

1.1

1. На чому ґрунтується доведення Н-теореми Больцмана?

Для доведення цієї теореми використовується відоме з курсу статистичної фізики кінетичне рівняння Больцмана для одностинкової функції розподілу $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + F \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I_B \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}, \quad \vec{r}, \vec{p}, t,$$

де \mathbf{F} – зовнішня сила (для розрідженого газу), а I_B – так званий інтеграл зіткнень Больцмана, який описує процеси дисипації.

Саме наявність інтегралу зіткнень робить рівняння Больцмана необоротним. У явному вигляді інтеграл зіткнень Больцмана записується так:

$$I_B \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = N \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\vec{p}_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left[f(\vec{r}, \vec{p}_1', t) f(\vec{r}, \vec{p}_2', t) - f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f(\vec{r}, \vec{p}_2, t) \right]. \quad (1.1.19)$$

Тут φ та γ – кут та радіус циліндричної системи координат, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ – відносна швидкість частинок перед зіткненням, $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ та \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_1' та \mathbf{p}_2' – імпульси частинок відповідно перед зіткненням та після нього. Вони пов'язані між собою законами збереження імпульсу та енергії:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \quad \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m}. \quad (1.1.20)$$

З урахуванням уведених вище позначень математичне формулювання Н-теореми має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = -k_B N \int I_B \ln f d\vec{p} d\vec{r} \geq 0,$$

Необхідно зазначити, що можливим доведення Н-теореми Больцмана є лише для ідеального газу.

2. Чому виробництво ентропії в замкненій системі частинок, які взаємодіють між собою лише через зіткнення, пов'язане з необоротними процесами?

Тому що як випливає із Н-теореми Больцмана виробництво ентропії пропорційне до інтегралу від інтегралу зіткнень I_B : $\frac{dS}{dt} = -k_B N \int I_B \ln f d\vec{p} d\vec{r} \geq 0$, який описує процеси дисипації, які як відомо є необоротними.

3. Як співвідносяться між собою другий початок термодинаміки, Н-теорема Больцмана та теорема Гіббса?

Другий початок термодинаміки: Для замкнених систем, які не обмінюються з іншими ні енергією, ні речовиною, з другого початку термодинаміки випливає існування деякої функції S (ентропії), яка монотонно зростає з часом доти, доки не досягне свого максимального значення S_{\max} у стані термодинамічної рівноваги, так, що $dS/dt \geq 0$. Поведінка величини $S_{\max} - S$ нагадує функцію Ляпунова.

Н-теорема Больцмана: При формулюванні другого початку термодинаміки поняття ентропії було введено феноменологічно. Значно пізніше Л. Больцман запропонував інтерпретацію ентропії як міри молекулярного хаосу. Відповідно закон зростання ентропії слід розуміти як вияв зростання дезорганізації замкненої системи. Як відомо, другий початок термодинаміки був сформульований Кельвіном та Клаузіусом на основі узагальнення експериментальних даних як постулат. Больцман уперше аналітично довів твердження, аналогічне до нього за змістом, для моделі ідеального газу. Це твердження увійшло в літературу як Н-теорема Больцмана (від англійського слова heat – тепло). З урахуванням уведених вище позначень математичне формулювання Н-теореми має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = -k_B N \int I_B \ln f d\vec{p} d\vec{r} \geq 0$$

Теорема Гіббса: Узагальненням Н-теореми Больцмана на випадок системи частинок із довільною взаємодією є теорема Гіббса. Але Гіббс не розглядав еволюцію системи в часі, й відповідно теорема Гіббса не стверджує, що при переході до рівноважного стану ентропія монотонно зростає. Гіббс лише порівнював ентропію довільного стану з ентропією рівноважного стану, але за однієї додаткової умови: середня енергія довільного стану має дорівнювати середній енергії рівноважного стану (для Н-теореми Больцмана ця умова, як уже відзначалося, виконується автоматично). Як уже вказувалося, ентропія Больцмана введена для системи частинок, що не взаємодіють між собою. Для розгляду системи частинок, що взаємодіють, користуються іншим визначенням

ентропії – так званою ентропією Д.Гіббса. Розглянемо $6N$ -вимірний фазовий простір $X = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$. Кожна точка такого простору відповідає певному стану системи з N частинок. При статистичному описі точки розташовуються в просторі X випадковим чином, і можна ввести відповідну функцію розподілу $f_N(X,t)$, що в загальному випадку залежить від часу та задовольняє звичайній умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(X,t) dX = 1.$$

Тоді ентропія Гіббса задається співвідношенням

$$S_G(t) = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} f_N(X,t) \ln[f_N(X,t)] dX + S_0.$$

4. Як співвідносяться між собою ентропія Больцмана, ентропія Гіббса та ентропія Шеннона?

Ентропія Больцмана: Больцман запропонував інтерпретацію ентропії як міри молекулярного хаосу. Відповідно закон зростання ентропії слід розуміти як вияв зростання дезорганізації замкненої системи. Больцман пов'язав число p – ймовірність реалізації даного макроскопічного стану – з ентропією S співвідношенням

$$S = k_B \ln p$$

Ентропія Гіббса: Як уже вказувалося, ентропія Больцмана введена для системи частинок, що не взаємодіють між собою. Для розгляду системи частинок, що взаємодіють, користуються іншим визначенням ентропії – так званою ентропією Д.Гіббса.

Розглянемо $6N$ -вимірний фазовий простір $X = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$. Кожна точка такого простору відповідає певному стану системи з N частинок. При статистичному описі точки розташовуються в просторі X випадковим чином, і можна ввести відповідну функцію розподілу $f_N(X,t)$, що в загальному випадку залежить від часу та задовольняє звичайній умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(X,t) dX = 1.$$

Тоді ентропія Гіббса задається співвідношенням

$$S_G(t) = -k_B \int_{-\infty}^{\infty} f_N(X,t) \ln[f_N(X,t)] dX + S_0.$$

Ентропія Шеннона: Поняття ентропії Больцмана та Гіббса характеризують статистичний підхід до опису системи частинок, так що мікроскопічний стан системи характеризується набором координат та імпульсів частинок, які її складають. Виявляється, що це поняття можна узагальнити на випадок статистичного ансамблю будь-якої фізичної природи. Розглянемо тепер довільний статистичний ансамбль, стан якого характеризується деяким набором змінних X . Нехай ці змінні характеризуються функцією розподілу $f(X,t)$, яка задовольняє умові нормування.

Величина

$$S_S(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(X,t) \ln[f(X,t)] dX + S_0$$

називається ентропією Шеннона (на честь К.Шеннона – одного з творців теорії інформації). Ентропія Шеннона вступає узагальненням поняття ентропії на статистичні ансамблі довільної природи. Вона може розглядатися як міра невизначеності при статистичному описі.

З визначення ентропії Шеннона зрозуміло, що при розгляді ансамблю частинок вона зводиться до ентропії Гіббса.

5. Порівняйте між собою структури, що виникають у системах при низьких температурах, та дисипативні структури.

Поговоримо тепер про системи зі сталою температурою. Для опису таких систем потрібно користуватися вже не ентропією S , а вільною енергією Гельмгольца $F = E - TS$. Для ізотермічних систем замість закону зростання ентропії діє закон зменшення вільної енергії.

Структура формули для F відбиває конкуренцію між енергією E та ентропією S . При низьких температурах $TS \rightarrow 0$, і мінімум вільної енергії F відповідає мінімуму енергії E (і, як правило, невеликим значенням S). При зростанні температури стан системи зсувається в бік зростання ентропії S і вже не відповідає мінімуму енергії E .

Справді, при низьких температурах речовина звичайно набуває форми кристалів, що мають упорядковану структуру і, відповідно, малу ентропію. При зростанні температури кристалічні структури поступово руйнуються. При достатньо високих температурах реалізується газоподібний стан речовини з високою ентропією.

Проте в природі існує також принципово інший тип структур, які породжуються нерівноважним станом системи. Саме такі структури (вони називаються дисипативними) будуть розглядатися в цьому курсі. Головна відмінність між системами при низьких температурах та дисипативними структурами – це ті причини, що призводять до їх виникнення, у випадку структур при низьких температурах – причина організації системи – намагання системи прийти до стану із мінімумом енергії, а у випадку дисипативних структур можуть бути всілякого роду інші причини.

1.2

1. Утворення структур у первісно однорідному середовищі призводить до зменшення ентропії. Як це узгоджується з другим початком термодинаміки?

Такі структури можуть утворюватися у відкритих системах або у система, де частинки взаємодіють між собою, або і те і інше. А другий початок термодинаміки для таких систем не застосовується. Тому з другим початком термодинаміки це не узгоджується. Для системи, частинки якої взаємодіють, в ролі другого початку т-д використовується теорема Гіббса, яка не стверджує, що ентропія монотонно з часом зростає, тому виникнення структур нічому не суперечить.

2. Порівняйте між собою рівняння неперервності в електродинаміці та рівняння балансу ентропії. Що в них спільне і що – відмінне?

$$\text{Рівняння неперервності: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0$$

$$\text{Рівняння балансу: } \sigma(S) = \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\varphi}$$

Ці рівняння майже однакові. Легко помітити, що в електродинаміці об'ємній густині ентропії s відповідає об'ємна густина заряду ρ , обидві густини потоків і заряду і ентропії позначені як φ . Відмінність полягає в тому, що в електродинаміці заряд не зникає і не виникає, а лише змінюється потоком φ . Ентропія ж навпаки — може зникати і виникати. За ці процеси в рівнянні відповідає величина $\sigma(S)$ — густина виробництва ентропії.

3. Запишіть рівняння балансу ентропії в інтегральній формі.

$$\text{Маємо } \frac{\partial}{\partial t} \int_V s dV = \int_{(V)} \sigma(S) dV - \int_V \operatorname{div} \vec{\varphi} dV$$

Або $\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} s dV = \int_{(V)} \sigma(S) dV - \oint_{S1} \varphi_n dS$, де $\sigma(S)$ — густина виробництва ентропії, φ — густина потоку ентропії, s — об'ємна густина ентропії, $S1$ — поверхня, що оточує об'єм V . φ_n — нормальна складова вектора φ до поверхні $S1$.

4. Наведіть кілька прикладів систем, де має місце локальна рівновага.

Локальна рівновага полягає в наступному: що в кожному малому елементі об'єму локальна ентропія $s=dS/dV$ є функцією тих самих локальних макроскопічних змінних, що й для рівноважної системи, і не залежить від градієнтів.

Припущення про локальну рівновагу не суперечить тому, що система в цілому може бути нерівноважною. Так, при розширенні газу в трубці (нерівноважний процес) локальний зв'язок між тиском, густиною і температурою дається тим самим рівнянням стану $p/\rho T = \text{const}$, що і в стані рівноваги.

Припущення про локальну рівновагу означає, що дисипативні процеси є значними, тому великі відхилення від статистичної рівноваги виключаються. В багатьох випадках це означає наявність достатньої кількості зіткнень.

Таким чином, припущення про локальну рівновагу справедливе для газів середньої густини, тим більше для рідин та твердих тіл, і несправдливе, наприклад, для сильно розріджених газів.

5. Наведіть кілька прикладів систем, де локальна рівновага порушується.

Див. попереднє питання. Приклад — сильно розріджений газ (дисипативні процеси є незначними, тому великі відхилення від статистичної рівноваги мають місце і в кожному малому елементі об'єму локальна ентропія $s=dS/dV$ не є функцією тих самих локальних макроскопічних змінних, що й для рівноважної системи).

6. Чи застосовна формула для густини виробництва ентропії через узагальнені термодинамічні сили та відповідні потоки для великих відхилень від стану термодинамічної рівноваги?

Формула для густини виробництва ентропії через узагальнені термодинамічні сили X_α та відповідні потоки, або швидкості необоротних процесів J_α : $\sigma = \sum_\alpha J_\alpha X_\alpha \geq 0$

Ця формула має місце при довільних відхиленнях від положення рівноваги. Для великих відхилень незастосовна лише лінійна нерівноважна термодинаміка і всі формули, що з неї випливають, бо порушується припущення про лінійну залежність J_α від X_α .

7. Чому утворення дисипативних структур можливе тільки при значних відхиленнях від термодинамічної рівноваги?

Структури утворюються за рахунок внутрішнього виробництва ентропії.

При малих відхиленнях має місце лінійна нерівноважна термодинаміка. В цій термодинаміці припускають лінійний зв'язок між узагальненими термодинамічними силами X_α та відповідними потоками, або швидкостями необоротних процесів J_α : $J_i = \sum_j L_{i,j} X_j$

З урахуванням цього припущення можна отримати наступну формулу: $\frac{d_i S}{dt} = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j \geq 0$

Остання формула показує, що внутрішня ентропія з часом зростає, тому виникнення структур неможливе (при виникненні структур ентропія повинна спадати, бо відбувається певне упорядкування). Отже при малих відхиленнях від положення т-д рівноваги структури виникати не можуть, можливе виникнення лише при великих відхиленнях.

1.3

1. Чи можливе порушення умов стійкості класичної термодинаміки?

2. Який з можливих станів рівноваги системи називають термодинамічною гілкою? Наведіть кілька прикладів

Термодинамічною гілкою називають розв'язок, який проходить через точку, що відповідає стаціонарному однорідному стану системи. Прикладом такої гілки може бути розв'язок для концентрації проміжних речовин у реакціях типу $A \rightleftharpoons X \rightleftharpoons B$, або розв'язкам модельної хімічної реакції, типу брюсселятор.

3. За яких умов термодинамічна гілка може стати нестійкою? Наведіть кілька прикладів.

На достатньо великій відстані від точки рівноваги термодинамічна гілка може стати нестійкою. Причиною цього є те, що на великих відстанях від точки рівноваги флуктації та зовнішні малі збурення вже не можуть погаситися. Така ситуація можлива у реакціях автокаталітичного типу (коли продукт реакції є одночасно її каталізатором) (див. п.1.3.2). До класу таких реакцій належать більшість біохімічних реакцій.

4. До якого класу належать хімічні реакції, що протікають у брюсселяторі? Які реальні аналоги брюсселятора?

Реакції, що протікають у брюсселяторі належать до хімічних реакцій автокаталітичного типу. Реальною реакцією такого типу моделі є так звана реакція Білоусова-Жаботинського. Інші приклади:

А) В будь-якому процесі горіння завдяки наявності вільних радикалів – досить активних молекул із неспареним електроном, які, реагуючи з іншими молекулами, призводять до подальшого збільшення кількості вільних радикалів і тим к процесу, що прискорюється.

Б) Самовідтворення – одне з найбільш характерних властивостей життя. В своїй основі воно є результатом деякого автокаталітичного циклу, в якому реплікація генетичного матеріалу відбувається завдяки участі

спеціальних білків. В свою чергу ці білки синтезуються завдяки інструкціям, які утримуються в генетичному матеріалі.

5. Порівняйте між собою характер втрати стійкості системи при біфуркації Андронова-Хопфа та при біфуркації Тьюрінга.

Дивись додатково пункт 1.3.3.1, 1.3.3.2. Розіб'ємо площину $\{b, c\}$ на характерні області з різними значеннями $\text{Re}\lambda_{1,2}$ та $\text{Im}\lambda_{1,2}$ (рис. 1.3.2).

В області I маємо $\lambda_{1,2} < 0$ ($\text{Im}\lambda_{1,2} = 0$). Тут малі відхилення від розв'язку (1.3.25) будуть експоненціально згасати з часом.

В області II маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Тут згасання малих відхилень від однорідного стаціонарного розв'язку матиме осциляторний характер.

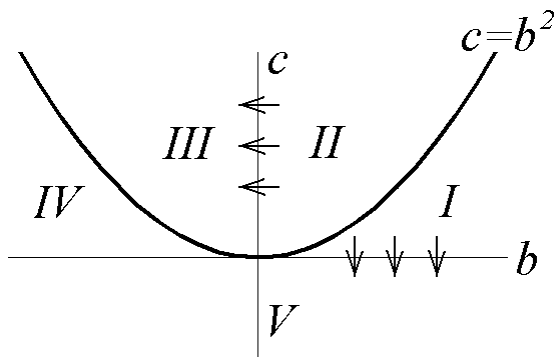


Рис. 1.3.2. Характерні області стійкості та нестійкості стаціонарного однорідного розв'язку для бруселятора.

Отже, I і II – це області стійкості однорідного стаціонарного розв'язку. В усіх інших областях цей розв'язок буде нестійким.

В області III маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$. Іншими словами, в цій області відхилення від положення рівноваги матиме характер біжучої хвилі, амплітуда якої з часом зростає, або суперпозиції таких хвиль. Випадок $k=0$ (або $D_x = D_y = 0$) дає синфазні коливання, амплітуда яких зростає з часом. Перехід з області II в область III відповідає (при $k=0$) відомій біфуркації Андронова – Хопфа, або м'якому самозбудженню коливань.

В області IV маємо $\text{Im}\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{1,2} > 0$. Відхилення від положення рівноваги являє собою просторово періодичне збурення, що монотонно зростає з часом, (так звана аперіодична нестійкість) або набір таких збурень.

Нарешті, в області V буде $\text{Im}\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, тобто поведінка відхилень від рівноваги буде приблизно такою ж, як і в області IV. Перехід з області I в область V відповідає так званій біфуркації Тьюрінга.

1.4

1. В яких випадках поняття еволюції та самоорганізації збігаються, а в яких – ні? Наведіть кілька прикладів.

Еволюція — це більш загальне поняття. Самоорганізація це лише один із можливих шляхів еволюції системи. І якщо еволюція системи йде шляхом самоорганізації, то в цьому випадку можна казати, що ці два поняття збігаються.

Приклад, коли два поняття збігаються: розглянемо статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля. Якщо зворотній зв'язок буде більший за порогове значення самозбудження, то в системі буде встановлюватися стан розвиненої генерації, що відповідає стану з більшою самоорганізацією, ніж при відсутності генерації. Тут система еволюціонує по шляху самоорганізації.

Приклад, коли два поняття не збігаються: ізольована посудина з ідеальним газом. В системі з часом встановлюється стан термодинамічної рівноваги, який ніяк не належить до самоорганізації.

2. В якому сенсі можна говорити про статистичний ансамбль автогенераторів Ван-дер-Поля?

Як лише статистичну модель опису автогенератора Ван-дер-Поля з заданими параметрами.

3. Порівняйте між собою формулювання S-теорема Климонтовича та її застосування до ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля.

S-теорема Климонтовича: процеси самоорганізації приводять до зменшення ентропії системи.

Її застосування до ансамблю автогенераторів Ван-дер-Поля вимагає накладення ще однієї додаткової умови: умову сталості середньої енергії.

4. Порівняйте між собою теорему Пригожина та принцип мінімуму виробництва ентропії Климонтовича.

Теорема Пригожина стверджує, що в стаціонарних нерівноважних станах виробництво ентропії досягає свого мінімуму, а при наближенні до таких станів – зменшується з часом. Тобто теорема характеризує еволюцію системи з часом.

А принцип мінімуму виробництва ентропії Климонтовича розглядає еволюцію системи в просторі керівних параметрів.

Для справки принцип мінімуму виробництва ентропії Климонтовича: Подумки продовжимо в точку $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{cr}+\Delta\mathbf{a}$ розв'язок, який реалізувався при $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{cr}-\Delta\mathbf{a}$, а в точці $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{cr}+\Delta\mathbf{a}$ є нестійким. Відповідну густину виробництва ентропії позначимо через σ_u . Подібно до того, як це було зроблено в теоремі Гіббса та S-теоремі Климонтовича, на систему необхідно накласти деяку додаткову умову. Вибір такої умови визначається структурою виразу, який визначає виробництво ентропії. Наприклад, у згаданих вище розрахунках течій вважалася незмінною напруженість на стінках каналу або труби. Тоді виробництво ентропії в новому стійкому стані, що виник після чергової біфуркації, буде меншим, ніж для старого стану, продовженого в нестійку для цього стану область:

$$\sigma_s \leq \sigma_u.$$

5. Наведіть кілька прикладів біфуркацій і вкажіть, які варіанти подальшого розвитку системи при цьому виникають.

Біфуркація звичайно супроводжується вибором одного з кількох можливих варіантів розвитку системи. Так, у дисипативному осциляторі з потенціалом вигляду

$$\Phi(x) = \alpha x^2 + \beta x^4 \quad (\beta > 0) \quad (B.67)$$

при від'ємних α виникають дві стійкі точки рівноваги – $x_{1,2} = \pm(|\alpha|/2\beta)^{1/2}$ (рис. 1.4.1). Яку з них оберє система при переході керівного параметра α через біфуркаційне значення $\alpha=0$, визначає початкове відхилення від попередньої точки рівноваги $x=0$.

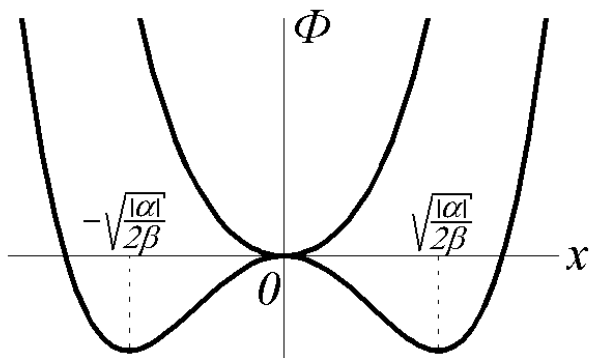


Рис. 1.4.1. Поява нових положень рівноваги при проходженні системи через біфуркаційну точку.

Можна навести подібні потенціали, а також розглянути п. 1-3-3-3 (брюсселятор), де є наведено два типи біфуркацій.

6. Яку роль відіграють флуктуації при проходженні системи через біфуркаційну точку?

Фактично відхилення системи від положення рівноваги в момент її проходження через біфуркаційну точку визначається флуктуаціями. Отже, саме флуктуації визначають той шлях, яким розвиватиметься система після біфуркації.

Можна показати, що в біфуркаційних точках, де термодинамічна гілка втрачає стійкість, спостерігається зростання рівня флуктуацій. Саме така ситуація, наприклад, має місце в автогенераторі Ван-дер-Поля при переході через точку, що відповідає порогу самозбудження.

Після того, як керівний параметр перейшов через біфуркаційне значення, роль флуктуацій знову стає незначною, і розвиток системи протікає еволюційним шляхом.

2.1.1

1. Чи можна впливати на кінетику відкритих (нерівноважних) систем шляхом зміни зовнішніх параметрів? Відповідь дати на прикладі горіння в комірці та моделі Шльогля.

При розгляді авто хвильових процесів в бістабільних середовищах, що описуються одновимірним нелінійним кінетичним рівнянням з дифузиею $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, кінетика процесів буде визначатись виглядом кінетичної функції $f(u)$. Шляхом зміни зовнішніх параметрів можна змінювати вигляд цієї функції, що як результат відобразиться на кінетиці процесів відкритих нерівноважних систем. Зовнішні параметри можуть буди різними в залежності від конкретної системи.

В випадку горіння в розподіленій комірці ($f(T) = \frac{q}{C} T - \gamma(T - T_0)$) зміна температури навколишнього середовища призводить до різної поведінки системи: якщо температура навколишнього середовища дуже низька, запалювання взагалі неможливе (рис. 2.1.3 а); якщо температура запалювання перевищує температуру навколишнього середовища, то єдино можливий стаціонарний стан – горіння (рис. 2.1.3 б); в деякому проміжному діапазоні значень система формально має три стаціонарні однорідні стани – T_0 , T_c та T_1 (рис. 2.1.3 в), з яких два стійкі T_0 (без горіння) та T_1 (з горінням). Причому поширення хвилі запалювання чи гасіння також залежать від конкретного значення температури навколишнього середовища.

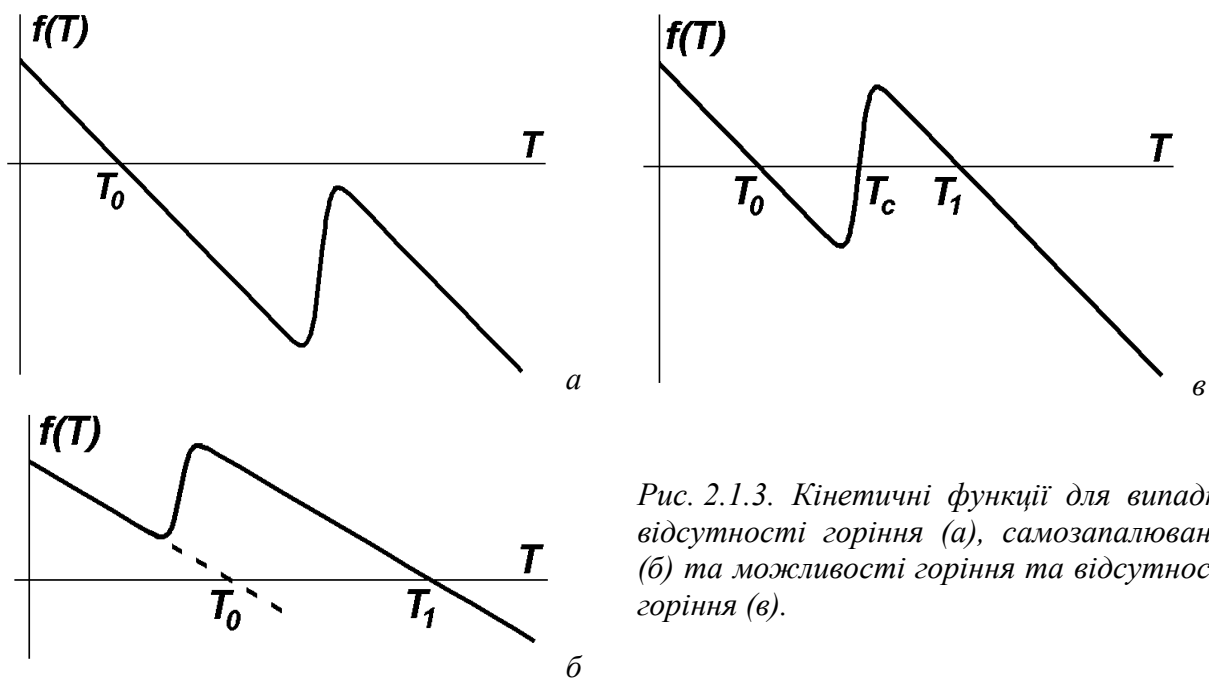


Рис. 2.1.3. Кінетичні функції для випадків відсутності горіння (а), самозапалювання (б) та можливості горіння та відсутності горіння (в).

В хімічній реакції за моделлю Шльогля кінетична функція має вигляд $f(X) = K_1 A X^2 - K_2 X^3 - K_3 X + K_4 B$. Додаючи в середовище, де протікає реакція, каталізатори, чи іншими сторонніми чинниками впливаючи на ймовірності протікання реакції (тобто коефіцієнти $K_1 A$, K_2 , K_3 та $K_4 B$) можна змінювати вигляд кінетичної функції і як наслідок кінетику процесів в системі. Якщо величини $K_1 A$, K_2 , K_3 та $K_4 B$ приблизно однакові за величиною, то графік кінетичної функції $f(x)$ матиме вигляд як показано на рис. 2.1.4.

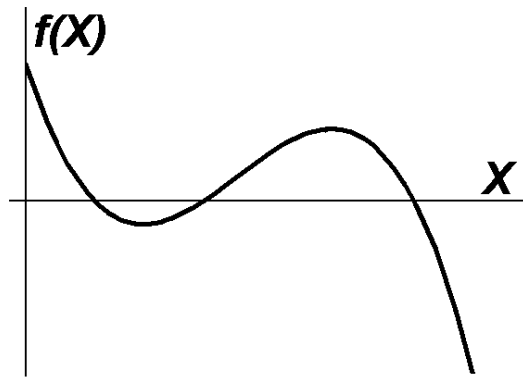


Рис. 2.1.4. Кінетична функція для концентрації речовини X у реакції Шльогля.

2. Чим визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в бістабільних середовищах?

Аналізуючи рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ шляхом шукання розв'язку у вигляді стаціонарної хвилі (тобто переході до змінних $u = u(\xi)$, $\xi = x - V_0 t$ (так званий автомодельний розв'язок)) можна прийти до рівняння $Du'' + V_0 u' + f(u) = 0$, яке формально можна розглядати як рівняння дисипативного нелінійного осцилятора, де швидкість V_0 відіграє роль параметра дисипації. Перейшовши до аналізу процесу в фазовому просторі, де потенціал визначається $\Phi(u) = \int f(u) du$, можна наглядно побачити (рис. 2.1.6а), що для переходу з одного стаціонарного стану в інший різницю потенціалів $\Delta\Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du$ (рис. 2.1.6б) має компенсувати сила тертя (яка повинна бути додатна чи від'ємна в залежності від знаку $\Delta\Phi$) аналогом чому є величина $V_0 du/d\xi$.

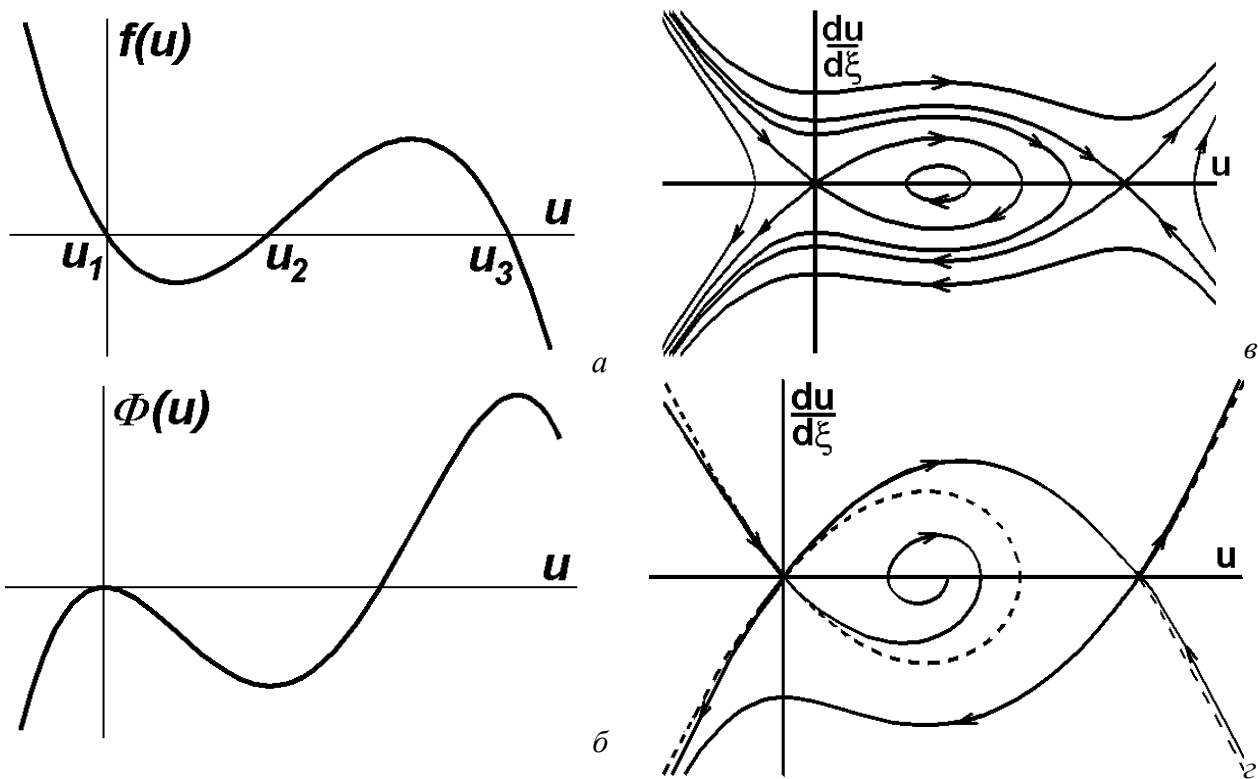


Рис. 2.1.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання.

Строго розв'язуючи можна отримати формулу для швидкості фронту хвилі: $V_0 = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du / \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi$. Аналізуючи вираз можна зробити висновок: а) $\Delta\Phi > 0 \Rightarrow V_0 > 0$ – хвиля запалювання (причому чим більша різниця потенціалів, тим швидше поширюється хвиля); б)

$\Delta\Phi < 0 \Rightarrow V_0 < 0$ – хвиля гасіння; в) $\Delta\Phi = 0 \Rightarrow V_0 = 0$ – хвиля не поширюється (конкретний стан горіння чи ні залежить від початкових умов).

3. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих фронтів.

Поняття фазової та групової швидкості хвилі можна застосовувати до біжучих фронтів з деякими відмінностями ніж до звичайних хвиль. Як відомо, фазова швидкість є фазовою характеристикою хвилі і визначає швидкість переміщення фази хвилі в певному напрямку. Групова швидкість є енергетичною характеристикою хвилі і характеризує швидкість перенесення енергії в системі. Так як в автохвилях в бістабільних середовищах немає поняття фази, то і в них немає фазової швидкості. Натомість швидкість поширення хвилі перемикання можна ототожнити з груповою швидкістю, так як в різних конкретних ситуаціях вона в тій чи іншій формі відповідає перенесенню енергії в системі (дифузійні доданки в нелінійних кінетичних рівняннях дифузійного типу $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{D}(\vec{u}) \Delta \vec{u}$).

В випадку горіння в розподіленій системі переніс енергії здійснюється за рахунок перенесення тепла (температури), в реакції Шльогля – речовини X, експансії популяції – перехід тварин в інше місце.

4. У чому відмінність між хвилею заселення та хвилею запалювання в бістабільному середовищі?

Однією і найбільш визначальною різницею між хвилею заселення та хвилею запалювання в бістабільному середовищі є з яких саме стаціонарних станів відбувається перехід.

В випадку хвилі запалювання система має два рівноважні стаціонарні стани (кінетична функція має два стаціонарні рівноважні розв'язки) і при проходженні хвилі відбувається перехід з одного такого стану в інший. На рис.2.1.6а показаний приклад такої функції де U_1 та U_3 стаціонарні розв'язки яким відповідають максимуми потенціалу на рис 2.1.6б і перехід з одного стану в інший в фазовому просторі продемонстровано на рис. 2.1.6г.

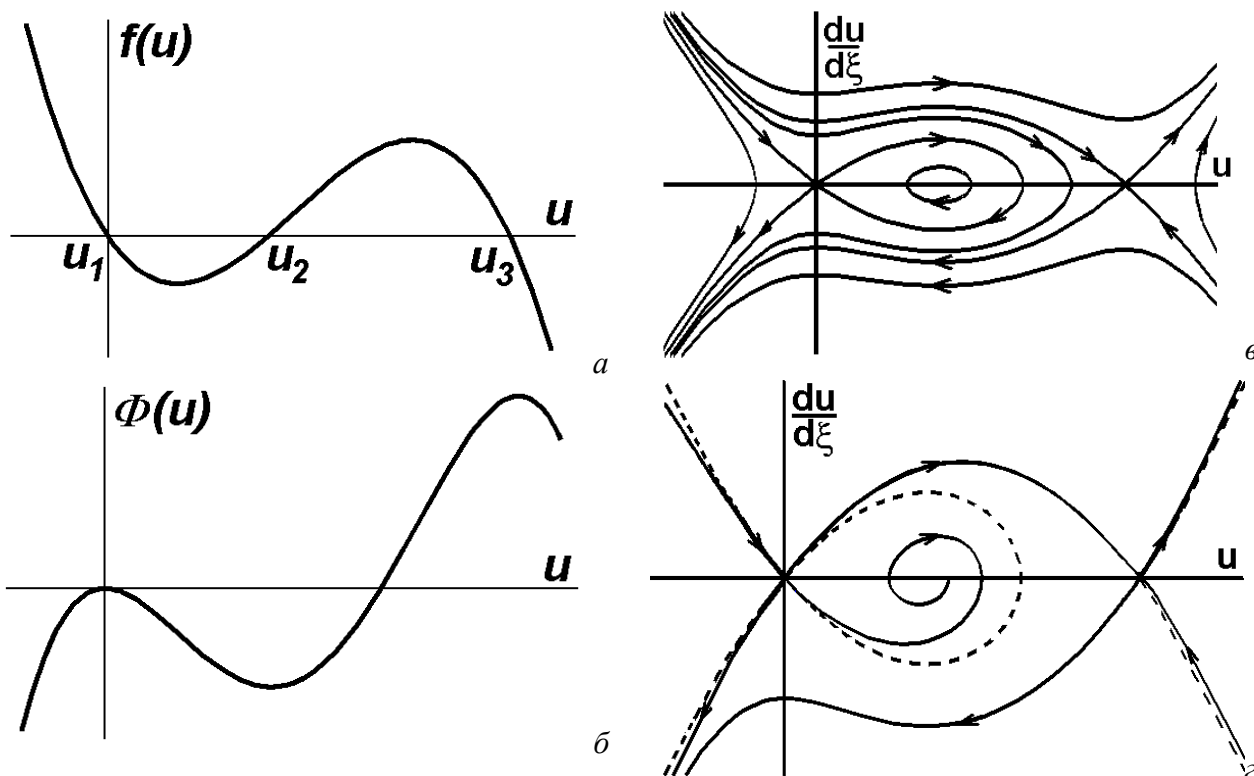
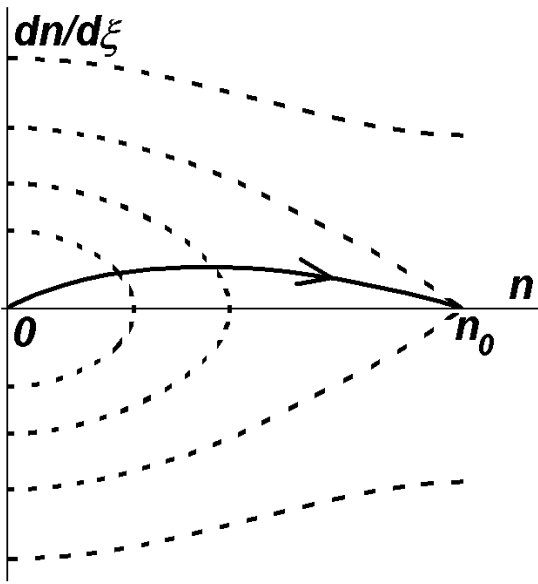


Рис. 2.1.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання.

В випадку хвилі заселення система переходить з початкового нерівноважного стаціонарного стану в стійкий стаціонарний стан. Слід зауважити, що така хвиля притаманна лише біологічним системам в яких в принципі не можливі флуктуації і які(системи) можуть знаходитись в нерівноважному стані досить довгий проміжок часу. Цього не можна сказати про фізичні системи, де завжди присутні



флуктуації і середовище під їх впливом переходить до стаціонарного рівноважного стану. На рис.1 показаний приклад такого переходу в фазовому просторі.

← рис.1

5. Від чого залежить ширина фронту хвилі запалювання?

На це питання можна відповісти точно, якщо обрати модельну функцію $f(u)$ у формі $f(u) = u(u - u_0)(1 - u)$, $0 < u_0 < 1$ (тоді вдається проінтегрувати рівняння

$$D \frac{d^2u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + f(u) = 0$$

до кінця). Перейшовши до фазових змінних ($w = du/d\xi$) і проінтегрувавши рівняння $Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0$ можна отримати розв'язок у

вигляді $w(u) = \sigma u(1 - u)$, де $\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{2D}}$. Повертаючись до

старих

змінних

(розв'язуючи

$$\frac{du}{d\xi} = \sigma u(1 - u)$$

можна

отримати

$$u(\xi) = \frac{e^{\sigma(\xi - \xi_0)}}{1 + e^{\sigma(\xi - \xi_0)}} = \frac{1}{1 + e^{-\sigma(\xi - \xi_0)}} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{\sigma(\xi - \xi_0)}{2} \right],$$

де ξ_0 – стала інтегрування ($u = u(\xi)$, $\xi = x - V_0 t$ змінні автомодельного розв'язку). Тоді профіль хвилі перекидання матиме вигляд:

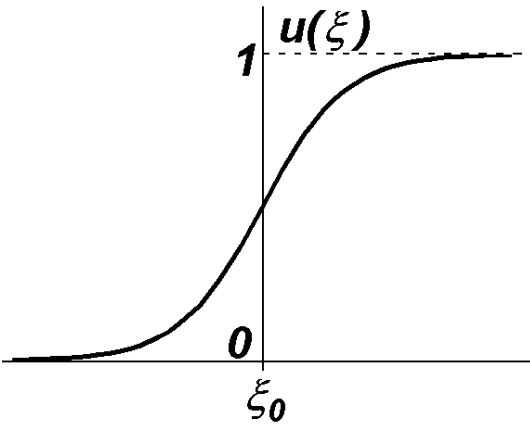
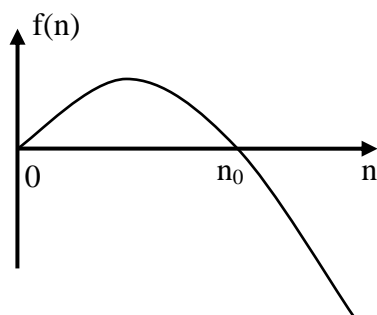


Рис. 2.1.7. Профіль хвилі перекидання.

Ширина фронту хвилі може бути оцінена як $\Delta\xi \sim \frac{1}{\sigma} = \sqrt{2D}$, тобто чим сильніша дифузія, тим більш розмитим буде фронт хвилі перекидання.

6. Намалюйте кінетичну функцію для середовища, в якому можливі хвилі заселення.



Думка автора трішки відмінна від того, що запропонував пан Анісімов у своєму посібнику. В даному варіанті залежності є два стаціонарні стани $n = \{0, n_0\}$. Лінеаризуючи рівняння $\frac{\partial n}{\partial t} = f(n)$ поблизу стаціонарних станів

можна отримати $\frac{\partial n}{\partial t} = (n - n_i) f'(n_i)$. Взяти кінетичну функцію в

запропонованому вигляді легко пересвідчитись, що точка $n=0$ є нестійкою ($f'(0) > 0$ і малі відхилення експоненційно зростатимуть), а n_0 –

стійка ($f'(n_0) < 0$). І як відомо в середовищі, яке має нестійкий стаціонарний початковий стан і стійкий кінцевий, можливі хвилі заселення.

7. Якісно охарактеризуйте еволюцію довільного початкового збурення в бістабільному середовищі.

При аналізі будемо вважати, що часи релаксації $\tau_{1,3}$ ($f' T_i \equiv \frac{df}{dT} \Big|_{T=T_i} \equiv \frac{1}{\tau_i}$) до обох стійких

стаціонарних станів u_1, u_3 значно менші від характерного часу проходження хвилі перекидання Δt ($\Delta t = \frac{\Delta \xi}{V_0} = \left(u_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$). Тоді за довільних початкових умов система спершу в кожній точці простору за

малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови.

Якщо в початковий момент часу в середовищі співіснують області з $u(x) < u_2$ та $u(x) > u_2$, то воно спершу в кожній точці простору за малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови. Після цього в середовищі побіжить хвиля перемикавання, напрямком якої визначається “різницею потенціалів” $\Delta \Phi$ ($\Delta \Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du$), і в середовищі врешті рещт встановиться той із станів $u \in \{u_1, u_3\}$, якому відповідає більше значення потенціалу $\Phi(u)$. Зокрема, дві зустрічні хвилі перемикавання загасять одна одну.

Якщо $\Delta \Phi = 0$, то $V_0 = 0$, тобто в середовищі можливе співіснування областей $u = u_1$ і $u = u_3$. Це – випадок формування стаціонарної дисипативної структури.

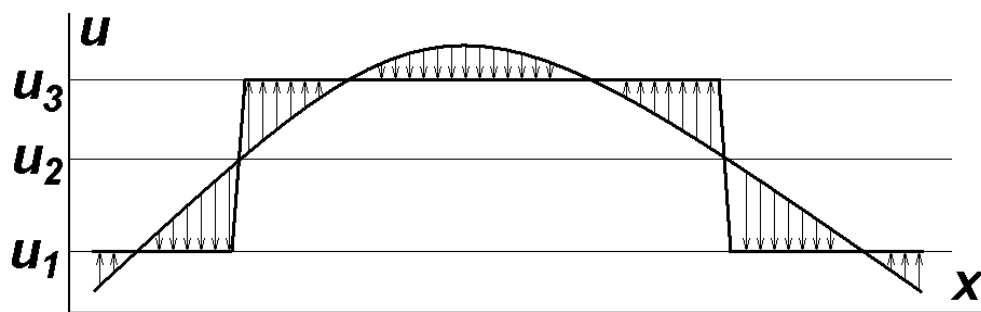


Рис. 2.1.8. Швидка релаксація бістабільного середовища до стаціонарних однорідних станів.

8. Чому фронт лісової пожежі звичайно буває плоским?

Ліс в певному наближенні можна розглядати, як бістабільне середовище з двома станами: живим і згарище. Лісова пожежа є прикладом хвилі перекидання. Використаємо розв’язок для швидкості поширення хвиль перекидання в двовимірному середовищі $V \stackrel{R}{\approx} V_0 - \frac{D}{R}$, де V_0 – швидкість

поширення хвилі з плоским фронтом, R – радіус кривизни фронту, D – коефіцієнт дифузії, який отримано в полярній системі координат з аксіальною симетрією. Якщо на плоскому фронті хвилі перекидання виникне опуклість, вона буде загальмовуватися, так як $R > 0 \Rightarrow V = V_0 - \frac{D}{R} < V_0$, і, навпаки,

западина на фронті буде прискорюватися $R < 0 \Rightarrow V = V_0 - \frac{D}{R} > V_0$ (рис. 2.1.9). В результаті форма фронту підтримуватиметься плоскою, що і спостерігається на прикладі лісової пожежі. Якісно це можна пояснити тим, що при опуклому фронті довжина фронту більша і тому більше тепловідлення в навколишнє середовище, і як результат менша швидкість поширення. Для западини на фронті все навпаки.

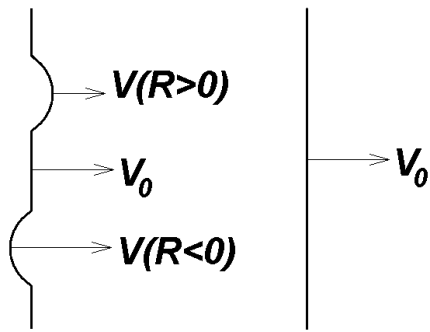


Рис. 2.1.9. Еволюція збурень плоского фронту перекидання в бістабільному середовищі.

9. Чи залежать біжучі фронти від початкових і граничних умов? Як саме?

В бістабільних середовищах фронти біжучих хвиль не залежать від початкових і граничних умов, а визначаються лише властивостями середовища. Початкові умови задають тільки напрямок поширення хвиль і відповідні значення координат з часом (прив'язані до конкретної системи координат). Так до прикладу швидкість хвилі перемикання, час перемикання залежать виключно від коефіцієнта дифузії D та кінетичної функції $f(u)$. Якщо розглядати фронт хвилі перемикання в двовимірному випадку, то він прагне прийняти плоску форму і різні опуклості і западини з часом випрямляються за рахунок різних швидкостей руху (рис. 2.1.9).

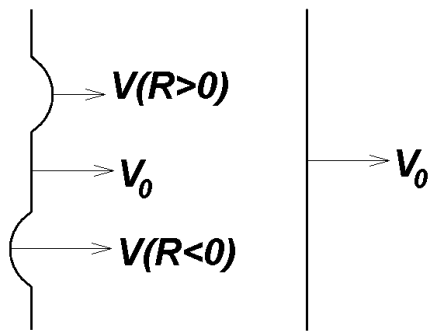


Рис. 2.1.9. Еволюція збурень плоского фронту перекидання в бістабільному середовищі.

Така поведінка біжучих фронтів притаманна всім автохвилям, що поширюються в розділених активних нелінійних дисипативних середовищах.

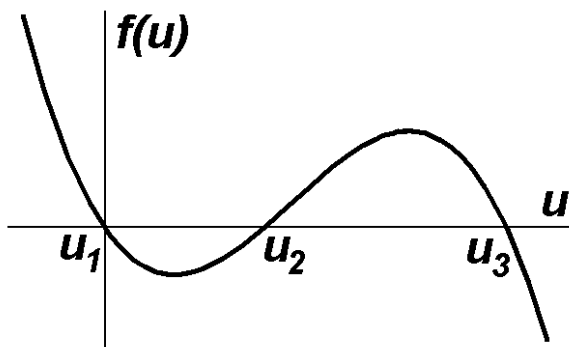
10. Чому з трьох стаціонарних станів бістабільного середовища один виявляється нестійким?

Якщо u в системі є стійкий стаціонарний стан, то це означає що при відхиленні від цього стану система буде прагнути знову повернутись до нього. Якщо таких станів два, то існує нестійкий стаціонарний стан між ними, в якому система не прагне повернутись ні до першого ні до другого.

Якщо розглядати однорідне нелінійне кінетичне рівняння з дифузиею для бістабільного середовища

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

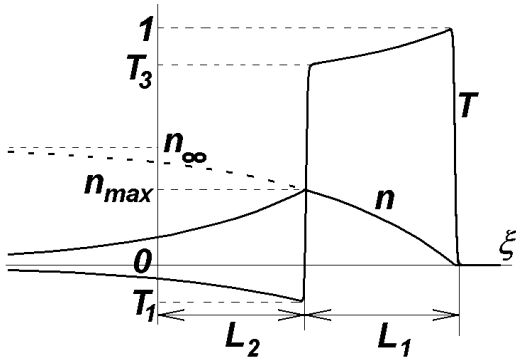
в якому кінетична функція $f(u)$ має вигляд:



Для того щоб розв'язок u_i був стійким потрібно щоб похідна від кінетичної функції в точці u_i була від'ємною $f'(u_i) < 0$ (тоді малі відхилення від стаціонарних станів експоненційно згасатимуть). Забезпечення двох таких умов (u_1, u_3) при нерозривній кінетичній функції можливе тільки в тому випадку, коли існує ще один розв'язок u_2 , де $f'(u_2) > 0$ (тобто нестійкий стаціонарний розв'язок).

2.1.2

1. Якісно поясніть вигляд профілю температури для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням.



На мал. зображено профілі температури(T) та концентрації інгібітору(n) для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням.

Якщо додати до малюнку часову вісь, то вона буде протилежна осі ξ (т.я. $\xi = z-Vt$).

Йдемо справа-наліво (по єврейськи ☺):

- запалювання відбувається під дією деякого зовнішнього збурення. Температура дуже швидко зростає від 0 до 1 (умовних одиниць), бо речовина переходить з першого в другий стан (середовище з відновленням має 2 стани, другий з яких є метастабільним).
- При горінні починається виділення інгібітору(він є продуктом горіння). Таким чином в середовищі пішла автохвиля горіння. n зростає і цим самим пригнічує горіння (сменшує T). Горіння триває на ділянці L_1
- при досягненні n_{max} горіння закінчується – виникає хвиля гасіння, яка прямує за хвилиєю горіння з такою самою швидкістю (це процес спонтанного переходу назад в перший стабільний стан). Температура при цьому рівна T_3 і різко падає до T_1 (яка є менше температури середовища, що позначена за 0).
- Далі інгібітор вже не виділяються і поступово прямує до нуля, а температура повертається до рівноважного значення(0). Цей процес називається відновленням і триває на довжині L_2 .

2. Чим визначається максимальна концентрація інгібітору при поширенні біжучого імпульсу в середовищі з відновленням?

Концентрація інгібітору буде зростати доки це не призведе до такого зсуву вниз кінетичної функції, коли інтеграл

$$\Delta\Phi \equiv \int_{T_1}^{T_3} f(T) dT$$

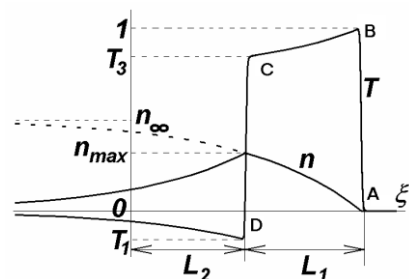
змінить свій знак, що буде умовою виникнення хвилі гасіння. Отже, максимальна концентрація інгібітору знаходиться з тієї умови, що при максимальній концентрації інгібітора вищезгаданий інтеграл повинен бути протилежний за знаком та рівний по модулю цьому ж інтегралу але за нульової концентрації інгібітора – що є не що інше як умовою рівності швидкостей хвилі гасіння та запалювання.

$$n_{max} = \frac{2\Delta f}{\beta} = \frac{2\alpha}{27\beta} \frac{1-2T_0}{1+T_0} \frac{1-T_0}{2-T_0}$$

Залежить від :

- T_0 – температура запалювання
- α – коефіцієнт з представлення кінетичної ф-ції у вигляді полінома $f(T) = \alpha T(T-T_0)(1-T)$
- β – інтенсивність впливу інгібітора на процес горіння

3. Як будується фазовий портрет для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням у випадку, коли дифузією інгібітору можна знехтувати?



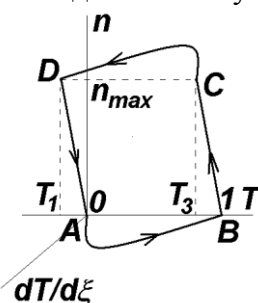
Маєм графік \leq (див. питання 2.1.2.1) з описом процесів.

Ідем далі.

Оскільки система, яка використовувалася для аналізу біжучого імпульсу, відповідає системі з півтора ступенями вільності, то відповідний фазовий простір буде тривимірним.

За координати можна, наприклад, узяти

n , T та $dT/d\xi$. Фазовий портрет біжучого імпульсу в цих координатах поданий на рис. внизу. Ділянки AB та CD , що лежать у площинах $n=0$



змінні

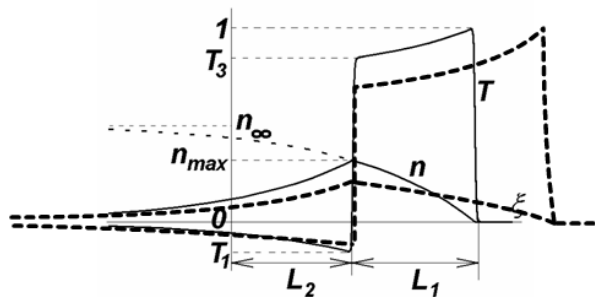
та

$n=n_{\max}$ – це сепаратриси, що йдуть із сідла в сідло (пор. з рис. 2.1.6 г). Вони відповідають ділянкам швидкого руху – хвилі запалювання (AB) та хвилі гасіння (CD). Ділянки BC та DA відповідають повільному руху (BC – імпульс горіння, DA – час релаксації).

4. Чому в середовищі з відновленням хвиля запалювання та хвиля гасіння, що формують біжучий імпульс, мають однакову швидкість?

Легко зрозуміти, що швидкість хвилі гасіння в усталеному режимі має дорівнювати швидкості хвилі запалювання. Нехай, наприклад, $v_{\text{гас}} < v_{\text{зап}}$. Тоді довжина імпульсу горіння буде збільшуватись. В результаті на його задньому фронті зростатиме концентрація інгібітору, збільшуватиметься „негативна різниця потенціалів” і, відповідно, $v_{\text{гас}}$ зростатиме. Якщо ж $v_{\text{гас}} > v_{\text{зап}}$, імпульс горіння буде вкорочуватися, що спричинить зменшення швидкості його заднього фронту.

5. Як зміниться профіль біжучого імпульсу при врахуванні дифузії інгібітору?



Лінії пунктиром – з врахуванням дифузії.

В цьому випадку імпульс «розлізеться» в сторони по часу, зросте його тривалість та просторовий розмір.

Максимум n_{\max} зменшиться.

L_1 та L_2 відповідно також збільшаться.

T_1 та T_3 стануть меншими по модулю.

Врахування дифузії інгібітору призведе до того, що інгібітор буде проникати у фронт біжучого імпульсу тим самим зменшуючи його амплітуду, за заднім фронтом біжучого

імпульсу його дифузія буде призводити до того, що для забезпечення виникнення хвилі гасіння біжучий імпульс повинен мати більшу довжину, у протилежному випадку частина інгібітору за рахунок дифузії піде геть, порушивши умови виникнення хвилі гасіння. Амплітуда хвилі також зменшиться за модулем.

6. Чим визначається тривалість біжучого імпульсу?

Див. викладки 2.1.2.2 і далі:

... Тепер максимальна концентрація інгібітору знаходиться із першого рівняння системи (2.1.35):

$$n_{\max} = \frac{2\Delta f}{\beta} = \frac{2\alpha}{27\beta} \frac{1-2T_0}{1+T_0} \frac{2-T_0}{2-T_0} \quad (2.1.48)$$

$$n_{\infty} = \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma\beta}{\alpha(-T_0)}}$$

Відповідно довжину імпульсу горіння L_1 визначаємо з умови

$$n_{\infty} \left(1 - \exp\left\{-\frac{L_1}{\theta_1 v}\right\}\right) = n_{\max} \quad (2.1.49)$$

(ліва частина слідує з виразу для n : $n(\xi) = n_{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\theta_1 v}\right) \right]$)

$$\text{Де } \theta_1 = \frac{\tau}{1 - \frac{\gamma\beta}{\alpha(-T_0)}}$$

Таким чином,

$$L_1 = \theta_1 v \ln \frac{n_{\max}}{n_{\infty} - n_{\max}} \quad \text{- довжина імпульсу горіння}$$

Часова тривалість імпульсу горіння: $t = L_1/V_0$

Таким чином t визначається з граничних умов $n=n_{\max}$ та $n=0$ і залежить від параметрів системи.

7. У чому полягає якісна відмінність між солітонами Кортевега – де Вріза та біжучими імпульсами?

СОЛИТОН – это уединенная волна в средах различной физической природы в замкнутых системах, сохраняющая неизменной свою форму и скорость при распространении.

Слід звернути увагу на виділене в визначенні слово – це є основна відмінність:

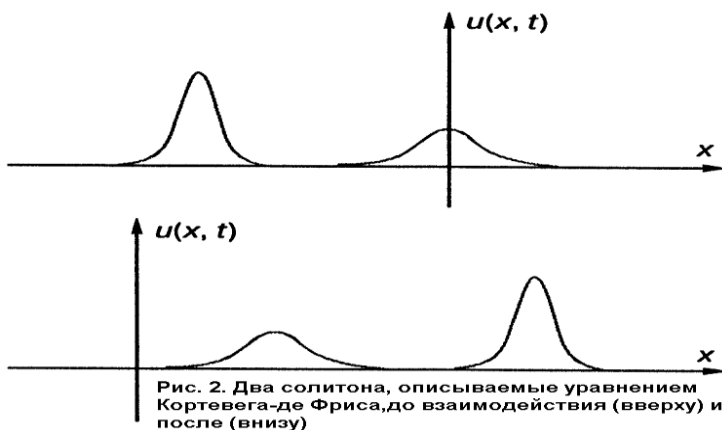
- солітони розглядаються лише в замкнених системах, а біжучі імпульси – у відкритих.

Продолжая вычислительные эксперименты по моделированию распространения таких волн, Крускал и Забуски рассмотрели их столкновение. Остановимся подробнее на обсуждении этого замечательного факта. Пусть имеются две уединенные волны, описываемые уравнением Кортевега—де Фриса, которые различаются амплитудами и движутся друг за другом в одном направлении (рис. 2). Из формулы для уединенных волн (8) следует, что скорость движения таких волн тем выше, чем больше их амплитуда, а ширина пика уменьшается с ростом амплитуды. Таким образом, высокие уединенные волны движутся быстрее. Волна с большей амплитудой догонит движущуюся впереди волну с меньшей амплитудой. Далее в течение некоторого времени две волны будут двигаться вместе как единое целое, взаимодействуя между собой, а затем они разъединятся. Замечательным свойством этих волн является то, что после своего взаимодействия форма и скорость этих волн восстанавливаются. Обе волны после столкновения лишь смещаются на некоторое расстояние по сравнению с тем, как если бы они двигались без взаимодействия.

Дадим определение солитона [4]. *Солитоном* называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при собственном движении и столкновении с себе подобными уединенными волнами, то есть представляет собой устойчивое образование. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз.

Таким чином відмінність №2:

- солітони при лобовому зіткненні розходяться(проходять один повз одного), а біжучі імпульси гасять один одного при зустрічі(наприклад, пожежу можна зупинити, пустивши їй на зустріч іншу).



8. Порівняйте між собою залежності швидкості біжучого фронту в

бістабільному середовищі та швидкості біжучого імпульсу в середовищі з відновленням від температури.

Обидва типи середовищ описуються однаковим рівнянням – одновимірним нелінійним кінетичним рівнянням дифузійного типу:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{f} \nabla \vec{u} + \tilde{D} \nabla^2 \vec{u}$$

При розгляді біжучого імпульсу в середовищі з відновленням імпульс розглядається як дві біжучі одна за одною автохвилі, які взяті з розгляду бістабільного середовища. Таким чином вони однакові, описуються тими ж рівняннями і ми наведемо відповідні рівняння з двох розділів(позначення там трохи різні):

$$V_0 = \frac{u_0 - \frac{1}{2}}{\sigma} = \mp \frac{1 - 2u_0}{2} \sqrt{2D} = \mp \sqrt{\frac{D}{2}} (1 - 2u_0) \quad \text{- вигляд швидкості хвилі перекидання у бістабільному середовищі}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\alpha \chi}{2}} (1 - 2T_0) \quad \text{- швидкість імпульсу в середовищі з відновленням}$$

T_0 – температура запалювання (в інших позначеннях – U_0)

α – коефіцієнт з представлення кінетичної ф-ції у вигляді полінома $f(T) = \alpha T (T - T_0) (1 - T)$

$$\chi - \text{коэф. з рівняння } \chi \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V_0 \frac{dT}{d\xi} + \alpha T (T - T_0) (1 - T) - \beta n = 0;$$

Так як біжучий імпульс це є не що інше як суперпозиція хвиль гасіння та запалювання, то можна стверджувати, а останні характерні для бістабільних середовищ, то можна стверджувати, що характер залежностей від температури хвиль у бістабільних середовищах та біжучих імпульсів у бістабільних середовищах буде однаковий. Але все ж таки є одна характерна відмінність: у бістабільних середовищах зменшення температури середовища призводить до можливого зникнення хвилі запалювання та виникнення хвилі гасіння, у середовищах

із відновленням при великій температурі маємо можливість спостерігати біжучі імпульси, а при малих (менших від 1/2) можливим є існування лише хвиль гасіння, а, отже, є неможливим виникнення біжучого імпульсу, в цьому і полягає головна відмінність

9. Як можна збудити періодичну хвилю в середовищі з відновленням?

Існує два принципових способи збудити періодичну хвилю в середовищі з відновленням:

- можна просто періодично створювати збурення в системі і таким чином ініціювати хвилю. Наприклад, можна кожен рік вирощувати поле коноплі і регулярно кожен рік його спалювати(☺ або щось подібне).

Описане явище спостерігалось в експерименті, коли шар розчину, в якому відбувалася світлочутлива реакція Білоусова – Жаботинського, піддавали періодичному освітленню.

- Можна створити пейсмейкер

В літературі існує 2 теорії походження пейсмейкерів:

○ Одна з них полягає в тому, що джерелом концентричних хвиль є пара елементів середовища, які коливаються в протифазі та періодично збуджують один одного. В такій ситуації потрібно, щоб час рефрактерності буде меншим від часу перебування в збудженому стані.

○ Інша точка зору полягає в тому, що виникнення пейсмейкерів пов'язане з локальними неоднорідностями середовища (домішки, бульбашки газу). В околі таких сторонніх включень елементи середовища спонтанно переходять в автоколивний режим. Створюємо такі локальні неоднорідності – і ми вирішили проблему. (МАБУТЬ ЦЕ НАЙЛЕГШИЙ ВАРІАНТ)

10. Чому періодичні хвилі в середовищах із відновленням мають обмеження зверху на величину хвильового числа?

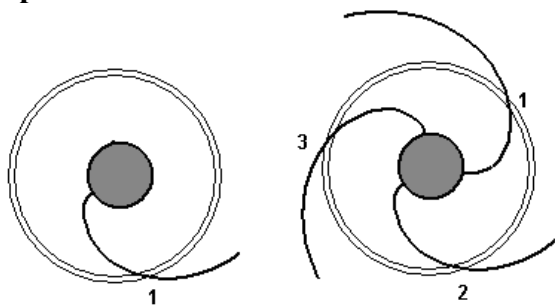
Періодична хвиля в середовищі із відновленням являє собою періодичну послідовність імпульсів горіння.

Хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{V_0 t}$ де t – тривалість біжучого імпульсу. Існує мінімальне значення t (тобто

максимальне k) при якому інгібітор, що залишився з попереднього імпульсу робить неможливим появу наступного.

Тому $t > t_{\min}, k < k_{\max}$.

11. Як співвідносяться максимальні частоти хвиль у вигляді одиночної та потрійної спіралі в середовищах із відновленням?



Згідно до малюнку у випадку одиночної спіралі на довжині поміщається лише одна хвиля, у випадку потрійної спіралі – три хвилі, тому довжина хвилі повинна бути втричі меншою. А частота в 3 рази більшою.

Для потрійної спіралі максимальна частота повинна бути приблизно в три рази меншою за частоту для одиночної, так як відстань між двома сусідніми імпульсами у випадку потрійної спіралі приблизно в три рази менша ніж у випадку для одиночної, а, отже, гранична швидкість обертання

повинна бути також в три рази меншою, щоб частина інгібітору встигала релаксувати та забезпечувались умови для виникнення наступного імпульсу

12. У середовищі з відновленням навколо однакових отворів обертаються хвилі у вигляді одиночної та подвійної спіралей. Порівняйте частоти їхнього обертання.

Очевидним є той факт, що для подвійної спіралі швидкість обертання кожного імпульсу буде меншою (тобто частота обертання подвійної хвилі менша за одиночну), бо відстань між двома біжучими імпульсами, що лежать на одному колі, буде меншою, отже, у момент приходу наступного з двох імпульсів концентрація інгібітору буде більшою ніж у випадку одиночної спіралі, що означає меншу швидкість поширення кожного з двох імпульсів для випадку подвійної спіралі.

13. Чи можливі пейсмерери в середовищах із відновленням?

Так. В середовищах із відновленням експериментально спостерігаються також джерела концентричних хвиль – так звані пейсмерери, або провідні центри. Такі експерименти відомі, зокрема, для плівок розчинів, у яких протікає реакція Білоусова – Жаботинського.

14. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих імпульсів.

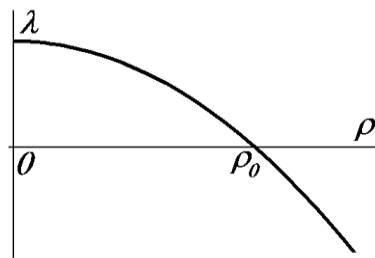
Групову швидкість можна розглядати як швидкість руху самого імпульсу, а фазова швидкість не існує так як не існує поняття фази в цьому випадку.

15. Чи залежать властивості хвиль у середовищах із відновленням від початкових та граничних умов? Як саме?

Як уже вказувалося у вступі, автохвилями називають хвилі, що поширюються в розподілених активних нелінійних дисипативних середовищах без зміни своєї форми, причому основні властивості цих хвиль (амплітуда, форма, швидкість, а для періодичних хвиль – частота або довжина хвилі) не залежать (чи слабо залежать) від початкових або граничних умов і визначаються властивостями середовища.

2.1.3

1. Коли синхронні коливання у середовищах, описуваних λ - ω моделлю, є стійкими щодо збурень?



Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (2.1.66). За умов $\partial\rho/\partial t=0$, $\partial\rho/\partial x_i=0$ воно зводиться до вигляду $\rho\lambda(\rho)=0$, звідки $\rho_1=0$ або $\rho_2=\rho_0$.

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (2.1.66) розв'язок у формі $\rho(\mathbf{r}, t)=\rho_{1,2}+\delta\rho\cdot\exp[\alpha t-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$, вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови $\partial\phi/\partial x_i=0$ можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \quad \text{та} \quad \alpha_2 = \rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1$$

(враховано, що $\lambda(\rho_0)=0$). Оскільки $\lambda(0)>0$, то перший корінь буде нестійким ($\alpha_1>0$, принаймні при невеликих k). Оскільки функція $\lambda(\rho)$ є монотонно спадною, тобто $d\lambda(\rho)/d\rho<0$, то другий корінь, навпаки, завжди буде стійким ($\alpha_2<0$). Система релаксуватиме до стану $\rho=\rho_0$ за час

$$\tau_\rho = - \left[\rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \right]^{-1} \quad (\text{при } k=0).$$

2. Який фізичний зміст функцій $\lambda(\rho)$ та $\omega(\rho)$ в рівнянні для λ - ω моделі?

Із $\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1$ випливає, що $\lambda(\rho)$ має зміст інкременту коливань при їх початковому зростанні від нуля, $\omega(\rho)$ – залежність частоти коливань від їх амплітуди, тобто закон неізохронності.

Функція $\lambda(\rho)$ повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу $\rho=\rho_0$ (рис. 2.1.18). Функцію $\omega(\rho)$ вважатимемо додатною.

3. Які припущення використовуються при виведенні рівняння для фазових хвиль?

Вважаючи, що $|\delta\rho|\ll\rho_0$, знехтуємо $\delta\rho$ всюди в першому з рівнянь системи (2.1.71) зроблене є справедливим, якщо формально вважати величину τ_ρ малою того ж порядку, що й $\delta\rho$, тобто припустити, що час релаксації амплітуди коливань є малим.

4. Чи можна описувати короткі хвилі в автоколивному середовищі за допомогою рівняння для фазових хвиль?

Рівняння для фазових хвиль було отримане за умови, що час релаксації амплітуди є малим, що означає, що час релаксації фази повинен бути набагато більшим за час релаксації амплітуди, врахування цього факту призводить до $L \gg \sqrt{b\tau_p}$ - розмір, на якому фаза помітно змінюється. Отже за допомогою рівняння для фазових хвиль можна описувати лише довгі хвилі.

5. Дайте фізичну інтерпретацію фазовим хвилям.

Автоколивні середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних між собою автогенераторів. Прикладами таких середовищ можуть бути тонкі шари розчинів, у яких протікають реакції Білоусова-Жаботинського (хімічні реакції автокаталітичного типу, що супроводжуються періодичною зміною концентрації реагентів і, відповідно, забарвлення розчину), серцевий м'яз, що зазнає регулярних скорочень, та інші.

Якщо всі "елементарні генератори" коливаються з однаковою фазою, в автоколивному середовищі спостерігатимуться синфазні коливання в усьому просторі. Якщо фаза коливань змінюється в просторі, утворюються так звані фазові хвилі. Вони нагадують рекламу у вигляді біжучого рядка, коли зміна кольору локальних елементів рекламного щита створює ілюзію руху зображення як цілого.

6. Чи існують фізичні обмеження на швидкість фазових хвиль?

Так як в даному випадку у нас поширюється фаза, яка не переносить енергію, то принципових фізичних обмежень на швидкість таких хвиль не існує – навіть швидкість світла не є обмеженням.

7. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до фазових хвиль.

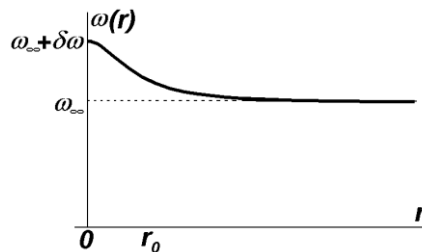
$$\begin{aligned} \text{фазова швидкість } v_{ph} &= \omega/k = \omega_0/k + ak \\ \text{закон дисперсії } \omega(k) &= \omega_0 + ak^2 \end{aligned}$$

8. Якісно опишіть механізм виникнення пейсмерів.

Пейсмерами називають джерела концентричних фазових хвиль.

У лабораторних експериментах пейсмерери, придушені за рахунок впливу коротших фазових хвиль, після припинення впливу знову виникали на тому самому місці. Це дає підстави вважати, що причиною виникнення пейсмерів є деякі локальні неоднорідності середовища.

9. Опишіть часову еволюцію фазових хвиль в автоколивному середовищі, яке має два локальні максимуми для частоти локальних автоколивань.



$$\Psi \rightarrow Q, \quad \frac{i}{\hbar}t \rightarrow t, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U(r) = -\frac{a}{b}[\omega_0 r - \omega_\infty].$$

Нехай у потенціальній ямі є всього один зв'язаний стан, тобто існує лише одне додатне власне значення λ_1 , якому відповідає власна функція μ_1 . Тоді, нехтуючи згасаючим внеском від суцільного спектра, отримаємо при $r \gg r_0$:

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left\{ C_0 + C_1 \exp \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right] \right\}.$$

Цей розв'язок описує пейсмер, що народжується.

Як уже говорилося, при зіткненні двох фазових хвиль з різними хвильовими числами відбувається їх повне взаємне погашення, а межа рухається в напрямку області, заповненої довгими хвилями. Це означає, що за наявності двох пейсмеркерів в результаті конкуренції між ними врешті-решт переможе той, якому відповідають найкоротші хвилі (найглибша яма).

10. Як властивості локального збурення впливають на характеристики відповідного пейсмеркера?

$$\psi_{r,t} \approx \frac{b}{a} \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right] \quad (2.1.98 \text{ a})$$

Розв'язок (2.1.98 a) описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_0 + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad (2.1.101)$$

і хвильовим числом

$$k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad (2.1.102)$$

що розходяться від центру. Чим глибша яма, тим більша λ_1 і, як випливає з (2.1.101)-(2.1.102), тим вища частота і менша довжина хвилі.

Навпаки, при $r > R(t)$ $\varphi \approx \text{const}$, тобто ця область залишається незбуреною (в ній існують синфазні автоколивання з частотою ω_∞).

Область, зайнята фазовими хвилями, розширюється з радіальною швидкістю

$$V_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{\lambda_1 b}. \quad (2.1.103)$$

Якщо в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних станів, картина істотно не зміниться. Треба лише замінити λ_1 на максимальне власне число λ_n .

Розв'язок описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_\infty + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad \text{і хвильовим числом} \quad k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad \lambda_n \leq \frac{a}{b} \delta\omega,$$

що розходяться від центру. Чим глибша яма, тим більша λ_1 тим вища частота і менша довжина хвилі.

11. Чи можливі спіральні хвилі в автоколивному середовищі?

В автоколивних середовищах можуть виникати також джерела спіральних хвиль – так звані ревербератори. Зовні спіральні хвилі в автоколивних середовищах нагадують спіральні хвилі в середовищах із відновленням (див. п. 2.1.2.7): у них також можна виділити ядро, а на великих віддальх від нього вони мають форму архімедової спіралі (зі сталим кроком). Амплітуда збурення при поширенні такої хвилі дорівнює нулеві в центрі і прямує до сталої величини при віддаленні від нього. Але розміри ядра (тобто області, де амплітуда ще не досягла граничної величини) тепер будуть малими – порядку дифузійної довжини $(b\tau_p)^{1/2}$, де коефіцієнт b визначається формулою (2.1.75), а час релаксації амплітуди τ_p – формулою (2.1.69). Таким чином, для аналізу спіральних хвиль в автоколивному середовищі не можна користуватися рівнянням для фазових хвиль (2.1.74), а необхідно звертатися безпосередньо до базового рівняння (2.1.63).

Відзначимо, що в автоколивних середовищах, на відміну від середовищ із відновленням, багаторукавні спіральні хвилі виявляються нестійкими.

2.2.1

1. Опишіть якісно механізм стабілізації струму в баретері.

Баретер являє собою залізна нитку, вміщена в атмосферу водню, яка нагрівається електричним струмом. З експерименту відомо, що питомий опір такої нитки нелінійно залежить від температури (рис. 2.2.1). Для простори апроксимуємо цю залежність ступінчастою функцією.

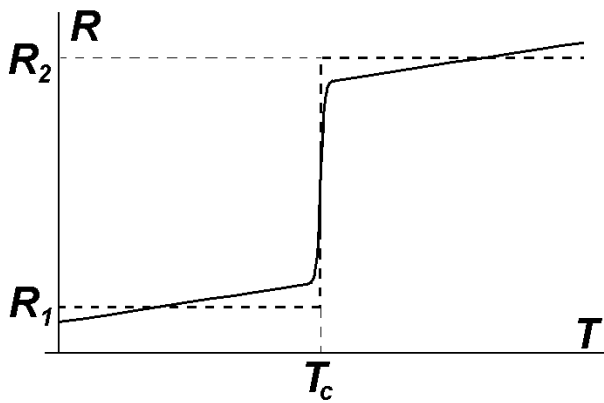


Рис. 2.2.1. Залежність питомого опору залізної нитки, вміщеної в атмосферу водню, від температури (суцільна лінія) та її апроксимація (штрихова лінія)

Температура в деякій точці нитки визначається виділенням тепла струмом, теплообміном з навколишнім середовищем та теплопровідністю самої нитки. Тому кінетичне рівняння для нитки має вигляд:

$$c \frac{dT}{dt} = f(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.2.1)$$

де

$$f(T) = I^2 R(T) - \gamma(T - T_0) = Q_+ - Q_- \quad (2.2.2)$$

кінетична функція, c – питома теплоємність на одиницю довжини, κ – теплопровідність, T_0 – температура навколишнього середовища. Вигляд кінетичної функції для різних значень струму показано на рис. 2.2.2.

Розглянемо спочатку випадок, коли струм через дротину підтримується сталим. В інтервалі між деякими крайніми значеннями I_{\min} та I_{\max} система має два стійкі стани – з низькою (T_1) та з високою (T_2) температурою. Перехід між станами відбувається у вигляді хвилі перекидання, що витісняє (в залежності від параметрів) низькотемпературну (або низькоомну) чи високотемпературну (високоомну) область. Це визначається, як вказувалося раніше (див. п. 1.1.1.2), знаком інтеграла

$$\Delta\Phi = \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT.$$

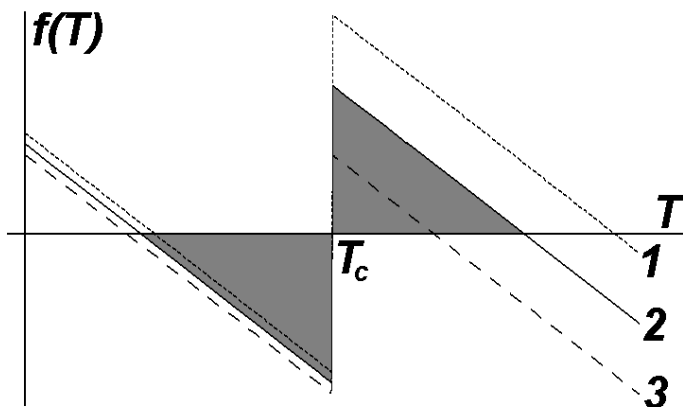


Рис. 2.2.2. Кінетична функція рівняння (2.2.1) для різних значень струму: $I_1 > I_2 = I_{cr} > I_3$.

При $\Delta\Phi > 0$ встановлюється стан з температурою T_2 , при $\Delta\Phi < 0$ – стан з температурою T_1 , при $\Delta\Phi = 0$ хвиля перекидання не поширюється.

Нехай тепер підтримується не струм через нитку, а напруга U на її кінцях. Тепер струм через нитку визначається формулою

$$I = \frac{U}{\int_0^l R(T(x)) dx}, \quad \text{де } l \text{ – довжина нитки.} \quad (2.2.3)$$

Нехай $\Delta\Phi = 0$ для деякого $I = I_{cr}$ (рис. 2.2.2). Розглянемо спершу випадок $I > I_{cr}$. Тоді $\Delta\Phi > 0$. Це приводить до того, що на дротині від флуктуації з'являється високотемпературна (і, відповідно, високоомна) область, яка починає розширюватися. При цьому опір нитки зростатиме і, відповідно, струм через нитку зменшуватиметься, доки не встановиться значення $I = I_{cr}$ і хвиля перекидання не зупиниться. В результаті

встановиться рівновага між ділянками з температурами T_1 і T_2 . Те саме буде, якщо в початковий момент часу виконувалася умова $I < I_{cr}$. При зміні напруги U в деяких межах розміри високотемпературної та низькотемпературної ділянок змінюватимуться, але струм залишатиметься рівним I_{cr} . Це явище називається баретуванням. Відповідно баретер являє собою стабілізатор струму.

(Більш детально – дивіться 2.2.1.1)

2. З яких міркувань можна визначити величину струму, що підтримується в баретері при обмеженій зміні прикладеної напруги?

Нехай довжини ділянок з T_1 і T_2 значно більші від ширини перехідного шару. Тоді формулу (2.2.3) можна переписати у формі

$$I = \frac{U}{R_2 l_2 + R_1 l_1} \quad (2.2.3 \text{ a})$$

де $R_2 = R(T_2)$, $R_1 = R(T_1)$, $l_1 + l_2 = l$, l_1 і l_2 – довжини ділянок з температурами T_1 і T_2 . Оскільки в стаціонарному режимі $I = I_{cr}$, маємо:

$$\frac{U}{I_{cr}} = R_2 l_2 + R_1 (l - l_2) ,$$

звідки

$$l_2 = \frac{\frac{U}{I_{cr}} - R_1 l}{R_2 - R_1} \quad (2.2.4)$$

Отже, стаціонарна дисипативна структура виникає при $U_{min} < U < U_{max}$, де $U_{min} = I_{cr} R_1 l$, $U_{max} = I_{cr} R_2 l$.

На нитці не обов'язково має бути одна високотемпературна ділянка. Їх може бути багато (це визначається початковими умовами), але їхня сумарна довжина задається співвідношенням (2.2.4).

Головна причина виникнення дисипативної структури в баретері – наявність, крім локальної взаємодії, далекодіяного зворотного зв'язку. Він виявляється в тому, що при фіксованій прикладеній напрузі сила струму в кожній точці дротини залежить від стану всіх інших її точок (див. формулу (2.2.3)).

(Більш детально – дивіться 2.2.1.1, 2.2.1.2)

3. Як можна збільшити діапазон прикладених напруг, у якому баретер стабілізує струм?

Зменшити R_1 і збільшити R_2 . Це можна зробити, наприклад, змінивши матеріал. Або щось інше...

(Більш детально – дивіться 2.2.1.1, 2.2.1.2)

4. Наведіть декілька (не менше трьох) прикладів дисипативних структур, виникнення яких обумовлене розподіленням зворотним зв'язком.

Баретер, модель хімічної реакції «брюсселятор», горіння в реакторі.

(Більш детально – дивіться 2.2, 2.2.1 – вступи та в інших місцях відповідно до теми).

2.2.2

1. Які рівняння використовують для аналізу конвекції Релея – Бенара?

Розглянемо шар в'язкої рідини, що займає проміжок $0 < z < h$ (вісь z спрямовано вертикально вгору, див. рис. 2.2.4). У площині $z=0$ підтримується температура T_1 , в площині $z=h$ – температура T_2 ($\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$).

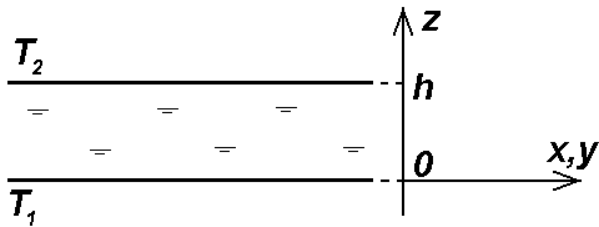


Рис. 2.2.4. Шар рідини, що підігрівається знизу

При невеликих значеннях різниці температур ΔT рідина залишається нерухомою, так що передача тепла знизу вгору відбувається лише за рахунок теплопровідності. При переході ΔT через деяке критичне значення ΔT_{cr} починається конвекція.

Будемо характеризувати рідину полем температур $T(\mathbf{r}, t)$ та полем швидкостей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Для її опису скористаємося рівнянням Нав'є – Стокса, а також рівняннями теплопровідності та неперервності.

Рівняння Нав'є – Стокса являє собою, по суті, другий закон Ньютона для краплі рідини з урахуванням того, що положення краплі з часом змінюється. Тому повна похідна $d\mathbf{v}/dt$ набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2.2.6)$$

Рівняння Нав'є – Стокса можна записати у вигляді

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.2.7)$$

де ρ – густина рідини, p – її тиск, η – її коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість), $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ – прискорення земного тяжіння. Доданки в правій частині визначають сили, що діють на краплю рідини.

Перший з них відповідає тиску, другий та третій – тертю, четвертий – силі тяжіння.

Рівняння теплопровідності з урахуванням можливої конвекції рідини набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (2.2.8)$$

де χ – коефіцієнт температуропроводності, а символ Δ позначає лапласіан.

Нарешті, рівняння неперервності для рідини має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.2.9)$$

2. Чому без урахування залежності параметрів рідини від температури теорія передбачає стійкість лише для конвективних валів?

такая конфигурация потенциально неустойчива. Рассмотрим, например, малый объем жидкости вблизи нижней плоскости. Вообразим теперь, что этот элемент объема немного смещается вверх вследствие возмущения. Находясь теперь в более холодной и, следовательно, в более плотной области, этот элемент будет испытывать направленную вверх архимедову силу, которая будет стремиться усилить восходящее движение. С другой стороны, если находящаяся вначале у верхней плоскости малая капля смещается вниз, то она проникнет в область пониженной плотности, и архимедова сила будет ускорять нисходящее движение. Поэтому в принципе ясно, что в жидкости могут возникать восходящие и нисходящие потоки, как это и наблюдается в эксперименте. Изложенные выше соображения вроде бы позволяют наблюдать такие потоки при любом отклонении от нуля температурного скачка ΔT . Причина, по которой такие потоки не наблюдаются при малых ΔT , связана со стабилизирующим влиянием вязкости жидкости: в результате этого в жидкости возникают внутренние силы трения, направленные против движения. Стабилизирующим фактором оказывается и теплопроводность, вследствие которой разность температур между смещенной каплей и ее окружением стремится исчезнуть. Это объясняет существование критического значения перепада температуры ΔT_c , наблюдаемого экспериментально. На рис. 1.3, б по-

3. Які властивості комірок Бенара залежать від початкових умов, а які – ні?

Однако этим не исчерпывается все то удивительное, что связано с ячейками Бенара. С одной стороны, такой эксперимент характеризуется идеальной воспроизводимостью, поскольку при одних и тех же условиях превышение некоторого критического значения ΔT_c всегда приводит к возникновению конвекционной картины. С другой же стороны, как видно из рис. 1.3, вещество структурируется в ячейки с попеременно право- и левовращательным движением. Однажды установившись, направление вращения в дальнейшем сохраняется. И все же, сколько бы мы ни изошрялись в воспроизведении условий эксперимента, по достижении критического порогового значения ΔT_c возможны две качественно различные ситуации*. В ячейке 1 на рис. 1.3, а имеет место вращение по часовой стрелке (и тем самым в ячейке 2 — против часовой стрелки, в ячейке 3 — по часовой стрелке и т. д.). Однако могло бы быть и наоборот, так что в ячейке 2 было бы вращение по часовой стрелке с соответствующими изменениями в других ячейках. Как только ΔT слегка превысит ΔT_c , мы совершенно точно знаем: появляется ячеистая структура течения. Таким образом, это явление подвержено строгому детерминизму. Напротив, направление вращения в ячейках непредсказуемо и неуправляемо. Лишь случай в виде тех или иных возмущений, доминирующих в момент проведения эксперимента, решает, каким будет вращение в данной ячейке — право- или левовращательным. Таким образом, мы приходим к удивительному сотрудничеству. З'ясувалося, що велике значення має геометрія посудини, в якій знаходиться рідина. Комірки Бенара були отримані при вивченні конвекції рідкого гелію в циліндричних комірках лише при малому відношенні висоти до радіусу, а при збільшенні цього відношення спектр ставав зачумленим відразу ж після виникнення конвекції і періодичний режим не реєструвався.

4. Які фактори спричиняють до формування шестикутних комірок Бенара?

Необхідність розгляду градієнту поверхневого натягу в якості основної причини виникнення нестійкості виникла після повідомлення М. Блека. Він знайшов, що коміркова конвекція в горизонтальному шарі може зустрічатися тоді, коли градієнт температури в крайньому випадку на порядок менше, ніж потрібно існуючими теоріями по стійкості горизонтального шару. (Сам розумію, що не дуже добре, але що робити, якщо іншого немає. Продовжимо). В той час як теорія передбачає стійкість шару, що охолоджується знизу, Блек спостерігав комірки Бенара в тонкому шарі, охолодженого також знизу. Він прийшов до висновку, що комірки Бенара, які спостерігалися ним в експериментах, утворилися в результаті зміни поверхневого натягу, яка в свою чергу, викликана неоднорідністю температури на вільній поверхні рідини.

Таким чином, основні фактори, які спричиняють формування шестикутних комірок, це: градієнт температури, в'язкість рідини, поверхневий натяг. Вважається, що граничні поверхні шару рідини вільні. Також повинно Бути досягнуте критичне число Релея — критичне хвильове число збурення, що характеризує періодичність цих збурень. Бенар вважав важливим фактором неоднорідність поверхневого натягу для виникнення нестійкості в шарі рідини.

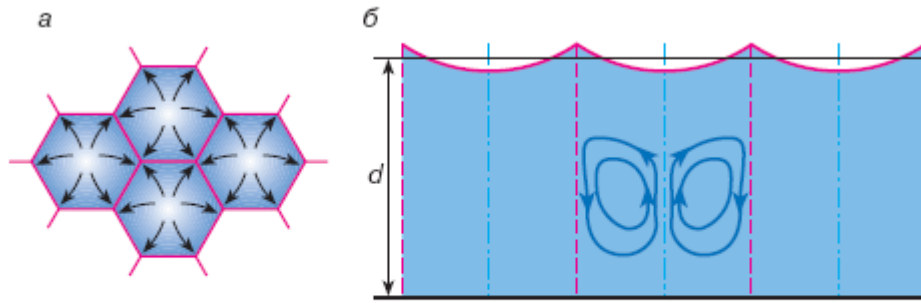


Рис. 2. Схема ячеек Бенара: а – схема шестиугольных конвективных ячеек с восходящим потоком в центре; б – вид поверхности и циркуляция в ячейке

5. В якому приближенні вдається аналітично проаналізувати формування шестикутних комірок Бенара?

6. Як можна розрахувати розмір комірок Бенара?

7. Чи пов'язані між собою розміри конвективних валів і шестикутних комірок для тієї самої системи?

Для шестикутних комірок Бенара запишемо

$$f(\vec{r}, t) = f(z) \sum_{l=1}^3 (a_l(t) \cdot e^{ik_l r} + a_l^*(t) \cdot e^{-ik_l r})$$

Число Релея записується у формі $R = R_{cm}(1 + \varepsilon)$ $1 \gg \varepsilon > 0$

$$\frac{da_l}{dt} = a_l \cdot \left(\lambda - \sum_{j=1}^3 k_{lj} |a_j|^2 \right)$$

λ - інкремент нестійкості.

$$\frac{dr_l}{d\tau} = 2r_l \left(1 - \sum_{j=1}^3 B_{lj} r_j \right)$$

$$r_l = \frac{k |a_l|^2}{\lambda} \quad \tau = \lambda t$$

$$B_{lj} = k_{lj} / k$$

$$m1 = m1(1 - m1 - \rho12m1)$$

$$m2 = m2(1 - m2 - \rho21m2)$$

$\rho12, \rho21$ -коєфіцієнти нелінійного зв'язку