (1) =>

$$(T_c - T_0)a = (\frac{W}{V} - a)(\frac{W}{\gamma V} + T_0 - T_C), \quad T_c a - T_0 a = \frac{W^2}{\gamma V^2} + T_0\frac{W}{V} - T_c\frac{W}{V} - a\frac{W}{V\gamma} - aT_0 + aT_c \quad =>$$

$$a\frac{W}{\gamma V} = (\frac{W^2}{\gamma V^2} + T_0\frac{W}{V} - T_c\frac{W}{V}) \;=>\; a = \gamma V(\frac{W}{V^2\gamma} + \frac{T_0}{V} - \frac{Tc}{V}) = \gamma(\frac{W}{V\gamma} + T_0 - T_c).$$

З іншого боку $a = \gamma(T_c - T_0)$ => $\gamma(T_c - T_0) = \frac{W}{V} + \gamma(T_0 - T_c)$ => $\frac{1}{V} = \frac{2\gamma(T_c - T_0)}{W}$ =>

=> $V = \frac{W}{2\gamma(T_c - T_0)}$ **- об'єм вогнища.**

Температура в стаціонарному вогнищі

$$a = \gamma(T_c - T_0), \; (T_c - T_0)a = (\frac{W}{V} - a)(T_1 - T_c) \;=>\; \frac{(T_c - T_0)a}{(\frac{W}{V} - a)} + T_c = T_1 \quad =>$$

$$=> \; T_1 = \frac{(T_c - T_0)(T_c - T_0)\gamma}{\frac{W 2\gamma(T_c - T_0)}{W} - \gamma(T_c - T_0)} + T_c = \frac{T_c - T_0}{2 - 1} + T_c = 2T_c - T_0$$

15.
Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B\left(|A_2|^2 + |A_3|^2\right)\right]A_1 + A_2 * A_3 \,;$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B\left(|A_1|^2 + |A_3|^2\right)\right]A_2 + A_3 * A_1 \,; \qquad (1)$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B\left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)\right]A_3 + A_1 * A_2 \,,$$

де γ - інкремент малих коливань, *B* – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти область стійкості розв'язку, що відповідає відсутності конвекції.

Решение:

Условие отсутствия конвекции имеет вид: $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Произведём исследование устойчивости в области малых отклонений $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$.Подставив в систему (1) вместо A_i , δA_i и, пренебрегая величинами вида $(\delta A_i)^2, (\delta A_i)^3, \delta A_i * \delta A_j, (\delta A_i)^2 * \delta A_j$,получим систему уравнений вида:

$$\frac{d\delta A_1}{dt} = \gamma\delta A_1$$

$$\frac{d\delta A_2}{dt} = \gamma\delta A_2 \qquad (2)$$

$$\frac{d\delta A_3}{dt} = \gamma\delta A_3$$

Решением системы (2) является $\delta A_i = e^{\gamma t}$, для устойчивости решения необходимо чтоб выполнялось условие если $t \to \infty$ то $\delta A_1 \to 0$, что справедливо для области значений $\gamma < 0$

Ответ: область стійкості розв'язку, що відповідає відсутності конвекції. $\gamma < 0$

Задача №16

Система рівнянь для амплітуд мод у випадку конвекції Релея – Бенара має вигляд

$\frac{dA_1}{dt} = \left[\gamma - |A_1|^2 - B\left(|A_2|^2 + |A_3|^2\right)\right]A_1 + A_2 * A_3$;

$\frac{dA_2}{dt} = \left[\gamma - |A_2|^2 - B\left(|A_1|^2 + |A_3|^2\right)\right]A_2 + A_3 * A_1$;

$\frac{dA_3}{dt} = \left[\gamma - |A_3|^2 - B\left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)\right]A_3 + A_1 * A_2$,

де γ - інкремент малих коливань, B – коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами. Знайти область стійкості розв'язку, що відповідає правильним гексагональним коміркам.

Система рівнянь, що розглядається:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{d\tau} = A_2 A_3^* + (\gamma - |A_1|^2 - B(|A_2|^2 + |A_3|^2))A_1 \\ \frac{dA_2}{d\tau} = A_3 A_1^* + (\gamma - |A_2|^2 - B(|A_3|^2 + |A_1|^2))A_2 \\ \frac{dA_3}{d\tau} = A_3 A_1^* + (\gamma - |A_3|^2 - B(|A_1|^2 + |A_2|^2))A_3 \end{cases}$$

Для правильних гексагональних комірок ($|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A|$) перетворимо перше рівняння системи, з урахуванням $A_k = |A| Exp(\phi_k), k = 1..3$, тоді матимемо:

$\frac{d|A|}{d\tau} + i\frac{d\phi_1}{d\tau} = |A|^2 (\cos(\phi_2 - \phi_3 - \phi_1) + i\sin(\phi_2 - \phi_3 - \phi_1)) + |A|(\gamma - |A|^2(1+2B))$, звідки матимемо систему:

$$\begin{cases} \frac{d|A|}{d\tau} = |A|^2 \cos(\phi_2 - \phi_3 - \phi_1) + |A|(\gamma - |A|^2(1+2B)) \\ \frac{d\phi_1}{d\tau} = |A|^2 \sin(\phi_2 - \phi_3 - \phi_1) \end{cases} \qquad (*)$$

Отже бачимо, стаціонарними розв'язками для фази є: $\phi_{10} - \phi_{20} + \phi_{30} = 0$. Легко можна показати, що цей розв'язок є також і стійким, підставивши збурений збурену фазу в друге рівняння системи. Таким чином, перше рівняння системи в стаціонарному випадку прийме вигляд:

$|A_0|^2(1+2B) - |A_0| - \gamma = 0$, а відповідно стаціонарні розв'язки для амплітуди:

$$|A_0|^{(+),(-)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma(1+2B)}}{2(1+2B)}$$

Перевірмо ці розв'язки на стійкість. Нехай $|A| = |A_0| + \delta A$, тоді для розв'язку з плюсом, матимемо:

$$\frac{d\delta A}{d\tau} = -\frac{1 + 4\gamma(1+2B) + \sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2(1+2B)}\delta A - \frac{1 + 3\sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2}\delta A^2 - (1+2B)\delta A^3$$

Залишивши тільки лінійний по δA доданок, бачимо, що розв'язок є стаціонарним, якщо:

$$\frac{1 + 4(1+2B)\gamma + \sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2+4B} > 0 <=> \gamma > -\frac{1}{4(1+2B)}$$

Для розв'язку з мінусом, матимемо:

$$\frac{d\delta A}{d\tau} = -\frac{1 + 4\gamma(1+2B) - \sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2(1+2B)}\delta A - \frac{1 - 3\sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2}\delta A^2 - (1+2B)\delta A^3$$

Лінійний по δA доданок, в межах $\gamma \in \left(-\frac{1}{4(1+2B)}, 0\right)$, є додатним, тобто в цих межах розв'язок є нестійким, при $\gamma > 0$ $|A_0|^{(-)} < 0$, що є не фізично.

Розглянемо ще раз друге рівняння системи (*). Воно також має стаціонарний розв'язок $\phi_{20} - \phi_{30} - \phi_{10} = \pm\pi$. Перевірмо його на стійкість: $\phi_1 = \phi_{10} + \delta\phi_1$, тоді матимемо: $\frac{d\delta\phi_1}{d\tau} = |A|^2 \delta\phi_1$, тобто цей розв'язок є нестійким.

Таким чином, стійким є стаціонарний розв'язок $|A_0| = \frac{1+\sqrt{1+4\gamma(1+2B)}}{2(1+2B)}$, $\phi_{10} - \phi_{20} + \phi_{30} = 0$, при $\gamma > -\frac{1}{4(1+2B)}$.