

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

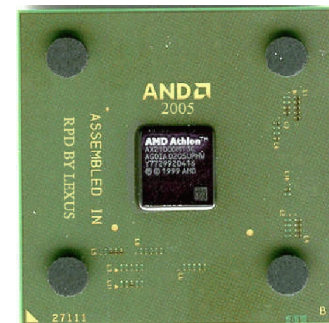
І.О.Анісімов

КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ - 2001



Зміст	Сторінка	
Передмова	7	
Вступ	8	
В.1. Предмет теорії коливань і хвиль	8	
В.2. Класифікація коливних систем	8	
<i>В.2.1. Класифікація за кількістю ступенів вільності (8).</i>		
<i>В.2.2. Класифікація за енергетичними характеристиками (8).</i>		
<i>В.2.3. Класифікація за характером диференціального рівняння (8).</i>		
<i>В.2.4. Умовність класифікації реальних коливних систем (9).</i>		
Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.	10	
1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.	10	
<i>1.1.1. Приклади лінійних осциляторів (10).</i>		
<i>1.1.2. Рівняння консервативного осцилятора (12).</i>		
<i>1.1.3. Розв'язок рівняння лінійного дисипативного осцилятора (12).</i>		
<i>1.1.4. Метод фазової площини (13).</i>		
<i>1.1.5. Метод ізоклін (14).</i>		
<i>1.1.6. Особливі точки фазової площини (15).</i>		
Контрольні питання до розділу 1.1.	16	
Задачі до розділу 1.1.	17	
1.2. Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.	20	
<i>1.2.1. Приклади вимушених коливань лінійних осциляторів (20).</i>		
<i>1.2.2. Осцилятор під дією зовнішньої сили - система з півтора ступенями вільності (20).</i>		
<i>1.2.3. Коливання лінійного консервативного осцилятора під дією гармонічної сили (20).</i>		
<i>1.2.4. Вплив дисипації на коливання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили (21).</i>		
<i>1.2.5. Електромеханічні аналогії (22).</i>		
Контрольні питання до розділу 1.2.	24	
Задачі до розділу 1.2.	24	
Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.	25	
		<i>1.3.1. Принцип суперпозиції (25).</i>
		<i>1.3.2. Метод рядів та інтегралів Фур'є (25).</i>
		<i>1.3.3. Інтеграл Дюгамеля (26).</i>
		<i>1.3.4. Зв'язок між передавальною функцією та функцією Гріна (27).</i>
		<i>1.3.5. Запис функції Гріна через власні функції однорідного рівняння (27).</i>
		Контрольні питання до розділу 1.3.
		Задачі до розділу 1.3.
		1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу (для ступінчастого накачування).
		<i>1.4.1. Параметричний резонанс у системі без дисипації (30).</i>
		<i>1.4.2. Параметричний резонанс у дисипативній системі (30).</i>
		<i>1.4.3. Дисипативний параметричний осцилятор як регенеративний підсилювач (32).</i>
		<i>1.4.4. Умови справедливості параметричного наближення (32).</i>
		Контрольні питання до розділу 1.4.
		Задачі до розділу 1.4.
		1.5. Параметричний генератор із гармонічним накачуванням.
		<i>1.5.1. Виведення рівняння Мат'є (34).</i>
		<i>1.5.2. Наближений розв'язок рівняння Мат'є за методом повільних амплітуд (34).</i>
		<i>1.5.3. Механізм параметричної нестійкості (36).</i>
		<i>1.5.4. Зони нестійкості рівняння Мат'є (37).</i>
		<i>1.5.4. Генерація в другій зоні нестійкості (37).</i>
		<i>1.5.6. Встановлення коливань у параметричному генераторі (39).</i>
		Контрольні питання до розділу 1.5.
		Задачі до розділу 1.5.
		1.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.
		<i>1.6.1. Розв'язок неоднорідного рівняння Мат'є (42).</i>
		<i>1.6.2. Форма амплітудно-частотної характеристики (43).</i>
		<i>1.6.3. Пульсації коефіцієнту підсилення (44).</i>
		<i>1.6.4. Залежність коефіцієнту підсилення від фази сигналу (45).</i>
		Контрольні питання до розділу 1.6.

Задачі до розділу 1.6.	46		
1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.	47		
1.7.1. Консервативний осцилятор з квадратичною та кубічною нелінійністю: аналіз за методом послідовних наближень (47).			
1.7.2. Ангармонізм та неізохронність коливань нелінійного осцилятора (48).			
1.7.3. Фазовий портрет нелінійного осцилятора (48).			
1.7.4. Період коливань нелінійного осцилятора поблизу сепаратриси (49).			
Контрольні питання до розділу 1.7.	51		
Задачі до розділу 1.7.	51		
1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.	53		
1.8.1. Стійкість руху за Ляпуновим (53).			
1.8.2. Орбітальна стійкість (53).			
1.8.3. Асимптотична та абсолютна стійкість (54).			
1.8.4. Критерій Рауса - Гурвиця (54).			
1.8.5. Структурна стійкість (грубість) коливної системи (55).			
Контрольні питання до розділу 1.8.	56		
Задачі до розділу 1.8.	56		
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.	58		
1.9.1. Обговорення моделі (58).			
1.9.2. Прийняті припущення та отримання рівняння для амплітуди (58).			
1.9.3. Нелінійне обмеження резонансної амплітуди коливань (59).			
1.9.4. Вигляд резонансних кривих для консервативної моделі (60).			
1.9.5. Стійкість резонансних кривих (60).			
1.9.6. Гістерезис (61).			
1.9.7. Вплив слабкої дисипації на ефект гістерезису (62).			
1.9.8. Резонансні криві для дисипативного осцилятора (62).			
1.9.9. Резонанс на кратних гармоніках та на субгармоніках (63).			
1.9.10. Резонанс на половинній гармоніці (63).			
Контрольні питання до розділу 1.9.	64		
Задачі до розділу 1.9.	65		
1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.	66		
1.10.1. Гамільтонівські системи та змінні дія - кут (66).			
1.10.2. Потенціал зовнішньої сили (67).			
1.10.3. Рівняння нелінійного резонансу (67).			
1.10.4. Фазові коливання (68).			
1.10.5. Ширина нелінійного резонансу (69).			
1.10.6. Аналіз використаних наближень (69).			
1.10.7. Перекриття нелінійних резонансів (70).			
1.10.8. Вимушені коливання математичного маятника поблизу сепаратриси (71).			
1.10.9. Стохастичний шар (72).			
1.10.10. Оцінка ширини стохастичного шару для вимушених коливань математичного маятника під дією гармонічної сили (73).			
1.10.11. Вплив нерезонансних доданків на фазові коливання (74).			
Контрольні питання до розділу 1.10.	74		
Задачі до розділу 1.10.	74		
1.11. Автоколивання.	76		
1.11.1. Виведення нелінійного рівняння автогенератора Ван дер Поля (76).			
1.11.2. Умови самозбудження автогенератора (77).			
1.11.3. Рівняння Релея: якісний аналіз розв'язку (77).			
1.11.4. Квазілінійна теорія автогенератора (78).			
1.11.5. Режим майже гармонічних коливань (79).			
1.11.6. Фазовий портрет генератора майже гармонічних коливань (80).			
1.11.7. Автогенератор з жорстким режимом самозбудження (81).			
1.11.8. Автогенератор Ван дер Поля в режимі релаксаційних коливань (82).			
1.11.9. Період релаксаційних коливань (84).			
Контрольні питання до розділу 1.11.	84		
Задачі до розділу 1.11.	85		
1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.	88		
1.12.1. Ефект вимушеної синхронізації: якісна інтерпретація (88).			
1.12.2. Неоднорідне рівняння Ван дер Поля: розв'язок за методом повільних амплітуд (88).			
1.12.3. Резонансні криві для вимушених коливань автогенератора (89).			
1.12.4. Стійкість резонансних кривих (89).			
1.12.5. Вимушена синхронізація: випадок малих зовнішніх сил (91).			
1.12.6. Вимушена синхронізація: випа-			

<i>синхронізація: випадок великих зовнішніх сил (93).</i>			
<i>1.12.7. Вимушена синхронізація половинною та подвійною частотою (94).</i>			
Контрольні питання до розділу 1.12.		94	
Задачі до розділу 1.12.		94	
Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.		96	
<i>1.13.1. Непередбачувана поведінка простих систем (96).</i>			
<i>1.13.2. Генератор шуму КПП: схема та рівняння руху (97).</i>			
<i>1.13.3. Якісний аналіз рівнянь руху в режимах регулярних коливань (98).</i>			
<i>1.13.4. Фазовий портрет стохастичних коливань (99).</i>			
<i>1.13.5. Біфуркації генератора КПП при зміні керуючого параметру (100).</i>			
Контрольні питання до розділу 1.13.		101	
Задачі до розділу 1.13.		102	
Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.		103	
2.1. Вільні коливання в лінійних системах із багатьма ступенями вільності.		103	
<i>2.1.1. Приклади систем з багатьма ступенями вільності (103).</i>			
<i>2.1.2. Рівняння руху для зв'язаних лінійних консервативних осциляторів (104).</i>			
<i>2.1.3. Характеристичне рівняння, власні частоти та коефіцієнти розподілу амплітуд (104).</i>			
<i>2.1.4. Обмін енергією між ступенями вільності (105).</i>			
<i>2.1.5. Нормальні моди (106).</i>			
<i>2.1.6. Розштовхування власних частот (107).</i>			
<i>2.1.7. Вплив дисипації на вільні коливання лінійної системи з багатьма ступенями вільності (108).</i>			
Контрольні питання до розділу 2.1.		109	
Задачі до розділу 2.1.		110	
2.2. Вимушені коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності.		112	
<i>2.2.1. Вихідні рівняння (112).</i>			
<i>2.2.2. Особливості резонансних кривих (112).</i>			
<i>2.2.3. Теорема взаємності (113).</i>			
<i>(113).</i>			
<i>2.2.4. Ортогональність зовнішніх сил до нормальних мод (113).</i>			
Контрольні питання до розділу 2.2.		114	
Задачі до розділу 2.2.		115	
2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.		116	
<i>2.3.1. Схема двоконтурного параметричного підсилювача та рівняння, що її описують (116).</i>			
<i>2.3.2. Регенеративний підсилювач з високочастотним накачуванням (117).</i>			
<i>2.3.3. Нерегенеративний перетворювач частоти з низькочастотним накачуванням (119).</i>			
<i>2.3.4. Співвідношення Менлі - Роу для відкритої дисипативної системи (120).</i>			
Контрольні питання до розділу 2.3.		121	
Задачі до розділу 2.3.		122	
2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.		123	
<i>2.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння (123).</i>			
<i>2.4.2. Рівняння параметричної взаємодії трьох мод (124).</i>			
<i>2.4.3. Закон збереження енергії (124).</i>			
<i>2.4.4. Співвідношення Менлі - Роу для параметричної взаємодії трьох мод (125).</i>			
<i>2.4.5. Рівняння для амплітуд та фаз коливань (125).</i>			
<i>2.4.6. Розв'язок рівнянь для амплітуд у наближенні заданого накачування (126).</i>			
Контрольні питання до розділу 2.4.		127	
Задачі до розділу 2.4.		128	
2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.		129	
<i>2.5.1. Схема двочастотного автогенератора (129).</i>			
<i>2.5.2. Вихідні рівняння (129).</i>			
<i>2.5.3. Виведення вкорочених рівнянь (131).</i>			
<i>2.5.4. Система рівнянь для мод з нелінійним зв'язком (132).</i>			
<i>2.5.5. Стаціонарні стани та їхня стійкість (133).</i>			
<i>2.5.6. Фазові портрети (134).</i>			
<i>2.5.7. Затягування частоти в двочастотному автогенераторі (135).</i>			
Контрольні питання до розділу 2.5.		136	
Задачі до розділу 2.5.		136	

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.	138	<i>дисперсія в електродинаміці суцільних середовищ (161).</i>	
2.6.1. Оператор потоку (138).		Контрольні питання до розділу 3.1.	163
2.6.2. Фазовий простір гамільтонівських систем (138).		Задачі до розділу 3.1.	163
2.6.3. Ергодичні системи (139).		3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.	165
2.6.4. Перемішування в гамільтонівських системах (140).		3.2.1. Просторові гармоніки (165).	
2.6.5. Показники Ляпунова та ентропія Колмогорова - Синая (140).		3.2.2. Дисперсія хвиль у періодичних структурах (166).	
2.6.6. Спектри хаотичного руху (141).		3.2.3. Хвилі в електронному потоку: опис моделі та вихідні рівняння (167).	
Контрольні питання до розділу 2.6.	141	3.2.4. Дисперсія хвиль просторового заряду (167).	
Задачі до розділу 2.6.	142	3.2.5. Хвилі просторового заряду в провідному середовищі (169).	
2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.	143	3.2.6. Хвилі з додатною та від'ємною енергією (170).	
2.7.1. Прості атрактори (143).		Контрольні питання до розділу 3.2.	171
2.7.2. Дивні атрактори (144).		Задачі до розділу 3.2.	171
2.7.3. Фрактали (144).		3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.	173
2.7.4. Сценарії переходу до хаосу (145).		3.3.1. Зв'язок між хвилями без дисперсії (173).	
2.7.5. Сценарій Рюеля - Такенса (145).		3.3.2. Зв'язок між хвилями з однаковими знаками дисперсії (174).	
2.7.6. Сценарій Фейгенбаума (146).		3.3.3. Зв'язок між хвилями з протилежними знаками дисперсії (176).	
2.7.7. Сценарій Помо - Манервіля (146).		Контрольні питання до розділу 3.3.	178
Контрольні питання до розділу 2.7.	147	Задачі до розділу 3.3.	179
Задачі до розділу 2.7.	147	3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.	
2.8. Ланцюжкові системи	149	3.4.1. Дисперсійне рівняння для хвиль у двопучковому підсилювачі (180).	180
2.8.1. Ланцюжкова система як частотний фільтр (149).		3.4.2. Генератор на зустрічних пучках (181).	
2.8.2. Хвильовий процес. Непрозорість (151).		3.4.3. Підсилювач на супутніх пучках (183).	
2.8.3. Коливання в ланцюжках скінченної довжини (152).		3.4.4. Абсолютна, конвективна та осциляторна нестійкість (184).	
Контрольні питання до розділу 2.8.	153	3.4.5. Критерій Брігса (186).	
Задачі до розділу 2.8.	153	Контрольні питання до розділу 3.4.	186
Частина III. Системи з розподіленими параметрами.	155	Задачі до розділу 3.4.	187
3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.	155	3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.	
3.1.1. Приклади хвиль малої амплітуди в пасивних системах (155).		3.5.1. Умови нелінійної взаємодії хвиль (188).	188
3.1.2. Розв'язок хвильового рівняння. Дисперсія (157).		3.5.2. Розпадні та нерозпадні спектри (188).	
3.1.3. Початкова та гранична задача (158).		3.5.3. Модельне рівняння та його гаданий розв'язок (190).	
3.1.4. Поширення хвильового пакету в лінії з дисперсією (158).		3.5.4. Вкорочені рівняння та їхні розв'язки (188).	
3.1.5. Формальна класифікація дисперсії (159).		3.5.5. Вимушене розсіювання Мандельштама – Брілюена (191).	
3.1.6. Причини виникнення дисперсії (модельний розгляд) (160).		3.5.6. Вибухова нестійкість (192).	
3.1.7. Просторова і часова дисперсія в			

Контрольні питання до розділу 3.5.	193
Задачі до розділу 3.5.	193
3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.	196
<i>3.6.1. Хвилі в консервативному нелінійному середовищі без дисперсії (196). 3.6.2. Хвилі в нелінійному слабкодисипативному середовищі (198). 3.6.3. Структура фронту ударної хвилі (199). 3.6.4. Хвилі в нелінійному консервативному середовищі зі слабкою дисперсією (200).</i>	
Контрольні питання до розділу 3.6.	202
Задачі до розділу 3.6.	203
3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.	
<i>3.7.1. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу (205). 3.7.2. Бістабільні середовища. Біжучі фронти (205). 3.7.3. Середовища з відновленням. Біжучі імпульси та спіральні хвилі (207). 3.7.4. Автоколивні середовища. Фазові хвилі (208). 3.7.5. Дисипативні структури (208). 3.7.6. Турбулентність (210).</i>	205
Контрольні питання до розділу 3.7.	210
Задачі до розділу 3.7.	210
Додаток. Короткий термінологічний словник.	212
Література.	218

Передмова

Пропонований посібник відповідає програмі курсу “Коливання і хвилі” (36 год. лекцій та 36 год. практичних занять), який читається студентам радіофізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (спеціальність – “радіофізика і електроніка (прикладна фізика)”, всі спеціалізації) в V семестрі. В процесі викладання використовуються матеріали, які читалися студентам у курсах загальної та теоретичної фізики, вищої математики (зокрема, диференціальних рівнянь), а також радіотехнічних кіл і сигналів та радіоелектроніки. В свою чергу, матеріал даного курсу використовується надалі в ряді спецкурсів (наприклад, "Статистична радіофізика", "Електроніка НВЧ" та ін.).

Структура курсу дещо відрізняється від загальноприйнятої: матеріал згруповано за кількістю ступенів вільності аналізованих систем. На нашу думку, це дозволяє якнайшвидше перейти до розгляду явищ, досі незнайомих студентам, і тим самим позбутися враження, що курс є повторенням раніше викладеного матеріалу. Первісний розгляд ефектів на найпростіших моделях (системи з одним ступенем вільності) видається найбільш правильним з методичної точки зору. Повторне звернення то аналогічних ефектів (наприклад, параметрична взаємодія) на прикладі систем з багатьма ступенями вільності та з розподіленими параметрами сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Основна увага в курсі приділяється дослідженню нелінійних коливань і хвиль (включаючи параметричні коливання та автоколивання). Тому, наприклад, явища інтерференції та дифракції хвиль не розглядаються зовсім (вони детально вивчаються в курсі "Оптика"). Натомість детально розглядаються ефекти хаотичної динаміки в простих системах. Враховано також, що вивчення нелінійних хвиль надалі продовжується в ряді спецкурсів (“Нелінійна оптика”, “Нелінійні хвилі. Структури. Хаос”, “Синергетика”).

Посібник призначений для роботи за модульно-рейтинговою системою. Тому кожний розділ супроводжується набором контрольних питань та задач. Відповіді на контрольні питання і розв’язання задач - невід’ємна частина роботи з посібником. Контрольні питання в ба-

в багатьох випадках складені таким чином, що пряма відповідь на них в тексті посібника (і в інших подібних підручниках) відсутня. Такі питання стимулюють самостійне осмислення матеріалу і (разом із розв’язанням задач) дозволяють студенту вийти за рамки його механічного запам’ятовування. Задачі підвищеної складності, позначені зірочкою (*), призначені для необов’язкової самостійної роботи студентів.

У додатку вміщений українсько-російсько-англійський термінологічний словник, що може полегшити користування відповідною іншомовною літературою.

Наприкінці вважаю своїм приємним обов’язком висловити вдячність своїм колегам проф. С.М.Левитському та ас. О.І.Кельнику за допомогу в роботі над посібником. Хочу також подякувати студентам Київського національного університету імені Тараса Шевченка (радіофізичний факультет та спеціалізація "фізика космосу" фізичного факультету) і Національного університету "Києво-Могилянська Академія" (спеціальність "фізика біологічних систем"), які своїми запитаннями, зауваженнями та інтересом до предмету сприяли вдосконаленню цієї книги.

Вступ

В.1. Предмет теорії коливань і хвиль.

Під коливаннями звичайно розуміють рух (тобто зміну з часом деякої фізичної величини), який періодично повторюється. Коливання, що поширюються в просторі, називають хвилями.

З курсу загальної фізики відомо, що коливання ряду простих систем (механічний маятник, коливний контур та ін.) описуються однаковими рівняннями. Виявляється, що таке саме становище має місце і для більш складних коливних систем (нелінійні та параметричні осцилятори, автогенератори), а також для систем з розподіленими параметрами, в яких можуть мати місце хвильові процеси.

Предметом курсу «Коливання і хвилі» і є вивчення спільних рис коливань і хвиль різної природи. Причому в коло досліджуваних явищ включаються не тільки різні області фізики, а й хімія, біологія, екологія та ін.

Системи, в яких можливі коливання називають динамічними. Точніше, *динамічні системи* - це системи, описувані набором рівнянь вигляду

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{В.1})$$

Говорять, що така система має $n/2$ ступенів вільності.

В.2. Класифікація коливних систем.

В основу класифікації коливних систем можна покласти різні ознаки. Відповідно отримаємо різні варіанти класифікації.

Класифікація за кількістю ступенів вільності.

За кількістю ступенів вільності коливні системи можна розділити на

- системи з одним ступенем вільності;
- системи з багатьма ступенями вільності;
- системи з нескінченною кількістю ступенів вільності (з розподіленими параметрами).

Разом із системами з одним ступенем вільності ми розглядатимемо й системи з півтора ступенями вільності.

При переході від однієї (чи півтора) до двох ступенів вільності з'являється нова якість - обмін енергії між ступенями вільності. При подальшому збільшенні числа ступенів нова якість не виникає. Тому системи з багатьма ступенями вільності виділяють в окрему групу.

В системах з розподіленими параметрами з'являється можливість поширення хвиль. Такі системи описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Саме класифікація за числом ступенів вільності покладена в основу цього лекційного курсу.

Класифікація за енергетичними характеристиками.

В залежності від того, чи зберігається з часом повна енергія систем, їх ділять на *консервативні* та *дисипативні*.

Якщо система, яку ми розглядаємо, не взаємодіє з іншими системами, її називають *автономною*, в протилежному випадку - *неавтономною*.

Якщо система не обмінюється речовиною та енергією з іншими системами, її називають *замкненою*, в протилежному випадку - *відкритою*. Ця класифікація близька до попередньої.

Якщо система має деякий запас енергії (потенціальної, кінетичної, хімічної та ін.), яка може піти на збудження коливань та їх підтримання протягом тривалого часу, такі системи називають *нерівноважними*. В протилежному випадку говорять про *рівноважні* (або *пасивні*) системи.

Відкриті та нерівноважні системи іноді об'єднують під назвою *активних систем*.

Класифікація за характером диференціального рівняння.

Параметри системи можуть залежати від її руху. Наприклад, в коливному контурі з варікапом ємність буде визначатись миттєвою напругою на варікапі. Такі системи називають *нелінійними*. Вони описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

Якщо ж параметри системи не залежать від її руху, систему називають *лінійною*. Такі системи описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

В межах цієї ж класифікації виділяють ще параметричні та автоколивні системи.

Параметричними називають системи, у яких якийсь параметр змінюється за наперед заданим законом під дією зовнішньої сили, незалежно від руху самої системи. Параметричні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. Ми покажемо, що параметричні системи - це різновид нелінійних неавтономних систем. Відомий приклад параметричних систем - маятник із змінною довжиною підвісу (гойдалка).

Автоколивні системи - це системи, в яких за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати і встановлюватись періодичні коливання. Властивості цих коливань мало залежать від початкових умов і визначаються властивостями самої системи. Приклади автоколивних систем - механічний годинник, різноманітні автогенератори синусоїдних та несинусоїдних коливань та ін.

Автоколивні системи також описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

Умовність класифікації реальних коливних систем.

Наприкінці зазначимо, що запропонована класифікація стосується не стільки реальних коливних систем, скільки їхніх моделей.

Наприклад, розглянемо коливання маси на підвісі. Якщо ми спостерігаємо один-два періоди коливань, систему можна вважати консервативною; на протязі більш тривалого часу істотним стає згасання. Якщо ми розглядаємо малі відхилення від положення рівноваги, систему можна вважати лінійною; для великих відхилень стає істотною нелінійність. Якщо рух маси відбувається в деякій вертикальній площині, можна вважати, що система має один ступінь вільності. Якщо початкова швидкість маси не лежить у площині відхилення від положення рівноваги, можна говорити про два (або навіть три, коли взяти до уваги, що підвіс може розтягатися) ступені віль-

ності. Якщо ж розглядати поперечні коливання підвісу (подібні до коливань ступи), слід користуватися моделлю системи з розподіленими параметрами.

Отже, реальні системи, як правило, нелінійні, неавтономні, дисипативні і мають нескінчену кількість ступенів вільності.

ЧАСТИНА I.

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

Найпростішою системою, що може здійснювати коливний рух, є лінійний осцилятор (система з одним ступенем вільності). Почнемо розгляд з вільних коливань такої системи.

1.1.1. Приклади лінійних осциляторів.

а) Розглянемо математичний маятник, тобто точкову масу на невагомому нерозтяжному підвісі, що рухається без дисипації (рис.1.1.1). Рівняння руху такої системи являє собою другий закон Ньютона для обертового руху:

$$I d^2\varphi/dt^2 = M, \quad (1.1.1)$$

де φ - кут відхилення, $I=ml^2$ - момент інерції $I=ml^2$, $M=mgl \sin \varphi$ - момент сили. Після підстановки дістанемо:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = g/l. \quad (1.1.2)$$

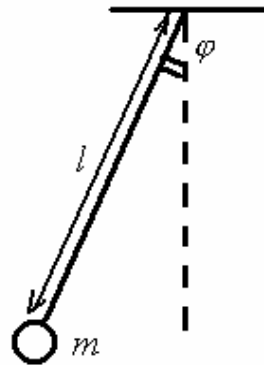


Рис.1.1.1. Математичний маятник.

Для малих кутів відхилення ($\varphi \ll 1$)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (1.1.3)$$

Це - рівняння лінійного консервативного осцилятора.

б) Взаємодія популяцій хижак - здобич.

Нехай в ізолюваному лісі, де є досталь трави, живуть лише зайці. Очевидно, вони розмножуватимуться за експоненціальним законом:

$$\dot{N}_1 = \gamma_1 N_1.$$

Якщо в тому самому лісі живуть лише вовки, їхня популяція експоненціально зменшуватиметься:

$$\dot{N}_2 = -\gamma_2 N_2.$$

Нехай тепер у лісі співіснують обидві популяції. Ймовірність зустрічей вовків із зайцями пропорційна до добутку $N_1 N_2$. В результаті таких зустрічей чисельність зайців зменшуватиметься, чисельність вовків зростатиме. Отже, остаточно дістанемо:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \gamma_1 N_1 - \varepsilon_1 N_1 N_2; \\ \dot{N}_2 = -\gamma_2 N_2 + \varepsilon_2 N_1 N_2. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Це так звана система рівнянь Вольтерра, що описує взаємодію популяцій хижак - здобич. Вона нелінійна, отже, знайти її точний розв'язок важко.

Знайдемо спочатку *стаціонарні* (такі, що не залежать від часу) розв'язки системи (1.1.4). Для цього покладемо рівними нулю похідні за часом. Отримаємо:

$$N_{10} = \gamma_2 / \varepsilon_2; \quad N_{20} = \gamma_1 / \varepsilon_1. \quad (1.1.5)$$

Є, втім, і інший рівноважний розв'язок - $N_{10} = N_{20} = 0$. Він може реалізуватися, якщо людство й надалі не звертатиме уваги на екологічні проблеми. Розглядатимемо, однак, оптимістичний сценарій.

Вважатимемо, що чисельність популяцій мало відрізняється від рівноважних значень (1.1.5):

$$N_{1,2} = N_{10,20} + n_{1,2}, \quad (1.1.6)$$

$$|n_{1,2}| \ll N_{10,20}. \quad (1.1.7)$$

Після підстановки (1.1.6) до (1.1.4) в силу нерівності (1.1.7) можна

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

знехтувати добутками $n_1 n_2$ (процедура лінеаризації рівнянь). Враховуючи (1.1.5), остаточно дістанемо:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -(\varepsilon_1 \gamma_2 / \varepsilon_2) n_2; \\ \dot{n}_2 = (\varepsilon_2 \gamma_1 / \varepsilon_1) n_1. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

З (1.1.8) легко отримати для n_1 чи для n_2 рівняння вигляду (1.1.3), де

$$\omega_0^2 = \gamma_1 \gamma_2. \quad (1.1.9)$$

В більшості реальних ситуацій у взаємодії беруть участь по кілька популяцій хижаків та здобичі, тому коливання чисельності популяцій розмиваються. Однак відомі приклади, коли при спостереженні взаємодії одиночних популяцій хижак - здобич справді спостерігалися протифазні періодичні коливання їхньої чисельності, описувані системою (1.1.8).

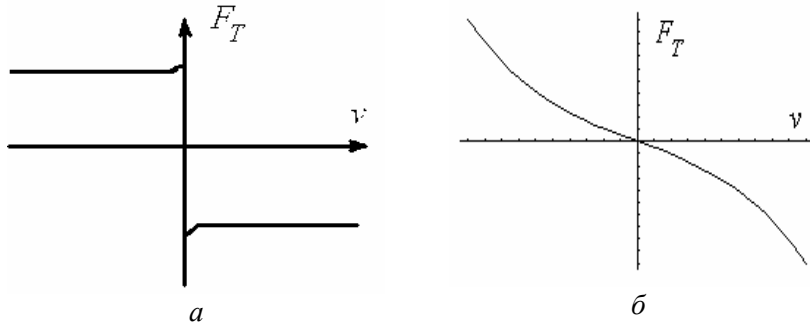
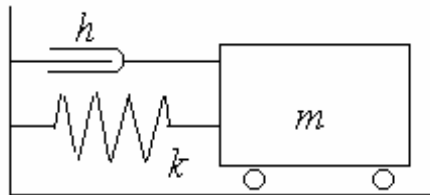


Рис.1.1.2. Залежність сили тертя від швидкості:
а - сухе тертя, б - в'язке тертя.

Рис.1.1.3. Пружинний маятник із демпфером



в) Пружинний маятник з демпфером.

Сила тертя для випадку сухого тертя нелінійно залежить від швидкості (рис.1.1.2а), тому аналізувати таку систему досить складно. Введемо спеціальний елемент із в'язким тертям - демпфер (рис.1.1.3), для якого у випадку малих швидкостей залежність сили тертя від швидкості можна вважати лінійною (рис.1.1.2б). Тоді, враховуючи закон Гука, рівняння руху для пружинного маятника з демпфером за другим законом Ньютона можна подати у вигляді

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x},$$

або

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \delta = h/2m, \quad \omega_0^2 = k/m. \quad (1.1.10)$$

Це - рівняння лінійного дисипативного осцилятора. Воно ж описує, наприклад, коливання струму в контурі, складеному з індуктивності, ємності та опору.

1.1.2. Рівняння консервативного осцилятора.

Повернемося до точного рівняння для математичного маятника (1.1.2). Перепишемо його другий доданок - нелінійну силу, що повертає систему до положення рівноваги - у вигляді

$$\omega_0^2 \sin x = \tilde{\omega}_0^2(x)x = f(x)$$

(формально можна вважати, що частота коливань тепер є функцією координати). Отже, узагальненням (1.1.2) на випадок довільної нелінійної сили є рівняння

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (1.1.11)$$

Покажемо, що воно відповідає консервативній системі. Для цього домножимо (1.1.11) на швидкість і проінтегруємо за часом. Дістанемо:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Phi(x) = const = W_0, \quad (1.1.12)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

$$\Phi(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi. \quad (1.1.13)$$

Тут враховано, що

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x})^2, \quad \dot{x}f(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \Phi(x) \quad (1.1.14)$$

(ми скористалися формулою для похідної від складної функції, $\Phi = \Phi(x(t))$).

В рівнянні (1.1.12) для маятника перший доданок відповідає кінетичній енергії, другий - потенціальній (потенціал (1.1.13) - це робота проти нелінійної сили, що витрачається на виведення системи із стану рівноваги)¹. Тоді константа в правій частині (1.1.12) відповідає, очевидно, повній енергії системи, а саме це співвідношення виражає закон збереження енергії.

Взагалі, якщо рівняння руху деякої системи містить лише похідні парних порядків, відповідна система є консервативною, бо зміна знаку часу (заміна t на $-t$) не впливає на її поведінку. Навпаки, якщо в рівнянні руху присутні похідні непарних порядків, то система не є консервативною (вона може бути дисипативною або/та відкритою, див. рівняння (1.1.10)).

1.1.3. Розв'язок рівняння лінійного дисипативного осцилятора.

Рівняння лінійного дисипативного осцилятора (1.1.10) легко переписати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку (у фазових змінних):

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

¹ У випадку коливного контуру з варіапом перший доданок відповідає енергії магнітного поля в котушці індуктивності, другий - енергії електричного поля в конденсаторі.

Порівнюючи (1.1.15) з (B.1),

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

бачимо, що рівняння (1.1.10) описує систему з одним ступенем вільності ($n=2, n/2=1$).

Загальний розв'язок рівняння (1.1.10) добре відомий:

$$x(t) = \begin{cases} [A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)] \exp(-\delta t), & \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 > \delta; \\ [A' \exp(Dt) + B' \exp(-Dt)] \exp(-\delta t), & D = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 < \delta. \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Довільні константи A, B (або A', B') визначаються з початкових умов. Зокрема для початкових умов

$$x(t=0) = X_m, \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad (1.1.17)$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\delta}{2\omega} \right) X_m; & B &= \left(\frac{1}{2} + i \frac{\delta}{2\omega} \right) X_m; \\ A' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2D} \right) X_m; & B' &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2D} \right) X_m. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Залежності (1.1.16) для цього випадку подані на рис.1.1.4.

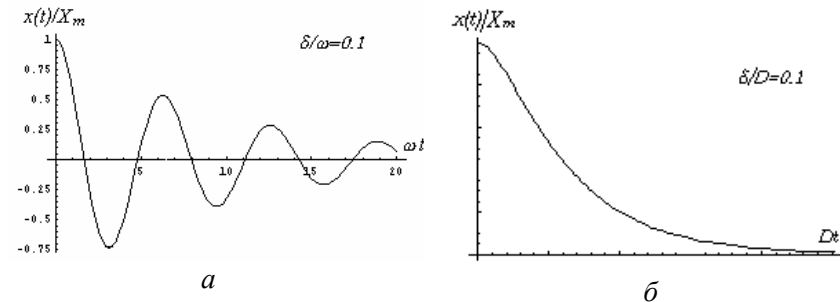


Рис.1.1.4. Вільні коливання лінійного дисипативного осцилятора для випадків $\omega_0 > \delta$ (а) та $\omega_0 < \delta$ (б).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

1.1.4. Метод фазової площини.

У багатьох випадках для аналізу руху систем з одним ступенем вільності зручно користуватися методом фазової площини.

Фазова площина - це площина, на якій по осі абсцис відкладається координата, а по осі ординат - швидкість частинки. Тоді в кожний момент часу стан системи відповідає деякій точці на фазовій площині, яку називають *зображувальною точкою*. Лінія, яку описує на фазовій площині зображувальна точка, називається *фазовою траєкторією*. Сукупність усіх можливих фазових траєкторій називається *фазовим портретом* системи.

Проаналізуємо, користуючись методом фазової площини, найпростіше рівняння лінійного консервативного осцилятора (1.1.3):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Увівши до розгляду швидкість

$$y(x(t)) = \dot{x} \quad (1.1.19)$$

і врахувавши, що

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} y = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx}, \quad (1.1.20)$$

можна переписати рівняння (1.1.3) у *фазових змінних* x, y , виключивши з нього час:

$$y \frac{dy}{dx} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1.21)$$

Видно, що перехід до фазових змінних дозволив знизити порядок рівняння на одиницю, але замість лінійного рівняння вийшло нелінійне. Втім, це рівняння легко проінтегрувати, розділивши змінні:

$$y dy = -\omega_0^2 x dx, \quad (1.1.22)$$

звідки

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = const \quad (1.1.23)$$

(пор. з (1.1.12)). Фазовий портрет лінійного консервативного осцилятора, як випливає з (1.1.23), являє собою набір вкладених еліпсів (рис.1.1.5а).

Оскільки додатна швидкість відповідає зростанню координати, у верхній напівплощині фазової площини, де швидкість додатна, зображувальні точки рухатимуться праворуч, відповідно в нижній - ліворуч.

Замінивши в рівнянні руху (1.1.3) ω_0^2 на $-\omega_0^2$, отримаємо випадок перевернутого маятника (для малих відхилень) або візка на гірці з параболічним профілем². Виконавши ту саму заміну в (1.1.23), отримаємо рівняння, що описує сім'ю гіпербол:

$$y^2 - \omega_0^2 x^2 = const. \quad (1.1.24)$$

Асимптоти $y = \pm \omega_0 x$ поділяють усі фазові траєкторії на чотири групи з відмінним характером руху, позначені на рис.1.1.5б римськими цифрами. Наприклад, траєкторії групи I відповідають випадку, коли візок, наїжджаючи на гірку з лівого боку, в деякій точці спиняється і скочується назад. Траєкторії групи II відповідають випадку, коли візок, також наїжджаючи на гірку з лівого боку, перекочується через неї й з'їжджає праворуч, і т.д.

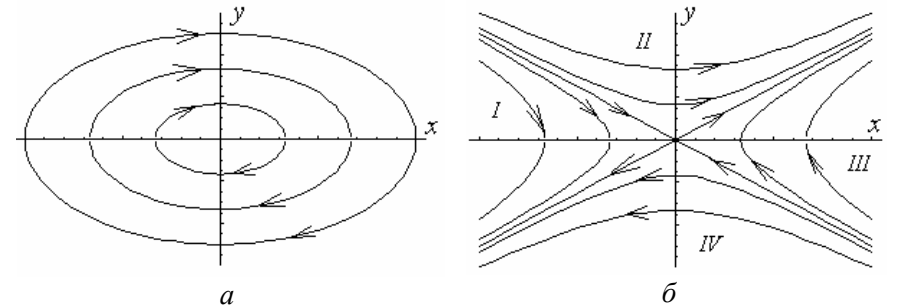


Рис.1.1.5. Фазовий портрет лінійного консервативного осцилятора: а - $\omega_0^2 > 0$, б - $\omega_0^2 < 0$.

² За умови, коли нахил гірки з профілем $y(x)$ є малим, $|dy/dx| \ll 1$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

Лінії на фазовій площині, що поділяють фазовий портрет на області з якісно відмінним характером руху, називаються *сепаратрисами*. Отже, в даному випадку асимптоти $y = \pm \omega_0 x$ є сепаратрисами.

1.1.5. Метод ізоклін.

Ізокліною називається геометричне місце точок фазової площини, в яких фазові траєкторії мають однаковий нахил. Особливості побудови фазового портрету за методом ізоклін продемонструємо на прикладі лінійного слабкодисипативного осцилятора, описуваного рівнянням (1.1.10):

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \delta < \omega_0.$$

Перейшовши до безрозмірного часу, $\tau = \omega t$, і ввівши швидкість $y = dx/d\tau$, перепишемо (1.1.10) у фазових змінних:

$$y \frac{dy}{dx} + \varepsilon y + x = 0, \quad \varepsilon = \frac{2\delta}{\omega_0}. \quad (1.1.25)$$

Рівняння ізокліни можна записати у формі

$$\frac{dy}{dx} = a = const. \quad (1.1.26)$$

Тоді, підставивши (1.1.26) до (1.1.25), дістанемо:

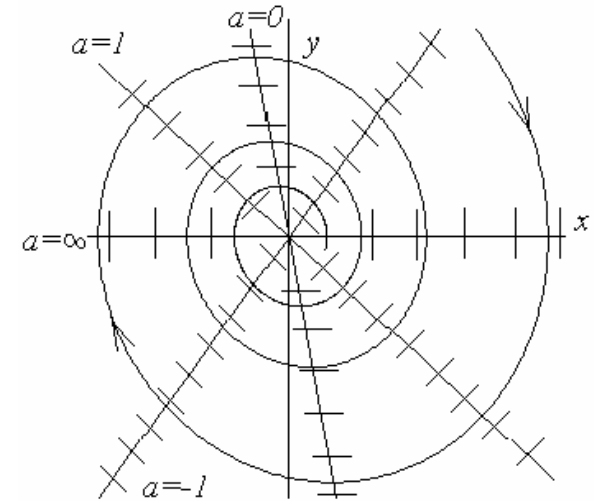
$$ay + \varepsilon y + x = 0. \quad (1.1.27)$$

Як бачимо, замість первісного диференціального рівняння другого порядку для координати отримали для ізоклін алгебраїчне рівняння. Отже, перехід до ізоклін дозволяє знизити порядок диференціального рівняння на два.

Перепишемо рівняння для ізоклін (1.1.27) у вигляді

$$y = -\frac{x}{a + \varepsilon}. \quad (1.1.28)$$

Рис.1.1.6. Ізокліни (штрихами показано напрямок проходження відповідних фазових траєкторій) та фазовий портрет лінійного слабкодисипативного ($0 < \delta < \omega_0$) осцилятора.



Видно, що так звана *нульова ізокліна* (при $a=0$) на фазовому портреті лінійного слабкодисипативного осцилятора проходить через другий та четвертий квадранти фазової площини, коли $\delta > 0$ (дисипація додатна), і через перший та третій квадранти, коли $\delta < 0$ (дисипація від'ємна).

При $a \rightarrow \infty$ маємо $y=0$. Це справедливо для будь-якої системи: фазові траєкторії завжди (за виключенням окремих особливих випадків) перетинають вісь абсцис під прямим кутом.

Маючи набір ізоклін для різних значень a , можна побудувати фазовий портрет системи. В даному випадку це буде спіраль, що скручується (рис.1.1.6). Їй відповідають коливання з амплітудою, що згасає з часом.

1.1.6. Особливі точки фазової площини.

Особливими (стаціонарними, нерухомими) точками фазової площини називаються точки $x_0 = const$, які задовольняють відповідне рі-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

рівняння руху.

Для рівняння лінійного осцилятора (1.1.10) особливою точкою буде, очевидно, точка $x=0$. Але її характер залежить від співвідношення між параметрами рівняння.

Якщо $\omega_0^2 < 0$, стаціонарна точка буде нестійкою при будь-яких значеннях параметра дисипації δ . Як уже відзначалося, вона відповідає перевернутому маятнику або візку на гірці. Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис.1.1.7а. Видно, що існує пара фазових траєкторій, що починаються в особливій точці, та пара фазових траєкторій, які в ній закінчуються. Стаціонарна точка такого типу дістала назву *сідлової точки*, або *сідла*.

Якщо $\omega_0^2 > 0$, характер особливої точки буде істотно залежати від значення δ .

При $\delta=0$, як уже вказувалося (п.1.1.4), фазовий портрет системи являє собою набір вкладених еліпсів (рис.1.1.7б). Стаціонарна точка в цьому випадку є ізольованою - в ній не починається і не закінчується жодна фазова траєкторія. Маємо справу із особливою точкою типу *центр*.

При $0 < \delta < \omega_0$ фазовий портрет системи являє собою спіраль, що скручується (п.1.1.5, рис.1.1.7в). Відповідну стаціонарну точку називають *стійким фокусом*. При малій від'ємній дисипації ($0 < -\delta < \omega_0$) отримуємо спіраль, що розкручується (рис.1.1.7г), і *нестійкий фокус*.

Нарешті, у випадку сильної дисипації - при $\delta > \omega_0$ - реалізується режим аперіодичного згасання коливань (див.п.1.1.3). Фазовий портрет системи являтиме собою набір деформованих парабол (рис.1.1.7д), що закінчуються в особливій точці типу *стійкий вузол*. При сильній від'ємній дисипації - $0 < \omega_0 < -\delta$ - матимемо аперіодичне зростання коливань (рис.1.1.7е). У цьому випадку фазові траєкторії починаються з особливої точки типу *нестійкий вузол*.

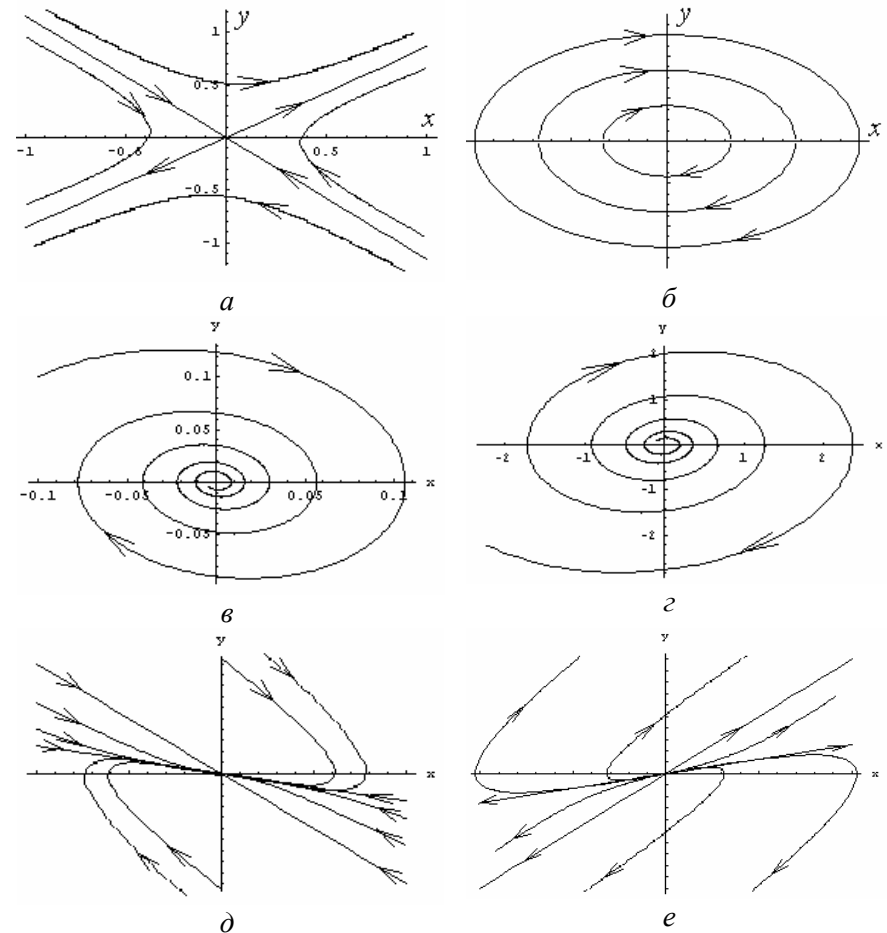


Рис.1.1.7. Особливі точки лінійного осцилятора: а - сідло ($\omega_0^2 < 0$); б - центр ($\delta=0, \omega_0^2 > 0$); в - стійкий фокус ($0 < \delta < \omega_0$); г - нестійкий фокус ($0 < -\delta < \omega_0$); д - стійкий вузол ($0 < \omega_0 < \delta$); е - нестійкий вузол ($0 < \omega_0 < -\delta$).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

Контрольні питання до розділу 1.1.

- 1.1.1. Запропонуйте кілька прикладів, що ілюструють умовність поняття кількості ступенів вільності.
- 1.1.2. Під яким кутом фазові траєкторії перетинають вісь абсцис?
- 1.1.3. Як обирається напрямок руху вздовж фазової траєкторії на фазовій площині?
- 1.1.4. Поясніть якісно, чому нульова ізокліна для дисипативних осциляторів зсувається в другий та четвертий квадранти.
- 1.1.5. У чому переваги методу аналізу руху динамічних систем за допомогою фазової площини?
- 1.1.6. Як впливає наявність дисипації на поведінку системи в околі сідлової точки? Дайте якісне пояснення.
- 1.1.7. Опишіть послідовні зміни характеру особливої точки лінійного дисипативного осцилятора ($\omega_0^2 > 0$) при зміні параметра дисипації від $-\infty$ до $+\infty$.
- 1.1.8. Вкажіть якісну відмінність між різними групами фазових траєкторій для сильнодисипативного лінійного осцилятора (рис.1.1.7д). Чим відрізняються розв'язки рівняння руху для цих випадків?
- 1.1.9. Яким розв'язкам відповідають сепаратриси (прямі лінії) на фазовому портреті сильнодисипативного лінійного осцилятора (рис.1.1.7д)?

Задачі до розділу 1.1.

- 1.1.1. Побудувати фазовий портрет для рівняння лінійного дисипативного осцилятора

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 > 0,$$

користуючись методом ізоклін. Розглянути випадки:

- а) $0 < \delta < \omega_0$;
- б) $0 < -\delta < \omega_0$;
- в) $0 < \omega_0 < \delta$;
- г) $0 < \omega_0 < -\delta$.

Вказівка: перейти до безрозмірного часу: $t \rightarrow \omega_0 t$. Для двох останніх випадків записати рівняння для сепаратрис; проаналізувати взаємне розташування сепаратрис, нульової ізокліни та ізоклін, що відповідають нахилу $a = \pm 1$; визначити, якому нахилу відповідає ізокліна, що збігається з віссю ординат.

- 1.1.2. Вказати якісну різницю між ізоклінами для фазового портрета лінійного дисипативного осцилятора для випадків:

а) $\delta < \omega_0$ та $\delta > \omega_0$;

б) $-\delta < \omega_0$ та $-\delta > \omega_0$.

- 1.1.3. Побудувати фазовий портрет для рівняння:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 > 0$$

(візок на гірці) методом ізоклін. Розглянути випадки:

а) $\delta > 0$;

б) $\delta < 0$.

Вказівка: перейти до безрозмірного часу: $t \rightarrow \omega_0 t$. Записати рівняння для сепаратрис.

- 1.1.4. Побудувати точний фазовий портрет лінійного дисипативного осцилятора

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 > 0.$$

Розглянути випадки:

а) $0 < \delta < \omega_0$;

б) $0 < -\delta < \omega_0$;

в) $\delta > \omega_0$;

г) $-\delta > \omega_0$.

Вказівка: для перших двох випадків послідовно скористатися замінами $u = \omega x$, $v = y + \delta x$, де $\omega = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}$, а потім перейти до полярних координат згідно співвідношень $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$. Для двох інших випадків скористатись заміною $u = y + q_1 x$, $v = y + q_2 x$, де $q_{1,2} = \delta \pm (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2}$. Після побудови фазового портрету в координатах u , v нанести на графік осі x , y і якісно проаналізувати, як деформується фазовий портрет при поверненні до "старих" координат.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

1.1.5. Побудувати точний фазовий портрет для рівняння :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 > 0.$$

Розглянути випадки:

а) $\delta > 0$;

б) $\delta < 0$.

Вказівка: скористатися заміною $u=y+q_1x$, $v=y+q_2x$, де $q_{1,2}=\delta\pm(\delta^2+\omega_0^2)^{1/2}$. Після побудови фазового портрету в координатах u, v нанести на графік осі x, y і якісно проаналізувати, як деформується фазовий портрет при поверненні до "старих" координат.

1.1.6. Густина рідини при віддаленні від дна посудини зменшується до нуля за лінійним законом. Знайти частоту малих коливань поплавка, що плаває в такій рідині. Розміри поплавка вважати малими порівняно з характерним розміром L , на якому густина рідини помітно змінюється. Тертя знехтувати.

1.1.7. Визначити частоту вертикальних коливань поплавка на воді. Поплавок являє собою прямий циліндр, маса якого зосереджена в нижній частині. За яких амплітуд його коливання можна вважати лінійними?

1.1.8. Визначити частоту малих коливань електрона в одновимірній кристалічній ґратці з періодом d . Електричний потенціал розподілений за законом: $\varphi(x)=\varphi_0+\varphi_m\cos(2\pi x/d)$. За яких амплітуд такі коливання можна вважати лінійними?

1.1.9. Візок маси m без тертя здійснює коливання поблизу дна ями з профілем $y=x^2/L$. Рух відбувається в площині xu .

а) За яких амплітуд (уздовж x) такі коливання можна вважати лінійними? Знайти власну частоту коливань для цього випадку.

б) Визначити період вертикальних коливань візка.

1.1.10. Візок маси m без тертя здійснює коливання поблизу дна ями з профілем $y=f(x)$. Рух відбувається в площині xu . Записати диференціальні рівняння нелінійних коливань візка для координат x та u , якщо мінімум потенціалу відповідає точці (x_0, u_0) .

1.1.11. Визначити частоту малих коливань акустичного резонатора, якщо газ, що його заповнює, задовольняє рівнянню адиабати $PV^\gamma=const$. Скористатись позначенням для швидкості звуку $c_s=(\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$, де P_0 і ρ_0 - рівноважні тиск і густина газу. За яких амплітуд такі коливання можна вважати лінійними?

Вказівка: скористатись аналогією з пружинним маятником, вважаючи, що роль маси відіграє газ у горловині, а роль пружини - газ у колбі.

1.1.12. Знайти частоту малих коливань частинки маси M поблизу мінімуму потенціалу:

а) $\Phi(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$;

б) $\Phi(x) = \frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^4}$;

в) $\Phi(x) = \frac{1}{x^{16}} - \frac{1}{x^8}$;

г) $\Phi(x) = x^{-4n} - x^{-2n}$, n - ціле число;

(різновиди потенціалу міжмолекулярної взаємодії);

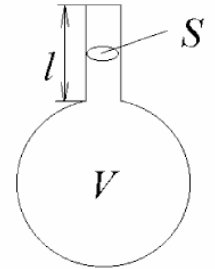
д) $\Phi(x) = -A \exp[-\alpha(x-b)^2]$;

е) $\Phi(x) = -Ax \exp[-\alpha x]$;

є) $\Phi(x) = -Ax^2 \exp[-\alpha x]$.

За яких амплітуд такі коливання можна вважати лінійними?

1.1.13. Визначити рівноважну чисельність популяцій та частоту малих коливань в системі хижак - здобич. Чисельність хижаків N_1 та здобичі N_2 задовольняє модифікованим рівнянням Вольтерра (з урахуванням обмеженості харчових ресурсів):



Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.1. Вільні коливання лінійного осцилятора.

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_1 N_1 N_2; \quad \dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - (\varepsilon_2/K) N_2^2 - \gamma_2 N_1 N_2.$$

За яких амплітуд такі коливання можна вважати лінійними? Чи можна вважати цю систему консервативною (для довільних відхилень від рівноважної чисельності)?

1.1.14. Взаємні перетворення проміжних продуктів хімічної реакції Лотки, що мають концентрації X та Y , описуються системою кінетичних рівнянь:

$$\dot{X} = k_0 - k_1 XY, \quad \dot{Y} = k_1 XY - k_2 Y.$$

Знайти рівноважні значення концентрацій X_0 , Y_0 та частоту малих коливань навколо цих концентрацій. За яких амплітуд такі коливання можна вважати лінійними? Чи можна вважати цю систему консервативною (для довільних відхилень від рівноважних концентрацій)?

1.1.15. Визначити частоту вільних поздовжніх коливань електронів у холодній плазмі з важкими іонами. Поведінка системи описується рівняннями

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{v}) = 0; \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}; \quad \operatorname{div}\vec{E} = -4\pi e(n - n_0),$$

де n та $n_0 = \text{const}$ - концентрації електронів та іонів, v - швидкість спрямованого руху електронів, E - напруженість електричного поля.

1.1.16. Побудувати розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

для початкових умов

$$x(t=0) = A_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0,$$

користуючись методом повільних амплітуд³. Розглянути випадки:

а) $\omega_0 \gg \delta > 0$;

б) $\omega_0 \gg -\delta > 0$.

Порівняти отримані результати з відомим точним розв'язком.

1.1.17. Рівняння, що описують коливання поляризації і різниці населеностей у дворівневій системі (найпростіша модель лазера) після увімкнення накачування, мають вигляд:

$$\ddot{p} + \frac{2}{T_2} \dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{2\omega_0}{\hbar} \frac{|\mu_{12}|}{3} NE; \quad \dot{N} + \frac{N - N_0}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\omega_0} \dot{p}E,$$

де p - поляризація, N - різниця населеностей, N_0 - її рівноважне значення (за відсутності накачування), $E = E_m \cos \omega_0 t$ - напруженість поля накачування, ω_0 - частота квантового переходу, μ_{12} - матричний елемент, що характеризує ймовірність цього переходу, $T_{1,2}$ - часи поздовжньої та поперечної релаксації ($\omega_0 T_{1,2} \ll 1$).

Вважаючи, що поляризація має характер коливань на частоті ω_0 з повільною амплітудою, отримати для неї вкорочене рівняння. Знайти рівноважні значення амплітуди поляризації та різниці населеностей за наявності накачування, частоту та час згасання їхніх коливань. Намалювати графік часової залежності різниці населеностей, якщо накачування увімкнено в момент часу $t=0$, коли система знаходилася в рівноважному стані.

Вказівка. Доданком із подвійною частотою в правій частині рівняння для різниці населеностей знехтувати. Записати систему рівнянь для відхилень поляризації та різниці населеностей від рівноважних значень. Вважати виконаною умови

$$\frac{|\mu_{12}| E_m T_{1,2}}{\hbar} \ll 1.$$

1.1.18. Візок маси m без тертя здійснює коливання в ямі з профілем $u(x)$. Знайти функцію $u(x)$, яка забезпечує гармонічність коливань у напрямку x .

³ Про метод повільних амплітуд див. п.1.5.2.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.2. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

1.2. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

В багатьох випадках осцилятори взаємодіють між собою. Якщо зворотним впливом другого осцилятора на перший можна знехтувати, то прямий вплив першого на другий зручно подати в формі заданої зовнішньої сили. Колювання, що здійснюються під впливом зовнішньої сили, називаються вимушеними.

1.2.1. Приклади вимушених колювань лінійних осциляторів.

Прикладами вимушених колювань лінійних осциляторів можуть бути колювання маятника під дією зовнішньої сили або колювання в контурі під дією зовнішньої змінної напруги (рис.1.2.1а,б). В усіх випадках наявність зовнішньої сили $f(t)$ призводить до того, що рівняння руху (1.1.9) (або (1.1.2) для випадку консервативного осцилятора) стає неоднорідним:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (1.2.1)$$

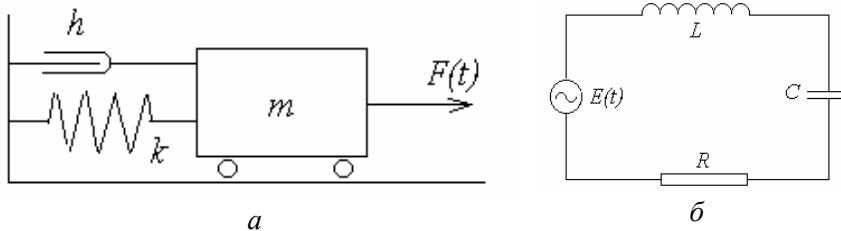


Рис.1.2.1. Приклади лінійних осциляторів, на які діють зовнішні сили: а - пружинний маятник, б - коливний контур.

1.2.2. Осцилятор під дією зовнішньої сили - система з півтора ступенями вільності.

Перепишемо рівняння (1.2.1) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x + f(\tau), \end{cases}$$

що має вигляд (В.1) (додаткову змінну $\tau = t$ введено для того, щоб праві частини формально не залежали від часу). Бачимо, що наявність зовнішньої сили еквівалентна додаванню половини ступеню вільності. Отже, осцилятор, на який діє зовнішня сила, являє собою систему з півтора ступенями вільності.

1.2.3. Колювання лінійного консервативного осцилятора під дією гармонічної сили.

Проаналізуємо спочатку колювання консервативного осцилятора під дією зовнішньої гармонічної сили, що описуються рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos pt. \quad (1.2.2)$$

Як відомо з теорії диференціальних рівнянь, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння може бути записаний як сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Називатимемо ці частини вільною і вимушеною складовою колювань:

$$x(t) = x_{free}(t) + x_{forced}(t). \quad (1.2.3)$$

Для рівняння (1.2.2), очевидно,

$$x_{free}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad x_{forced}(t) = \frac{f_m \cos pt}{\omega_0^2 - p^2}. \quad (1.2.4)$$

Константи А і В, як і для чисто вільних колювань, знаходяться з початкових умов.

Зокрема, для нульових початкових умов ($x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$) отримаємо:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.2. Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

$$A = -\frac{f_m}{\omega_0^2 - p^2}, \quad B = 0,$$

$$x(t) = \frac{f_m}{\omega_0^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega_0 t) = -\frac{2f_m}{\omega_0^2 - p^2} \sin \frac{p - \omega_0}{2} t \sin \frac{p + \omega_0}{2} t \quad (1.2.5)$$

(рис.1.2.2а). Рух системи являє собою биття двох коливань з однаковими амплітудами - вільних з частотою ω_0 та вимушених з частотою p . Оскільки згасання відсутнє, биття триватимуть як завгодно довго. Період биттів визначається співвідношенням

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0 - p|}. \quad (1.2.6)$$

Для інших початкових умов амплітуди вільних та вимушених коливань вже не будуть рівними, але в загальному випадку вони будуть ненульовими, тому биття збережуться.

Розглянемо тепер випадок резонансу, коли $\omega_0 = p$. В цьому випадку замість (1.2.5) дістанемо:

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow \omega_0} \frac{2f_m}{p^2 - \omega_0^2} \sin \frac{p - \omega_0}{2} t \sin \frac{p + \omega_0}{2} t =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \omega_0} \frac{f_m t}{p + \omega_0} \frac{\sin \frac{p - \omega_0}{2} t}{(p - \omega_0)t/2} \sin \frac{p + \omega_0}{2} t = \frac{f_m t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1.2.7)$$

(рис.1.2.2б). Видно, що в цьому випадку має місце необмежене лінійне за часом (секулярне) зростання амплітуди коливань.

Зрозуміло, що в реальних системах секулярне зростання коливань не спостерігається. Воно обмежується за рахунок наявності дисипації або нелінійності.

1.2.4. Вплив дисипації на коливання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

Для лінійного осцилятора з дисипацією замість (1.2.1) одержимо:

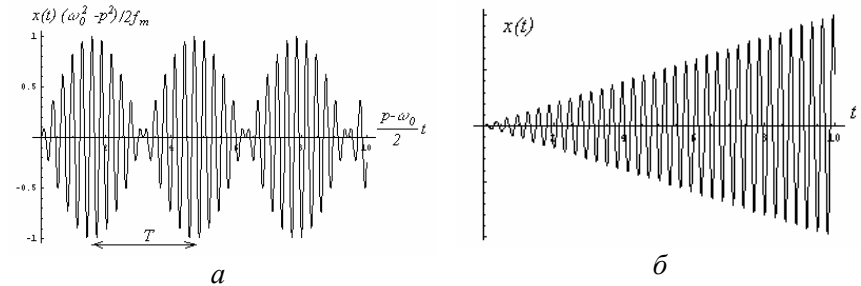
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos pt. \quad (1.2.8)$$


Рис.1.2.2. Коливання лінійного консервативного осцилятора під дією гармонічної зовнішньої сили для нульових початкових умов: а - $\omega_0 \neq p$, б - $\omega_0 = p$.

Розв'язок цього рівняння для нульових початкових умов та слабкої дисипації ($\delta \ll \omega_0$) має вигляд:

$$x(t) \approx \begin{cases} \frac{f_m}{\omega_0^2 - p^2} [\cos pt - \cos \omega_0 t \exp(-\delta t)], & |p - \omega_0| \gg \delta; \\ \frac{f_m}{2\omega_0 \delta} \sin \omega_0 t [1 - \exp(-\delta t)], & p = \omega_0 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

(рис.1.2.3а,б).

Видно, що у нерезонансному випадку згасання вільної складової призводить до зникнення биття за час порядку $1/\delta$, після чого в системі залишаються лише чисто вимушені коливання. Відзначимо, що викид амплітуди в момент часу $t \approx \pi / |\omega_0 - p|$ приблизно вдвічі перевищує значення, що встановлюється при $t \rightarrow \infty$. Цю обставину слід мати на увазі при розрахунках запасу міцності систем, в яких збу-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.2. Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

джуються вимушені коливання (наприклад, електричної міцності кабелю).

У випадку точного резонансу лінійне зростання амплітуди з часом спостерігається лише в початкові моменти (при $t \leq 1/\delta$), після чого амплітуда поступово встановлюється на рівні, обернено пропорційному до параметра дисипації.

Зазначимо, що при сильній дисипації ($\delta > \omega_0$) биття взагалі відсутні, оскільки вільна складова коливальних має аперіодичний характер.

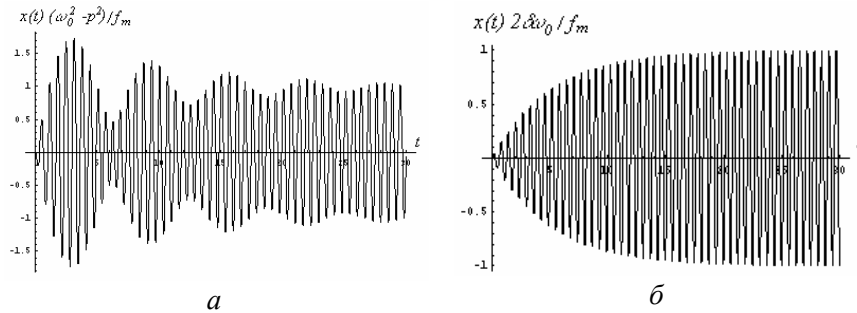


Рис.1.2.3. Коливання лінійного слабкодисипативного осцилятора під дією гармонічної зовнішньої сили для нульових початкових умов:

$a - \omega_0 \neq p$, $b - \omega_0 = p$.

1.2.5. Електромеханічні аналогії.

Виділення теорії коливальних в окрему галузь науки обумовлене тим, що коливні явища різної природи описуються тими самими рівняннями. Проілюструємо це твердження на прикладі простих механічних та електричних систем.

Запишемо рівняння руху пружинного маятника (рис.1.2.4а) на основі другого закону Ньютона:

$$F(t) = m\ddot{x} + h\dot{x} + kx. \quad (1.2.10)$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа для послідовного коливного контуру (рис.1.2.4б) має вигляд

$$u(t) = L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{1}{C}q, \quad q = \int Idt. \quad (1.2.11)$$

Видно, що рівняння (1.2.10) та (1.2.11) збігаються з точністю до позначень. Це дозволяє побудувати деяку систему відповідності між механічними та електричними величинами - так звану систему електромеханічних аналогій сила - напруга (табл.1.2.1).

Механічні величини	F	x	$dx/dt = v$	m	h	k	$W_{кин} = mv^2/2$	$W_{ном} = kx^2/2$	$mv = p$
Електричні величини	u	q	$dq/dt = i$	L	R	$1/C$	$W_{магн} = LI^2/2$	$W_{ел} = q^2/2C$	$LI = \Phi$

Табл.1.2.1. Система електромеханічних аналогій сила - напруга.

Однак система сила - напруга ставить паралельному сполученню механічних елементів послідовне сполучення електричних елементів, тобто при цьому порушується топологічна еквівалентність систем. Тому більш зручною є система аналогій, що встановлює відповідність між пружинним маятником, який описується рівнянням (1.2.10), та паралельним електричним контуром (рис.1.2.4в), для якого на основі першого закону Кірхгофа можна записати рівняння руху у формі

$$I(t) = C\ddot{\Phi} + \frac{1}{r}\dot{\Phi} + \frac{1}{L}\Phi, \quad \Phi = LI_L = \int udt \quad (1.2.12)$$

(тут Φ - магнітний потік у котушці індуктивності). Ця система електромеханічних аналогій сила - струм відображена в табл.1.2.2.

Механічні величини	F	x	$dx/dt = v$	m	h	k	$W_{кин} = mv^2/2$	$W_{ном} = kx^2/2$	$mv = p$
Електричні величини	I	$\Phi = \int udt$	$d\Phi/dt = u$	C	R^{-1}	L^{-1}	$W_{ел} = Cu^2/2$	$W_{магн} = \Phi^2/2L = LI^2/2$	$Cu = q$

Табл.1.2.2. Система електромеханічних аналогій сила - струм.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.2. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

На основі систем електромеханічних аналогій можна отримати інформацію про поведінку складної механічної конструкції (міст, гвинт гелікоптера та ін.) на основі дослідження її електричного аналога - деякої електротехнічної схеми. Такий метод досліджень до розробки швидкісних комп'ютерів набув значного поширення, і відповідні пристрої дістали назву аналогових обчислювальних машин. Крім електромеханічних аналогій, набула поширення також система електроакустичних аналогій.

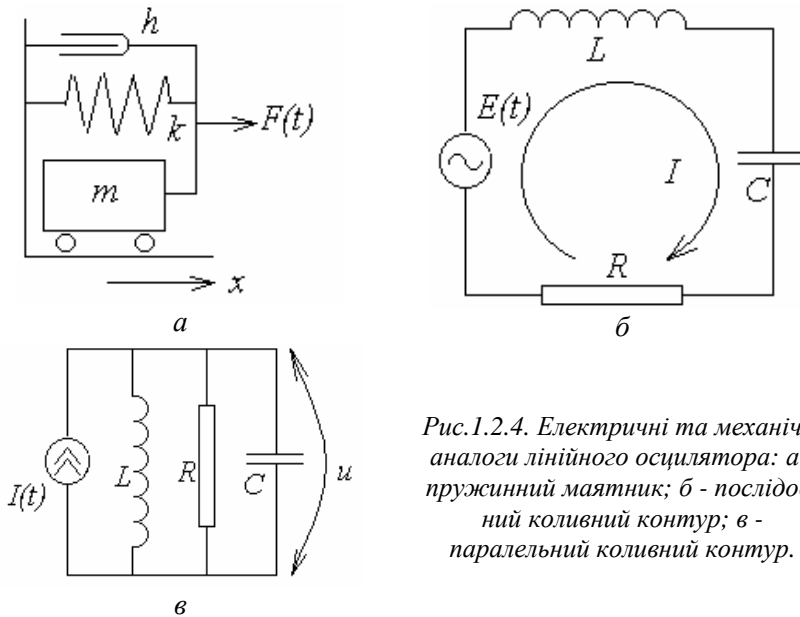


Рис.1.2.4. Електричні та механічні аналоги лінійного осцилятора: а - пружинний маятник; б - послідовний коливний контур; в - паралельний коливний контур.

Узагальненням описаних процедур виступає метод аналогового моделювання, коли результати дослідження деякої системи переносяться на системи іншої природи, описувані тими самими за формою рівняннями. Так, наприклад, цикл досліджень руху рідини в спеціальній посудині, нижня та верхня частини якої оберталися з різними

кутовими швидкостями, дозволив:

- пояснити, чому в атмосфері Землі антициклони трапляються частіше, ніж циклони;
- пояснити деякі особливості руху плазми у пастках із сильними магнітними полями - так званих ТОКАМАКАх;
- висловити припущення щодо природи Великої червоної плями на Юпітері - об'єкта, відомого з астрономічних спостережень;
- передбачити раніше невідомі особливості будови зоряних скупчень - галактик, які пізніше знайшли своє експериментальне підтвердження.¹

Контрольні питання до розділу 1.2.

- 1.2.1. Скільки ступенів вільності має коливний контур, у який увімкнене джерело заданої змінної напруги?
- 1.2.2. Чи можлива ситуація, коли при увімкненні джерела періодичної зовнішньої сили в осцилятор не здійснюватиме биттів?
- 1.2.3. Протягом якого часу в експерименті можна спостерігати секулярне зростання амплітуди вимушених колювань у режимі точного резонансу?
- 1.2.4. Яка з двох систем електромеханічних аналогій зручніша для аналізу поведінки складних механічних систем?
- 1.2.5. Чим визначається швидкість зростання амплітуди колювань у перші моменти часу після увімкнення зовнішньої гармонічної сили?

Задачі до розділу 1.2.

- 1.2.1. На лінійний слабкодисипативний ($\delta \ll \omega_0$) осцилятор діє, починаючи з моменту $t=0$, зовнішня сила $f_m \sin pt$. Вважаючи, що $|p$

¹ Див.: М.В.Незлин, Е.Н.Снежкін. Вихри Россби и спиральные структуры: астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М., Наука, 1990.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.2. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією гармонічної сили.

$\omega_0/\sim\delta$, знайти рух системи за допомогою методу повільних амплітуд².

1.2.2. Знайти рух лінійного дисипативного осцилятора під дією зовнішньої гармонічної сили за нульових початкових умов. Окремо розглянути випадок резонансу. Розглянути випадки:

а) $0 < \delta < \omega_0$;

б) $0 < \omega_0 < \delta$.

1.2.3. На лінійний консервативний осцилятор починаючи з моменту часу $t=0$ діє гармонічна зовнішня сила. За яких початкових умов у системі взагалі не виникнуть вільні колювання?

1.2.4. На якій частоті досягається максимум амплітуди

а) відхилення;

б) швидкості

колювань лінійного дисипативного осцилятора?

² Про метод повільних амплітуд див. п.1.5.2.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.3. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.

1.3. Вимушені колювання лінійного осцилятора

під дією довільної сили: методи аналізу.

Перейдемо тепер до розгляду більш загального випадку, коли зовнішня сила, що діє на лінійний осцилятор, не є гармонічною. В основі методів аналізу вимушених колювань для таких випадків лежить принцип суперпозиції.

1.3.1. Принцип суперпозиції.

Для систем, описуваних лінійними диференціальними рівняннями (тобто власне лінійних і параметричних за класифікацією, введеною у п.В.2), справджується *принцип суперпозиції*: відгук системи на дію суми зовнішніх сил дорівнює сумі відгуків на дію кожної з цих сил.

Розглянемо загальний випадок, коли на систему, описувану лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку (тобто з $n/2$ ступенями вільності; беремо найбільш загальний випадок рівняння із змінними коефіцієнтами), діє довільна (негармонічна) зовнішня сила:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k}(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^k x = f(t), \quad a_0 \neq 0. \quad (1.3.1)$$

Для того, щоб побудувати розв'язок рівняння (1.3.1), подамо його праву частину -зовнішню силу - у вигляді деяких «зручних» функцій (парціальних сил), для яких легко знайти розв'язки (відгуки). Згідно принципу суперпозиції, відгук на дію зовнішньої сили дорівнює просто сумі відгуків на ці парціальні сили.

1.3.2. Метод рядів та інтегралів Фур'є.

У багатьох випадках у ролі таких «зручних» функцій виступають гармоніки (наприклад, експоненти з уявними показниками). Тоді

метод розв'язання рівняння (1.3.1) зводиться до використання рядів (якщо зовнішня сила періодична) або інтегралів (для неперіодичних зовнішніх сил) Фур'є.

Нехай $x_p(t)$ - чисто вимушений розв'язок рівняння (1.3.1) для гармонічної зовнішньої сили $f(t) = \exp(ipt)$. Тоді величина

$$K(p, t) = \frac{x_p(t)}{\exp(ipt)} \quad (1.3.2)$$

називається коефіцієнтом передачі, або передавальною функцією системи¹.

Нехай сила в правій частині (1.3.1) періодична з періодом T . Розкладемо її в ряд Фур'є:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(i \frac{2\pi m}{T} t\right), \quad (1.3.3)$$

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-i \frac{2\pi m}{T} t\right) dt.$$

Тоді відгук системи на гармоніку з номером m буде

$$C_m K\left(\frac{2\pi m}{T}, t\right) \exp\left(i \frac{2\pi m}{T} t\right),$$

а повний відгук, тобто вимушений розв'язок (1.3.1) -

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m K\left(\frac{2\pi m}{T}, t\right) \exp\left(i \frac{2\pi m}{T} t\right). \quad (1.3.4)$$

Для неперіодичної сили з обмеженою енергією,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt < \infty,$$

отримаємо:

¹ Якщо коефіцієнти в рівнянні (1.3.1) сталі, розв'язок $x_p(t)$ залежить від часу як $\exp(ipt)$, а передавальна функція взагалі не залежить від часу.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.3. Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp(ipt) dp,$$

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-ipt) dt. \quad (1.3.5)$$

Тоді

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) K(p, t) \exp(ipt) dp. \quad (1.3.6)$$

1.3.3. Інтеграл Дюгамеля.

У випадку аналізу за методом рядів (інтегралів) Фур'є ми розклали зовнішню силу на нескінченні в часі гармоніки, які діють всі одночасно. Але іноді для неперіодичної зовнішньої сили зручніше розкласти її на короткі імпульси (удари), що діють на систему послідовно (рис.1.3.1а). Спрямовуючи тривалість окремих імпульсів до нуля, приходимо до розкладу сили по δ -функціях Дірака:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \delta(t - \theta) d\theta \quad (1.3.7)$$

(тут $f(\theta)$ - амплітуда відповідної δ -функції).

Відгук рівняння (1.3.1) на силу вигляду $f(t) = \delta(t - \theta)$ (де θ - момент удару) називають функцією Гріна системи $H(t, \theta)$ (рис.1.3.1б)². Оскільки реакція на удар не може передувати самому удару, то, виходячи з принципу причинності,

$$H(t < \theta, \theta) = 0. \quad (1.3.8)$$

Користуючись функцією Гріна і принципом суперпозиції, розв'язок рівняння (1.3.1) можна подати у вигляді послідовної в часі суми відгуків на окремі імпульси:

² Якщо коефіцієнти в (1.3.1) не залежать від часу, то $H(t, \theta) = H(t - \theta)$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) H(t, \theta) d\theta = \int_{-\infty}^t f(\theta) H(t, \theta) d\theta \quad (1.3.9)$$

(рис.1.3.1в; у другому інтегралі враховано умову (1.3.8)). Перепозначимо $H(t, \theta) \rightarrow H(t - \theta, \theta)$; тепер перший аргумент - це проміжок часу між моментом удару і моментом спостереження. Тоді, замінивши змінну інтегрування, можна записати:

$$x(t) = \int_0^{\infty} f(t - \tau) H(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (1.3.9a)$$

де $\tau = t - \theta$ - час, що минув від удару до моменту спостереження.

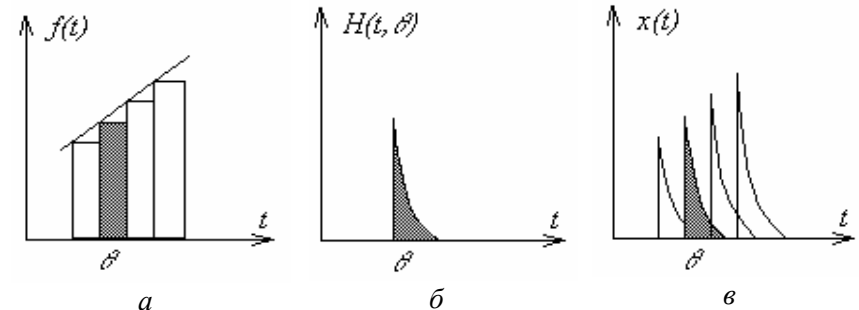


Рис.1.3.1. До пояснення інтегралу Дюгамеля: а - розклад зовнішньої сили по δ -функціях ; б - функція Гріна (показана умовно); в - інтеграл Дюгамеля як сума відгуків на окремі δ -функції.

Інтеграли вигляду (1.3.9) або (1.3.9a) прийнято називати *інтегралами Дюгамеля (I роду)*³.

³ Інтеграл Дюгамеля II роду можна отримати з (1.3.9) інтегруванням по частинах, врахувавши, що інтеграл від δ -функції Дірака дає функцію Хевісайда (одиничний стрибок).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.3. Вимушені коливання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.

1.3.4. Зв'язок між передавальною функцією та функцією Гріна.

Оскільки розв'язки (1.3.6) та (1.3.9) стосуються того самого рівняння, передавальна функція та функція Гріна системи повинні бути пов'язані між собою. Для знаходження цього зв'язку в інтегралі (1.3.9а) розкладемо функцію $f(t-\tau)$ в інтеграл Фур'є і змінимо порядок інтегрування:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\infty} H(\tau, t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp[ip(t-\tau)] dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p) \exp(ip t) \int_0^{\infty} H(\tau, t-\tau) \exp(-ip\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Порівнюючи (1.3.10) з (1.3.6), приходимо до висновку, що

$$K(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau, t-\tau) \exp(-ip\tau) d\tau. \quad (1.3.11)$$

Цей інтеграл має вигляд перетворення Фур'є (де τ відіграє роль часу, p - роль частоти, t виступає як параметр), тому можна записати і зворотне перетворення:

$$H(\tau, t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(p, t) \exp(ip\tau) dp. \quad (1.3.12)$$

1.3.5. Запис функції Гріна через власні функції однорідного рівняння.

Користуватися співвідношенням (1.3.12) для знаходження функції Гріна незручно. Її легше записати через набір лінійно незалежних розв'язків рівняння (1.3.1) без правої частини. Позначимо ці розв'язки через y_1, y_2, \dots, y_n . Тоді функцію Гріна можна подати у вигляді:

$$H(t > \theta, \theta) = \frac{1}{a_0(t)} \begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) & \dots & y_n(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) & \dots & \dot{y}_n(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\theta) & y_2^{(n-2)}(\theta) & \dots & y_n^{(n-2)}(\theta) \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(\theta) & y_2(\theta) & \dots & y_n(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) & \dots & \dot{y}_n(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(\theta) & y_2^{(n-1)}(\theta) & \dots & y_n^{(n-1)}(\theta) \end{vmatrix} \quad (1.3.13)$$

(у знаменнику стоїть вронський рівняння (1.3.1) без правої частини аргументу θ).

Виведення формули (1.3.13) можна знайти в курсах теорії диференціальних рівнянь (отримання розв'язку неоднорідного лінійного рівняння через набір лінійно незалежних розв'язків відповідного однорідного рівняння)⁴.

Контрольні питання до розділу 1.3.

- 1.3.1. Як зміниться вигляд інтегралу Дюгамеля для ненульових початкових умов?
- 1.3.2. Для яких систем функція Гріна не буде прямувати до нуля при $t \rightarrow \infty$?
- 1.3.3. Чи можна за виглядом передавальної функції визначити, що відповідна система є консервативною (дисипативною)?
- 1.3.4. Поясніть якісно, чому для параметричних систем передавальна функція може залежати від часу.

⁴ Див., наприклад: Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1976.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.3. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.

1.3.5. В яких випадках функція Гріна системи залежить не тільки від проміжку часу, що пройшов після удару, але й від моменту часу удару?

Задачі до розділу 1.3.

1.3.1. Знайти рух лінійного дисипативного осцилятора під дією послідовності коротких імпульсів

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

та записати умову резонансу. Чим вона відрізнятиметься від випадку чисто гармонічної зовнішньої сили? Розглянути випадки:

- а) $\delta=0$;
- б) $0 < \delta < \omega_0$;
- в) $0 < \omega_0 < \delta$.

1.3.2. Розв'язати задачу 1.3.1а-в для випадку

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT).$$

1.3.3. Розв'язати задачу 1.3.1а-в для випадку

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t - nT| \leq \tau/2; \\ 0, & |t - nT| > \tau/2, \end{cases} \quad \tau < T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.3.4. Знайти рух лінійного дисипативного осцилятора під дією періодичної зовнішньої сили вигляду

$$f(t) = f_m \sin^3 pt$$

та записати умову резонансу. Розглянути випадки:

- а) $\delta=0$;
- б) $0 < \delta < \omega_0$;
- в) $0 < \omega_0 < \delta$.

1.3.5. Розрахувати функцію Гріна для лінійного дисипативного осцилятора, якщо

а) $0 < \delta < \omega_0$;

б) $0 < \omega_0 < \delta$.

1.3.6. Методом інтегралу Дюгамеля знайти рух лінійного слабкодисипативного ($\delta < \omega_0$) осцилятора під дією коротких імпульсів зовнішньої сили:

а) $f(t) = \delta(t)$;

б) $f(t) = A\delta(t) - B\delta(t - T)$.

1.3.7. Розв'язати задачі 1.3.6а,б для випадку $\delta > \omega_0$.

1.3.8. Методом інтегралу Дюгамеля знайти рух лінійного слабкодисипативного ($\delta < \omega_0$) осцилятора під дією гармонічної зовнішньої сили, що починає діяти в момент $t=0$:

а) $f(t) = \begin{cases} f_m \cos pt, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad |\omega_0 - p| \gg \delta;$

б) $f(t) = \begin{cases} f_m \cos \omega_0 t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \delta \ll \omega_0.$

1.3.9. Розв'язати задачі 1.3.8а,б для випадку $\delta > \omega_0$.

1.3.10. Методом інтегралу Дюгамеля знайти рух лінійного слабкодисипативного ($\delta < \omega_0$) осцилятора під дією прямокутних імпульсів зовнішньої сили:

а) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > T; \\ 1, & 0 < t < T \end{cases}$

(розглянути моменти часу $0 < t < T$ та $t > T$);

б) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < -T, \quad t > T; \\ 1, & -T < t < 0; \\ -1, & 0 < t < T \end{cases}$

(розглянути моменти часу $-T < t < 0$, $0 < t < T$ та $t > T$).

1.3.11. Розв'язати задачі 1.3.10а,б для випадку $\delta > \omega_0$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.3. Вимушені колювання лінійного осцилятора під дією довільної сили: методи аналізу.

1.3.12. Методом інтегралу Дюгамеля знайти рух лінійного слабкодисипативного ($\delta < \omega_0$) осцилятора під дією трикутних імпульсів зовнішньої сили:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > T; \\ 1 - t/T, & 0 < t < T \end{cases}$$

(розглянути моменти часу $0 < t < T$ та $t > T$);

$$\text{б) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > T; \\ t/T, & 0 < t < T \end{cases}$$

(розглянути моменти часу $0 < t < T$ та $t > T$);

$$\text{в) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < -T, \quad t > T; \\ t/T, & -T < t < T \end{cases}$$

(розглянути моменти часу $-T < t < T$, $T < t$);

$$\text{г) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < -T, \quad t > T; \\ 1 + t/T, & -T < t < 0; \\ -1 + t/T, & 0 < t < T \end{cases}$$

(розглянути моменти часу $-T < t < 0$, $0 < t < T$ та $t > T$);

$$\text{д) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < -T, \quad t > T; \\ 1 + t/T, & -T < t < 0; \\ 1 - t/T, & 0 < t < T \end{cases}$$

(розглянути моменти часу $-T < t < 0$, $0 < t < T$ та $t > T$).

1.3.13. Розв'язати задачі 1.3.12а-д для випадку $\delta > \omega_0$.

1.3.14. Користуючись методом інтегралу Фур'є, розв'язати задачі 1.3.6 – 1.3.13.

Вказівка: для виконання зворотного перетворення Фур'є скористатися методом лишків.

1.3.15. На лінійний консервативний осцилятор діє радіоімпульс тривалістю T , промодульований резонансною частотою ω_0 . Знайти відгук системи. Задачу розв'язати:

а) методом інтегралу Фур'є;

б) методом інтегралу Дюгамеля.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу (для ступінчастого накачування).

1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу

(для ступінчастого накачування).

Нагадаємо, що параметричними прийнято називати системи, у яких який-небудь параметр змінюється з часом під дією зовнішньої сили за деяким наперед заданим законом незалежно від руху самої системи.

Найпростішими для аналізу є параметричні системи, у яких деякий параметр змінюється стрибкоподібно. З них ми й почнемо розгляд.

1.4.1. Параметричний резонанс у системі без дисипації.

Розглянемо маятник, що здійснює малі коливання і в якого довжина підвісу стрибком змінюється двічі за період коливань під дією деякої зовнішньої сили: коли маятник знаходиться в крайніх положеннях (точки 2 та 2'), довжина зростає, коли він проходить через положення рівноваги (точка 1) - зменшується (рис.1.4.1).

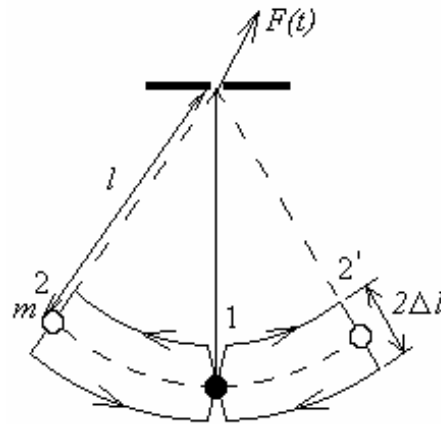


Рис.1.4.1. Маятник зі змінною довжиною підвісу.

Оскільки в точці 1 на масу діє сума сили тяжіння та відцентрової сили, робота, що витрачається на вкорочення підвісу, буде

$$A_1 = (mg + mv_m^2/l)2\Delta l.$$

В точках 2 та 2' присутня лише сила тяжіння, тому робота, яка виконується при подовженні підвісу, буде рівна

$$A_2 = -2\Delta lmg.$$

Тоді сумарна робота, що виконується джерелом зовнішньої сили за період коливань, дорівнює

$$A_{\Sigma} = 2A_1 + 2A_2 = 4mv_m^2 \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.4.1)$$

Очевидно, ця робота витрачається на збільшення амплітуди коливань маятника. Говорять, що в системі має місце *параметричний резонанс*, або *параметрична нестійкість* коливань.

Маятник зі змінною довжиною підвісу є моделлю звичайної гойдалки. Справді, дитина, яка намагається розгойдати гойдалку, присідає, коли відхилення максимальне, і випростується, коли гойдалка проходить через положення рівноваги.

1.4.2. Параметричний резонанс у дисипативній системі.

Розглянемо тепер коливання в контурі зі змінною ємністю (рис.1.4.2а). Нехай у моменти, коли напруга на ємності максимальна, ми розсуваємо пластини, тим самим зменшуючи ємність. У моменти ж, коли напруга рівна нулеві, ми знову зсуваємо пластини, збільшуючи ємність (рис.1.4.2б, верхня епюра). Відзначимо, що період коливань ємності (або, як кажуть, період накачування) вдвічі менший від періоду власних коливань контуру. В моменти, коли ми розсуваємо пластини конденсатора, заряд на них не встигає змінитись. Отже, при цьому стрибком зростає напруга на конденсаторі $U=q/C$ і збільшується накопичена енергія $W=q^2/2C$. У моменти, коли пластини зсуваються, вся енергія зосереджена в котушці індуктивності і, отже, залишається незмінною. Таким чином, амплітуда коливань в

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу (для ступінчастого накачування).

контурі з часом зростатиме (рис.1.4.2б, нижня еюра).

Проаналізуємо тепер цей процес кількісно. Вважатимемо глибину модуляції ємності $m = \Delta C / C_0$ малою ($m \ll 1$), а добротність контуру $Q = (L/C_0)^{1/2} / R$ - великою ($Q \gg 1$). Тоді відносна зміна амплітуди коливань за період також буде малою, тобто коливання наближено можна вважати гармонічними.

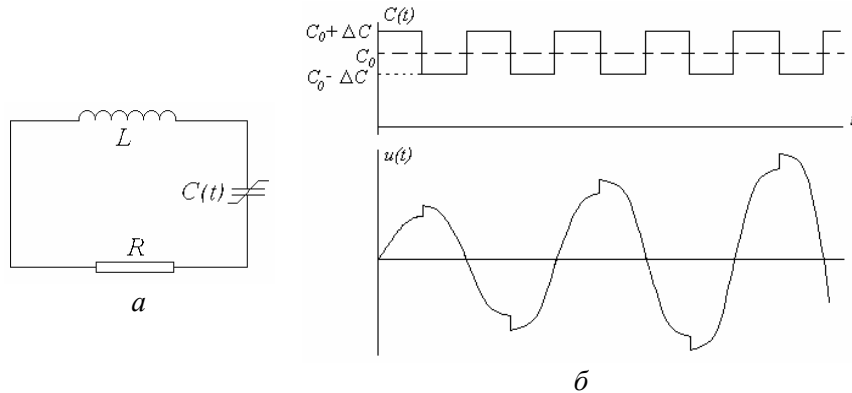


Рис.1.4.2. Коливний контур, у якому ступінчато змінюється ємність:
а - схема; б - зміна ємності та напруги на ній з часом.

При зміні ємності на величину dC енергія конденсатора змінюється на величину

$$dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C} \frac{dC}{C}.$$

В нашому випадку $dC = -2\Delta C$, розсування пластин здійснюється двічі за період коливань, тому енергія, що надходить у контур від джерела накачування (внаслідок зміни ємності), буде

$$\Delta W_+ = 2 \frac{q_m^2}{2C_0} \frac{2\Delta C}{C_0} = 2m \frac{q_m^2}{C_0}. \quad (1.4.2)$$

Енергія втрат на активному опорі за період коливань:

$$\Delta W_- = \frac{1}{2} R I_m^2 \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi R q_m^2 \omega_0, \quad (1.4.3)$$

де враховано, що для гармонічних коливань $I_m = q_m \omega_0$.

Умова зростання амплітуди коливань - перевищення енергії, що надходить у контур, над втратами: $\Delta W_+ > \Delta W_-$, або

$$m > m_{cr} \equiv \frac{\pi}{2} R \omega_0 C_0 = \frac{\pi}{2Q}. \quad (1.4.4)$$

Отже, (1.4.4) є умовою параметричного резонансу. Ми бачимо, що тепер він має поріг (за глибиною модуляції ємності), обумовлений наявністю дисипації в коливній системі.

1.4.3. Дисипативний параметричний осцилятор як регенеративний підсилювач.

Якщо $m < m_{cr}$, то енергія, що надходить від джерела накачування, лише частково компенсує втрати на активному опорі. Це можна інтерпретувати як зменшення активного опору контуру і збільшення його еквівалентної добротності:

$$\begin{aligned} \Delta W_- \rightarrow \Delta W_- - \Delta W_+ &= \pi \omega_0 R q_m^2 - 2m q_m^2 / C_0 = \\ &= \pi \omega_0 R q_m^2 (1 - m/m_{cr}) = \pi \omega_0 R_{eff} q_m^2, \end{aligned}$$

$$R_{eff} = R(1 - m/m_{cr}), \quad Q_{eff} = \frac{1}{R_{eff}} \sqrt{\frac{L}{C_0}} = \frac{Q}{1 - m/m_{cr}}. \quad (1.4.5)$$

В результаті падіння напруги на реактивних елементах зростає в

$$k = \frac{Q_{eff}}{Q} = \frac{1}{1 - m/m_{cr}} \quad (1.4.6)$$

разів порівняно з випадком, коли накачування відсутнє. Структура формули (1.4.6) така сама, як у виразу для коефіцієнта підсилення підсилювача, охопленого позитивним зворотним зв'язком з коефіці-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу (для ступінчастого накачування).

ентом β :

$$k = \frac{k_0}{1 - k_0 \beta}. \quad (1.4.7)$$

Підвищення коефіцієнту підсилення підсилювача за рахунок його охоплення позитивним зворотнім зв'язком (по суті, це буде недозбуджений автогенератор) називають регенеративним підсиленням. Отже, у випадку, коли умова (1.4.4) не виконана, параметричний контур виступає в ролі підсилювача, що працює за регенеративним механізмом. Як і звичайний регенеративний підсилювач, при виконанні умови самозбудження він перетворюється на автогенератор.

1.4.4. Умови справедливості параметричного наближення.

Звичайно, на практиці ніхто не змінює ємність конденсатора шляхом механічної зміни віддалі між пластинами. В ролі змінної ємності виступає варікап, на який подається відповідна керуюча напруга (напруга накачування) - як правило, гармонічна (рис.1.4.3).

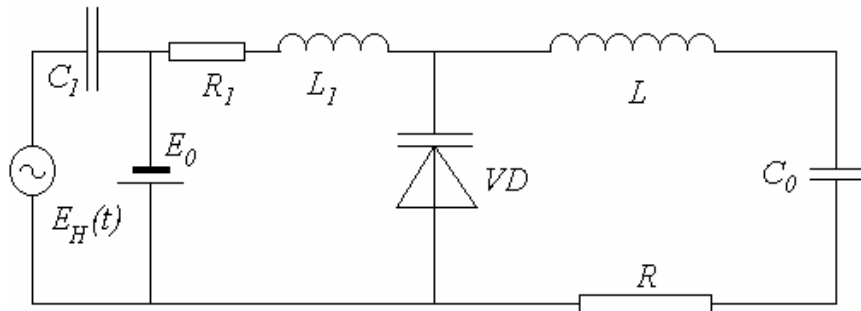


Рис.1.4.3. Схема реального параметричного генератора з варікапом. Правий контур настроєний на частоту сигналу, лівий - на частоту накачування.

Отже, реально ми маємо нелінійний елемент, на який діє зовнішня сила, тобто права частина схеми на рис.1.4.3 являє собою не параметричний, а нелінійний неавтономний осцилятор. Справді, ємність варікапа може, в принципі, змінюватися не лише під впливом напруги накачування, але й під впливом напруги сигналу в контурі. Останнім ефектом, очевидно, можна знехтувати в тому випадку, коли напруга сигналу за амплітудою значно менша від напруги накачування. Це і є умова справедливості параметричного наближення.

Контрольні питання до розділу 1.4.

1.4.1. Що відбуватиметься з коливаннями в параметричному контурі з ємністю, що стрибкоподібно змінюється, якщо фазу коливань ємності в деякий момент часу змінити на протилежну?

1.4.2. Якісно опишіть характер коливань у параметричному контурі з ємністю, що стрибкоподібно змінюється, якщо період зміни ємності дещо відмінний від половини періоду власних коливань контуру.

1.4.3. В контурі періодично стрибком змінюється індуктивність. Намалуйте часовий хід власних коливань у контурі та необхідний для їхнього зростання часовий хід індуктивності.

1.4.4. Сформулюйте найбільш загальні умови, за яких періодична стрибкоподібна зміна ємності забезпечить зростання коливань у контурі.

1.4.5. У чому полягає зміст параметричного наближення для неавтономних нелінійних осциляторів?

Задачі до розділу 1.4.

1.4.1. Для параметричного маятника з довжиною підвісу, що стрибкоподібно змінюється з частотою, рівною подвоєній власній частоті маятника, визначити критичне значення $\Delta l/l$. Коефіцієнт в'язкого тертя рівний h .

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.4. Елементарна теорія параметричного резонансу (для ступінчастого накачування).

1.4.2. Індуктивність у коливному контурі з активним опором періодично змінюється стрибком від $L_0 + \Delta L$ до $L_0 - \Delta L$ і навпаки. Час між стрибками дорівнює половині періоду власних коливань контуру. Знайти поріг параметричного резонансу та інкремент коливань.

1.4.3. Механічний годинник описується рівняннями:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x \neq 0;$$
$$\dot{x}[t(x=0)+0] = \dot{x}[t(x=0)-0] + \Delta \text{sign} \dot{x}.$$

Якісно побудувати фазовий портрет системи. Оцінити амплітуду коливань, що встановлюються в ній:

- виходячи з умови замкненості граничного циклу;
- виходячи з умови балансу енергії за період (вважати, що амплітуда коливань мало змінюється за період).

Порівняти результати, отримані різними способами.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

1.5. Параметричний генератор із гармонічним накачуванням.

Як уже вказувалося, в реальних пристроях параметричний елемент змінюється, як правило, за гармонічним законом. Коливання параметричного осцилятора з гармонічним накачуванням описуються рівнянням Мат'є. У цьому розділі ми проаналізуємо розв'язки однорідного рівняння Мат'є, які описують роботу параметричного генератора.

1.5.1. Виведення рівняння Мат'є.

Вважаючи виконаними умови параметричного наближення (див. п.1.4.4), розглядатимемо коливання в контурі з параметричною ємністю (рис.1.4.2а). Ємність контуру змінюється за законом:

$$C(t) = C_0(1 - m \cos \omega_H t) \quad (1.5.1)$$

Рівняння для коливань у цьому контурі можна записати за II законом Кірхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C(t)} \int i dt = 0. \quad (1.5.2)$$

Перейдемо від струму до заряду на ємності, скориставшись співвідношенням

$$q = \int i dt.$$

Врахуємо, що $m \ll 1$; тоді

$$\frac{1}{C(t)} \approx \frac{1}{C_0} (1 + m \cos \omega_H t). \quad (1.5.3)$$

Підставивши (1.5.3) до (1.5.2) і скориставшись звичайними позначеннями $\omega_0^2 = 1/LC$, $\delta = R/2L$, остаточно дістанемо:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2(1 + m \cos \omega_H t)q = 0. \quad (1.5.4)$$

Це - так зване *рівняння Мат'є*, що описує коливання параметричного осцилятора з гармонічним накачуванням.

1.5.2. Наближений розв'язок рівняння Мат'є за методом повільних амплітуд.

Ми побудуємо наближений розв'язок рівняння Мат'є, вважаючи виконаними такі припущення:

- $m \ll 1$ (глибина модуляції параметричної ємності мала);
- $\delta \ll \omega_0$ (контур високодобротний);
- $|\Delta| \ll \omega_0$, де $\Delta \equiv \omega_0 - \omega$, $\omega \equiv \omega_H/2$ (частота накачування приблизно вдвічі більша від резонансної частоти контуру).

Відповідно параметри m , δ та Δ розглядатимемо як величини першого порядку малюзи. Будуватимемо розв'язок за методом послідовних наближень, обмежуючись першим порядком.

У нульовому наближенні за параметрами m та δ рівняння зводиться до вигляду (1.1.2)

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

тобто описує чисто гармонічні коливання. Можна думати, що врахування цих малих параметрів мало змінить розв'язок рівняння. Тому шукатимемо його за *методом повільних амплітуд*¹ у вигляді²:

$$q(t) = A(t) \exp(i\omega t) + A^*(t) \exp(-i\omega t), \quad (1.5.5)$$

де комплексна амплітуда $A(t)$ мало змінюється за період коливань з частотою ω . Це означає, що $|dA/dt|T \ll |A|$. Додавши таку саму умову для першої похідної, перейшовши від періоду до частоти, $T = 2\pi/\omega_0$, і знехтувавши коефіцієнтом 2π в сильній нерівності, остаточно отримаємо умову для повільної амплітуди:

$$\omega^2 |A| \gg \omega |\dot{A}| \gg |\ddot{A}|. \quad (1.5.6)$$

¹ Його називають також методом Ван дер Поля.

² Вибір частоти коливань, рівної половині частоти накачування, є специфічним для даного конкретного рівняння і обумовлений необхідністю постійного дотримання фазових співвідношень між коливаннями напруги в контурі і зміною параметричної ємності (див. рис.1.4.2б).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

Складові нерівності (1.5.6) вважатимемо величинами відповідно нульового, першого та другого порядків мализни.

Диференціюючи (1.5.5), отримаємо:

$$\dot{q}(t) = \dot{A}(t) \exp(i\omega t) + i\omega A(t) \exp(i\omega t) + \text{к.с.}; \quad (1.5.7)$$

$$\ddot{q}(t) = \ddot{A}(t) \exp(i\omega t) + i2\omega \dot{A}(t) \exp(i\omega t) - \omega^2 A(t) \exp(i\omega t) + \text{к.с.}$$

Підставимо (1.5.5), (1.5.7) до рівняння Мат'є (1.5.4). Враховуючи нерівності (1.5.6), відкинемо доданки другого та вищих порядків мализни. Врахуємо також, що з точністю до першого порядку мализни

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 2\omega_0\Delta - \Delta^2 \approx 2\omega_0\Delta.$$

З тією ж точністю замінимо всюди, крім аргументів експонент, ω на ω_0 . Доданки, пропорційні до m , перенесемо в праву частину рівняння. Дістанемо:

$$\begin{aligned} & i2\omega_0 \dot{A} \exp(i\omega t) + i2\delta\omega_0 A \exp(i\omega t) + 2\Delta\omega_0 A \exp(i\omega t) + \text{к.с.} = \\ & = -\frac{m\omega_0^2}{2} [\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)] [A \exp(i\omega t) + A^* \exp(-i\omega t)] \approx \\ & \approx -\frac{m\omega_0^2}{2} [A \exp(-i\omega t) + A^* \exp(i\omega t)], \quad (1.5.8) \end{aligned}$$

де в правій частині в силу високої добротності контуру залишено лише коливання з частотами, близькими до резонансної³.

Всі доданки в обох частинах (1.5.8) пропорційні до $\exp(i\omega t)$ або $\exp(-i\omega t)$. Рівність повинна справджуватися для довільного моменту часу. Це можливо лише тоді, коли амплітуди відповідних експонент в обох частинах рівняння будуть однаковими. Отже, прирівнюючи амплітуди при $\exp(i\omega t)$, дістанемо:

$$\dot{A} + (\delta - i\Delta)A - i\frac{m\omega_0}{4} A^* = 0. \quad (1.5.9)$$

³ Строго кажучи, при побудові розв'язку (1.5.5) слід було врахувати доданки типу $a(t)\exp(i3\omega t) + \text{к.с.}$, але їхні амплітуди матимуть більш високий (перший) порядок мализни порівняно з $A(t)$ в (1.5.5).

Прирівнюючи амплітуди при $\exp(-i\omega t)$, дістанемо рівняння, комплексно спряжене до (1.5.9).

Рівняння (1.5.9) називають *вкороченим рівнянням*, або рівнянням для повільних амплітуд. Видно, що воно, на відміну від (1.5.4), має постійні коефіцієнти, і його легко розв'язати.

Перейдемо від комплексної амплітуди A до чисто дійсних величин:

$$A = a + ib. \quad (1.5.10)$$

Підставивши (1.5.10) до (1.5.9) і прирівнявши до нуля окремо дійсну і уявну частину, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \dot{a} + \left(\delta + \frac{m\omega_0}{4}\right)a + \Delta b = 0; \\ \dot{b} + \left(\delta - \frac{m\omega_0}{4}\right)b - \Delta a = 0. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Розв'язки системи (1.5.11) шукаємо в експоненціальному вигляді:

$$a = a_m \exp(\lambda t), \quad b = b_m \exp(\lambda t). \quad (1.5.12)$$

Підстановка (1.5.12) перетворює (1.5.11) в систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо відповідних амплітуд. Ця система має нетривіальні розв'язки, лише коли її визначник рівний нулеві. Звідси

$$\begin{aligned} & (\lambda + \delta)^2 - \left(\frac{m\omega_0}{4}\right)^2 + \Delta^2 = 0, \\ & \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\left(\frac{m\omega_0}{4}\right)^2 - \Delta^2}. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Другий корінь (1.5.13) завжди від'ємний. Перший буде додатним, коли

$$\frac{m\omega_0}{4} > \sqrt{\delta^2 + \Delta^2}. \quad (1.5.14)$$

Область у координатах (m, Δ) , де виконано умову (1.5.14), показана на рис.1.5.1а. У цій області параметрів амплітуда коливаний парамет-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

ричного осцилятора з часом експоненціально зростатиме⁴.

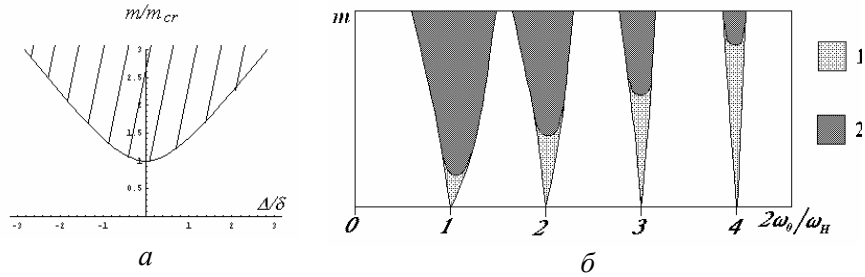


Рис.1.5.1. Зони нестійкості рівняння Мат'є: а - результати наближеного розв'язку для першої зони, б - результати точного розв'язку при $\delta=0$ (1) та $\delta \neq 0$ (2).

У випадку точного резонансу ($\omega = \omega_0$) з (1.5.14) дістанемо:

$$m > m_{cr} \equiv \frac{4\delta}{\omega_0} = \frac{2}{Q}. \quad (1.5.15)$$

Порівнюючи (1.5.15) з (1.4.4), бачимо, що для гармонічного накачування поріг параметричного резонансу вийшов вищим, ніж для ступінчастого.

1.5.3. Механізм параметричної нестійкості.

Як уже вказувалося (п.1.4), існує аналогія між параметричним осцилятором та підсилювачем, охопленим зворотним зв'язком.

У випадку рівняння Мат'є джерелом зворотного зв'язку служить доданок $q \times m \omega_0^2 \cos \omega_H t$, який відповідає напрузі, створюваній сигналом на змінній частині ємності. Взаємодія сигналу та накачування на

⁴ Слід пам'ятати, що при великих амплітудах сигналу параметричне наближення стане несправедливим, і рівняння Мат'є втратить чинність. У цьому випадку слід брати до уваги зворотний вплив сигналу на варікап, що призведе до обмеження амплітуди коливальних.

параметричній ємності породжує сумарну та різницеву частоти, $\omega_H \pm \omega$. Остання і являє собою сигнал зворотного зв'язку (рис.1.5.2а). Цей зв'язок може бути як негативним (йому відповідає розв'язок у вигляді експоненти з показником λ_2), так і позитивним (розв'язок з λ_1). В останньому випадку за виконання амплітудної умови (1.5.13) відбувається самозбудження - сигнал експоненціально зростає від рівня флуктуацій. Оскільки сигнал зворотного зв'язку з'являється в результаті одноразової взаємодії сигналу та накачування, інкремент⁵ параметричної нестійкості (за відсутності розстроювання та дисипації) виявляється пропорційним до m .

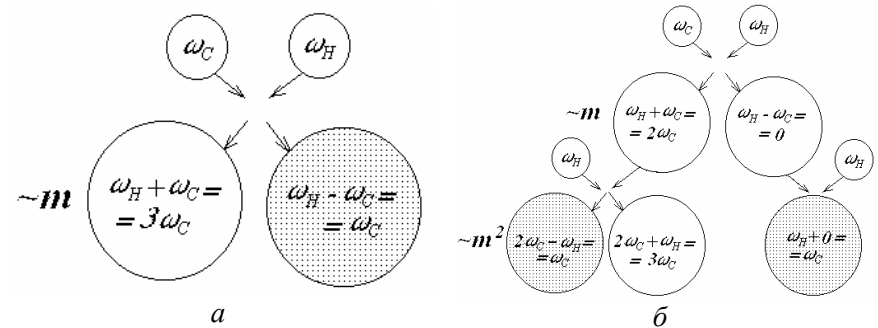


Рис.1.5.2. Схеми утворення сигналу зворотного зв'язку в першій (а) та другій (б) зонах нестійкості рівняння Мат'є.

1.5.4. Зони нестійкості рівняння Мат'є.

Точні розв'язки рівняння Мат'є записуються через деякі спеціальні функції - функції Мат'є. Таблиці цих функцій можна знайти в довідниках⁶. В залежності від параметрів рівняння функції Мат'є з

⁵ Для коливальних, що експоненціально зростають - величина, обернена до часу зростання амплітуди в e разів.

⁶ Див., наприклад: Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М., Наука, 1979. С.532-558.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

Мат'є з часом можуть спадати або зростати. На рис.1.5.16 показано області (в параметрах m , $2\omega_0/\omega_H$), де функції Мат'є зростають - так звані *зони нестійкості* рівняння Мат'є. Видно, що зростання коливань можливе не лише при $\omega_H \approx 2\omega_0$, а при виконанні більш загальної умови

$$2\omega_0/\omega_H \approx n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5.16)$$

Число n називається номером зони нестійкості.

З рис.1.5.16 видно, що із зростанням номера зони нестійкості стають вужчими, а пороги нестійкості (за наявності дисипації) - вищими.

Обговоримо механізм нестійкості у зонах вищих порядків на прикладі другої зони ($\omega_H \approx \omega_0$, див. рис.1.5.2б). Взаємодія сигналу і накачування на нелінійному елементі породжує сумарну частоту $\sim 2\omega_0$ та різницеву частоту (постійну складову), амплітуди яких пропорційні до m . Кожен із цих сигналів, у свою чергу взаємодіючи з накачуванням, знову породжує сумарні та різницеві частоти - $\sim 3\omega_0$ та $\sim \omega_0$ - з амплітудами, пропорційними до m^2 . Отриманий таким чином сигнал з частотою $\sim \omega_0$ і відіграє роль сигналу зворотного зв'язку. В результаті інкремент нестійкості (за відсутності розстроювання та дисипації) виявляється пропорційним до m^2 .

1.5.5. Генерація в другій зоні нестійкості.

Проаналізуємо тепер механізм нестійкості в другій зоні рівняння Мат'є більш детально. Рівняння Мат'є (1.5.4) для цього випадку можна подати у вигляді:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = m\omega_0^2 x \cos pt, \quad (1.5.17)$$

де частота накачування p задовольняє умові

$$\omega_0 - p \equiv \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_0. \quad (1.5.18)$$

Вважаючи, як і раніше (п.1.5.2), глибину модуляції параметричної ємності малою ($m \ll 1$), а контур - високочастотним ($\delta \ll \omega_0$),

($\delta \ll \omega_0$), будемо будувати розв'язок рівняння (1.5.17) за методом повільних амплітуд. Прийmemo, що величини m , δ та Δ - однакового порядку мализни.

У першому наближенні за малим параметром m в системі з'являються нульова та друга гармоніка, існування яких, як уже вказувалося, є необхідним для появи «сигналу зворотного зв'язку», тому ці гармоніки необхідно від самого початку враховувати в розв'язку. Як уже вказувалося, інкремент нестійкості у другій зоні рівняння Мат'є пропорційний до m^2 , тому й швидкість зміни повільних амплітуд визначатиметься цим параметром.

У першій зоні нестійкості коливання виникали на половині частоти накачування. У другій зоні їхня частота збігатиметься з частотою накачування. Отже, будемо шукати розв'язок рівняння Мат'є у формі

$$x(t) = A(t)\exp(ipt) + B(t)\exp(i2pt) + C(t) + \text{к.с.}, \quad (1.5.19)$$

вважаючи, що

$$\frac{dA}{dt} \sim m^2 A, \quad \frac{dB}{dt} \sim m^2 B, \quad \frac{dC}{dt} \sim m^2 C. \quad (1.5.20)$$

Підставимо розв'язок (1.5.19) до рівняння (1.5.17). Залишаючи в правій частині лише постійну складову та доданки з частотами ω та 2ω , отримаємо з точністю до величин порядку m^2 :

$$\begin{aligned} & -p^2 A \exp(ipt) + i2p\dot{A} \exp(ipt) + i2p\delta A \exp(ipt) + \omega_0^2 A \exp(ipt) - \\ & - 4p^2 B \exp(i2pt) + i4p\dot{B} \exp(i2pt) + i4p\delta B \exp(i2pt) + \\ & + \omega_0^2 B \exp(i2pt) + \omega_0^2 C + \text{к.с.} \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 [A \exp(i2pt) + \\ & + (C + C^*) \exp(ipt) + (A + A^*) + B \exp(ipt) + \text{к.с.}]. \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

Прирівняємо амплітуди однакових експонент в правій та лівій частинах рівняння (1.5.21). З урахуванням (1.5.18) отримаємо таку систему вкорочених рівнянь:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

$$\dot{A} + (\delta - i\Delta)A = -i \frac{m\omega_0}{4} (B + C + C^*); \quad (1.5.22)$$

$$B = -\frac{m}{6}A; \quad C = \frac{m}{2}A.$$

Підставивши значення B і C із двох останніх у перше з рівнянь (1.5.22), дістанемо:

$$\dot{A} + (\delta - i\Delta)A + i \frac{m^2\omega_0}{4} \left(\frac{A}{3} + \frac{A^*}{2} \right) = 0. \quad (1.5.23)$$

Перейдемо від комплексної амплітуди A до чисто дійсних величин a, b :

$$A(t) = a(t) + ib(t). \quad (1.5.24)$$

Тоді замість (1.5.23) можна записати таку систему:

$$\dot{a} + \delta a = -\left(\frac{m^2\omega_0}{24} + \Delta \right) b; \quad (1.5.25)$$

$$\dot{b} + \delta b = \left(-\frac{5m^2\omega_0}{24} + \Delta \right) a.$$

Підставимо до системи (1.5.25) розв'язок в експоненціальній формі:

$$a(t) = a_0 \exp(\lambda t), \quad b(t) = b_0 \exp(\lambda t). \quad (1.5.26)$$

Отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд a_0, b_0 . Прирівнюючи до нуля її визначник, можна отримати характеристичне рівняння щодо λ :

$$(\lambda + \delta)^2 = \left(\frac{m^2\omega_0}{24} + \Delta \right) \left(\frac{5m^2\omega_0}{24} - \Delta \right), \quad (1.5.27)$$

звідки

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\left(\frac{m^2\omega_0}{24} + \Delta \right) \left(\frac{5m^2\omega_0}{24} - \Delta \right)}. \quad (1.5.28)$$

Підкореневий вираз у (1.5.28) буде додатним за виконання умови

$$\frac{5m^2\omega_0}{24} > \Delta > -\frac{m^2\omega_0}{24}, \quad (1.5.29)$$

яка визначає межі області нестійкості при $\delta=0$. Вказаний вираз досягає максимуму, рівного m^2/ω_0 , при

$$\Delta_{opt} = \frac{m^2\omega_0}{12}. \quad (1.5.30)$$

Підставивши (1.5.30) до (1.5.28), можна знайти, що поріг нестійкості при $\delta \neq 0$ визначається умовою

$$m > m_{cr} \equiv \sqrt{\frac{\omega_0}{8\delta}} = \frac{2}{\sqrt{Q}}. \quad (1.5.31)$$

За виконання умови (1.5.31) корінь λ_1 буде додатним для розстроювань

$$\frac{m^2\omega_0}{12} - \sqrt{\left(\frac{m^2\omega_0}{8} \right)^2 - \delta^2} < \Delta < \frac{m^2\omega_0}{12} + \sqrt{\left(\frac{m^2\omega_0}{8} \right)^2 - \delta^2}. \quad (1.5.32)$$

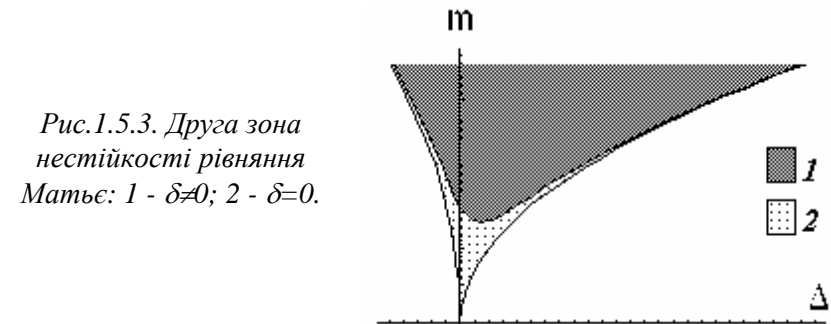


Рис.1.5.3. Друга зона нестійкості рівняння Матьє: 1 - $\delta \neq 0$; 2 - $\delta = 0$.

Як впливає з (1.5.31), поріг генерації в другій зоні рівняння Матьє значно вищий, ніж у першій (оскільки за нашим припущен-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

ням $Q \gg 1$). Максимальне значення інкременту λ_I (або мінімальний поріг генерації m_{cr}) досягається, на відміну від першої зони, не при нульовому розстроюванні, а при $\Delta = \Delta_{цзе}$ (1.5.30).

Друга зона нестійкості рівняння Мат'є, побудована в координатах (m, Δ) на основі умови (1.5.32), показана на рис.1.5.3.

1.5.6. Встановлення коливань у параметричному генераторі.

Рівняння Мат'є є лінійним, тому воно може правильно описати поведінку параметричного генератора лише в перші моменти часу після його увімкнення, тобто коректно визначити умови його самозбудження. Фізично зрозуміло, що експоненціальне зростання амплітуди коливань, передбачуване лінійною теорією, не може тривати скільки-небудь довго, і в реальному пристрої коливання встановляться на деякому фіксованому рівні. Причиною обмеження коливань є їх зворотній вплив на нелінійний елемент (варікап), тобто порушення справедливості параметричного наближення. Але кількісне розв'язання такої задачі є досить складним.

Тому розглянемо трохи іншу модель, яка приводить до такого самого результату. Розглянемо параметричний контур, у який увімкнений нелінійний опір, величина якого зростає із зростанням струму:

$$R(I) = R_0(1 + \beta I^2). \quad (1.5.33)$$

Зрозуміло, що зростання коливань у контурі за рахунок параметричної нестійкості приведе до зростання ефективного значення нелінійного опору, в результаті чого для достатньо великих амплітуд коливань умова їхнього зростання порушиться, і коливання встановляться на певному фіксованому рівні.

Отже, будемо розглядати параметричний контур з нелінійним опором, що описується узагальненим рівнянням Мат'є вигляду

$$q + 2\delta(1 + \beta q^2)q + \omega_0^2(1 + m \cos 2\omega t)q = 0, \quad (1.5.34)$$

де, як і раніше, частоту накачування вважатимемо близькою до по-

двоєної резонансної частоти контуру,

$$\omega_0 - \omega \equiv \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_0,$$

а параметр дисипації та глибину модуляції параметричної ємності – малими:

$$\delta \ll \omega_0, \quad m \ll 1.$$

Тоді розв'язок рівняння (1.5.34) можна шукати за методом повільних амплітуд у формі (1.5.5):

$$q(t) = A(t)\exp(i\omega t) + \text{к.с.}$$

Підставляючи його до рівняння (1.5.34), можна отримати вкорочене рівняння у вигляді

$$A + (\delta - i\Delta)A - i\frac{m\omega_0}{4}A^* + 3\beta\omega_0^2\delta A^2 A^* = 0. \quad (1.5.35)$$

При $\beta=0$ (або, що те саме, при малих амплітудах коливань, коли кубічним доданком у рівнянні можна знехтувати поруч із лінійними) рівняння (1.5.35) зводиться до рівняння (1.5.9), дослідженого вище (п.1.5.2), що описує початкове зростання коливань від рівня малого збурення. Для стаціонарного режиму, коли похідна за часом перетворюється в нуль, рівняння (1.5.35) можна переписати у формі:

$$(\delta - i\Delta + 3\beta\omega_0^2\delta AA^*)A = i\frac{m\omega_0}{4}A^*. \quad (1.5.36)$$

Взявши квадрат модуля від обох частин (1.5.36) і перейшовши від амплітуди коливань до інтенсивності, $I=AA^*$, можна отримати:

$$\left[\delta^2(1 + 3\beta\omega_0^2 I)^2 + \Delta^2 - \left(\frac{m\omega_0}{4}\right)^2 \right] I = 0. \quad (1.5.37)$$

Рівняння (1.5.37) має два розв'язки:

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{1}{3\beta\omega_0^2} \left[\sqrt{\left(\frac{m\omega_0}{4\delta}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2} - 1 \right] \quad (1.5.38)$$

(за змістом задачі I – невід'ємна величина, тому від'ємний корінь

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

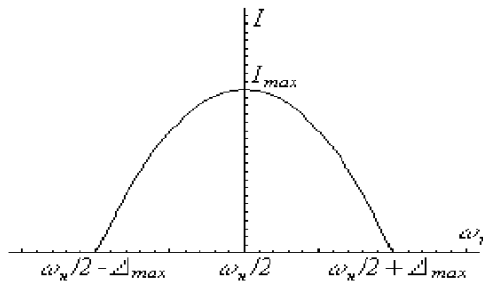
відкидаємо). Перший корінь є одночасно стаціонарною точкою відповідного диференціального рівняння, і, як було показано вище (п.1.5.2), є нестійким. Другий корінь відповідає рівню коливаний, що встановлюються в параметричному генераторі при $t \rightarrow \infty$. Його максимальне значення досягається в режимі точного резонансу ($\Delta=0$):

$$I_{\max} = \frac{1}{3\beta\omega_0^2} \left(\frac{m\omega_0}{4\delta} - 1 \right). \quad (1.5.39)$$

Воно буде додатним за умови, що глибина модуляції параметричної ємності перевищує порогове значення (1.5.15):

$$m_{cr} = \frac{4\delta}{\omega_0} = \frac{2}{Q}.$$

Рис.1.5.4. Залежність інтенсивності коливаний, що встановлюються в параметричному генераторі, від частоти накачування.



При заданому значенні m ширина смуги генерації, в якій інтенсивність коливаний, що встановлюються, буде додатною, визначається тим самим співвідношенням (1.5.14), що й у лінійному випадку:

$$|\Delta| \leq \Delta_{\max} \equiv \sqrt{\left(\frac{m\omega_0}{4} \right)^2 - \delta^2}.$$

Залежність інтенсивності коливаний від параметра Δ подана на рис.1.5.4.

Контрольні питання до розділу 1.5.

- 1.5.1. Коли рух системи можна проаналізувати за методом повільних амплітуд?
- 1.5.2. Чому при ступінчастому накачуванні поріг параметричного резонансу нижчий, ніж при гармонічному накачуванні?
- 1.5.3. Чим обмежується зростання автоколиваний у параметричному генераторі?
- 1.5.4. В якій зоні нестійкості рівняння Матьє можливе досягнення максимального інкременту параметричних коливаний? Відповідь обґрунтувати.
- 1.5.5. Наскільки точно рівняння Матьє описує поведінку реального параметричного генератора?

Задачі до розділу 1.5.

- 1.5.1. Знайти інкремент третьої гармоніки в одноконтурному параметричному генераторі з урахуванням активного опору в контурі.
- 1.5.2. В контурі з параметричною ємністю частота накачування дорівнює власній частоті контуру. Показати, що в такій системі у першому наближенні за параметром $m = \Delta C / C$ зростання коливаний відсутнє. Активний опір контуру не враховувати.

Вказівка: розв'язок рівняння Матьє шукати у вигляді

$$x(t) = A(t)\exp(i\omega t) + B(t)\exp(i2\omega t) + \text{к.с.} + C(t),$$

де A, B, C - повільні амплітуди ($|A| \gg |B|, |C|$), вважаючи m і δ малими параметрами.

1.5.3. Для одноконтурного параметричного генератора побудувати залежність інкременту коливаний від розстроювання (для двох різних значень $m_{1,2} > m_{cr}$) з урахуванням активного опору коливного контуру. Вважати, що

- а) $\omega_H \approx 2\omega_0$;
- б) $\omega_H \approx \omega_0$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.5. Параметричний генератор з гармонічним накачуванням.

1.5.4. На якому рівні встановиться амплітуда третьої гармоніки у параметричному генераторі з нелінійним опором $R=R_0(1+\beta I^2)$?

1.5.5. На якому рівні встановиться амплітуда

а) першої гармоніки;

б) третьої гармоніки

у параметричному генераторі з нелінійним опором $R=R_0(1+\beta I^4)$?

1.5.6. На якому рівні встановиться амплітуда першої гармоніки у параметричному генераторі з нелінійним опором $R=R_0(1+\beta I^2-\gamma I^4)$? За якого співвідношення між β та γ встановлення коливань відбуватися не буде?

1.5.7*. Користуючись методом повільних амплітуд, дослідити третю зону нестійкості рівняння Мат'є.

1.5.8*. Як залежить поріг та ширина (при заданій глибині модуляції) зони нестійкості рівняння Мат'є від її номеру? Як залежить від номеру зони максимальний інкремент нестійкості (при заданій амплітуді накачування)?

1.5.9*. Користуючись методом повільних амплітуд, проаналізувати розв'язки рівняння Мат'є в першій зоні нестійкості з частотами, що відрізняються від половинної частоти накачування.

1.5.10*. Проаналізувати встановлення коливань у другій зоні нестійкості рівняння Мат'є, вважаючи, що в параметричний контур увімкнено нелінійний опір $R(I)=R_0(1+\beta I^2)$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.

1.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.

Параметричний генератор, що працює в першій зоні нестійкості, по суті, являє собою подільник частоти навіпіл: для генерації деякої частоти потрібне джерело вдвічі вищої частоти. Такі схеми мають обмежену практичну цінність.

З практичної точки зору значно цікавіші параметричні підсилювачі. Вони не містять ламп чи транзисторів і завдяки цьому можуть мати дуже низький рівень власних шумів, що робить їх привабливими для використання в ролі вхідних каскадів підсилювачів слабких сигналів.

1.6.1. Розв'язок неоднорідного рівняння Мат'є

Проаналізуємо роботу одноконтурного параметричного підсилювача (рис.1.6.1) більш детально. Для цього скористаємося неоднорідним рівнянням Мат'є:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2(1 + m\cos\omega_H t)q = f_m \exp(i\omega t). \quad (1.6.1)$$

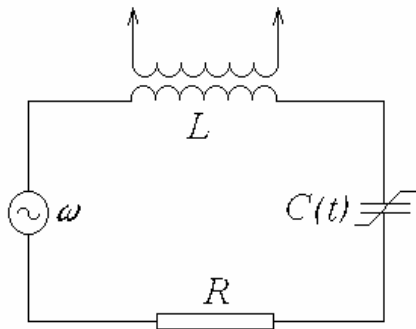


Рис.1.6.1. Схема одноконтурного параметричного підсилювача.

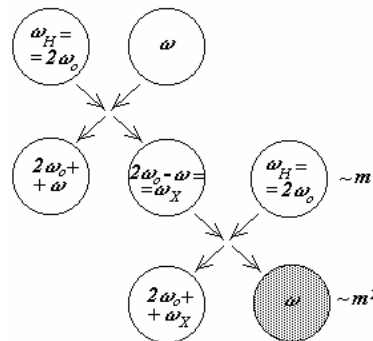


Рис.1.6.2. Схема утворення "сигналу зворотного зв'язку" в регенеративному підсилювачі.

Вважатимемо, що:

- $\delta \ll \omega_0$ (контур високодобротний);
- $\omega_H = 2\omega_0$ (частота накачування рівно вдвічі більша від власної частоти контуру);
- $|\Delta| \ll \omega_0$, де $\Delta = \omega_0 - \omega$ (частота вхідного сигналу близька до власної частоти контуру).

Взаємодія сигналу з накачуванням на параметричній ємності буде породжувати різницеву частоту $\omega_X = 2\omega_0 - \omega$ - так звану *холосту*, або ялову частоту. Оскільки вона також близька до резонансної ($\omega_0 - \omega_X = -\Delta$), її слід обов'язково брати до уваги. Справді, саме холоста частота, взаємодіючи з накачуванням, буде породжувати "сигнал позитивного зворотного зв'язку" з частотою ω (рис.1.6.2), наявність якого є необхідною умовою існування регенеративного підсилення (див. п.п.1.4.3, 1.5.3).

Будемо розглядати коливання, що встановилися. Тоді їхні амплітуди можна вважати сталими. Отже, розв'язок (1.6.1) шукатимемо у вигляді¹:

$$q(t) = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega_X t). \quad (1.6.2)$$

Підставимо розв'язок (1.6.2) до (1.6.1). Відкинемо усі доданки другого та більш високих порядків мализни, врахувавши, зокрема, що $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0\Delta$ та $\omega_0^2 - \omega_X^2 \approx 2\omega_0\Delta$. Замінімо ω та ω_X на ω_0 всюди, крім аргументів експонент. Відкинемо коливання з частотами $2\omega_0 + \omega$ та $2\omega_0 + \omega_X$, далекими від резонансної частоти контуру. Отримаємо:

$$(2\omega_0\Delta + i2\omega_0\delta)A \exp(i\omega t) + (-2\omega_0\Delta - i2\omega_0\delta)B \exp(-i\omega_X t) + (m\omega_0^2/2)[A \exp(-i\omega_X t) + B \exp(i\omega t)] = f_m \exp(i\omega t). \quad (1.6.3)$$

Прирівнюючи амплітуди однакових експонент в обох частинах, діс-

¹ Така форма розв'язку обрана тому, що в рівнянні Мат'є добуток $\exp(i\omega t)\cos(2\omega_0 t)$ породжує коливання з холостою частотою у формі $\exp(-i\omega_X t)$, і, навпаки, добуток $\exp(-i\omega_X t)\cos(2\omega_0 t)$ породжує коливання з сигнальною частотою у формі $\exp(i\omega t)$. Можна було б дописати в (1.6.2) комплексно спряжені доданки, але вони не додадуть нічого нового.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.

танемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд:

$$\begin{cases} (\Delta + i\delta)A + (m\omega_0/4)B = f_m/2\omega_0; \\ -(m\omega_0/4)A + (\Delta + i\delta)B = 0. \end{cases} \quad (1.6.4)$$

Звідси

$$A = \frac{(\Delta + i\delta)f_m/2\omega_0}{(\Delta + i\delta)^2 + (m\omega_0/4)^2}, \quad B = -\frac{mf_m/8}{(\Delta + i\delta)^2 + (m\omega_0/4)^2}. \quad (1.6.5)$$

У випадку точного резонансу вирази (1.6.5) набувають вигляду

$$A = -i \frac{Qf_m/\omega_0^2}{1 - (m/m_{cr})^2}, \quad B = \frac{m}{m_{cr}} \frac{Qf_m/\omega_0^2}{1 - (m/m_{cr})^2}, \quad (1.6.6)$$

де m_{cr} визначається формулою (1.5.15)

$$m_{cr} \equiv \frac{4\delta}{\omega_0} = \frac{2}{Q}.$$

Залежності $|A|$ та $|B|$ від m подано на рис.1.6.3. При $m > m_{cr}$ відбувається самозбудження (див. розділ 1.5).

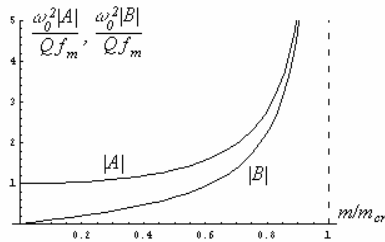


Рис.1.6.3. Амплітуди сигналу та холостой частоти в залежності від глибини модуляції параметричної ємності в режимі точного резонансу

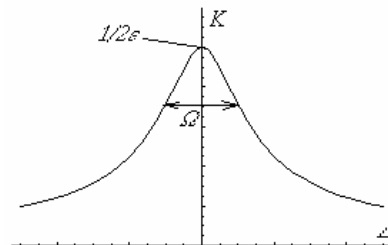


Рис.1.6.4. Амплітудно-частотна характеристика одноконтурного параметричного підсилювача

1.6.2. Форма амплітудно-частотної характеристики.

Коефіцієнтом підсилення параметричного підсилення природно вважати відношення амплітуди сигналу до її значення при $m=0$:

$$K = \frac{A}{A|_{m=0}} = \frac{1}{1 + [m\omega_0/4(\Delta + i\delta)]^2}. \quad (1.6.7)$$

Вважатимемо, що

$$|\Delta| \ll \delta. \quad (1.6.8)$$

Домножимо чисельник і знаменник другого доданку в знаменнику (1.6.7) на $\Delta - i\delta$ і знехтуємо Δ^2 поруч із δ^2 . Отримаємо:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{1 + \left[\frac{m\omega_0(\Delta - i\delta)}{4\delta^2} \right]^2} = \frac{1}{1 - \left[\frac{m\omega_0}{4\delta} \left(1 + \frac{i\Delta}{\delta} \right) \right]^2} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{m_{cr}} + i \frac{\Delta}{\delta} \frac{m}{m_{cr}} \right) \left(1 - \frac{m}{m_{cr}} - i \frac{\Delta}{\delta} \frac{m}{m_{cr}} \right)}. \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Як видно з рис.1.6.3, помітний коефіцієнт підсилення досягається лише при $m \rightarrow m_{cr}$. Введемо параметр $\varepsilon = 1 - m/m_{cr}$ і вважатимемо, що

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.6.10)$$

Тоді перша дужка в знаменнику (1.6.9) близька до 2, і остаточно отримаємо:

$$K = \frac{1}{2\varepsilon(1 - i\Delta/\varepsilon\delta)}, \quad \Omega = 2\varepsilon\delta. \quad (1.6.11)$$

Графік амплітудно-частотної характеристики, що відповідає (1.6.11), поданий на рис.1.6.4. Видно, що при наближенні до порогу нестійкості коефіцієнт підсилення зростає, а ширина смуги пропускання зменшується. Така поведінка типова для регенеративних підсилювачів.

Оскільки ширина смуги пропускання підсилювача Ω в силу (1.6.10) вийшла значно меншою, ніж для «холодного» контуру (без

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.

накачування), то зроблене припущення (1.6.8) добре виконується.

1.6.3. Пульсації коефіцієнту підсилення.

Визначений вище (див. (1.6.7)) коефіцієнт підсилення відповідає випадку, коли на вихід підсилювача не надходить сигнал холостої частоти². Насправді, як впливає з (1.6.5), в контурі параметричного підсилювача одночасно існують коливання з частотами сигналу та холостою, амплітуди яких при малих розстроюваннях та при $m \rightarrow m_{cr}$ близькі. Очевидно, суперпозиція цих коливань - биття - сприймається як пульсації коефіцієнту підсилення.

Відповідно до методу комплексних амплітуд (нагадаємо, що сила в правій частині рівняння (1.6.1) обиралась у формі експоненти з уявним показником) для визначення вимірюваної величини сигналу візьмемо дійсну частину розв'язку (1.6.2) і дещо перетворимо її:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \operatorname{Re}\{A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega_x t)\} = \\
 &= \operatorname{Re}\{ |A| \exp[i(\omega_0 - \Delta)t + \varphi_A] + |B| \exp[-i(\omega_0 + \Delta)t + \varphi_B] \} = \\
 &= |A| \cos[i(\omega_0 - \Delta)t + \varphi_A] + |B| \cos[-i(\omega_0 + \Delta)t + \varphi_B] = \\
 &= [|A| \cos(\Delta t - \varphi_A) + |B| \cos(\Delta t + \varphi_B)] \cos \omega_0 t + [|A| \sin(\Delta t - \varphi_A) - \\
 &- |B| \sin(\Delta t + \varphi_B)] \sin \omega_0 t = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|AB| \cos(2\Delta t + \varphi_B - \varphi_A)} \times \\
 &\times \cos \left\{ \omega_0 t - \arctg \left[\frac{|A| \sin(\Delta t - \varphi_A) - |B| \sin(\Delta t + \varphi_B)}{|A| \cos(\Delta t - \varphi_A) + |B| \cos(\Delta t + \varphi_B)} \right] \right\} \quad (1.6.12)
 \end{aligned}$$

(враховано, що $\omega = \omega_0 - \Delta$, $\omega_x = \omega_0 + \Delta$). Як впливає з (1.6.12), амплітуда коливань у контурі q_m пульсує в межах від $|A|+|B|$ до $|A|-|B|$. Якщо вважати розстроювання значно меншим від ширини смуги пропускання (1.6.11),

² Для цього потрібно пропустити сигнал через смуговий фільтр із смугою пропускання $\Omega < \Delta$.

$$\left(\frac{\Delta}{\varepsilon \delta} \right)^2 \ll 1, \quad (1.6.13)$$

то для амплітуд A і B можна скористатись формулами (1.6.6). В результаті для мінімальної та максимальної амплітуд коливань у контурі дістанемо:

$$q_{\min, \max} = |A| \mp |B| = \frac{Q f_m}{\omega_0^2} \frac{1}{1 \pm m/m_{cr}}. \quad (1.6.14)$$

Часовий хід сигналу (1.6.12) показаний на рис.1.6.5. При цьому коефіцієнт підсилення

$$K = \frac{q_m}{f_m} \quad (1.6.15)$$

пульсуватиме в межах

$$\frac{1}{(1 - m/m_{cr})} > K > \frac{1}{(1 + m/m_{cr})}. \quad (1.6.16)$$

Звичайно, в середньому за часом сигнал все-таки підсилюється, тому пульсації можна відфільтрувати за допомогою вузькосмугового фільтра. Але їхня наявність, безумовно, є принциповим недоліком одноконтурного параметричного підсилювача.

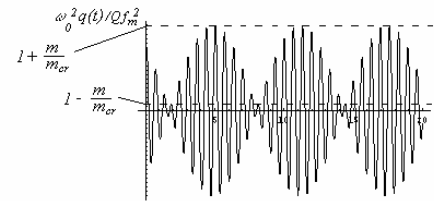


Рис.1.6.5. Пульсації сигналу в одноконтурному параметричному підсилювачі.

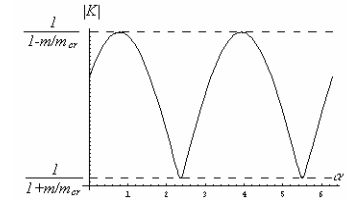


Рис.1.6.6. Залежність коефіцієнту підсилення від фази сигналу в режимі точного резонансу.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

Практично кожний осцилятор при великих відхиленнях від положення рівноваги виявляє нелінійність. Прикладами нелінійних осциляторів можуть бути, наприклад, математичний маятник (для достатньо великих відхилень), коливний контур, що містить варікап або котушку індуктивності з феромагнітним осердям, пружинний маятник із сухим тертям та ін.

1.7.1. Консервативний осцилятор з квадратичною та кубічною нелінійністю: аналіз за методом послідовних наближень.

Як уже вказувалося, довільний нелінійний консервативний осцилятор описується рівнянням (1.1.12)

$$x + f(x) = 0.$$

Розкладемо в цьому рівнянні нелінійну силу $f(x)$ в ряд Тейлора, обмежившись доданками до третього порядку включно. Отримаємо:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0. \quad (1.7.1)$$

Спробуємо побудувати розв'язок цього рівняння, вважаючи виконаними умови $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$ ($\alpha \sim \beta$). Шукатимемо його у вигляді ряду за малим параметром:

$$x = x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \dots, \quad (1.7.2)$$

де індекс в круглих дужках вказує порядок мализни доданку. Підставляючи (1.7.2) до (1.7.1) і виділяючи доданки однакових порядків мализни, можна дістати набір рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} &= 0; \\ \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -\alpha (x^{(0)})^2 - \beta (x^{(0)})^3; \\ \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -2\alpha x^{(0)} x^{(1)} - 3\beta (x^{(0)})^2 x^{(1)}; \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Візьмемо розв'язок першого з рівнянь (1.7.3) у вигляді:

$$x(t) = A \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}$$

Тоді рівняння першого наближення набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -\alpha [A^2 \exp(i2\omega_0 t) + 2AA^* + A^{*2} \exp(-i2\omega_0 t)] - \\ &- \beta [A^3 \exp(i3\omega_0 t) + 3A^2 A^* \exp(i\omega_0 t) + 3AA^{*2} \exp(-i\omega_0 t) + \\ &+ A^{*3} \exp(-i3\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Розв'язок цього неоднорідного рівняння, очевидно, повинен містити вимушені коливання з частотами 0 , ω_0 , $2\omega_0$ та $3\omega_0$, оскільки в правій частині (1.7.4) стоять сили з цими частотами. Але при цьому амплітуда гармоніки ω_0 прямуватиме до нескінченості (це відповідає точному резонансу лінійного консервативного осцилятора). Тим самим порушується припущення, на основі якого будувався розв'язок (1.7.2), про те, що кожен наступний член цього ряду має бути значно меншим від попереднього.

Врятувати становище можна, припустивши, що для доданку нульового порядку мализни частота коливаний буде відмінною від ω_0 .

Оскільки нелінійні доданки в рівнянні (1.7.1) породжуватимуть нульову, другу та третю гармоніку основної частоти, шукатимемо розв'язок (з точністю до доданків першого порядку мализни) у вигляді

$$x(t) = A \exp(i\omega t) + a \exp(i2\omega t) + b \exp(i3\omega t) + \text{к.с.} + c, \quad (1.7.5)$$

де амплітуди a , b , c мають перший порядок мализни.

Підставляючи (1.7.5) до (1.7.1) і відкидаючи доданки другого і вищих порядків мализни, дістанемо:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) A \exp(i\omega t) &+ (\omega_0^2 - 4\omega^2) a \exp(i2\omega t) + \\ &+ (\omega_0^2 - 9\omega^2) b \exp(i3\omega t) + \alpha A^2 \exp(i2\omega t) + \\ &+ \beta [A^3 \exp(i3\omega t) + 3A^2 A^* \exp(i\omega t)] + \text{к.с.} + \omega_0^2 c + 2\alpha AA^* = 0. \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Звідси, прирівнюючи до нуля амплітуди експонент із частотами ω , 2ω , 3ω та 0 , отримаємо систему рівнянь:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + 3\beta A^2 A^* = 0; \\ (\omega_0^2 - 4\omega^2)a + \alpha A^2 = 0; \\ (\omega_0^2 - 9\omega^2)b + \beta A^3 = 0; \\ \omega_0^2 c + 2\alpha A A^* = 0. \end{cases} \quad (1.7.7)$$

Тепер можна записати вирази для частоти та амплітуд нульової, другої та третьої гармонік через амплітуду першої гармоніки:

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\beta A A^*}{2\omega_0}; \quad a = \frac{\alpha A^2}{3\omega_0^2}; \quad b = \frac{\beta A^3}{8\omega_0^2}; \quad c = -\frac{2\alpha A A^*}{\omega_0^2}. \quad (1.7.8)$$

Відзначимо, що частота коливань не залежить від параметра квадратичної нелінійності. Це - результат того, що ми обмежилися першим наближенням за малим параметром α . Врахування доданків другого наближення призведе до того, що така залежність з'явиться.

Отримані результати залишаються справедливими і тоді, коли в ролі малого параметру виступають не коефіцієнти α та β , а амплітуда коливань, бо при цьому нелінійні доданки так само залишаються значно меншими від лінійних.

1.7.2. Ангармонізм та неізохронність коливань нелінійного осцилятора.

Перейдемо до обговорення отриманих результатів. Зазначимо перш за все, що коливання нелінійного осцилятора, залишаючись періодичними, вже не є гармонічними: вони містять вищі гармоніки основної частоти. Говорять, що нелінійним осциляторам притаманний *ангармонізм*.

Для осцилятора з квадратичною та кубічною нелінійністю в першому наближенні, як ми бачили, з'явилися нульова, друга та третя гармоніки. В другому наближенні, очевидно, додатково виникне п'ята гармоніка (див. третє з рівнянь (1.7.3)), в третьому - четверта та шоста, і т.д.

Другий отриманий нами результат - це відмінність власної частоти коливань від ω_0 . Точніше, власна частота виявилася функцією амплітуди коливань (див. перше із співвідношень (1.7.8)). Залежність частоти (чи періоду) коливань від їхньої амплітуди називають *неізохронністю*. Слід підкреслити, що частота коливань залежить лише від модуля амплітуди і не залежить від фази коливань. Урахування більш високих порядків мализни, як уже вказувалося, приведе до уточнення закону неізохронності.

У випадку осцилятора з нелінійністю непарного порядку неізохронність з'являється вже в першому порядку мализни. Якщо ж нелінійність - парного порядку, неізохронність з'явиться в розрахунках з точністю до другого порядку мализни.

1.7.3. Фазовий портрет нелінійного осцилятора

Для довільного нелінійного консервативного осцилятора, описаного рівнянням (1.1.12)

$$\dot{x} + f(x) = 0,$$

можна записати потенціал (1.1.14):

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Знаючи хід потенціалу, із закону збереження енергії (1.1.13)

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Phi(x) = \text{const} = W_0$$

можна відразу знайти швидкість як функцію координати:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2[W_0 - \Phi(x)]}, \quad (1.7.9)$$

тобто побудувати фазову траєкторію при даному значенні W_0 . Варіюючи значення W_0 , можна отримати фазовий портрет системи.

Прив'язати рух на фазовій площині до часу можна, скориставшись співвідношенням $dt = dx/\dot{x}$. Тоді час, необхідний для переміщення з точки 1 у точку 2, визначатиметься співвідношенням:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

$$t_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}(x)}. \quad (1.7.10)$$

Приклад побудови фазового портрету для консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю наведено на рис.1.7.1а-в.

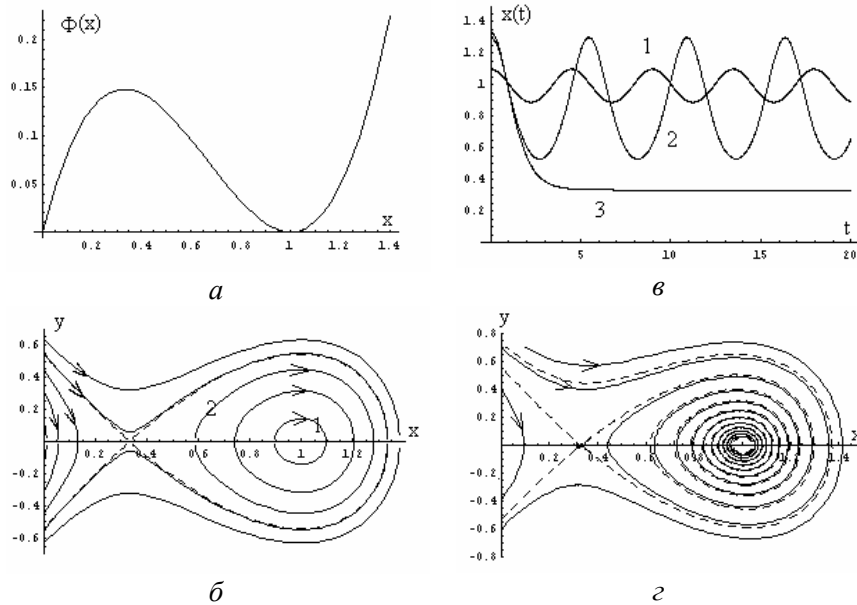


Рис.1.7.1. Нелінійний осцилятор з потенціалом $\Phi(x)=x(x-1)^2$: а - хід потенціалу; б - фазовий портрет без дисипації; в - епюри коливань (1-2 відповідають фазовим траєкторіям на рис.1.7.1б, 3 - рухові вздовж петлі сепаратриси); г - фазовий портрет з урахуванням слабкої дисипації.

Відзначимо, що мінімумам потенціальної енергії на фазовому портреті відповідають особливі точки типу центр, максимумам - сідлові точки. Апроксимуючи сепаратрису в околі сідлової точки відрі-

зком прямої і інтегруючи за формулою (1.7.10), можна пересвідчитися, що час, необхідний для досягнення сідлової точки або для виходу з неї, є нескінченно (логарифмічно) великим. Таким чином, період руху вздовж петлі сепаратриси, що проходить через сідлову точку (рис.1.7.1б), буде нескінченим (див. криву 3 на рис.1.7.1в).

Для слабкодисипативного нелінійного осцилятора повна енергія з часом буде повільно зменшуватися. Це означає, що зображувальна точка буде поступово переходити на фазові траєкторії, що відповідають нижчим значенням повної енергії. Так можна якісно побудувати фазовий портрет слабкодисипативного нелінійного осцилятора (рис.1.7.1г). Зазначимо, що при цьому сідлові точки зберігають свій характер, а центри переходять у стійкі фокуси.

1.7.4. Період коливань нелінійного осцилятора поблизу сепаратриси.

У п.1.7.1 було розраховано частоту власних коливань нелінійного консервативного осцилятора для випадку малих відхилень від положення рівноваги. Розглянемо тепер інший граничний випадок - розрахуємо період коливань уздовж фазової траєкторії, що проходить поблизу сепаратриси. Візьмемо для прикладу осцилятор з кубічною нелінійністю, якому відповідає рівняння руху

$$\ddot{x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi(x) = \omega_0^2 x(1-x)^2 \quad (1.7.11)$$

(див. рис.1.7.1). Потенціал $\Phi(x)$ досягає максимуму, рівного $W_c=4\omega_0^2/27$, в точці $x_1=1/3$. Такого самого значення він досягає в точці $x_2=4/3$.

Нехай повна енергія осцилятора трохи менша від критичного значення:

$$W_0 = W_c + \omega_0^2 \Delta, \quad \Delta \ll 1. \quad (1.7.12)$$

Тоді період коливань може бути підрахований за формулами (1.7.9)-(1.7.10):

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

$$T = \oint \frac{dx}{\dot{x}} = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2[W_0 - \Phi(x)]}}, \quad (1.7.13)$$

де x_{\min} та x_{\max} - мінімальне та максимальне відхилення, що відповідують фазовій траєкторії з енергією (1.7.12), так що $\Phi(x_{\min}) = \Phi(x_{\max}) = W_0$. Оскільки в цих точках - так званих *точках повороту* - знаменник підінтегрального виразу в (1.7.13) перетворюється в нуль, можна чекати, що саме їхні околиці даватимуть основний внесок у період руху.

Розкладемо потенціал $\Phi(x)$ в ряд Тейлора навколо точок x_1 та x_2 . Дістанемо:

$$\Phi\left(\frac{1}{3} + \xi\right) = \omega_0^2 \left(\frac{4}{27} - \xi^2\right); \quad \Phi\left(\frac{4}{3} - \xi\right) = \omega_0^2 \left(\frac{4}{27} - \xi\right). \quad (1.7.14)$$

Порівнюючи (1.7.14) та (1.7.12), можна знайти x_{\min} та x_{\max} :

$$x_{\min} = \frac{1}{3} + \sqrt{\Delta}; \quad x_{\max} = \frac{4}{3} - \Delta. \quad (1.7.15)$$

Оскільки за нашим припущенням основний внесок у період руху дають околиці точок повороту, замінимо в околиці вказаних точок підкореневу функцію у знаменнику підінтегрального виразу її розкладом у ряд Тейлора (1.7.14). Дістанемо:

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left(\int_{\sqrt{\Delta}}^{\xi_{10}} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 - \Delta}} + \int_{\Delta}^{\xi_{20}} \frac{d\xi_2}{\sqrt{\xi_2^2 - \Delta}} \right), \quad (1.7.16)$$

де $\xi_1 = x - x_{\min}$, $\xi_2 = x_{\max} - x$, ξ_{10} та ξ_{20} - значення ξ_1 та ξ_2 , що відповідають деякій середній точці проміжку інтегрування x_0 ($x_{\min} < x_0 < x_{\max}$). Врахувавши, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|, \quad (1.7.17)$$

отримаємо:

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left\{ \ln \left(\xi_{10} + \sqrt{\xi_{10}^2 - \Delta} \right) - \ln \sqrt{\Delta} + 2\sqrt{\xi_{20}^2 - \Delta} \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} \ln \frac{1}{\Delta} \quad (1.7.18)$$

(у правій частині залишений лише доданок, що прямує до нескінченності при наближенні W_0 до W_c). Як бачимо, основний внесок до періоду коливань дає окіл сідлової точки x_l . Відзначимо, що формула (1.7.18) залишається справедливою і тоді, коли параметр Δ визначає перевищення енергії над критичним рівнем - у цьому випадку вона характеризує час проходження околу сідлової точки вздовж траєкторії інфінітного руху.

Для частоти коливань на основі (1.7.18) з урахуванням (1.7.12) можна записати такий вираз:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\sqrt{2}\pi\omega_0}{\ln \frac{W_c}{|W_c - W_0|}}. \quad (1.7.19)$$

Отримані результати легко узагальнити на випадок руху вздовж фазової траєкторії, близької до довільної сепаратриси з однією або двома сідловими точками.

Контрольні питання до розділу 1.7.

1.7.1. Чи може фазовий портрет нелінійної дисипативної системи мати особливу точку типу центр? Відповідь обґрунтувати.

1.7.2. Як змінюються особливі точки на фазовому портреті консервативної нелінійної системи при введенні сильної дисипації?

1.7.3. Перерахуйте відомі Вам прояви ангармонізму нелінійних коливань.

1.7.4. Чи може система демонструвати нелінійні властивості при малих відхиленнях від положення рівноваги? Відповідь обґрунтувати.

1.7.5. Маятник відхилили на великий кут від положення рівноваги і відпустили. Як змінюватиметься з часом період та форма його коливань?

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

1.7.6. Як співвідносяться періоди коливань уздовж фазових траєкторій, однаково близьких до сепаратриси, для маятників з квадратичною та кубічною (від'ємною) нелінійністю?

Задачі до розділу 1.7.

1.7.1. Побудувати фазовий портрет математичного маятника:

- а) консервативного;
- б) слабкодисипативного.

1.7.2. Побудувати фазовий портрет нелінійного осцилятора з потенціалом:

- а) $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0$;
- б) $\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$, $\omega_0^2 > 0$, $\alpha < 0$;
- в) $\dot{x} - \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$, $\omega_0^2 > 0$, $\alpha > 0$;
- г) $\Phi(x) = x^{-12} - x^{-6}$;
- д) $\Phi(x) = x^{-8} - x^{-4}$;
- е) $\Phi(x) = x^{-16} - x^{-8}$;
- є) $\Phi(x) = -Ax \exp(-\alpha x)$;
- ж) $\Phi(x) = -Ax^2 \exp(-\alpha x)$;
- з) $\Phi(x) = -A \exp[-\alpha(x-b)^2]$;
- и) $\Phi(x) = -Ax \exp(-\alpha x^2)$;
- і) $\Phi(x) = x/2 + \sin x$.

Якісно зобразити часовий хід коливань відхилення та швидкості для різних типів фазових траєкторій.

1.7.3. Розв'язати задачі 1.7.2а-і з урахуванням слабкої дисипації.

1.7.4. Побудувати фазовий портрет вертикальних коливань поплавка, включаючи область нелінійних коливань. Дисипацією знехтувати.

1.7.5. Амплітуда першої гармоніки коливань математичного маятника дорівнює A . Вкажіть три гармоніки з найбільшими амплітудами,

які будуть присутні в спектрі коливань. Знайдіть їхні амплітуди.

1.7.6. Рух нелінійного осцилятора описується рівнянням:

$$\text{а) } \ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0;$$

$$\text{б) } \ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$$

($\alpha \ll 1$). Амплітуда першої гармоніки коливань рівна A . Які ще гармоніки будуть присутні в спектрі коливань? Знайти їхні амплітуди. Задачу розв'язати у другому наближенні за параметром α .

1.7.7. Для консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю знайти нелінійний зсув власної частоти найнижчого порядку мализни.

1.7.8. Знайти нелінійний зсув частоти вільних коливань електрона в кристалічній ґратці з точністю до другого порядку за амплітудою коливань. Хід потенціалу вважати гармонічним.

1.7.9. Показати, що рух уздовж петлі сепаратриси, що проходить через сідло, є аперіодичним.

1.7.10. Для

- а) консервативного математичного маятника;
- б) консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю;
- в) осцилятора з кубічною нелінійністю,

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0$$

оцінити період коливань вздовж фазових траєкторій, близьких до сепаратриси. Енергія системи визначається співвідношенням $W = W_0(I - \Delta)$, $\Delta \ll 1$, де W_0 - критичне значення, що відповідає рухові по сепаратрисі.

1.7.11. Побудувати розв'язок рівняння руху осцилятора із сухим тертям:

$$\ddot{x} + F_T \text{sign} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

якщо

$$\text{а) } x(t=0) = x_m, \quad \dot{x}(t=0) = 0;$$

$$\text{б) } x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = v_m.$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.7. Вільні коливання нелінійного осцилятора.

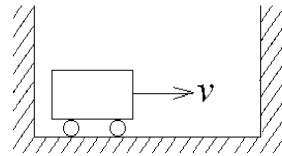
Скільки коливань здійснить осцилятор?

Вказівка: розв'язки побудувати окремо для $dx/dt > 0$ і $dx/dt < 0$, а потім "зшити" їх у точках $dx/dt = 0$.

1.7.12. Побудувати фазовий портрет осцилятора із сухим тертям:

$$\ddot{x} + F_T \operatorname{sign} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

1.7.13. Візок рухається в проміжку між двома стінками, пружно відбиваючись від них.



а) Вважаючи систему консервативною, побудувати залежності $x(t)$ та $\dot{x}(t)$, спектри цих функцій, а також залежність періоду коливань від амплітуди швидкості.

б) Вважаючи, що візок рухається із сухим тертям, побудувати фазовий портрет системи та розрахувати кількість коливань, якщо початкова швидкість візка - v_0 .

1.7.14. Для коливного контуру з малим нелінійним опором

а) $R = R_0(1 + \beta I^2)$;

б) $R = R_0(1 + \beta I^4)$

побудувати розв'язок рівняння руху за методом повільних амплітуд. Початкові умови:

$$q(t=0) = q_0 ; \dot{q}(t=0) = 0 .$$

1.7.15*. Проаналізувати вільні коливання консервативного осцилятора з нелінійністю n -го порядку: знайти гармоніки, що будуть присутні в спектрі, з точністю до n -го порядку за амплітудою основної гармоніки, та нелінійний зсув частоти найнижчого порядку. Розглянути випадки парного та непарного n .

1.7.16*. Користуючись методом ізоклін, побудувати фазовий портрет системи популяцій хижак - здобич, що описується рівняннями Вольтерра

а) для випадку необмежених харчових ресурсів;

б) з урахуванням обмеженості харчових ресурсів.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

Перш ніж продовжувати дослідження нелінійних осциляторів, розглянемо питання про стійкість руху або стану рівноваги коливних систем. Поняття стійкості можна визначити по-різному, тому існують різні визначення стійкості та нестійкості.

1.8.1. Стійкість руху за Ляпуновим.

Нехай динамічна система описується набором рівнянь (В.1). Нехай $\vec{X}(t) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ - розв'язок системи (В.1)

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

що задовольняє початковим умовам $\vec{X}(t = t_0) = \vec{X}_0$, а $\vec{x}(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - деякий інший розв'язок системи (В.1). Нехай, нарешті,

$$|\vec{X} - \vec{x}| \equiv \sqrt{(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \dots + (X_n - x_n)^2}.$$

Говорять, що розв'язок $\vec{X}(t)$ є *стійким за Ляпуновим*, якщо для довільного як завгодно малого ε ($\varepsilon > 0$) завжди можна вказати таку величину $\delta(\varepsilon)$ того самого порядку мализни, що з нерівності $|\vec{x}(t_0) - \vec{X}_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає виконання нерівності $|\vec{x}(t) - \vec{X}(t)| < \varepsilon$ для довільних моментів часу $t > t_0$.

Можна сказати, що для систем, стійких за Ляпуновим, близькість двох зображувальних точок у фазовому просторі в початковий момент часу гарантує, що вони залишатимуться близькими і в будь-який наступний момент часу (рис.1.8.1а).

Прикладом системи, стійкої за Ляпуновим, може бути лінійний осцилятор (консервативний або з додатною дисипацією). Навпаки, лінійний осцилятор з від'ємною дисипацією (автогенератор у початкові моменти часу¹) або з від'ємним квадратом частоти (візок на гір-

¹ Див. нижче розділ 1.11.

ці) будуть нестійкими за Ляпуновим: на фазовій площині для всіх цих систем сусідні зображувальні точки з часом можуть розбігатися.

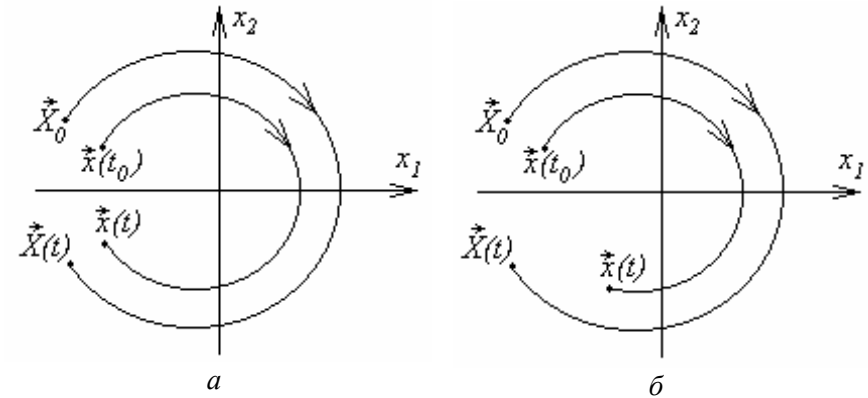


Рис.1.8.1. Фазові траєкторії стійкої за Ляпуновим (а) та орбітально стійкої (б) систем.

1.8.2. Орбітальна стійкість.

Нехай $\{\vec{X}, \vec{x}(t)\}$ - найменша віддаль від точки \vec{X} до фазової траєкторії $\vec{x}(t)$.

Говорять, що розв'язок $\vec{X}(t)$ є *орбітально стійким*, якщо для довільного як завгодно малого ε ($\varepsilon > 0$) завжди можна вказати таку величину $\delta(\varepsilon)$ того самого порядку мализни, що з нерівності $|\vec{x}(t_0) - \vec{X}_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає виконання нерівності $\{\vec{x}(t_1) - \vec{X}(t)\} < \varepsilon$ для довільних моментів часу $t_1 > t_0$.

Іншими словами, в орбітально стійких системах сусідні зображувальні точки з часом можуть і розбігатися, але фазові траєкторії, що виходять із сусідніх точок, залишаються близькими (рис.1.8.1б).

Прикладом орбітально стійкої системи, що є одночасно нестій-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

кою за Ляпуновим, є нелінійний консервативний осцилятор. У нього сусідні фазові траєкторії близькі між собою, але сусідні зображувані точки через неізохронність коливань можуть розбігатися з часом.

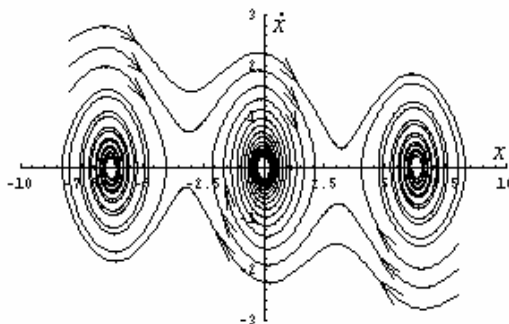
1.8.3. Асимптотична та абсолютна стійкість.

Говорять, що система є *асимптотично стійкою*, якщо в деякому околі стаціонарної точки будь-яка фазова траєкторія прямує до цієї точки. Система є *абсолютно стійкою*, якщо вона має єдину стаціонарну точку, асимптотично стійку в усьому фазовому просторі.

Іншими словами, абсолютно стійка система, якщо вона в початковий момент рухалася довільним чином, із часом зупиниться в деякій наперед заданій точці і надалі перебуватиме в стані стійкої рівноваги. Для асимптотично стійкої системи це твердження, взагалі кажучи, справедливе лише тоді, коли вона із самого початку була недалеко від точки рівноваги і рухалася не дуже швидко.

Прикладом абсолютно стійкої системи може служити лінійний дисипативний осцилятор, прикладом асимптотично стійкої - нелінійний дисипативний осцилятор, у якого потенціал має кілька локальних мінімумів (наприклад, математичний маятник з дисипацією - рис.1.8.2). Консервативні осцилятори не є асимптотично стійкими.

Рис.1.8.2. Фазовий портрет математичного маятника з дисипацією.



1.8.4. Критерій Рауса - Гурвиця.

Розглянемо лінійну автономну систему із скінченною кількістю ступенів вільності, що описується диференціальним рівнянням із постійними дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} \left(\frac{d}{dt} \right)^j x = 0, \quad a_0 > 0. \quad (1.8.1)$$

(пор. з (1.3.1)). Це рівняння має єдину стаціонарну точку - $x=0$. З'ясуємо, чи є така система абсолютно стійкою.

Будемо шукати розв'язок рівняння (1.8.1) у вигляді експоненти,

$$x(t) = A \exp(pt). \quad (1.8.2)$$

Підстановка (1.8.2) перетворює (1.8.1) на так зване характеристичне рівняння - поліном n -го ступеню щодо p :

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} p^j = 0. \quad (1.8.3)$$

Це рівняння має n коренів вигляду $p_k = \text{Re } p_k + i \text{ Im } p_k$. Якщо для всіх k від 1 до n виконується умова

$$\text{Re } p_k < 0, \quad (1.8.4)$$

то будь-яке відхилення від положення рівноваги з часом експоненціально спадатиме, тобто система, описувана рівнянням (1.8.1), буде абсолютно стійкою. Якщо хоч для одного k умова (1.8.4) порушується, абсолютна стійкість відсутня.

Виявляється, що для перевірки умови (1.8.4) зовсім не потрібно знаходити всі корені рівняння (1.8.3). Вказану перевірку можна зробити, скориставшись так званим *критерієм Рауса - Гурвиця*. Побудуємо матрицю розміром $n \times n$ з коефіцієнтів рівняння (1.8.3). По головній діагоналі розміщуються коефіцієнти від a_1 до a_n . У стовпцях розміщуються по черзі коефіцієнти тільки з непарними або тільки з парними (від a_0) індексами, що нарастають згори вниз. На місцях коефіцієнтів з від'ємними або більшими від n індексами ставляться нулі. Отримаємо так звану матрицю Гурвиця:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.8.5)$$

Її головні діагональні мінори мають вигляд:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \dots;$$

$$\Delta_n = \det D_n. \quad (1.8.6)$$

Критерій Рауса - Гурвиця стверджує, що необхідною і достатньою умовою виконання умови (1.8.4) для всіх коренів характеристичного рівняння (1.8.3) є додатність усіх головних мінорів матриці Гурвиця:

$$\Delta_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.8.7)$$

Розглянемо для прикладу рівняння лінійного дисипативного осцилятора (1.1.9)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Для нього

$$a_0 = 1, a_1 = 2\delta, \quad a_2 = \omega_0^2, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді умови (1.8.7) зводяться до двох нерівностей:

$$\begin{cases} \delta > 0; \\ \omega_0^2 > 0. \end{cases} \quad (1.8.8)$$

Перша з умов (1.8.8) вимагає, щоб параметр дисипації був додатнім, друга - щоб додатнім був квадрат частоти, тобто щоб точка рівноваги відповідала мінімуму (а не максимуму) потенціальної енергії.

1.8.5. Структурна стійкість (грубість) коливної системи.

Диференціальне рівняння, що описує поведінку динамічної системи, звичайно залежить від одного або декількох параметрів, які називають *керуючими*. Зміна цих параметрів буде, взагалі кажучи, приводити до зміни фазового портрету.

Якщо в деякій області значень керуючого параметра його малі зміни призводять до малих змін фазового портрету (тобто поведінки) системи, то говорять, що в цій області динамічна система є *грубою*, або *структурно стійкою*, або *стійкою за Андроном* - *Понтрягіном*.

Якщо при переході керуючого параметра через деяке значення спостерігається якісна зміна фазового портрету системи, таке значення називають *біфуркаційним*, а саму зміну фазового портрету - *біфуркацією*. Звичайно поняття біфуркацій застосовується до нелінійних систем.

Розглянемо для прикладу осцилятор з кубічною нелінійністю, що описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (1.8.9)$$

Йому відповідає потенціал вигляду

$$\Phi(x) = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}. \quad (1.8.10)$$

Якщо вважати керуючим параметр нелінійності β , то біфуркація матиме місце при його переході через нуль. При додатних β потенціал матиме один екстремум - мінімум, при від'ємних β - три екстремуми - мінімум та два максимуми. Відповідні фазові портрети подані на рис.1.8.3.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

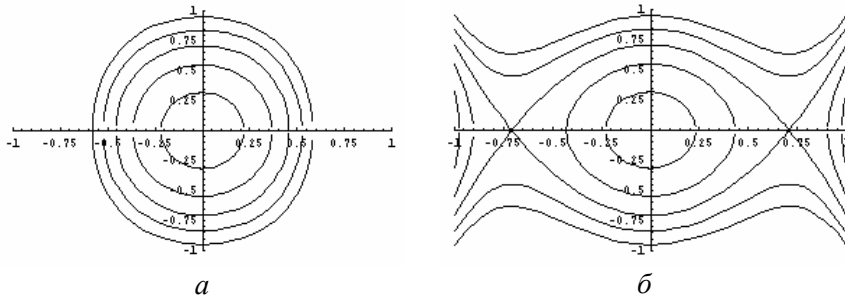


Рис.1.8.3. Фазовий портрет консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю для додатних (а) та від'ємних (б) значень β .

Контрольні питання до розділу 1.8.

- 1.8.1. Яким критерієм стійкості відповідає рух в околі кожної з відомих Вам особливих точок фазової площини?
- 1.8.2. Розташуйте критерії стійкості коливальних систем за їхньою силою.
- 1.8.3. Яким критерієм стійкості задовольняє рух математичного маятника?
- 1.8.4. Яким критерієм стійкості задовольняє тригер?
- 1.8.5. Чи завжди нелінійний дисипативний осцилятор є абсолютно стійким? Відповідь обґрунтувати.
- 1.8.6. Чи є нелінійний консервативний осцилятор стійким за Ляпуновим? Відповідь обґрунтувати.
- 1.8.7. До яких систем можна застосовувати критерій Рауса - Гурвиця? На що він вказує?
- 1.8.8. В яких областях зміни параметрів лінійний дисипативний осцилятор буде грубим (стійким за Андроном - Понтрягіним)?

Задачі до розділу 1.8.

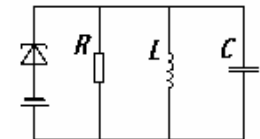
- 1.8.1. У площині параметрів (a,b) виділити область, що відповідає стійкій рівновазі системи, яка описується диференціальним рівнянням:

- а) $\frac{d^3x}{dt^3} + (a+b)\frac{d^2x}{dt^2} + ab\frac{dx}{dt} + ax = 0$;
- б) $\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + (a-b)\frac{dx}{dt} + abx = 0$;
- в) $\frac{d^3x}{dt^3} + ab\frac{d^2x}{dt^2} + (a-b)\frac{dx}{dt} + bx = 0$;
- г) $\frac{d^4x}{dt^4} + a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + bx = 0$;
- д) $\frac{d^3x}{dt^3} + ab\frac{d^2x}{dt^2} + (a-b)\frac{dx}{dt} + ax = 0$;
- е) $\frac{d^3x}{dt^3} + (a+b)\frac{d^2x}{dt^2} + ab\frac{dx}{dt} + bx = 0$;
- є) $\frac{d^3x}{dt^3} + (a-b)\frac{d^2x}{dt^2} + ab\frac{dx}{dt} + abx = 0$;
- ж) $\frac{d^3x}{dt^3} + (a-b)\frac{d^2x}{dt^2} + (a+b)\frac{dx}{dt} + abx = 0$.

1.8.2. У площині параметрів (a,b) виділити область, що відповідає стійкій рівновазі системи, яка описується характеристичним рівнянням:

- а) $p^3 + bp^2 + 2ap - 1 = 0$;
- б) $p^3 + (a-b)p - abp + a = 0$.

1.8.3. Паралельно до коливального контуру увімкнений тунельний діод з диференціальним опором $r_0 < 0$. Знайти умову зростання коливань у контурі, їхню частоту та інкремент.

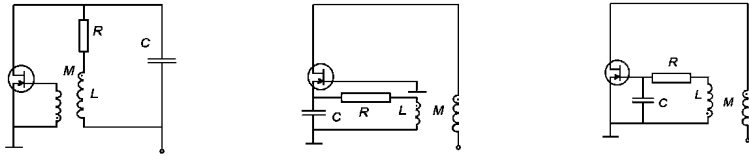


Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.8. Стійкість коливних систем із зосередженими параметрами.

1.8.4. Визначити умови зростання коливань, їхні частоти та інкременти в схемах автогенераторів на польових транзисторах із крутістю сток-затворної характеристики S :

- а) з контуром у колі стоку; б) з контуром у колі витоку; в) з контуром у колі затвору.



1.8.5. За яких умов рівноважний стан системи, що описується рівняннями Лотки (див. задачу 1.1.12), буде стійким?

1.8.6. Кінетичне рівняння для деякої хімічної реакції (модель Шльогля) має вигляд:

$$\dot{x} = k_1 a x^2 - k_2 x^3 - k_3 x + k_4 b,$$

де x, a, b - концентрації реагентів ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). При яких значеннях параметрів система матиме три стаціонарні стани? Які з цих станів будуть стійкими?

Вказівка: побудувати графік правої частини рівняння як функцію x .

1.8.7. Рівняння для температури T в комірці, куди надходить пальне, має вигляд:

$$\dot{T} = \frac{q(T)}{c} - \gamma(T - T_1),$$

де

$$q(T) = \begin{cases} q_0, & T \geq T_c; \\ 0, & T < T_c \end{cases}$$

- функція, що характеризує тепловиділення, T_c - критична температура (температура запалювання), c - теплоємність комірки, γ - параметр, що характеризує теплообмін, T_1 - температура навколишнього середовища. При яких температурах навколишнього середовища

запалювання неможливе? При яких температурах навколишнього середовища відбувається самозапалювання? Знайти можливі стаціонарні значення температури комірки в проміжному діапазоні температур навколишнього середовища. Які з них відповідатимуть стійким станам системи?

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

Проаналізуємо тепер, як нелінійність осцилятора впливає на його вимушені коливання. В цій задачі модель дисипативного осцилятора виявляється простішою, оскільки за певних умов дозволяє обмежитися розглядом чисто вимушеної складової коливань. Тому розпочнемо розгляд саме з неї.

1.9.1. Обговорення моделі.

Розглянемо вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора. Вони описуються рівнянням вигляду

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = f(t), \quad (1.9.1)$$

де $F(x, \dot{x})$ - деяка нелінійна функція, $f(t)$ - зовнішня сила.

Відзначимо, що розв'язання нелінійного рівняння (1.9.1) - незрівнянно складніша задача, ніж розв'язання аналогічного лінійного рівняння з гармонічною зовнішньою силою (1.2.8) чи навіть із довільною силою - (1.3.1). Для нелінійних систем не справджується принцип суперпозиції. Це означає, що для кожної конкретної функції $f(t)$ рівняння доводиться розв'язувати заново (пор. з розділом 1.3). Більш того, навіть у випадку чисто гармонічної сили для різних амплітуд можуть вийти якісно відмінні розв'язки.

Для довільної функції $F(x, \dot{x})$ розв'язати рівняння (1.9.1) не вдається, тому вигляд вказаної функції слід конкретизувати. Розкладемо її у двовимірний ряд Тейлора. Вважаючи дисипацію слабкою, обмежимося лінійним доданком по \dot{x} , доданки по x візьмемо з точністю до третього порядку. Дістанемо, скориставшись традиційними позначеннями:

$$F(x, \dot{x}) = 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 \quad (1.9.2)$$

(враховано, що координата відраховується від положення рівноваги).

Будемо вважати зовнішню силу гармонічною. Тоді рівняння (1.9.1) з урахуванням (1.9.2) набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = f_m \cos pt. \quad (1.9.3)$$

Рівняння (1.9.3) описує рух дисипативного осцилятора з квадратичною та кубічною нелінійністю під дією зовнішньої гармонічної сили - так звану *модель Дюфінга*.

1.9.2. Прийняті припущення та отримання рівняння для амплітуди.

Будемо вважати виконаними такі припущення:

- $\delta \ll \omega_0$ (контур високодобротний);
- $|\Delta| \ll \omega_0$, де $\Delta = \omega_0 - p$ (частота зовнішньої сили близька до резонансної частоти контуру);
- $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$ (нелінійність слабка).

Оскільки нелінійність вважається слабкою, можна, як і раніше (див. розділ 1.2), говорити про вільну та вимушену складові коливань (правда, їхня взаємодія тепер буде нелінійною). Але, оскільки в системі присутня дисипація, вільна складова коливань з часом згасне. Отже, через достатній проміжок часу після увімкнення зовнішньої сили в системі залишаться тільки чисто вимушені коливання, розглядом яких ми на даному етапі і обмежимося.

Нелінійні доданки породжуватимуть гармоніки основної частоти p (див. розділ 1.7). Але, оскільки нелінійність слабка, а контур високодобротний, їхні амплітуди будуть малими порівняно з амплітудою основної гармоніки, знаходженням якої ми на цьому етапі й обмежимося.

Будемо вести розрахунок з точністю до доданків першого порядку мализни. Тоді доданок, що відповідає квадратичній нелінійності, не даватиме внеску до основної гармоніки (пор. із п.1.7.1), і його взагалі можна не брати до уваги.

Враховуючи все сказане, будемо шукати розв'язок рівняння (1.9.3) за методом повільних амплітуд у формі гармонічних коливань на частоті зовнішньої сили:

$$x(t) = A(t)\exp(ipt) + \text{к.с.}, \quad (1.9.4)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

де повільна амплітуда $A(t)$ задовольняє співвідношенням типу (1.5.6):

$$|\ddot{A}| \ll p |\dot{A}| \ll p^2 |A|.$$

Підставимо (1.9.4) до (1.9.3). З урахуванням зроблених припущень відкинемо всі доданки другого та більш високих порядків малювання, а також коливання з частотами, відмінними від p . Прирівнюючи в обох частинах рівняння амплітуди гармонік $\exp(ipt)$, отримаємо вкорочене рівняння у формі:

$$i\dot{A} + (i\delta + \Delta)A + \frac{3\beta}{2\omega_0} A^2 A^* = \frac{f_m}{4\omega_0}. \quad (1.9.5)$$

Для коливань, що встановилися, замість (1.9.5) отримаємо:

$$i\delta A + \Delta A + \frac{3\beta}{2\omega_0} A^2 A^* = \frac{f_m}{4\omega_0}. \quad (1.9.6)$$

Узявши квадрат модуля від обох частин та позначивши

$$\frac{3AA^*}{2\omega_0} = I, \quad \frac{\Delta}{\beta} = \xi, \quad \frac{\delta}{\beta} = d, \quad \frac{3f_m^2}{32\beta^2\omega_0^3} = F^2, \quad (1.9.7)$$

остаточно отримаємо:

$$I[d^2 + (I + \xi)^2] = F^2. \quad (1.9.8)$$

Відзначимо, що при переході до лінійного випадку буде виконуватись умова $I \ll \xi$, і рівняння (1.9.8) набуде вигляду

$$I(d^2 + \xi^2) = F^2. \quad (1.9.9)$$

Останнє рівняння при $\xi \gg d$ еквівалентне до співвідношення (1.2.4)

$$X_{m \text{ forced}} = \frac{f_m}{\omega_0^2 - p^2}.$$

Рівняння (1.9.8) описує, по суті, сім'ю амплітудно-частотних характеристик (резонансних кривих) нелінійного осцилятора, точніше, залежність нормованої інтенсивності I від нормованого розстроювання ξ . Параметрами вказаної сім'ї є нормована амплітуда зовніш-

ньої сили F та нормований параметр дисипації d .

1.9.3. Нелінійне обмеження резонансної амплітуди коливань.

Прирівняємо параметр дисипації до нуля¹. Тоді замість (1.9.8) дістанемо:

$$I(I + \xi)^2 = F^2. \quad (1.9.10)$$

Покладемо рівній нулю амплітуду зовнішньої сили. Тоді співвідношення (1.9.10) набуває вигляду

$$\xi = -I \quad (1.9.11)$$

і фактично збігається з першим рівнянням системи (1.7.7) - воно пов'язує між собою частотне розстроювання та амплітуду власних коливань, тобто визначає закон неізохронності осцилятора (див. перше із співвідношень (1.7.8)).

Тепер покладемо в (1.9.10) рівним нулю розстроювання Δ . У випадку лінійного консервативного осцилятора амплітуда коливань прямувала при цьому до нескінченності (див. розділ 1.2). Тепер вона виявляється обмеженою:

$$I = F^{2/3}. \quad (1.9.12)$$

Механізм обмеження коливань у даному разі пов'язаний з неізохронністю системи. Справді, перший доданок у круглих дужках у лівій частині (1.9.10) в силу (1.9.11) можна розглядати як нелінійний зсув частоти власних коливань, обумовлений їхньою скінченою (не-нульовою) амплітудою. У випадку, коли $\xi=0$ (тобто $p=\omega_0$), зростання амплітуди коливань приведе до нелінійного зсуву власної частоти і, отже, до появи нелінійного розстроювання між власною частотою та частотою зовнішньої сили. Це нелінійне розстроювання й обмежатиме амплітуду коливань на рівні (1.9.12).

¹ У загальному випадку такий перехід некоректний, оскільки в консервативній моделі обов'язково потрібно враховувати взаємодію між вимушеною та вільною складовими коливань. Отримані нижче результати будуть справедливими при $d \ll \xi \ll I$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

1.9.4. Вигляд резонансних кривих для консервативної моделі.

Тепер спробуємо побудувати графіки резонансних кривих, описуваних рівнянням (1.9.10). Для цього розв'яжемо вказане рівняння щодо параметра ξ . Дістанемо:

$$\xi = -I \pm \frac{F}{\sqrt{I}}. \quad (1.9.13)$$

Графік відповідної резонансної кривої поданий на рис.1.9.1.

При малих I (і великих ξ) в розв'язку (1.9.13) можна залишити тільки другий доданок:

$$\xi = \pm \frac{F}{\sqrt{I}}. \quad (1.9.14)$$

Розв'язок (1.9.14) задовольняє лінійне рівняння (1.9.9) (при $d=0$). Отже, при малих амплітудах і великих розстроюваннях вплив нелінійності на резонансні криві є неістотним.

Навпаки, при великих I в (1.9.13) можна знехтувати другим доданком, і розв'язок рівняння (1.9.10) набуде вигляду (1.9.11) - закону неізохронності вільних коливань. Цей розв'язок є істотно нелінійним.

Природною межею між двома режимами для лівої частини графіка є точка перегину, в якій $dI/d\xi = \infty$. Вона має координати

$$\xi_0 = -3(F/2)^{2/3}, \quad I_0 = (F/2)^{2/3}. \quad (1.9.15)$$

При варіюванні F всі такі точки лежать на прямій

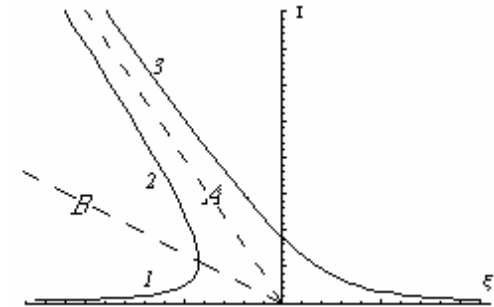
$$\xi = -3I. \quad (1.9.16)$$

Видно, що при

$$\xi < \xi_0 \quad (1.9.17)$$

резонансна крива стає неоднозначною - кожному значенню розстроювання відповідає три різні значення інтенсивності (амплітуди) коливань, що відповідають гілкам 1, 2, 3 резонансної кривої (рис.1.9.1).

Рис.1.9.1. Резонансна крива консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю; штриховими лініями показані закон неізохронності вільних коливань $\xi = -I(A)$ та пряма $\xi = -3I(B)$.



1.9.5. Стійкість резонансних кривих.

Дослідимо тепер стійкість розв'язків, описуваних рівнянням (1.9.10). Для цього повернемося до нестационарного вкороченого рівняння (1.9.5). Введемо замість комплексної амплітуди дві чисто дійсні:

$$A(t) = a(t) + ib(t). \quad (1.9.18)$$

Тоді, прирівнюючи між собою окремо дійсні та уявні частини (1.9.5), можна отримати таку систему:

$$\dot{a} = -\delta a - \left[\Delta + \frac{3\beta}{2\omega_0} (a^2 + b^2) \right] b \equiv \varphi(a, b); \quad (1.9.19)$$

$$\dot{b} = -\delta b + \left[\Delta + \frac{3\beta}{2\omega_0} (a^2 + b^2) \right] a - \frac{f_m}{4\omega_0} \equiv \psi(a, b).$$

Будемо шукати розв'язок системи (1.9.19) у формі малих відхилень від положення рівноваги:

$$a = a_0 + a_-, \quad b = b_0 + b_-, \quad |a_-| \ll a_0, \quad |b_-| \ll b_0. \quad (1.9.20)$$

Тут a_0 та b_0 - розв'язки системи (1.9.19) для стаціонарного випадку, що після підстановки

$$\frac{3(a_0^2 + b_0^2)}{2\omega_0} = I \quad (1.9.21)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

задовольняють рівняння (1.9.8).

Лінеаризуючи систему (1.9.19) за малими відхиленнями, переписемо її у формі

$$\begin{aligned} \dot{a}_\sim &= \varphi'_a(a_0, b_0)a_\sim + \varphi'_b(a_0, b_0)b_\sim; \\ \dot{b}_\sim &= \psi'_a(a_0, b_0)a_\sim + \psi'_b(a_0, b_0)b_\sim. \end{aligned} \quad (1.9.22)$$

Система (1.9.22), в свою чергу, зводиться до рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{a}_\sim - [\varphi'_a(a_0, b_0) + \psi'_b(a_0, b_0)]\dot{a}_\sim + \\ + [\varphi'_a(a_0, b_0)\psi'_b(a_0, b_0) - \varphi'_b(a_0, b_0)\psi'_a(a_0, b_0)]a_\sim = 0. \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

Формально рівняння (1.9.23) можна розглядати як рівняння лінійного дисипативного осцилятора. Умови стійкості його стаціонарної точки мають вигляд (див. п.1.8.4, умови (1.8.8)):

$$\begin{aligned} \varphi'_a(a_0, b_0) + \psi'_b(a_0, b_0) &< 0; \\ \varphi'_a(a_0, b_0)\psi'_b(a_0, b_0) - \varphi'_b(a_0, b_0)\psi'_a(a_0, b_0) &> 0. \end{aligned} \quad (1.9.24)$$

Підстановка явного вигляду функцій φ та ψ дозволяє переписати умови (1.9.24) (з урахуванням (1.9.19) та (1.9.21)) у формі

$$\begin{aligned} \delta &> 0; \\ (\xi + I)(\xi + 3I) &> 0. \end{aligned} \quad (1.9.25)$$

Перша з умов виконується завжди, друга - всюди, крім області

$$-I > \xi > -3I. \quad (1.9.26)$$

В координатах (I, ξ) ця область являє собою сектор, обмежений променями $\xi = -I$ та $\xi = -3I$ (пор. з формулами (1.9.16)), в який потрапляє середня гілка резонансної кривої, позначена як 2 на рис.1.9.1. Отже, вказана гілка є нестійкою, а гілки 1 та 3 - стійкими.

1.9.6. Гістерезис.

Як уже вказувалося, резонансна крива (рис.1.9.1) в області розстроювань (1.9.17) є неоднозначною: одному й тому самому значенню частоти зовнішньої сили відповідають три різні значення амплітуди коливань.

Як було показано вище (п.1.9.5), гілка 2 є нестійкою і взагалі не

реалізується. Вибір між гілками 1 та 3 залежить від передісторії системи.

Припустимо, що ми змінюємо частоту зовнішньої сили, не змінюючи її амплітуди. Нехай спочатку вказана частота задовольняє нерівність (1.9.17). При цьому реалізується амплітуда, що відповідає гілці 1. При зменшенні частоти до значення, коли перестає задовольнятися нерівність (1.9.17), відбувається стрибок на верхню гілку, де система залишається при будь-яких подальших змінах частоти (рис.1.9.2). Отже, амплітуда, що відповідає гілці 1, встановлюється і підтримується лише тоді, коли частота зовнішньої сили весь час задовольняє умову (1.9.17). Це, по суті, нерезонансний режим, коли нелінійний доданок в рівнянні (1.9.10) залишається малоістотним.

Навпаки, верхня гілка 3 резонансної кривої при $\xi < 0$ відповідає резонансному режиму. При цьому власна частота коливань автоматично підстроюється до частоти зовнішньої сили, чим і забезпечується резонансне зростання амплітуди.

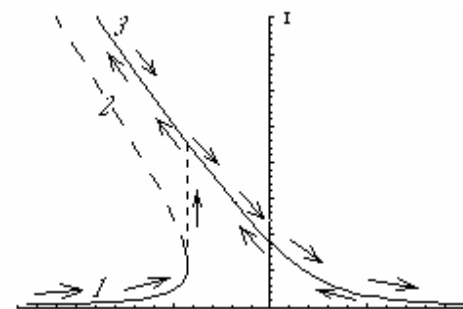


Рис.1.9.2. Зміна амплітуди коливань при зміні частоти зовнішньої сили.

Можна сказати, що в основі ефекту гістерезису лежить неізохронність коливань нелінійного осцилятора. Справді, першопричина гістерезису - наявність двох стійких станів системи (двох різних значень амплітуди коливань) при одній і тій самій частоті зовнішньої сили. Один із них фактично відповідає лінійним коливанням з малою амплітудою, інший - суттєво нелінійним коливанням з вели-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

кою амплітудою, коли за рахунок неізохронності власна частота підстроюється до частоти зовнішньої сили.

1.9.7. Вплив слабкої дисипації на ефект гістерезису.

Тепер оцінимо вплив слабкої дисипації на отриману резонансну криву. Можна думати, що наявність дисипації, як і в лінійному випадку, обмежуватиме максимальну інтенсивність коливань на рівні

$$I \sim \frac{F^2}{d^2} \quad (1.9.27)$$

(пор. з формулою (1.2.9) для випадку точного резонансу). Для такої амплітуди нелінійне розстроювання власної частоти складе величину

$$\xi_{\max} = -I \sim -\left(\frac{F}{d}\right)^2. \quad (1.9.28)$$

Для розстроювань $\xi < \xi_{\max}$ стан, що відповідає гілці I , вже не реалізуватиметься, бо амплітуда коливань обмежуватиметься на нижчому рівні (1.9.28) за рахунок дисипації. Отже, гістерезис матиме місце лише для розстроювань

$$\xi_{\max} < \xi < \xi_0. \quad (1.9.29)$$

Нерівність не задовольнятиметься при жодних розстроюваннях, якщо

$$\xi_0 = -3\left(\frac{F}{2}\right)^{2/3} > \xi_{\max} \sim -\left(\frac{F}{d}\right)^2, \quad (1.9.30)$$

або

$$F < F^*, \quad F^* \sim d^{3/2}. \quad (1.9.31)$$

Таким чином, при малих амплітудах зовнішньої сили, коли нелінійними доданками в рівнянні (1.9.8) можна знехтувати, гістерезис не виникає, а резонансна крива практично не відрізняється від лінійного випадку.

1.9.8. Резонансні криві для дисипативного осцилятора.

Побудуємо тепер резонансну криву з урахуванням дисипації, що відповідає рівнянню (1.9.8). Для цього розв'яжемо його щодо ξ :

$$\xi_{1,2} = -I \pm \sqrt{\frac{F^2}{I} - d^2}. \quad (1.9.32)$$

Як випливає з (1.9.32), максимальне значення інтенсивності

$$I_{\max} = \left(\frac{F}{d}\right)^2 \quad (1.9.33)$$

(пор. з (1.9.28)) досягається при $\xi = -I$, тобто відповідає закону неізохронності вільних коливань.

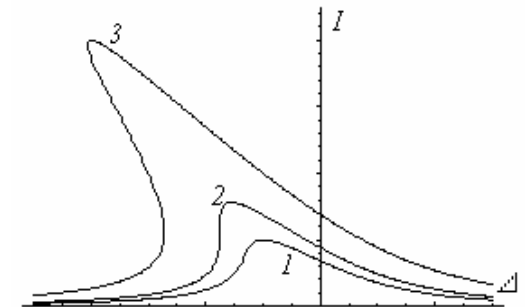
Межі смуги гістерезису визначаються із співвідношення $d\xi/dI=0$, тобто з рівняння

$$F^4 - 4I^3F^2 + 4I^4d^2 = 0. \quad (1.9.34)$$

Це рівняння є біквдратним щодо F і має дійсні корені, коли його дискримінант D є невід'ємним, тобто при

$$I \geq d. \quad (1.9.35)$$

Рис.1.9.3. Резонансні криві нелінійного дисипативного осцилятора ($F_1 < F_2 = F^* < F_3$).



При $D < 0$, очевидно, гістерезису не буде. Прирівнюючи до нуля дискримінант рівняння (1.9.34) та враховуючи співвідношення (1.9.35), отримаємо точний вираз для граничної амплітуди зовнішньої сили,

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

нижче якої гістерезис відсутній:

$$F^* = \sqrt{2d^{3/2}}. \quad (1.9.36)$$

Точний вираз (1.9.36) добре узгоджується з оцінкою (1.9.31).

Сім'я резонансних кривих, побудована на основі (1.9.8), наведена на рис.1.9.3.

1.9.9. Резонанс на кратних гармоніках та на субгармоніках.

При побудові розв'язку рівняння (1.9.3) ми нехтували ефектами, обумовленими ангармонізмом. Врахування цих ефектів призводить до появи резонансу не лише на частоті $p \approx \omega_0$, але й на частотах $p \approx \omega_0/2$ та $p \approx \omega_0/3$. У цих випадках спочатку нелінійні доданки породжують відповідну (другу або третю) гармоніку зовнішньої сили, а потім вона збуджує резонансні коливання системи. Даний ефект лежить в основі роботи помножувачів частоти.

Зрозуміло, що в цьому випадку амплітуда резонансних коливань буде пропорційною до відповідного параметра нелінійності. Врахування наступних наближень призведе до появи резонансів другого та більш високих порядків.

При побудові розв'язку рівняння (1.9.3) ми цікавилися лише чисто вимушеною складовою коливань. Врахування наявності вільних коливань може призвести до появи резонансу на частотах $p \approx 2\omega_0$ та $p \approx 3\omega_0$. Взаємодія власних коливань з частотою ω_0 із коливаннями на частоті зовнішньої сили на нелінійності призведе до появи комбінаційних частот, одна з яких може виявитися рівною ω_0 (наприклад, різницєва частота $p - \omega_0$ для квадратичної нелінійності, коли $p \approx 2\omega_0$, або частота $p - 2\omega_0$ для кубічної нелінійності, коли $p \approx 3\omega_0$). Тоді для коливань з частотою ω_0 у системі з'являється позитивний зворотний зв'язок, що компенсує дисипацію, і вони можуть підтримуватись як завгодно довго.

1.9.10. Резонанс на половинній гармоніці.

Для ілюстрації ефекту резонансу на кратних гармоніках розгля-

немо вимушені коливання слабкодисипативного осцилятора з малою квадратичною нелінійністю

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = f_m \cos pt, \quad \delta \ll \omega_0, \quad |\alpha| \ll 1 \quad (1.9.37)$$

для випадку, коли частота зовнішньої сили приблизно дорівнює половині власної частоти малих коливань осцилятора:

$$\omega_0 - 2p = \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_0. \quad (1.9.38)$$

Зовнішня сила збуджуватиме нерезонансні коливання осцилятора на частоті p . Квадратична нелінійність породжуватиме також постійну складову та коливання на частоті $2p$, що є резонансними для осцилятора. Отже, будемо шукати розв'язок рівняння (1.9.37) у вигляді суми коливань з частотами p та $2p$, амплітуди яких мають однаковий порядок (амплітуда другої гармоніки пропорційна до малого параметра α та обернено пропорційна до малого параметра δ , які ми вважатимемо однаковими за порядком мализни):

$$x(t) = A \exp(ipt) + B \exp(i2pt) + \text{к.с.} \quad (1.9.39)$$

Амплітуди A та B в усталеному режимі вважаємо сталими. Рівняння для них, які можна отримати шляхом підстановки (1.9.39) до (1.9.37) і відкидання доданків вищих порядків мализни (першого для частоти p і другого для частоти $2p$), мають вигляд:

$$\frac{3}{4} \omega_0^2 A = \frac{1}{2} f_m; \quad 2\omega_0 \Delta B + i2\omega_0 \delta B = -\alpha A^2, \quad (1.9.40)$$

звідки

$$A = \frac{2f_m}{3\omega_0^2}; \quad B = -\frac{\alpha A^2}{2\omega_0(\Delta + i\delta)} = -\frac{2\alpha f_m^2}{9\omega_0^5(\Delta + i\delta)}. \quad (1.9.41)$$

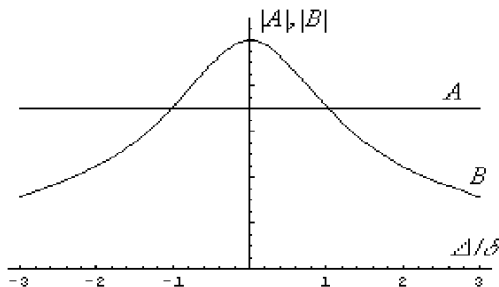
Графіки відповідних залежностей подані на рис.1.9.4.

Друга з формул (1.9.41) відповідає звичайній лоренцівській резонансній кривій. Нелінійність ефекту виявляється в тому, що коливання відбуваються на другій гармоніці зовнішньої сили, а їхня амплітуда пропорційна до квадрату амплітуди зовнішньої сили. Врахування доданків другого порядку мализни за параметром нелінійності

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.9. Вимушені коливання нелінійного дисипативного осцилятора.

α приведе до того, що форма резонансних кривих стане подібною до зображених на рис. 1.9.3.

Рис. 1.9.4. Нелінійний резонанс на половинній гармоніці: залежність амплітуд вимушених коливань на першій (A) та другій (B) гармоніках частоти зовнішньої сили від розстроювання.



Контрольні питання до розділу 1.9.

- 1.9.1. Чи можна проаналізувати вимушені коливання математичного маятника під дією короткого сильного удару за методом інтеграла Фур'є? Відповідь обґрунтувати.
- 1.9.2. Які труднощі виникають при аналізі вимушених коливань нелінійного осцилятора (у порівнянні з лінійним)?
- 1.9.3. Опишіть механізм обмеження амплітуди вимушених коливань на резонансній частоті малих коливань для осцилятора з кубічною нелінійністю.
- 1.9.4. Якісно пояснити ефект гістерезису при нелінійному резонансі.
- 1.9.5. Якими факторами визначається верхня межа смуги гістерезису на резонансній кривій нелінійного осцилятора?
- 1.9.6. Чи існуватиме область гістерезису на амплітудно-частотній характеристиці дисипативного осцилятора з квадратичною нелінійністю?
- 1.9.7. Чи можна реалізувати резонансний режим нелінійного осцилятора, маючи джерело зовнішньої періодичної сили з фіксованою частотою?
- 1.9.8. Якісно поясніть, чому при малих амплітудах зовнішньої сили на резонансній кривій у моделі Дюфінга відсутня область гістерезису.

су.

1.9.9. За яких умов можливий нелінійний резонанс на половинній гармоніці власної частоти осцилятора? Описати його механізм.

Задачі до розділу 1.9.

- 1.9.1. Вивести вкорочене рівняння для повільних амплітуди і фази коливань у слабкодисипативному осциляторі з малою кубічною нелінійністю, що рухається під дією зовнішньої гармонічної сили, в околі резонансу.
- 1.9.2. Знайти (точно) максимальне значення амплітуди вимушених коливань у контурі із слабкою дисипацією та малою кубічною нелінійністю і відповідне йому значення розстроювання. Як вони залежать від амплітуди зовнішньої сили?
- 1.9.3. Знайти розстроювання $\Delta_{1,2}$, яким відповідають точки з вертикальною дотичною на резонансній кривій слабкодисипативного осцилятора з малою кубічною нелінійністю.
- 1.9.4. Побудувати залежність амплітуди третьої гармоніки від розстроювання в режимі вимушених коливань слабкодисипативного осцилятора з малою кубічною нелінійністю.
- 1.9.5. Консервативний осцилятор з малою нелінійністю п'ятого порядку рухається під дією зовнішньої гармонічної сили. Знайти амплітуду вимушених коливань на частоті, що є резонансною для малих коливань. Порівняти з випадком лінійного осцилятора і пояснити відмінність між результатами.
- 1.9.6*. Проаналізувати вимушені коливання слабкодисипативного осцилятора з малою квадратичною нелінійністю в околі резонансу. Побудувати сім'ю резонансних кривих. Які ще гармоніки, крім основної, будуть присутні в спектрі коливань (з точністю до другого порядку за параметром нелінійності)?
- 1.9.7*. Проаналізувати вимушені коливання слабкодисипативного осцилятора з малою нелінійністю п'ятого порядку в околі резонансу. Побудувати сім'ю резонансних кривих. Які ще гармоніки, крім ос-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.9. Вимушені колювання нелінійного дисипативного осцилятора.

новної, будуть присутні в спектрі колювань (з точністю до першого порядку за параметром нелінійності)?

1.9.8*. Дослідити режим резонансу слабкодисипативного осцилятора з малою кубічною нелінійністю на третині частоти його малих власних колювань. Побудувати сім'ю резонансних кривих.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

Перейдемо тепер до розгляду руху нелінійних консервативних осциляторів під дією періодичної зовнішньої сили. На відміну від моделі Дюфінга, власні коливання тепер не будуть згасати, і їхня взаємодія з вимушеними коливаннями виявляється істотною. В деяких випадках така взаємодія здатна привести до того, що поведінка системи стане непередбачуваною.

На відміну від попереднього пункту, ми не будемо тепер ані прив'язуватися до конкретної моделі нелінійного осцилятора, ні вважати нелінійність слабкою. Для аналізу скористаємося змінними дія - кут.

1.10.1. Гамільтонівські системи та змінні дія - кут.

Гамільтонівськими називають системи, для яких зберігається функція Гамільтона (гамільтоніан) $H(p_i, q_i)$, $1 \leq i \leq n$ - повна енергія системи з n ступенями вільності, записана через її узагальнені координати q_i та узагальнені імпульси p_i ¹. Рівняння руху такої системи можна записати через її гамільтоніан у вигляді:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.10.1)$$

Вибір узагальнених координат та імпульсів є неоднозначним. Для деяких (не для всіх) гамільтонівських систем можна так підібрати узагальнені координати θ_i та узагальнені імпульси I_i , що функція Гамільтона буде залежати лише від останніх: $H = H(\vec{I})$. Тоді величини $(\vec{I}, \vec{\theta})$ називають *змінними дія - кут*, а відповідні системи - *повністю інтегровними*. Справді, в цьому випадку рівняння руху (1.10.1) спрощуються:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H(\vec{I})}{\partial I_i} \equiv \omega_i(\vec{I}), \quad \dot{I}_i = 0. \quad (1.10.2)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\vec{I} = const, \quad \vec{\theta} = \vec{\omega}(\vec{I})t + \vec{\theta}_0. \quad (1.10.3)$$

Бачимо, що для повністю інтегровних систем дія зберігається.

У найпростішому випадку систем з одним ступенем вільності (вони завжди інтегровні) можна показати, що

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (1.10.4)$$

тобто збереження дії означає, що на фазовій площині (p, q) зберігається площа фігури, обмеженої замкненою фазовою траєкторією. Можна говорити, що дія характеризує інтенсивність коливань. Кут, як видно з (1.10.3), відповідає фазі коливань. Залежність частоти від дії, що присутня в загальному випадку, вказує на неізохронність коливань.

Для гармонічного осцилятора перехід до змінних дія - кут здійснюється за формулами

$$x = x(I, \theta) = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}} \cos(\theta + \theta_0), \quad \dot{x} = \dot{x}(I, \theta) = -\sqrt{2\omega_0 I} \sin(\theta + \theta_0),$$

$$\theta = \omega_0 t. \quad (1.10.5)$$

Тоді для гамільтоніана отримаємо:

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \omega_0 I, \quad (1.10.6)$$

звідки

$$I = \frac{H}{\omega_0}. \quad (1.10.7)$$

Фазовий портрет осцилятора в змінних дія - кут зручно зображати в полярній системі координат. Він являє собою коло радіусу I , по якому з частотою $\omega(I)$ обертається зображувальна точка.

¹ Зрозуміло, що гамільтонівські системи завжди консервативні.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

1.10.2. Потенціал зовнішньої сили.

Будемо розглядати довільний нелінійний осцилятор з гамільтоніаном $H_0(I)$. Нехай на нього діє деяка зовнішня сила, яку ми вважатимемо малою. В цьому випадку формально можна користуватися рівняннями руху (1.10.1), якщо записати гамільтоніан у формі

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t), \quad (1.10.8)$$

де ε - малий параметр, $V(I, \theta, t)$ - потенціал зовнішньої сили.

Так, для лінійного осцилятора, коли гамільтоніан H_0 має форму (1.10.6), вказаний потенціал слід взяти у вигляді $\varepsilon V(x, t) = -xf(t)$, де $f(t)$ - зовнішня сила. Тоді перше із співвідношень (1.10.1) дасть тотожність, а друге - рівняння руху типу (1.2.1):

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + f(x).$$

У змінних дія - кут повний гамільтоніан (з урахуванням (1.10.5)) набуде вигляду:

$$H(I, \theta, t) = \omega_0 I - \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}} \cos(\theta + \theta_0) f(t). \quad (1.10.9)$$

Зрозуміло, що повний (з урахуванням потенціалу зовнішньої сили) гамільтоніан (1.10.9) уже не зберігатиметься з часом.

Повернемося до загального випадку. Вважатимемо зовнішню силу періодичною з періодом $T=2\pi/\nu$. Тоді потенціал має бути періодичним за t з тим самим періодом. Оскільки, як уже вказувалося, кут θ являє собою фазу коливань, потенціал має бути періодичним за цією змінною з періодом 2π (пор. з формулою (1.10.9)). В силу вищесказаного потенціал можна розкласти в подвійний ряд Фур'є за названими змінними:

$$V(I, \theta, t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} V_{kl}(I) \cos(k\theta + \theta_k) \cos(l\nu t + \varphi_l) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} [V'_{kl}(I) \cos(k\theta - l\nu t + \varphi'_{kl}) + V''_{kl}(I) \cos(k\theta + l\nu t + \varphi''_{kl})],$$

$$V'_{kl}(I) = V''_{kl}(I) = \frac{1}{2} V_{kl}(I), \quad \varphi'_{kl} = \theta_k - \varphi_l, \quad \varphi''_{kl} = \theta_k + \varphi_l. \quad (1.10.10)$$

Нехай для деякого набору параметрів (k_0, l_0, I_0) виконано умову резонансу

$$k_0 \omega(I_0) = l_0 \nu. \quad (1.10.11)$$

Щоб з'ясувати зміст цієї умови, перепишемо її у формі

$$(k_0 - 1) \omega(I_0) - l_0 \nu = \omega(I_0).$$

Тоді її можна інтерпретувати так: для обраного набору параметрів в результаті взаємодії частот власних коливань та зовнішньої сили на нелінійному елементі з'являється комбінаційна частота, що збігається з власною частотою системи і, отже, є для неї резонансною (пор. із розділом 1.8).

Залишимо у виразі для потенціалу (1.10.10) тільки резонансний доданок, який найбільше впливає на рух осцилятора. Тоді повний гамільтоніан (1.10.8) набуде вигляду:

$$H = H_0(I) + \varepsilon V_0(I) \cos(k_0 \theta - l_0 \nu t + \varphi_0), \quad V_0 \equiv V'_{k_0 l_0}, \quad \varphi_0 \equiv \varphi'_{k_0 l_0}. \quad (1.10.12)$$

1.10.3. Рівняння нелінійного резонансу.

Підставивши конкретний вигляд гамільтоніану (1.10.12) до загальних рівнянь руху (1.10.1), отримаємо систему рівнянь для резонансних коливань нелінійного консервативного осцилятора під дією малої періодичної зовнішньої сили у формі:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \varepsilon k_0 V_0 \sin(k_0 \theta - l_0 \nu t + \varphi_0); \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{dV_0}{dI} \cos(k_0 \theta - l_0 \nu t + \varphi_0), \end{cases} \quad (1.10.13)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

$$\omega(I) \equiv \frac{dH_0}{dI}. \quad (1.10.14)$$

Перейдемо від змінної θ до нової змінної

$$\psi = k_0\theta - l_0\mathbf{t} + \varphi_0 \quad (1.10.15)$$

(це відповідає переходу до нової системи координат (I, ψ) , що обертається з частотою $l_0\nu$ щодо старої системи (I, θ) , а кутовий масштаб у ній розтягнуто в k_0 разів). Тоді замість (1.10.3) дістанемо:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon k_0 V_0 \sin \psi; \\ \dot{\psi} = k_0 \omega(I) - l_0 \nu + \varepsilon \frac{dV_0}{dI} \cos \psi. \end{cases} \quad (1.10.16)$$

Слід відзначити, що зроблена заміна привела до формального зменшення числа ступенів вільності системи: рівнянням (1.10.13) відповідало півтора ступеня вільності (в правих частинах присутня явна залежність від часу), рівнянням (1.10.16) - одна ступінь.

Розкладемо частоту власних коливань (1.10.14) в ряд Тейлора навколо резонансного значення дії, обмежившись лінійним доданком:

$$\omega(I) = \omega(I_0) + \omega'(I_0)\Delta I + \dots, \quad (1.10.17)$$

$$\omega'(I_0) \equiv \left. \frac{d\omega(I)}{dI} \right|_{I=I_0}, \quad \Delta I \equiv I - I_0.$$

Підставимо (1.10.17) до (1.10.16), врахуємо умову резонансу (1.10.11), замінімо $V(I)$ на $V(I_0)$ і знехтуємо в другому рівнянні доданком, пропорційним до ε (справедливість двох останніх операцій буде обґрунтована нижче). Дістанемо остаточно:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Delta I = \varepsilon k_0 V_0 \sin \psi; \\ \frac{d\psi}{dt} = k_0 \omega' \Delta I. \end{cases} \quad (1.10.18)$$

1.10.4. Фазові коливання.

Як уже вказувалося, рівняння (1.10.18) відповідають системі з одним ступенем вільності. Справді, диференціюючи друге з них за часом і виключаючи дію, отримаємо:

$$\ddot{\psi} = \varepsilon k_0^2 V_0 \omega' \sin \psi,$$

або, після заміни $\Psi = \psi + \pi$,

$$\ddot{\Psi} + \Omega^2 \sin \Psi = 0, \quad \Omega^2 = \varepsilon k_0^2 V_0 \omega'. \quad (1.10.19)$$

Це - рівняння математичного маятника (1.1.1).

Рівняння (1.10.19) (або система (1.10.18)) описує так звані *фазові коливання* - нелінійний аналог биття.

Як відомо (див. розділ 1.2), дія періодичної зовнішньої сили на лінійний осцилятор приводить у загальному випадку до виникнення биттів між вільною і вимушеною складовими, що виявляється в періодичній зміні амплітуди коливань. Нелінійний осцилятор є неізохронним (п.1.7), тому зміна амплітуди його коливань повинна приводити до зміни їхньої частоти. Цей процес описує друге з рівнянь (1.10.18) - ліворуч у ньому стоїть похідна від перенормованої фази, тобто зсув частоти коливань, а права частина пропорційна добутку зміни дії (тобто зміни інтенсивності) на параметр неізохронності ω' (для ізохронних коливань $\omega'=0$). Навпаки, зміна власної частоти коливань приводить до зміни розстроювання між нею та частотою зовнішньої сили, що, в свою чергу, спричиняє зміну амплітуди коливань. Цей процес описується першим рівнянням системи (1.10.18).

Рівняння (1.10.19) формально є рівнянням лінійного консервативного осцилятора (див. п.1.1.2). Тому воно має інтеграл руху - «повну енергію»

$$W_0 = \frac{\dot{\Psi}^2}{2} + \int_0^{\Psi} \Omega^2 \sin \Psi d\Psi = \frac{(k_0 \omega')^2}{2} (\Delta I)^2 - \Omega^2 \cos \Psi. \quad (1.10.20)$$

Користуючись співвідношенням (1.10.20), можна записати рівняння для фазових траєкторій системи в координатах (I, Ψ) :

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

$$I = I_0 \pm \frac{1}{k_0 \omega'} \sqrt{2(W_0 + \Omega^2 \cos \Psi)}. \quad (1.10.21)$$

Сепаратриса, що розділяє області фінітного та інфінітного руху (для останніх для кожного значення "координати" Ψ існує дійсна "швидкість" ΔI), відповідає значенню «повної енергії» $W_0 = \Omega^2$ і описується рівнянням

$$I = I_0 \pm \frac{2\Omega}{k_0 \omega'} \cos \frac{\Psi}{2} = I_0 \pm 2 \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{|\omega'|}} \cos \frac{\Psi}{2}. \quad (1.10.22)$$

Фазовий портрет, що відповідає рівнянням (1.10.18) (або (1.10.21)), наведений на рис.1.10.1а (у декартових координатах) та на рис.1.10.1б (у полярних координатах).

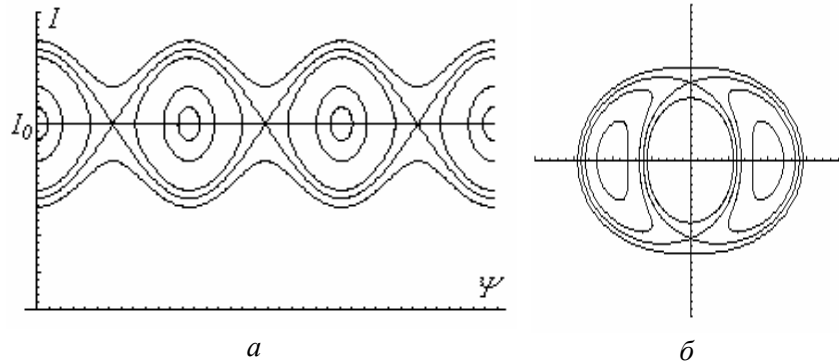


Рис.1.10.1. Фазовий портрет фазових коливань: а - у декартових координатах; б - у полярних координатах (для $k_0=2$).

1.10.5. Ширина нелінійного резонансу.

На фазовому портреті присутні фазові траєкторії двох типів: траєкторії фінітного руху, що знаходяться всередині петель сепаратриси, і траєкторії інфінітного руху (на рис.1.11.2а вони незамкнені). Для траєкторій фінітного руху величина кута ψ (1.10.15) в серед-

ньому з часом зберігається, тому для них умову резонансу (1.10.11) можна вважати виконаною. Для траєкторій інфінітного руху кут ψ з часом монотонно зростає або спадає, і, отже, умова резонансу (1.10.11) порушується. Таким чином, траєкторії фінітного руху є резонансними, а інфінітного - нерезонансними.

Сказане означає, що за ширину резонансу (за дією) можна взяти величину порядку ширини петлі сепаратриси (див. (1.10.22)):

$$\Delta I_c \sim \sqrt{\frac{\varepsilon V_0}{|\omega'|}}. \quad (1.10.23)$$

Тоді ширина резонансу за частотою визначається за допомогою співвідношення (1.10.17):

$$\Delta \omega_c = \omega' \Delta I_c \sim \sqrt{\varepsilon \omega' V_0} = \frac{\Omega}{k_0}. \quad (1.10.24)$$

1.10.6. Аналіз використаних наближень.

Проаналізуємо тепер справедливість наближень, використаних у розрахунку. Для цього скористаємося параметром мализни зовнішньої сили ε . Щоб визначити його, покладемо, що

$$V_0 \sim H_0(I_0) \sim \omega_0 I_0, \quad (1.10.25)$$

де $\omega_0 = \omega(I_0)$ (див. (1.10.6)). Крім того, введемо безрозмірний параметр нелінійності:

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} \frac{d\omega}{dI}, \quad (1.10.26)$$

тоді $\omega' = \alpha \omega_0 / I_0$.

Оскільки ми відкинули нерезонансні доданки в гамільтоніані, відносна ширина резонансу за частотою має бути малою:

$$\frac{\Delta \omega_c}{\omega_0} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon \omega' V_0}}{\omega_0} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega_0^2} \frac{\alpha \omega_0}{I_0} \omega_0 I_0} = \sqrt{\alpha \varepsilon} \ll 1. \quad (1.10.27)$$

Мализна відносної ширини резонансу за дією дозволяє замінити

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

$V(I)$ на $V(I_0)$, тому слід вимагати виконання умови

$$\frac{\Delta I_c}{I_0} \sim \frac{1}{I_0} \sqrt{\varepsilon V_0} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{I_0^2} \frac{I_0}{\alpha \omega_0}} \omega_0 I_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ll 1. \quad (1.10.28)$$

До цього ж приводить умова мализни доданку, відкинутого в другому з рівнянь системи (1.10.18).

Об'єднуючи (1.10.27) та (1.10.28), дістанемо:

$$\sqrt{\varepsilon} \ll \sqrt{\alpha} \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \quad (1.10.29)$$

так звану *умову помірної нелінійності*. Необхідність її задоволення, зокрема, означає, що для нашого розрахунку граничний перехід до лінійної моделі ($\alpha \rightarrow 0$) є некоректним.

1.10.7. Перекриття нелінійних резонансів.

Досі ми аналізували вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора в припущенні, що умови резонансу виконані для єдиного набору значень (k_0, I_0, I_0) . Насправді завдяки неізохронності коливань нелінійного осцилятора навіть у випадку чисто гармонічної зовнішньої сили ($l_0=1$) можна записати:

$$k\omega(I_k) = \nu; \quad (k+1)\omega(I_{k+1}) = \nu.$$

Тоді

$$\delta\omega \equiv \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\nu}{k} - \frac{\nu}{k+1} \approx \frac{\nu}{k^2} \approx \frac{\omega^2}{\nu},$$

$$\delta I = \frac{dI}{d\omega} \delta\omega = \frac{\delta\omega}{\omega'}, \quad k \gg 1. \quad (1.10.30)$$

У протилежному випадку, при $k_0=1$, якщо зовнішня сила є істотно негармонічною, дістанемо:

$$\omega(I_l) = l\nu; \quad \omega(I_{l+1}) = (l+1)\nu; \quad \delta\omega \equiv \omega_{l+1} - \omega_l = \nu. \quad (1.10.31)$$

Введемо параметр перекриття резонансів

$$K = \frac{\Delta I}{\delta I} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} - \quad (1.10.32)$$

відношення ширини резонансу до віддалі між сусідніми резонансами.

При $K \ll 1$ сусідні резонанси можна вважати ізольованими (рис.1.10.2), і їхній взаємний вплив практично відсутній. Інакше кажучи, кожна частота зовнішньої сили може одночасно задовольняти лише одну резонансну умову вигляду (1.10.11).

Навпаки, якщо

$$K \geq 1, \quad (1.10.33)$$

рух системи різко ускладнюється: відбуваються одночасно два резонансні коливання (з великими амплітудами), причому принцип суперпозиції не справджується через нелінійність системи. Розвивається нестійкість, що супроводжується розбіганням сусідніх зображувальних точок (у тривимірному фазовому просторі (x, \dot{x}, t)). Внаслідок цього мала зміна початкових умов у системі призводить до суттєвої зміни її руху в наступні моменти часу. В результаті поведінка системи стає непередбачуваною. Говорять, що рух динамічної системи стає стохастичним.

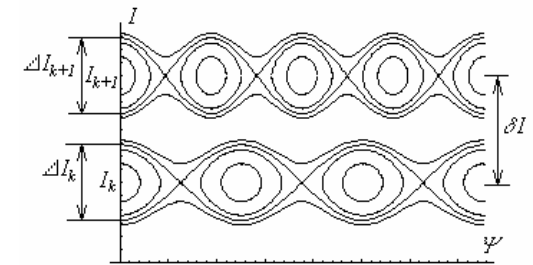


Рис.1.10.2. Ізольовані нелінійні резонанси.

Умова (1.10.33) відома в літературі як *умова перекриття нелінійних резонансів*, або *критерій Чирікова*.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

1.10.8. Вимушені коливання математичного маятника поблизу сепаратриси.

Проілюструємо наслідки перекриття нелінійних резонансів на прикладі математичного маятника, на який діє мала зовнішня гармонічна сила.

Можна показати, що перекриття нелінійних резонансів відбувається поблизу сепаратриси вільних коливань (при $W_0 \rightarrow \omega_0^2$). Справді, при цьому період коливань прямує до нескінченості, частота ω - до нуля, а, отже, і віддаль між сусідніми резонансами (1.10.30) також прямує до нуля. З іншого боку, можна показати, що поблизу сепаратриси ширина окремих резонансів (1.10.24) необмежено зростає.

Щоб зрозуміти, в чому полягає непередбачуваність поведінки аналізованої системи, розглянемо одну з можливих реалізацій математичного маятника - рух кульки в періодичному (точніше, гармонічному) потенціальному рельєфі (рис.1.10.3).

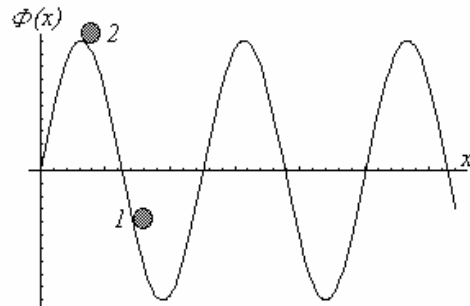


Рис.1.10.3. Рух тіла в періодичному потенціальному рельєфі під дією малої зовнішньої сили.

Нехай за відсутності зовнішньої сили кулька здійснює коливання поблизу дна потенціальної ями, не піднімаючись вище від точки 1 (рис.1.10.3), або, навпаки, здійснює інфінітний рух, коли її повна енергія значно перевищує максимальні значення потенціалу. Тоді дія малої зовнішньої сили не призведе до помітної зміни цих фазових траєкторій.

Мала зовнішня сила може помітно вплинути на рух системи лише тоді, коли кулька знаходиться в околі нестійкої сідлової точки (поблизу максимуму потенціалу, точка 2 на рис.1.10.3). За певних умов вона може підштовхнути кульку так, що та перекотиться в сусідню потенціальну яму. Реалізація такого сценарію істотно залежить від початкових умов і чутлива до їхньої зміни². Оскільки в реальності початкові умови ніколи не відомі точно, це і означає непередбачуваність поведінки системи. В даному конкретному випадку ми не можемо передбачити, в яку саме з двох сусідніх потенціальних ям перекотиться кулька і коли саме це відбудеться. В принципі, якщо почекати достатньо довго, ми зможемо виявити кульку на як завгодно великій віддалі від її початкового положення.

1.10.9. Стохастичний шар.

Вимушеним коливанням математичного маятника відповідає тривимірний фазовий простір - наприклад, простір (x, \dot{x}, t) . За відсутності зовнішньої сили фінітним коливанням у такому просторі будуть відповідати спіралеподібні криві, інфінітному - хвилясті (рис.1.10.4а,б). Якщо вільні коливання відбувалися далеко від сепаратриси, дія малої зовнішньої сили не призведе до помітної зміни вказаних фазових траєкторій.

² Ситуація додатково ускладнюється тим, що рух в околі максимуму потенціалу (сідлової точки) різко сповільнюється (див. п.1.7.4).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

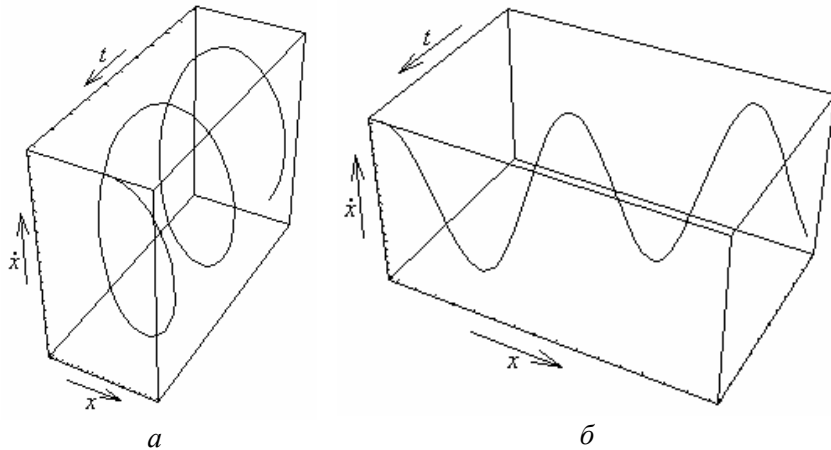


Рис.1.10.4. Фазові траєкторії математичного маятника, що рухається поза околom сепаратриси під дією малої зовнішньої сили: а - фінітний рух, б - інфінітний рух.

Перетнемо фазові траєкторії набором площин $t = const$ і спроектуємо точки перетину на площину (x, \dot{x}) . Точки перетину траєкторій регулярного руху ляжуть на регулярні криві, близькі до фазових траєкторій вільних коливань математичного маятника (рис.1.10.5).

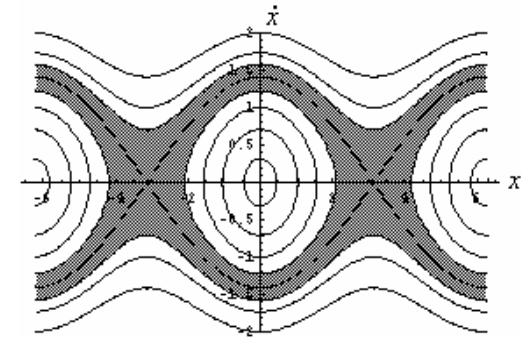
Якщо вільні коливання відбувалися в околі сепаратриси, вони, як уже відзначалося, виявляються чутливими до дії малої зовнішньої сили, і їхній хід стає непередбачуваним. В результаті точки перетину таких траєкторій з площинами $t = const$ випадковим чином розміщуються в околі сепаратриси на площині (x, \dot{x}) , утворюючи так званий *стохастичний шар*. Ширина стохастичного шару пропорційна до амплітуди зовнішньої сили, тобто до малого параметра ε .

Зображувальна точка, що потрапила до стохастичного шару, залишається там як завгодно довго, і її рух підкоряється лише ймовірнісним закономірностям. Зокрема, як уже вказувалося, вона може відійти як завгодно далеко (за координатою) від свого початкового

положення.

Сусідні точки в стохастичному шарі розбігаються. Це відповідає випадку, коли в одній з двох систем з близькими початковими умовами відбулося перестрибування в сусідню потенціальну яму, а в іншій - ні.

Рис.1.10.5. Проекція точок перетину тривимірних фазових траєкторій на площину (x, \dot{x}) . Темним кольором показаний стохастичний шар.



1.10.10. Оцінка ширини стохастичного шару для вимушених коливань математичного маятника під дією гармонічної сили.

Оцінимо за енергією ширину стохастичного шару, що утворюється в околі сепаратриси математичного маятника, на який діє гармонічна зовнішня сила. Для розрахунку скористаємося тією обставиною, що межа стохастичного шару розділяє області, в яких критерій Чирікова виконується (стохастичний шар) та порушується (область детермінованого руху). Отже, за межу стохастичного шару природно прийняти лінію, на якій коефіцієнт перекриття нелінійних резонансів K (1.10.32) дорівнює одиниці.

Запишемо коефіцієнт перекриття нелінійних резонансів через ширину резонансу за частотою та частотну віддаль між сусідніми резонансами:

$$K = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}. \quad (1.10.34)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

Тоді для визначення віддалі між сусідніми резонансами можна скористатися формулою (1.10.30)

$$\delta\omega \approx \frac{\omega^2}{\nu},$$

а для ширини резонансу - формулою (1.10.24)

$$\Delta\omega_c \sim \sqrt{\varepsilon|\omega'|V_0}.$$

Враховавши, що $V_0 \sim H - H_c$, $I \sim H/\omega$, можна отримати такий вираз для коефіцієнту перекриття нелінійних резонансів:

$$K \sim \frac{\nu}{\omega^{3/2}} \sqrt{\varepsilon H_c \left| \frac{\partial\omega}{\partial H} \right|}. \quad (1.10.35)$$

Для подальшого розрахунку необхідно записати залежність частоти власних коливань математичного маятника від його енергії. Вона має вигляд³ (пор. із формулою (1.7.19)):

$$\omega \approx \frac{\pi\omega_0}{\ln \frac{H_c}{H_c - H}}, \quad (1.10.36)$$

де $H_c = 2\omega_0^2$ - критичне значення енергії, що відповідає сепаратрисі.

Підставивши (1.10.36) до (1.10.35), можна отримати:

$$K \sim \frac{\nu}{\pi\omega_0} \sqrt{\frac{\varepsilon |\ln x|}{x}}, \quad x = \frac{H_c - H}{H_c}. \quad (1.10.36)$$

Тоді, прирівнюючи (1.10.36) до одиниці, можна отримати таке рівняння для параметра x_c на межі стохастичного шару:

$$\ln x_c = -ax_c, \quad a = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi\omega_0}{\nu} \right)^2. \quad (1.10.37)$$

Розв'язок рівняння (1.10.37) при великих значеннях параметра a відрізняється від значення $1/a$ лише повільним коефіцієнтом поряд-

ку одиниці, тому остаточно отримуємо:

$$\Delta H \equiv H_c - H \sim \frac{\varepsilon V^2}{\pi^2}. \quad (1.10.38)$$

Як бачимо, ширина стохастичного шару лінійно залежить від амплітуди зовнішньої сили, яка в даному випадку визначається малим параметром ε .

1.10.11. Вплив нерезонансних доданків на фазові коливання.

Повернемося знову до загального випадку системи, описуваної гамільтоніаном (1.10.8). Ми бачили, що врахування лише резонансного доданку у виразі для потенціалу зовнішньої сили (1.10.10) зводить динаміку системи до фазових коливань, описуваних (1.10.19) - рівнянням вільних коливань математичного маятника. Поблизу сепаратриси (рис.1.10.1) частота фазових коливань прямує до нуля. Це означає, що там порушується умова вузькості резонансів $\Delta\omega/\omega < 1$, тобто там вже не можна знехтувати нерезонансними доданками в гамільтоніані.

Нерезонансні доданки відіграють для фазових коливань поблизу сепаратриси роль періодичного збурення. Як ми вже знаємо, дія такого збурення приводить до утворення стохастичного шару поблизу сепаратриси - в даному випадку сепаратриси на фазовому портреті фазових коливань.

* * *

Перші уявлення про можливість непередбачуваної поведінки (стохастичної динаміки) простих систем сформувалися в 50х роках ХХ століття. На початок 80х років стало зрозуміло, що стохастична динаміка - така сама невід'ємна риса поведінки нелінійних осциляторів, як неізохронність та ангармонізм. Усвідомлення цього факту дістало назву другої революції в механіці⁴.

³ Цю формулу можна отримати, використавши схему, описану в п.1.7.4.

⁴ Другої після створення квантової механіки.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.10. Вимушені коливання нелінійного консервативного осцилятора.

Контрольні питання до розділу 1.10.

- 1.10.1. Чому гамільтонівські системи з одним ступенем вільності завжди є інтегровними?
- 1.10.2. Поясни механізми взаємного впливу амплітуди і частоти в процесі фазових коливань.
- 1.10.3. Які вимоги приводять до появи умови помірної нелінійності при аналізі фазових коливань?
- 1.10.4. Коли вимушені коливання осцилятора з квадратичною нелінійністю можуть стати непередбачуваними? У чому виявлятиметься їхня непередбачуваність?
- 1.10.5. Чому перекриття нелінійних резонансів приводить до непередбачуваної поведінки осцилятора?
- 1.10.6. В якій області параметрів вимушені коливання консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю можуть стати непередбачуваними? У чому полягатиме непередбачуваність?
- 1.10.7. Чи завжди в околі сепаратриси вільних коливань, що проходить через сідло, при дії на таку систему періодичної зовнішньої сили задовольнятиметься критерій Чирікова?
- 1.10.8. Чому на фазовому портреті фазових коливань поблизу сепаратриси завжди існує стохастичний шар?
- 1.10.9. В яких випадках урахування нерезонансних доданків у потенціалі збурення є принциповим?

Задачі до розділу 1.10.

- 1.10.1. Показати, що в околі сепаратриси
- а) консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю;
- б) консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю,
- $$x + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha < 0;$$
- в) консервативного осцилятора з кубічною нелінійністю,
- $$x - \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0;$$
- г) консервативного осцилятора з нелінійністю парного порядку,
- $$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^{2n} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

д) консервативного осцилятора з нелінійністю непарного порядку,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^{2n+1} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha < 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

е) консервативного осцилятора з нелінійністю непарного порядку,

$$x - \omega_0^2 x + \alpha x^{2n+1} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

має місце перекриття нелінійних резонансів.

1.10.2. Оцінити ширину стохастичного шару для вимушених коливань

а) консервативного осцилятора з квадратичною нелінійністю;

б) осцилятора з кубічною нелінійністю,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha < 0;$$

в) осцилятора з кубічною нелінійністю,

$$x - \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0;$$

г) консервативного осцилятора з нелінійністю парного порядку,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^{2n} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

д) консервативного осцилятора з нелінійністю непарного порядку,

$$x + \omega_0^2 x + \alpha x^{2n+1} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha < 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

е) консервативного осцилятора з нелінійністю непарного порядку,

$$x - \omega_0^2 x + \alpha x^{2n+1} = 0, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

в околі сепаратриси. Як вона залежить від амплітуди прикладеної сили?

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

1.11. Автоколивання.

Нагадаємо, що автогенератори, або автоколивні системи - це системи, в яких за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати і встановлюватись періодичні коливання. Властивості цих коливань мало залежать від початкових умов і визначаються властивостями самої системи. Автогенератори - це різновид неавтономних (або нерівноважних) нелінійних дисипативних систем. Саме за рахунок неавтономності (нерівноважності) забезпечується надходження енергії, необхідної для підтримання незгасаючих коливань.

Прикладами автогенераторів можуть служити механічні та електронні годинники, автогенератори періодичних коливань в радіотехніці (*LC*-автогенератори, *RC*-автогенератори, мультівібратори в автоколивному режимі, блокінг-генератори та ін.). До виникнення автоколивань зводиться й відоме в авіації явище флатера (вібрація крила, що виникає при перевищенні деякої критичної швидкості польоту і може призвести до руйнування літака).

1.11.1. Виведення нелінійного рівняння автогенератора Ван-дер-Поля.

Класичною в теорії коливань є схема автогенератора Ван-дер-Поля, досліджена в 1920х - 30х роках Ван-дер-Полем та О.О.Андроновим. Вона подана на рис.1.11.1а¹.

¹ Такі схеми називають також *LC*-автогенераторами, або автогенераторами томсонівського типу. Первісно активними елементами таких схем були електронні лампи (тріоди та ін.). Ми подаємо схему на польовому транзисторі, який за своїми властивостями подібний до тріода.

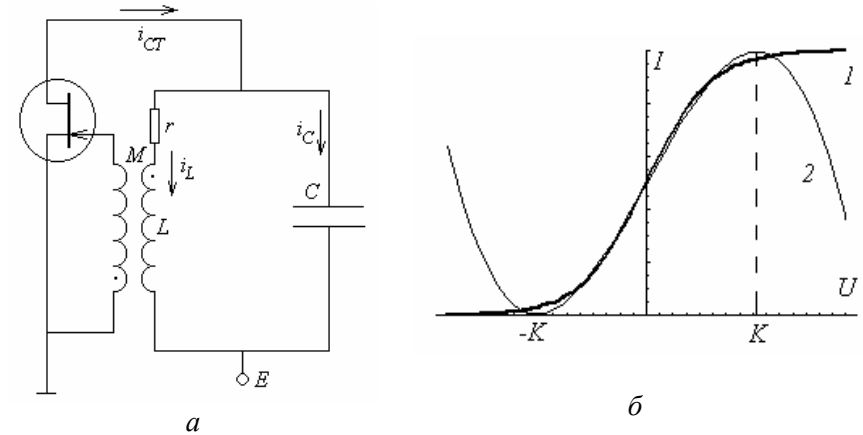


Рис.1.11.1: а - схема автогенератора Ван дер Поля; б - прохідна характеристика (1) та її апроксимація кубічною параболою (2).

Для адекватного опису роботи такого автогенератора слід врахувати нелінійність прохідної характеристики транзистора. Якщо робоча точка знаходиться на середині робочої ділянки (рис.1.11.1б), у розкладі в ряд Тейлора основну роль відіграватимуть непарні ступені аргументу. Обмежившись кубічною нелінійністю, запишемо апроксимацію прохідної характеристики у вигляді:

$$I_{CT}(U) = I_0 + SU - \frac{SU^3}{3K^2}. \quad (1.11.1)$$

Апроксимація (1.11.1) відповідає реальній характеристиці при $-K < U < K$ (рис.1.11.1б).

Запишемо для змінних складових струму та напруги рівняння за другим законом Кірхгофа для коливного контуру автогенератора:

$$L \frac{di_L}{dt} + ri_L - \frac{1}{C} \int i_C dt = 0. \quad (1.11.2)$$

Напруга на вторинній обмотці трансформатора, що прикладається між затвором та витком польового транзистора, буде

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

$$U = M \frac{di_L}{dt}. \quad (1.11.3)$$

За I законом Кірхгофа

$$i_C + i_L = i_{CT}. \quad (1.11.4)$$

Продиференціюємо (1.11.2), виключимо i_C за допомогою (1.11.4), а i_{CT} запишемо за допомогою співвідношень (1.11.1) (виключивши постійну складову) та (1.11.3). В результаті отримаємо:

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + r \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} - \frac{1}{C} \left[MS \frac{di_L}{dt} - \frac{M^3 S}{3K^2} \left(\frac{di_L}{dt} \right)^3 \right] = 0. \quad (1.11.5)$$

Позначивши

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{MS}{LC} - \frac{r}{L}, \quad \gamma = \frac{M^3 S}{3K^2 LC}, \quad (1.11.6)$$

запишемо остаточно ($i_L \rightarrow x$):

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.11.7)$$

Рівняння (1.11.7) відоме в літературі як рівняння Релея.

Диференціюванням та замінами $\dot{x} \rightarrow x$, $3\gamma \rightarrow \gamma$ рівняння Релея зводиться до рівняння Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.11.8)$$

1.11.2. Умови самозбудження автогенератора.

Вважатимемо виконаною умову

$$\alpha > 0. \quad (1.11.9)$$

З урахуванням явного вигляду α (1.11.6) перепишемо її у вигляді

$$MS/rC > 1. \quad (1.11.10)$$

Тепер врахуємо, що $M/L = \beta$ є коефіцієнт зворотного зв'язку автогенератора (відношення напруги на затворі транзистора до напруги на індуктивності коливного контуру), $L/rC = R_{eq}$ - еквівалентний опір коливного контуру на резонансній частоті, $SR_{eq} = k$ - коефіцієнт підсилення резонансного підсилювача, який можна отримати з автоге-

нератора Ван дер Поля, викинувши вторинну обмотку трансформатора і подавши вхідний сигнал на затвор транзистора. Отже, замість (1.11.9) отримаємо:

$$k\beta > 1. \quad (1.11.11)$$

Це - відома з радіоелектроніки амплітудна умова самозбудження підсилювача, охопленого зворотним зв'язком.

Друга необхідна умова - фазова - вимагає, щоб сигнал, пройшовши через підсилювач та коло зворотного зв'язку, змінив свою фазу на величину, кратну 2π . Вона задовольняється завдяки тому, що вторинна обмотка трансформатора переполюсована. Таким чином, транзистор і трансформатор кожен зсувають фазу сигналу на π .

Умова (1.11.11) - по суті, умова експоненціального зростання амплітуди малих коливань - може бути отримана в рамках лінійної теорії, коли нелінійним доданком у рівнянні (1.11.7) можна знехтувати. Ця теорія правильно описує умови самозбудження автогенератора та його поведінку (експоненціальне зростання амплітуди коливань) у початкові моменти після увімкнення. Для коректного опису подальшої поведінки автогенератора, коли амплітуду коливань вже не можна вважати малою, слід користуватися повним нелінійним рівнянням (1.11.7).

Отже рівняння (1.11.7) (або (1.11.8)) за умови (1.11.9) описує автогенератор, для якого виконано умови самозбудження.

1.11.3. Рівняння Релея: якісний аналіз розв'язку.

Перш ніж розв'язувати рівняння Релея, спробуємо якісно схарактеризувати поведінку його розв'язків.

Нехай $|\alpha| < \omega_0$. Тоді при малих x , коли нелінійним доданком можна знехтувати, рівняння (1.11.7) відповідає осцилятору з малою від'ємною дисипацією. Його розв'язок - коливання, амплітуда яких експоненціально зростає з інкрементом $\alpha/2$ (при $|\alpha| > \omega_0$ відхилення від положення рівноваги при малих x матиме аперіодичний характер).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

При не дуже малих x можна розглядати величину $\tilde{\alpha} = \alpha - \gamma x^2$ як ефективний інкремент, що спадає із зростанням x . Коли він зменшиться до нуля, зростання коливань, очевидно, припиниться. Тоді амплітуду A коливань, що встановлюється, можна оцінити із співвідношення $\gamma(\omega_0 A)^2 \sim \alpha$, звідки

$$A \sim \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (1.11.12)$$

Таким чином, з вищенаведених міркувань випливає, що причиною, що призводить до обмеження амплітуди автоколивань, є нелінійність прохідної характеристики транзистора.

1.11.4. Квазілінійна теорія автогенератора.

Точніше визначити амплітуду коливань, що встановлюються в автогенераторі, дозволяє так звана *квазілінійна теорія*. В рамках цієї теорії зв'язок між затворною напругою та стоковим струмом польового транзистора вважається лінійним, $I = \bar{S}U$, але замість звичайної локальної крутості прохідної характеристики S вводиться поняття середньої крутості:

$$\bar{S}(U_m) = \frac{I_{m1}}{U_m}, \quad (1.11.13)$$

де U_m - амплітуда затворної напруги, яка вважається гармонічною, I_{m1} - амплітуда першої гармоніки струму стоку, який в силу нелінійності прохідної характеристики буде негармонічним, але залишиться періодичним з періодом затворної напруги (рис.1.11.2а). Залежність середньої крутості від амплітуди прикладеної напруги якісно зображена на рис.1.11.2б.

Для схеми, зображеної на рис.1.11.1, коефіцієнт підсилення, як уже вказувалося, буде рівний

$$k(U_m) = \bar{S}(U_m)L/rC, \quad (1.11.14)$$

коефіцієнт зворотного зв'язку -

$$\beta = \frac{M}{L_0}, \quad (1.11.15)$$

тому амплітудна умова генерації матиме вигляд

$$k(U_m)\beta = \frac{\bar{S}(U_m)M}{rC} \equiv \frac{\bar{S}(U_m)}{S^*} > 1, \quad (1.11.16)$$

де

$$S^* \equiv \frac{rC}{M} \quad (1.11.17)$$

- критичне значення крутості (пор. (1.11.16) з умовою (1.11.10)). Доки нерівність (1.11.16) виконуватиметься, сигнал зростатиме (при проходженні кільця підсилювач - коло зворотного зв'язку його амплітуда змінюється в $k\beta$ разів). Але із зростанням амплітуди середня крутість спадає (рис.1.12.2б), тому при деякому значенні амплітуди U_m^* , для якого

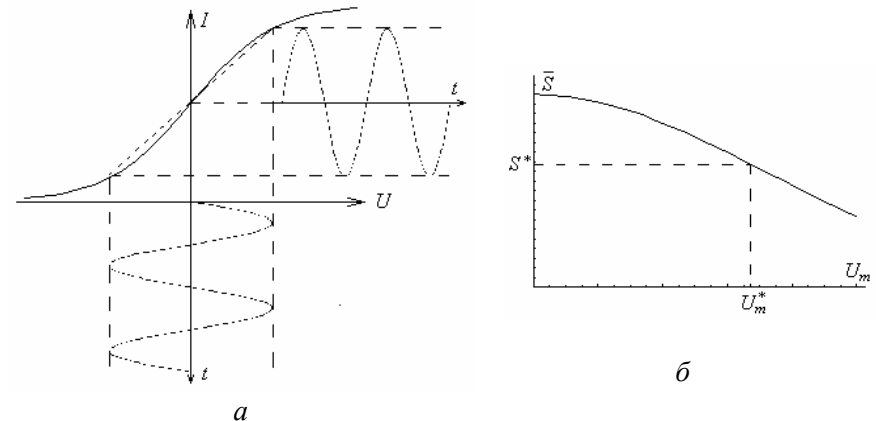


Рис.1.11.2: а - зв'язок входної напруги та вихідного струму; б - залежність середньої крутості прохідної характеристики від амплітуди сигналу.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

$$\bar{S}(U_m^*) = S^*, \quad (1.11.18)$$

зростання коливачь припиниться.

Кавазілінійна теорія дозволяє, таким чином, знайти амплітуду коливачь, що встановлюються в автогенераторі Ван дер Поля при $t \rightarrow +\infty$. Однак для коректного опису процесу встановлення коливачь необхідно побудувати розв'язок рівняння Релея (1.11.7). Це рівняння вдається аналітично розв'язати для двох крайніх випадків - малих та великих α . Розглянемо їх послідовно.

1.11.5. Режим майже гармонічних коливачь.

Нехай параметри рівняння (1.11.7) задовольняють таким умовам:

- $\alpha \ll \omega_0$ (малі коливачь є майже гармонічними);
- $\gamma \rightarrow 0$ (параметр нелінійності формально вважаємо малим).

Тоді вказане рівняння можна розв'язувати методом повільних амплітуд. Оскільки форма коливачь залишається майже гармонічною, а нелінійність є слабкою, шукаємо розв'язок у вигляді коливачь на частоті ω_0 :

$$x(t) = A(t) \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}, \quad \omega_0^2 |A| \gg \omega_0 |\dot{A}| \gg |\ddot{A}|. \quad (1.11.19)$$

Підставляючи (1.11.19) до (1.11.7), залишаючи в рівнянні лише доданки першого порядку малізми за параметрами α та γ , відкидаючи третю гармоніку і прирівнюючи до нуля амплітуду кожної з експонент у лівій частині рівняння, можна отримати таке вкорочене рівняння:

$$\dot{A} - \frac{\alpha}{2} A + \frac{3}{2} \gamma \omega_0^2 A^2 A^* = 0. \quad (1.11.20)$$

Перейдемо від комплексної амплітуди до чисто дійсних амплітуди і фази коливачь:

$$A(t) = a(t) \exp[i\varphi(t)]. \quad (1.11.21)$$

Підставивши (1.11.21) до (1.11.20), скоротивши на $\exp(i\varphi)$ і прирівнявши до нуля окремо дійсну та уявну частини виразу, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0; \\ \dot{a} - \frac{\alpha}{2} a + \frac{3}{2} \gamma \omega_0^2 a^3 = 0. \end{cases} \quad (1.11.22)$$

Перше з рівнянь (1.11.5) дає: $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, тобто коливачь відбуваються з незмінною початковою фазою. В другому рівнянні вдається розділити змінні і подати його у формі:

$$\frac{da}{a \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} \gamma \omega_0^2 a^2 \right)} = dt. \quad (1.11.23)$$

Скориставшись стандартним інтегралом

$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + c)} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{ax^2 + c},$$

інтегруючи за часом від нуля до поточного моменту, а за амплітудою - від початкового значення a_0 до поточного значення, можна врешті решт отримати:

$$a(t) = \frac{a_\infty}{\sqrt{1 + (a_\infty^2/a_0^2 - 1) \exp(-\alpha t)}}, \quad (1.11.24)$$

$$a_\infty = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}. \quad (1.11.25)$$

Проаналізуємо залежність (1.11.24). Перш за все відзначимо, що $a(t=0) = a_0$ (як ми й поклали) та $a(t \rightarrow \infty) = a_\infty$. Таким чином, a_∞ - це амплітуда стаціонарних коливачь, що встановлюються в автогенераторі незалежно від їхньої початкової амплітуди. Звернемо увагу на те, що точне значення (1.11.25) мало відрізняється від оцінки (1.11.12).

Для достатньо малих початкових амплітуд та початкових моментів часу, коли виконано умову $(a_m/a_0)^2 \exp(-\alpha t) \gg 1$, отримаємо $a(t) = a_0 \exp(-\alpha t/2)$: поки нелінійним доданком в (1.11.7) можна знехтувати, коливачь експоненціально зростають з інкрементом $\alpha/2$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

Хід залежності (1.11.24) для різних початкових амплітуд поданий на рис.1.11.3а.

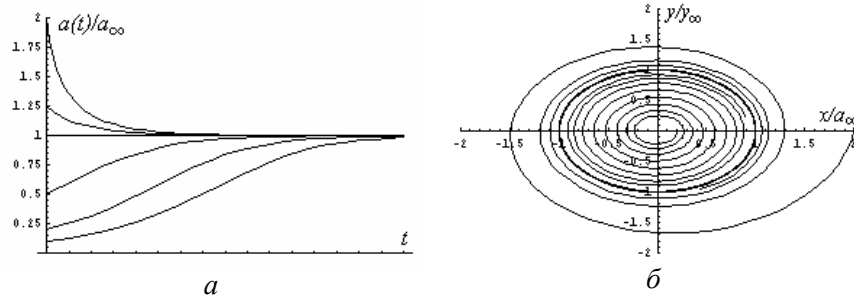


Рис.1.11.3: а - часова залежність амплітуди коливань автогенератора для різних початкових амплітуд; б - фазовий портрет автогенератора в режимі майже гармонічних коливань.

1.11.6. Фазовий портрет генератора майже гармонічних коливань.

Для побудови фазового портрету автогенератора, описуваного рівнянням Релея при $a > 0$, скористаємося отриманим вище розв'язком (1.11.19), (1.11.24). При малих амплітудах коливань ($a < a_\infty$) амплітуда коливань із часом повільно зростає, тому відповідна фазова траєкторія матиме вигляд спіралі, що розкручується. Відповідно початок відліку на фазовій площині являтиме собою нестійкий фокус. При великих амплітудах ($a > a_\infty$), коли амплітуда коливань повільно спадає, фазова траєкторія являтиме собою спіраль, що скручується. Обидві ці спіралі асимптотично прямують до еліпса з півосями a_∞ , $\omega_0 a_\infty$. Фазовий портрет автогенератора наведений на рис.1.11.3б.

Еліпс

$$\left(\frac{x}{a_\infty}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_\infty}\right)^2 = 1, \quad (1.11.26)$$

що розділяє області зростання та спадання коливань, виступає в ролі сепаратриси, або, точніше, стійкого граничного циклу на фазовій площині.

Стійким граничним циклом на фазовій площині називають замкнену фазову траєкторію, до якої асимптотично прямують всі фазові траєкторії з деякого її околу при $t \rightarrow +\infty$. Аналогічну траєкторію, до якої прямують всі фазові траєкторії з деякого її околу при $t \rightarrow -\infty$, називають нестійким граничним циклом.

Існування стійкого граничного циклу означає, що в деякому діапазоні початкових умов незалежно від їхнього конкретного значення в системі з часом будуть встановлюватися певні періодичні коливання. По суті, це і означає, що така система є автогенератором.

При $\alpha < 0$ фазовий портрет автогенератора якісно не відрізняється від фазового портрету лінійного слабкодисипативного осцилятора (рис.1.1.17в); відмінності виявляються лише при значних відхиленнях від положення рівноваги.

Рівняння Релея (1.11.7) демонструє при переході параметра α через нуль так звану біфуркацію Андронова - Хопфа: на місці стійкого фокуса народжується нестійкий фокус, оточений стійким граничним циклом (рис.1.11.3б). Ця біфуркація відповідає самозбудженню автогенератора.

1.11.7. Автогенератор із жорстким режимом самозбудження.

Якщо робочу точку на прохідній характеристиці транзистора вибрати не на середині лінійної ділянки, а поблизу точки запирання, де стоковий струм прямує до нуля, то середня крутість спочатку зростатиме із зростанням затворної напруги, а тільки потім спадатиме. Для цього випадку замість рівняння Релея можна отримати:

$$\ddot{x} + (\alpha - \beta x^2 + \gamma x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.11.27)$$

Вважаючи параметри α , β , γ малими (і додатними), будемо шукати розв'язок рівняння (1.11.27) за методом повільних амплітуд у формі (1.11.19). Тоді вкорочене рівняння буде мати вигляд:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

$$\dot{A} = -\frac{1}{2}\alpha A + \frac{3}{2}\beta\omega_0^2 A^2 A^* - 5\gamma\omega_0^4 A^3 (A^*)^2. \quad (1.11.28)$$

Оскільки (1.11.28) містить лише дійсні коефіцієнти, амплітуди A надалі можна вважати чисто дійсними величинами. Тоді нулі функції dA/dt визначаються формулами

$$A_1 = 0, \quad A_{2,3}^2 = \frac{1}{10\gamma\omega_0^2} \left(3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 40\alpha\gamma} \right). \quad (1.11.29)$$

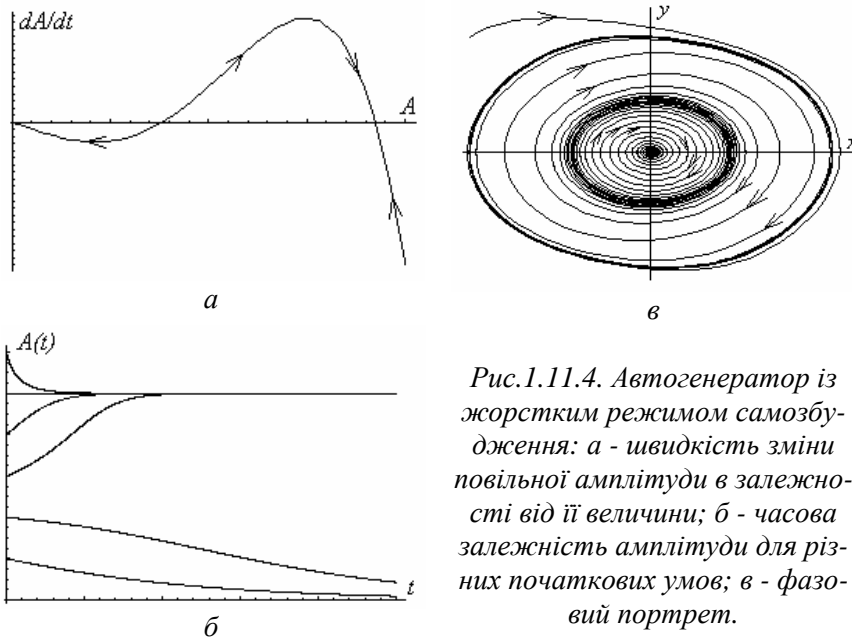


Рис.1.11.4. Автогенератор із жорстким режимом самозбудження: а - швидкість зміни повільної амплітуди в залежності від її величини; б - часова залежність амплітуди для різних початкових умов; в - фазовий портрет.

Два останні корені існують лише за виконання умови

$$\beta > \beta_{cr} \equiv \frac{2}{3}\sqrt{10\alpha\gamma}, \quad (1.11.30)$$

яку нижче вважатимемо виконаною. «Фазова траєкторія» - залеж-

ність швидкості зміни амплітуди від самої амплітуди - для рівняння (1.11.28) подана на рис.1.11.4а. Легко зрозуміти, що амплітуда коливань для різних початкових умов із часом змінюватиметься, як показано на рис.1.11.4б, а фазовий портрет такого автогенератора має вигляд, поданий на рис.1.11.4в.

Стационарному значенню амплітуди A_3 на фазовому портреті відповідає стійкий граничний цикл, до якого сходяться фазові траєкторії з області амплітуд $A > A_2$. Якщо ж $A < A_2$, амплітуда коливань з часом спадатиме до нуля, якому відповідає стійкий фокус (рис.1.11.4в). Еліпс, що відповідає амплітуді A_2 , являє собою нестійкий граничний цикл - сусідні фазові траєкторії асимптотично прямують до нього при $t \rightarrow \infty$. Якщо розглядати еволюцію фазового портрету при зростанні керуючого параметра β від нуля, стійкий та нестійкий граничні цикли одночасно народжуються із згущення фазових траєкторій у момент, коли керуючий параметр проходить через біфуркаційне значення (1.11.30).

Як бачимо, умова (1.11.30) фактично відіграє тепер роль амплітудної умови самозбудження автогенератора. Але встановлення амплітуди коливань відбудеться лише в тому випадку, коли початкове значення перевищить поріг A_2 , що є характерним для *жорсткого режиму* самозбудження автогенератора.

Розглянутий у п.п.1.11.3-1.11.5 режим, коли за виконання умови самозбудження амплітуда коливань зростає від як завгодно малого початкового значення, в радіоелектроніці називають *м'яким режимом* самозбудження.

1.11.8. Автогенератор Ван дер Поля в режимі релаксаційних коливань.

Повернемося знову до генератора Ван дер Поля у м'якому режимі самозбудження, який описується рівнянням Релея (1.11.7). Розглянемо тепер інший крайній його випадок роботи, коли

$$\alpha \gg \omega_0. \quad (1.11.31)$$

Його називають режимом релаксаційних коливань. Як уже відзнача-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

лося, в цьому режимі при малих x розв'язок рівняння Релея являє собою зростаючі експоненти з чисто дійсними показниками.

Замінімо змінні в рівнянні (1.11.7):

$$\xi = \frac{\omega_0^2 \gamma^{1/2}}{\alpha^{3/2}} x, \quad \tau = \frac{\omega_0^2}{\alpha} t. \quad (1.11.32)$$

В результаті воно набуде вигляду:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} - \left[1 - \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\xi}{d\tau} + \xi = 0, \quad \mu \equiv \left(\frac{\omega_0}{\alpha} \right)^2 \ll 1. \quad (1.11.33)$$

В рівнянні (1.11.33) малий параметр стоїть при старшій похідній. Такі рівняння можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого та повільного руху. На ділянках повільного руху старшою похідною взагалі можна знехтувати. На ділянках швидкого руху вона відіграє провідну роль.

Перепишемо (1.11.33) у формі системи:

$$\begin{cases} \zeta = \frac{d\xi}{d\tau}; \\ \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{(1-\zeta^2)\zeta - \xi}{\mu}. \end{cases} \quad (1.11.34)$$

У фазових змінних друге з рівнянь (1.11.34) набуде вигляду

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{(1-\zeta^2)\zeta - \xi}{\mu\zeta}. \quad (1.11.35)$$

При $\mu = 0$ воно дає траєкторію повільного руху:

$$\xi = (1-\zeta^2)\zeta. \quad (1.11.36)$$

Рухаючись уздовж цієї траєкторії, зображувальна точка опиниться в одній з точок $\zeta = \pm 3^{-1/2}$, жодна з яких не є стаціонарною (швидкості там відмінні від нуля). Стаціонарна ж точка $\xi=0, \zeta=0$ є нестійкою.

Щоб усунути отриману суперечність, врахуємо ненульову величину параметра μ . Тоді (1.11.35) за межами траєкторії повільного руху ($\xi \neq (1-\zeta^2)\zeta$) описує майже вертикальну пряму ($d\zeta/d\xi \rightarrow \infty$) - трає-

кторію швидкого руху. Напрямок руху і його швидкість задає друге з рівнянь (1.11.34). Траєкторії швидкого та повільного руху зображені на рис.1.11.5а.

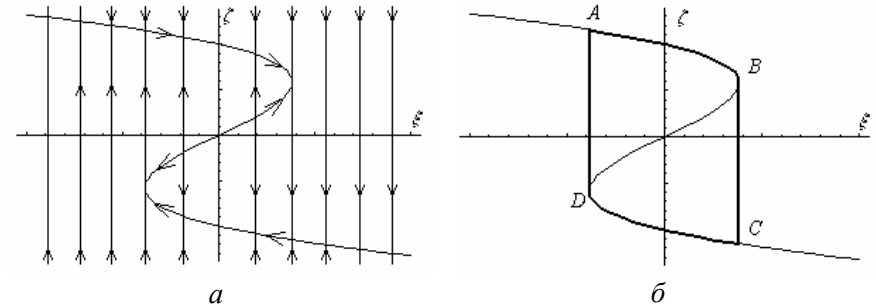


Рис.1.11.5. Фазовий портрет автогенератора в релаксаційному режимі: а - траєкторії швидкого та повільного руху; б - граничний цикл.

Тепер зрозуміло, що зображувальна точка, що потрапила в точку В (рис.1.11.5б), опиниться на траєкторії швидкого руху і рухатиметься по ній до точки С. Потім по траєкторії повільного руху вона досягне точки D, а з неї по траєкторії швидкого руху перестрибне в точку А і по траєкторії повільного руху знову досягне точки В, сформувавши тим самим граничний цикл ABCD.

Скориставшись формулою (1.7.10)

$$t_{12} = \int_1^2 y^{-1} dx,$$

можна побудувати епюри коливань. Вони подані на рис.1.11.6. Видно, що координата ζ на ділянках швидкого руху (BC та DA) змінюється стрибком. Координата ξ стрибків не зазнає.

Прикладом автогенератора релаксаційних коливань може служити мультівібратор з колекторно-базовими зв'язками в автоколивному режимі. Він являє собою двокаскадний підсилювач, у якого вихід замкнений на вхід. У такій схемі реалізується стопроцентний пози-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

тивний зворотний зв'язок (кожен каскад інвертує фазу сигналу), а коефіцієнт підсилення кожного каскаду значно більший від одиниці, в результаті чого умова (1.11.31) добре виконується.

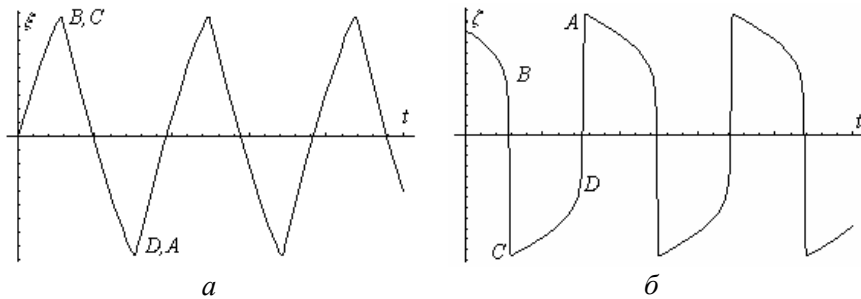


Рис.1.11.6. Епюри коливань автогенератора Ван дер Поля в релаксаційному режимі (а - напруга на конденсаторі, б - струм у контурі).

1.11.9. Період релаксаційних коливань.

За допомогою формули (1.7.10) можна також підрахувати період коливань вздовж циклу ABCD (беручи до уваги тільки ділянки повільного руху). Отримаємо:

$$T = \oint \frac{d\xi}{\zeta} = 2 \int_A^B \frac{d\xi}{\zeta}. \quad (1.11.37)$$

Координати точки B легко знайти, врахувавши, що вона відповідає максимуму функції $\xi(\zeta)$ (1.11.36):

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = 1 - 3\zeta^2 = 0,$$

звідки

$$\zeta_B = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_B = \zeta_B(1 - \zeta_B^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (1.11.38)$$

Але, як видно з рис.1.11.4б,

$$\xi_A = -\xi_B = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Отже, величина ζ_A є коренем рівняння

$$\zeta(1 - \zeta^2) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (1.11.39)$$

Як видно з рис.1.11.4б, це рівняння має також подвійний корінь $\zeta = -\zeta_B$, тому рівняння (1.11.39) може бути переписане у вигляді

$$\left(\zeta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\zeta - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0. \quad (1.11.40)$$

Отже,

$$\zeta_A = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (1.11.41)$$

Таким чином, маємо з урахуванням (1.11.36):

$$T = 2 \int_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{d(\zeta - \zeta^3)}{\zeta} = 2 \left(\ln \zeta - \frac{3}{2} \zeta^2 \right) \Big|_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = 3 - 2 \ln 2 \approx 1.6. \quad (1.11.42)$$

Для «старого» часу t отримаємо:

$$T \approx 1.6 \frac{\alpha}{\omega_0^2} = \frac{1.6}{2\pi} \frac{\alpha}{\omega_0} \frac{2\pi}{\omega_0} \gg \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.11.43)$$

в силу умови (1.11.31). Таким чином, в релаксаційному режимі період автоколивань зростає в порівнянні з режимом майже гармонічних коливань.

Контрольні питання до розділу 1.11.

1.11.1. Чи залежать коливання у автогенераторі Ван дер Поля від початкових умов? Відповідь обґрунтувати.

1.11.2. Чи можливе встановлення коливань у автогенераторі Ван дер Поля за відсутності активного опору в контурі? Відповідь обґрунтувати.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

1.11.3. Чи може існувати граничний цикл на фазовому портреті консервативної системи? Відповідь обґрунтувати.

1.11.4. На фазовому портреті існують декілька вкладених граничних циклів. Чи можуть усі вони бути стійкими?

1.11.5. Коли рух системи формально можна розділити на швидкий і повільний? Яким випадкам вони відповідають?

1.11.6. До якого класу особливих точок належить початок координат на фазовому портреті релаксаційного автогенератора? Відповідь обґрунтувати.

1.11.7. Частина фазових траєкторій релаксаційного автогенератора може наближено вважатися вертикальними прямими. Для яких областей фазової площини це наближення виконується найкраще? Де воно порушується?

1.11.8. Як встановлюється напрямок швидкого руху на фазовому портреті релаксаційного автогенератора?

1.11.9. Якісно намалюйте фазовий портрет автогенератора Ван дер Поля для випадку, проміжного між режимами майже гармонічних та релаксаційних коливань.

1.11.10. Як змінюватиметься спектр автогенератора Ван дер Поля при переході від квазігармонічного до релаксаційного режиму?

1.11.11. Чи залежить форма автоколивань, що встановлюються у автогенераторі Ван дер Поля, від їхнього початкового інкременту? Відповідь обґрунтувати.

1.11.12. Чи є генератор Ван дер Поля неізохронним?

1.11.13. Пояснити, чому вибором робочої точки можна перевести автогенератор Ван дер Поля з релаксаційного у квазігармонічний режим.

1.11.14. На фазовому портреті автогенератора з жорстким режимом самозбудження нестійкий граничний цикл знаходиться всередині стійкого. Чи можуть вони розташуватись навпаки?

1.11.15. Якісно зобразіть фазовий портрет релаксаційного автогенератора з жорстким самозбудженням.

Задачі до розділу 1.11.

1.11.1. Зобразити епюри коливань релаксаційного автогенератора Ван дер Поля для різних значень інкременту (в "старих" координатах). Як залежить амплітуда коливань від інкременту?

1.11.1. Вивести нелінійне рівняння для автогенератора на польовому транзисторі з коливним контуром

а) у колі витоку;

б) у колі затвору

та розрахувати амплітуду коливань, що встановиться в ньому.

1.11.2. Побудувати нелінійну теорію автогенератора, що являє собою паралельне сполучення індуктивності, ємності, великого активного опору та тунельного діода. Записати умову самозбудження та знайти амплітуду коливань, що встановляться. Вважати, що за відсутності коливань робоча точка встановлюється на середині спадаючої ділянки характеристики діода.

1.11.3. Методом повільних амплітуд проаналізувати процес встановлення режиму майже гармонічних коливань у автогенераторі, що описується:

а) рівнянням Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

б) узагальненим рівнянням Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

в) узагальненим рівнянням Релея

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma \dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

г) узагальненим рівнянням Релея - Ван дер Поля

$$x - [\alpha - \gamma(x^2 + \omega_0^2 x^2)]\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Побудувати фазовий портрет системи.

1.11.4. Побудувати графік залежності амплітуди коливань, що встановлюються в автогенераторі на польовому транзисторі

а) з контуром у колі затвору;

б) з контуром у колі стоку

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

від взаємної індуктивності котушок.

1.11.5. Одержати умову для параметра нелінійності γ , при виконанні якої

а) рівняння Релея

б) рівняння Ван дер Поля

описуватиме автогенератор майже синусоїдальних коливань. Пояснити отриманий результат.

1.11.6. Для автогенератора, що описується рівнянням

а) Релея;

б) Ван дер Поля;

в) узагальненим рівнянням Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

г) узагальненим рівнянням Релея

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma \dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

д) $\ddot{x} + (a - b\dot{x}^2 + c\dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$

е) $\ddot{x} + (a - bx^2 + cx^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

знайти амплітуду третьої гармоніки в спектрі коливань, що встановилися.

Вказівка: амплітуда коливань, що встановилися, залишається сталою.

1.11.7. Проаналізувати поведінку третьої гармоніки в процесі встановлення коливань в автогенераторі, що описується рівнянням

а) Релея

б) Ван дер Поля.

Вказівка. Розв'язок шукати у вигляді

$$x(t) = A(t)\exp(i\omega_0 t) + a(t)\exp(i3\omega_0 t) + \text{к.с.},$$

де A , a - повільні амплітуди ($|A| \gg |a|$). Обмежитись першим наближенням за параметрами α та γ .

1.11.8. Автогенератор описується рівнянням

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}(1 - \dot{x}^4) + x = 0, \quad \alpha \ll 1.$$

Знайти амплітуду першої гармоніки коливань, що встановляться в ньому. Які ще гармоніки будуть присутні в спектрі?

1.11.9. Автогенератор у жорсткому режимі самозбудження описується рівнянням:

а) $\ddot{x} + (a - b\dot{x}^2 + c\dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$

б) $\ddot{x} + (a - bx^2 + cx^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

Отримати вкорочене рівняння для повільної амплітуди основної гармоніки. Записати умову самозбудження. Записати стаціонарні розв'язки для амплітуди коливань та дослідити їхню стійкість. Побудувати епюри для амплітуди коливань в залежності від початкових умов.

1.11.10. Побудувати фазовий портрет автогенератора, що описується рівнянням

а) $\ddot{x} + (a - b\dot{x}^2 + c\dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$

б) $\ddot{x} + (a - bx^2 + cx^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

в режимі майже гармонічних коливань. Умови самозбудження вважати виконаними.

1.11.11. Побудувати фазовий портрет автогенератора в режимі релаксаційних коливань, що описується узагальненим рівнянням Релея

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma \dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

1.11.12. Зобразити епюри коливань релаксаційного автогенератора Ван дер Поля для різних значень інкременту (в "старих" координатах). Як залежить амплітуда цих коливань від інкременту?

1.11.13. Оцінити період коливань релаксаційного автогенератора, що описується узагальненим рівнянням Релея

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma \dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

1.11.14. Побудувати залежність періоду релаксаційних коливань автогенератора, описуваного рівнянням Релея, від їхньої амплітуди.

1.11.15. У початковий момент часу амплітуда квазігармонічних коливань автогенератора, описуваного рівнянням Релея, значно пере-

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.11. Автоколивання.

вищує значення a_∞ . За яким законом спадатиме амплітуда коливань у початкові моменти часу?

1.11.16. Автогенератор, що описується рівнянням Релея, вмикається в момент $t=0$. Початкова амплітуда коливань дорівнює a_0 . Починаючи з яких моментів часу можна вважати, що відхилення амплітуди коливань від значення a_∞ зменшуватиметься експоненціально?

1.11.17*. Дослідити залежність амплітуди коливань автогенератора Ван дер Поля від вибору робочої точки на прохідній характеристиці польового транзистора. Пояснити отримані результати в рамках квазілінійної теорії.

1.11.18*. Автогенератор описується рівнянням

$$\ddot{x} + (a - b\dot{x}^2 + c\dot{x}^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Побудувати фазовий портрет цього автогенератора в режимі релаксаційних коливань та розрахувати період таких коливань.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

Як правило, автогенератори, що забезпечують високу стабільність частоти, є малопотужними. Для отримання достатньо потужних сигналів у радіоелектроніці часто застосовуються так звані генератори із зовнішнім збудженням - потужні автогенератори, що керуються слабким вхідним сигналом. Для аналізу роботи таких пристроїв розглянемо поведінку автогенератора під дією зовнішньої сили.

Вважатимемо, що в контур автогенератора увімкнене джерело змінної напруги (рис.1.12.1). Обрана схема автогенератора відрізняється від зображеної на рис.1.11.1а тим, що коливний контур розташований не в колі стоку, а в колі затвору. За відсутності зовнішньої напруги робота цієї схеми описуватиметься рівнянням Ван дер Поля (1.11.8) для заряду на ємності коливного контуру.

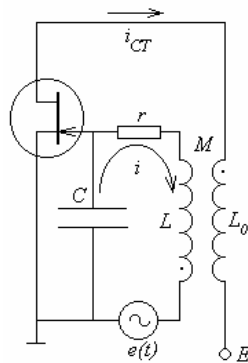


Рис.1.12.1. Схема автогенератора із джерелом змінної напруги в контурі.

1.12.1. Ефект вимушеної синхронізації: якісна інтерпретація.

Для того, щоб зрозуміти суть явищ, що відбуваються в автогенераторі під дією зовнішньої періодичної сили, розглянемо їх спершу якісно, користуючись поняттями квазілінійної теорії автогенераторів (див. п.1.11.4). Як уже вказувалося, в рамках квазілінійної теорії зростання коливань у контурі призводить до зменшення середньої

крутості i , як наслідок, до порушення амплітудної умови самозбудження.

За наявності джерела зовнішньої змінної напруги в контурі відбуватимуться коливання одночасно на двох частотах - на власній частоті контуру та на частоті зовнішньої напруги. Якщо коливання під дією зовнішньої напруги будуть достатньо великими, то відповідне значення середньої крутості може виявитися меншим за критичне значення (1.12.5), і автоколивання зірвуться. Цей ефект носить назву *вимушеної синхронізації* автогенератора, або *нав'язування частоти*.

1.12.2. Неоднорідне рівняння Ван дер Поля: розв'язок за методом повільних амплітуд.

Коливання в контурі автогенератора, зображеного на рис.1.12.1, описуються неоднорідним рівнянням Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos pt. \quad (1.12.1)$$

Для того, щоб побудувати аналітичний розв'язок рівняння (1.12.1), приймемо такі припущення:

- $\alpha \ll \omega_0$ (малі коливання є майже гармонічними);
- $\gamma \rightarrow 0$ (параметр нелінійності формально вважаємо малим);
- $|\Delta| \ll \omega_0$, де $\Delta \equiv \omega_0 - p$ (частота зовнішньої сили близька до частоти автоколивань).

Тоді розв'язок (1.12.1) можна шукати за методом повільних амплітуд:

$$x(t) = A(t) \exp(ipt) + \text{к.с.}, \quad \omega_0^2 |A| \gg \omega_0 |\dot{A}| \gg |\ddot{A}|. \quad (1.12.2)$$

Підкреслимо, що ми шукаємо розв'язок у формі коливань на частоті зовнішньої сили, тобто чисто вимушених коливань. Очевидно, автоколиванням у цьому випадку відповідатимуть повільні коливання амплітуди з частотою Δ .

Після стандартної процедури можна отримати таке вкорочене рівняння для амплітуди:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

$$\dot{A} - \frac{\alpha}{2} A - i\Delta A + \frac{\gamma}{2} A^2 A^* = -i \frac{f_m}{4\omega_0}. \quad (1.12.3)$$

У стаціонарному випадку (коли вимушені коливання встановилися, і їхня амплітуда залишається незмінною) замість (1.12.3) можна записати:

$$A \left(-\frac{\alpha}{2} - i\Delta + \frac{\gamma}{2} A A^* \right) = -i \frac{f_m}{4\omega_0}. \quad (1.12.4)$$

Взявши квадрат модуля обох частин (1.12.4) і ввівши нормовані інтенсивність коливань I , розстроювання ξ і амплітуду зовнішньої сили F_m із співвідношень

$$I = \frac{\gamma A A^*}{\alpha}, \quad \xi = \frac{2\Delta}{\alpha}, \quad F_m^2 = \frac{\gamma f_m^2}{4\omega_0^2 \alpha^3}, \quad (1.12.5)$$

остаточно отримаємо:

$$I \left[(1 - I)^2 + \xi^2 \right] = F_m^2. \quad (1.12.6)$$

Це співвідношення пов'язує між собою інтенсивність вимушених коливань у контурі, амплітуду зовнішньої сили та розстроювання (по суті, частоту зовнішньої сили), тобто воно описує сім'ю резонансних кривих для вимушених коливань автогенератора.

1.12.3. Резонансні криві для вимушених коливань автогенератора.

Розв'язок (1.12.6) зручно записати у формі залежності розстроювання від інтенсивності коливань:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{F_m^2 - I(1 - I)^2}{I}}. \quad (1.12.7)$$

Тоді залежність $\xi(I)$ для різних значень параметра F_m можна побудувати за тим самим методом, що й фазовий портрет нелінійного консервативного осцилятора (див. п.1.7.3). Сім'ю резонансних кривих наведено на рис.1.12.2а.

Криві на рис.1.12.2а можна розбити на три групи. При $F_m^2 < 4/27$

(випадок малих амплітуд зовнішньої сили, якому відповідає крива 1 на рис.1.12.2а) резонансні криві розбиваються на дві частини, одна з яких лежить всередині петлі сепаратриси (крива 2). Таким чином, на кривих є ділянка неоднозначності. При $4/27 < F_m^2 < 8/27$ (випадок проміжних амплітуд зовнішньої сили, якому відповідає крива 3 на рис.1.12.2а) криві стають цілісними, але ділянки неоднозначності зберігаються. Нарешті, при $F_m^2 > 8/27$ (випадок великих амплітуд зовнішньої сили, якому відповідає крива 5 на рис.1.12.2а) резонансні криві стають однозначними.

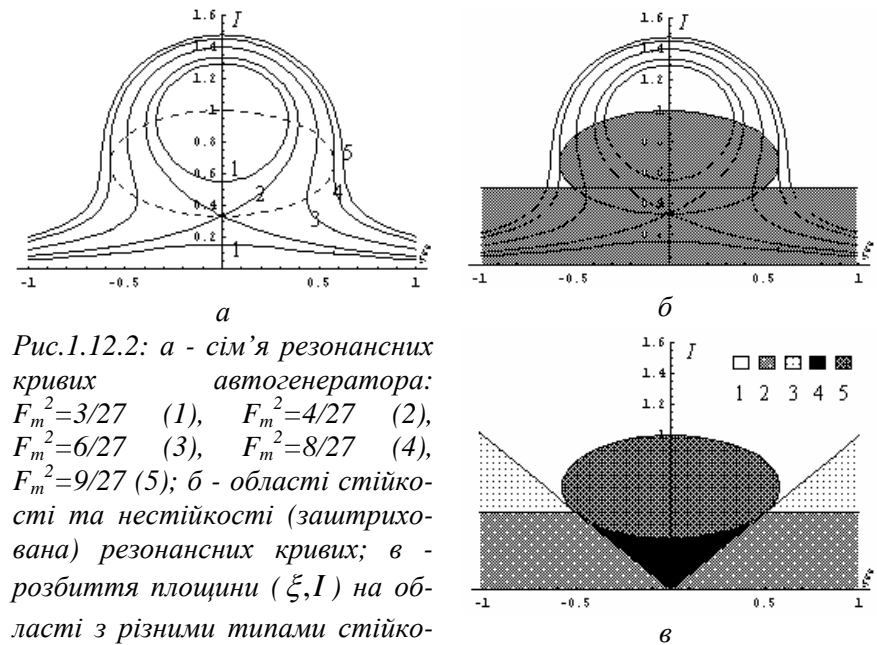


Рис.1.12.2: а - сім'я резонансних кривих автогенератора: $F_m^2=3/27$ (1), $F_m^2=4/27$ (2), $F_m^2=6/27$ (3), $F_m^2=8/27$ (4), $F_m^2=9/27$ (5); б - області стійкості та нестійкості (заштрихована) резонансних кривих; в - розбиття площини (ξ, I) на області з різними типами стійкості (1 - стійкий вузол, 2 - нестійкий фокус, 3 - стійкий фокус, 4 - нестійкий вузол, 5 - сідло).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

При $F_m^2 \leq 8/27$ резонансні криві мають точки, в яких $|dI/d\xi| \rightarrow \infty$. Можна показати, що ці точки завжди лежать на еліпсі

$$\left(\frac{I - 2/3}{1/3}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad (1.12.8)$$

показаному на рис.1.12.2а штриховою лінією.

1.12.4. Стійкість резонансних кривих.

На основі самого лише рівняння (1.12.6) нічого не можна сказати про те, чи є стан автогенератора, що відповідає резонансним кривим (1.12.7), стійким. Для дослідження цього питання повернемося до вкороченого рівняння (1.12.3) і перейдемо від комплексної амплітуди A до чисто дійсних величин a, b за допомогою співвідношення

$$A(t) = a(t) + ib(t). \quad (1.12.9)$$

Підставляючи (1.12.9) до (1.12.3) і прирівнюючи до нуля окремо дійсну та уявну частини, дістанемо:

$$\dot{a} - \frac{\alpha}{2}a + \frac{\gamma}{2}(a^2 + b^2)a + \Delta b = 0; \quad (1.12.10)$$

$$\dot{b} - \frac{\alpha}{2}b + \frac{\gamma}{2}(a^2 + b^2)b - \Delta a = -\frac{f_m}{2\omega_0},$$

або

$$\dot{a} = \frac{\alpha}{2}a - \frac{\gamma}{2}(a^2 + b^2)a - \Delta b \equiv \Phi(a, b); \quad (1.12.11)$$

$$\dot{b} = \frac{\alpha}{2}b - \frac{\gamma}{2}(a^2 + b^2)b + \Delta a - \frac{f_m}{2\omega_0} \equiv \Psi(a, b).$$

Дослідження стійкості стаціонарних розв'язків (1.12.6) системи (1.12.11) проведемо за тією ж схемою, як для резонансної кривої у моделі Дюфінга (див. п.1.9.5).

Для того, щоб дослідити стійкість положення рівноваги, досить

розглянути поведінку малих відхилень від цього положення. Тому шукатимемо розв'язок системи (1.12.11) у вигляді

$$a(t) = a_0 + \tilde{a}(t), \quad b(t) = b_0 + \tilde{b}(t), \quad |a_0| \gg |\tilde{a}(t)|, \quad |b_0| \gg |\tilde{b}(t)|, \quad (1.12.12)$$

вважаючи, що постійні складові a_0, b_0 з урахуванням (1.12.9), (1.12.11) задовольняють рівняння (1.12.6), тобто відповідають стаціонарній амплітуді вимушених коливань у контурі автогенератора. Лінеаризуючи рівняння (1.12.11) за малими змінними складовими амплітуд, розкладемо їхні праві частини навколо точки a_0, b_0 у ряд Тейлора і обмежимося лінійними складовими. З урахуванням (1.12.6) дістанемо:

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right|_{a_0, b_0} \tilde{a} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial b} \right|_{a_0, b_0} \tilde{b}; \quad (1.12.13)$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dt} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial a} \right|_{a_0, b_0} \tilde{a} + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial b} \right|_{a_0, b_0} \tilde{b}$$

(пор. з рівнянням (1.9.22)). Система (1.12.13) зводиться до рівняння вигляду (1.1.9)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(див. рівняння (1.9.23)), якщо зробити заміни

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial b} \rightarrow -2\delta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial \Psi}{\partial b} - \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial \Psi}{\partial a} \rightarrow \omega_0^2. \quad (1.12.14)$$

Як було показано у п.1.8.4, умови стійкості стаціонарної точки рівняння (1.1.9) мають вигляд (1.8.8):

$$\omega_0^2 > 0, \quad \delta > 0.$$

Підставляючи явний вигляд функцій Φ та Ψ (1.12.5), можна отримати відповідно:

$$I > \frac{1}{2}; \quad (1.12.15)$$

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

$$\left(\frac{I-2/3}{1/3}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{1/\sqrt{3}}\right)^2 > 1$$

(пор. з рівнянням (1.12.8)). Область стійкості резонансних кривих (1.12.1), що відповідає одночасному задоволенню умов (1.12.15), показана на рис.1.12.2б.

Очевидно, там, де резонансні криві є стійкими, і матиме місце ефект вимушеної синхронізації - в контурі будуть присутні лише коливання на частоті зовнішньої сили. Там, де ці криві нестійкі, очевидно, матимуть місце биття між коливаннями на частоті зовнішньої сили та автоколиваннями.

Дослідимо ще характер стійкості (або нестійкості) стаціонарного стану, що відповідає резонансним кривим, для різних значень параметрів I та ξ .

Порушення першої з умов (1.12.15) (при виконанні другої) означає, що стаціонарна точка буде нестійким фокусом або вузлом, порушення другої (незалежно від виконання чи порушення першої) - що стаціонарна точка буде сідлом.

Умова того, що стаціонарна точка рівняння (1.1.9) буде фокусом, має вигляд $|\delta| < \omega_0$, що з урахуванням (1.12.14) та (1.12.11) дасть:

$$I < \left|\frac{\xi}{\xi_0}\right|. \quad (1.12.16)$$

Отже, при виконанні першої з умов (1.12.15) та (1.12.16) дістанемо стійкий фокус, при виконанні (1.12.16) та порушенні першої з умов (1.12.15) - нестійкий фокус. Умова, протилежна до (1.12.16), при невиконанні другої з умов (1.12.15) визначатиме область існування стійких (при задоволенні першої з умов (1.12.15)) та нестійких (при її порушенні) вузлів.

Розбивка напівплощини (ξ, I) на області з різним характером стійкості стаціонарних точок відповідно до умов (1.12.15)-(1.12.16) показана на рис.1.12.2в.

1.12.5. Вимушена синхронізація: випадок малих зовнішніх сил.

Розрахуємо ширину смуги частот (точніше, розстроювань), в якій має місце вимушена синхронізація, для випадку малих амплітуд зовнішньої сили ($F_m^2 < 4/27$). Для цього необхідно знайти точки перетину відповідної резонансної кривої з еліпсом (1.12.8) (рис.1.12.2б).

У випадку малих зовнішніх сил можна наближено вважати, що верхня межа еліпса (1.12.8) мало відрізняється від горизонтальної прямої $I=1$. Підставляючи це значення до рівняння резонансної кривої (1.12.7), отримаємо для шуканих точок перетину: $\xi = \pm F_m$. Таким чином, ширина смуги синхронізації складає в цьому випадку

$$\Xi = 2F_m. \quad (1.12.17)$$

Іншими словами, ефект вимушеної синхронізації може мати місце для як завгодно малої амплітуди зовнішньої сили, але ширина смуги синхронізації зменшуватиметься пропорційно до вказаної амплітуди.

На перший погляд, цей результат суперечить міркуванням, висловленим вище на основі квазілінійної теорії: мала сила, здавалося б, не може розгойдати в контурі настільки великі коливання, щоб середня крутість прохідної характеристики впала нижче критичного значення.

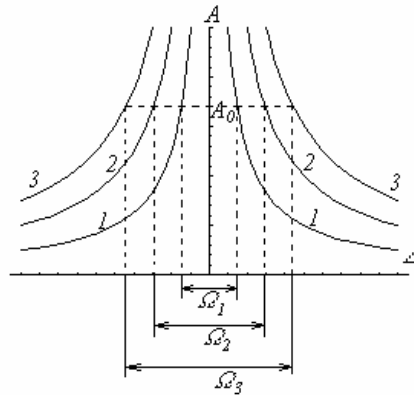
Щоб пояснити цю суперечність, слід згадати, що в контурі автогенератора відбуваються автоколивання з фіксованою амплітудою, тобто ефективний опір цього контуру дорівнює нулеві. В цьому випадку мала сила справді може розгойдати коливання як завгодно великої амплітуди у вузькій смузі частот, близькій до резонансної, причому ширина цієї смуги зростатиме із зростанням амплітуди зовнішньої сили (рис.1.12.3).

Обговоримо тепер, як виглядає фазовий портрет (точніше, його аналог, побудований у координатах (a, b)) коливань у аналізованому випадку для різних розстроювань. Рівняння для визначених таким чином фазових траєкторій легко отримати, розділивши перше з рівнянь (1.12.11) на друге.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

Рис.1.12.3. Резонансні криві для контуру без дисипації для різних амплітуд зовнішньої сили ($f_{m1} < f_{m2} < f_{m3}$) та відповідні смуги частот, в яких амплітуда коливань перевищує критичне значення



У смугі синхронізації, як уже вказувалося, резонансна крива є тризначною (рис.1.12.2а), причому на фазовій площині максимальному (стійкому) значенню амплітуди коливань відповідає стійкий вузол, мініимальному - нестійкий вузол, проміжному - сідло (рис.1.12.2в). Відповідний фазовий портрет наведений на рис.1.12.4а (цифрами позначені: 1 - стійкий вузол, 2 - сідло, 3 - нестійкий вузол).

На межі смуги синхронізації нестійкий вузол (точка 2 на рис.1.12.4б) зберігається, а стійкий вузол і сідло зливаються, утворюючи особливу точку типу сідло - вузол (точка 1 на рис.1.12.4б). Оскільки вихід із сідлової точки і досягнення стійкого фокусу вимагають нескінченного часу (див. п.1.7), то час руху по замкненій траєкторії, що починається і закінчується в цій точці, є нескінченно великим.

При виході за межі смуги синхронізації резонансна крива стає однозначною. Її точкам на фазовій площині тепер відповідає нестійкий фокус (точка 1 на рис.1.12.4в). На місці замкненої траєкторії, що починалася й закінчувалася в особливій точці типу сідло - вузол, утворюється граничний цикл. Рух уздовж цього циклу відповідає автоколиванням, частота яких зсунута щодо частоти зовнішньої сили.

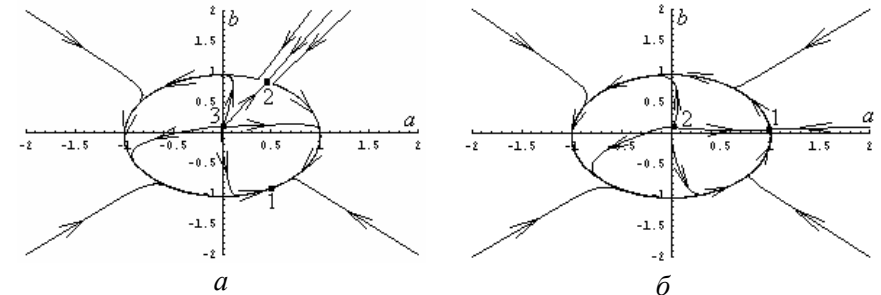


Рис.1.12.4. Фазовий портрет автогенератора під дією малої зовнішньої сили: а - в смугі вимушеної синхронізації; б - на межі смуги вимушеної синхронізації; в - в області співіснування автоколивань та коливань на частоті зовнішньої сили.

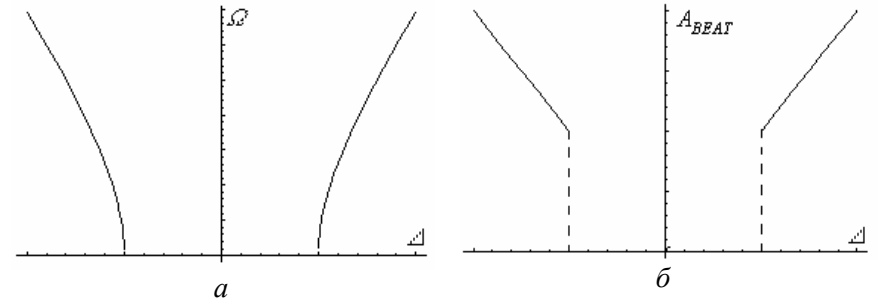


Рис.1.12.5. Залежності частоти (а) та амплітуди (б) биття між автоколиваннями та коливаннями на частоті зовнішньої сили від розстроювання при виході за межі смуги синхронізації для малих амплітуд зовнішньої сили.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

Як уже відзначалося, при виході за межі смуги синхронізації в контурі з'являються биття між автоколиваннями та коливаннями на частоті зовнішньої сили. Частота биттів визначається різницею між частотою автоколивань і частотою зовнішньої сили, тобто частотою обертання вздовж граничного циклу (рис.1.12.4в). Оскільки частота обертання вздовж граничного циклу в момент його виникнення рівна нулеві, частота биттів при виході за межі синхронізації зростає від нуля (рис.1.12.5а). Амплітуда биттів визначається меншою з амплітуд коливань, що додаються. Оскільки граничний цикл в момент виникнення має скінчені (ненульові) розміри, амплітуда биттів при виході за межі синхронізації зростає стрибком (рис.1.12.5б).

1.12.6. Вимушена синхронізація: випадок великих зовнішніх сил.

Розрахуємо тепер ширину смуги вимушеної синхронізації для великих амплітуд зовнішньої сили ($F_m^2 > 8/27$). Для цього слід знайти точки перетину резонансної відповідної кривої (крива 5 на рис.1.12.2а) з межею стійкості $I=1/2$ (див. першу з умов (1.12.15)). Підставляючи це значення до (1.12.7), дістанемо:

$$\xi = \pm \sqrt{2 \left(F_m^2 - \frac{1}{8} \right)}, \quad \Xi = \sqrt{8F_m^2 - 1}. \quad (1.12.18)$$

Як впливає з порівняння рис.1.12.2а та рис.1.12.2в, у даному випадку вихід за межі смуги вимушеної синхронізації означає перетворення стаціонарної точки на «фазовій площині» (a, b) із стійкого фокусу на нестійкий, який виявляється оточеним стійким граничним циклом. Іншими словами, має місце біфуркація Андронова - Хопфа, що відповідає самозбудженню автогенератора. Цей процес детально досліджувався у п.1.11. Граничний цикл народжується з нульовим розміром, тому амплітуда биття між автоколиваннями та коливаннями на частоті зовнішньої сили зростає від нуля (рис.1.12.6а). З іншого боку, фокус (як стійкий, так і нестійкий) характеризується певною власною частотою, тому й граничному циклу в момент його

народження притаманна певна частота, рівна частоті биттів, що виникають. Таким чином, частота биття в даному випадку при виході із смуги вимушеної синхронізації зростає стрибком (рис.1.12.6б).

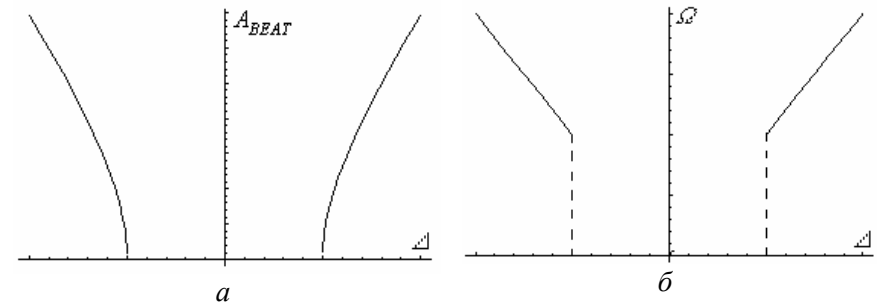


Рис.1.12.6. Залежності амплітуди (а) та частоти(б) биття між автоколиваннями та коливаннями на частоті зовнішньої сили від розстроювання при виході за межі смуги синхронізації для великих амплітуд зовнішньої сили.

1.12.7. Вимушена синхронізація половинною та подвійною частотою.

Вимушена синхронізація можлива також при $p \approx \omega/2$ та $p \approx 2\omega_0$, якщо в моделі наявна квадратична нелінійність. У першому випадку ця нелінійність породжує другу гармоніку, що є резонансною для автогенератора. В другому випадку резонансною є різницева частота між автоколиваннями та коливаннями на частоті зовнішньої сили, що також виникає на квадратичній нелінійності.

Контрольні питання до розділу 1.12.

1.12.1. Опишіть схему дослідження стійкості резонансних кривих у задачі про вимушену синхронізацію автогенератора.

1.12.2. Який зміст понять малої та великої амплітуд зовнішньої сили в задачі про вимушену синхронізацію автогенератора?

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

1.12.3. Намалюйте і поясніть графіки залежності амплітуди та частоти биттів у автогенераторі від розстроювання для проміжних значень амплітуди зовнішньої сили.

1.12.4. Якісно поясніть особливості ефекту вимушеної синхронізації для великих амплітуд зовнішньої сили.

1.12.5. Намалюйте епюри коливач у контурі автогенератора при виході з режиму вимушеної синхронізації для випадків малої та великої зовнішньої сили.

1.12.6. За яких умов можлива вимушена синхронізація автогенератора на половинній частоті автоколивач? Описати її механізм.

Задачі до розділу 1.12.

1.12.1. Одержати рівняння для повільних амплітуд вимушених коливач у автогенераторі, що описується неоднорідним рівнянням Релея.

1.12.2. Використовуючи результати попередньої задачі, побудувати сім'ю резонансних кривих для вимушених коливач автогенератора, що описується неоднорідним рівнянням Релея.

1.12.3. Використовуючи результати попередніх задач, визначити, в яких областях параметрів (I, ξ) чисто вимушені коливач генератора, що описується неоднорідним рівнянням Релея, будуть стійкими. Виділити на площині (I, ξ) області з різним характером стійкості (нестійкості).

1.12.4. Показати, що в автогенераторі з контуром у стоковому колі точки резонансних кривих

$$I(1-I)^2 + \xi^2 I = F_m^2$$

з вертикальними дотичними належать еліпсові

$$(1-I)(1-3I) + \xi^2 = 0.$$

1.12.5. Показати, що при $F_m^2 > 8/27$ резонансні криві

$$I(1-I)^2 + \xi^2 I = F_m^2,$$

що описують вимушену синхронізацію автогенератора з контуром у стоковому колі, стають однозначними і зникають точки перетину

резонансних кривих з еліпсом

$$(1-I)(1-3I) + \xi^2 = 0.$$

Що можна сказати про амплітуду биття між автоколивачами і вимушеними коливачами у генераторі біля краю смуги вимушеної синхронізації в цьому режимі?

1.12.6. Знайти частоту биття між автоколивачами і вимушеними коливачами в автогенераторі з контуром у стоковому колі біля краю смуги вимушеної синхронізації для великих амплітуд зовнішньої сили, $F_m^2 > 8/27$.

Вказівка: амплітуду автоколивач при цьому можна вважати малою.

1.12.7*. Вимушені коливач автогенератора описуються рівнянням:

$$\ddot{x} - (\alpha + \beta x - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \sin pt; \quad p/2 \approx \omega_0.$$

Отримати вкорочені рівняння для повільних амплітуд коливач на частотах p та $2p$.

а) Для випадку $\alpha > 0$ (режим вимушеної синхронізації при великих амплітудах зовнішньої сили) знайти стаціонарні значення інтенсивності коливач в режимі точного резонансу і дослідити їхню стійкість. Побудувати графіки залежності інтенсивності коливач від амплітуди прикладеної сили (в режимі точного резонансу) та від розстроювання.

б) Для випадку $\alpha < 0$ (так званий режим резонансу II роду) побудувати графіки залежності інтенсивності вимушених коливач від амплітуди прикладеної сили (в режимі точного резонансу) та від розстроювання.

1.12.8*. Розв'язати задачу

а) 1.12.7а;

б) 1.12.7б

для випадку автогенератора, що описується рівнянням

$$\ddot{x} - (\alpha + \beta \dot{x} - \gamma \dot{x}^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \sin pt.$$

1.12.9*. Розв'язати задачу

а) 1.12.7а;

б) 1.12.7б;

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.
1.12. Коливання автогенератора під дією зовнішньої сили.

в) 1.12.8а

г) 1.12.8б

для випадку $2p \approx \omega_0$.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

При аналізі руху нелінійного консервативного осцилятора під дією зовнішньої сили (розділ 1.9) ми бачили, що за певних умов поведінка досить простої нелінійної системи може стати непередбачуваною. Розглянемо тепер цей ефект більш детально спочатку в загальному вигляді, а потім на прикладі однієї з найпростіших автономних систем, здатних демонструвати непередбачувану поведінку - так званого генератора шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

1.13.1. Непередбачувана поведінка простих систем.

Про стохастичну динаміку в фізиці звичайно говорять тоді, коли розглядаються системи, складені з великої кількості елементів. Наприклад, при аналізі руху газу або рідини немає можливості записати і розв'язати набір рівнянь руху для кожної частинки через велику кількість останніх. Тому вводять деякі середні величини (тиск, температуру, швидкість спрямованого руху та ін.), якими характеризують систему як ціле. Непередбачувані відхилення величин (наприклад, тиску) від їхніх середніх значень - флуктуації - пояснюються тим, що при такому описі мікроскопічні ефекти не враховуються.

Коли ж ідеться про порівняно прості системи з невеликим числом ступенів вільності, то прийнято було вважати, що поведінка таких систем (принаймні, за межами квантової механіки, де всі процеси мають принципово ймовірнісний характер) є цілком передбачуваною.

Насправді останнє міркування є справедливим лише для стійких систем, у яких сусідні точки фазового простору з часом не розбігаються (див. розділ 1.11). Коли ж система є нестійкою, ситуація змінюється. Справді, початкові умови завжди відомі нам з певною скінченною точністю. Поведінку системи можна вважати передбачуваною лише тоді, коли початкова невизначеність з часом не зростає. Але для нестійких систем (наприклад, лінійний осцилятор з від'ємним квадратом частоти або з від'ємною дисипацією,

рис.1.13.1) ця умова порушується. В результаті невизначеність з часом зростає і може стати як завгодно великою.

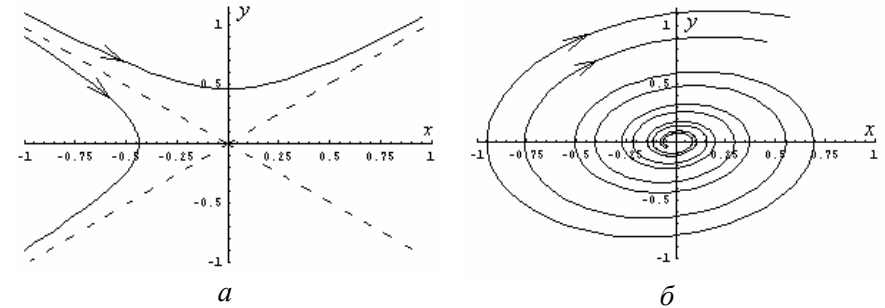


Рис.1.13.1. Розбігання сусідніх зображувальних точок: а - лінійний осцилятор з від'ємним квадратом частоти, первісно точки знаходилися по різні боки від сепаратриси; б - лінійний осцилятор з від'ємною дисипацією.

Зазначимо, що причиною розбігання зображувальних точок для маятника з від'ємним квадратом частоти (рис.1.13.1а) є розташування цих точок у початковий момент часу по різні боки від сепаратриси, а для маятника з від'ємною дисипацією (рис.1.13.1б) - обумовлене від'ємною дисипацією зростання амплітуди коливань з часом.

Але в обох щойно розглянутих моделях рух системи є інфінітним, що, очевидно, не відповідає реальним ситуаціям.

Для того, щоб можна було говорити про стохастичну поведінку системи і описувати її в термінах теорії ймовірності, треба, щоб вона характеризувалася деякими середніми величинами, а для цього її рух має бути фінітним. Поєднання нестійкості із фінітністю руху (або, що те саме, обмеженістю області фазового простору, в якій відбувається еволюція системи) і приводить до непередбачуваної поведінки.

Оскільки фазові траєкторії не можуть перетинатися, на фазовій площині (тобто для системи з одним ступенем вільності) поєднання нестійкості і обмеженості руху виявляється неможливим. Для

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

цього необхідний принаймні тривимірний фазовий простір, тобто система щонайменше з півтора ступенями вільності.

Приклад такої системи ми вже розглядали - це коливання консервативного математичного маятника в околі сепаратриси під дією малої зовнішньої сили (див. розділ 1.10)¹. Як уже відзначалося, причиною виникнення непередбачуваності в цій системі є наявність сідлової точки, яка забезпечує нестійкість, а зовнішня сила може «перекидати» зображувальну точку по різні боки від сепаратриси.

1.13.2. Генератор шуму КПП: схема та рівняння руху.

Однією з порівняно простих систем, які здатні демонструвати хаотичну поведінку і дозволяють вивчати багато які її властивості, є так званий генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича (генератор КПП). Його схему наведено на рис.1.13.2а. Вона нагадує схему звичайного генератора Ван дер Поля з контуром у колі сітки, але в цей контур додатково увімкнений тунельний діод з N -подібною вольт-амперною характеристикою $I_D(V)$ (рис.1.13.2б). Остання має дві зростаючі ділянки - A та B , розділені спадною ділянкою (стати, що їй відповідають, є нестійкими і не реалізуються). Омичний опір діода на ділянці A (в області від'ємних та малих додатних напруг), а також при великих додатних напругах на ділянці B можна вважати невеликим, на початку ж ділянки B він значно зростає.

Крім тунельного діода, в схемі є ще один нелінійний елемент - лампа² з анодно-сітковою характеристикою, яку ми, як і раніше, апроксимуватимемо кубічним поліномом (1.11.1)

$$I_A = SU - \frac{SU^3}{3K^2}.$$

¹ Формально рух такої системи буде відбуватися в обмеженій області фазового простору, якщо вісь t (рис.1.10.4) замкнута в кільце, довжина якого дорівнює, наприклад, періоду зовнішньої сили.

² Замість лампи може бути використаний польовий транзистор.

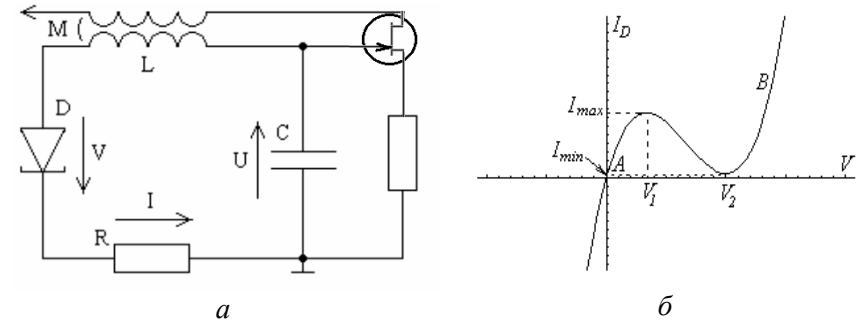


Рис.1.13.2: а - схема генератора КПП; б - вольт-амперна характеристика тунельного діода

Складемо систему диференціальних рівнянь, що описує роботу генератора. Позначивши через I струм у коливному контурі, а через U та V - падіння напруги відповідно на конденсаторі та на тунельному діоді (рис.1.13.2а), можна записати другий закон Кірхгофа для контуру (з урахуванням взаємної індукції M та апроксимації (1.11.1)) у формі

$$L \frac{dI}{dt} + RI - M \frac{d}{dt} \left(SU - \frac{SU^3}{3K^2} \right) + U + V = 0 \quad (1.13.1)$$

(пор. з виведенням рівняння Релея (1.11.7)).

Диференціюючи рівняння, що пов'язує між собою заряд конденсатора та напругу на ньому, дістанемо:

$$C \frac{dU}{dt} = I. \quad (1.13.2)$$

Врахуємо, що p - n перехід тунельного діода має деяку ємність C_1 , яку ми вважатимемо малою ($\varepsilon \equiv C_1/C \ll 1$). Тому повний струм через цей діод складатиметься із струму провідності $I_D(V)$ та струму зміщення $C_1 dV/dt$:

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

$$I = I_D(V) + C_1 \frac{dV}{dt}. \quad (1.13.3)$$

Виключимо з (1.13.1) похідну dU/dt за допомогою (1.13.2) і перейдемо до безрозмірних змінних:

$$\tau = \omega_0 t, \quad u = \frac{U}{V_1}, \quad v = \frac{V}{V_1}, \quad i = \frac{\rho I}{V_1}, \quad (1.13.4)$$

де $\omega_0^2 = 1/LC$, $\rho^2 = L/C$. Тоді рівняння (1.13.1)-(1.13.3) можна переписати у вигляді

$$\frac{di}{d\tau} = i \left[\alpha - \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 \right] - v - u; \quad \frac{du}{d\tau} = i; \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = i - i_D(v), \quad (1.13.5)$$

де введено позначення

$$\alpha = \frac{R}{\rho} \left(\frac{MS}{RC} - 1 \right), \quad u_\infty^2 = \frac{K^2}{\omega_0 MS V_1^2}, \quad i_D(v) = \frac{\rho I_D(V_1 v)}{V_1}. \quad (1.13.6)$$

1.13.3. Якісний аналіз рівнянь руху в режимах регулярних коливань.

Нехай тунельний діод відсутній (або його опором можна знехтувати). Тоді, поклавши $v=0$ у першому з рівнянь (1.13.5) і відкинувши останнє, легко отримати систему, що зводиться до рівняння

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \frac{du}{d\tau} \left[\alpha - \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 \right] + u = 0, \quad (1.13.7)$$

тобто до рівняння Ван дер Поля (1.11.8).

При $\alpha < 0$ (коли амплітудну умову самозбудження не виконано) коливання згасатимуть.

За виконання умови $I \gg \alpha > 0$ амплітуда майже гармонічних коливань, що встановляться в системі, буде рівна

$$u_m = u_\infty \sqrt{\alpha}. \quad (1.13.8)$$

Отриманий результат якісно відповідатиме реальній поведінці генератора КПП, якщо ця амплітуда лежатиме на ділянці А вольтамперної характеристики тунельного діода, тобто при

$$u_m < \frac{\rho I_{\max}}{V_1}. \quad (1.13.9)$$

При достатньо великих α , коли буде виконано нерівність

$$u_m \gg \frac{\rho I_{\max}}{V_1}, \quad (1.13.10)$$

немонотонність характеристики тунельного діода стане малопомітною в масштабі u_m , а його омичний опір знову зменшиться. Тому в схемі встановляться періодичні автоколивання релаксаційного типу (див. п.1.11.8). Цей результат підтверджується числовим моделюванням.

За виконання умови

$$u_m \geq \frac{\rho I_{\max}}{V_1} \quad (1.13.11)$$

немонотонність вольтамперної характеристики діода стає принциповою, і для аналізу поведінки генератора КПП слід користуватися повною системою рівнянь (1.13.5).

1.13.4. Фазовий портрет стохастичних коливань.

Система (1.13.5) містить три диференціальних рівняння першого порядку з незалежними від часу правими частинами і, отже, описує систему з півтора ступенями вільності. Вона містить малий параметр ε при похідній в одному з рівнянь, отже, її розв'язок можна будувати шляхом виділення ділянок швидкого та повільного руху (див. п.1.11.8).

Поклавши в останньому з рівнянь (1.13.5) $\varepsilon=0$, отримаємо, що траєкторії повільного руху лежать на поверхні $i=i_D(v)$ (рис.1.13.3а). Ділянка А цієї поверхні відповідає першій зростаючій ділянці (А) характеристики тунельного діода (рис.1.13.2б), а ділянка В - іншій

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

зростаючій ділянці характеристики (B).

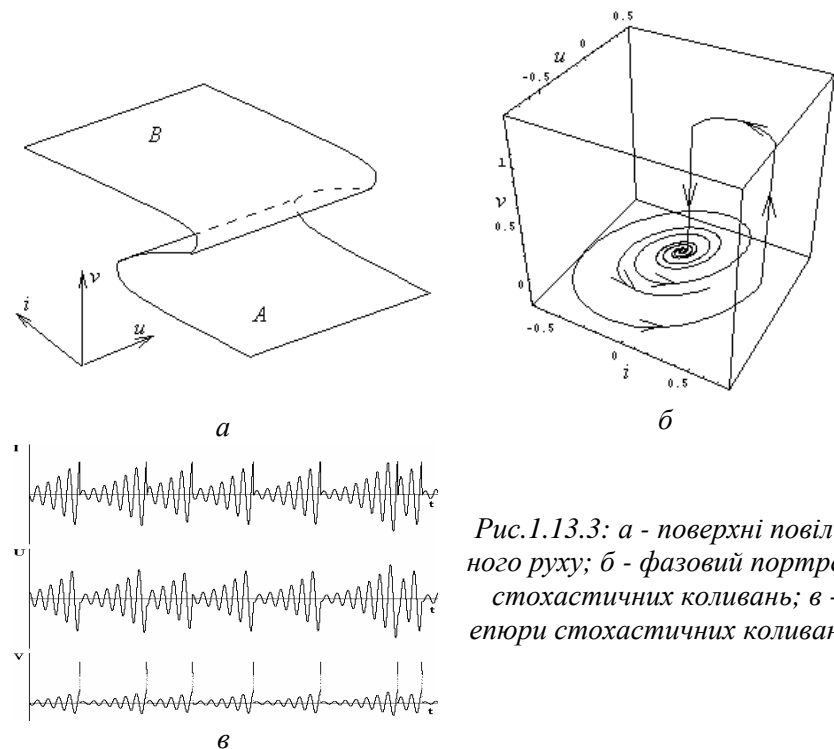


Рис.1.13.3: а - поверхні повільного руху; б - фазовий портрет стохастичних коливань; в - епюри стохастичних коливань.

Траєкторії швидкого руху - це прямі, паралельні до осі v . Справді, поділивши третє рівняння (1.13.5) на перше та на друге, отримаємо відповідно, що за межами поверхні повільного руху

$$\frac{dv}{di} \sim \frac{dv}{du} \sim \frac{1}{\varepsilon},$$

тобто ці похідні прямують до нескінченності при $\varepsilon \rightarrow 0$.

За виконання умови (1.13.11), коли робоча точка знаходиться на ділянці A вольтамперної характеристики діода (рис.1.13.2б), а з-

ображувальна точка - відповідно на поверхні A повільного руху (рис.1.13.3а), в автогенераторі виконано амплітудну умову самозбудження, і фазова траєкторія на поверхні A являє собою спіраль, що розкручується. В силу умови (1.13.11) нелінійність лампи на межі поверхні A ще не обмежує зростання коливань. Тому, коли зображувальна точка потрапляє на край поверхні A , вона опиняється на траєкторії швидкого руху і перестрибує на ділянку B поверхні повільного руху (яка відповідає ділянці B характеристики діода). При цьому омичний опір тунельного діода різко зростає, амплітудна умова генерації порушується, і в контурі починається згасання коливань в аперіодичному режимі. В результаті зображувальна точка рухається по поверхні B у напрямку до початку координат. Коли вона доходить до краю поверхні B , вона знову опиняється на траєкторії швидкого руху і перестрибує на ділянку A . Слід краю поверхні B на поверхні A , куди потрапить зображувальна точка, являє собою деякий відрізок, що містить континуум точок. Тому ймовірність того, що зображувальна точка може потрапити на свою попередню фазову траєкторію, дорівнює нулеві. В результаті фазова траєкторія виявляється незамкненою. Це означає, що коливання в контурі починають зростати з деякою іншою початковою амплітудою та фазою, і цикл коливань до наступного стрибка не буде повторювати попередній.

Фазовий портрет, що відповідає описаному режиму, поданий на рис.1.13.3б, епюри коливань - на рис.1.13.3в. Видно, що величини i та u змінюються з часом неперервно, а величина v зазнає стрибків, що узгоджується з фазовим портретом.

Зрозуміло, що фазова траєкторія на ділянці зростання коливань (на поверхні A) є нестійкою, чим і обумовлена чутливість поведінки системи до малої зміни початкових умов. Тому динаміка системи на проміжках часу порядку тривалості кількох пачок коливань буде непередбачуваною.

Описаний режим стохастичних коливань генератора КПП спостерігався в лабораторному експерименті.

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

1.13.5. Біфуркації генератора КІР при зміні керуючого параметру.

На рис.1.13.4а-г показано зміни фазового портрета системи (1.13.5) при зміні параметра α . В експерименті цей параметр можна змінювати, наприклад, шляхом зміни взаємної індуктивності M колушок, що забезпечують позитивний зворотний зв'язок.

Як уже вказувалося, при малих α коливання в генераторі будуть згасати (рис.1.13.4а). При цьому початок відліку (на поверхні повільного руху A) являтиме собою стійкий фокус.

При поступовому зростанні α в системі відбудеться біфуркація Андронова - Хопфа, і на місці стійкого фокуса виникне нестійкий фокус, оточений стійким граничним циклом (рис.1.13.4б).

При виконанні умови (1.13.11) граничний цикл, фігурально вивислюючись, вже не вміщуватиметься на поверхні A повільного руху, і зображувальна точка почне перестрибувати на поверхню B . В результаті коливання, як уже відзначалося, стануть хаотичними (рис.1.13.4в).

Нарешті, при дуже великих значеннях α , коли уявні розміри граничного циклу на поверхні A стануть значно більшими за розміри ділянки немонотонності вольтамперної характеристики діода, стохастичний режим зникне, і система стрибком перейде в режим регулярних релаксаційних коливань. Фазовий портрет системи для цього випадку поданий на рис.1.13.4г, епюри коливань - на рис.1.13.4д.

Таким чином, режим хаотичних коливань існує в обмеженій області параметрів генератора КІР. Це типово для стохастичної поведінки динамічних систем.

На закінчення слід вказати, що генератори шуму знаходять застосування в різних областях радіоелектроніки. Розробка генераторів шуму із заданими властивостями - одна з цікавих областей сучасної радіофізики.

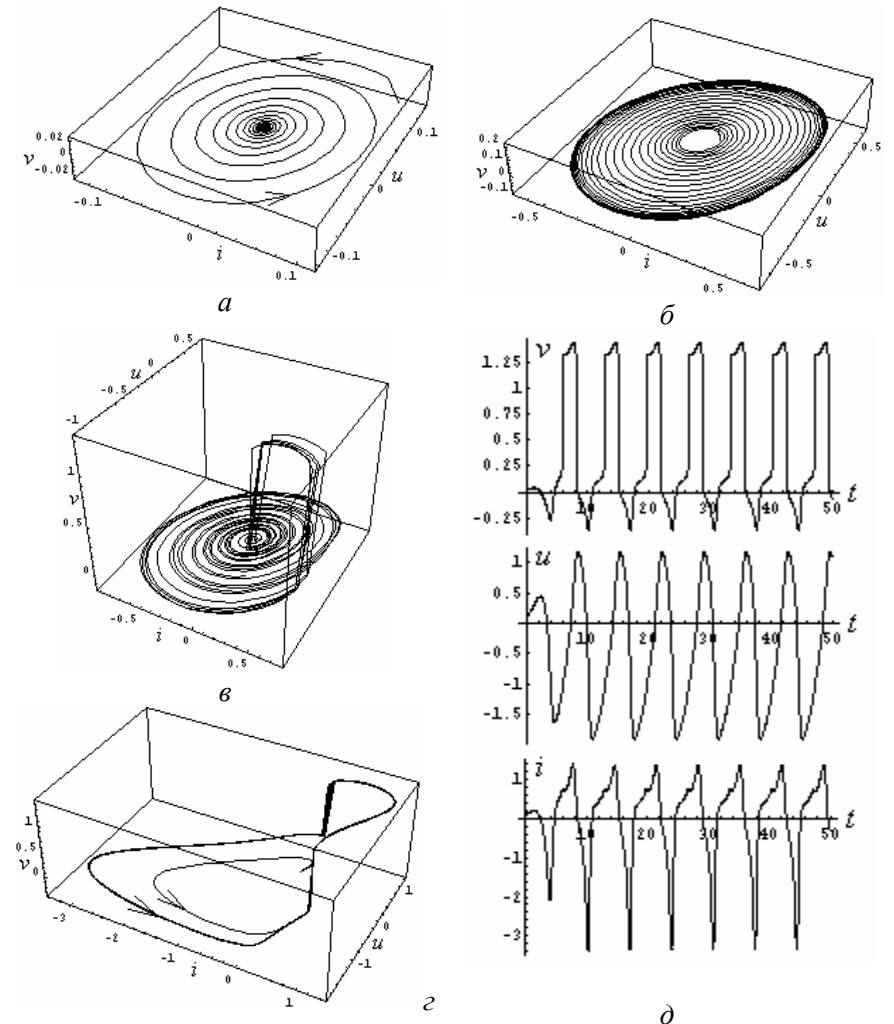


Рис.1.13.4. Фазові портрети генератора КІР в режимах згасаючих (а), квазігармонічних (б), стохастичних (в) і релаксаційних (г) коливань та епюри релаксаційних коливань (д).

Частина I. Коливні системи з одним ступенем вільності.

1.13. Стохастичний режим динамічної системи: генератор шуму Кияшка - Піковського - Рабиновича.

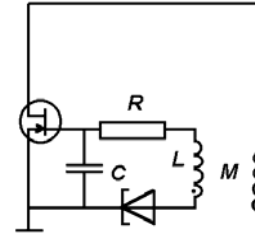
Контрольні питання до розділу 1.13.

- 1.13.1. Чому поведінка системи з невеликою кількістю ступенів вільності може стати непередбачуваною?
- 1.13.2. Яка мінімальна кількість ступенів вільності потрібна для того, щоб поведінка системи могла стати стохастичною? Відповідь обґрунтувати.
- 1.13.3. Чи може лінійна система демонструвати непередбачувану поведінку? Відповідь обґрунтувати.
- 1.13.4. Чому фазові траєкторії генератора шуму КПП виявляються незамкненими?
- 1.13.5. Як змінюватиметься спектр коливань генератора шуму КПП при зростанні взаємної індуктивності котушок?
- 1.13.6. Чи можна пояснити непередбачувану поведінку генератора шуму КПП без урахування ємності тунельного діода? Відповідь обґрунтувати.
- 1.13.7. Як виглядав би фазовий портрет генератора шуму КПП без урахування ємності тунельного діода?
- 1.13.8. Поясніть якісно, чому при дуже великих інкрементах генератор шуму КПП переходить у режим релаксаційних коливань.
- 1.13.9. Чи можливий у моделі Дюфінга режим стохастичних коливань? Відповідь обґрунтувати.
- 1.13.10. Чи можлива в принципі хаотична динаміка в автогенераторі під дією зовнішньої періодичної сили? Відповідь обґрунтувати.

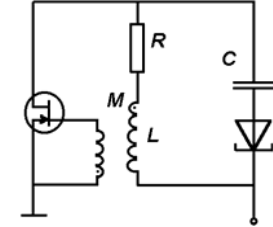
Задачі до розділу 1.13.

- 1.13.1. Якою повинна бути мінімальна величина взаємної індуктивності котушок у автогенераторі з тунельним діодом

а) у затворному контурі;



б) у стоковому контурі,



необхідна для розвитку стохастичної нестійкості в системі? Відповідь дати на основі аналізу рівнянь руху, записаних з урахуванням нелінійності польового транзистора.

1.13.2. Яким повинен бути омичний опір тунельного діода на ділянках A та B вольтамперної характеристики тунельного діода

а) у затворному контурі;

б) у стоковому контурі

автогенератора, щоб останній генерував квазістохастичні коливання?

1.13.3. Оцінити мінімальну та максимальну амплітуди коливань напруги на конденсаторі в автогенераторі з тунельним діодом

а) у затворному контурі;

б) у стоковому контурі

для випадку, коли опір тунельного діода на ділянці B вольтамперної характеристики забезпечує аперіодичне згасання коливань у контурі.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в лінійних системах із багатьма ступенями вільності.

У системах з багатьма ступенями вільності (визначення кількості ступенів вільності див. у п.В2), на відміну від систем з одним та півтора ступенями вільності, які розглядалися в частині I, з'являються принципово нові ефекти, пов'язані з обміном енергією між ступенями вільності. Для появи цих ефектів потрібно щонайменше два ступеня вільності. Подальше зростання числа ступенів вільності нічого якісно нового не дає. Тому в цьому розділі розглядатимуться, як правило, саме системи з двома ступенями вільності.

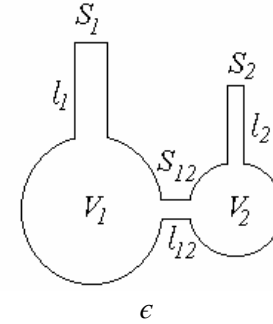
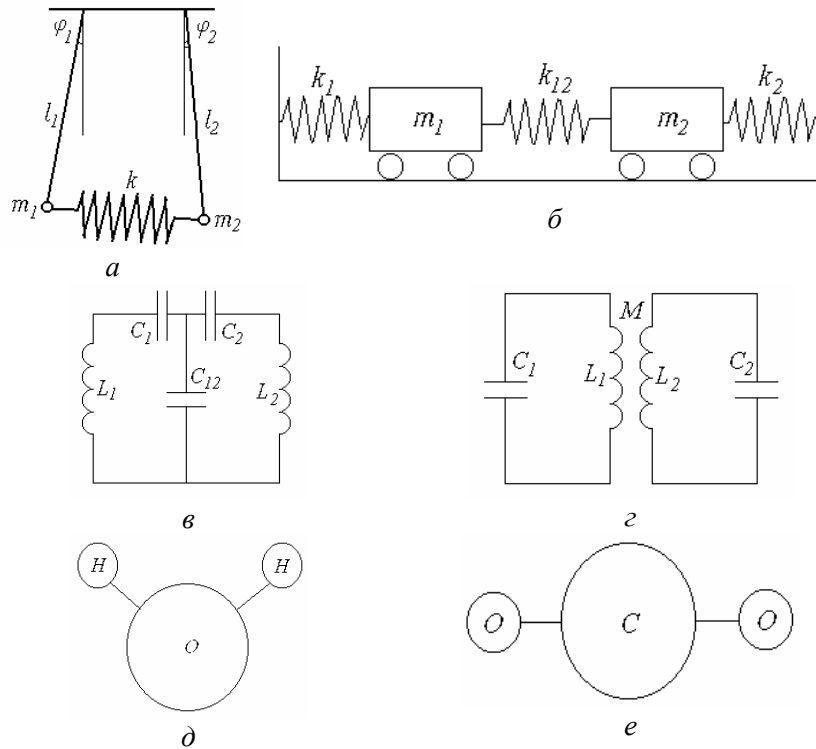


Рис.2.1.1. Приклади систем із багатьма ступенями вільності: а, б - зв'язані маятники, в, г - коливні контури з ємнісним та індуктивним зв'язком, д, е - триатомні молекули H_2O та CO_2 , є - зв'язані акустичні резонатори.

2.1.1. Приклади систем із багатьма ступенями вільності.

Прикладами систем з багатьма ступенями вільності можуть служити зв'язані фізичні або пружинні маятники (рис.2.1.1а-б), зв'язані коливні контури (рис.2.1.1в-г), двоатомні молекули (рис.2.1.1д-е), зв'язані акустичні резонатори (рис.2.1е) та ін.

2.1.2. Рівняння руху для зв'язаних лінійних консервативних осциляторів.

Найбільш загальним методом аналізу руху консервативних систем (як лінійних, так і нелінійних) з багатьма ступенями вільності є метод рівнянь Лагранжа. Як відомо¹, ці рівняння мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.1.1)$$

де $L=T-U$ - функція Лагранжа, U та T - відповідно потенціальна та кінетична енергія системи. Для лінійних систем з s ступенями вільності потенціальна та кінетична енергія записуються як квадратичні форми узагальнених координат q_i та їхніх похідних за часом:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij} q_i q_j, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.1.2)$$

Оскільки в рівняння руху входять лише суми коефіцієнтів вигляду $a_{ij}+a_{ji}$ та $b_{ij}+b_{ji}$, вважатимемо надалі, що

¹ Див., наприклад: Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М., Физматгиз, 1958. С.10-21.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (2.1.3)$$

Для системи з двома ступенями вільності

$$U = \frac{1}{2} a_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} q_2^2 + a_{12} q_1 q_2, \\ T = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{q}_2^2 + b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (2.1.4)$$

їх рівняння руху набувають вигляду:

$$\begin{cases} b_{11} \ddot{q}_1 + b_{12} \ddot{q}_2 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = 0; \\ b_{12} \ddot{q}_1 + b_{22} \ddot{q}_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Перепишемо систему (2.1.5) у формі

$$\begin{cases} b_{11} \ddot{q}_1 + a_{11} q_1 = -b_{12} \ddot{q}_2 - a_{12} q_2; \\ b_{22} \ddot{q}_2 + a_{22} q_2 = -b_{12} \ddot{q}_1 - a_{21} q_1. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Ліві частини рівнянь (2.1.6) - це рівняння лінійних консервативних (парціальних) осциляторів. У правих частинах стоять сили, що обумовлені наявністю зв'язку між осциляторами. Доданки з коефіцієнтами a_{12} описують *силовий*, або *ємнісний зв'язок*, доданки з коефіцієнтами b_{12} - відповідно *інерційний*, або *індуктивний зв'язок*.

Якщо впливом першого осцилятора на другий з якоїсь причини можна знехтувати, а вплив другого осцилятора на перший, навпаки, є істотним, то силу в правій частині першого з рівнянь (2.1.6) можна вважати заданою, і ми приходимо до рівняння типу (1.2.1) - рівняння руху осцилятора під дією заданої зовнішньої сили.

2.1.3. Характеристичне рівняння, власні частоти та коефіцієнти розподілу амплітуд.

Система (2.1.5) є системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, тому її розв'язок можна шукати в експоненціальному вигляді:

$$q_1(t) = A \exp(i\omega t), \quad q_2(t) = B \exp(i\omega t). \quad (2.1.7)$$

Підстановка (2.1.7) перетворює систему (2.1.5) на систему двох лі-

нійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд A та B :

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2 b_{11})A + (a_{12} - \omega^2 b_{12})B = 0; \\ (a_{12} - \omega^2 b_{12})A + (a_{22} - \omega^2 b_{22})B = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Ця система має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулеві, тобто при

$$(a_{11} - \omega^2 b_{11})(a_{22} - \omega^2 b_{22}) - (a_{12} - \omega^2 b_{12})^2 = 0. \quad (2.1.9)$$

Рівняння (2.1.9) називається *характеристичним*, або *секулярним (віковим)²* рівнянням. Розв'язуючи його, можна знайти власні частоти досліджуваної системи.

Введемо позначення:

$$\omega_{01}^2 = \frac{a_{11}}{b_{11}}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{a_{22}}{b_{22}}. \quad (2.1.10)$$

парціальні частоти коливань, тобто частоти коливань змінної q_1 (q_2) при $q_2=0$ ($q_1=0$);

$$k_a^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}, \quad k_b^2 = \frac{b_{12}^2}{b_{11}b_{22}}. \quad (2.1.11)$$

відповідно «силовий» та «інерційний» коефіцієнти зв'язку. Тоді характеристичне рівняння (2.1.9) може бути подане у вигляді

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - (k_a \omega_{01} \omega_{02} - \omega^2 k_b)^2 = 0. \quad (2.1.12)$$

З нього, як уже вказувалося, можна знайти власні частоти (частоти власних коливань) системи³:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2k_a k_b \omega_{01} \omega_{02} \pm \sqrt{D}}{2(1 - k_b^2)}, \quad (2.1.13)$$

² Термін запозичений з небесної механіки.

³ Система з n ступенями вільності в загальному випадку має n власних частот.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

$$D = (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\omega_{01}^2\omega_{02}^2(k_a - k_b)^2 - 4k_a k_b \omega_{01}\omega_{02}(\omega_{01} - \omega_{02})^2.$$

Підстановка частот (2.1.13) до системи (2.1.8) робить її рівняння (з урахуванням умови (2.1.9)) лінійно залежними. Залишаючи лише одне з рівнянь, можна знайти співвідношення між амплітудами A та B для кожної з власних частот - так звані *коефіцієнти розподілу амплітуд*⁴:

$$\kappa_{1,2} \equiv \frac{B}{A} \Big|_{\omega=\omega_{1,2}} = -\frac{a_{11} - \omega_{1,2}^2 b_{11}}{a_{12} - \omega_{1,2}^2 b_{12}} = -\frac{a_{12} - \omega_{1,2}^2 b_{12}}{a_{22} - \omega_{1,2}^2 b_{22}}. \quad (2.1.14)$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.1.5) може бути поданий у вигляді:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_1 t) + \\ &+ A_3 \exp(i\omega_2 t) + A_4 \exp(-i\omega_2 t); \quad (2.1.15) \\ q_2(t) &= \kappa_1 [A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(-i\omega_1 t)] + \\ &+ \kappa_2 [A_3 \exp(i\omega_2 t) + A_4 \exp(-i\omega_2 t)]. \end{aligned}$$

2.1.4. Обмін енергією між ступенями вільності.

Коефіцієнти A_i в розв'язку (2.1.15) знаходяться з початкових умов. Візьмо для прикладу такі початкові умови: при $t=0$

$$q_1(t) = A_0, \quad \dot{q}_1(t) = 0, \quad q_2(t) = 0, \quad \dot{q}_2(t) = 0 \quad (2.1.16)$$

(у початковий момент часу обидва осцилятори нерухомі, перший із них відхилений, а другий перебуває в положенні рівноваги). Підставляючи (2.1.15) до (2.1.16), отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд A_i . Її розв'язання дає:

$$A_1 = A_2 = -\frac{\kappa_2 A_0}{2(\kappa_1 - \kappa_2)}; \quad A_3 = A_4 = \frac{\kappa_1 A_0}{2(\kappa_1 - \kappa_2)}. \quad (2.1.17)$$

Підставивши (2.1.17) до (2.1.15), отримуємо:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= -\frac{\kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_1 t + \frac{\kappa_1 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_2 t = \\ &= \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \omega_2 t + \frac{2\kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t; \\ q_2(t) &= -\frac{\kappa_1 \kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &= \frac{2\kappa_1 \kappa_2 A_0}{\kappa_1 - \kappa_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (2.1.18) \end{aligned}$$

Епюри коливань подані на рис.2.1.2. Видно, що коливання кожної із змінних являють собою биття з періодом $T=2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$, причому для двох змінних ці биття протифазні. Отже, між парціальними осциляторами має місце обмін енергією.

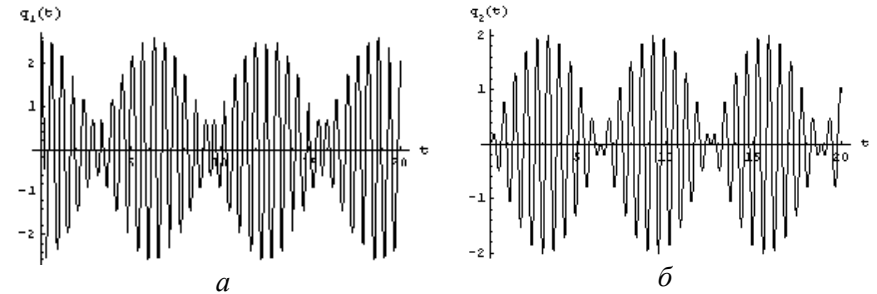


Рис.2.1.2. Епюри коливань у системі двох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів у випадку, коли в початковий момент часу вся енергія зосереджена в першому з них.

Справді, для обраних початкових умов у початковий момент часу вся енергія зосереджена в першому осциляторі. Його коливання, як уже зазначалося (п.2.1.2), виступають у ролі зовнішньої сили для другого осцилятора. Під дією цієї сили амплітуда коливань другого осцилятора починає зростати. Зрозуміло, що в силу консервативнос-

⁴ В системах з n ступенями вільності кожній власній частоті відповідає, очевидно набір з $n-1$ коефіцієнтів розподілу амплітуд.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

ті аналізованої системи зростання амплітуди коливань другого осцилятора призводить до зменшення амплітуди коливань першого осцилятора. Таким чином, в початкові моменти часу відбувається перекачування енергії від першого осцилятора до другого.

З часом сила, що діє з боку першого осцилятора на другий, стає протифазною до коливань, які збудилися в ньому в попередні моменти часу. З іншого боку, стає істотним зворотний вплив другого осцилятора на перший. В результаті починається перекачування енергії з другого осцилятора до першого. Потім процес періодично повторюється.

Розв'язок (2.1.18) отримано для конкретних початкових умов (2.1.16). Але обмін енергією між ступенями вільності матиме місце для майже будь-яких початкових умов.

2.1.5. Нормальні моди.

Повернемося до початкової системи рівнянь (2.1.5). Введемо нові координати u та v , що пов'язані зі старими координатами $q_{1,2}$ співвідношеннями

$$q_1 = u + v, \quad q_2 = \kappa_1 u + \kappa_2 v. \quad (2.1.19)$$

Підставивши (2.1.19) до (2.1.5), можна показати, що в нових координатах рівняння руху набувають вигляду

$$\ddot{u} + \omega_{01}^2 u = 0; \quad \ddot{v} + \omega_{02}^2 v = 0. \quad (2.1.20)$$

Іншими словами, в нових координатах маємо рівняння руху двох ізольованих лінійних консервативних осциляторів із власними частотами (2.1.13).

Коливання змінних u та v можна збуджувати незалежно.

Змінні u та v називають *нормальними координатами*, ω_{01} та ω_{02} іноді називають нормальними частотами. Коливання вигляду $u \neq 0$, $v = 0$ та $u = 0$, $v \neq 0$ називаються *нормальними коливаннями*, або *нормальними модами* системи. В «старих» координатах кожна з нормальних мод характеризується своєю частотою та коефіцієнтом розподілу амплітуд («формою» коливань).

Можна показати, що будь-які вільні коливання системи можна подати як суперпозицію її нормальних мод.

Поняття нормальних мод узагальнюється на системи з довільною кількістю ступенів вільності, а також на системи з розподіленими параметрами.

2.1.6. Розштовхування власних частот.

Нехай в аналізованій системі між осциляторами існує лише один тип зв'язку - наприклад, ємнісний. Тоді формула (2.1.13) для власних частот набуває вигляду:

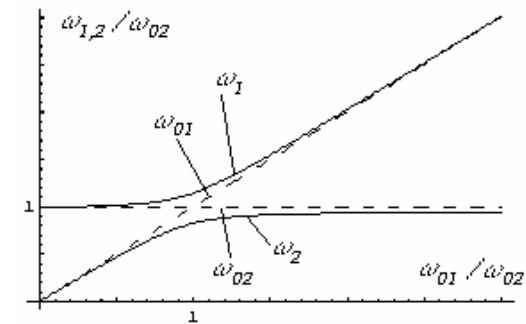
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 k_a^2}}{2}. \quad (2.1.21)$$

Зокрема, якщо осцилятори ідентичні, то $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, і отримаємо

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 (1 \pm k_a). \quad (2.1.22)$$

Інакше кажучи, навіть для ідентичних зв'язаних осциляторів власні частоти виявляються неоднаковими. Графік залежності власних частот аналізованої системи від відношення її парціальних частот - так званий *графік Віна* - поданий на рис.2.1.3. Штриховими лініями показані парціальні частоти.

Рис.2.1.3. Залежність нормованих власних частот системи двох консервативних осциляторів із ємнісним зв'язком від відношення парціальних частот.



Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

З графіка Віна видно, що віддаль між власними частотами завжди більша, ніж між парціальними. Цей ефект прийнято називати *розштовхуванням власних частот* внаслідок зв'язку між осциляторами. Відхилення власних частот від парціальних майже відсутнє, якщо парціальні частоти дуже відрізняються одна від одної, і досягає максимуму, коли парціальні частоти рівні між собою.

Причиною розштовхування частот є обмін енергією між осциляторами. Саме він приводить до того, що навіть у системі двох ідентичних осциляторів з'являються пульсації амплітуд коливань (рис.2.1.2), які можуть бути інтерпретовані як биття, тобто як наявність коливань з двома відмінними частотами. Биття (обмін енергією між ступенями вільності) і розштовхування частот - це, по суті, одне й те саме явище, охарактеризоване в першому випадку як часова залежність, а в другому - в термінах спектрального аналізу.

Для консервативної системи з двома ступенями вільності коефіцієнти розподілу амплітуд - чисто дійсні величини. Можна показати, що їхній добуток завжди від'ємний. Це означає, що одній із власних частот відповідають синфазні коливання координат $q_{1,2}$, а іншій - протифазні.

Розглянемо систему двох коливних контурів з ємнісним зв'язком (рис.2.1.1в). Будемо вважати, що вплив другого контуру на перший зводиться до зміни ефективного значення ємності зв'язку C_{12} . Якщо коливання в контурах синфазні, струми через ємність зв'язку будуть зустрічними. В результаті заряд на цій ємності зменшиться. Це відповідає ефективному зменшенню ємності зв'язку, а, отже, і повної ємності контуру, тобто збільшенню його власної частоти. Аналогічні міркування показують, що для протифазних коливань власна частота контуру зменшиться. Пряма підстановка (2.1.21) до (2.1.11) дає той самий результат - вищій власній частоті відповідає синфазна мода, нижчій - протифазна. Якщо контури ідентичні, то з урахуванням (2.1.22) дістанемо:

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1. \quad (2.1.23)$$

При $\omega_{01} = \omega_{02}$ як завгодно слабкий зв'язок між осциляторами при-

зводитиме до обміну енергією між ними (лише період цього обміну зростатиме). При $\omega_{01} \neq \omega_{02}$ слабкий зв'язок, навпаки, практично не впливатиме на поведінку системи. Тому ступінь взаємодії осциляторів, обумовлену зв'язком, характеризуватиме не просто коефіцієнт зв'язку, а так звана зв'язаність системи -

$$\rho = \frac{2k_{a,b}\omega_{01}\omega_{02}}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}, \quad (2.1.24)$$

що залежить не лише від величини зв'язку, але й від віддалі між парціальними частотами.

2.1.7. Вплив дисипації на вільні коливання лінійної системи з багатьма ступенями вільності.

Проаналізуємо тепер, як впливає дисипація на вільні коливання системи двох зв'язаних осциляторів. Розглянемо для прикладу систему двох коливних контурів з трансформаторним зв'язком (рис.2.1.1г), але вважатимемо контури дисипативними (з опорами R_1 та R_2). Тоді на основі другого закону Кірхгофа можна записати таку систему рівнянь:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = 0; \quad (2.1.25)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Шукатимемо розв'язок системи (2.1.25) у вигляді гармонічних коливань на частоті ω :

$$i_{1,2} = I_{1,2} \exp(i\omega t). \quad (2.1.26)$$

Підставляючи (2.1.26) до (2.1.25) і прирівнюючи до нуля визначник лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд $I_{1,2}$, можна отримати таке характеристичне рівняння щодо частоти вільних коливань ω :

$$(\omega^2 - i2\omega\delta_1 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - i2\omega\delta_2 - \omega_{02}^2) = k^2 \omega^4, \quad (2.1.27)$$

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

де використано позначення

$$\omega_{01,02} = \frac{1}{\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}}, \quad \delta_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{2L_{1,2}}, \quad k^2 = \frac{M^2}{L_1L_2}.$$

При $\delta_1 = \delta_2 = 0$ рівняння (2.1.27) стає бікватратним, а його корені - власні частоти системи - мають вигляд

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)}. \quad (2.1.28)$$

(пор. з формулою (2.1.13) при $k_b = 0, k_a \neq 0$). Залежності власних частот від коефіцієнту зв'язку подані на рис.2.1.4.

Коли ж $\delta_{1,2} \neq 0$, корені рівняння (2.1.27) стають комплексними. Зокрема, у випадку ідентичних контурів ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0, \delta_1 = \delta_2 = \delta$) можна отримати:

$$\omega_{1,2} = \frac{i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2(1-k) - \delta^2}}{1-k}; \quad \omega_{3,4} = \frac{i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2(1+k) - \delta^2}}{1+k}. \quad (2.1.29)$$

Як бачимо, власні частоти тепер мають уявні частини, що описують згасання коливань внаслідок дисипації. Модуль дійсної частини набуває двох можливих значень. Графіки залежностей дійсної та уявної частин власних частот для цього випадку подані на рис.2.1.5а.

У загальному випадку, коли контури не є ідентичними, наведена вище якісна характеристика власних частот зв'язаних контурів залишається справедливою. Відповідні графіки подані на рис.2.1.5б.

Для коефіцієнтів розподілу амплітуд у загальному випадку можна записати:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2,3,4} &\equiv \frac{I_2}{I_1} \Big|_{\omega_{1,2,3,4}} = \frac{L_1}{M} \frac{\omega_{01}^2 + i2\delta_1\omega_{1,2,3,4} - \omega_{1,2,3,4}^2}{\omega_{1,2,3,4}^2} = \\ &= \frac{M}{L_2} \frac{\omega_{1,2,3,4}^2}{\omega_{02}^2 + i2\delta_2\omega_{1,2,3,4} - \omega_{1,2,3,4}^2}. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Порівнюючи (2.1.30) із (2.1.14), можна бачити, що коефіцієнти роз-

поділу амплітуд, які в консервативній системі були чисто дійсними, в дисипативній системі стають комплексними. Це вказує на зсув фаз між коливаннями парціальних осциляторів, відмінний від 0 та π .

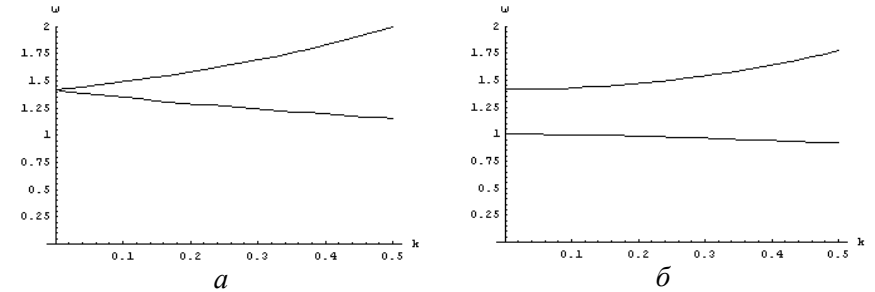


Рис.2.1.4. Залежність власних частот консервативних контурів із індуктивним зв'язком від коефіцієнту зв'язку: а - $\omega_{01} = \omega_{02}$; б - $\omega_{01} \neq \omega_{02}$.

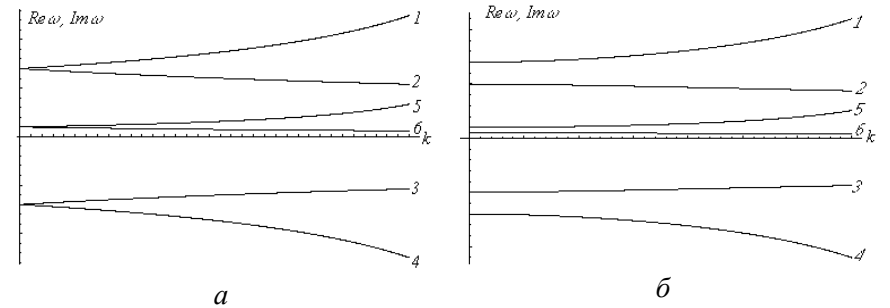


Рис.2.1.5. Залежність власних частот (криві 1-4 - $Re \omega_{1,4}$, 5 - $Im \omega_{1,2}$, б - $Im \omega_{3,4}$) слабкодисипативних контурів із індуктивним зв'язком від коефіцієнту зв'язку: а - $\omega_{01} = \omega_{02}$; б - $\omega_{01} \neq \omega_{02}$.

Контрольні питання до розділу 2.1.

2.1.1. Якісно пояснити ефект "розштовхування" частот для двох ідентичних осциляторів.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

2.1.2. Чи завжди в системі зв'язаних консервативних осциляторів матиме місце биття? Відповідь обґрунтувати.

2.1.3. Як співвідносяться частоти синфазної та протифазної мод у системі з двох ідентичних контурів з ємнісним зв'язком? Відповідь якісно обґрунтувати.

2.1.4. Чим відрізняються характеристичні рівняння для консервативних та дисипативних коливних систем з багатьма ступенями вільності?

2.1.5. Чим відрізнятимуться биття у системах із двох та з трьох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів?

2.1.6. Коли вільні коливання в системі з трьох зв'язаних осциляторів будуть строго періодичними?

2.1.7. Чи можливо, щоб у системі зв'язаних осциляторів при вільних коливаннях на одній із власних частот один з осциляторів залишався нерухомим?

2.1.8. Скільки коефіцієнтів розподілу амплітуд потрібно для характеристики вільних коливань системи з n ($n > 2$) ступенями вільності?

2.1.9. Якісно зобразити епюри коливань у системі з двох зв'язаних слабкодисипативних осциляторів.

2.1.10. Якісно зобразити епюри коливань у системі з двох зв'язаних осциляторів із сильною дисипацією.

Задачі до розділу 2.1.

2.1.1. Показати, що при $k_b < 1$ взаємодія між двома лінійними консервативними осциляторами призводить до розштовхування їхніх власних частот.

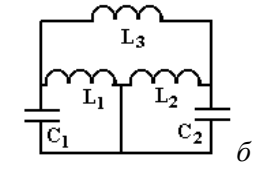
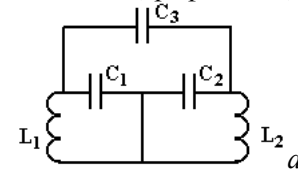
2.1.2. Показати, що рівняння для вільних коливань двох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів у змінних x, y заміною $x = u + v, y = \kappa_1 u + \kappa_2 v$, де $\kappa_{1,2}$ - коефіцієнти розподілу амплітуд для нормальних частот $\omega_{1,2}$, зводяться до двох незалежних рівнянь для осциляторів із власними частотами $\omega_{1,2}$.

2.1.3. Побудувати залежність власних частот двох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів від відношення їхніх парціальних частот (графік Віна):

а) для двох контурів з індуктивним зв'язком;

б) для загального випадку $k_a, k_b \neq 0, k_a \neq k_b$.

2.1.4. Для зображених систем побудувати залежність власних частот двох консервативних коливних контурів від відношення їхніх парціальних частот (графік Віна).



2.1.5. Для системи двох коливних контурів із згасанням

а) з індуктивним зв'язком;

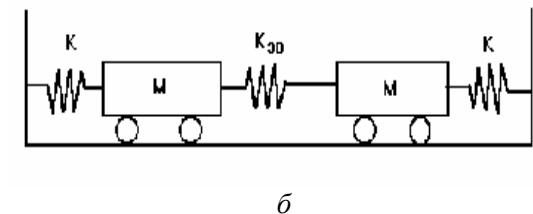
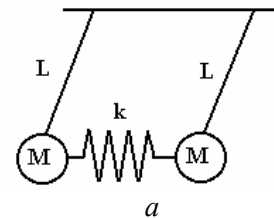
б) з ємнісним зв'язком

знайти власні частоти і загальний вигляд розв'язків $i_{1,2}(t)$.

2.1.6. Побудувати залежність власних частот від коефіцієнту зв'язку для двох дисипативних коливних контурів з ємнісним зв'язком. Коли в такій системі можна спостерігати биття? Окремо розглянути випадок ідентичних контурів.

2.1.7. Знайти власні частоти та нормальні моди системи з трьох індуктивно зв'язаних контурів.

2.1.8. Знайти власні частоти та нормальні моди зображених систем. Пояснити вплив різниці фаз коливань мас на власні частоти.



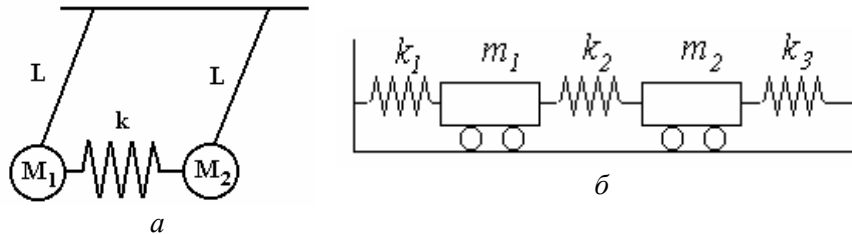
Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.1. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.

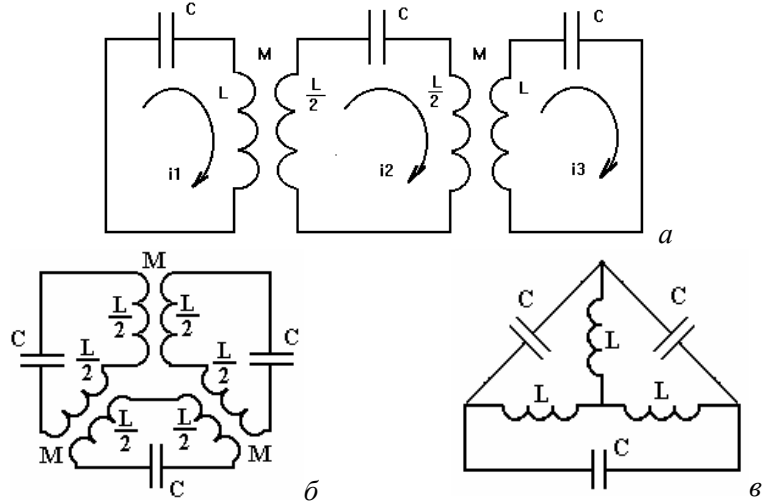
2.1.9. За яких умов амплітуда вільних коливань у кожному з двох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів періодично спадає до нуля?

2.1.10. Для системи з двох коливальних контурів із слабким індуктивним зв'язком побудувати часові залежності середньої енергії контурів від часу, вважаючи, що в початковий момент вся енергія була зосереджена в першому контурі. Окремо розглянути випадок ідентичних контурів.

2.1.11. Знайти власні частоти малих коливань зображеної системи.



2.1.12. Знайти власні частоти системи трьох зв'язаних контурів.

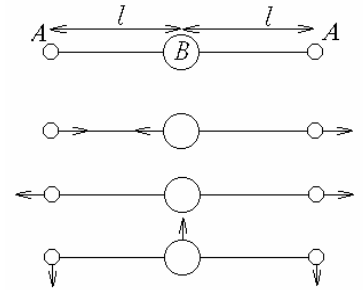


2.1.13. Чи можливо, щоб зв'язок між осциляторами не призводив до

розштовхування частот?

2.1.14*. Показати, що добуток коефіцієнтів розподілу амплітуд для лінійної консервативної системи з двома ступенями вільності завжди від'ємний.

2.1.15. Потенціальна енергія симетричної лінійної триатомної молекули залежить лише від відстаней BA та AB і кута BAV. Знайти власні частоти коливань такої молекули.

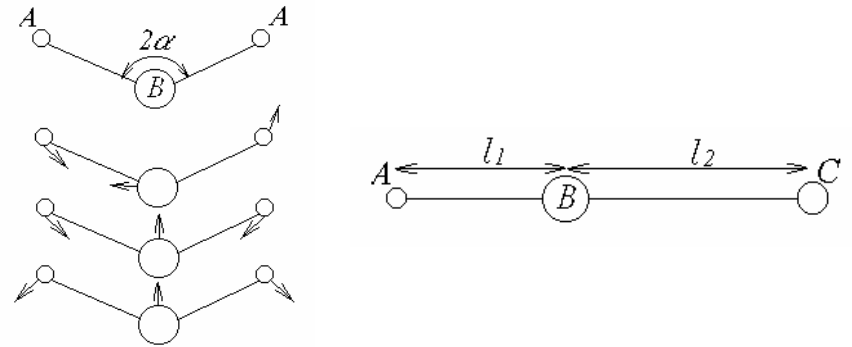


Вказівка: записати функцію Лагранжа молекули і врахувати, що в процесі коливань положення центру мас зберігається.

2.1.16. Розв'язати задачу 2.1.15 для

а) трикутної симетричної триатомної молекули;

б) несиметричної лінійної триатомної молекули.



Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.2. Вимушені коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності.

2.2. Вимушені коливання в лінійних системах із багатьма ступенями вільності.

Наявність великої кількості ступенів вільності ускладнює характер вимушених коливань під дією гармонічної сили. Крім можливості резонансу на декількох частотах, тут виникає іще ряд ефектів, які ми обговоримо на найпростішій моделі вимушених коливань лінійної консервативної системи з двома (точніше, з двома з половиною) ступенями вільності під дією гармонічної зовнішньої сили. Ефекти, пов'язані з биттями між вільною і вимушеною складовими, розглядати не будемо, оскільки тут не з'являється нічого нового порівняно із звичайним лінійним осцилятором (див. п.1.2.3). Слід відзначити, що для випадку негармонічної зовнішньої сили аналіз руху системи можна зробити за допомогою методів рядів чи інтегралів Фур'є або інтегралів Дюгамеля (див. розділ 1.3).

2.2.1. Вихідні рівняння.

Для лінійної консервативної системи з двома ступенями вільності коливання під дією зовнішніх сил $f_{1,2}(t)$ описуються рівняннями вигляду (2.1.5) із правими частинами:

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + b_{12}\ddot{q}_2 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = f_1(t); \\ b_{12}\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = f_2(t). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції, тобто довільні зовнішні сили можна розкласти в ряд або в інтеграл Фур'є (див. п.1.3.2). Отже, достатньо проаналізувати випадок гармонічних зовнішніх сил. Обмежимося також знаходженням чисто вимушених коливань.

2.2.2. Особливості резонансних кривих.

Розглянемо спочатку випадок, коли

$$f_1(t) = f_m \exp(ipt), \quad f_2(t) = 0. \quad (2.2.2)$$

Розв'язок (2.2.1) шукаємо у вигляді

$$q_1(t) = A_1 \exp(ipt), \quad q_2(t) = B_1 \exp(ipt). \quad (2.2.3)$$

Підставивши (2.2.2)-(2.2.3) до (2.2.1), отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - p^2 b_{11})A_1 + (a_{12} - p^2 b_{12})B_1 = f_m; \\ (a_{12} - p^2 b_{12})A_1 + (a_{22} - p^2 b_{22})B_1 = 0, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

звідки

$$A_1 = \frac{f_m(a_{22} - p^2 b_{22})}{\Delta(p)}; \quad B_1 = -\frac{f_m(a_{12} - p^2 b_{12})}{\Delta(p)}, \quad (2.2.5)$$

де

$$\Delta(p) = (a_{11} - p^2 b_{11})(a_{22} - p^2 b_{22}) - (a_{12} - p^2 b_{12})^2. \quad (2.2.6)$$

Типовий вигляд залежностей амплітуд A_1 та B_1 від частоти зовнішньої сили p , тобто резонансних кривих, подано на рис.2.2.1. Зупинимося на деяких їхніх особливостях.

По-перше, вигляд лівих частин рівнянь системи (2.2.4) збігається з рівняннями (2.1.8), а отже, її головний визначник (2.2.6) із точністю до позначень збігається з характеристичним рівнянням (2.1.12) і перетворюється в нуль, коли частота зовнішньої сили p збігається з однією з власних частот (2.1.13) аналізованої системи, що відповідає резонансу. При цьому амплітуди коливань (2.2.5) необмежено зростають.

По-друге, амплітуда вимушених коливань першого осцилятора A_1 перетворюється в нуль, коли частота зовнішньої сили збігається з парціальною частотою другого осцилятора. Цей ефект називається *динамічним демпфіруванням*. Щоб пояснити його, перепишемо систему (2.2.1) з урахуванням (2.2.2) у формі

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + a_{11}q_1 = f_1(t) - (b_{12}\ddot{q}_2 + a_{12}q_2); \\ b_{22}\ddot{q}_2 + a_{22}q_2 = -b_{12}\ddot{q}_1 - a_{21}q_1. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.2. Вимушені коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності.

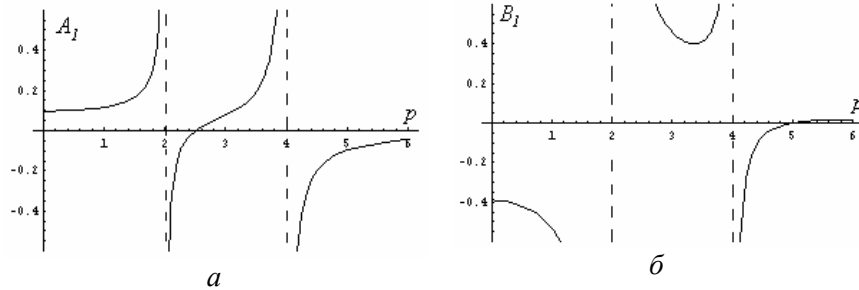


Рис.2.2.1. Залежності амплітуд вимушених коливань першого (а) та другого (б) осциляторів від частоти зовнішньої сили.

Як видно з першого рівняння системи (2.2.7), на перший осцилятор діє зовнішня сила $f_1(t)$ та сила з боку другого осцилятора, рівна

$$-(b_{12}\ddot{q}_2 + a_{12}q_2) = p^2 b_{12}q_2 - a_{12}q_2,$$

амплітуда та фаза якої залежать від частоти p . На частоті $p = \omega_{02}$ ці дві сили компенсують одна одну.

По-третє, амплітуда вимушених коливань другого осцилятора B_1 перетворюється в нуль на частоті

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{a_{12}}{b_{12}}}. \quad (2.2.8)$$

Як видно з другого рівняння системи (2.2.7), на другий осцилятор з боку першого діють дві протифазні сили, обумовлені відповідно індуктивним та ємнісним зв'язком. Перша з цих сил залежить від частоти p , друга - не залежить. Їхня компенсація відбувається якраз на частоті (2.2.8). Таким чином, можна говорити про ефект *компенсації індуктивного та ємнісного зв'язку*. Звичайно, цей ефект має місце лише для тих систем, у яких обидва названі типи зв'язку присутні одночасно.

2.2.3. Теорема взаємності.

Нехай тепер

$$f_2(t) = f_{m1} \exp(ipt), \quad f_1(t) = 0. \quad (2.2.9)$$

Тоді для амплітуд вимушених коливань змінних $q_{1,2}$ можна отримати:

$$A_2 = -\frac{f_{m1}(a_{12} - p^2 b_{12})}{\Delta(p)}; \quad B_2 = \frac{f_{m1}(a_{11} - p^2 b_{11})}{\Delta(p)}. \quad (2.2.10)$$

Таким чином,

$$A_2 = B_1. \quad (2.2.11)$$

Співвідношення (2.2.11) носить назву *теорема взаємності*. Вона може бути сформульована таким чином: якщо зовнішня сила діє на перший осцилятор, то амплітуда коливань другого осцилятора буде такою самою, як амплітуда коливань першого осцилятора, коли та сама сила діятиме на другий.

Теорема взаємності узагальнюється на системи з довільним числом ступенів вільності, а також на системи з розподіленими параметрами. З неї випливає, зокрема, що діаграми спрямованості антени на передачу та приймання сигналу є однаковими.

2.2.4. Ортогональність зовнішніх сил до нормальних мод.

Нехай, нарешті,

$$f_1(t) = f_{m1} \exp(ipt), \quad f_2(t) = f_{m2} \exp(ipt). \quad (2.2.12)$$

В силу принципу суперпозиції амплітуди коливань у цьому випадку можна записати як суму амплітуд (2.2.5) та (2.2.10):

$$A_3 = \frac{f_{m1}(a_{22} - p^2 b_{22}) - f_{m2}(a_{12} - p^2 b_{12})}{\Delta(p)}; \\ B_3 = \frac{f_{m2}(a_{11} - p^2 b_{11}) - f_{m1}(a_{12} - p^2 b_{12})}{\Delta(p)}. \quad (2.2.13)$$

Як випливає з (2.2.13), за одночасної дії зовнішніх сил на обидва осцилятори в принципі можлива ситуація, коли на власних частотах системи (при $p = \omega_1$ або при $p = \omega_2$) резонансного зростання амплітуди

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.2. Вимушені коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності.

коливань не буде. Для цього необхідно виконати умову

$$\frac{f_{m1}}{f_{m2}} = \frac{a_{12} - p^2 b_{12}}{a_{22} - p^2 b_{22}} \Big|_{p=\omega_1, \omega_2} = \frac{a_{11} - p^2 b_{11}}{a_{12} - p^2 b_{12}} \Big|_{p=\omega_1, \omega_2} = -\kappa_{1,2} = -\frac{B}{A}, \quad (2.2.14)$$

(див.(2.1.14)), де A, B - амплітуди вільних коливань змінних q_1 та q_2 на частоті ω_1 або ω_2 (див. (2.1.7)).

Перепишемо умову (2.2.14) у формі

$$Af_{m1} + Bf_{m2} = 0. \quad (2.2.15)$$

Її можна назвати умовою ортогональності зовнішніх сил до нормальних мод системи.

Щоб зрозуміти зміст умови (2.2.15), розглянемо систему двох зв'язаних пружинних маятників, зображену на рис.2.16. Нехай маятники ідентичні ($m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$). Зрозуміло, що в цьому випадку нормальними модами системи будуть синфазні (з однаковими амплітудами) коливання з частотою

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad (2.2.16)$$

(при таких коливаннях довжина пружини k_{12} залишається незмінною) та протифазні (також з однаковими амплітудами) коливання з частотою

$$\omega_2 = \sqrt{(k + 2k_{12})/m} \quad (2.2.17)$$

(при таких коливаннях середня точка пружини k_{12} залишається нерухомою). Для синфазної моди умова (2.2.15) означає, що зовнішні сили, що діють одночасно на обидва маятники, мають бути однаковими за амплітудою і протифазними. Зрозуміло, що в цьому випадку робота зовнішніх сил над системою в середньому за період коливань буде рівна нулеві, і резонанс не спостерігатиметься. Те саме буде, коли на частоті синфазної моди на систему діють протифазні сили з однаковими амплітудами.

Контрольні питання до розділу 2.2.

2.2.1. Чи можливий ефект компенсації різних типів зв'язку у контурах, між якими одночасно існує ємнісний та резистивний зв'язок?

2.2.2. У чому полягає якісна відмінність між вимушеними коливаннями пружинних маятників, зв'язаних пружиною, та контурів із одночасним ємнісним та індуктивним зв'язком?

2.2.3. Запропонуйте можливі схеми експерименту для спостереження ефекту ортогональності зовнішніх сил до нормальних мод системи.

2.2.4. Поясніть вигляд амплітудно-частотної характеристики системи двох дисипативних контурів з трансформаторним зв'язком¹ при різних коефіцієнтах зв'язку в термінах, що характеризують вимушені коливання систем із багатьма ступенями вільності.

2.2.5. Чи виявляється ефект динамічного демпфірування в системі двох дисипативних контурів з трансформаторним зв'язком?

2.2.6. Сформулюйте умову відсутності резонансу на одній з власних частот системи з n ($n>2$) ступенями вільності.

2.2.7. Пояснити принцип роботи загороджувального LC-фільтру в термінах, що характеризують вимушені коливання зв'язаних осциляторів.

2.2.8. Як виявлятиметься ефект динамічного демпфірування в роботі загороджувального LC-фільтру (в режимі короткого замкнення на виході)?

Задачі до розділу 2.2.

2.2.1. Побудувати резонансні криві для двох зв'язаних консервативних осциляторів ($\omega_{01}>\omega_{02}$, $k_a, k_b<1$) для випадку, коли на перший з них діє гармонічна сила, за умови:

- $k_a=k_b$;
- $k_a \ll k_b$;

¹ Див., наприклад: І.В.Байраченко. Радіотехнічні кола і сигнали. ВПЦ "Київський університет", 1992. С.83-91.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.2. Вимушені коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності.

в) $k_a \gg k_b$;

г) $\omega_1^2 < a_{12}/b_{12} < \omega_2^2$.

2.2.2. Чи зберігається ефект

а) динамічного демпфірування;

б) компенсації інерційного та силового зв'язку;

в) ортогональності зовнішніх сил власним модам системи

за наявності тертя? Відповідь дати на основі аналізу рівнянь руху системи.

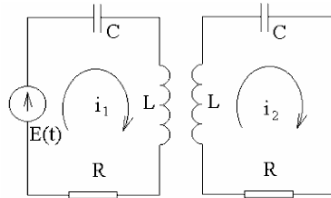
2.2.3. Знайти максимальну та мінімальну амплітуди струму

а) у першому контурі;

б) у другому контурі,

що збуджується джерелом напруги $e(t) = E_m \exp(ipt)$, вважаючи контури

ідентичними, а згасання - малим ($r \ll pL, 1/pC$). На яких частотах вони досягаються?



2.2.4*. Проаналізувати вимушені коливання та побудувати графіки амплітудно-частотних та фазово-частотних характеристик для двох слабкодисипативних контурів

а) з індуктивним зв'язком;

б) з ємнісним зв'язком,

вважаючи, що джерело зовнішньої гармонічної напруги увімкнене в перший контур. Окремо розглянути випадок ідентичних контурів і визначити для цього випадку критичне значення коефіцієнту зв'язку, при якому на резонансній кривій з'являється два максимуми.

2.2.5*. Проаналізувати вимушені коливання в системі трьох зв'язаних лінійних консервативних осциляторів, виходячи з рівнянь Лагранжа. Сформулювати для цього випадку теорему взаємності та умову ортогональності зовнішніх сил до нормальних мод системи. Дослідити вплив слабкої дисипації.

2.2.6*. Розв'язати попередню задачу для випадку n зв'язаних лінійних консервативних осциляторів.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Колювання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

2.3. Колювання параметричних систем із багатьма ступенями вільності.

При аналізі колювань параметричних систем з багатьма ступенями вільності ми спочатку проаналізуємо роботу двоконтурного параметричного підсилювача (у наближенні заданого накачування, яке використовувалося раніше для аналізу одноконтурних параметричних генераторів та підсилювачів, див. розділи 1.5-1.6). Потім ми відійдемо від вказаного наближення і виконаємо самоузгоджений аналіз параметричної взаємодії колювань на прикладі моделі трьох консервативних осциляторів із квадратичним зв'язком (див. нижче розділ 2.4).

2.3.1. *Схема двоконтурного параметричного підсилювача та рівняння, що її описують.*

Як уже відзначалося (див. розділи 1.5-1.6), параметричні генератори мають обмежену практичну цінність, оскільки для їхньої роботи потрібне високочастотне накачування. В той же час параметричні підсилювачі є дуже привабливими за рахунок низького рівня власних шумів, однак одноконтурним схемам притаманний недолік - залежність коефіцієнту підсилення від фази вхідного сигналу та пульсації коефіцієнту підсилення. Цього недоліку позбавлена двоконтурна схема, до аналізу якої ми й перейдемо.

Схема двоконтурного параметричного підсилювача (без джерела накачування варікапа) подана на рис.2.3.1. Вважатимемо, що ємність варікапа змінюється з часом за законом

$$C(t) = C_0(1 + m \cos \omega_H t), \quad m < 1. \quad (2.3.1)$$

Для контурів зі струмами i , i_1 , i_2 запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i) dt = e(t);$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i) dt = 0; \quad (2.3.2)$$

$$\frac{1}{C(t)} \int i dt + \frac{1}{C_1} \int (i - i_1) dt + \frac{1}{C_2} \int (i - i_2) dt = 0.$$

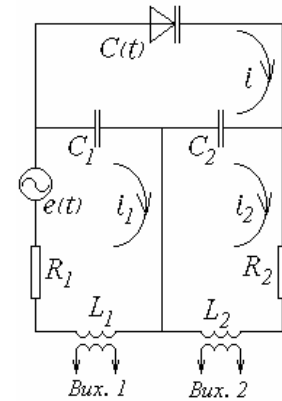


Рис.2.3.1. Схема двоконтурного параметричного підсилювача.

Позначимо

$$u_1 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt, \quad u_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - \quad (2.3.3)$$

падіння напруги на ємностях контурів. Із останнього рівняння системи (2.3.2) випливає, що

$$\left(\frac{1}{C(t)} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int i dt = u_1 + u_2. \quad (2.3.4)$$

Вважатимемо середню ємність варікапа значно меншою від контурних ємностей,

$$C_0 \ll C_{1,2}. \quad (2.3.5)$$

Тоді

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

$$\frac{1}{C(t)} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \approx \frac{1}{C(t)}, \quad (2.3.6)$$

і (2.3.4) з урахуванням (2.3.6) можна переписати у формі

$$\int idt = C(t)(u_1 + u_2). \quad (2.3.7)$$

В результаті система (2.3.2) з урахуванням (2.3.3) та (2.3.7) набуває вигляду

$$L_1 C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = \frac{C(t)}{C_1} (u_1 + u_2) + e(t); \quad (2.3.8)$$

$$L_2 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + R_2 C_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{C(t)}{C_2} (u_1 + u_2).$$

За відсутності накачування (при $m=0$) врахування в правій частині рівнянь (2.3.8) малих доданків, пропорційних до $C_0/C_{1,2} \ll 1$, приводить до невеликого зсуву власних частот та появи слабкого зв'язку між контурами. Нехтуючи цими ефектами, перепишемо (2.3.8) у формі:

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{du_1}{dt} + \omega_1^2 u_1 = \omega_1^2 m_1 (u_1 + u_2) \cos \omega_H t + \omega_1^2 e(t); \quad (2.3.9)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{du_2}{dt} + \omega_2^2 u_2 = \omega_2^2 m_1 (u_1 + u_2) \cos \omega_H t,$$

де використано позначення

$$\frac{1}{\sqrt{L_{1,2} C_{1,2}}} = \omega_{1,2}; \quad \frac{R_{1,2}}{2L_{1,2}} = \delta_{1,2}; \quad \frac{mC_0}{C_{1,2}} = m_{1,2}. \quad (2.3.10)$$

Будемо вважати контури високодобротними,

$$\delta_{1,2} \ll \omega_{1,2}, \quad (2.3.11)$$

а їхні смуги пропускання - такими, що не перекриваються:

$$\delta_{1,2} \ll |\omega_1 - \omega_2|. \quad (2.3.12)$$

Напругу, що подається на вхід підсилювача, вважатимемо гармо-

нічною:

$$e(t) = E_m \exp(i\omega t), \quad (2.3.13)$$

а її частоту - близькою до парціальної (а в силу зроблених припущень - власної) частоти першого контуру, такою, що потрапляє в смугу пропускання:

$$\omega = \omega_1 - \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_1. \quad (2.3.14)$$

2.3.2. Регенеративний підсилювач з високочастотним накачуванням.

Нехай частота накачування задовольняє умові

$$\omega_H = \omega_1 + \omega_2 \quad (2.3.15)$$

(випадок високочастотного накачування). Тоді холоста частота (різницева частота, що виникне в результаті взаємодії сигналу та накачування на нелінійному елементі - варікапі),

$$\omega_X = \omega_H - \omega \quad (2.3.16)$$

буде близькою до частоти другого контуру:

$$\omega_X = \omega_2 + \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_2. \quad (2.3.17)$$

В силу умов (2.3.11)-(2.3.17) будемо шукати розв'язки системи (2.3.9) для напруг $u_{1,2}$ у формі

$$u_1(t) = A \exp(i\omega t), \quad u_2(t) = B \exp(-i\omega_X t) \quad (2.3.18)$$

(пор. з розділом 1.6). Підставляючи (2.3.13) та (2.3.18) до системи (2.3.9), нехтуючи доданками другого і більш високих порядків мализни й залишаючи в першому рівнянні лише доданки з частотою ω , а в другому - з частотою ω_X , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд A та B :

$$(2\omega_1 \Delta + i2\omega_1 \delta_1) A = \frac{m_1 \omega_1^2}{2} B + \omega_1^2 E_m; \quad (2.3.19)$$

$$(-2\omega_2 \Delta - i2\omega_2 \delta_2) B = \frac{m_{21} \omega_2^2}{2} A.$$

Розв'язуючи (2.3.19), можна отримати:

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

$$A = \frac{8\omega_1(\Delta + i\delta_2)E_m}{16(\Delta + i\delta_1)(\Delta + i\delta_2) + m_1m_2\omega_1\omega_2};$$

$$B = -\frac{2m_2\omega_1\omega_2E_m}{16(\Delta + i\delta_1)(\Delta + i\delta_2) + m_1m_2\omega_1\omega_2}. \quad (2.3.20)$$

У випадку точного резонансу ($\Delta=0$) отримаємо:

$$A_{\max} = -i\frac{Q_1E_m}{1 - \frac{m_1m_2Q_1Q_2}{4}}; \quad B_{\max} = \frac{1}{2}\frac{m_2Q_1Q_2E_m}{1 - \frac{m_1m_2Q_1Q_2}{4}}, \quad (2.3.21)$$

де

$$Q_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{2\delta_{1,2}}. \quad (2.3.22)$$

Як впливає з (2.3.21), самозбудження схеми відбудеться при

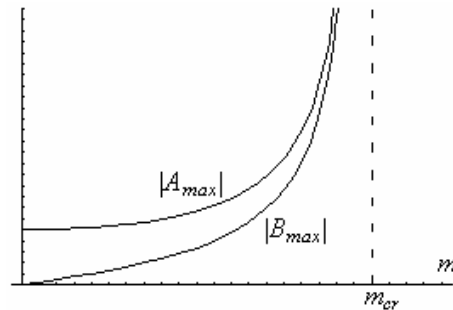
$$m_1m_2 > \frac{4}{Q_1Q_2}, \quad (2.3.23)$$

або, з урахуванням (2.3.10), при

$$m > m_{cr} \equiv \frac{2}{C_0} \sqrt{\frac{C_1C_2}{Q_1Q_2}}. \quad (2.3.24)$$

Залежності амплітуд (2.3.21) від m подані на рис.2.3.2.

Рис.2.3.2. Амплітуди сигналів у першому та другому контурах у режимі точного резонансу в схемі двоконтурного параметричного підсилювача з високочастотним накачуванням як функції глибини модуляції параметричної ємності.



Повернемося до аналізу загального випадку (2.3.20). Щоб знайти коефіцієнт підсилення та форму смуги пропускання, вважатимемо, що ми працюємо біля порогу генерації, тобто при

$$0 < \varepsilon \equiv 1 - \frac{m_1m_2Q_1Q_2}{4} \ll 1 \quad (2.3.25)$$

(пор. із розділом 1.6). Будемо цікавитись малими розстроюваннями,

$$|\Delta| \ll \delta_{1,2}. \quad (2.3.26)$$

Тоді для амплітуд A та B можна записати:

$$A \approx \frac{\delta Q_1 E_m}{\Delta + i\varepsilon\delta}; \quad B \approx \frac{m_2 Q_2}{2} \frac{\delta Q_1 E_m}{\Delta + i\varepsilon\delta}, \quad (2.3.27)$$

де

$$\delta = \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}. \quad (2.3.28)$$

Як впливає з (2.3.27), смуга пропускання підсилювача складає $\Omega = 2\varepsilon\delta$, а максимальний коефіцієнт підсилення – $K^x_{\max} = |Q_1/\varepsilon|$ (на частоті сигналу) та $K^x_{\max} = |m_2Q_1Q_2/2\varepsilon|$ (на холостій частоті).

У розглянутій схемі підсилення сигнальної та холостої частот відбувається в окремих контурах, смуги пропускання яких не перекриваються (див. умову (2.3.12)). Це означає, що биття між сигнальною та холостою частотами, які в одноконтурній схемі призводили до пульсацій коефіцієнту підсилення, тепер не виникатимуть.

Як і в одноконтурній схемі, в розглянутому випадку маємо справу з регенеративним механізмом підсилення, про що свідчить можливість самозбудження схеми (за виконання умови (2.3.24)).

2.3.3. Нерегенеративний перетворювач частоти з низькочастотним накачуванням.

Нехай тепер частота накачування задовольняє умові

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_H. \quad (2.3.29)$$

Виконуючи розрахунки, аналогічні до наведених у п.2.3.2, отримає-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

МО:

$$A = \frac{8\omega_1(\Delta + i\delta_2)E_m}{16(\Delta + i\delta_1)(\Delta + i\delta_2) - m_1m_2\omega_1\omega_2};$$

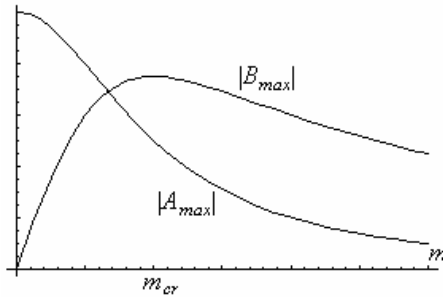
$$B = -\frac{2m_2\omega_1\omega_2E_m}{16(\Delta + i\delta_1)(\Delta + i\delta_2) - m_1m_2\omega_1\omega_2}. \quad (2.3.30)$$

У випадку точного резонансу ($\Delta=0$) отримаємо:

$$A_{\max} = -i \frac{Q_1 E_m}{1 + \frac{m_1 m_2}{4Q_1 Q_2}}; \quad B_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{m_2 Q_1 Q_2 E_m}{1 + \frac{m_1 m_2}{4Q_1 Q_2}}. \quad (2.3.31)$$

Графік залежностей амплітуд коливань від глибини модуляції параметричної ємності поданий на рис.2.3.3.

Рис.2.3.3. Амплітуди сигналів у першому та другому контурах у режимі точного резонансу в схемі двоконтурного параметричного підсилювача з низькочастотним накачуванням як функції глибини модуляції параметричної ємності.



Як впливає з (2.3.31), в аналізованому випадку самозбудження неможливе. Амплітуда коливань на сигнальній частоті монотонно спадає із зростанням глибини модуляції, амплітуда коливань на холостій частоті досягає максимуму при $m=m_{cr}$ (2.3.24).

Таким чином, коли ми знімаємо сигнал на холостій частоті, дана схема виступає в ролі перетворювача частоти (остання зростає на величину частоти накачування). Така схема має дуже низький рівень власних шумів.

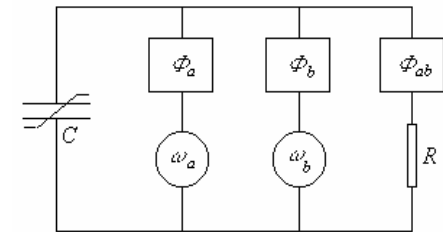
2.3.4. Співвідношення Менлі - Роу для відкритої дисипативної системи.

Щоб глибше зрозуміти особливості роботи двоконтурного параметричного підсилювача в різних режимах, розглянемо ідеалізовану схему перетворювача частот на нелінійному реактивному елементі, подану на рис.2.3.4. В ролі нелінійного елемента виступає нелінійна ємність. Схема містить також джерела гармонічних сигналів з частотами ω_a та ω_b і вузькосмугові фільтри, настроєні на частоти ω_a , ω_b та деяку комбінаційну частоту

$$\omega_{ab} = m\omega_a + n\omega_b, \quad (2.3.32)$$

де m, n - деякі цілі числа ($\pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$). Через наявність фільтрів кола для частот ω_a, ω_b замикаються через відповідні генератори та нелінійну ємність, а для комбінаційної частоти - через нелінійну ємність та резистор.

Рис.2.3.4. Ідеалізована схема перетворювача частот на нелінійному елементі.



Вважатимемо фільтри чисто реактивними елементами. Тоді потужність в аналізованій схемі виділяється на частотах ω_a та ω_b , а поглинається лише на частоті ω_{ab} .

Будемо вважати потужність P_{ab} , що поглинається на активному опорі, додатною, а потужності P_a та P_b , що виділяються генераторами, від'ємними. Тоді баланс потужності може бути записаний у вигляді:

$$P_a + P_b + P_{ab} = 0. \quad (2.3.33)$$

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

Помножимо кожний з доданків у (2.3.33) на одиницю. Дістанемо:

$$\frac{\omega_a}{\omega_a} P_a + \frac{\omega_b}{\omega_b} P_b + \frac{m\omega_a + n\omega_b}{m\omega_a + n\omega_b} P_{ab} = 0,$$

або

$$\omega_a \left(\frac{P_a}{\omega_a} + \frac{mP_{ab}}{m\omega_a + n\omega_b} \right) + \omega_b \left(\frac{P_b}{\omega_b} + \frac{nP_{ab}}{m\omega_a + n\omega_b} \right) = 0. \quad (2.3.34)$$

Дж. Менлі та Х. Роу на основі чисто електротехнічних розрахунків показали, що кожна дужка в (2.3.34) окремо дорівнює нулеві:

$$\frac{P_a}{\omega_a} + \frac{mP_{ab}}{m\omega_a + n\omega_b} = 0; \quad \frac{P_b}{\omega_b} + \frac{nP_{ab}}{m\omega_a + n\omega_b} = 0. \quad (2.3.35)$$

Рівняння (2.3.35) дістали в літературі назву співвідношень Менлі - Роу. Вони виражають баланс енергії при нелінійному перетворенні частоти і дають можливість інтерпретувати названий процес у термінах кількості квантів.

Розглянемо перше із співвідношень (2.3.35). Перший доданок у лівій частині - це величина, пропорційна до числа квантів частоти ω_a , що виділяються відповідним генератором за одиницю часу. Відповідно величина $P_{ab}/(m\omega_a + n\omega_b)$ пропорційна до числа квантів комбінаційної частоти, що поглинаються за одиницю часу на активному опорі. На створення одного кванту комбінаційної частоти витрачається m квантів частоти ω_a . Таким чином, аналізоване співвідношення виражає баланс квантів частоти ω_a в аналізованій схемі. Друге співвідношення (2.3.35) відповідно виражає баланс квантів частоти ω_b .

Співвідношення Менлі - Роу легко узагальнюються на довільну кількість комбінаційних частот, що поглинаються одночасно. Вони можуть бути записані і для консервативних систем, в тому числі з розподіленими параметрами.

Розглянемо співвідношення Менлі - Роу для двох окремих випадків.

а) Нехай $m=n=1$. Дістанемо з (2.3.35):

$$P_a = -\frac{\omega_a}{\omega_a + \omega_b} P_{ab}; \quad P_b = -\frac{\omega_b}{\omega_a + \omega_b} P_{ab}. \quad (2.3.36)$$

Оскільки $P_{ab} > 0$, то $P_a < 0$ і $P_b < 0$, тобто обидва генератори віддають потужність. Як видно з (2.3.36), потужність від генераторів відбирається пропорційно до їхніх частот. Це дає можливість інтерпретувати процес утворення комбінаційної частоти як злиття квантів (рис.2.3.5а).

Зрозуміло, що для протікання такого процесу принципово необхідні обидва джерела (з частотами ω_1 та ω_2), тому самозбудження схеми (тобто протікання процесу за наявності лише одного джерела квантів) в такій ситуації принципово неможливе.

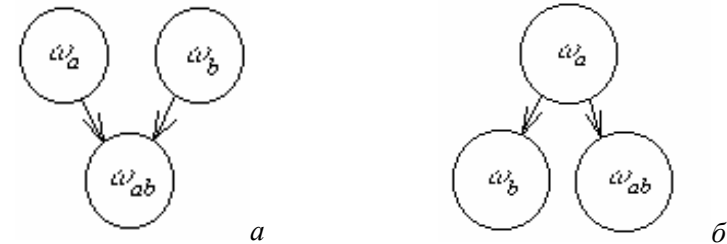


Рис.2.3.5. Схеми злиття (а) та розпаду (б) квантів.

б) Нехай тепер $m=1, n=-1$ та $\omega_a > \omega_b$. Тоді з (2.3.35) можна отримати:

$$P_a = -\frac{\omega_a}{\omega_a - \omega_b} P_{ab} < 0; \quad P_b = \frac{\omega_b}{\omega_a - \omega_b} P_{ab} > 0. \quad (2.3.37)$$

Як бачимо, тепер вся енергія відбирається від генератора високої частоти. Генератор низької частоти виступає в ролі активного опору, тобто поглинає енергію. Таким чином, маємо розпад високочастотного кванта на два низькочастотних (рис.2.3.5б). Зрозуміло, що генератор низької частоти в даному випадку можна замінити звичайним опором.

Очевидно, випадок (б) аналогічний до регенеративного парамет-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.3. Коливання параметричних систем з багатьма ступенями вільності.

ричного підсилювача з високочастотним накачуванням (п.2.3.2), а випадок (а) - до нерегенеративного параметричного підсилювача з низькочастотним накачуванням (п.2.3.3). Раніше розглянутий одноконтурний параметричний генератор (див. розділ 1.5) відповідає розпаду кванту накачування на два однакових кванти.

Контрольні питання до розділу 2.3.

- 2.3.1. Для чого потрібен другий контур у двоконтурному параметричному підсилювачі?
- 2.3.2. Чи можна спостерігати пульсації коефіцієнта підсилення у двоконтурному параметричному підсилювачі?
- 2.3.3. Чому при розрахунку двоконтурного параметричного підсилювача зв'язком через постійну складову параметричної ємності звичайно нехтують?
- 2.3.4. Порівняйте пороги самозбудження в одноконтурному та двоконтурному параметричних підсилювачах і поясніть відмінність між ними.
- 2.3.5. Чому на практиці не використовуються параметричні підсилювачі з трьома чи більшою кількістю контурів?
- 2.3.6. Чи точно співвідношення Менлі - Роу для дисипативних систем описують роботу двоконтурного параметричного підсилювача? Відповідь обґрунтувати.
- 2.3.7. Яка модель нелінійності закладена в співвідношення Менлі - Роу для двох генераторів та резистора з ідеальними вузькосмуговими фільтрами, що взаємодіють через реактивний нелінійний елемент?
- 2.3.8. Намалюйте схему взаємодії квантів згідно співвідношення Менлі - Роу для двох генераторів та резистора з ідеальними вузькосмуговими фільтрами, що взаємодіють через реактивний нелінійний елемент, при $n, m \neq \pm 1$.
- 2.3.9. Узагальніть співвідношення Менлі - Роу для випадку системи трьох генераторів, реактивного нелінійного елементу, опору навантаження та набору відповідних ідеальних вузькосмугових фільтрів.

2.3.10. Якісно поясніть, чому в двоконтурному параметричному підсилювачі з низькочастотним накачуванням амплітуда сигналу зменшується із зростанням глибини модуляції параметричної ємності.

2.3.11. У двоконтурному параметричному підсилювачі частота сигналу дорівнює сумі холостої частоти та частоти накачування. Як залежатиме амплітуда сигналу від глибини модуляції параметричної ємності?

Задачі до розділу 2.3.

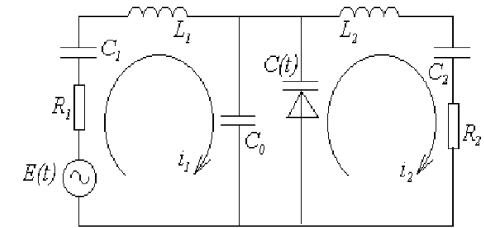
2.3.1. Проаналізуйте роботу двоконтурного параметричного підсилювача для випадку, коли $\omega_c = \omega_x + \omega_n$. Дайте інтерпретацію отриманим результатам, використовуючи співвідношення Менлі - Роу.

2.3.2. Розрахуйте ширину смуги пропускання двоконтурного параметричного підсилювача для випадків

а) $\omega_c = \omega_x + \omega_n$ (див. задачу 2.3.1);

б) $\omega_c = \omega_c + \omega_n$.

2.3.3. Вивести рівняння, що описують поведінку зображеної схеми двоконтурного параметричного підсилювача в припущенні, що $C_0 \gg C_{1,2} \gg C(t)$. Вважаючи накачування



гармонічним, знайти поріг самозбудження схеми для випадку високочастотного накачування. Отримати вираз для коефіцієнту підсилення в режимі точного резонансу поблизу порогу самозбудження.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів із квадратичним зв'язком.

Досі ми розглядали взаємодію частот на елементі з квадратичною нелінійністю лише в параметричному наближенні, коли зміна нелінійного елемента під дією зовнішньої сили вважалася заданою (див. п.1.4.4, розділи 1.5, 1.6, 2.3). Спробуємо тепер відійти від згаданого наближення і розглянемо таку задачу в самоузгодженому наближенні. Найпростішою моделлю, для якої це можна зробити, є система трьох консервативних осциляторів з квадратичним зв'язком.

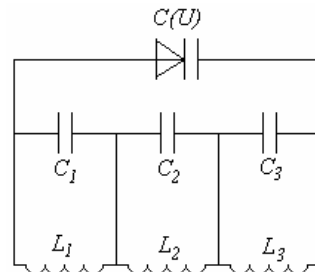
2.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння.

Розглянемо систему трьох консервативних осциляторів із квадратичним зв'язком. Приклад такої системи наведений на рис.2.4.1. Будемо вважати, що власні частоти системи за відсутності нелінійного зв'язку задовольняють резонансному співвідношенню

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (2.4.1)$$

На квадратичній нелінійності виникатимуть сумарні та різницеві частоти вигляду $\omega_i \pm \omega_j$. В силу умови (2.4.1) взаємодія кожної пари власних частот породжуватиме третю власну частоту. Таким чином, буде мати місце резонансна взаємодія трьох частот на квадратичній нелінійності.

Рис.2.4.1. Приклад системи трьох консервативних осциляторів з нелінійним зв'язком.



Аналізована схема є деяким аналогом двоконтурного параметричного підсилювача, де також відбувається або розпад кванту накачу-

вання на кванти сигнальної та холостої частот, або злиття квантів накачування й сигналу в квант холостої частоти. Але тепер ми будемо враховувати зворотній вплив цих процесів на накачування, тобто розв'язуватимемо самоузгоджену задачу, відійшовши від параметричного наближення, яке обговорювалося в п.1.4.4.

За відсутності нелінійного зв'язку рівняння руху в нормальних координатах¹ можуть бути подані у вигляді набору рівнянь ізольованих лінійних консервативних осциляторів із відповідними нормальними частотами:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= 0; \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= 0; \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Врахування квадратичного зв'язку приведе до появи в правих частинах рівнянь деяких квадратичних форм:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} x_i x_j; \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij} x_i x_j; \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= \sum_{i,j=1}^3 \gamma_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

(вважатимемо, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$). Із цими рівняннями ми й будемо далі працювати.

2.4.2. Рівняння параметричної взаємодії трьох мод.

Вважаючи параметри нелінійності α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} малими, будемо розв'язувати систему (2.4.3) за методом повільних амплітуд:

¹ Перехід до нормальних координат (див. п.2.1.5) дозволяє не враховувати лінійний зв'язок між осциляторами (зв'язок через постійну складову ємності варікапа для схеми на рис.2.4.1).

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

$$x_k(t) = A_k(t) \exp(i\omega_k t) + \text{к.с.}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.4.4)$$

Підставляючи розв'язки (2.4.4) до системи (2.4.3), в правих частинах рівнянь залишатимемо тільки доданки, що відповідають коливанням на власній частоті відповідного осцилятора. В результаті можна отримати таку систему вкорочених рівнянь для повільних амплітуд:

$$\begin{aligned} i\dot{A}_1 &= \frac{\alpha_{23}}{\omega_1} A_2^* A_3; \\ i\dot{A}_2 &= \frac{\beta_{13}}{\omega_2} A_1^* A_3; \\ i\dot{A}_3 &= \frac{\gamma_{12}}{\omega_3} A_1 A_2. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Перенормуємо амплітуди коливань:

$$a_1 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\alpha_{23}}} A_1, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\beta_{13}}} A_2, \quad a_3 = \sqrt{\frac{\omega_3}{\gamma_{12}}} A_3. \quad (2.4.6)$$

Тоді система (2.4.5) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\sigma a_2^* a_3; \\ \dot{a}_2 &= -i\sigma a_1^* a_3; \\ \dot{a}_3 &= -i\sigma a_1 a_2, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

де позначено

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha_{23}\beta_{13}\gamma_{12}}{\omega_1\omega_2\omega_3}}. \quad (2.4.8)$$

Система рівнянь (2.4.7) називається рівняннями параметричної взаємодії трьох мод. Вона описує резонансну взаємодію мод у системі трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

2.4.3. Закон збереження енергії.

Домножимо перше з рівнянь системи (2.4.7) на a_1^* , друге - на a_2^* , третє - на a_3^* . Потім від кожного з отриманих рівнянь віднімемо

комплексно спряжене рівняння. Дістанемо таку систему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_1 a_1^*) &= -i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*); \\ \frac{d}{dt}(a_2 a_2^*) &= -i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*); \\ \frac{d}{dt}(a_3 a_3^*) &= i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Домножимо перше з рівнянь системи (2.4.9) на ω_1 , друге - на ω_2 , третє - на ω_3 . Додавши отримані рівняння, можна дістати співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\omega_1 a_1 a_1^* + \omega_2 a_2 a_2^* + \omega_3 a_3 a_3^*) &= \\ = -i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

(в силу співвідношення (2.4.1)), або

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) = 0, \quad (2.4.11)$$

де позначено

$$N_i = a_i a_i^*. \quad (2.4.12)$$

Співвідношення (2.4.11) являє собою закон збереження енергії. Справді, кожний з доданків у круглих дужках пропорційний до квадрату модуля відповідної амплітуди і, отже, є величиною, пропорційною до повної енергії i -ї моди.

З іншого боку, оскільки енергія кожної з мод у формулі (2.4.11) пропорційна до її частоти, величини N_i можна назвати *кількостями квантів* відповідних частот.

2.4.4. Співвідношення Менлі - Роу для параметричної взаємодії трьох мод.

Повернемося до співвідношень (2.4.9). Віднімемо від першого з рівнянь друге. Оскільки праві частини цих рівнянь однакові, резуль-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

тат з урахуванням (2.4.12) можна подати у вигляді:

$$N_1 - N_2 = \text{const} . \quad (2.4.13)$$

Додаючи відповідно перше й друге та перше й третє рівняння, можна аналогічно отримати:

$$N_1 + N_3 = \text{const} ; \quad (2.4.14)$$

$$N_1 + N_3 = \text{const} .$$

Останнє співвідношення (2.4.14) не є незалежним - воно є лінійною комбінацією перших двох.

Формули (2.4.13)-(2.4.14) - це співвідношення Менлі - Роу для аналізованої задачі. Як і в попередньому випадку (див. п.2.3.4), вони дозволяють інтерпретувати взаємодію мод як процеси злиття і розпаду квантів (див. рис. 2.3.5). Справді, в обох названих процесах низькочастотні кванти ω_1 та ω_2 народжуються і зникають одночасно, тому різниця між кількостями цих квантів зберігається. На це і вказує співвідношення (2.4.13). З іншого боку, народження високочастотного кванта ω_3 супроводжується зникненням низькочастотних, і навпаки. В результаті суми кількостей високочастотних та низькочастотних (кожного типу) квантів також зберігаються (див. співвідношення (2.4.14)).

2.4.5. Рівняння для амплітуд та фаз коливань.

Рівняння параметричної взаємодії у формі (2.4.7) є істотно комплексними, тому працювати з ними незручно. Виділимо чисто дійсні амплітуди та фази коливань:

$$a_j = b_j \exp(i\varphi_j), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.4.15)$$

Підставимо (2.4.15) до (2.4.7). Отримаємо:

$$\begin{aligned} i(\dot{b}_1 + i\dot{\varphi}_1 b_1) \exp(i\varphi_1) &= \sigma b_2 b_3 \exp[i(\varphi_3 - \varphi_2)]; \\ i(\dot{b}_2 + i\dot{\varphi}_2 b_2) \exp(i\varphi_2) &= \sigma b_1 b_3 \exp[i(\varphi_3 - \varphi_1)]; \\ i(\dot{b}_3 + i\dot{\varphi}_3 b_3) \exp(i\varphi_3) &= \sigma b_1 b_2 \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Поділимо перше з рівнянь (2.4.16) на $\exp(i\varphi_1)$, друге - на $\exp(i\varphi_2)$,

третє - на $\exp(i\varphi_3)$, після чого виділимо в кожному з рівнянь дійсну та уявну частини. Отримаємо таку систему:

$$\dot{b}_1 = \sigma b_2 b_3 \sin \Phi ; \quad \dot{b}_2 = \sigma b_1 b_3 \sin \Phi ; \quad \dot{b}_3 = -\sigma b_1 b_2 \sin \Phi ; \quad (2.4.17)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\sigma \frac{b_2 b_3}{b_1} \cos \Phi ; \quad \dot{\varphi}_2 = -\sigma \frac{b_1 b_3}{b_2} \cos \Phi ; \quad \dot{\varphi}_3 = -\sigma \frac{b_1 b_2}{b_3} \cos \Phi ,$$

де введене позначення

$$\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 . \quad (2.4.18)$$

Систему (2.4.17) можна спростити, віднявши від останнього рівняння два попередні і тим самим звівши всі фази лише до комбінації (2.4.18). Тоді замість трьох останніх рівнянь системи (2.4.17) можна записати одне:

$$\dot{\Phi} = \sigma \cos \Phi \left(\frac{b_3 b_2}{b_1} + \frac{b_3 b_1}{b_2} - \frac{b_1 b_2}{b_3} \right) . \quad (2.4.19)$$

Рівняння (2.4.19) має частинний розв'язок $\Phi = \pi/2$. Після його підстановки рівняння для амплітуд (перші три рівняння системи (2.4.17)) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \sigma b_2 b_3 ; \\ \dot{b}_2 &= \sigma b_1 b_3 ; \\ \dot{b}_3 &= -\sigma b_1 b_2 . \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Точний розв'язок системи (2.4.20) записується в спеціальних функціях. Але ми отримаємо наближений розв'язок для двох окремих випадків.

2.4.6. Розв'язок рівнянь для амплітуд у наближенні заданого накачування.

а) Припустимо, що в початковий момент часу кількість низькочастотних квантів одного сорту (наприклад, з частотою ω_1) значно перевищує кількості квантів інших сортів:

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

$$N_1 \gg N_{2,3}. \quad (2.4.21)$$

Як впливає із співвідношень Менлі - Роу (2.4.13)-(2.4.14), ця умова, якщо вона справедлива в початковий момент часу, буде виконуватись і надалі. Справді, процеси злиття низькочастотних квантів обмежені малізною N_2 , а процеси розпаду високочастотних квантів - малізною N_3 . Змінна складова величини N_1 залишатиметься малою. Тому в першому наближенні відповідну амплітуду, що входить у праві частини другого та третього рівнянь системи (2.4.20), можна вважати сталою:

$$b_1 = b_{01} = const. \quad (2.4.22)$$

Це видно з того, що права частина першого рівняння системи (2.4.20) в силу умови (2.4.21) має другий порядок малізми за параметрами $b_2 \sim b_3$, і її наближено можна вважати рівною нулю. Праві частини другого і третього рівнянь мають лише перший порядок малізми, і їх треба враховувати.

В результаті підстановки (2.4.22) система (2.4.20) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{b}_2 &= \sigma b_{10} b_3; \\ \dot{b}_3 &= -\sigma b_{10} b_2. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Система (2.4.23), в свою чергу, зводиться до лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{b}_2 + (\sigma b_{10})^2 b_2 = 0. \quad (2.4.24)$$

В результаті загальний розв'язок системи (2.4.23) можна записати у формі:

$$\begin{aligned} b_2(t) &= b_m \cos(\sigma b_{10} t + \psi); \\ b_3(t) &= -b_m \sin(\sigma b_{10} t + \psi). \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Відповідно для кількостей квантів отримаємо:

$$N_2(t) = b_2^2(t) = \frac{1}{2} b_m^2 [1 + \cos 2(\sigma b_{10} t + \psi)];$$

$$N_3(t) = b_3^2(t) = \frac{1}{2} b_m^2 [1 - \cos 2(\sigma b_{10} t + \psi)]. \quad (2.4.26)$$

Використовуючи співвідношення Менлі - Роу (2.4.13), можна тепер уточнити вираз для N_1 :

$$N_1(t) = b_{10}^2 - \frac{1}{2} b_m^2 \cos 2(\sigma b_{10} t + \psi). \quad (2.4.27)$$

Отримані в наближенні заданого струму розв'язки (2.4.25)-(2.4.27) добре узгоджуються з точними розв'язками системи (2.4.20), графіки яких (для кількостей квантів) подано на рис.2.4.2а.

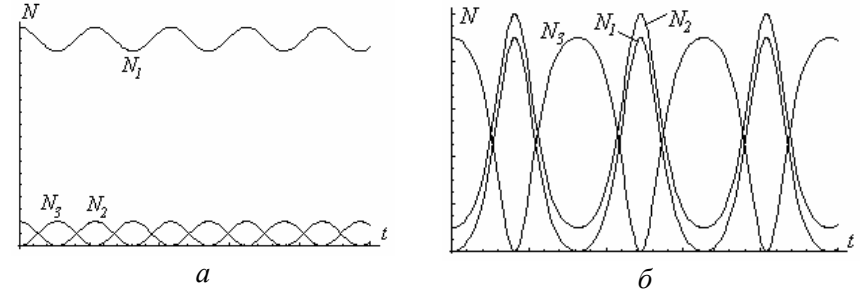


Рис.2.4.2. Розв'язки рівнянь параметричної взаємодії трьох мод: а - для випадку, коли в початковий момент переважала одна з низькочастотних мод; б - для випадку, коли в початковий момент переважала високочастотна мода.

б) Розглянемо тепер випадок, коли в початковий момент в системі переважають високочастотні кванти:

$$N_3 \gg N_{1,2}. \quad (2.4.28)$$

На відміну від попереднього випадку, така умова, якщо вона виконана в початковий момент часу, швидко порушиться в результаті розпаду високочастотних квантів на низькочастотні, тому результати, отримані в наближенні заданого струму, будуть справедливими лише протягом невеликого часового проміжку.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

У наближенні заданого накачування система (2.4.20) тепер набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \sigma b_2 b_{30}; \\ \dot{b}_2 &= \sigma b_1 b_{30}. \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Система (2.4.29) зводиться до одного рівняння вигляду

$$\ddot{b}_2 - (\sigma b_{30})^2 b_2 = 0. \quad (2.4.30)$$

Його розв'язки для початкових умов

$$b_1(t=0) = 0, \quad b_2(t=0) = b_m \quad (2.4.31)$$

мають вигляд

$$b_1(t) = b_m sh(\sigma b_{30} t), \quad b_2(t) = b_m ch(\sigma b_{30} t), \quad (2.4.32)$$

тобто кількість низькочастотних квантів у початкові моменти часу зростає експоненціально. Цей ефект дістав назву *розпадної нестійкості*.

Точний розв'язок системи (2.4.20) для цього випадку наведений на рис.2.4.2б. Видно, що в початковий момент часу справді спостерігається експоненціальне зростання кількості низькочастотних квантів, що супроводжується відповідним зменшенням кількості високочастотних квантів. Коли всі високочастотні кванти розпадаються, процес починає йти в протилежному напрямку - низькочастотні кванти зливаються, утворюючи високочастотні. В результаті через деякий проміжок часу початкові умови відновлюються, після чого процес періодично повторюється.

* * *

Як буде показано нижче (див. розділ 3.5), результати, отримані для параметричної взаємодії трьох осциляторів у часі, безпосередньо переносяться на параметричну взаємодію трьох хвиль у просторі.

Контрольні питання до розділу 2.4.

2.4.1. Чому нормовану інтенсивність коливань називають числом квантів відповідного сорту?

2.4.2. Чим відрізняються співвідношення Менлі - Роу для консервативних та дисипативних систем?

2.4.3. Чому для низькочастотного накачування наближення заданого накачування виконується краще, ніж для високочастотного?

2.4.4. Узагальніть співвідношення Менлі - Роу для випадку резонансної взаємодії чотирьох осциляторів із кубічним зв'язком.

2.4.5. За яких умов характер взаємодії мод буде проміжним між випадками розпадної нестійкості та низькочастотного накачування? Намалуйте для цього випадку залежності кількостей квантів від часу.

2.4.6. В якому наближенні задача про резонансну взаємодію трьох осциляторів із нелінійним квадратичним зв'язком зводиться до моделі параметричної системи?

Задачі до розділу 2.4.

2.4.1. Побудувати тривимірний фазовий портрет системи трьох осциляторів з квадратичним зв'язком (по осях відкласти амплітуди коливань). Чи можливо, щоб у системі існували тільки високочастотні (тільки низькочастотні) кванти?

2.4.2. Дослідити взаємодію двох осциляторів з нелінійним силовим (інерційним)

а) квадратичним зв'язком, якщо $\omega_2 = 2\omega_1$;

б) кубічним зв'язком, якщо $\omega_2 = 3\omega_1$.

Одержати вкорочені рівняння для повільних амплітуд та побудувати їхні розв'язки.

2.4.3. Дослідити взаємодію двох осциляторів з нелінійним силовим (інерційним) кубічним зв'язком, якщо $\omega_2 = 3\omega_1$. Одержати вкорочені рівняння для повільних амплітуд та побудувати їхні розв'язки.

2.4.4. Отримати систему вкорочених рівнянь, що описує резонансну взаємодію чотирьох консервативних осциляторів з нелінійним (кубічним) зв'язком:

а) $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$;

б) $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.4. Резонансна взаємодія трьох осциляторів з квадратичним зв'язком.

2.4.5*. Користуючись результатами попередньої задачі, проаналізувати часовий хід коливань у системі чотирьох консервативних осциляторів з нелінійним (кубічним) зв'язком для різних початкових умов.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

Ми бачили (див. розділ 1.12), що дія зовнішньої сили на автогенератор може призвести до зриву автоколивань у ньому (ефект вимушеної синхронізації). В реальних експериментах джерелом зовнішньої сили виступає деякий інший генератор, який, у свою чергу, як правило, піддається впливу першого. Так виникає задача про взаємодію двох автогенераторів, або, що майже те саме, двочастотний (у загальному випадку - багаточастотний) автогенератор. Виявляється, що в такому автогенераторі може мати місце конкуренція мод за джерело живлення, що приводить або до співіснування мод, або до придушення одних мод іншими.

Результати, отримані при дослідженні цієї схеми, легко узагальнюються для випадку багаточастотних автогенераторів із розподіленими параметрами (наприклад, лазерів), а також переносяться на конкуренцію в екологічних (боротьба популяцій за обмежене джерело харчування) та економічних (боротьба фірм за ринки збуту) системах.

2.5.1. Схема двочастотного автогенератора.

Будемо досліджувати двочастотний автогенератор LC-типу, схему якого подано на рис.2.5.1¹. Паралельні коливні контури L_1 , R_1 , C' та L_2 , R_2 , C'' пов'язані ємністю зв'язку C . Перший з контурів індуктивно зв'язаний з колом виток - затвір польового транзистора (або катодно-сітковим колом електронної лампи). Через цей самий контур протікає стоковий струм польового транзистора.

Контури розташовані асиметрично щодо стоку польового транзистора: він увімкнений у перший контур, а не в середню точку між двома контурами (між конденсаторами C' та C''). Справді, симетричне увімкнення (до ємності C) у цьому випадку неможливе, оскільки тоді буде відсутнє живлення транзистора.

¹ Первісно в ролі активного елемента схеми використовувалася електронна лампа (тріод).

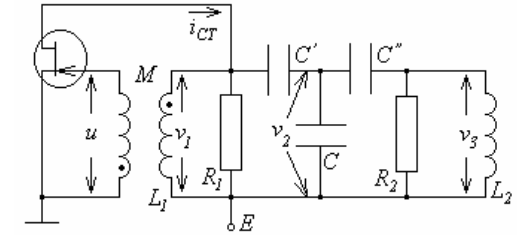


Рис.2.5.1. Схема двочастотного автогенератора.

2.5.2. Вихідні рівняння.

Рівняння, що описують роботу аналізованої схеми, можна записати у формі:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} \int v_1 dt + \frac{v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_3}{R_2} + \frac{1}{L_2} \int v_3 dt &= i_{CT}; \\ v_1 - v_2 &= \frac{1}{C'} \int dt \left(i_{CT} - \frac{v_1}{R_1} - \frac{1}{L_1} \int v_1 dt' \right); \\ v_2 - v_3 &= \frac{1}{C''} \int dt \left(\frac{v_3}{R_2} + \frac{1}{L_2} \int v_3 dt' \right) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

(напруги v_1 , v_2 , v_3 , u та струм i_{CT} показані на рис.2.5.1). Перше з рівнянь виражає рівність суми струмів, що протікають через усі гілки коливних контурів, повному наскрізному струму - струму стоку. Друге та третє рівняння виражають, по суті, другий закон Кірхгофа для контурів R_1 , C' , C та R_2 , C'' , C (у правих частинах під інтегралами стоять струми через ємності C' та C'').

Диференціюючи за часом перше з рівнянь (2.5.1) один раз, а друге й третє - двічі, отримаємо:

$$\frac{v_1}{L_1} + \frac{1}{R_1} \frac{dv_1}{dt} + C \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R_2} \frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{L_2} = \frac{di_{CT}}{dt};$$

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

$$C' \frac{d^2 v_1}{dt^2} - C' \frac{d^2 v_2}{dt^2} = \frac{di_{CT}}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{L_1}; \quad (2.5.2)$$

$$C'' \frac{d^2 v_2}{dt^2} - C'' \frac{d^2 v_3}{dt^2} = \frac{1}{R_2} \frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{L_2}.$$

Виключивши із системи (2.5.2) за допомогою її першого рівняння у формі

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} = \frac{1}{C} \left(\frac{di_{CT}}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{L_1} - \frac{1}{R_2} \frac{dv_3}{dt} - \frac{v_3}{L_2} \right) \quad (2.5.3)$$

змінну v_2 , можна отримати:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} = \left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C} \right) \left(\frac{di_{CT}}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{L_1} \right) - \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_2} \frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{L_2} \right); \quad (2.5.4)$$

$$\frac{d^2 v_3}{dt^2} = - \left(\frac{1}{C''} + \frac{1}{C} \right) \left(\frac{1}{R_2} \frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{L_2} \right) - \frac{1}{C} \left(\frac{di_{CT}}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{L_1} \right).$$

Введемо позначення:

$$C_1 = \frac{CC'}{C+C'}, \quad C_2 = \frac{CC''}{C+C''}, \quad \omega_{01,02} = \frac{1}{\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}},$$

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2R_{1,2}C_{1,2}} \quad (2.5.5)$$

- відповідно еквівалентні ємності, парціальні частоти та декременти коливних контурів. Тоді система (2.5.4) набере вигляду:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dv_1}{dt} + \omega_{01}^2 v_1 + \frac{C_2}{C} \left(2\delta_2 \frac{dv_3}{dt} + \omega_{02}^2 v_3 \right) = \frac{1}{C_1} \frac{di_{CT}}{dt}; \quad (2.5.6)$$

$$\frac{d^2 v_3}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dv_3}{dt} + \omega_{02}^2 v_3 + \frac{C_1}{C} \left(2\delta_1 \frac{dv_1}{dt} + \omega_{01}^2 v_1 \right) = \frac{1}{C} \frac{di_{CT}}{dt}.$$

Ліві частини рівнянь системи (2.5.6) симетричні. Асиметрія пра-

вих частин обумовлена асиметрією увімкнення провідника із стоковим струмом до системи зв'язаних контурів (рис.2.5.1, див. п.2.5.1).

Щоб звести систему (2.5.6) до одного рівняння, подіємо на перше з її рівнянь оператором

$$\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2,$$

на друге - оператором

$$\frac{C_2}{C} \left(2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right),$$

а потім віднімемо друге рівняння від першого. Отримаємо:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{d}{dt} + \omega_{01}^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) - k^2 \left(2\delta_1 \frac{d}{dt} + \omega_{01}^2 \right) \right] \times \left(2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) v_1 = \frac{1}{C_1} \left[\frac{d^2}{dt^2} + (1-k^2) \left(2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) \right] \frac{di_{CT}}{dt}, \quad (2.5.7)$$

де

$$k = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C} \quad (2.5.8)$$

- коефіцієнт ємнісного зв'язку між контурами.

Рівняння (2.5.7) необхідно доповнити формулами для стік-затвірної характеристики

$$i_{CT} = SU - \frac{SU^3}{3K^2} \quad (2.5.9)$$

(пор. (1.11.1)) та для затвірної напруги

$$u = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{L_1} \int v_1 dt' \right) = \frac{M}{L_1} v_1. \quad (2.5.10)$$

Позначивши

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

$$\alpha = \frac{MS}{L_1 C_1}, \quad \gamma = \frac{M^3 S}{3K^2 L_1^3 C_1},$$

можна замість (2.5.9)-(2.5.10) записати:

$$\frac{i_{CT}}{C_1} = \alpha v_1 - \gamma v_1^3. \quad (2.5.11)$$

Підставляючи (2.5.11) до (2.5.7), отримаємо остаточно:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{d}{dt} + \omega_{01}^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) - k^2 \left(2\delta_1 \frac{d}{dt} + \omega_{01}^2 \right) \right] \times \\ \times \left(2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) v_1 - \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2}{dt^2} + (1-k^2) \left(2\delta_2 \frac{d}{dt} + \omega_{02}^2 \right) \right] (\alpha v_1 - \gamma v_1^3) = 0. \quad (2.5.12)$$

Рівняння (2.5.12) дозволяє описати процеси в аналізованій схемі.

2.5.3. Виведення вкорочених рівнянь.

Нехай спочатку $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\delta_{1,2}=0$. Тоді рівняння (2.5.12) істотно спрощується:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{01}^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{02}^2 \right) - \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 k^2 \right] v_1 = 0. \quad (2.5.13)$$

Рівняння (2.5.13) - лінійне з постійними коефіцієнтами та похідними за часом лише парних порядків. Отже, воно описує чисто гармонічні коливання зв'язаних контурів (за відсутності живлення та дисипації - пор. із розділом 2.1). Власні частоти вказаних коливань будуть

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2} \quad (2.5.14)$$

(пор. із формулою (2.1.21)).

Вважатимемо тепер параметри α , γ , $\delta_{1,2}$ величинами першого по-

ряду мализни. Тоді рівняння (2.5.12) відрізнятиметься від (2.5.13) лише малими доданками, і, отже, його можна розв'язувати за методом повільних амплітуд:

$$v_1(t) = A(t) \exp(i\omega_1 t) + B(t) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}, \quad (2.5.15)$$

$$|\ddot{A}| \ll \omega_1 |\dot{A}| \ll \omega_1^2 |A|, \quad |\ddot{B}| \ll \omega_2 |B| \ll \omega_2^2 |B|.$$

Похідні від (2.5.15) із точністю до першого порядку мализни мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} v_1 = (i\omega_1 A + \dot{A}) \exp(i\omega_1 t) + (i\omega_2 B + \dot{B}) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.};$$

$$\frac{d^2}{dt^2} v_1 \approx (-\omega_1^2 A + 2i\omega_1 \dot{A}) \exp(i\omega_1 t) + (-\omega_2^2 B + 2i\omega_2 \dot{B}) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.};$$

$$\frac{d^3}{dt^3} v_1 \approx (-i\omega_1^3 A + 3\omega_1^2 \dot{A}) \exp(i\omega_1 t) + (-i\omega_2^3 B + 3\omega_2^2 \dot{B}) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.};$$

$$\frac{d^4}{dt^4} v_1 \approx (\omega_1^4 A - 4i\omega_1^3 \dot{A}) \exp(i\omega_1 t) + (\omega_2^4 B - 4i\omega_2^3 \dot{B}) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}$$

(2.5.16)

Кубічний доданок після відкидання кратних та комбінаційних частот набуває вигляду:

$$v_1^3 \approx 3A(AA^* + 2BB^*) \exp(i\omega_1 t) + 3B(BB^* + 2AA^*) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.} \quad (2.5.17)$$

Підставивши (2.5.15)-(2.5.17) до (2.5.12), відкинемо доданки другого та більш високих порядків мализни і врахуємо явний вигляд власних частот (2.5.14), що приведе до зникнення доданків нульового порядку мализни. Тоді, прирівнявши в обох частинах отриманого рівняння амплітуди однакових експонент, можна дістати такі вкорочені рівняння:

$$2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2\omega_1^2) \dot{A} + \left\{ (1-k^2) \left[2(\delta_1 \omega_{02}^2 + \delta_2 \omega_{01}^2) - \alpha \omega_{02}^2 \right] - \right. \\ \left. - [2(\delta_1 + \delta_2) - \alpha] \omega_1^2 - 3\gamma [\omega_1^2 - (1-k^2) \omega_{02}^2] (AA^* + 2BB^*) \right\} A = 0;$$

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

$$2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2\omega_2^2)\dot{B} + \left\{ (1 - k^2) \left[2(\delta_1 \omega_{02}^2 + \delta_2 \omega_{01}^2) - \alpha \omega_{02}^2 \right] - \right. \quad (2.5.18)$$

$$\left. - \left[2(\delta_1 + \delta_2) - \alpha \right] \omega_2^2 - 3\gamma \left[\omega_2^2 - (1 - k^2) \omega_{02}^2 \right] (BB^* + 2AA^*) \right\} B = 0.$$

Введемо позначення:

$$h_{1,2} = - \frac{(1 - k^2) \left[2(\delta_1 \omega_{02}^2 + \delta_2 \omega_{01}^2) - \alpha \omega_{02}^2 \right] - \left[2(\delta_1 + \delta_2) - \alpha \right] \omega_{1,2}^2}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2\omega_{1,2}^2};$$

$$a_{1,2} = - \frac{3\gamma \left[\omega_{1,2}^2 - (1 - k^2) \omega_{02}^2 \right]}{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 - 2\omega_{1,2}^2) h_{1,2}}. \quad (2.5.19)$$

Тоді систему (2.5.18) можна переписати у формі:

$$2\dot{A} = h_1 A \left[1 - a_1 (AA^* + 2BB^*) \right]; \quad (2.5.20)$$

$$2\dot{B} = h_2 B \left[1 - a_2 (BB^* + 2AA^*) \right].$$

2.5.4. Система рівнянь для мод з нелінійним зв'язком.

Зручніше працювати не з амплітудами, а з інтенсивностями мод. Помножимо перше рівняння (2.5.20) на A^* , а потім додамо рівняння, комплексно спряжене до щойно отриманого, врахувавши, що коефіцієнти $h_{1,2}$ та $a_{1,2}$ - чисто дійсні. Проробимо аналогічну процедуру і з другим рівнянням (2.5.20). В результаті дістанемо:

$$\frac{d}{dt} AA^* = h_1 AA^* \left[1 - a_1 (AA^* + 2BB^*) \right]; \quad (2.5.21)$$

$$\frac{d}{dt} BB^* = h_2 BB^* \left[1 - a_2 (BB^* + 2AA^*) \right].$$

Введемо позначення:

$$m_1 = a_1 AA^*; \quad m_2 = a_2 BB^*; \quad \rho_{12} = \frac{2a_1}{a_2}; \quad \rho_{21} = \frac{2a_2}{a_1}. \quad (2.5.22)$$

Величини $m_{1,2}$ являють собою нормовані інтенсивності коливань з частотами $\omega_{1,2}$. Величини $\rho_{12,21}$ називаються *коефіцієнтами нелінійного зв'язку* між модами.

Переписавши систему (2.5.21) у позначеннях (2.5.22), остаточно отримуємо:

$$\dot{m}_1 = h_1 m_1 (1 - m_1 - \rho_{12} m_2); \quad (2.5.23)$$

$$\dot{m}_2 = h_2 m_2 (1 - m_2 - \rho_{21} m_1).$$

За виконання умов

$$\frac{\alpha}{2} > \delta_1 + \delta_2 \frac{\omega_{1,2}^2 - (1 - k^2) \omega_{01}^2}{\omega_{1,2}^2 - (1 - k^2) \omega_{02}^2} \quad (2.5.24)$$

коефіцієнти $h_{1,2}$ (фактично інкременти малих коливань) та $a_{1,2}$ виходять додатними. Це означає, що для обох мод виконано амплітудну умову самозбудження. При цьому величини $m_{1,2}$ та $\rho_{12,21}$, зрозуміло, теж будуть додатними.

Як впливає з (2.5.22), для аналізованої схеми

$$\rho_{12} \rho_{21} = 4. \quad (2.5.25)$$

Слід вказати, що рівняння (2.5.23) значно більш загальні, ніж модель двочастотного автогенератора, для якої вони отримані. Такий самий вигляд матимуть, наприклад, рівняння для двох зв'язаних автогенераторів (зрозуміло, що умова (2.5.25) при цьому вже не буде виконуватися). Система рівнянь такого самого типу описує конкуренцію мод у лазері чи мазері (при цьому кількість мод може бути довільною), а також інших автоколивних системах із розподіленими параметрами (мазерах на циклотронному резонансі, ланцюжках діодів Гана чи лавинопролітних діодів та ін.). Такий самий вигляд матиме система рівнянь для кількості осіб у популяціях, що конкурують за обмежене джерело харчування (наприклад, зайці та олені в лісі із скінченою швидкістю росту рослин). Нарешті, подібні ж рівняння можуть, очевидно, описувати конкуренцію виробників за ринки збуту в економіці.

За відсутності нелінійного зв'язку між модами ($\rho_{12} = \rho_{21} = 0$) кожне з рівнянь (2.5.23) нагадує вкорочене рівняння для автогенератора Ван дер Поля (див. (1.11.20) або друге з рівнянь системи (1.11.22)). Вони описують зростання амплітуди кожної з мод від рівня малих

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

коливань і її наступне встановлення на рівні $m = 1$ (рис.1.11.3). Навпаки, за наявності нелінійного зв'язку ($\rho_{12} \neq 0$, $\rho_{21} \neq 0$) поведінка кожної з мод визначається не тільки інтенсивністю її коливань, але й інтенсивністю коливань іншої моди. Якщо, наприклад, $\rho_{12} = 0$, але $\rho_{21} \neq 0$, перша мода не зазнаватиме впливу другої, але сама впливатиме на неї, пригнічуючи або навіть придушуючи її зростання.

2.5.5. Стаціонарні стани та їхня стійкість.

В стаціонарному стані ($d/dt=0$) система (2.5.23) набуває вигляду:

$$m_{10}(1 - m_{10} - \rho_{12}m_{20}) = 0; \quad m_{20}(1 - m_{20} - \rho_{21}m_{10}) = 0. \quad (2.5.26)$$

Набір її розв'язків має вигляд:

$$m_{10} = m_{20} = 0; \quad (2.5.27)$$

$$m_{10} = 0, \quad m_{20} = 1; \quad (2.5.28)$$

$$m_{20} = 0, \quad m_{10} = 1; \quad (2.5.29)$$

$$m_{10} = \frac{1 - \rho_{12}}{1 - \rho_{12}\rho_{21}}, \quad m_{20} = \frac{1 - \rho_{21}}{1 - \rho_{12}\rho_{21}}. \quad (2.5.30)$$

Оскільки за змістом задачі $m_{10,20} > 0$, останній розв'язок може існувати лише при виконанні однієї з умов

$$\begin{cases} \rho_{12} < 1; \\ \rho_{21} < 1 \end{cases} \quad (2.5.31)$$

або

$$\begin{cases} \rho_{12} > 1; \\ \rho_{21} > 1. \end{cases} \quad (2.5.32)$$

Для схеми, зображеної на рис.2.5.1, умова (2.5.31) не може бути виконана (див. (2.5.25)). Але для інших систем, описуваних рівняннями (2.5.23), вона в принципі може справджуватись, так само як і умова (2.5.32).

Щоб дослідити стаціонарні розв'язки (2.5.27) - (2.5.30) на стійкість, підставимо до (2.5.23) розв'язок у вигляді суми стаціонарного

розв'язку та малої змінної складової:

$$m_{1,2} = m_{10,20} + \tilde{m}_{1,2}, \quad |\tilde{m}_{1,2}| \ll m_{10,20}. \quad (2.5.33)$$

Після лінеаризації система зводиться до одного лінійного рівняння другого порядку

$$\ddot{\tilde{m}}_1 - [h_1(1 - 2m_{10} - \rho_{12}m_{20}) + h_2(1 - 2m_{20} - \rho_{21}m_{10})]\dot{\tilde{m}}_1 + h_1h_2[(1 - 2m_{10} - \rho_{12}m_{20})(1 - 2m_{20} - \rho_{21}m_{10}) - \rho_{12}\rho_{21}m_{10}m_{20}]\tilde{m}_1 = 0, \quad (2.5.34)$$

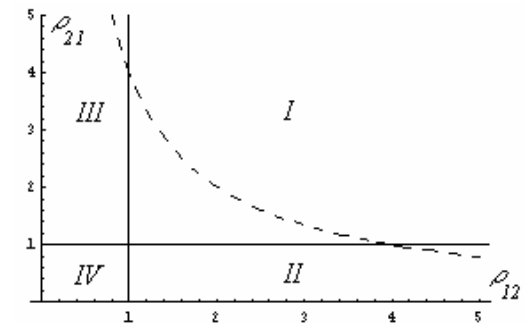
умови стійкості якого мають вигляд

$$\begin{cases} h_1(1 - 2m_{10} - \rho_{12}m_{20}) + h_2(1 - 2m_{20} - \rho_{21}m_{10}) < 0; \\ (1 - 2m_{10} - \rho_{12}m_{20})(1 - 2m_{20} - \rho_{21}m_{10}) - \rho_{12}\rho_{21}m_{10}m_{20} > 0. \end{cases} \quad (2.5.35)$$

Підставляючи до (2.5.35) розв'язки (2.5.27) - (2.5.30), можна переконатися в тому, що:

- розв'язок (2.5.27) завжди нестійкий (нестійкий вузол);
- розв'язки (2.5.28) - (2.5.29) стійкі відповідно при $\rho_{12} > 1$ та при $\rho_{21} > 1$ (стійкі вузли), в протилежному випадку отримуємо сідлові точки;
- розв'язок (2.5.30) стійкий за умови (2.5.31) (стійкий вузол), за умови (2.5.32) отримуємо сідлову точку.

Рис.2.5.2. Области, що відповідають режимам сильного взаємного (I), сильного невзаємного (II, III) та слабого взаємного (IV) зв'язку в площині (ρ_{12}, ρ_{21}) ; штрихова лінія відповідає умові $\rho_{12}\rho_{21}=4$.



Таким чином, у площині (ρ_{12}, ρ_{21}) можна виділити чотири харак-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

терні області, показані на рис.2.5.2: I - область сильного взаємного зв'язку ($\rho_{12} > 1, \rho_{21} > 1$), II-III - області сильного неважкого зв'язку ($\rho_{12} < 1, \rho_{21} > 1$ та $\rho_{12} > 1, \rho_{21} < 1$) та IV - область слабого взаємного зв'язку ($\rho_{12} < 1, \rho_{21} < 1$). Остання область для схеми, зображеної на рис.2.5.1, є недосяжною в силу умови (2.5.25), але цілком може реалізуватися для інших систем, які описуються рівняннями (2.5.23).

2.5.6. Фазові портрети.

Поділивши перше рівняння системи (2.5.23) на друге, можна отримати рівняння для фазових траєкторій у координатах (m_1, m_2). Відповідні фазові портрети для режимів I-IV подано на рис.2.5.3а-г.

Видно, що у випадку сильного неважкого зв'язку (рис.2.5.3б,в) незалежно від початкових умов у автогенераторі встановлюється лише одна мода - та, яка може ефективно придушувати іншу, не зазнаючи помітного впливу з її боку. Саме цей режим відповідає, очевидно, раніше розглянутому випадку вимушеної синхронізації автогенератора заданою зовнішньою силою (див. розділ 1.12).

У випадку екологічних систем режим сильного неважкого зв'язку реалізувався, наприклад, в Австралії, коли туди були завезені лебеді. У водоймах вони мали змогу добувати корм з більшої глибини, ніж місцеві породи качок, тому поступово витіснили їх.

У випадку сильного взаємного зв'язку (рис.2.5.3а) також встановлюється лише одна мода. Яка саме - залежить від початкових умов: виживає та мода, яка переважала в початковий момент часу. Цей режим нагадує тригер, який має два рівноправні положення рівноваги. При увімкненні живлення тригер устанавлюється в одне з них залежно від флуктуацій струмів та напруг у початковий момент часу.

Нарешті, у випадку слабого взаємного зв'язку взаємний вплив мод є малим, тому обидві моди співіснують. В цьому режимі, очевидно, матимуть місце биття між автоколиваннями різних частот (пор. із виходом за межі смуги синхронізації для слабких зовнішніх сил, див. розділ 1.12).

Для екологічних систем режиму слабого взаємного зв'язку відповідає, наприклад, співіснування в лісі білок, що харчуються переважно шишками й горіхами, та зайців, що їдять переважно зелень і пагони.

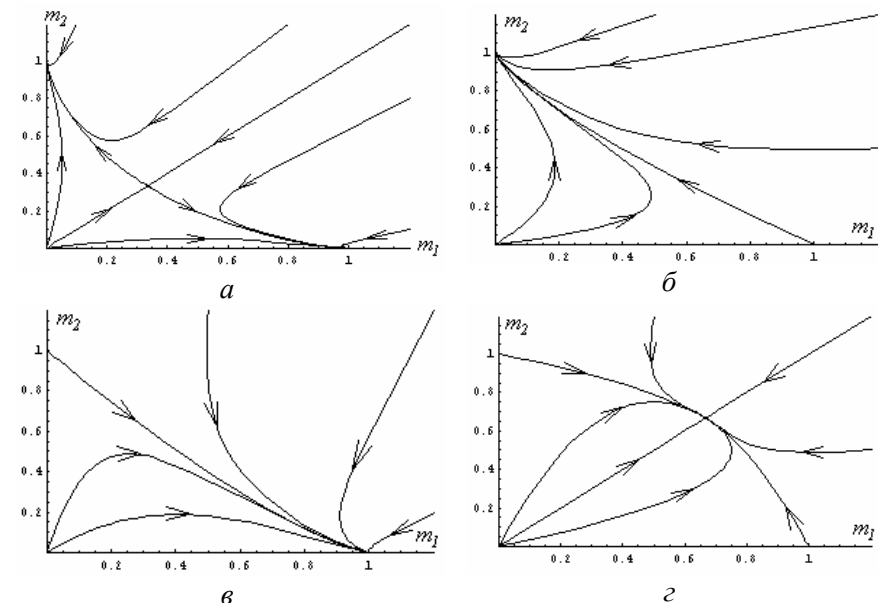


Рис.2.5.3. Фазові портрети конкуренції мод для випадків сильного взаємного (а - режим I), сильного неважкого (б, в - режими II та III) та слабого взаємного (г - режим IV) зв'язку.

2.5.7. Затягування частоти в двочастотному автогенераторі.

На завершення розглянемо ще один ефект, притаманний саме схемі двочастотного автогенератора - затягування частоти. В основі цього явища лежить той факт, що в режимі сильного взаємного зв'язку та чи інша мода встановлюється в залежності від початкових умов.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

Будемо перестроювати контури автогенератора (наприклад, шляхом зміни ємності C' або C''), змінюючи тим самим параметр $\xi = \omega_1^2 / \omega_02^2$. Це, в свою чергу, приведе до зміни коефіцієнтів нелінійного зв'язку ρ_{12} та ρ_{21} , причому в силу співвідношення (2.5.25) при збільшенні одного з коефіцієнтів інший буде зменшуватися (рис.2.5.4а). Це відповідатиме рухові вздовж штрихової лінії на рис.2.5.2. В результаті будуть по черзі реалізовуватися різні режими - II, I, III.

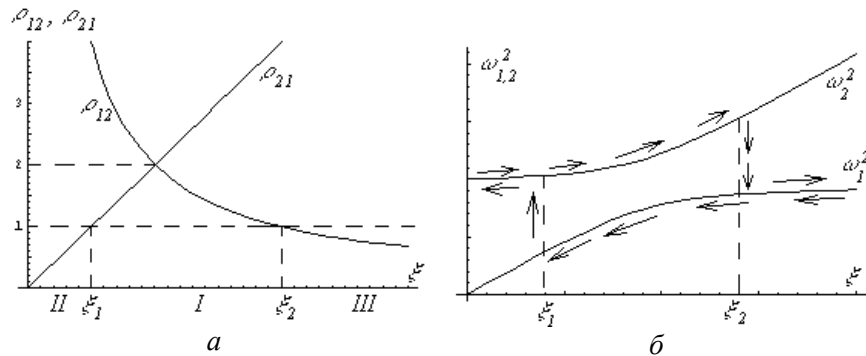


Рис.2.5.4: а - залежність коефіцієнтів нелінійного зв'язку від відношення квадратів парціальних частот; б - залежність власних частот від відношення квадратів парціальних частот та ефект гістерезису при перестроюванні автогенератора.

Нехай у початковий момент часу $\xi < \xi_1$, що відповідає режиму II (рис.2.5.4а). Тоді в автогенераторі встановляться коливання на частоті ω_2 . Будемо перестроювати контури так, щоб параметр ξ зростав. При переході через значення ξ_1 встановиться режим I. Оскільки в цей момент у генераторі існували коливання на частоті ω_2 , вони збережуться. Лише при переході ξ через значення ξ_2 , коли в системі встановиться режим III, частота коливань стрибком зміниться на ω_1 (рис.2.5.4б). Зрозуміло, що при зменшенні ξ від початкового значен-

ня $\xi > \xi_2$ стрибкоподібна зміна частоти відбудеться при переході через точку ξ_1 . Таким чином, в області $\xi_2 > \xi > \xi_1$ матиме місце гістерезис, або так зване *затягування частоти*. Цей ефект з практичної точки зору є вкрай небажаним. Аналіз показує, що для його зменшення слід використовувати слабкий зворотний зв'язок в автогенераторі або зменшувати добротність другого контуру.

Контрольні питання до розділу 2.5.

- 2.5.1. Запропонуйте схему двоконтурного автогенератора із симетричним (щодо контурів) увімкненням стоку польового транзистора.
- 2.5.2. Як здійснюється взаємний вплив мод у двоконтурному автогенераторі?
- 2.5.3. Опишіть ефекти взаємного впливу мод у двочастотному автогенераторі, користуючись поняттям середньої крутості.
- 2.5.4. Коли диференціальне рівняння четвертого порядку можна розв'язувати за методом повільних амплітуд?
- 2.5.5. Чому дорівнюють коефіцієнти нелінійного зв'язку між модами в задачі про вимушену синхронізацію автогенератора?
- 2.5.6. Яким режимам конкуренції мод відповідають режими нав'язування частоти та биття між автоколиваннями та вимушеними коливаннями в задачі про вимушену синхронізацію автогенератора?
- 2.5.7. Що являтиме собою фазовий портрет системи двох зв'язаних автогенераторів у змінних дія - кут у різних режимах конкуренції мод?
- 2.5.8. Запропонуйте схему автогенератора, в якому була б можлива одночасна генерація двох частот.
- 2.5.9. Охарактеризуйте стаціонарні точки в режимі вимушеної синхронізації для проміжних амплітуд зовнішньої сили.
- 2.5.10. Які режими конкуренції мод можливі в системі двох автогенераторів, зв'язаних через оптронну пару?
- 2.5.11. Поясніть можливий механізм гістерезису в системі з двох зв'язаних автогенераторів при перестроюванні парціальної частоти одного з них.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

2.5.12. Чи можливе зтягування частоти в системі двох автогенераторів, зв'язаних через оптронну пару?

2.5.13. Які стаціонарні режими генерації можливі в лазері, якщо в смугу підсилення активної речовини потрапляють три моди відкритого резонатора?

2.5.14. Скільки коефіцієнтів нелінійного зв'язку характеризуватимуть конкуренцію між трьома модами?

2.5.15. Опишіть різні режими конкуренції популяцій за обмежене джерело харчування.

2.5.16. Які стратегії завоювання ринку збуту можна запропонувати на основі розв'язання задачі про конкуренцію мод?

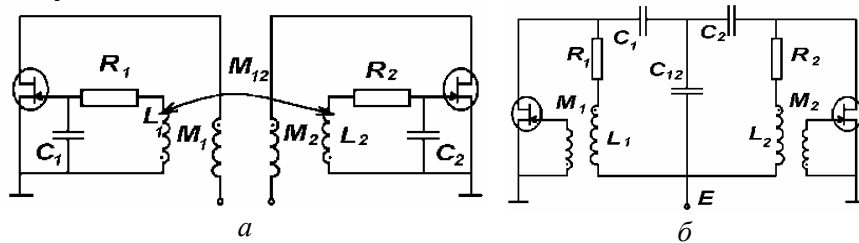
Задачі до розділу 2.5.

2.5.1. Отримати систему двох зв'язаних нелінійних рівнянь, що описують:

а) систему двох зв'язаних автогенераторів з ємнісним зв'язком;

б) систему двох зв'язаних автогенераторів з індуктивним зв'язком.

Стік-затворну характеристику польового транзистора апроксимувати кубічним поліномом.



2.5.2. Користуючись результатами попередньої задачі, для

а) системи двох зв'язаних автогенераторів з ємнісним зв'язком;

б) системи двох зв'язаних автогенераторів з індуктивним зв'язком розв'язати відповідні рівняння у нульовому наближенні за параметрами дисипації та нелінійності. Знайти нормальні частоти та коефіцієнти розподілу амплітуд. Побудувати графік залежності квадратів

безрозмірних власних частот двоконтурного автогенератора від параметра розстроювання контурів.

2.5.3. Користуючись результатами попередніх задач, для

а) системи двох зв'язаних автогенераторів з ємнісним зв'язком;

б) системи двох зв'язаних автогенераторів з індуктивним зв'язком переписати систему нелінійних рівнянь у нормальних координатах нульового наближення. Отримати вкорочені рівняння для повільних амплітуд. Отримати рівняння для нормованих інтенсивностей, що описують нелінійний зв'язок між модами.

2.5.4. Визначити, коли режим

а) генерації лише однієї моди;

б) одночасної генерації двох мод

в автогенераторі на зв'язаних контурах, що описується системою рівнянь (2.5.23), є стійким. Визначити можливий характер відповідних стаціонарних точок за різних значень параметрів.

2.5.5. Користуючись системою рівнянь (2.5.23), побудувати методом ізоклін у координатах m_1, m_2 фазовий портрет системи для різних значень коефіцієнтів ρ_{12}, ρ_{21} .

2.5.6*. Знайти ширину смуги зтягування частот

а) двочастотного автогенератора;

б) системи двох зв'язаних автогенераторів з ємнісним зв'язком;

в) системи двох зв'язаних автогенераторів з індуктивним зв'язком.

Як можна добитись її зменшення?

2.5.7. Рівняння, що описують боротьбу популяцій чисельністю $N_{1,2}$ за обмежені харчові ресурси, мають вигляд:

$$\dot{N}_1 = N_1 [\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 / K_1) N_1 - \gamma_1 N_2];$$

$$\dot{N}_2 = N_2 [\varepsilon_2 - (\varepsilon_2 / K_2) N_2 - \gamma_2 N_1];$$

а) Знайти рівноважні кількості популяцій та з'ясувати умови стійкості цих рівноважних станів. За яких умов популяції можуть співіснувати? Коли таке співіснування неможливе?

б) Побудувати фазовий портрет системи для випадків, коли співіснування популяцій можливе та неможливе.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.5. Конкуренція мод у багаточастотному автогенераторі.

2.5.8*. За допомогою комп'ютера побудувати тривимірний фазовий портрет для системи рівнянь, що описує конкуренцію трьох мод. Попередньо знайти стаціонарні точки системи та дослідити їхню стійкість.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.
2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

Ми вже розглядали приклади простих систем, які за певних умов можуть демонструвати непередбачувану (стохастичну) поведінку. Прикладом такої системи може бути нелінійний консервативний осцилятор, на який діє мала періодична зовнішня сила (див. розділ 1.10). Оскільки задана зовнішня сила, що діє на осцилятор, є спрощеною моделлю взаємодії двох осциляторів, можна чекати, що в системі кількох зв'язаних нелінійних консервативних осциляторів також повинен за певних умов спостерігатися режим стохастичних коливань. Розглянемо загальні поняття, що характеризують стохастичний режим консервативних (гамільтонівських) систем з багатьма ступенями вільності.

Особливості хаотичної динаміки в дисипативних системах буде проаналізовано в наступному розділі 2.7.

2.6.1. Оператор потоку.

Розглянемо динамічну систему, що описується рівняннями (В.1), або у векторній формі

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}. \quad (2.6.1)$$

Розв'язок рівняння (2.6.1) залежить від часу t та початкових умов \vec{x}_0 : $\vec{x}_t = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$.

Введемо оператор F^t , який перетворює точку \vec{x}_0 у точку \vec{x}_t :

$$\vec{x}_t = F^t \vec{x}_0. \quad (2.6.2)$$

Він називається *оператором потоку*.

Дія оператора потоку перетворює область фазового простору Ω_0 (деяку *фазову краплю*) в область Ω_t :

$$\Omega_t = F^t \Omega_0 \quad (2.6.3)$$

(йдеться про те, що зображувальні точки, які в початковий момент часу зосереджені в області Ω_0 фазового простору, в момент t пере-

ходять в область Ω_t).

2.6.2. Фазовий простір гамільтонівських систем.

Оскільки гамільтонівські системи за визначенням (див. розділ 1.10) є консервативними, для них зберігається повна енергія. Це означає, що всі фазові траєкторії гамільтонівської системи для даного значення повної енергії E лежатимуть на гіперповерхні

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = E = const. \quad (2.6.4)$$

Для повністю інтегровних систем розв'язки рівняння (2.6.1) у змінних дія - кут мають вигляд (1.10.2):

$$\vec{I} = const, \quad \vec{\theta} = \vec{\omega}(\vec{I})t + \vec{\theta}_0.$$

Перша із цих умов визначає в n -вимірному фазовому просторі $n/2$ -вимірну гіперповерхню тора. Фазові траєкторії являють собою спіралі, намотані на поверхню тора. Ці спіралі замкнені, якщо існує набір цілих чисел k_i такий, що

$$\sum_{i=1}^{n/2} k_i \omega_i(\vec{I}) = 0, \quad (2.6.5)$$

і розімкнені в протилежному випадку. В першому випадку відповідні тори називають *резонансними*, в другому - *нерезонансними*. В найпростішому випадку системи з двома ступенями вільності, якій відповідає чотиривимірний фазовий простір, умова (2.6.5) означає, що власні частоти є сумірними (їхнє відношення є раціональним числом). Фазовий портрет системи для цього випадку поданий на рис.2.6.1.

Крім того, для гамільтонівських систем справджується теорема Ліувілля:

$$\int_{\Omega_0} d\vec{x} = \int_{\Omega_t} d\vec{x}, \quad (2.6.6)$$

де позначено $d\vec{x} \equiv dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Іншими словами, в гамільтонівських системах об'єм фазової краплі в процесі її еволюції зберігається.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

Крім того, зберігається й топологія вказаної краплі: наприклад, од-
нозв'язна область з часом такою і залишатиметься.

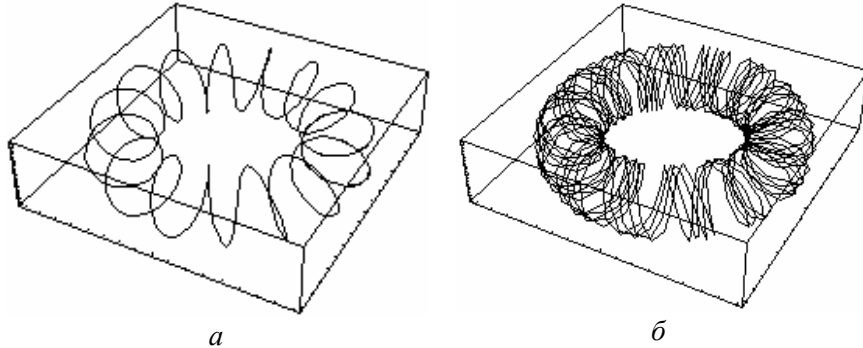


Рис.2.6.1. Фазовий портрет гамільтонівської системи з двома ступенями вільності для випадків сумірних (а) та несумірних (б) частот.

2.6.3. Ергодичні системи.

Нехай рух гамільтонівської системи є фінітним. Це означає, що її фазові траєкторії знаходяться в деякій обмеженій за об'ємом області D фазового простору. Нехай

$$\int_D d\vec{x} \equiv V_D. \quad (2.6.7)$$

Нехай $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ - деякий розв'язок системи (2.6.1). Розглянемо довільну функцію $h(\vec{x}) = h[\vec{x}(t)]$, аргумент якої змінюється з часом уздовж фазової траєкторії $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$. Введемо середнє за часом від цієї функції:

$$\bar{h}(\vec{x}_0) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t, \vec{x}_0) dt. \quad (2.6.8)$$

В загальному випадку середнє за часом повинно залежати від почат-

кових умов \vec{x}_0 .

Введемо також середнє за фазовим об'ємом D від тієї самої функції:

$$\langle h \rangle \equiv \frac{1}{V_D} \int_D h(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (2.6.9)$$

Рух системи називається *ергодичним*, якщо для довільної інтегрованої функції $h(\vec{x})$ та майже для всіх початкових умов \vec{x}_0 виконується рівність:

$$\bar{h}(\vec{x}_0) = \langle h \rangle. \quad (2.6.10)$$

Ергодичність системи означає, що майже будь-яка фазова траєкторія всюди щільно заповнює всю область фазового простору D , в якій відбувається еволюція системи. Саме ця обставина й забезпечує рівність середніх величин, взятих уздовж фазової траєкторії та по області D . В результаті середнє вздовж фазової траєкторії перестає залежати від початкових умов.

Але ергодичність іще не означає хаотичності руху. Справді, оскільки у випадку несумірних частот інтегрованої системи двох осциляторів фазова траєкторія буде щільно заповнювати поверхню двовимірного тора (рис.2.6.1б), така система буде ергодичною. Але її рух є цілком детермінованим і передбачуваним.

2.6.4. Перемішування в гамільтонівських системах.

Хаотична динаміка гамільтонівських систем описується за допомогою поняття перемішування.

Введемо міру області Ω фазового простору, що належить до більшої області D , в якій і відбувається еволюція системи:

$$\mu(\Omega) \equiv \frac{V_\Omega}{V_D}, \quad V_\Omega = \int_\Omega d\vec{x}. \quad (2.6.11)$$

Отже, міра області - це просто відношення її фазового об'єму до фазового об'єму всієї області D .

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

Нехай B - деяка нерухома частина області D , а Ω_t - деяка інша частина цієї області, що еволюціонує з часом під дією оператора потоку (див. (2.6.3)). Позначимо через $B \cap \Omega_t$ множину точок, які є спільними для областей B та Ω_t .

Говорять, що система має властивість *перемішування*, якщо при довільному виборі областей B та Ω_0 виконується співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(B \cap \Omega_t)}{\mu(B)} = \mu(\Omega_t). \quad (2.6.12)$$

Іншими словами, з часом область Ω_t еволюціонує так, що її частини рівномірно заповнюють усю область D :

$$\frac{V(B \cap \Omega_t)}{V(B)} \rightarrow \frac{V(\Omega_t)}{V(D)}.$$

Оскільки за теоремою Ліувіля (2.6.6) об'єм області Ω_t із часом має зберігатися, її еволюція нагадує ріст кореня рослини у вазоні, причому відгалуження кореня з часом заповнюють весь об'єм вазона, але їхня товщина при цьому зменшується (рис.2.6.2).

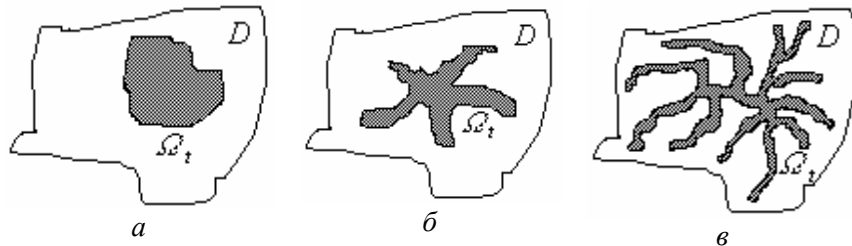


Рис.2.6.2. Еволюція фазової краплі в гамільтонівській системі з перемішуванням.

Наслідками наявності перемішування є:

- абсолютна нестійкість системи. Справді, з часом точки, що належали довільно обраній початковій області Ω_0 , опиняються в різних кінцях області D , тобто віддаль між сусідніми точками зростає;

- ергодичність системи. Оскільки області Ω_0 і B обираються довільним чином, то кожна фазова траєкторія буде щільно заповнювати всю область D ;

- необоротність еволюції системи. Неможливо, щоб із часом точки області Ω_t , що розповзлися по всій області D , знову зібралися в компактний об'єм;

- непередбачуваність руху системи. Оскільки область Ω_0 можна взяти малою, то невелика зміна початкових умов (у межах вказаної області) призведе до значної зміни поведінки системи.

2.6.5. Показники Ляпунова та ентропія Колмогорова - Синає.

Оскільки за теоремою Ліувіля об'єм фазової краплі в гамільтонівських системах зберігається, то за наявності перемішування в таких системах розтягання фазового об'єму в одних напрямках, як уже вказувалося, супроводжується його стисненням в інших. В результаті в кожній точці фазового простору можна виділити стійкі напрямки, вздовж яких сусідні точки притягаються, та нестійкі напрямки, вздовж яких сусідні точки розбігаються. Останнє твердження справедливе і для дисипативних систем, якщо в них має місце яка-небудь нестійкість.

Якщо у фазовому просторі динамічної системи (як консервативної, так і дисипативної) віддаль між сусідніми зображувальними точками значно менша від характерних розмірів області D , в якій відбувається еволюція динамічної системи, то зміна вказаної віддалі з часом звичайно має експоненціальний характер:

$$|(\Delta \vec{x}(t))_i| = \Delta x_{i0} \exp(\lambda_i t), \quad (2.6.13)$$

де $\Delta \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $(\Delta \vec{x})_i$ - проекція вектора $\Delta \vec{x}$ на напрямок x_i (тут прийнято, що напрямки x_i відповідають стійким чи нестійким напрямкам фазового простору). Коефіцієнти λ_i називаються *показниками Ляпунова*. Для стійких напрямків вони від'ємні, для нестійких - додатні.

В силу теореми Ліувілля сума всіх показників Ляпунова для гамі-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

льтонівської системи дорівнює нулеві:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0. \quad (2.6.14)$$

Сума всіх додатних показників Ляпунова гамільтонівської системи, усереднена по області D , називається *ентропією Колмогорова - Синая* (КС-ентропією):

$$h = \langle \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \rangle, \quad (2.6.15)$$

а обернена величина - *часом перемішування*:

$$\tau = \frac{1}{h}. \quad (2.6.16)$$

Для проміжків часу $t \ll \tau$ поведінка системи може вважатися цілком передбачуваною - нестійкість ще не встигає розвинути. Навпаки, для проміжків часу $t \gg \tau$ поведінка системи виявляється непередбачуваною.

Таким чином, КС-ентропія є кількісною мірою хаотичності руху системи. Поняття КС-ентропії можна ввести й для дисипативних систем.

Відзначимо, що для періодичного руху $h=0$, а для асимптотично стійких систем в областях притягання відповідних стаціонарних точок $h>0$.

2.6.6. Спектри хаотичного руху.

На практиці виміряти КС-ентропію дуже складно. Це можна зробити лише в деяких числових експериментах. Тому звичайно хаотичність руху системи найпростіше визначити за її спектром. Зрозуміло, що для хаотичного руху він буде неперервним, а для періодичного - дискретним.

Слід вказати, що на практиці визначення хаотичної динаміки за цією ознакою ускладнюється наявністю шумів, що мають неперервний спектр. Крім того, хаотичний рух практично неможливо відрізнити від періодичного, якщо період останнього складає величину,

більшу від часу спостереження.

Контрольні питання до розділу 2.6.

2.6.1. Коли вільні коливання в системі з трьох зв'язаних осциляторів будуть строго періодичними?

2.6.2. Порівняйте ергодичні системи й системи з перемішуванням. Що вони мають спільного і що - відмінного?

2.6.3. Чи може лінійна система демонструвати ергодичну поведінку?

2.6.4. Запропонуйте схему розрахунку показників Ляпунова для динамічної системи, заданої її рівняннями руху.

2.6.5. Протягом якого проміжку часу можна передбачити поведінку системи із стохастичною динамікою?

2.6.6. За якою ознакою найзручніше визначити на практиці, чи є поведінка гамільтонівської системи непередбачуваною?

2.6.7. Якісно опишіть можливий механізм виникнення хаотичної динаміки в системі двох зв'язаних нелінійних консервативних осциляторів.

Задачі до розділу 2.6.

2.6.1. Для системи, описуваної рівнянням

а) $\ddot{x} - x = 0$;

б) $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$

вказати стійкий та нестійкий напрямки на фазовій площині та знайти показники Ляпунова.

2.6.2. За яких умов система, описувана рівнянням

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0,$$

матиме відмінні від нуля показники Ляпунова?

2.6.3*. Проаналізувати режим внутрішнього нелінійного резонансу в системі

а) двох

б) трьох

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.6. Хаос у гамільтонівських системах із багатьма ступенями вільності.

в) скінченної кількості зв'язаних нелінійних консервативних осциляторів, вважаючи, що гамільтоніан системи має вигляд

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = \sum_i H_i(I_i) + \varepsilon V(\vec{I}, \vec{\theta}), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Отримати співвідношення Менлі – Роу та рівняння для фазових коливань. Сформулювати умову переходу до хаосу.

Вказівка: розкласти потенціал взаємодії в подвійний ряд Фур'є за обома кутами і обмежитись урахуванням резонансного доданку.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

У попередньому розділі 2.6 розглядалася хаотична динаміка гамільтонівських систем. Однак значна частина реальних систем (зокрема, практично всі макросистеми) є дисипативними.

У дисипативних системах стохастична динаміка має свою специфіку, яка була частково продемонстрована вище на прикладі генератора шуму КПР (див. розділ 1.13). Розглянемо тепер це питання з більш загальних позицій. Виявляється, що стохастична динаміка дисипативних систем еквівалентна існуванню в їхньому фазовому просторі деякого особливого об'єкта - дивного атрактора.

2.7.1. Прості атрактори.

Для дисипативних систем теорема Ліувіля вже не справджується, і об'єм фазової краплі з часом змінюється. Він може як зростати, так і зменшуватись, але в середньому з часом він зменшується. В результаті при $t \rightarrow +\infty$ всі зображувальні точки опиняються на деякій підмножині фазового простору з нульовою мірою, яка називається *атрактором*. Точніше кажучи, атрактор - це деяка підмножина B фазового простору, що задовольняє таким умовам:

- вона інваріантна щодо дії оператора потоку, $F^t B = B$;
- існує деякий окіл U , що стискається до B під дією оператора потоку;
- множину B не можна розбити на дві інваріантні підмножини, що не перетинаються.

Прикладами атракторів на фазовій площині можуть бути стаціонарні точки (стійкий фокус, стійкий вузол) та стійкі граничні цикли.

Відзначимо, що вже в тривимірному фазовому просторі можуть існувати стаціонарні точки, що є комбінаціями стійкого та нестійкого типів (рис.2.7.1).

У фазовому просторі з розмірністю вище трьох, крім стаціонарних точок та граничних циклів, з'являється ще один різновид атракторів - багатовимірні інваріантні тори, що відповідають автоколи-

ванням з кількома некрatними частотами.

Всі згадані типи атракторів називають *простими атракторами*.

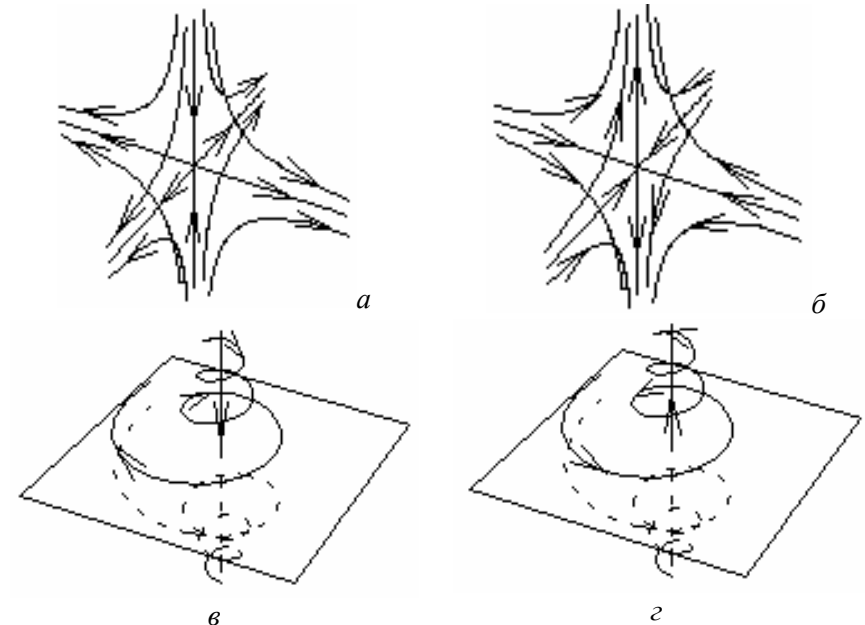


Рис.2.7.1. Особливі точки типу сідло-вузол (а, б) та сідло-фокус (в, г) у тривимірному фазовому просторі.

2.7.2. Дивні атрактори.

Крім простих атракторів, у фазовому просторі можуть існувати ще так звані *дивні атрактори*, які не є ні стаціонарними точками, ні граничними циклами, ні інваріантними торами. Вони поєднують стійкість із нестійкістю. Зображувальні точки з часом притягаються до дивного атрактора, але на самому атракторі сусідні зображувальні точки з часом розбігаються, тобто має місце нестійкість (щось схоже має місце для стаціонарних точок типу сідло-фокус та сідло-вузол, рис.2.7.1). Поведінка фазових траєкторій на дивному атракто-

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

рі аналогічна до поведінки гамільтонівських систем із перемішуванням, їй відповідає стохастична динаміка системи. Зокрема, на дивному атракторі можна визначити КС-ентропію та час перемішування.

Крім того, дивні атрактори мають надзвичайно складну геометричну структуру: вони належать до *фракталів* і характеризуються нецілою геометричною розмірністю.

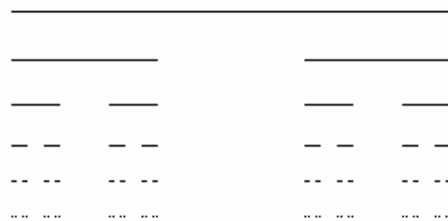
Прикладом дивного атрактора може служити фазовий портрет генератора КНР у режимі стохастичних коливань (рис.1.13.4в).

Із викладеного вище зрозуміло, що дивні атрактори можуть існувати лише в таких дисипативних системах, які є або відкритими (до яких надходить енергія ззовні), або нерівноважними (які мають великий запас внутрішньої енергії). В протилежному випадку коливання в дисипативній системі з часом повинні згасати.

2.7.3. Фрактали.

Щоб зрозуміти особливості геометричної будови дивних атракторів, розглянемо простий приклад фракталу - так звану множину двох третин, що належить до класу канторівських множин. Візьмемо відрізок одиничної довжини. Розіб'ємо його на три рівні частини. Середню відкинемо. Кожен з відрізків, що залишилися, також розіб'ємо на три рівні частини, середню з яких відкинемо. Продовжуватимемо цю операцію нескінченно довго. Те, що ми отримаємо, і являтиме собою множину двох третин (рис.2.7.2).

Рис.2.7.2. Схема побудови множини двох третин.



По-перше, відзначимо, що при збільшенні масштабу зображення такої множини ми будемо помічати все більш тонкі деталі її структури, але при постійній зміні масштабу, наприклад, утричі характер картини залишатиметься незмінним. Ця властивість притаманна всім фракталам і носить назву *масштабної інваріантності*.

По-друге, підрахуємо сумарну довжину відкинутих частин відрізка:

$$l = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Ми бачимо, що формально повна довжина частин відрізка, що залишилися, дорівнює нулеві. Це вже не відрізок, але й не просто сукупність точок.

Покажемо, що розмірність множини двох третин є нецілим числом. Для цього введемо поняття фрактальної (хаусдорфової) розмірності.

Розглянемо деяку множину A в n -вимірному просторі. Покриємо цю множину n -вимірними кубами зі стороною ε . Нехай $N(\varepsilon)$ - мінімально необхідна для цього кількість таких кубів. Тоді величина

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (2.7.1)$$

називається *фрактальною*, або *хаусдорфовою розмірністю* множини A . Фактично це означає, що "об'єм" V досліджуваного об'єкту і його лінійний розмір L пов'язані між собою співвідношенням

$$V = (l)^{d_F}. \quad (2.7.2)$$

Нехай A - відрізок довжиною L . Тоді $N(\varepsilon) \approx L/\varepsilon$, і, згідно (2.7.1)

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(L/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L - \ln \varepsilon}{-\ln \varepsilon} = 1.$$

Отже, для "звичайних" фігур фрактальна розмірність збігається з

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

геометричною.

Для множини двох третин на k -му кроці можна записати:

$$\varepsilon = \frac{1}{3^k}, \quad N = 2^k.$$

Тоді за формулою (2.7.1)

$$d_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631.$$

Таким чином, неціла геометрична розмірність - друга, поруч із масштабною інваріантністю, характерна властивість фракталів.

Як уже вказувалося, за геометричною структурою дивні атрактори також належать до фракталів. Зокрема, фрактальна розмірність дивного атрактора для генератора КПП в режимі стохастичних коливань (рис.1.13.4в) лежить між одиницею та двійкою.

2.7.4. Сценарій переходу до хаосу.

Під сценарієм переходу до хаосу розуміють послідовність біфуркацій при зміні деякого керуючого параметра μ , що приводить до встановлення в системі хаотичного руху.

Нехай при $\mu=0$ на фазовому портреті існує стійка стаціонарна точка (стійкий фокус або вузол). Спільним першим кроком усіх сценаріїв переходу до хаосу є те, що при зростанні μ відбувається біфуркація Андронова - Хопфа (див. розділ 1.11) - система втрачає рівновагу, відбувається її самозбудження. Подальші біфуркації визначаються конкретним сценарієм.

Слід вказати, що в реальних системах звичайно існує декілька керуючих параметрів, тому до того самого стану хаотичного руху можна прийти різними шляхами. Отже, поняття сценарію переходу до хаосу має до певної міри умовний характер. Тим не менше вино досить поширене в літературі.

На сьогоднішній день, як можна думати, відомі ще не всі можливі сценарії переходу до хаосу. Нижче ми зупинимося на трьох найбільш вивчених і поширених.

2.7.5. Сценарій Рюеля - Такенса.

Після біфуркації Андронова - Хопфа відбувається збудження коливань із ще однією частотою (як це може мати місце в системі зв'язаних автогенераторів, див. розділ 2.4), потім - іще з однією. У фазовому просторі утворюється відповідно спочатку двовимірний, а потім тривимірний тор. Але, як показали Рюель і Такенс, таке утворення є нестійким, і зображувальна точка з часом спонтанно перестрибує з тривимірного тора на дивний атрактор - рух системи стає хаотичним.

Ілюстрацією до описаного сценарію може служити спостереження так званих вихорів Тейлора в рідині, що налита між двома циліндрами, один з яких обертається (рис.2.7.3). В ролі керуючого параметра виступає швидкість обертання ω . При її зростанні спочатку виникають вихори з однією частотою, яку фіксує датчик, занурений у рідину. При подальшому зростанні ω з'являється друга частота автоколивань, потім третя, після чого система сама собою переходить у стан турбулентності.

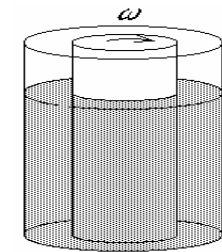


Рис.2.7.3. Схема спостереження вихорів Тейлора.

2.7.6. Сценарій Фейгенбаума.

У цьому сценарії після біфуркації Андронова - Хопфа при деякому значенні керуючого параметра μ_1 відбувається подвоєння періоду коливань (рис.2.7.4), при більшому значенні μ_2 - наступне подвоєння періоду, і так далі. Послідовність μ_n збігається до деякого

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

значення μ_∞ , при переході через яке період коливань формально стає нескінченно великим, а рух системи - відповідно хаотичним.

Рис.2.7.4. Послідовне подвоєння періодів у фазовому просторі.



Явище універсальності Фейгенбаума полягає в тому, що незалежно від конкретного типу динамічної системи, для якої відбувається перехід до хаосу за даним сценарієм, швидкість збігання послідовності μ_n виявляється тією самою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta, \quad (2.7.3)$$

де $\delta = 4.6692\dots$ - константа Фейгенбаума.

Приклад переходу до хаосу за сценарієм Фейгенбаума демонструє, зокрема, так звана система Реслера - модель деякої хімічної реакції коливного типу. Спектр цієї реакції для різних значень керуючого параметра подано на рис.2.7.5. Видно, що при зростанні вказаного параметра віддалі між сусідніми гармоніками в спектрі послідовно зменшуються вдвічі.

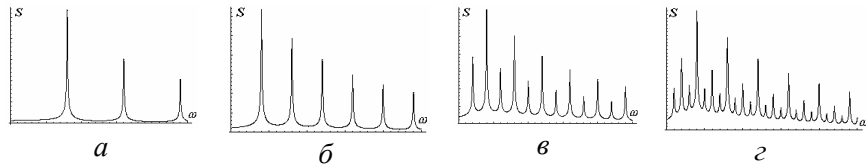


Рис.2.7.5. Спектр системи Реслера при послідовному зростанні керуючого параметра.

2.7.7. Сценарій Помо - Манервіля.

Після бифуркації Андронова - Хопфа зростання керуючого пара-

метра призводить до того, що автоколивання стають уривчастими: ділянки регулярних коливань перериваються сплесками хаотичного руху (явище *переміжності*). При подальшому зростанні керуючого параметра тривалість регулярних ділянок зменшується.

Прикладом системи, що демонструє перехід до хаосу за сценарієм Помо - Манервіля, може служити генератор шуму КІР (див. розділ 1.13).

Контрольні питання до розділу 2.7.

- 2.7.1. Чи може існувати дивний атрактор на фазовому портреті консервативної системи? Відповідь обґрунтувати.
- 2.7.2. Порівняйте хаотичну динаміку в консервативних та дисипативних системах.
- 2.7.3. В яких класах систем із багатьма ступенями вільності можлива хаотична динаміка?
- 2.7.4. Чи можлива, на Вашу думку, хаотична динаміка в системі зв'язаних автогенераторів?
- 2.7.5. Чи можна рух на дивному атракторі вважати ергодичним?
- 2.7.6. Чи можуть в принципі на фазовому портреті динамічної системи співіснувати центр та дивний атрактор?
- 2.7.7. Чи можуть в принципі на фазовому портреті динамічної системи співіснувати стійкий граничний цикл та дивний атрактор?
- 2.7.8. Чи існують сценарії переходу до хаосу в гамільтонівських системах? Відповідь обґрунтувати.
- 2.7.9. Скільки ступенів вільності повинна мати система, в якій можливий перехід до хаосу за сценарієм Рюеля - Такенса?
- 2.7.10. Якою, на Вашу думку, є фрактальна розмірність
 - а) областей радіоактивного забруднення, що виникли після Чорнобильської аварії;
 - б) дивного атрактора генератора шуму КІР;
 - в) крони дерева?

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.7. Хаос у дисипативних системах із багатьма ступенями вільності.

Задачі до розділу 2.7.

2.7.1. Рух системи описується рівнянням

а) $\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0$;

б) $\ddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = 0$.

Який характер має його стаціонарна точка у тривимірному фазовому просторі?

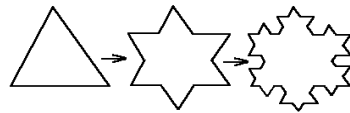
2.7.2. Рух системи описується рівнянням

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x = 0$.

Визначити показники Ляпунова та стійкі й нестійкі напрямки у фазовому просторі.

2.7.3. Визначити показники Ляпунова та стійкі й нестійкі напрямки у фазовому просторі для лінійного осцилятора з від'ємною дисипацією. Розглянути випадки $|\delta| < \omega_0$ та $|\delta| > \omega_0$.

2.7.4. Обчислити фрактальну розмірність так званої кривої Коха, яка є результатом нескінченної кількості ітерацій, вигляд яких поданий на рисунку.



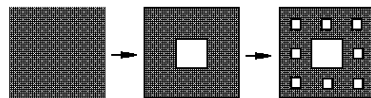
2.7.5. Обчислити фрактальну розмірність так званої канторівської множини, яка утворюється шляхом поділу відрізка

а) на п'ять рівних частин і відкидання другої і четвертої з них;

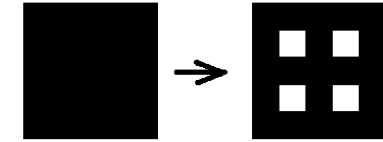
б) на $2n+1$ рівних частин і відкидання частин з парними номерами.

Та сама операція повторюється з кожним із відрізків, що залишилися, на кожному наступному кроці.

2.7.6. Обчислити фрактальну розмірність так званого килима Серпінського, який є результатом нескінченної кількості ітерацій, вигляд яких поданий на рисунку.



2.7.7. Обчислити фрактальну розмірність аналога килима Серпінського (див. попередню задачу), який є результатом нескінченної кількості ітерацій, вигляд яких поданий на рисунку.



2.7.8. Обчислити фрактальну розмірність аналога килима Серпінського (див. попередні задачі), у якого сторона квадрата на кожному етапі ітерації ділиться на $2n+1$ частин.

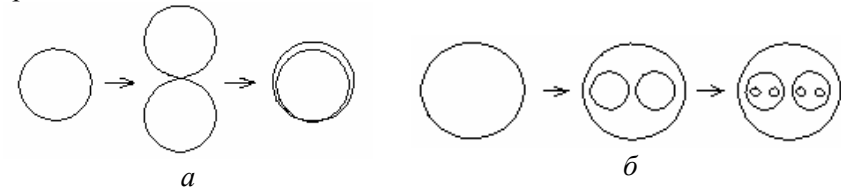
2.7.9. Запропонуйте алгоритм для побудови

а) тривимірного;

б) n -вимірного

аналога килима Серпінського (див. попередні задачі) і розрахуйте фрактальну розмірність такого об'єкта.

2.7.10. Соленоїд Смейла - Вільямса утворюється шляхом нескінченної кількості ітерацій із тороїда, який на кожному кроці спочатку розтягається, а потім складається у "вісімку" і перегинається, як це схематично показано на рисунку (а). При цьому його об'єм зменшується в K разів. Перерізи структур, що послідовно виникають при побудові цього об'єкта, також показані на рисунку (б). Розрахувати фрактальну розмірність соленоїда Смейла - Вільямса. Що він являтиме собою при $K=1$?



2.7.11. Показати, що визначення (2.7.1) та (2.7.2) фрактальної розмірності еквівалентні.

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.
2.8. Ланцюжкові системи.

2.8. Ланцюжкові системи.

Ланцюжкові системи - це системи, що являють собою послідовне сполучення великої кількості однакових ланок. Прикладами ланцюжкових систем можуть служити ланцюжок зв'язаних маятників (рис.2.8.1а), ланцюжок зв'язаних коливних контурів (рис.2.8.1б), молекула полімера (довгий ланцюжок, складений з однакових ланок - мономерів). За своїми властивостями коливання ланцюжкових систем нагадують поширення хвиль у системах із розподіленими параметрами.

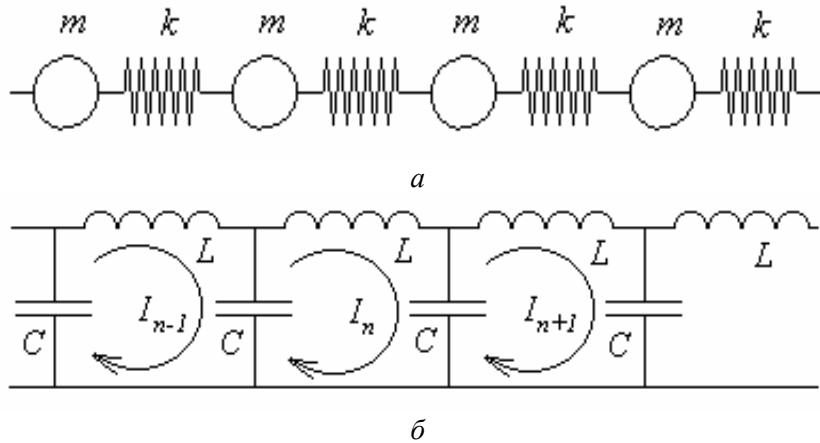


Рис.2.8.1. Приклади нескінчених ланцюжків: а - зв'язані пружинні маятники; б - коливні контури з ємнісним зв'язком.

2.8.1. Ланцюжкова система як частотний фільтр.

Розглянемо коливання в ланцюжку, складеному з ідеальних коливних контурів із ємнісним зв'язком (рис.2.8.1б). Рівняння для n -го контуру, записане за другим законом Кірхгофа, має вигляд

$$L \frac{dI_n}{dt} + \frac{1}{C} \int (I_n - I_{n+1}) dt + \frac{1}{C} \int (I_n - I_{n-1}) dt = 0. \quad (2.8.1)$$

Перейшовши від струмів до зарядів,

$$q_n = \int I_n dt,$$

і ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{2}{LC} \quad (2.8.2)$$

(враховано, що кожен контур містить дві послідовно увімкнені ємності C), можна переписати рівняння (2.8.1) у формі

$$\ddot{q}_n + \omega_0^2 q_n = \frac{1}{2} \omega_0^2 (q_{n+1} + q_{n-1}). \quad (2.8.3)$$

Оскільки всі контури зв'язані між собою, а дисипація в системі відсутня, природно вважати, що коливання в сусідніх контурах мають однакову частоту і амплітуду, відрізняючись лише фазами, причому набіг фази φ на одну ланку однаковий уздовж усього ланцюжка. Тому розв'язки рівняння (2.8.3) будемо шукати у формі:

$$q_n(t) = A \exp(i\omega t - in\varphi). \quad (2.8.4)$$

Підстановка розв'язку (2.8.4) до рівняння (2.8.3) дозволяє отримати співвідношення між набігом фази на одну ланку і частотою коливань:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - \cos \varphi). \quad (2.8.5)$$

Як випливає з (2.8.5), при зміні $\cos \varphi$ від $+1$ до -1 частота коливань змінюватиметься в межах від

$$\omega_{sp1} = 0$$

до

$$\omega_{sp2} = \sqrt{2} \omega_0.$$

На частотах, які перевищують ω_{sp2} , формально буде $|\cos \varphi| > 1$. Це означає, що параметр φ стає комплексним:

$$\varphi = \alpha + i\beta, \quad \cos \varphi = \cos(\alpha + i\beta) = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta - i \sin \alpha \operatorname{sh} \beta. \quad (2.8.6)$$

Підставивши (2.8.6) до (2.8.5) і прирівнявши окремо дійсні та уявні частини рівняння, можна отримати таку систему:

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.8. Ланцюжкові системи.

$$\cos \alpha \operatorname{ch} \beta = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}; \quad \sin \alpha \operatorname{sh} \beta = 0. \quad (2.8.7)$$

Щоб задовольнити обидва рівняння (права частина першого з них при $\omega > \omega_{ep2}$ буде від'ємною), треба обрати

$$\alpha = \pi. \quad (2.8.8)$$

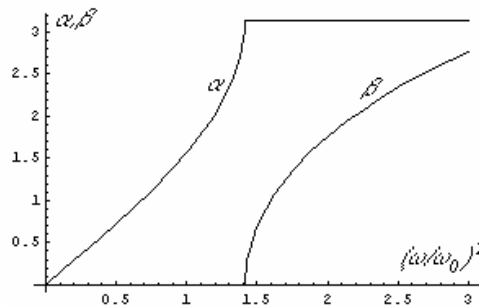
Тоді

$$\beta_{1,2} = \ln \left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right)} \right]. \quad (2.8.9)$$

Легко показати, що значення коренів (2.8.9) відрізняються лише знаком, тому надалі оберемо додатний корінь¹.

Частотні залежності параметрів α та β подані на рис.2.8.2. З нього видно, що аналізована схема являє собою фільтр низьких частот, смуга пропускання якого простягається від ω_{ep1} до ω_{ep2} . За межами смуги пропускання сигнал у лінії експоненційно спадає при віддаленні від джерела.

Рис.2.8.2. Залежність набігу фази між ланками α та параметра дисипації β від частоти.



Наявність смуг прозорості та непрозорості - це універсальна вла-

¹ Наявність двох коренів вказує на те, що амплітуда коливань спадає в обох напрямках при віддаленні від джерела сигналу.

стивість ланцюжкових систем. Звичайно, вони не обов'язково є при цьому саме фільтрами низьких частот (наприклад, ланцюжок, зображений на рис.2.8.1б, перетворюється на фільтр високих частот, якщо поміняти місцями ємності та індуктивності).

Ланцюжок мас, пов'язаних пружинами (рис.2.8.1а), виступає електромеханічним аналогом проаналізованого ланцюжка зв'язаних контурів і, отже, також є фільтром низьких частот. Його роботу можна проілюструвати на прикладі автомобіля, що їде горбкуватою дорогою. Шини коліс виступають при цьому в ролі пружин, самі колеса разом з осями - в ролі мас. Осі через ресори (пружини) прикріплені до корпусу (маси). До корпусу ж прикріплені м'які сидіння (пружини), на яких сидять водій та пасажир (маси). В результаті фільтруючої дії розглянутого ланцюжка водій і пасажир замість ударів об нерівності дороги відчувають лише плавне погойдування.

Кристалічну ґратку також можна розглядати як деяку тривимірну ланцюжкову систему. Одним з можливих типів її коливань є рух електронів, який можна інтерпретувати як поширення деякого збурення хвильової функції. Таку систему також можна розглядати як частотний фільтр, причому заборонені діапазони частот відповідають забороненим значенням енергії електронів, існування яких передбачає зонна теорія твердого тіла.

2.8.2. Хвильовий процес. Непрозорість.

Повернемося до розгляду ланцюжка зв'язаних контурів (рис.2.8.1б).

На рис.2.8.3а-б подано миттєві розподіли струмів по ланках для відмінних моментів часу для сигналів, частоти яких потрапляють у смугу прозорості.

У першому випадку наявність постійного зсуву фаз між сусідніми ланками приводить до того, що миттєвий розподіл струму вздовж лінії є гармонічним, причому з плином часу ця гармоніка зсувається в просторі. Отже, маємо хвильовий процес. Якщо прийняти, що довжина однієї ланки дорівнює a , то номери ланок можна пов'язати з

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.
2.8. Ланцюжкові системи.

координатою x уздовж лінії співвідношенням

$$na = x. \quad (2.8.10)$$

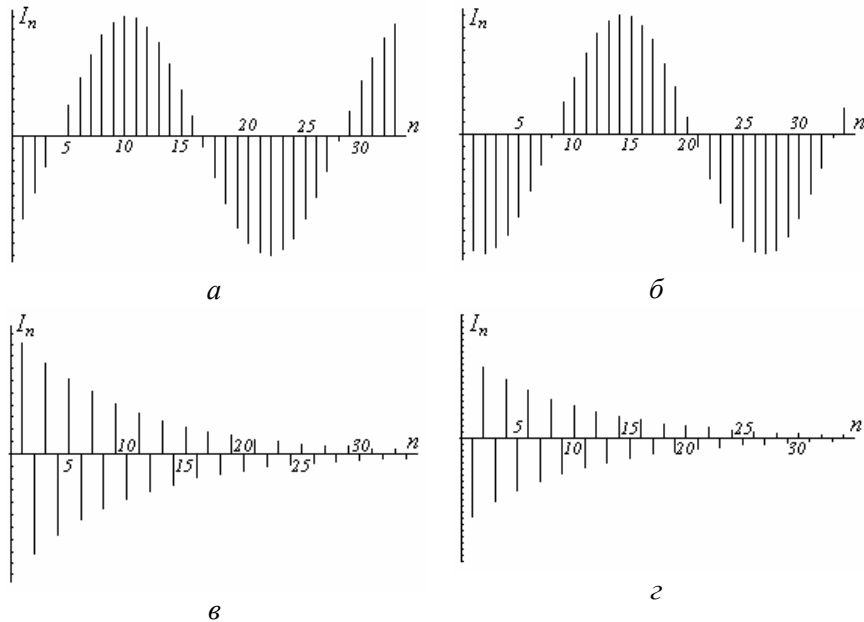


Рис.2.8.3. Миттєвий розподіл струмів по ланках для двох відмінних моментів часу в смугах прозорості (а, б) та непрозорості (в, г).

Тоді, позначивши

$$\varphi = ka, \quad (2.8.11)$$

розподіл сигналу вздовж лінії (2.8.4) можна подати у вигляді хвилі:

$$q(x, t) = q_m \exp(i\omega t - ikx), \quad (2.8.12)$$

де хвильове число k пов'язане з частотою хвилі співвідношенням

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (2.8.13)$$

(його можна отримати, підставивши (2.8.11) до (2.8.5)). Графік залежності частоти від хвильового числа поданий на рис.2.8.4.

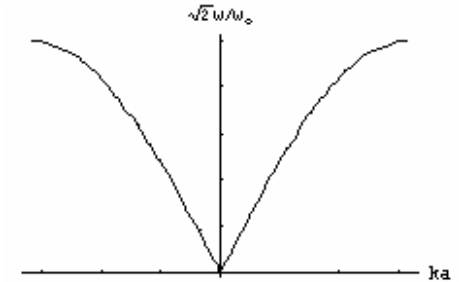


Рис.2.8.4. Залежність частоти від хвильового числа для хвильового процесу в ланцюжку зв'язаних контурів.

Нехай тепер частота сигналу потрапляє в смугу непрозорості. Підставивши (2.8.8)-(2.8.9) до (2.8.4), для цього випадку можна отримати:

$$q_n(t) = A(-1)^n \exp(i\omega t) \exp(-\beta n). \quad (2.8.14)$$

Тепер коливання в усіх ланках відбуваються з однаковими фазами (якщо не брати до уваги протифазність коливань у сусідніх ланках), а амплітуди коливань експоненціально спадають при віддаленні від джерела сигналу. Відповідні миттєві розподіли струмів уздовж лінії подані на рис.2.8.3в-г (для відмінних моментів часу).

Знову перейшовши від номерів ланок до координати згідно співвідношення (2.8.10) і врахувавши, що фізичний зміст має лише дійсна частина комплексної змінної, можна переписати (2.8.14) у формі:

$$|q(x, t)| = A \cos \omega t \exp(-\delta x), \quad \delta = \frac{\beta}{a}. \quad (2.8.15)$$

Непрозорість консервативних середовищ для хвиль певної частоти та напрямку - поширене явище. Для прикладу досить згадати повне внутрішнє відбиття електромагнітної хвилі, яка падає під певним кутом з оптично менш щільного в оптично більш щільне середовище. Характерно, що в експериментах Мандельштама в оптично

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

2.8. Ланцюжкові системи.

більш щільному середовищі при цьому спостерігалися синфазні коливання електромагнітного поля, амплітуда яких експоненціально спадала при віддаленні від межі двох середовищ (пор. з формулою (2.8.15)).

2.8.3. Коливання в ланцюжках скінченної довжини.

Розглянемо тепер ланцюжок, складений з k ланок, вигляд яких зображений на рис.2.8.1б. Скінчена довжина ланцюжка приведе до того, що для його власних коливань набіг фази φ на одну ланку може набувати лише дискретного набору значень.

Нехай коливання, що виникло в першій ланці, поширюється уздовж ланцюжка. В останній ланці воно буде зсунуте за фазою на $(k-1)\varphi$. Від останньої ланки сигнал відіб'ється і побіжить уздовж ланцюжка назад. Сигнал, що повернувся в першу ланку, буде, очевидно, зсунутий на $2(k-1)\varphi$ щодо початкового коливання. Аналізована мода буде власною модою ланцюжка тоді, коли обидва коливання виявляться синфазними, тобто при

$$2(k-1)\varphi = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (2.8.16)$$

Підставляючи отримані з (2.8.16) значення

$$\varphi_n = \frac{n\pi}{k-1}$$

до рівняння (2.8.5), можна отримати дискретний спектр частот:

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left| \sin \frac{\varphi_n}{2} \right|. \quad (2.8.17)$$

Оскільки

$$\sin(\pi - z) = \sin z, \quad \sin(\pi + z) = -\sin z,$$

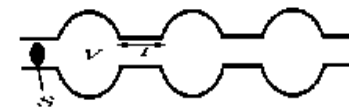
значення частот, які не повторюються, будуть виникати лише при зміні φ_n в межах від 0 до π , тобто при зміні індексу n від 0 до $k-1$ включно. Таким чином, ми отримаємо k відмінних значень власних частот.

Контрольні питання до розділу 2.8.

- 2.8.1. Якісно опишіть вплив слабкої дисипації на коливання в нескінченному ланцюжку.
- 2.8.2. Чи завжди коливання в сусідніх ланках у смузі непрозорості відбуваються в протифазі?
- 2.8.3. опишіть роботу автомобільного глушника в термінах ланцюжкових систем.
- 2.8.4. Як, на Вашу думку, слід розраховувати дисперсію двовимірної ланцюжкової системи? Якісно поясніть відмінності від одновимірного випадку.
- 2.8.5. Які властивості коливань кристалічної ґратки можна пояснити, користуючись моделлю ланцюжкової системи?
- 2.8.6. Як записати набіг фази на одну ланку для власних коливань кільцевого ланцюжка, складеного з n ланок?
- 2.8.7. Запишіть умову для набігу фази на одну ланку для власних коливань обмеженого лінійного ланцюжка, використовуючи поняття довжини хвилі і довжини ланцюжка.
- 2.8.8. Чому в кільцевих ланцюжках кількість відмінних між собою власних частот не збігається з кількістю ланок?
- 2.8.9. Чому в лінійних (незамкнених) ланцюжках кількість відмінних між собою власних частот дорівнює кількості ланок?

Задачі до розділу 2.8.

- 2.8.1. Знайти закон дисперсії та граничні частоти ланцюжка акустичних резонаторів. Газ, що його заповнює, задовольняє рівнянню адіабати (див. задачу 1.1.11).
- 2.8.2. Розрахувати дисперсію хвиль в ланцюжку, складеному з
 - а) однакових пружин і мас;
 - б) однакових пружин і мас двох сортів, що чергуються;
 - в) однакових мас і пружин двох сортів, що чергуються;



Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.

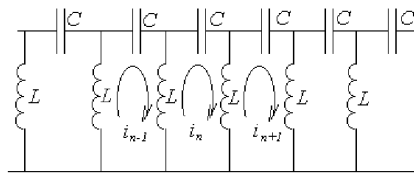
2.8. Ланцюжкові системи.

г) однакових математичних маятників, зв'язаних однаковими пружинами;

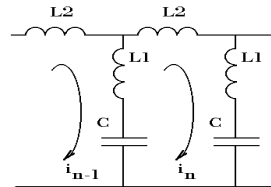
д) математичних маятників з масами двох сортів, що чергуються, зв'язаних однаковими пружинами.

Побудувати дисперсійну криву. Окремо розглянути довгохвильову границю.

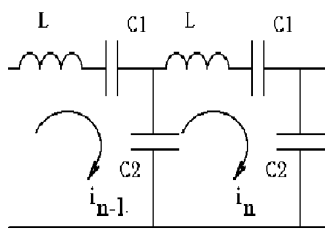
2.8.3. Знайти граничні частоти та побудувати дисперсійні криві для зображеної ланцюжкової системи:



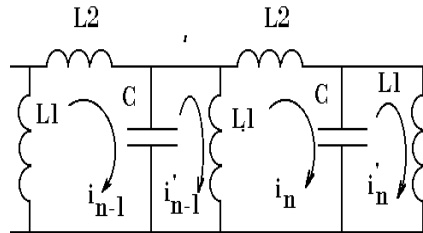
a



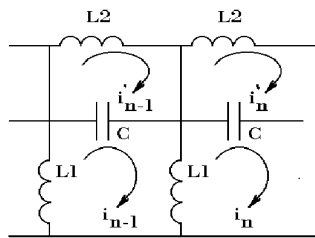
б



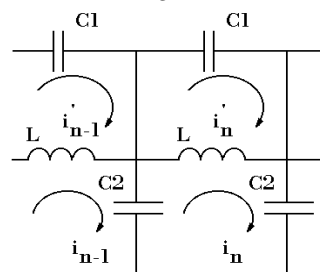
в



г



д



е

2.8.4. Знайти крутість зрізу амплітудно-частотної характеристики (у децибелах на декаду та у децибелах на октаву) для ланцюжкової системи із задачі

а) 2.8.3а;

б) 2.8.3б;

в) 2.8.3в.

2.8.5. Побудувати частотні залежності набігу фаз на одну ланку та згасання на одну ланку для нескінченних ланцюжків, показаних

а) на рис.2.8.1б;

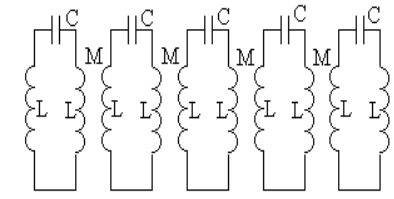
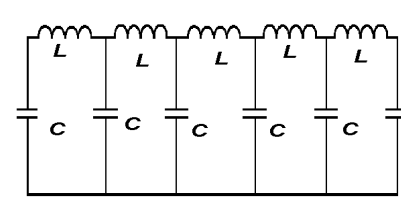
б) на рисунку до задачі 2.8.3а;

в) на рисунку до задачі 2.8.3б;

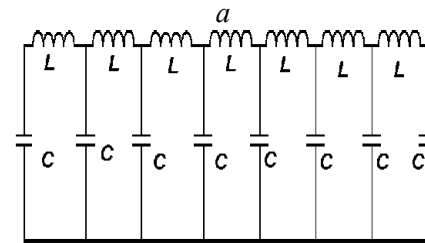
г) на рисунку до задачі 2.8.3в

з урахуванням активного опору котушок індуктивності.

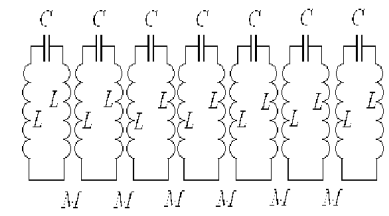
2.8.5. Знайти власні частоти скінченної ланцюжкової системи, показаної на рисунку.



б



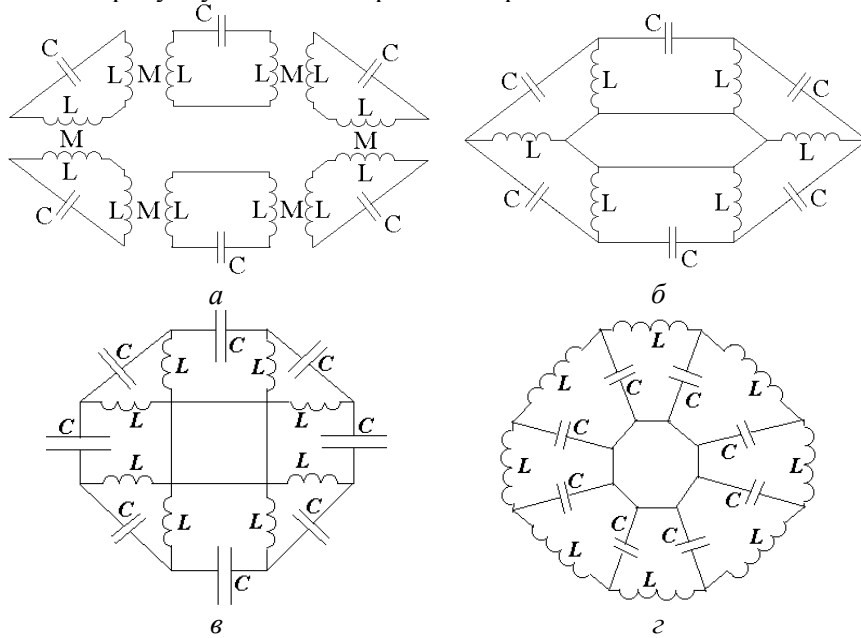
а



г

Частина II. Коливні системи з багатьма ступенями вільності.
 2.8. Ланцюжкові системи.

2.8.6. Знайти власні частоти кільцевої ланцюжкової системи, показаної на рисунку. Пояснити причини виродження власних частот.



Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

Нагадаємо, що хвилі - це коливання, які з часом поширюються в просторі. Такі процеси мають місце в системах із розподіленими параметрами. Таким системам формально відповідає континуум ступенів вільності, тому вони описуються рівняннями в частинних похідних.

Дослідження хвильових процесів у системах із розподіленими параметрами розпочнемо, як і в попередніх частинах курсу, з найпростіших задач, а саме з аналізу хвиль малої амплітуди (тобто лінійних), що виступають аналогом власних коливань.

3.1.1. Приклади хвиль малої амплітуди в пасивних системах.

а) Розглянемо одновимірні коливання пружної струни. Будемо позначати через $u(x,t)$ відхилення струни в точці x у момент часу t (рис.3.1.1).

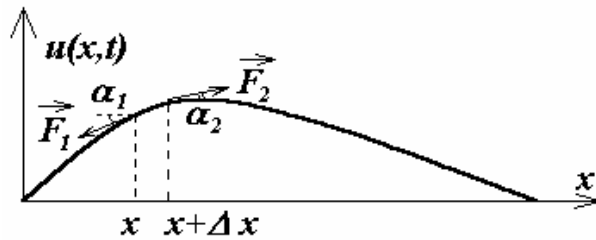


Рис.3.1.1. Коливання струни.

Рівняння руху для ділянки струни завдовжки Δx між точками x та $x+\Delta x$ згідно другого закону Ньютона можна записати у вигляді

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_2 \sin \alpha_2 - F_1 \sin \alpha_1, \quad (3.1.1)$$

де масу ділянки струни можна подати через лінійну масову густину ρ ,

$$m = \rho \Delta x. \quad (3.1.2)$$

При записі рівняння (3.1.1) прийнято, що відхилення ділянки від-

бувається строго в напрямку, перпендикулярному до осі x , що, зрозуміло, справджується лише для малих відхилень. Оскільки відхилення u є функцією не лише часу, але й координати, в рівнянні фігурує частинна похідна за часом.

Оскільки натяг струни T однаковий у будь-якій її точці, то $F_1 = F_2 = T$.

Вважаючи кути $\alpha_{1,2}$ малими, запишемо:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.1.3)$$

Тоді

$$F_2 \sin \alpha_2 - F_1 \sin \alpha_1 = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) \approx T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x. \quad (3.1.4)$$

Підставивши (3.1.2) та (3.1.4) до (3.1.1), остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1.5)$$

де $c = (T/\rho)^{1/2}$ - деяка константа, що має розмірність швидкості.

Рівняння (3.1.5) - це найпростіше скалярне одновимірне хвильове рівняння.

б) Розглянемо двопровідну лінію (рис.3.1.2а). Для спрощення вважатимемо, що один з провідників (нижній) має потенціал землі. Оскільки при заряджанні провідника навколо нього виникає електричне поле, а при протіканні через нього струму - магнітне, то кожному відрізку лінії можна приписати деяку ємність та індуктивність. Крім того, провідники завжди мають ненульовий опір, а проміжок між ними - ненульову провідність. Тому ділянку провідника завдовжки Δx можна подати у вигляді еквівалентної схеми, зображеної на рис.3.1.2б. Запишемо для неї рівняння за першим та другим законами Кірхгофа:

$$\Delta U = L \frac{\partial I}{\partial t} + rI; \quad \Delta I = C \frac{\partial U}{\partial t} + gU, \quad (3.1.6)$$

$$\Delta U \equiv U(x + \Delta x) - U(x), \quad \Delta I \equiv I(x + \Delta x) - I(x);$$

частинні похідні враховують, що напруга і струм залежать не тільки від часу, але й від координати.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

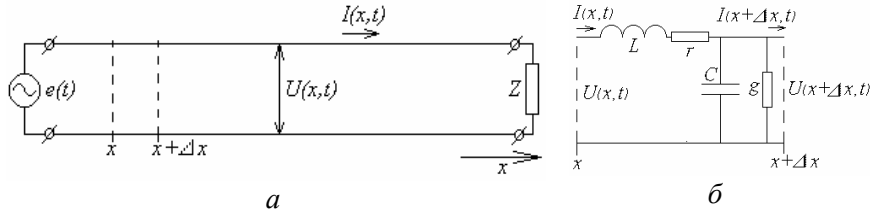


Рис.3.1.2. Двопровідна лінія (а) та еквівалентна схема її відрізка (б).

Природно вважати, що еквівалентні параметри відрізка лінії пропорційні його довжині:

$$L = L_1 \Delta x; \quad C = C_1 \Delta x; \quad r = r_1 \Delta x; \quad g = g_1 \Delta x \quad (3.1.7)$$

(величини L_1 , C_1 , r_1 , g_1 називаються *погонними параметрами* лінії - погонна індуктивність, погонна ємність та ін.). Вважаючи довжину відрізка Δx малою, можна записати:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x, \quad \Delta I = \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x. \quad (3.1.8)$$

Підставляючи (3.1.7) та (3.1.8) до системи (3.1.6), дістанемо так звані *телеграфні рівняння*:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = L_1 \frac{\partial I}{\partial t} + r_1 I; \quad \frac{\partial I}{\partial x} = C_1 \frac{\partial U}{\partial t} + g_1 U. \quad (3.1.9)$$

Систему (3.1.9) легко звести до одного рівняння, виключивши, наприклад, струм:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (L_1 g_1 + C_1 r_1) \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (3.1.10)$$

(враховано, що втрати в лінії звичайно є малими, тому доданком другого порядку мализни, пропорційним $r_1 g_1$, нехтуємо). При $r_1 = 0$, $g_1 = 0$ рівняння (3.1.10) набуває вигляду (3.1.5), де $c = (L_1 C_1)^{-1/2}$ (легко переконатися, що ця величина має розмірність швидкості).

в) Перші два рівняння Максвелла у вакуумі за відсутності сторон-

ніх зарядів і струмів записуються у формі:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.1.11)$$

Взявши ротор від першого рівняння (3.1.11), виключимо електричне поле з його правої частини за допомогою другого рівняння (3.1.11). Отримаємо:

$$\text{grad} \text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (3.1.12)$$

де враховано відому тотожність

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Оскільки у вакуумі, згідно з рівняннями Максвелла,

$$\text{div} \vec{H} = 0, \quad (3.1.13)$$

остаточно отримуємо:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1.14)$$

Таке саме рівняння можна отримати і для електричного поля.

Рівняння (3.1.14) - це векторне хвильове рівняння для тривимірних хвиль. Проектуючи його на осі координат, можна отримати скалярні хвильові рівняння у тривимірному просторі.

Слід підкреслити, що (3.1.5) та (3.1.14) - це найпростіші приклади хвильових рівнянь. Для більшості реальних систем вигляд хвильових рівнянь ускладнюється. Наприклад, для електромагнітних хвиль у холодній ізотропній плазмі замість (3.1.14) можна отримати:

$$c^2 \text{rot} \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} = 0, \quad (3.1.15)$$

де $\omega_p = (4\pi n_0 e^2 / m)^{1/2}$ - електронна плазмова частота¹, n_0 - середня концентрація електронів плазми.

¹ Див. задачу 1.1.14.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

3.1.2. Розв'язок хвильового рівняння. Дисперсія.

Нагадаємо, що загальний розв'язок рівняння в частинних похідних записується через довільні функції, кількість яких має дорівнювати порядку рівняння. Для найпростішого хвильового рівняння (3.1.5) загальний розв'язок, як можна перекоонатися шляхом безпосередньої підстановки, має вигляд

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (3.1.16)$$

де $f_{1,2}$ - довільні функції. Перша з них описує хвилю незмінної форми, що поширюється зі швидкістю c в додатному напрямку осі x , друга - подібну хвилю, що біжить у протилежному напрямку.

Однак на практиці для лінійних систем, до яких застосовні принципи суперпозиції і перетворення Фур'є, звичайно записують розв'язок хвильового рівняння у вигляді гармонічних хвиль:

$$u(x,t) = C \exp(i\omega t - ikx), \quad (3.1.17)$$

де ω - частота хвилі, k - її хвильове число (довжина хвилі - $\lambda = 2\pi/k$). Підставивши розв'язок (3.1.17) до хвильового рівняння, отримуємо *дисперсійне співвідношення*, що пов'язує між собою частоту та хвильове число. Для найпростішого хвильового рівняння (3.1.5) воно має вигляд:

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad (3.1.18)$$

або $\omega = \pm ck$.

Знайдемо *фазову швидкість* гармонічної хвилі - швидкість поширення її *фронту*, тобто поверхні сталої фази. Взявши диференціал від фази, яку вважаємо сталою, отримуємо:

$$\omega dt - k dx = 0,$$

звідки

$$v_{ph} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (3.1.19)$$

Для найпростішого дисперсійного співвідношення (3.1.18) буде $v_{ph} = c$.

Для складнішого хвильового рівняння (3.1.15), узявши

розв'язок у вигляді плоскої хвилі,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \quad (3.1.20)$$

де \vec{k} - хвильовий вектор, отримаємо:

$$c^2 [\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]] = (\omega^2 - \omega_p^2) \vec{E}. \quad (3.1.21)$$

Врахувавши формулу для подвійного векторного добутку

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

і обмежившись випадком поперечних хвиль, для яких $\vec{E} \perp \vec{k}$, остаточно дістанемо дисперсійне співвідношення у формі:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (3.1.22)$$

Тепер фазова швидкість хвилі виявляється залежною від її частоти (або хвильового числа):

$$v_{ph} = \sqrt{c^2 + (\omega_p/k)^2} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}}. \quad (3.1.23)$$

Якщо фазова швидкість хвилі залежить від її частоти або хвильового числа, говорять, що в системі має місце *дисперсія* хвиль.

Графік залежності $\omega(k)$ називають дисперсійною кривою. Геометрично фазова швидкість хвилі, що визначається формулою (3.1.19) - це тангенс кута нахилу січної, проведеної з початку координат у дану точку дисперсійної кривої (рис.3.1.3).

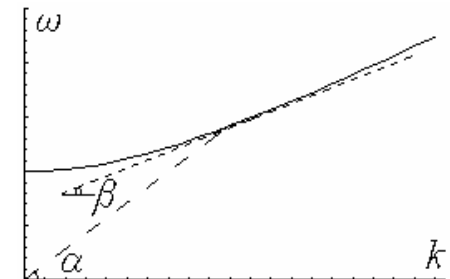


Рис.3.1.3. Дисперсійна крива, що відповідає дисперсійному співвідношенню (3.1.22);

$$v_{ph} = \text{tg } \alpha, \quad v_g = \text{tg } \beta.$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

3.1.3. Початкова та гранична задача.

Дисперсійне рівняння можна розв'язувати щодо частоти, знаходячи в результаті функцію $\omega(k)$, або щодо хвильового числа (хвильового вектора), знаходячи функцію $k(\omega)$. Перший варіант розв'язку описує поведінку в часі нескінченно довгого гармонічного початкового збурення з довжиною хвилі $\lambda=2\pi/k$, другий - еволюцію в просторі гармонічного сигналу з частотою ω , що збуджується деяким локальним джерелом. У першому випадку говорять про початкову задачу, в другому - про граничну.

Якщо початкове збурення є обмеженим у просторі, то для аналізу часової еволюції його слід розкласти в інтеграл Фур'є за координатою, прослідкувати за часовою еволюцією кожної з гармонічних складових і результати підсумувати. Аналогічно для аналізу просторової еволюції сигналу обмеженої тривалості слід скористатися розкладом в інтеграл Фур'є за часом.

3.1.4. Поширення хвильового пакету в лінії з дисперсією.

Чисто гармонічна, тобто нескінченна в часі і просторі хвиля вигляду (3.1.17) або (3.1.20) - це, зрозуміло, ідеалізація. В реальності ми завжди маємо справу з хвильовими пакетами скінченної тривалості та протяжності. Оскільки різні спектральні складові хвильового пакету в середовищі з дисперсією матимуть відмінні швидкості, можна чекати, що форма хвильового пакету повинна змінюватися в процесі його поширення.

Нехай закон дисперсії довгої лінії (рис.3.1.2а) має вигляд $k=k(\omega)$, а сигнал на початку лінії має вигляд радіоімпульсу скінченної тривалості:

$$u(x=0,t) = U_m(t) \exp(i\omega_0 t), \quad (3.1.24)$$

де $U_m(t)$ - повільна амплітуда ($|dU_m/dt| \ll \omega|U_m|$, $U_m(t \rightarrow \pm\infty) = 0$). Відбиття вважатимемо відсутнім.

Розрахуємо вигляд сигналу $u(x,t)$ в довільному перерізі лінії.

Якби замість пакету ми мали монохроматичну хвилю ($U_m = \text{const}$), можна було б відразу записати:

$$u(x,t) = U_m \exp(i\omega_0 t - ik_0 x), \quad k_0 \equiv k(\omega_0).$$

Оскільки на початку лінії ми маємо справу з немонохроматичним сигналом, розкладемо його в інтеграл Фур'є:

$$u(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[i(\omega_0 + \omega)t] d\omega, \quad (3.1.25)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Для того, щоб отримати сигнал у довільному перерізі лінії, додамо до фаз експонент з частотами $\omega_0 + \omega$ відповідні просторові набіги фаз:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[i(\omega_0 + \omega)t - ik(\omega_0 + \omega)x] d\omega. \quad (3.1.26)$$

Формально інтеграл (3.1.26) дає відповідь на поставлену задачу.

Врахуємо тепер, що в силу повільної зміни обвідної радіоімпульсу (3.1.24) її спектр $S(\omega)$ відмінний від нуля лише при $\omega \ll \omega_0$. Отже, реально інтегрування в (3.1.26) виконується лише в деякому інтервалі частот, вузькому в масштабі ω_0 . Це дозволяє нам розкласти функцію $k(\omega_0 + \omega)$ в ряд Тейлора, обмежившись лінійним доданком за ω :

$$k(\omega_0 + \omega) \approx k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \omega. \quad (3.1.27)$$

Очевидно, така операція буде законною при не дуже великих x , доки внесок доданків вищих порядків до фази буде неістотним. Підставляючи (3.1.27) до (3.1.26), отримаємо:

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp \left[i(\omega_0 + \omega)t - i \left(k_0 + \frac{\partial k}{\partial \omega} \omega \right) x \right] d\omega = \\
 &= \exp(i\omega_0 t - ik_0 x) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{\frac{\partial \omega}{\partial k}} \right) \right] d\omega = \\
 &= U_m \left(t - \frac{x}{\frac{\partial \omega}{\partial k}} \right) \exp(i\omega_0 t - ik_0 x). \quad (3.1.28)
 \end{aligned}$$

Видно, що в обраному наближенні хвильовий пакет поширюється без зміни форми, але його еволюція тепер характеризується двома швидкостями. Заповнення пакету, як і раніше, поширюється з фазовою швидкістю (3.1.19). Обвідна ж рухається зі швидкістю

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (3.1.29)$$

так звану груповою швидкістю. Очевидно, саме групова швидкість характеризує перенесення енергії хвильовим пакетом, тому вона не може перевищувати за величиною швидкість світла у вакуумі. Величина ж фазової швидкості може бути якою завгодно.

Геометрично групова швидкість хвилі - це тангенс кута нахилу дотичної до дисперсійної кривої у даній точці (рис.3.1.4).

На закінчення відзначимо, що врахування відкинутих доданків вищих порядків у ряду Тейлора (3.1.27) буде призводити до розпливання хвильового пакету на великих відстанях від початку лінії.

3.1.5. Формальна класифікація дисперсії.

В залежності від того, зменшується чи збільшується фазова швидкість хвиль із зростанням їхньої частоти, в класичній оптиці говорять відповідно про *нормальну* (більш поширену) та *аномальну дисперсію* хвиль. Нормальною дисперсією характеризуються, наприклад, згадані вище електромагнітні хвилі в ізотропній плазмі, моди циліндричного чи прямокутного хвилеводу з провідними стінками (рис.3.1.4а), поверхневі хвилі на межі вакуум - ізотропна плазма,

фононна гілка коливань твердого тіла (рис.3.1.4б). Аномальною дисперсією характеризуються, наприклад, свистові хвилі (вістлери) - різновид низькочастотних хвиль плазми в слабкому магнітному полі, що часто збуджуються в іоносфері під час гроз (рис.3.1.4в).

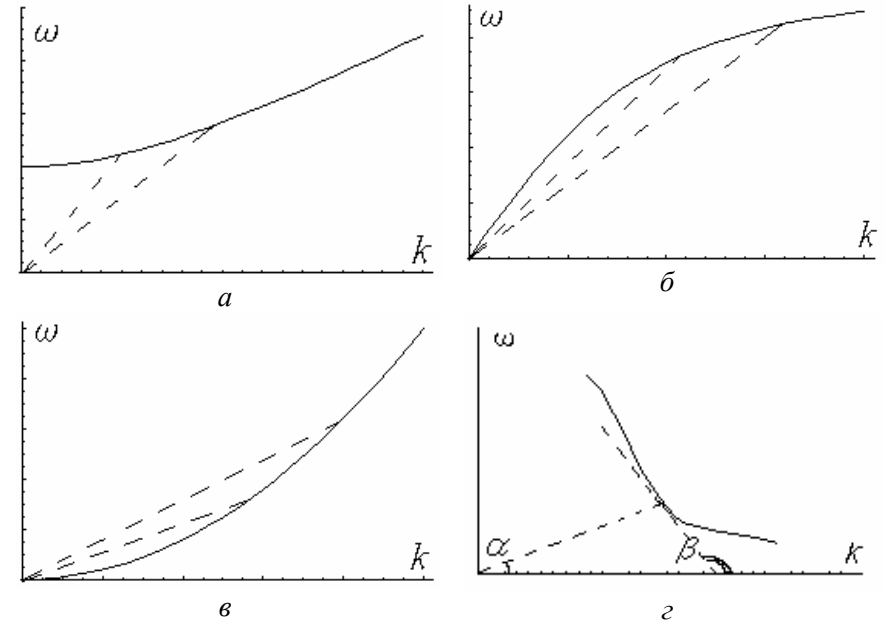


Рис.3.1.4. Дисперсійні криві для різних типів хвиль: а - електромагнітні хвилі в ізотропній плазмі та хвилеводі; б - фононна гілка коливань у твердому тілі, поверхневі хвилі в плазмі; в - свистові хвилі (вістлери) в анізотропній плазмі; з - хвилі в ланцюжковій системі.

В залежності від знаку добутку фазової та групової швидкостей говорять про *додатну* ($v_{ph}v_g > 0$) та *від'ємну* ($v_{ph}v_g < 0$) *дисперсію*. Всі перелічені вище хвилі (рис.3.1.4а-в) мають додатну дисперсію. Прикладом хвиль з від'ємною дисперсією можуть бути хвилі в ланцюж-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

кових системах² (рис.3.1.4г). Для хвиль з від'ємною дисперсією (або, як кажуть, *зворотних хвиль*) напрямком перенесення енергії протилежний до напрямку руху фронту.

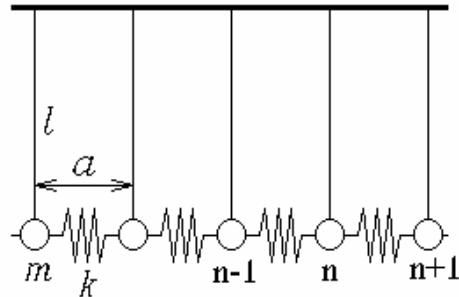
3.1.6. Причини виникнення дисперсії (модельний розгляд).

Розглянемо модельну ланцюжкову систему, складену з однакових мас m на підвісах завдовжки l , сполучених пружинами з жорсткістю k (рис.3.1.5). Рівняння руху n -ї маси (φ_n - відповідний кут відхилення) можна записати на основі другого закону Ньютона для обертового руху

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} = -mgl\varphi_n + kl^2(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n) \quad (3.1.30)$$

(пор. з п.1.1.1). Перший доданок у правій частині враховує дію сили тяжіння mg з плечем $l \sin \varphi_n \approx l\varphi_n$, два інші - дію двох пружин, зміна довжини яких складе $l(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ та $l(\varphi_n - \varphi_{n-1})$, а відповідне плече - l .

Рис.3.1.5. Ланцюжок із маятників, сполучених пружинами.



Скориставшись позначеннями

$$\omega_{01}^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.1.31)$$

² Про це див. нижче, п.п.3.2.1-3.2.2.

перепишемо (3.1.30) у вигляді

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + \omega_{01}^2 \varphi_n = \omega_{02}^2 (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n). \quad (3.1.32)$$

Підставивши розв'язок у вигляді гармонічної хвилі,

$$\varphi_n = \varphi_0 \exp(i\omega t - ikna) \quad (3.1.33)$$

($x=na$ - дискретна координата), можна отримати дисперсійне співвідношення для хвиль в аналізованій системі:

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 + 4\omega_{02}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (3.1.34)$$

а) Нехай $ka \ll 1$ (або $\lambda \gg a$). Тоді замість (3.1.34) можна записати:

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 k^2 a^2. \quad (3.1.35)$$

Графік відповідної залежності поданий на рис.3.1.6а. Видно, що дисперсія зникає, коли виконано умову $\omega \gg \omega_{01}$. Тоді дисперсійна крива зливається з асимптотою (прямою, що проходить через початок відліку), на якій фазова швидкість стає сталою. Навпаки, дисперсія істотна при $\omega \sim \omega_{01}$ - доки частота хвилі залишається сумірною з власною частотою системи ω_{01} . Таким чином, у даному випадку причиною існування дисперсії виступає наявність власної частоти в аналізованій системі. Такий тип дисперсії прийнято називати *часовою*.

б) Нехай тепер $\omega \gg \omega_{01}$, так що співвідношення (3.1.34) набирає вигляду

$$\omega = 2\omega_{02} \sin \frac{ka}{2}. \quad (3.1.36)$$

Відповідну дисперсійну криву наведено на рис.3.1.6б. Тепер дисперсія зникає, коли $ka \ll 1$ (або $\lambda \gg a$), і виявляється істотною при $ka \sim 1$, тобто коли довжина однієї ланки аналізованої системи стає сумірною з довжиною хвилі. Можна зробити висновок, що в цьому разі причиною дисперсії є наявність у системі характерної довжини (конкретно - довжини ланки a). Маємо справу з *просторовою* дисперсією.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

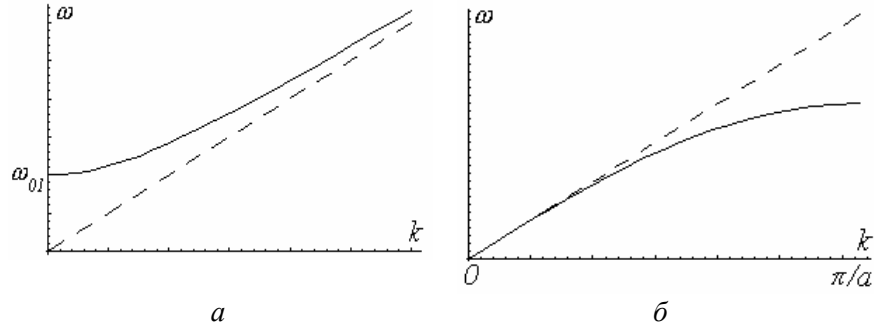


Рис.3.1.6. Графіки дисперсійних залежностей:
а - (3.1.35); б - (3.1.36).

3.1.7. Просторова і часова дисперсія в електродинаміці суцільних середовищ.

Як відомо, дисперсія електромагнітних хвиль у деякому середовищі визначається його діелектричною та магнітною проникністю. Розглянемо, як визначаються ці величини в електродинаміці суцільних середовищ, на прикладі діелектричної проникності, що пов'язує між собою напруженість та індукцію електричного поля. Для простоти вважатимемо середовище ізотропним, тоді діелектрична проникність буде скаляром.

Будемо формально розглядати напруженість електричного поля як деякий зовнішній вплив, а індукцію - як відгук на цей вплив. З експерименту відомо, що зв'язок між напруженістю та індукцією ϵ , взагалі кажучи, нелокальним у просторі та часі: індукція у даній точці в деякий момент часу залежить від напруженості не тільки в цей момент, але й у попередні моменти часу, причому не тільки в даній точці, але й у сусідніх точках.

Фізично нелокальність у часі визначається «пам'яттю» середовища, тобто наявністю власних частот (середовище можна розглядати як набір високочастотних осциляторів, які «дзвонять» протягом

тривалого часу після моменту дії зовнішньої сили).

Нелокальність у просторі обумовлена наявністю далекого порядку (в твердому тілі) чи процесами перенесення (в плазмі). В цьому випадку можна говорити про те, що середовище характеризується деяким характерним розміром (постійною ґратки в кристалі, дебаївським радіусом у плазмі).

В межах лінійної теорії феноменологічний зв'язок між цими величинами записується у вигляді інтегралу:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \epsilon(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (3.1.37)$$

($d\vec{r} \equiv dx dy dz$). Для однорідних стаціонарних середовищ можна вважати, що «передавальна функція» $\epsilon(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')$ насправді залежить тільки від проміжку часу між моментами «впливу» та спостереження, а також від віддалі між точками «впливу» та спостереження:

$$\epsilon(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \epsilon(\vec{r} - \vec{r}'; t - t'). \quad (3.1.38)$$

Розкладемо напруженість поля в інтеграл Фур'є за часом та просторовими змінними:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \vec{E}(\vec{k}, \omega) \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \quad (3.1.39)$$

де

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),$$

$$d\vec{k} \equiv dk_x dk_y dk_z. \quad (3.1.40)$$

Тоді для спектру індукції можна записати:

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \times$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

$$\times \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') \vec{E}(\vec{r}', t'). \quad (3.1.41)$$

Замінивши у внутрішньому інтегралі в (3.1.41) змінні інтегрування,
 $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho}, \quad t - t' = \tau,$ (3.1.42)

перепишемо цей вираз у формі

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) \times \\ \times \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \varepsilon(\vec{\rho}; \tau) \vec{E}(\vec{r} - \vec{\rho}, t - \tau). \quad (3.1.43)$$

Підставимо вираз для напруженості електричного поля через інтеграл Фур'є (3.1.39) та замінимо порядок інтегрування. Отримаємо:

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \varepsilon(\vec{\rho}; \tau) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \varepsilon(\vec{\rho}; \tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k}' \vec{E}(\vec{k}', \omega') \exp[i\omega'(t - \tau) - i\vec{k}'(\vec{r} - \vec{\rho})] = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \varepsilon(\vec{\rho}; \tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k}' \vec{E}(\vec{k}', \omega') \exp(-i\omega'\tau + i\vec{k}'\vec{\rho}) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \exp[i(\omega' - \omega)t - i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}]. \quad (3.1.44)$$

Враховувавши, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \exp[i(\omega' - \omega)t - i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}] = (2\pi)^4 \delta(\omega' - \omega) \delta(\vec{k}' - \vec{k}), \\ \delta(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (3.1.45)$$

виконаємо за допомогою δ -функцій інтегрування у внутрішній парі

інтегралів і остаточно отримаємо для спектрів індукції та напруженості:

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad (3.1.46)$$

де використано позначення

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \varepsilon(\vec{\rho}; \tau) \exp(-i\omega\tau + i\vec{k}\vec{\rho}) - \quad (3.1.47)$$

діелектрична проникність для хвилі з частотою ω та хвильовим вектором \vec{k} .

Як впливає з наведеного розрахунку, залежність ε (так само і μ) від ω пов'язана з «пам'яттю» середовища, тобто існуванням у нього власних частот. Вона відповідає часовій дисперсії. Залежність цих величин від \vec{k} обумовлена просторовою нелокальністю і відповідає просторовій дисперсії.

Контрольні питання до розділу 3.1.

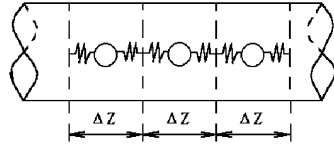
- 3.1.1. Коли хвилю в струні вже не можна розглядати як хвилю малої амплітуди?
- 3.1.2. Чи може нестационарна хвиля існувати в лінійному однорідному консервативному середовищі без дисперсії за відсутності зовнішнього впливу? Відповідь обґрунтувати.
- 3.1.3. Які властивості суцільного середовища спричиняють виникнення в ньому просторової та часової дисперсії?
- 3.1.4. До якого типу (за причиною виникнення) належить дисперсія електромагнітних хвиль у хвилеводі? Відповідь обґрунтувати.
- 3.1.5. Чи можна описувати неоднорідне середовище з просторовою дисперсією за допомогою діелектричної проникності? Відповідь обґрунтувати.
- 3.1.6. Яка задача – початкова чи гранична – більше відповідає, на Вашу думку, реальним ситуаціям?

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.1. Лінійні хвилі в пасивних системах із розподіленими параметрами.

Задачі до розділу 3.1.

3.1.1. Отримати рівняння в частинних похідних, що описує позовжні хвилі в нескінченному пружному стрижні. Виходити з моделі ланцюжка мас на пружинах. Якою буде швидкість хвилі?



3.1.2. Знайти спектр частот власних коливань струни, якщо її кінці закріплені, а довжина, лінійна масова густина та натяг дорівнюють відповідно L , ρ та T .

3.1.3. Отримати хвильове рівняння для електромагнітних хвиль у холодній ізотропній плазмі, вважаючи іони нерухомими.

Вказівка: скористатися визначенням густини струму та рівнянням руху електронів під дією електричного поля.

3.1.4. Рух електронів у теплій плазмі з нерухомими іонами для одновимірного випадку описується системою рівнянь:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{e}{m} E - \frac{1}{n_0 m} \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -4\pi e(n - n_0),$$

де n та v - концентрація та швидкість електронів, n_0 - концентрація іонів, P - тиск електронного газу, E - напруженість електричного поля. Вважаючи, що задовольняється рівняння адиабати

$$P/P_0 = (n/n_0)^\gamma,$$

одержати дисперсійне рівняння для хвиль малої амплітуди у цій системі (ленгмюрівських хвиль). Побудувати дисперсійну залежність.

Вказівка: Плазма в середньому електронейтральна. Скористатися позначенням: $c_s^2 = \gamma P_0 / n_0 m$ - швидкість ленгмюрівських хвиль.

3.1.5. Хвилі в нелінійному середовищі описуються рівнянням:

а) синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \omega_0^2 \sin u = 0;$$

б) Кортевега - де Вріза

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = 0.$$

Побудувати дисперсійну залежність для хвиль малої амплітуди. Охарактеризувати дисперсію цих хвиль.

3.1.6. У лінії з дисперсією $\omega = \omega(k)$ в момент $t=0$ існує збурення у формі $u(z) = U_m(z) \exp(-ik_0 z)$, де $U_m(z)$ - повільна обвідна ($U_m(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$). Яким буде сигнал у лінії в довільний момент часу?

3.1.7. Оцінити час розпливання хвильового пакету тривалістю τ в системі із заданою дисперсією $\omega = \omega(k)$.

3.1.8. Вивести формулу зв'язку між фазовою та груповою швидкістю (формулу Релея):

$$v_g = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$$

3.1.9. Оцінити вплив квадратичного доданку в ряду Тейлора для $k(\omega)$ при поширенні радіоімпульсу з повільною гаусівською обвідною.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

У попередньому розділі йшлося про хвильові процеси в пасивних та однорідних системах. У багатьох випадках доводиться мати справу також із просторово періодичними системами, які вже розглядалися у попередній частині (див. розділ 2.8). Нижче будуть обговорені дисперсійні властивості хвиль у таких системах. Виявляється, що в них можливе поширення хвиль з малими фазовими швидкостями, а також хвиль із від'ємною дисперсією.

Ще більш цікаві явища можна спостерігати в нерівноважних системах, де за рахунок «надлишкової» енергії в принципі можливі генерація та підсилення хвиль. Хвилі в нерівноважних системах будуть розглянуті на прикладі електронного потоку.

3.2.1. Просторові гармоніки.

Будемо розглядати поширення хвиль у довгій лінії (для простоти розглядатимемо лінію без дисперсії), екранованій періодичним екраном (рис.3.2.1). Безпосередньо в лінії маємо звичайну біжучу хвилю:

$$u(z,t) = A \exp(i\omega t \mp ik_0 z), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (3.2.1)$$

де C_1 та L_1 - погонні ємність та індуктивність лінії (див. п.3.1.1).

Прозорість екрану є деякою періодичною функцією координати (рис.3.2.1): вона максимальна навпроти вікон і спадає в проміжках між вікнами. Вважаючи лінію та екран нескінченно довгими, розкладемо функцію прозорості екрану в ряд Фур'є:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(in \frac{2\pi}{d} z\right), \quad (3.2.2)$$

де d - період екрану.

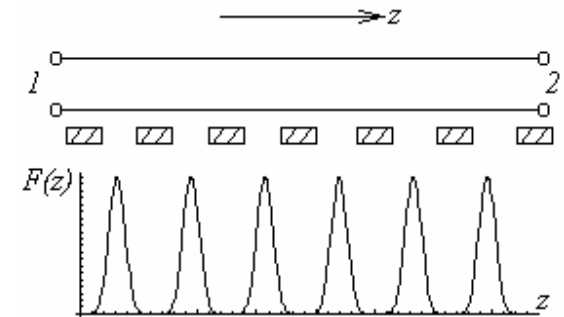
Сигнал за екраном являє собою добуток хвилі в лінії (3.2.1) на функцію прозорості екрану (3.2.2):

$$\begin{aligned} U(z,t) &= u(z,t)F(z) = A \exp(i\omega t \mp ik_0 z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(in \frac{2\pi}{d} z\right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} AC_n \exp\left[i\omega t - i\left(\pm k_0 - n \frac{2\pi}{d}\right)z\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp(i\omega t - ik_n z), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

де введені позначення

$$B_n = AC_n, \quad k_n = \pm \frac{\omega}{v_0} - \frac{2\pi}{d} n. \quad (3.2.4)$$

Рис.3.2.1. Довга лінія з періодичним екраном і функція прозорості екрану.



Формула (3.2.3) дає змогу інтерпретувати сигнал за екраном як набір великої кількості гармонік з однаковою частотою, але відмінними амплітудами і хвильовими числами - так званих просторових гармонік. Закон дисперсії просторових гармонік має вигляд (3.2.4). Графіки відповідних дисперсійних залежностей подані на рис.3.2.2.

Легко бачити, що групові швидкості всіх просторових гармонік дорівнюють $\pm c$, а фазові швидкості, взагалі кажучи, зменшуються за абсолютною швидкістю із зростанням номеру просторової гармоніки:

$$v_{n\text{ ph}} = \frac{\omega}{k_n} = \frac{c}{\pm 1 - 2\pi n c / \omega d}. \quad (3.2.5)$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

Крім того, серед просторових гармонік трапляються зворотні хвилі (з від'ємною дисперсією), у яких фазова та групова швидкості мають протилежні знаки.

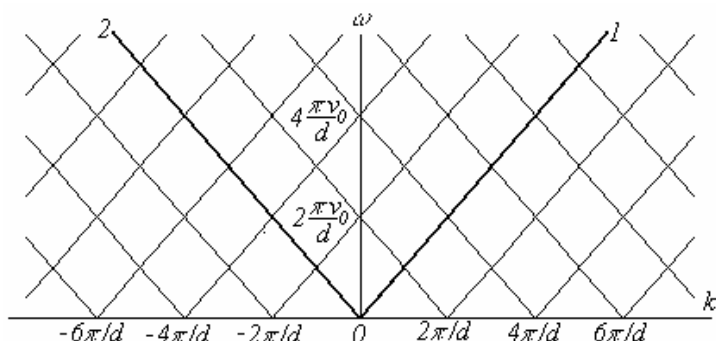


Рис.3.2.2. Просторові гармоніки (1, 2 - пряма та зворотна основні хвилі).

3.2.2. Дисперсія хвиль у періодичних структурах.

Наявність хвиль із малою фазовою швидкістю, в тому числі хвиль з від'ємною дисперсією - це властивість не лише довгої лінії з періодичним екраном, але й будь-яких просторово періодичних структур. Тому такі структури (так звані сповільнюючі структури - гребінка, спіраль, меандр) використовуються для отримання повільних електромагнітних хвиль (із фазовими швидкостями, значно меншими від швидкості світла у вакуумі). Щоб проілюструвати це, повернемося до модельної просторово періодичної структури, розглянутої в розділі 2.8 - ланцюжка контурів із ємнісним зв'язком. Дисперсійне рівняння для неї має форму (2.8.13):

$$\omega(k) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

Графік цієї залежності в широкому діапазоні зміни хвильового числа поданий на рис.3.2.3.

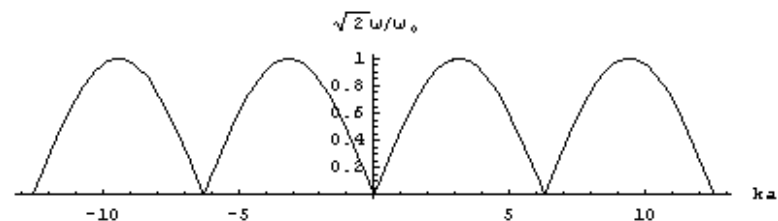


Рис.3.2.3. Дисперсійна крива для хвиль у ланцюжку контурів з ємнісним зв'язком.

Як бачимо, і в цьому випадку в системі спостерігаються прямі та зворотні хвилі з малою фазовою швидкістю. Справді, сусідні періоди дисперсійної кривої відрізняються тим, що набіг фази на одну ланку структури змінюється на 2π , а, отже, відповідно змінюється і фазова швидкість хвилі (при тій самій груповій швидкості). Зокрема, фазова швидкість може стати від'ємною (при додатній груповій), завдяки чому й виникають зворотні хвилі.

Аналізуючи хвилі в інших періодичних структурах (див., наприклад, п.3.1.6), легко переконатися, що вказані властивості спостерігаються і в них.

3.2.3. Хвилі в електронному потоку: опис моделі та вихідні рівняння.

Розглянемо початково однорідний потік електронів з однаковими швидкостями v_0 , що рухаються в деякому середовищі з діелектричною проникністю ε паралельно до осі z . Нехай середній об'ємний заряд цього потоку, за модулем рівний en_0 , скомпенсований позитивно зарядженими іонами, які ми надалі вважатимемо нерухомими (оскільки їхня маса на 3-4 порядки перевищує масу електронів). Вважатимемо всі збурення концентрації електронів (а, отже, й породжуване ними електричне поле E) залежними лише від координати z . Така ідеалізована модель в реальності відповідає руху пучка в си-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

льному поздовжньому магнітному полі, яке придушує відхилення електронів у поперечному напрямку. Зарядова компенсація пучка при стаціонарній інжекції забезпечується за рахунок часткової іонізації залишкового газу, що завжди наявний в реальних експериментах.

Для опису даної моделі скористаємося рівнянням неперервності (законом збереження заряду), рівнянням руху для електронів (за другим законом Ньютона) та теоремою Гауса (в диференціальній формі), які для одновимірного випадку набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) &= 0; & m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -eE; \\ \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E) &= -4\pi n(n - n_0). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Тут $n=n(z,t)$ та $v=v(z,t)$ - відповідно миттєва концентрація ($n>0$) та швидкість електронів, прив'язані до фіксованої точки простору (ейлерові координати). У лівій частині рівняння руху враховано, що

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Система (3.2.6) істотно нелінійна: перше рівняння містить похідну за координатою від добутку nv , друге - від квадрату швидкості.

3.2.4. Дисперсія хвиль просторового заряду.

Лінеаризуємо систему (3.2.6). Для цього шукатимемо її розв'язки у формі

$$\begin{aligned} n(z,t) &= n_0 + \tilde{n}(z,t), & n_0 &\gg |\tilde{n}(z,t)|; \\ v(z,t) &= v_0 + \tilde{v}(z,t), & v_0 &\gg |\tilde{v}(z,t)|. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Тоді електричне поле формально має той самий порядок малювання, що й змінні складові густини та швидкості електронів. Лінеаризована система набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{n}}{\partial z} + n_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} &= -\frac{e}{m} E; \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= -\frac{4\pi e}{\varepsilon} \tilde{n}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Підставимо розв'язок системи (3.2.8) у вигляді гармонічної хвилі:

$$\begin{aligned} \tilde{n}(z,t) &= n_m \exp(i\omega t - ikz); & \tilde{v}(z,t) &= v_m \exp(i\omega t - ikz); \\ E(z,t) &= E_m \exp(i\omega t - ikz). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Тоді замість (3.2.8) отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд:

$$\begin{aligned} (\omega - kv_0)n_m - kn_0 v_m &= 0; & (\omega - kv_0)v_m + \frac{e}{m} E_m &= 0; \\ -ikE_m + \frac{4\pi}{\varepsilon} n_m &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Прирівнюючи до нуля визначник системи (3.2.10), можна отримати дисперсійне співвідношення для хвиль в електронному потоку:

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{\omega_B^2}{\varepsilon}, \quad (3.2.11)$$

де використано позначення

$$\omega_B = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}} \quad (3.2.12)$$

- «пучкова» частота (електронна ленгмюрівська частота¹, що відповідає густині електронів у пучку).

Будемо розглядати граничну задачу (див. п.3.1.3), тобто задачу про поширення в просторі хвиль заданої частоти. Розв'язуючи дисперсійне рівняння (3.2.11) щодо хвильового числа, можна отримати:

¹ Див. задачу 1.1.13.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

$$k_{1,2} = \frac{\omega \mp \omega_B / \sqrt{\varepsilon}}{v_0}. \quad (3.2.13)$$

Корені k_1 та k_2 відповідають швидкій та повільній хвилям просторового заряду (ХПЗ) електронного потоку. Відповідні графіки дисперсійних залежностей (для вакууму, $\varepsilon=1$) подано на рис.3.2.4. З графіків видно, що для тієї самої частоти швидка ХПЗ справді має більшу фазову швидкість, ніж повільна. Групова швидкість обох хвиль однакова і дорівнює швидкості електронного потоку v_0 .

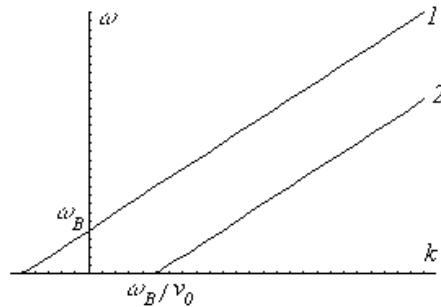


Рис.3.2.4. Дисперсійні залежності для швидкої (1) та повільної (2) хвиль просторового заряду електронного потоку.

Хвилі просторового заряду - це одночасні збурення густини та швидкості електронів і електричного поля в електронному потоку. Електричне поле виникає через те, що збурення густини електронів не встигають компенсуватися за рахунок важких іонів. ХПЗ дещо нагадують акустичні хвилі, але згущення електронів тепер розмозкуються не за рахунок сил газокінетичного тиску, а за рахунок кулонівських сил.

Нехай у нерухомому зарядово скомпенсованому електронному газі існують власні коливання на його ленгмюрівській частоті (3.2.12), миттєва амплітуда яких гармонічно змінюється в просторі:

$$n \sim \cos \omega_B t \exp(-ikz).$$

Перетворивши $\cos \omega t$ за формулою Ейлера, ці коливання можна

формально інтерпретувати як пару зустрічних хвиль із однаковими амплітудами:

$$n \sim \exp(i\omega_B t - ikz) + \exp(-i\omega_B t - ikz).$$

Перейдемо тепер у систему координат, що рухається щодо електронного газу зі швидкістю v_0 : $z'=z-v_0 t$. Тепер збурення густини електронів матиме вигляд пари хвиль, що рухаються в одному напрямку (при $kv_0 > \omega_B$), але з різними фазовими швидкостями:

$$n \sim \exp[i(kv_0 + \omega_B)t - ikz'] + \exp[i(kv_0 - \omega_B)t - ikz'].$$

Це й будуть хвилі просторового заряду. Їхній закон дисперсії визначається формулою (3.2.11) (для вакууму, $\varepsilon=1$).

3.2.5. Хвилі просторового заряду в провідному середовищі.

В електроніці надвисоких частот відомий так званий резистивний підсилювач, будова якого зрозуміла з рис.3.2.5. Електронний пучок на шляху від електронної гармати до колектора проходить через спіраль, потім рухається в середині провідного кожуха, потім проходить іще одну спіраль. Якщо на першу спіраль подати вхідний сигнал, з другої спіралі можна зняти підсилений сигнал².

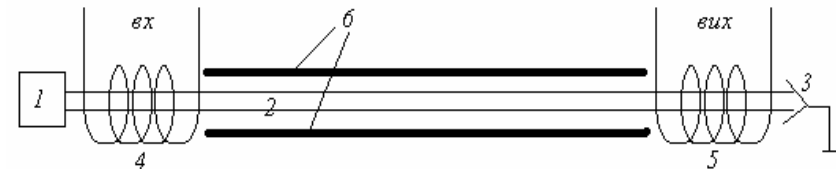


Рис.3.2.5. Принципова схема резистивного підсилювача: 1 - електронна гармата; 2 - електронний пучок; 3 - колектор; 4, 5 - вхідна та вихідна спіралі; б - провідний кожух.

² Спіралі виступають в ролі сповільнюючих структур, в яких швидкість електромагнітних хвиль близька до швидкості пучка (див. п.3.2.1). Електромагнітні хвилі в спіралі і ХПЗ в пучку виявляються зв'язаними, і між ними можливий обмін енергією (див. нижче п.п.3.3.1-3.3.2).

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

Щоб описати механізм підсилення, можна скористатися моделлю, описаною в п.3.2.3, прийнявши, що середовище, в якому рухається електронний потік, є провідним. Як відомо, електричні властивості такого середовища можна описати комплексною діелектричною проникністю

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (3.2.14)$$

де σ - активна провідність середовища.

Підставляючи (3.2.14) до (3.2.13), можна отримати:

$$k_{1,2} = k'_{1,2} + ik''_{1,2}, \quad (3.2.15)$$

де в найпростішому випадку слабкої провідності ($\varepsilon'' \ll \varepsilon'$)

$$k'_{1,2} = \frac{\omega \mp \omega_B / \sqrt{\varepsilon}}{v_0}, \quad k''_{1,2} = \mp \frac{\omega_B \varepsilon''}{2v_0 (\varepsilon')^{3/2}}. \quad (3.2.16)$$

Підставивши (3.2.15)-(3.2.16) до (3.2.9), бачимо, що в провідному середовищі швидка ХПЗ згасатиме за законом $\exp(-|k''z|)$, а повільна - навпаки, зростатиме за законом $\exp(|k''z|)$. Останнє явище і використане в резистивному підсилювачі.

3.2.6. Хвилі з додатною та від'ємною енергією.

Для того, щоб з'ясувати механізм зростання повільних ХПЗ в провідному середовищі, підрахуємо густину енергії електронного потоку, в якому збуджено хвилю просторового заряду. Будемо враховувати лише кінетичну енергію електронів. Тоді її миттєву густину можна записати у формі:

$$W(z,t) = \frac{1}{2} mn(z,t)v^2(z,t). \quad (3.2.17)$$

Миттєві значення швидкості та концентрації електронів визначаються співвідношеннями (3.2.7)-(3.2.9), де згідно загального правила за методом комплексних амплітуд слід брати дійсні частини від величин (3.2.9):

$$n(z,t) = n_0 + n_m \cos \phi; \quad v(z,t) = v_0 + v_m \cos \phi; \quad (3.2.18)$$

$$\phi = \omega t - kz.$$

Підстановка (3.2.18) до (3.2.17) дає:

$$W(z,t) = \frac{1}{2} m \{ n_0 v_0^2 + [2n_0 v_0 v_m + n_m v_0^2] \cos \phi + [2n_m v_0 v_m + n_0 v_m^2] \cos^2 \phi + n_m v_m^2 \cos^3 \phi \}. \quad (3.2.19)$$

Усереднимо миттєву густину енергії за періодом коливань (або на довжині хвилі). Тоді, оскільки

$$\overline{\cos \phi} = 0, \quad \overline{\cos^2 \phi} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos^3 \phi} = 0,$$

вираз (3.2.19) набуде вигляду

$$\overline{W} = W_0 + \Delta W, \quad (3.2.20)$$

$$W_0 = \frac{m}{2e} \rho_0 v_0^2, \quad \Delta W = \frac{m}{4e} [2n_m v_0 v_m + n_0 v_m^2].$$

Величина W_0 визначає густину енергії незбуреного електронного потоку. Величина ΔW обумовлена збуренням хвилі просторового заряду, тому її природно вважати густиною енергії хвилі.

Врахуємо перше з рівнянь (3.2.10) та явний вигляд хвильових чисел швидкої та повільної ХПЗ (3.2.13):

$$\frac{n_m}{n_0} = \frac{k}{\omega - kv_0} v_m = \pm \frac{\omega \mp \omega_B / \sqrt{\varepsilon}}{\omega_B / \sqrt{\varepsilon}} \frac{v_m}{v_0} \quad (3.2.21)$$

(як і в (3.2.13), верхній і нижній знаки відповідають швидкій та повільній ХПЗ). В більшості реальних випадків для не дуже сильних пучків

$$\omega \gg \omega_B / \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.2.22)$$

тому

$$\frac{n_m}{n_0} \approx \pm \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{\omega_B} \frac{v_m}{v_0}. \quad (3.2.23)$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

Враховуючи (3.2.23), перепишемо вираз для густини енергії хвиль у формі:

$$\Delta W_{1,2} = \frac{m}{4} n_0 v_m^2 \left[\pm 2 \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{\omega_B} + 1 \right] \approx \pm \frac{m n_0 v_m^2 \omega \sqrt{\varepsilon}}{2 \omega_B}. \quad (3.2.24)$$

Як видно з (3.2.24), швидка хвиля просторового заряду несе додатну енергію ($\Delta W_1 > 0$). Іншими словами, на збудження цієї хвилі треба витратити деяку енергію. Це найбільш типова ситуація. А от повільна хвиля просторового заряду несе від'ємну енергію ($\Delta W_2 < 0$), тобто при її збудженні в електронному потоку енергія виділяється. Така ситуація можлива лише в нерівноважних системах, де відсутність збурень не обов'язково відповідає мінімуму енергії. Тому поняття *хвиль з від'ємною енергією* можна ввести, наприклад, для активних середовищ лазерів та мазерів (середовища з інверсною заселеністю рівнів), для ланцюжка, складеного з тунельних діодів чи діодів Ганна (середовища з від'ємною в'язкістю), та інших подібних систем³.

Щоб зрозуміти, чому швидка ХПЗ несе додатну енергію, а повільна - від'ємну, звернемося до рис.3.2.6, побудованого на основі співвідношень (3.2.18) та (3.2.23). У швидкій ХПЗ, як видно з рис.3.2.6, електронні згустки (максимуми концентрації) рухаються швидше, ніж електронний потік у цілому, тому для збудження такої хвилі треба прискорити більшість електронів, надавши системі деяку енергію. Навпаки, в повільній ХПЗ електронні згустки рухаються повільніше, ніж потік в цілому, тому для її збудження треба сповільнити більшість електронів, відібравши енергію від системи.

Тепер можна повернутися до пояснення роботи резистивного підсилювача. В провідному середовищі поле ХПЗ викликає струм, протікання якого супроводжується виділенням тепла Джоуля, тобто має місце відбір енергії від електронного пучка. При цьому збуджена в пучку хвиля з додатною енергією (швидка ХПЗ) буде згасати, а

хвиля з від'ємною енергією (повільна ХПЗ), навпаки, зростатиме. Такий ефект, коли хвиля з від'ємною енергією віддає енергію на дисипацію, а її амплітуда при цьому зростає, дістав у літературі назву *дисипативної нестійкості*.

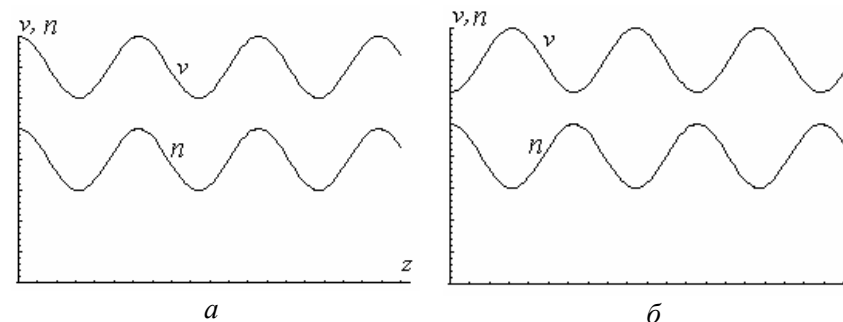


Рис.3.2.6. Миттєві розподіли в просторі концентрації та швидкості електронів для швидкої (а) та повільної (б) хвиль просторового заряду.

Контрольні питання до розділу 3.2.

- 3.2.1. Чи завжди в періодичних структурах можуть спостерігатися сповільнені прямі та зворотні хвилі?
- 3.2.2. Чому в періодичних структурах виникають повільні хвилі?
- 3.2.3. Як співвідносяться інтенсивності просторових гармонік із різними номерами?
- 3.2.4. Чи можливі хвилі з від'ємною енергією в рівноважному середовищі? Відповідь обґрунтувати.
- 3.2.5. Наведіть декілька прикладів систем, у яких можуть існувати хвилі з від'ємною енергією.
- 3.2.6. У яких випадках дисипативні властивості середовища описують за допомогою комплексної частоти, а в яких - за допомогою комплексного хвильового числа?

³ Інколи користуються також поняттям хвиль із нульовою енергією.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.2. Хвилі в періодичних та нерівноважних системах.

3.2.7. В неоднорідному середовищі між швидкою та повільною ХПЗ електронного пучка з'являється зв'язок. До яких ефектів він може привести?

3.2.8. З яких міркувань обирають довжину резистивного підсилювача?

Задачі до розділу 3.2.

3.2.1. Розрахувати амплітуди просторових гармонік, якщо функція прозорості екрану має вигляд:

а) $F(z) = \cos^2 \frac{2\pi z}{d}$;

б) $F(z) = \begin{cases} 1, & |z + nd| \leq d/4; \\ 0, & d/4 < |z + nd| \leq d/2; \end{cases} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$

в) $F(z) = \left| \sin \frac{2\pi z}{d} \right|$.

3.2.2. Оцінити оптимальну довжину резистивного підсилювача, вважаючи, що початкова глибина модуляції пучка за швидкістю складає 0.1%.

3.2.3. Знайти просторовий інкремент повільної ХПЗ в плазмі на частоті ω_p . Діелектрична проникність плазми визначається формулою

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)},$$

де ω_p - електронна ленгмюрівська частота, ν - частота зіткнень електронів з іонами та нейтральними атомами.

3.2.4. Побудувати графіки залежності

а) просторового;

б) часового

інкременту повільної хвилі просторового заряду електронного потоку від провідності середовища та від швидкості електронного потоку.

3.2.5. Врахувати внесок електричного поля до енергії хвиль просторового заряду. Чи впливає він на знак енергії хвиль?

3.2.6*. Побудувати залежності просторового та часового інкрементів хвиль у холодній плазмі, пронизуваній електронним пучком. На яких частотах вони досягають максимуму? В якому частотному діапазоні має місце нестійкість за відсутності зіткнень?

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

У багатьох випадках хвилі (в тому числі різної природи), що поширюються в деякій системі, можуть бути зв'язані між собою. В пасивних системах, коли обидві зв'язані хвилі мають додатну енергію, ефекти, обумовлені впливом зв'язку, багато в чому подібні до тих, що спостерігаються в системах зв'язаних осциляторів. Відмінність полягає в тому, що в розподілених системах у випадку граничної задачі (див. п.3.1.3), яка більше відповідає реальним ситуаціям, процеси будуть розгортатися в просторі, а не в часі.

3.3.1. Зв'язок між хвилями без дисперсії.

Розглянемо дві паралельні довгі лінії, що розташовані на малій віддалі (рис.3.3.1). Оскільки електромагнітне поле, створене зарядами та струмами першої лінії, буде відмінним від нуля в області, де розташована друга лінія, і навпаки, між лініями існуватиме індуктивний та ємнісний зв'язок. Для опису хвиль у такій системі телеграфні рівняння треба доповнити доданками, що враховують взаємні індуктивність та ємність між лініями:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = L_1 \frac{\partial a_1}{\partial t} + M \frac{\partial a_2}{\partial t}; \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = L_2 \frac{\partial a_2}{\partial t} + M \frac{\partial a_1}{\partial t}; \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + C \frac{\partial U_2}{\partial t}; \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} + C \frac{\partial U_1}{\partial t}.$$

Тут $L_{1,2}$ та $C_{1,2}$ - погонні параметри першої та другої ліній, M та C - погонні взаємна індуктивність та взаємна ємність між лініями (врахуємо, що $M \ll L_{1,2}$, $C \ll C_{1,2}$).

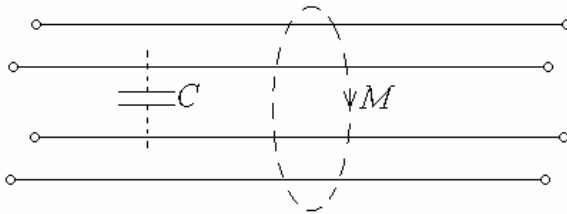


Рис.3.3.1. Зв'язані довгі лінії.

Розв'язок системи (3.3.1) будемо шукати у вигляді гармонічної хвилі, тобто всі величини вважатимемо пропорційними $\exp(i\omega t - ikz)$. Отримаємо:

$$-kU_1 = \omega L_1 I_1 + \omega M I_2; \quad -kU_2 = \omega L_2 I_2 + \omega M I_1; \quad (3.3.2)$$

$$-kI_1 = \omega C_1 U_1 + \omega C U_2; \quad -kI_2 = \omega C_2 U_2 + \omega C U_1.$$

Виключаючи з (3.3.2) струми і відкидаючи доданки другого порядку мализни, дістанемо:

$$k^2 U_1 = \omega^2 L_1 C_1 U_1 + \omega^2 (L_1 C + M C_2) U_2; \quad (3.3.3)$$

$$k^2 U_2 = \omega^2 L_2 C_2 U_2 + \omega^2 (L_2 C + M C_1) U_1.$$

Введемо парціальні хвильові числа $k_{01,02}^2 = \omega^2 L_{1,2} C_{1,2}$ та коефіцієнти зв'язку $\kappa_{1,2}^2 = \omega^2 (L_{1,2} C + C_{1,2} M)$. Тоді дисперсійне рівняння $(k^2 - \omega^2 L_1 C_1)(k^2 - \omega^2 L_2 C_2) - \omega^4 (L_1 C + M C_2)(L_2 C + M C_1) = 0$,

(3.3.4)

яке можна отримати з (3.3.3), набуде вигляду:

$$(k^2 - k_{01}^2)(k^2 - k_{02}^2) = \kappa_1^2 \kappa_2^2. \quad (3.3.5)$$

За відсутності зв'язку воно розпадається на два рівняння для ізольованих ліній, яким відповідають розв'язки $k = \pm k_{01}$ та $k = \pm k_{02}$. В загальному випадку (за наявності зв'язку) розв'язки дисперсійного рівняння (3.3.5) мають вигляд:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(k_{01}^2 + k_{02}^2) \pm \sqrt{(k_{01}^2 - k_{02}^2)^2 + 4\kappa_1^2 \kappa_2^2} \right] \quad (3.3.6)$$

(пор. із формулою (2.1.21) для власних частот двох лінійних консервативних осциляторів із ємнісним зв'язком). У найпростішому випадку, коли лінії однакові ($L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$, $k_{01} = k_{02} = k_0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$), отримуємо:

$$k_{1,2}^2 = k_0^2 \pm \kappa^2. \quad (3.3.7)$$

Подібно до того, як зв'язок між осциляторами приводив до розщевування власних частот, зв'язок між хвилями приводить до

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

розштовхування дисперсійних кривих. Зокрема, для ідентичних ліній відбувається розщеплення дисперсійної кривої на дві (рис.3.3.2а). Як і у випадку зв'язаних осциляторів, розщеплення дисперсійних кривих є наслідком періодичного (в просторі) обміну енергії між лініями.

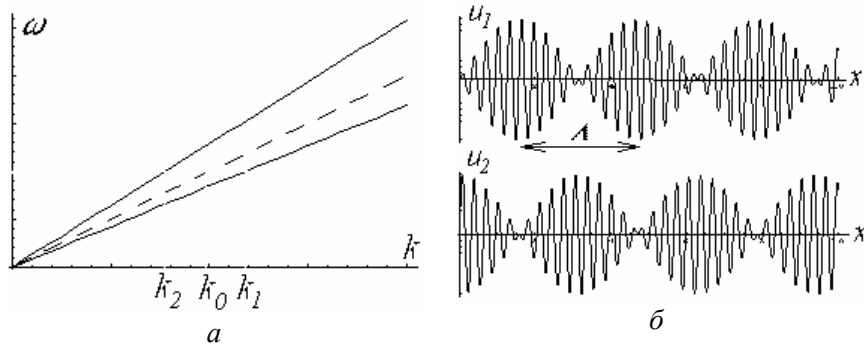
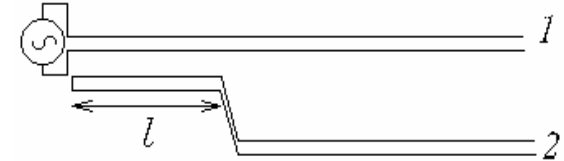


Рис.3.3.2: а - розштовхування дисперсійних кривих внаслідок зв'язку між хвилями (випадок двох однакових ліній без дисперсії); б - биття у зв'язаних довгих лініях ($\Delta = 2\pi/|k_1 - k_2|$).

Справді, у зв'язаних ідентичних довгих лініях генератор монохроматичного сигналу збуджуватиме на одній частоті хвилі з двома відмінними значеннями хвильового числа, в результаті чого в лініях спостерігатиметься биття (рис.3.3.2б). Фізично це биття обумовлене обміном енергією між лініями внаслідок існування між ними зв'язку.

Обмін енергією між лініями в просторі лежить в основі роботи спрямованого відгалужувача (рис.3.3.3). На вході лінії 1 увімкнене джерело сигналу, вхід лінії 2 замкнений накоротко. На ділянці завдовжки $l = \lambda/2$ лінії зближені, і між ними існує зв'язок. На цій ділянці внаслідок обміну енергією між лініями весь сигнал з лінії 1 перейде в лінію 2. Далі віддаль між лініями зростає, зв'язок між ними зникає, тому сигнал так і залишиться в лінії 2.

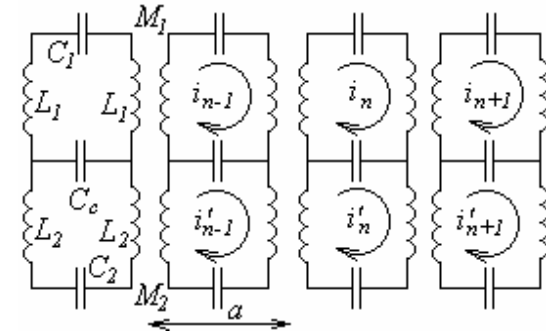
Рис.3.3.3. Спрямований відгалужувач на основі довгої лінії.



3.3.2. Зв'язок між хвилями з однаковими знаками дисперсії.

Розглянемо нескінченно довгу ланцюжкову систему, показану на рис.3.3.4. При $C_c \rightarrow \infty$ вона розпадається на два ізольовані ланцюжки індуктивно зв'язаних контурів, тому її можна розглядати як модель зв'язаних ліній.

Рис.3.3.4. Зв'язані ланцюжки з однаковими знаками дисперсії; C_c - ємність зв'язку.



Рівняння за II законом Кірхгофа для n -ї ланки мають вигляд:

$$2L_1 \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_c} \right) i_n - M_1 \left(\frac{d^2 i_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2 i_{n+1}}{dt^2} \right) - \frac{1}{C_c} i'_n = 0; \quad (3.3.8)$$

$$2L_2 \frac{d^2 i'_n}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_c} \right) i'_n - M_2 \left(\frac{d^2 i'_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2 i'_{n+1}}{dt^2} \right) - \frac{1}{C_c} i_n = 0.$$

Стандартна підстановка розв'язку типу (3.1.33) у вигляді гармонічної хвилі, що біжить уздовж ланцюжка,

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

$$i_n = I_m \exp(i\omega t - ikna), \quad i'_n = I'_m \exp(i\omega t - ikna), \quad (3.3.9)$$

перетворює (3.3.8) на систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_m + \omega_{01}^2 I_m + \beta_1 I_m \cos ka - v_1^2 I'_m &= 0; \\ -\omega^2 I'_m + \omega_{02}^2 I'_m + \beta_2 I'_m \cos ka - v_2^2 I_m &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

де позначено

$$\omega_{01,02}^2 = \left[2L_{1,2} \left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_c} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad \beta_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{L_{1,2}}, \quad v_{1,2}^2 = \frac{1}{2L_{1,2}C_c}. \quad (3.3.11)$$

Прирівнюючи визначник системи (3.3.10) до нуля, отримаємо дисперсійне рівняння:

$$\left[\omega^2 (1 + \beta_1 \cos ka) - \omega_{01}^2 \right] \left[\omega^2 (1 + \beta_2 \cos ka) - \omega_{02}^2 \right] - v_1^2 v_2^2 = 0. \quad (3.3.12)$$

Це бікватратне рівняння щодо частоти, отже, воно допускає аналітичний розв'язок.

За відсутності зв'язку між лініями, коли $C_c \rightarrow \infty$ і $v_{1,2} = 0$, рівняння (3.3.12) перетворюється на добуток двох дисперсійних рівнянь для кожної окремої системи індуктивно зв'язаних контурів. Відповідні формули для дисперсійних кривих набувають вигляду

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01,02}^2}{1 + \beta_{1,2} \cos ka}. \quad (3.3.13)$$

При відповідному підборі параметрів ці криві перетинаються (рис.3.3.5а) у так званих *точках синхронізму*, де $\tilde{\omega}_1(\tilde{k}) = \tilde{\omega}_2(\tilde{k})$, або

$$\frac{\omega_{01}^2}{(1 + \beta_1 \cos \tilde{k}a)} = \frac{\omega_{02}^2}{(1 + \beta_2 \cos \tilde{k}a)}, \quad (3.3.14)$$

і хвилі в лініях мають однакову фазову швидкість. Із (3.3.14) для точок синхронізму можна записати:

$$\cos \tilde{k}a = \frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2}, \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (3.3.15)$$

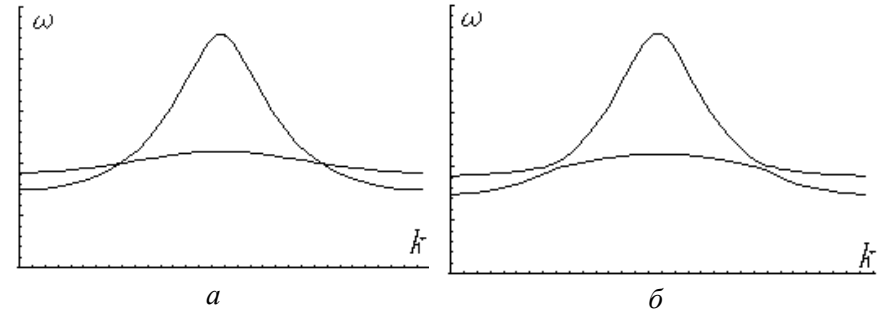


Рис.3.3.5. Дисперсійні криві для зв'язаних ланцюжків, поданих на рис.3.3.4, за відсутності зв'язку (а) та за наявності слабого зв'язку (б).

За наявності зв'язку розв'язки дисперсійного рівняння (3.3.12) мають вигляд:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 (1 + \beta_2 \cos ka) + \omega_{02}^2 (1 + \beta_1 \cos ka) \pm \sqrt{D}}{2(1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka)}, \quad (3.3.16)$$

$$D = \left[\omega_{01}^2 (1 + \beta_2 \cos ka) - \omega_{02}^2 (1 + \beta_1 \cos ka) \right]^2 + 4v_1^2 v_2^2 (1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka).$$

Перший доданок у виразі для дискримінанту (3.3.16) у точці синхронізму (3.3.14) перетворюється в нуль. Другий доданок пропорційний до параметру зв'язку $v_1^2 v_2^2$. Тому далеко від точки синхронізму, де

$$\begin{aligned} \left[\omega_{01}^2 (1 + \beta_2 \cos ka) - \omega_{02}^2 (1 + \beta_1 \cos ka) \right]^2 &\gg \\ &\gg 4v_1^2 v_2^2 (1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka), \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

наявність зв'язку практично не впливає на вигляд дисперсійних кри-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

вих, і $\omega_{1,2} \approx \tilde{\omega}_{1,2}$. Навпаки, в околі точки синхронізму

$$\left[\omega_{01}^2 (1 + \beta_2 \cos ka) - \omega_{02}^2 (1 + \beta_1 \cos ka) \right]^2 \ll 4v_1^2 v_2^2 (1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka), \quad (3.3.18)$$

тому в цій області має місце вже знайомий нам ефект розштовхування дисперсійних кривих:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{01}^2}{1 + \beta_1 \cos ka} + \frac{\omega_{02}^2}{1 + \beta_2 \cos ka} \right) \pm \\ &\pm \frac{2v_1 v_2 \sqrt{(1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka)}}{2(1 + \beta_2 \cos ka)(1 + \beta_1 \cos ka)} \approx \\ &\approx \frac{\beta_1 \omega_{02}^2 - \beta_2 \omega_{01}^2}{\beta_1 - \beta_2} \left(1 \pm \frac{v_1 v_2}{\omega_{01} \omega_{02}} \right) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

(враховано, що в околі точки синхронізму виконані співвідношення (3.3.15). Дисперсійні криві з урахуванням зв'язку подані на рис.3.3.5б. Як і у випадку зв'язку між лініями без дисперсії, між хвилями у верхній та нижній частинах ланцюжка відбуватиметься періодичний у просторі обмін енергією. Цим і обумовлюється формальне існування двох різних значень частоти, що виникають в околі точки синхронізму внаслідок появи зв'язку.

Розштовхування дисперсійних кривих, що призводить до періодичного в просторі обміну енергією між хвилями - це ефект, який завжди виникає за наявності зв'язку між хвилями з однаковим знаком дисперсії.

3.3.3. Зв'язок між хвилями з протилежними знаками дисперсії.

Ефекти, обумовлені зв'язком між хвилями з протилежним знаком дисперсії, також проаналізуємо на прикладі ланцюжкової системи (рис.3.3.6). Як і в попередньому випадку, при $C_c \rightarrow \infty$ вона розпадається на два ізольовані ланцюжки.

Запишемо рівняння для n -ї ланки згідно з другим законом Кірх-

гофа:

$$2L_1 \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_c} \right) i_n - L_1 \left(\frac{d^2 i_{n-1}}{dt^2} + \frac{d^2 i_{n+1}}{dt^2} \right) - \frac{1}{C_c} i'_n = 0; \quad (3.3.20)$$

$$L_2 \frac{d^2 i'_n}{dt^2} + \left(\frac{2}{C_2} + \frac{1}{C_c} \right) i'_n - \frac{1}{C_2} (i'_{n+1} + i'_{n-1}) - \frac{1}{C_c} i_n = 0.$$

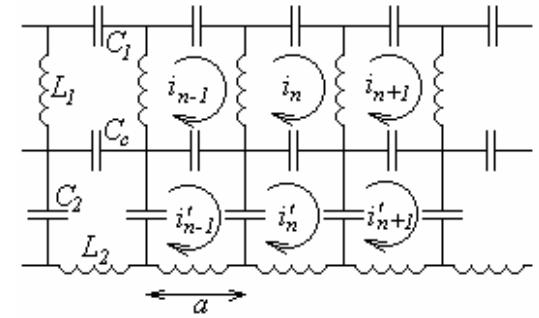


Рис.3.3.6. Зв'язані ланцюжки з протилежними знаками дисперсії; C_c - ємність зв'язку.

Підставивши розв'язок у формі (3.3.9), можна отримати дисперсійне рівняння у формі

$$\left(2\omega^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - \omega_{01}^2 \right) \left(\omega^2 - 2\omega_{02}^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \right) - v_1^2 v_2^2 = 0, \quad (3.3.21)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \frac{1}{2L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_c} \right), & \omega_{02}^2 &= \frac{1}{L_2} \left(\frac{2}{C_2} + \frac{1}{C_c} \right), \\ v_1^2 &= \frac{1}{2L_1 C_c}, & v_2^2 &= \frac{1}{L_2 C_c} \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

За відсутності зв'язку, коли $C_c \rightarrow \infty$ і $v_{1,2} = 0$, дисперсійне рівняння (3.3.21) розбивається на два окремі рівняння:

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\omega_{01}^2}{2\sin^2(\tilde{k}a/2)}, \quad \tilde{\omega}_2^2 = 2\omega_{02}^2 \sin^2 \frac{\tilde{k}a}{2}. \quad (3.3.23)$$

При відповідному підборі параметрів дисперсійні криві в цьому випадку перетинаються (рис.3.3.7а) в точках синхронізму

$$\frac{\omega_{01}^2}{2\sin^2(ka/2)} = 2\omega_{02}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (3.3.24)$$

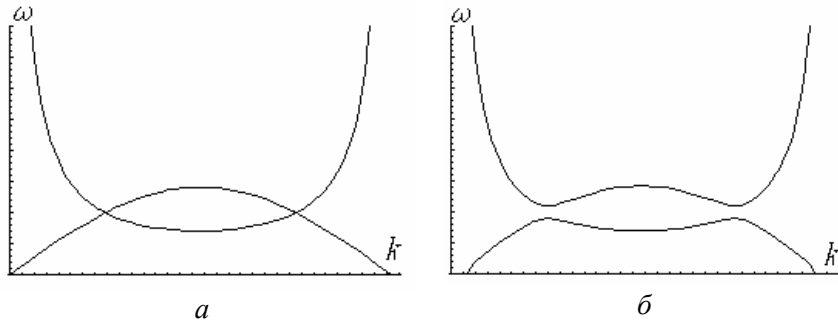


Рис.3.3.7. Дисперсійні криві для зв'язаних ланцюжків, поданих на рис.3.3.6, за відсутності зв'язку (а) та за наявності слабого зв'язку (б).

З (3.3.24) можна визначити координати точок синхронізму:

$$\sin^2 \frac{\tilde{k}a}{2} = \frac{\omega_{01}}{2\omega_{02}}, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega_{01}\omega_{02}. \quad (3.3.25)$$

За наявності зв'язку розв'язки дисперсійного рівняння (3.3.21) мають вигляд

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + 4\omega_{02}^2 \sin^4 \frac{ka}{2} \pm \sqrt{\left(\omega_{01}^2 - 4\omega_{02}^2 \sin^4 \frac{ka}{2}\right)^2 + 8v_1^2 v_2^2 \sin^2 \frac{ka}{2}}}{4\sin^2 \frac{ka}{2}}.$$

Як і в попередньому випадку, далеко від точки синхронізму розв'язки (3.3.26) зводяться до розв'язків (3.3.23) без урахування зв'язку. В околі точки синхронізму, де

$$\left(\omega_{01}^2 - 4\omega_{02}^2 \sin^4 \frac{ka}{2}\right)^2 \ll 8v_1^2 v_2^2 \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad (3.3.27)$$

знову отримуємо ефект розштовхування дисперсійних кривих:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &\approx \frac{\sqrt{\omega_{01}^2 + 4\omega_{02}^2 \sin^4(ka/2) \pm 2\sqrt{2}v_1v_2 \sin(ka/2)}}{2|\sin(ka/2)|} \approx \\ &\approx \sqrt{\sqrt{2}\omega_{02} \left(\sqrt{2}\omega_{02} \pm \frac{v_1v_2}{\omega_{01}} \right)} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

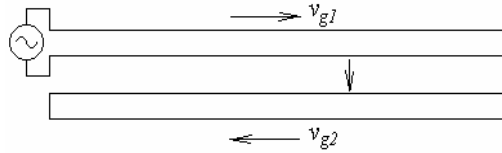
(враховано, що в околі точки синхронізму справедливі співвідношення (3.3.25)). Дисперсійні криві з урахуванням зв'язку показані на рис.3.3.7б. В околі частоти, яка відповідала точці синхронізму, тепер утворюється смуга непропускання по частоті завширшки

$$\Omega \equiv \omega_1 - \omega_2 \approx \frac{v_1v_2}{\omega_{01}}. \quad (3.3.29)$$

За наявності зв'язку між хвилями з протилежним знаком дисперсії завжди з'являється непропускання в деякому діапазоні частот. Справді, нехай на початку однієї із зв'язаних ліній стоїть деякий генератор (рис.3.3.8). Тоді в цій лінії потік енергії спрямовується від генератора. Внаслідок зв'язку на деякій віддалі від початку системи вся енергія перейде в другу лінію. Але в цій лінії знак дисперсії - протилежний, тобто при даному значенні частоти додатній фазовій швидкості відповідатиме від'ємна групова швидкість. Отже, в другій лінії потік енергії буде спрямований назад до входу. В системі матиме місце розподілене відбиття хвилі, в результаті чого сигнал від генератора не поширюється. Таким чином, на цій частоті отримаємо непропускання хвиль.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.
3.3. Зв'язані хвилі в пасивних системах.

Рис.3.3.8. Схема розподіленого відбиття хвилі у зв'язаних лініях з протилежними знаками дисперсії.

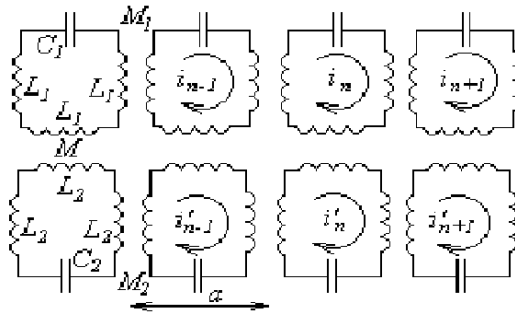


Контрольні питання до розділу 3.3.

- 3.3.1. Запропонуйте класифікацію зв'язку між лініями за його природою.
- 3.3.2. В околі точки перетину дисперсійних кривих з різним знаком дисперсії під впливом зв'язку утворюються мінімум і максимум на дисперсійній кривій. Дайте інтерпретацію цьому ефекту.
- 3.3.3. Намалюйте “миттєвий знімок” хвильового процесу в смузі непрозорості, що утворилася внаслідок зв'язку між хвилями з різним знаком дисперсії.
- 3.3.4. Опишіть ефект розштовхування дисперсійних кривих з однаковим знаком дисперсії у випадку початкової задачі (в початковий момент часу в системі існує збурення із заданим хвильовим числом).
- 3.3.5. Як зміниться дисперсія просторових гармонік у лінії передачі з періодичним екраном, якщо врахувати їхню взаємодію?

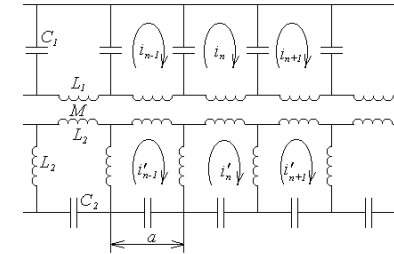
Задачі до розділу 3.3.

- 3.3.1. Побудувати дисперсійні криві зображеної ланцюжкової системи за відсутності ($M=0$) та за наявності зв'язку між лініями. За яких параметрів ланцюжка вплив зв'язку буде істотним? До якого фізичного ефек-



ту він приведе?

- 3.3.2. Побудувати дисперсійні криві зображеної ланцюжкової системи за відсутності ($M=0$) та за наявності зв'язку між лініями. За яких параметрів ланцюжка вплив зв'язку буде істотним? До



якого фізичного ефекту він приведе? Розрахувати для цього випадку ширину смуги непрозорості (за частотою).

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.
3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

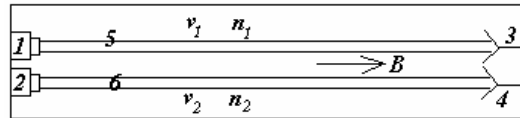
У відкритих (нерівноважних) системах, крім звичайних хвиль з додатною енергією, можуть існувати також хвилі з від'ємною енергією, збудження яких приводить до зменшення повної енергії системи (див. розділ 3.2). Зв'язок таких хвиль із від'ємною енергією та хвиль із додатною енергією буде, як і в пасивних системах, викликати обмін енергією між ними. Якщо при такому обміні енергія переходить від хвилі з від'ємною енергією до хвилі з додатною енергією, то амплітуди обох хвиль в результаті зростатимуть, тобто в системі розвиватиметься нестійкість.

Розглянемо це питання більш детально на прикладі так званої двопучкової лампи.

3.4.1. Дисперсійне рівняння для хвиль у двопучковому підсилювачі.

Двopучкова лампа являє собою систему з двох електронних пучків з відмінними швидкостями (а в загальному випадку - й концентраціями), що рухаються поруч (рис.3.4.1). Система вміщується в сильне поздовжнє магнітне поле, що утримує пучки від розбухання і придушує поперечний рух електронів. Оскільки пучки знаходяться близько один від одного, можна вважати, що електричне поле в них є однаковим.

Рис.3.4.1. Схема двопучкової лампи: 1, 2 - електронні гармати, 3, 4 - колектори, 5, 6 - електронні пучки.



Для аналізу процесів у двопучковій лампі скористаємося системою, що включає рівняння руху для електронів та рівняння неперервності для кожного з пучків, а також теорему Гауса для електричного поля. Постійну складову об'ємного заряду електронних пучків вважатимемо скомпенсованою позитивними іонами, що виникають

внаслідок часткової іонізації залишкового газу в лампі. Модель вважатимемо одновимірною (швидкість електронів спрямована вздовж осі z), нехтуючи крайовими ефектами на межах пучків (фактично розглядаємо два безмежні електронні потоки, що рухаються в тій самій області простору). Тоді вихідні рівняння набувають вигляду:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{e}{m} E; \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{e}{m} E; \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_1 v_1) = 0; \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_2 v_2) = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -4\pi e(\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2),$$

де $v_{1,2} = v_{01,02} + \tilde{v}_{1,2}$, $n_{1,2} = n_{01,02} + \tilde{n}_{1,2}$, $v_{01,02}$ та $\tilde{v}_{1,2}$ - відповідно постійна та змінна складові швидкостей пучків, $n_{01,02}$ та $\tilde{n}_{1,2}$ - відповідно постійна та змінна складові концентрації пучків (у рівняннях (3.4.1) враховано, що електрони мають від'ємний заряд).

Розглядатимемо хвилі малої амплітуди, для яких виконано умови

$$|\tilde{v}_{1,2}| \ll v_{01,02}, \quad |\tilde{n}_{1,2}| \ll n_{01,02}. \quad (3.4.2)$$

Тоді, лінеаризуючи (3.4.1) за малими змінними складовими $\tilde{v}_{1,2}$ та $\tilde{n}_{1,2}$ і виключаючи електричне поле та швидкість електронів, можна отримати систему зв'язаних хвильових рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_1}{\partial t^2} + 2v_{01} \frac{\partial^2 \tilde{n}_1}{\partial t \partial z} + v_{01}^2 \frac{\partial^2 \tilde{n}_1}{\partial z^2} + \omega_{B1}^2 \tilde{n}_1 = -\omega_{b1}^2 \tilde{n}_2; \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_2}{\partial t^2} + 2v_{02} \frac{\partial^2 \tilde{n}_2}{\partial t \partial z} + v_{02}^2 \frac{\partial^2 \tilde{n}_2}{\partial z^2} + \omega_{B2}^2 \tilde{n}_2 = -\omega_{b2}^2 \tilde{n}_1, \quad \omega_{B1,2}^2 = \frac{4\pi n_{01,02} e^2}{m}.$$

Підставляючи до системи (3.4.3) розв'язок у вигляді плоских хвиль,

$$\tilde{n}_{1,2} = n_{m1,2} \exp(i\omega t - ikz), \quad (3.4.4)$$

і прирівнюючи до нуля визначник отриманої системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд $n_{m1,2}$, можна отримати дисперсійне рівняння для хвиль малої амплітуди в досліджуваній

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

системі:

$$(\omega - kv_{01})^2 (\omega - kv_{02})^2 - \omega_{B2}^2 (\omega - kv_{01})^2 - \omega_{B1}^2 (\omega - kv_{02})^2 = 0. \quad (3.4.5)$$

За відсутності зв'язку між пучками замість (3.4.5) виходить рівняння

$$\left[(\omega - kv_{01})^2 - \omega_{B1}^2 \right] \left[(\omega - kv_{02})^2 - \omega_{B2}^2 \right] = 0, \quad (3.4.6)$$

що зводиться до дисперсійних співвідношень для двох пар звичайних хвиль просторового заряду.

Будемо аналізувати дисперсійне рівняння (3.4.5) окремо для випадків зустрічних та супутніх пучків.

3.4.2. Генератор на зустрічних пучках.

Нехай у двопучковій лампі пучки мають однакові густини, а їхні швидкості однакові за величиною і протилежні за напрямком:

$$\omega_{B1} = \omega_{B2} = \omega_B, \quad v_{01} = -v_{02} = v_0. \quad (3.4.7)$$

Тоді дисперсійне рівняння (3.4.5) набуває вигляду:

$$(\omega^2 - k^2 v_0^2)^2 - 2\omega_B^2 (\omega^2 + k^2 v_0^2) = 0. \quad (3.4.8)$$

Оскільки рівняння (3.4.8) є бікватратним щодо ω , частоти власних хвиль можна записати через хвильові числа у формі

$$\omega_{1,2}^2 = (\omega_B^2 + k^2 v_0^2) \pm \sqrt{(\omega_B^2 + k^2 v_0^2)^2 + k^2 v_0^2 (2\omega_B^2 - k^2 v_0^2)}. \quad (3.4.9)$$

З (3.4.9) видно, що частота ω_2 буде чисто уявною ($\omega_2^2 < 0$), якщо другий доданок під коренем в (3.4.9) буде додатним, тобто при

$$|k| < \sqrt{2} \frac{\omega_B}{v_0}. \quad (3.4.10)$$

За виконання умови (3.4.10) одне з пари чисто уявних значень частоти відповідатиме періодичному в просторі збуренню, амплітуда якого експоненціально зростає з часом (так звана аперіодична нестійкість).

На рис.3.4.2а подано графіки дисперсійних залежностей для швидкої та повільної хвиль просторового заряду зустрічних електронних

пучків без урахування їхньої взаємодії. Як відомо, взаємодія хвиль є найбільш ефективною в околі точок синхронізму, де частоти і хвильові числа хвиль, що взаємодіють, збігаються. В даному випадку в точці a можна чекати взаємодії двох швидких ХПЗ (з додатною енергією та протилежними напрямками групової швидкості), а в точках b та b' - взаємодії швидкої ХПЗ (з додатною енергією) та повільної ХПЗ (з від'ємною енергією), які також мають протилежні за напрямком групові швидкості.

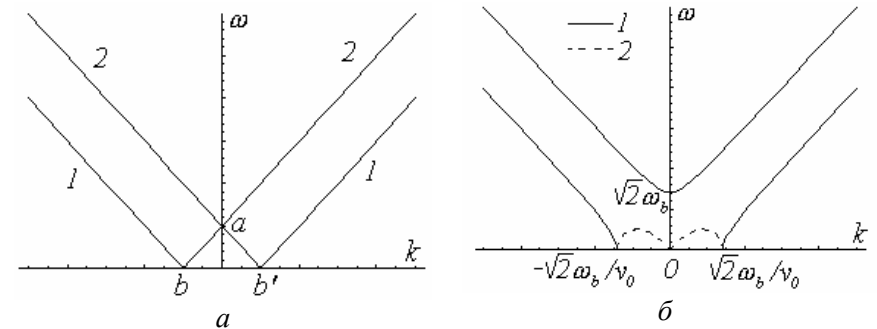


Рис.3.4.2: а - дисперсійні залежності для хвиль просторового заряду зустрічних пучків, що не взаємодіють (1 - повільні ХПЗ, 2 - швидкі ХПЗ); б - дисперсійні криві для хвиль просторового заряду в зустрічних пучках, що взаємодіють (1 - дійсна частина частоти, 2 - уявна частина частоти).

Дисперсійні криві для хвиль в зустрічних електронних пучках з урахуванням їхньої взаємодії подані на рис.3.4.2б. Взаємодія двох хвиль з однаковим знаком енергії та протилежними знаками групових швидкостей привела до утворення смуги непропускання за частотою (пор. із п.3.3.3). Взаємодія ж хвиль з різними знаками енергії може привести до передачі енергії від хвилі з від'ємною енергією до хвилі з додатною енергією, в результаті чого амплітуди обох хвиль будуть зростати. Це і є механізм розвитку нестійкості.

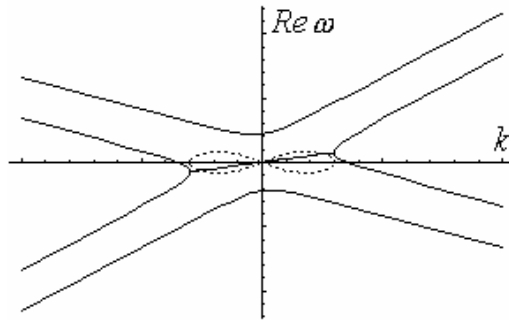
Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

В аналізованій системі має місце розподілений зворотний зв'язок (як і у випадку зв'язку між хвилями з різними знаками дисперсії у пасивних системах, див. п.3.3.3). Справді, оскільки пучки мають протилежні за знаком групові швидкості, енергія сигналу весь час повертатиметься в область виникнення нестійкості, забезпечуючи там експоненціальне зростання амплітуди початкового збурення.

Зазначимо, що описувана нестійкість буде аперіодичною лише у випадку однакових швидкостей зустрічних пучків. Якщо зустрічні пучки мають різні швидкості, можна перейти в деяку рухоми систему відліку, в якій вказані швидкості стануть однаковими за величиною, і нестійкість (як показано вище) буде аперіодичною. Але в нерухомій системі відліку вона сприйматиметься як періодична в часі. Дисперсійні криві для цього випадку подані на рис.3.4.3.

Рис.3.4.3. Дисперсійні залежності для хвиль просторового заряду зустрічних пучків із відмінними швидкостями (дійсна та уявна частини частоти показані відповідно суцільною та штриховою лініями).



Отже, лампа на зустрічних пучках може служити генератором електромагнітних коливань. Справді, первісно немодульовані електронні пучки після взаємодії перетворюватимуться в модульовані.

Відзначимо, що в даному випадку дисперсійне рівняння (3.4.8) при заданих дійсних k , що лежать у проміжку (3.4.10), має комплексний корінь для ω , який описує зростання коливань із часом. У той же час при будь-яких чисто дійсних ω комплексні корені для k , що описують зростання коливань у просторі, відсутні (комплексні зна-

чення k в проміжку $|\omega| < \sqrt{2}\omega_B$ описують ефект непропускання хвиль в околі точки синхронізму двох швидких ХПЗ¹). Сказане залишається справедливим і тоді, коли зустрічні пучки рухаються з різними за модулем швидкостями.

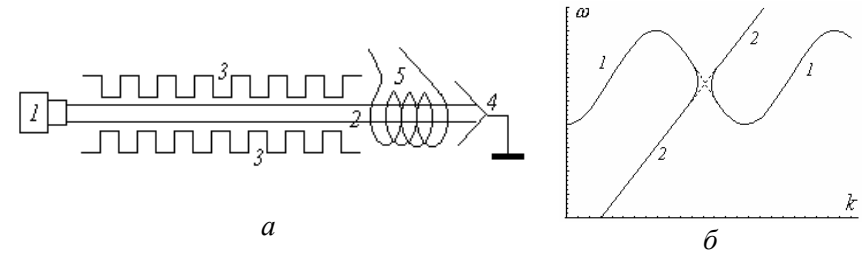


Рис.3.4.4: а - схема лампи зворотної хвилі (ЛЗХ): 1 - електронна гармата, 2 - електронний пучок, 3 - сповільнююча структура, 4 - колектор, 5 - вихідна спіраль; б - спотворення дисперсійних залежностей зворотної повільної електромагнітної хвилі (1) та повільної хвилі просторового заряду (2) внаслідок їхньої взаємодії.

Якісно такий самий результат взаємодії хвиль, як у генераторі на зустрічних пучках, можна отримати, взявши замість швидкої ХПЗ зустрічного пучка іншу хвилю з додатною енергією та від'ємною дисперсією, що може взаємодіяти з електронним пучком - наприклад, зворотну електромагнітну хвилю сповільнюючої структури (рис.3.4.4). В результаті отримаємо так звану лампу зворотної хвилі (ЛЗХ) - поширений тип генератора електромагнітних хвиль НВЧ діапазону.

3.4.3. Підсилювач на супутніх пучках.

Розглянемо тепер випадок двох однакових пучків, що рухаються в одному напрямку, але з різними швидкостями:

¹ Це можна показати, використовуючи критерій Брігса (див. нижче п.3.4.5).

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.
3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

$$\omega_{B1} = \omega_{B2} = \omega_B, \quad v_{01} > 0, \quad v_{02} > 0. \quad (3.4.11)$$

Дисперсійне рівняння (3.4.5) для цього випадку може бути подане у вигляді:

$$(\omega - kv_{01})^2 (\omega - kv_{02})^2 - \omega_B^2 [(\omega - kv_{01})^2 + (\omega - kv_{02})^2] = 0. \quad (3.4.12)$$

Очевидно, цей випадок може бути отриманий з попереднього (див. рівняння (3.4.8)) шляхом переходу в деяку систему відліку, що рухається паралельно пучкам зі швидкістю, що перевищує v_0 .

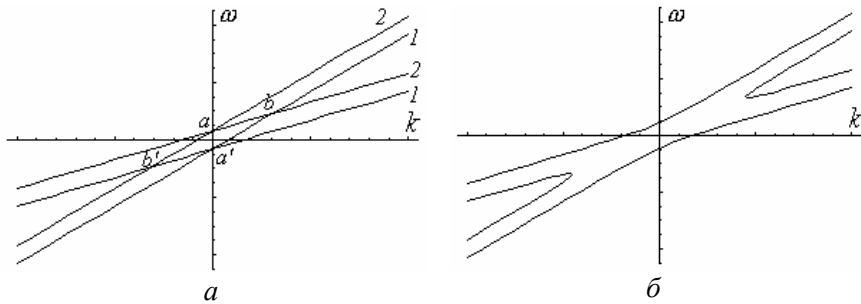
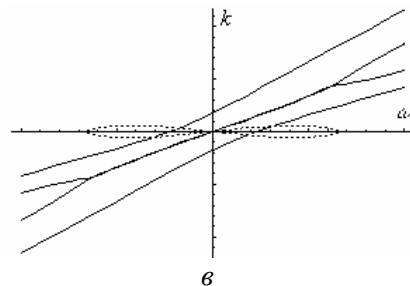


Рис.3.4.5: а - дисперсійні залежності для хвиль просторового заряду зустрічних пучків, що не взаємодіють (1 - повільні ХПЗ, 2 - швидкі ХПЗ); б - дисперсійні криві для хвиль просторового заряду в зустрічних пучках, що взаємодіють; в - залежність дійсної та уявної частин хвильового числа (показані відповідно суцільними та штриховими лініями) від частоти.



На графіку дисперсійних залежностей хвиль просторового заряду

супутніх електронних пучків без урахування їхньої взаємодії (рис.3.4.5а) видно, що синхронізм можливий або між двома хвилями з однаковим знаком енергії (між двома швидкими ХПЗ з додатною енергією - точка a - або між двома повільними ХПЗ з від'ємною енергією - точка a'), або між швидкою та повільною ХПЗ з протилежними знаками енергії (точки b та b'). У першому випадку взаємодія хвиль приведе до періодичного обміну енергією, у другому - до розвитку нестійкості (рис.3.4.5б). Але, оскільки обидві хвилі мають однакові за знаком групові швидкості і через це розподілений зворотний зв'язок у системі відсутній, зростаючий сигнал буде зноситись уздовж системи з деякою швидкістю. В результаті зростання коливань відбуватиметься вже не в часі, а в просторі. Формально цьому випадку відповідатимуть комплексні значення хвильового числа для чисто дійсних частот в деякому діапазоні значень останніх (рис.3.4.5в).

Відзначимо, що, на відміну від рівняння (3.4.8), дисперсійне рівняння (3.4.12) має як комплексний корінь ω для чисто дійсних k , що описує зростання сигналу в часі², так і комплексний корінь k для чисто дійсних ω , що описує зростання сигналу в просторі.

Таким чином, двопучкова лампа із супутніми пучками може служити підсилювачем електромагнітних коливань. Справді, якщо ми один з пучків на вході лампи будемо модулювати за швидкістю, збуджуючи в ньому хвилі просторового заряду, на виході така модуляція буде підсилюватись.

Як і в попередньому випадку, замість швидкої ХПЗ можна взяти повільну (на цей раз - пряму) електромагнітну хвилю сповільнюючої структури (рис.3.4.6). Побудований таким чином підсилювач дістав назву *лампи біжучої хвилі* (ЛБХ). Це один з найпоширеніших активних приладів НВЧ діапазону.

² Справді, початкове гармонічне збурення в усьому просторі (саме воно відповідає заданому дійсному значенню хвильового числа) в аналізованій моделі з часом зростатиме за амплітудою.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

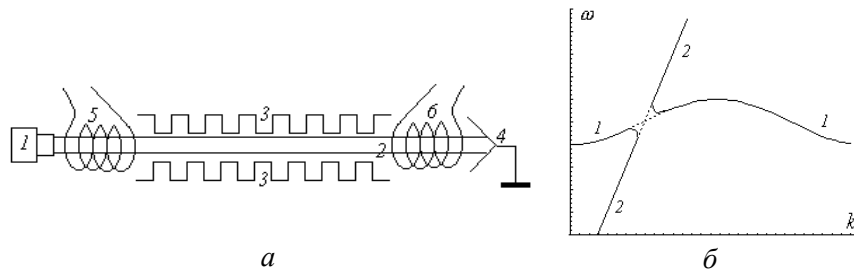


Рис.3.4.6: а - схема лампи біжучої хвилі (ЛБХ): 1 - електронна гармата, 2 - електронний пучок, 3 - сповільнююча структура, 4 - колектор, 5 - входна спіраль, 6 - вихідна спіраль; б - створення дисперсійних залежностей прямої повільної електромагнітної хвилі (1) та повільної хвилі просторового заряду (2) внаслідок їхньої взаємодії.

Зрозуміло, що отримані в п.п.3.4.1-3.4.3 результати для двопучкової лампи залишаються справедливими лише за виконання умови (3.4.2), тобто для лінійної стадії розвитку нестійкості. Реально зростання амплітуди хвилі в подібних системах, як правило, обмежується деякими нелінійними ефектами.

3.4.4. Абсолютна, конвективна та осциляторна нестійкість.

Як видно з розглянутих прикладів, у системах із розподіленими параметрами може існувати два якісно відмінних типи нестійкості (мова йде про поздовжньо однорідні системи).

У генераторі на зустрічних пучках та в лампі зворотної хвилі коливання з часом зростають у кожній точці простору (рис.3.4.7а). Це пов'язано з наявністю в системі розподіленого зворотного зв'язку, в результаті чого сигнал весь час повертається в область взаємодії. Така нестійкість називається *абсолютною*. Як уже вказувалося, вона може бути використана для створення генераторів. Формально абсолютній нестійкості відповідають комплексний корінь для ω , що опи-

сують зростання амплітуди хвилі з часом, при чисто дійсних k , тоді як комплексний корінь для k , який описував би зростання амплітуди в просторі при чисто дійсних ω , відсутній.

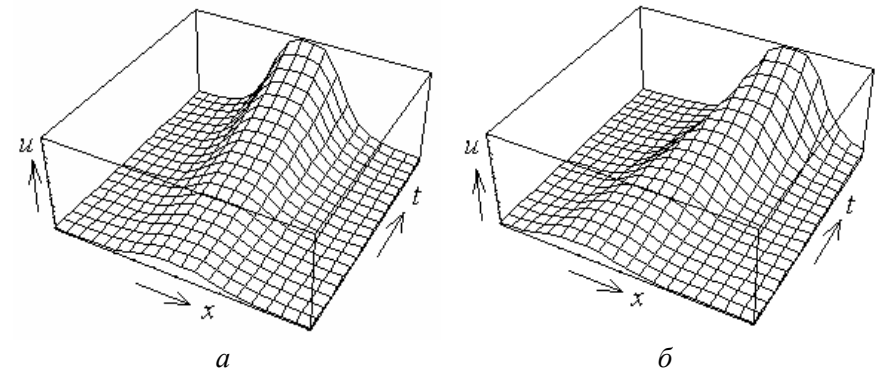


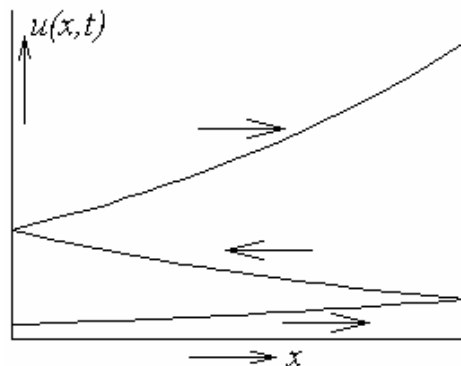
Рис.3.4.7. Еволюція обмеженого початкового збурення у випадках абсолютної (а) та конвективної (б) нестійкості.

У двопроменевому підсилювачі на супутніх пучках, резистивно-му підсилювачі, лампі біжучої хвилі початкове збурення, що зростає, одночасно переноситься в просторі. При цьому коливання в даній точці простору з часом можуть і згасати (рис.3.4.7б). Таку нестійкість називають *зносом*, або *конвективною*. Вона може бути використана для створення підсилювачів. Формально для конвективної нестійкості існує комплексний корінь для k , який описує зростання амплітуди хвилі в просторі при чисто дійсних ω .

Абсолютну нестійкість можна перетворити в конвективну і навпаки, якщо перейти в деяку рухому систему відліку. Наприклад, у системі відліку, що рухається з достатньою швидкістю, абсолютна нестійкість сприйматиметься як конвективна. Навпаки, якщо швидкість руху системи відліку збігається зі швидкістю знесення підсилюваного збурення, то в рухомій системі конвективна нестійкість сприйматиметься як абсолютна.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.
3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

Рис.3.4.8. Зростання сигналу в системі з осциляторною нестійкістю в просторі та часі.



Поняття абсолютної та конвективної нестійкості мають сенс тільки для задач про еволюцію просторово обмежених початкових збурень (хвильових пакетів). Якщо в ролі початкового збурення виступає нескінченна в просторі гармоніка, розрізнити абсолютну та конвективну нестійкість неможливо.

Нехай тепер середовище, в якому існує конвективна нестійкість хвиль, є поздовжньо неоднорідним - наприклад, обмеженим двома дзеркалами. Відбиваючись від дзеркал, хвиля весь час буде повертатися в початкову область, зазнаючи підсилення (рис.3.4.8). В результаті в кожній точці вказаної області з часом сигнал зростатиме. Нестійкість такого типу, обумовлена відбиттям хвиль від неоднорідностей, називається осциляторною. Прикладом системи, що демонструє осциляторну нестійкість, може служити лазер або поздовжньо обмежена плазмово-пучкова система³.

³ Зворотний зв'язок у такій системі може забезпечуватися за рахунок трансформації на виході системи хвиль просторового заряду електронного пучка в ленгмюрівські хвилі або електромагнітні коливання, що доходять до входу.

3.4.5. Критерій Бригса.

Нехай при аналізі дисперсійного рівняння з'ясувалося, що для чисто дійсних частот у деякому діапазоні значень хвильові числа є комплексними. Комплексні хвильові числа вказують на один з двох можливих ефектів - непропускання або підсилення в просторі (конвективну нестійкість). На практиці буває потрібно з'ясувати, що насправді має місце в системі, не аналізуючи, наприклад, знак енергії хвиль, що взаємодіють. Це можна зробити на основі критерію Бригса.

Підставимо в дисперсійне рівняння комплексну частоту у формі

$$\omega = \omega' - i\omega'' \quad (3.4.13)$$

При цьому хвильове число також буде комплексним: $k = k' - ik''$. Якщо при зміні ω'' від нуля до плюс нескінченності величина k'' змінює свій знак, у системі має місце конвективна нестійкість, у протилежному випадку - непропускання.

Критерій Бригса заснований на принципі причинності. Уявна частина частоти в (3.4.13) являє собою часовий інкремент коливань джерела:

$$u(z = 0, t) = u_m \exp(i\omega't + \omega''t) \equiv u_m(t) \exp(i\omega't) \quad (3.4.14)$$

Тоді на деякій віддалі від джерела з урахуванням ефекту запізнення можна отримати для досліджуваної хвилі:

$$u(z, t) = u_m \left(t - \frac{z}{c} \right) \exp(i\omega't - ik(\omega')z) \quad (3.4.15)$$

Якщо навіть для чисто дійсного значення частоти хвильове число виходить комплексним, $k(\omega) = k'(\omega) - ik''(\omega)$, то для комплексної частоти (3.4.13) можна записати:

$$u(z, t) = u_m \exp \left[\omega''t - \left(\frac{\omega''}{c} + k''(\omega') \right) z \right] \exp(i\omega't - ik'(\omega')z) \quad (3.4.16)$$

Отже,

$$k''(\omega' - i\omega'') = \frac{\omega''}{c} + k''(\omega') \quad (3.4.17)$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

Зрозуміло, що при $\omega'' \rightarrow \infty$, як впливає з (3.4.16), сигнал завжди спадатиме при віддаленні від джерела. Якщо при $\omega'' \rightarrow 0$ знак k'' не зміниться, то сигнал так само спадає при віддаленні від джерела, тобто в системі має місце непропускання. Якщо ж при $\omega'' \rightarrow 0$ знак k'' зміниться, це означає, що сигнал у цьому випадку зростає при віддаленні від джерела, тобто в системі має місце конвективна нестійкість.

Контрольні питання до розділу 3.4.

- 3.4.1. В яких випадках лампа на зустрічних пучках може бути генератором електромагнітних хвиль?
- 3.4.2. Чим обмежується зростання коливань у генераторі на зустрічних пучках?
- 3.4.3. Порівняйте лампу зворотної хвилі та лампу біжучої хвилі. Що між ними є спільного і що - відмінного?
- 3.4.4. З яких міркувань слід обирати довжину лампи біжучої хвилі?
- 3.4.5. Чи є зв'язок між хвилями необхідною умовою розвитку конвективної нестійкості? Відповідь обґрунтувати.
- 3.4.6. В яких системах спостерігається абсолютна та конвективна нестійкість?
- 3.4.7. Як переписати дисперсійне рівняння вигляду $F(\omega, k) = 0$ в системі координат, що рухається щодо первісної зі швидкістю v_0 ?
- 3.4.8. Для систем із абсолютною та конвективною нестійкостями на дисперсійних кривих з'являються точки, в яких групова швидкість хвиль необмежено зростає. З іншого боку, згідно з постулатами Ейнштейна, групова швидкість не повинна перевищувати швидкості світла. Поясніть цю суперечність.
- 3.4.9. Лампу біжучої хвилі охоплено позитивним зворотним зв'язком через зовнішнє коло, що з'єднує її вихід зі входом. До якого типу належить нестійкість, що розвивається в такій системі?
- 3.4.10. З якою швидкістю треба рухатись уздовж лампи на зустрічних пучках, щоб сприймати нестійкість, що у ній розвивається, як конвективну?

3.4.11. Сформулюйте критерій Брігса для випадку $\omega = \omega' + i\omega''$, де $\omega'' > 0$.

Задачі до розділу 3.4.

3.4.1. Дисперсійне рівняння для хвиль в двопроменевому підсилювачі із однаковими зустрічними пучками має вигляд:

$$(\omega^2 - k^2 v_0^2)^2 - 2\omega_B^2 (\omega^2 + k^2 v_0^2) = 0,$$

де v_0 - швидкість пучків, ω_B - їхня ленгмюрівська частота. За якого значення k досягається максимальний часовий інкремент нестійкості? Чому він дорівнює?

3.4.2. Дисперсійне рівняння для хвиль в двопроменевому підсилювачі із паралельними пучками однакової густини має вигляд:

$$(\omega - kv_{01})^{-2} + (\omega - kv_{02})^{-2} = \omega_B^{-2}.$$

Вважаючи, що $v_{01,02} = v_0 \pm \delta$, $\delta \ll v_0$, знайти просторовий інкремент хвиль k'' .

Вказівка: вважати $k = k' + ik''$, $|k''| \ll k'$.

3.4.3. Дисперсійне рівняння для хвиль в лампі біжучої хвилі (ЛБХ) в режимі синхронізму хвиль з пучком має вигляд:

$$(\omega - kv_0)(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = \omega^3 I_0 R / 4U_0,$$

де ω_q - редукована ленгмюрівська частота електронного пучка, v_0 - його середня швидкість, U_0 - прискорююча напруга ($eU_0 = mv_0^2/2$), I_0 - сталий струм через ЛБХ, R - опір зв'язку. За якого мінімального значення струму I_0 можливе просторове підсилення сигналу на частоті ω ?

3.4.4*. Побудувати сім'ю частотних залежностей просторового інкременту хвиль в ЛБХ для різних значень ω_q . В якому діапазоні частот матиме місце нестійкість?

3.4.5. Дисперсійне рівняння для хвиль має вигляд:

$$a) k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

(електромагнітні хвилі в плазмі);

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.4. Зв'язані хвилі у відкритих (нерівноважних) системах.

$$\text{б) } (\omega - kv_0)^2 = \frac{\omega^2 \omega_B^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$$

(хвилі просторового заряду електронного потоку в плазмі).

Що матиме місце в системі при $\omega < \omega_p$ - підсилення чи непропускання?

3.4.6. Користуючись критерієм Брігса, показати, що комплексні хвильові числа при чисто дійсних частотах, що є коренями дисперсійного рівняння для генератора на зустрічних пучках, відповідають непропусканню хвиль.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

Подібно до того, як це має місце для коливань, при поширенні хвиль із великою амплітудою стає істотною нелінійність середовища. Історично нелінійні хвилі спершу почали досліджуватися на початку 1960х років у фізиці плазми (плазма – середовище з дуже низьким порогом нелінійних ефектів) та нелінійній оптиці (галузь оптики, що виникла після створення потужних джерел когерентного оптичного випромінювання – лазерів).

Оскільки характер нелінійної взаємодії хвиль істотно залежить від наявності чи відсутності дисперсії в середовищі, розглянемо ці два випадки окремо. Почнемо із середовищ із сильною дисперсією. Як буде показано нижче, у випадку квадратичної нелінійності взаємодія хвиль у таких середовищах надзвичайно подібна до резонансної взаємодії трьох осциляторів із квадратичним зв'язком (параметричної взаємодії - див. розділ 2.4): за певних умов може мати місце злиття двох низькочастотних квантів у високочастотний або, навпаки, розпад високочастотного кванта на два низькочастотних.

3.5.1. Умови нелінійної взаємодії хвиль.

Як було показано на прикладі параметричної взаємодії коливань (див. розділи 2.3-2.4), співвідношення Менлі – Роу дають можливість інтерпретувати вказану взаємодію, використовуючи поняття квантів. Зокрема, для резонансної взаємодії трьох квантів на квадратичній нелінійності співвідношення частот (2.4.1)

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$$

можна інтерпретувати як закон збереження енергії стосовно до процесу розпаду чи злиття квантів (якщо домножити обидві частини на сталу Планка \hbar). У випадку взаємодії трьох хвиль це співвідношення слід доповнити законом збереження імпульсу у формі

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 \quad (3.5.1)$$

або, в найпростішому випадку одновимірної моделі,

$$k_1 + k_2 = k_3. \quad (3.5.2)$$

У випадку взаємодії більшого числа хвиль та нелінійності довільного порядку отримаємо:

$$\sum n_i \omega_i = 0, \quad \sum n_i \vec{k}_i = 0, \quad (3.5.3)$$

де n_i – набір цілих чисел.

Умови (3.5.3) для великої кількості хвиль, що взаємодіють, легко одночасно задовольнити (навіть для одновимірної моделі) в середовищах без дисперсії, де $\omega = kc$ (c – фазова швидкість хвиль). Справді, в цьому випадку виконання умови (3.5.3) для частот приводить до автоматичного виконання відповідної умови для хвильових чисел. Схожа картина може мати місце і в середовищах із слабкою дисперсією. До аналізу цього випадку ми повернемося пізніше (див. нижче розділ 3.6).

У середовищах із сильною дисперсією (наприклад, для електромагнітних хвиль у кристалах) умови типу (3.5.3) вдається одночасно задовольнити лише для невеликої кількості хвиль, що взаємодіють – для трьох (у випадку квадратичної нелінійності) або чотирьох (у випадку кубічної нелінійності) хвиль.

Надалі ми будемо в цьому розділі розглядати середовища з квадратичною нелінійністю, для яких можна одночасно задовольнити умови (2.4.1) та (3.5.1) (або (2.4.1) та (3.5.2)).

3.5.2. Розпадні та нерозпадні спектри.

Говорять, що хвилі, для яких можна одночасно виконати умови (2.4.1) та (3.5.1), мають розпадний спектр.

Розглянемо спершу одновимірний випадок, коли замість (3.5.1) треба взяти умову (3.5.2). Приклади розпадних спектрів для цього випадку наведено на рис.3.5.1а, нерозпадних – на рис.3.5.1б.

Рис.3.5.2 ілюструє графічний спосіб визначення частот $\omega_{2,3}$ та відповідного набору хвильових чисел за даною частотою ω_1 . Для цього початок відліку переноситься в точку з координатами (k_1, ω_1) . Якщо дисперсійні криві, побудовані в “старих” та “нових” коорди-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

натах, перетинаються, то відповідний спектр є розпадним. Проекція точки перетину дисперсійних кривих на “нові” осі координат дає значення (k_2, ω_2) , а на “старі” – значення (k_3, ω_3) . Якщо ж згадані дисперсійні криві не перетинаються, то спектр (в одновимірному випадку) є нерозпадним.

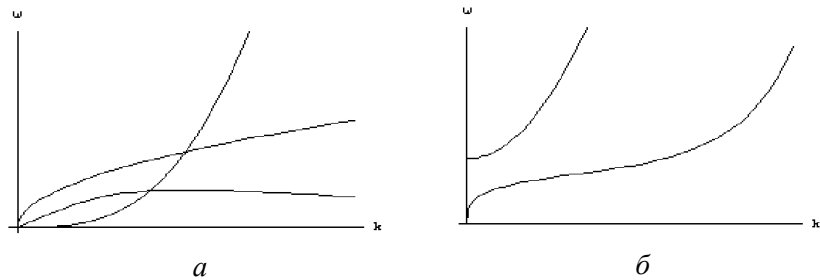
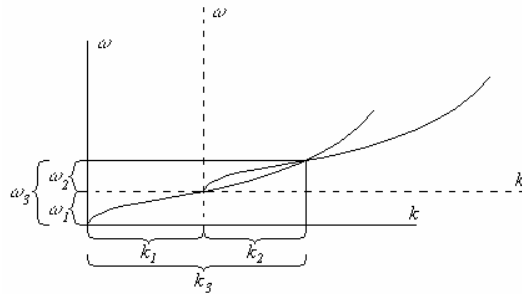


Рис.3.5.1. Нерозпадні (а) та розпадні (б) спектри (для одновимірного випадку).

Рис.3.5.2. Графічне визначення набору частот і відповідних хвильових чисел, що відповідають умовам (2.4.1) та (3.5.1).



У двовимірному випадку замість скалярного співвідношення (3.5.2) отримуємо векторне співвідношення (3.5.1). Геометрично воно означає, що з відрізків завдовжки $k(\omega_1)$, $k(\omega_2)$, $k(\omega_3)$ можна побудувати трикутник. Необхідною для цього (з урахуванням (2.4.1)) є умова

$$k(\omega_1 + \omega_2) < k(\omega_1) + k(\omega_2). \quad (3.5.4)$$

Іншими словами, якщо залежність $k(\omega)$ (і, відповідно, $\omega(k)$) є монотонною, то вона повинна зростати повільніше (а залежність $\omega(k)$ – навпаки, швидше), ніж за лінійним законом. Приклад такої залежності поданий на рис.3.5.3.

Нарешті, в тривимірному випадку закон збереження імпульсу для квантів має такий самий вигляд, як у двовимірному: щоб утворювати трикутник, хвильові вектори всіх хвиль повинні лежати в одній площині. Якщо одна з хвиль (так звана хвиля накачування) значно перевищує за інтенсивністю дві інші хвилі, то всі такі трикутники матимуть спільну сторону – хвильовий вектор хвилі накачування, що виступатиме в ролі осі симетрії. Наприклад, у випадку високочастотної хвилі накачування низькочастотні хвилі, що виникатимуть в результаті її розпаду, відходять під однаковими кутами до вказаної осі, а їхні хвильові вектори утворюватимуть конус, віссю якого буде хвильовий вектор хвилі накачування (рис.3.5.4).

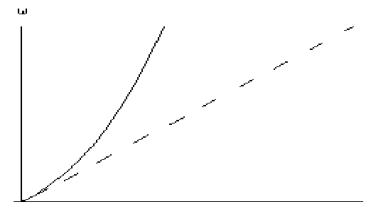


Рис.3.5.3. Розпадний спектр (для дво- та тривимірного випадку).

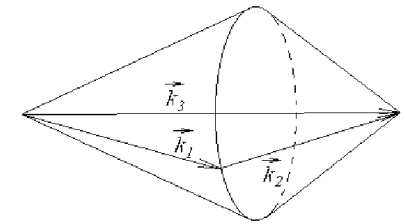


Рис.3.5.4. Взаємна орієнтація хвильових векторів у випадку розпаду високочастотної хвилі накачування на дві низькочастотні.

3.5.3. Модельне рівняння та його гаданий розв’язок.

Як правило, в реальній параметричній взаємодії беруть участь

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

хвилі різних типів¹ (наприклад, дві оптичні та акустична в нелінійних кристалах, дві ленгмюрівські² та іонно-звукова³ хвилі в плазмі), при цьому задача є істотно неодновимірною. Тому для спрощення подальших розрахунків ми розглянемо деяке модельне рівняння, для якого одночасно задовольняються умови (2.4.1) та (3.5.2) (для одновимірної моделі):

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \omega_0 u = \beta u^2. \quad (3.5.5)$$

Хвильове рівняння (3.5.5) – його можна назвати модифікованим рівнянням Шредінгера - містить квадратичну нелінійність. Якщо амплітуда хвилі мала і цією нелінійністю можна знехтувати, з рівняння (після підстановки розв'язку у формі плоскої хвилі, $u(t,z)=U_m \exp(i\alpha t - ikz)$) легко отримати закон дисперсії у вигляді

$$\omega = \omega_0 + \alpha k^2. \quad (3.5.6)$$

Шляхом безпосередньої підстановки легко переконатись у тому, що набори хвильових чисел

$$k_1, \quad k_2 = \frac{\omega_0}{2\alpha k_1}, \quad k_3 = k_1 + k_2 \quad (3.5.7)$$

¹ Необхідною умовою параметричної взаємодії кількох хвиль різної природи є їхній взаємний вплив. Наприклад, при взаємодії акустичних та оптичних хвиль перші створюють збурення густини (а, отже, і показника заломлення), яке відчувають оптичні хвилі. В свою чергу, потужні оптичні хвилі в нелінійних середовищах також породжують механічні деформації, які відчуваються акустичними хвилями.

² Ленгмюрівська хвиля – високочастотна хвиля збурення електронної густини в плазмі, що супроводжується порушенням електронейтральності, оскільки іони залишаються практично нерухомими. Розмокування електронних згустків забезпечують при цьому кулонівські сили та сили газокінетичного тиску.

³ Іонно-звукова хвиля – низькочастотна хвиля в плазмі, що збурює густину іонів та електронів, не порушуючи електронейтральності плазми. Аналог акустичної хвилі в газах.

і відповідних їм частот

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha k_1^2, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0^2}{4\alpha k_1^2}, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.5.8)$$

задовольняють умови (2.4.1) та (2.5.2). Отже, лінеаризованому хвильовому рівнянню (3.5.5) відповідає розпадний спектр.

Будемо вважати параметр нелінійності β в рівнянні (3.5.5) малим. Тоді розв'язок, що відповідає параметричній взаємодії трьох хвиль, можна шукати за методом повільних амплітуд. Будемо розглядати граничну задачу, вважаючи, що хвиля накачування падає з лівого боку на область взаємодії. Тоді повільні амплітуди будуть не функціями часу, як у задачах про системи із зосередженими параметрами, а функціями координати⁴. Отже, шукатимемо розв'язок у вигляді:

$$u(z,t) = \sum_{j=1}^3 U_j(z) \exp(i\varphi_j), \quad \varphi_j = \omega_j t - k_j z, \quad j = 1,2,3. \quad (3.5.9)$$

Тут набори хвильових чисел k_1, k_2, k_3 та частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задовольняють співвідношенням (3.5.7)-(3.5.8).

3.5.4. Вкорочені рівняння та їхні розв'язки.

Підстановка розв'язку (3.5.9) до хвильового рівняння (3.5.5) дозволяє отримати таку систему вкорочених рівнянь (штрих позначає диференціювання за координатою):

$$U_1' = i \frac{\beta}{\alpha k_1} U_2^* U_3; \quad U_2' = i \frac{\beta}{\alpha k_2} U_1^* U_3; \quad U_3' = i \frac{\beta}{\alpha k_3} U_1 U_2. \quad (3.5.10)$$

Ввівши позначення

$$a_j = \sqrt{k_j} U_j, \quad \sigma = \frac{\beta}{\alpha \sqrt{k_1 k_2 k_3}}, \quad (3.5.11)$$

перепишемо систему (3.5.10) у формі

⁴ Для задачі з початковими умовами повільні амплітуди залишаться функціями часу.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

$$a'_1 = i\sigma a_2^* a_3; \quad a'_2 = i\sigma a_1^* a_3; \quad a'_3 = i\sigma a_1 a_2. \quad (3.5.12)$$

Порівнюючи систему рівнянь (3.5.12) із раніше отриманою системою (2.4.7), можна переконатися, що вони збігаються з точністю до заміни позначень:

$$\sigma \rightarrow -\sigma, \quad z \rightarrow t. \quad (3.5.13)$$

Іншими словами, все, що було сказано з приводу параметричної взаємодії коливачів (див. розділ 2.4), залишається справедливим і для параметричної взаємодії хвиль. Єдина відмінність полягає в тому, що для хвиль (у випадку граничної задачі) процес розгортається не в часі, а в просторі.

3.5.5. Вимушене розсіювання Мандельштама – Брілюєна.

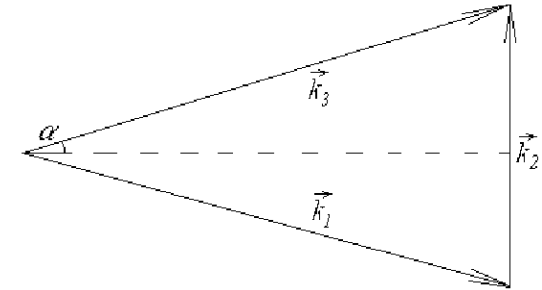
Прикладом розпадної нестійкості хвиль може служити так зване *вимушене розсіювання Мандельштама – Брілюєна*⁵, коли в нелінійному кристалі потужна оптична хвиля (лазерне випромінювання) розпадається на акустичну та оптичну хвилю нижчої частоти. Оскільки частота акустичної хвилі значно менша, ніж у оптичної, зміна частоти останньої після розсіювання виявляється малопомітною. Але, оскільки швидкість акустичної хвилі також значно менша, ніж у оптичної, відповідні хвильові вектори виявляються сумірними.

Взаємне розташування хвильових векторів падаючої (k_3) і розсіяної (k_1) оптичних та акустичної (k_2) хвилі показано на рис.3.5.5. Оскільки частоти двох оптичних хвиль практично збігаються, то їм відповідні хвильові вектори виявляються однаковими за величиною: $k_1 = k_3$. Тому трикутник, утворений хвильовими векторами, виявляється рівнобедреним, і для кута α на рис.3.5.5 (розсіяна хвиля відхи-

ляється від падаючої на кут 2α) можна записати:

$$\sin \alpha = \frac{k_2}{2k_3}. \quad (3.5.14)$$

Рис.3.5.5. Взаємне розташування хвильових векторів падаючої (3) і розсіяної (1) оптичних та акустичної (2) хвиль у випадку вимушеного розсіювання Мандельштама – Брілюєна.



Перейшовши до довжин оптичної λ_o та акустичної λ_s хвиль, можна переписати співвідношення (3.5.14) у формі

$$\lambda_o = 2\lambda_s \sin \alpha. \quad (3.5.15)$$

Формула (3.5.15) – це умова дифракції Вульфа - Брега для оптичних хвиль на ґратці, утвореній акустичною хвилею.

3.5.6. Вибухова нестійкість.

Якщо в параметричній взаємодії бере участь хвиля з негативною енергією (тобто нелінійне середовище є також і нерівноважним), то за виконання умов (2.4.1)-(3.5.2) вкорочені рівняння набувають вигляду

$$U'_1 = \gamma_1 U_2^* U_3; \quad U'_2 = \gamma_2 U_1^* U_3; \quad U'_3 = \gamma_3 U_1 U_2, \quad (3.5.16)$$

де коефіцієнти γ_j можна вважати додатними. Тоді амплітуди U_j можна розглядати як чисто дійсні. Ввівши позначення

⁵ Звичайне (спонтанне) розсіювання Мандельштама – Брілюєна – це розсіювання світла на акустичних хвилях, що завжди існують у середовищі при ненульовій температурі. Воно супроводжується зміною частоти оптичної хвилі на величину частоти акустичної хвилі внаслідок ефекту Доплера (утворення стоксової та антистоксової компонент у спектрі хвилі).

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

$$a_j = \frac{U_j}{\sqrt{\gamma_j}}, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}, \quad (3.5.17)$$

перепишемо систему (3.5.16) у формі:

$$a_1' = \gamma a_2 a_3; \quad a_2' = \gamma a_1 a_3; \quad a_3' = \gamma a_1 a_2. \quad (3.5.18)$$

Домножимо перше з рівнянь системи (3.5.18) на a_1 , друге – на a_2 , третє – на a_3 . Попарно віднімаючи отримані рівняння, можна отримати співвідношення Менлі – Роу для даного випадку:

$$a_1^2(z) - a_2^2(z) = \text{const} = C_1; \quad a_2^2(z) - a_3^2(z) = \text{const} = C_2; \\ a_3^2(z) - a_1^2(z) = \text{const} = -C_1 - C_2. \quad (3.5.19)$$

Нехай на початку системи всі амплітуди рівні одна одній:

$$a_1(z=0) = a_2(z=0) = a_3(z=0) \equiv a_0. \quad (3.5.20)$$

Тоді із співвідношень Менлі – Роу випливає, що константи у правих частинах дорівнюють нулю, і, отже, рівність амплітуд хвиль збережеться в довільній точці системи:

$$a_1(z) = a_2(z) = a_3(z) \equiv a. \quad (3.5.21)$$

В результаті система (3.5.18) зводиться до одного рівняння:

$$\frac{da}{dz} = \gamma a^2. \quad (3.5.22)$$

Розділивши змінні в (3.5.22), можна записати:

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a^2} = \int_0^z \gamma dz. \quad (3.5.23)$$

Просторова залежність амплітуд хвиль, яку можна отримати з (3.5.23), записується у формі:

$$a(z) = \frac{a_0}{1 - a_0 \gamma z}. \quad (3.5.24)$$

Графік цієї залежності поданий на рис.3.5.6. Якісно так само поведуть себе амплітуди хвиль і при порушенні умов (3.5.20)-(3.5.21).

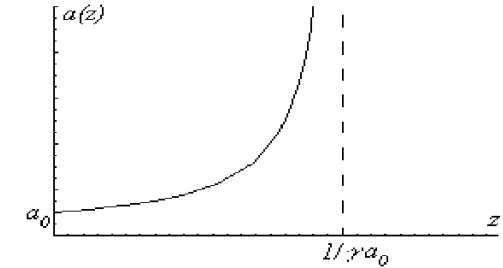


Рис.3.5.6. Просторовий розвиток вибухової нестійкості (для випадку рівності початкових амплітуд усіх хвиль).

Як бачимо, нескінченна амплітуда хвиль досягається на скінченній віддалі від початку системи – при $z=1/\gamma a_0$. Така нестійкість називається *вибуховою*. Для неї характерне зростання амплітуд зі швидкістю, більшою від експоненціальної. Слід підкреслити, що вибухова нестійкість – це принципово нелінійний ефект.

Зрозуміло, що в реальних ситуаціях амплітуда хвиль не може досягати нескінченно великого значення. Це пов'язано з тим, що при дуже великих амплітудах система вкорочених рівнянь (3.5.16) стає несправедливою, і включаються нелінійні ефекти, які вона не враховує. Саме ці ефекти й обмежують амплітуди хвиль.

Прикладом вибухової нестійкості може бути взаємодія трьох хвиль у плазмі, крізь яку рухається потік електронів – повільної хвилі просторового заряду електронного потоку (нагадаємо, що це хвиля з від'ємною енергією, див. п.3.2.6), іонно-звукової та ленгмюрівської хвилі плазми.

Контрольні питання до розділу 3.5.

3.5.1. Закон дисперсії для електромагнітних хвиль у плазмі має вигляд $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$. Чи можлива в принципі для цих хвиль розпадна нестійкість? Відповідь обґрунтувати.

3.5.2. За якого закону дисперсії в середовищі з кубічною нелінійністю можливий параметричний розпад хвиль вигляду $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$?

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

3.5.3. Запропонуйте графічний спосіб аналізу можливості розпаду хвилі навпіл (для одновимірної моделі).

3.5.4. В яких середовищах можливий розв'язок вибухової нестійкості?

3.5.5. Як в експерименті відрізнити вибухову нестійкість від звичайної?

Задачі до розділу 3.5.

3.5.1. Хвильове рівняння в одновимірній системі має вигляд:

$$а) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha u^2 = 0;$$

$$б) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b^2 u + \alpha u^2 = 0;$$

$$в) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - 2a^2 b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b^2 u + \alpha u^2 = 0;$$

$$г) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha u^3 = 0.$$

Чи можлива в такій системі розпадна нестійкість високочастотної хвилі на дві низькочастотні?

3.5.2. Хвильове рівняння має вигляд:

$$а) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{c^4}{4\omega_0^2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \omega_0^2 u + \alpha u^2 = 0;$$

$$б) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$в) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u + i\alpha \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \beta u^2.$$

Для хвилі частоти ω_1 знайти частоти ω_2 та ω_3 такі, щоб виконувались умови розвитку розпадної нестійкості.

3.5.3. Хвильове рівняння має вигляд:

$$а) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta u^2 = 0;$$

$$б) \frac{\partial u}{\partial t} - i\omega_0 u + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \beta u^2 = 0;$$

$$в) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta u^2 = 0.$$

Знайти частоту хвилі, для якої можливий розпад навпіл.

3.5.4. Рівняння для хвиль у нелінійному середовищі за наявності потужної хвилі накачування можна наближено записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\omega) [1 + m \cos(\omega_3 t - k_3 z)] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Вважаючи, що умови синхронізму виконані лише для трійки хвиль з частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, отримати і розв'язати вкорочені рівняння для повільних амплітуд хвиль з частотами ω_1, ω_2 . Розглянути випадки:

$$а) \omega_3 = \omega_1 + \omega_2;$$

$$б) \omega_3 = \omega_1 - \omega_2.$$

3.5.5. Отримати вкорочені рівняння для повільних амплітуд та розв'язати їх для випадків заданого високочастотного та низькочастотного накачування. Хвилі та їхня взаємодія описуються рівнянням:

$$а) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \beta \ll 1.$$

$$б) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2, \beta \ll 1.$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.5. Хвилі в нелінійних пасивних системах із сильною дисперсією.

$$в) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{c^4}{4\omega_0^2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \omega_0^2 u + \alpha u^2 = 0, \quad \alpha \ll 1;$$

$$г) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u + i\alpha \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \beta u^2, \quad \beta \ll 1;$$

$$д) \frac{\partial u}{\partial t} - i\omega_0 u + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad \beta \ll 1;$$

$$е) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta u^2 = 0 \quad \beta \ll 1;$$

$$є) i \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0 u + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad \beta \ll 1.$$

3.5.6. Система рівнянь для повільних амплітуд хвиль у нелінійному нерівноважному середовищі має вигляд:

$$dA_1/dz = \sigma A_2 A_3; \quad dA_2/dz = \sigma A_1 A_3; \quad dA_3/dz = \sigma A_1 A_2.$$

Знайти довжину розвитку вибухової нестійкості, якщо в точці $z=0$ виконано умови:

$$а) A_1 = A_2 = A_0, \quad A_1^2 - A_3^2 = C^2 > 0;$$

$$б) A_1 = A_2 = A_0, \quad A_3^2 - A_1^2 = C^2 > 0.$$

Побудувати графіки просторових залежностей амплітуд хвиль.

3.5.7. Розглянути можливість розвитку вибухової нестійкості при розпаді хвилі навпіл. Побудувати для цього випадку графіки просторових залежностей амплітуд хвиль для різних знаків константи у співвідношенні Менлі - Роу.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

Як уже вказувалося (див. п.3.6.1), у середовищах, де ефекти дисперсії є слабкими (акустичні хвилі в газах, високочастотні хвилі в плазмі, хвилі в неглибокому шарі рідини з твердим дном), у нелінійній взаємодії може брати участь одночасно велика кількість хвиль з різними частотами. Найпростішою моделлю таких середовищ є консервативне нелінійне середовище без дисперсії, з аналізу якого ми й почнемо виклад. Нелінійність такого середовища виявляється в тому, що різні ділянки хвилі рухаються з різними швидкостями. В результаті профіль хвилі в процесі її поширення змінюється. Далі розглядаються ефекти, обумовлені впливом на такі хвилі слабкої дисипації (на прикладі модельного рівняння Бюргерса) та слабкої дисперсії (на прикладі рівняння Кортевега - де Вріза). Обидва названі фактори можуть стримувати вплив нелінійності. Це приводить у першому випадку до утворення ударних хвиль, а в другому - до ефекту повернуваності або до формування стаціонарних хвиль, зокрема, солітонів.

3.6.1. Хвилі в консервативному нелінійному середовищі без дисперсії.

Звичайне одновимірне хвильове рівняння вигляду (3.1.5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

описує відразу пару хвиль, що біжать у протилежних напрямках. У теорії нелінійних хвиль звичайно користуються так званим рівнянням однохвильового наближення, яке для лінійних хвиль має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.6.1)$$

Його загальний розв'язок

$$u = f(x - ct) \quad (3.6.2)$$

(пор. із розв'язком (3.1.16) рівняння (3.1.5)) являє собою хвилю з незмінним профілем, що рухається зі швидкістю c вздовж додатного напрямку осі x . Незмінність профілю хвилі вказує на відсутність дисперсії в досліджуваній системі.

Єдиним параметром рівняння (3.6.1) є швидкість c , тому його узагальнення на нелінійний випадок має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.6.3)$$

найпростіша нелінійність пов'язана із залежністю швидкості від величини локального збурення. Іншими словами, різні ділянки профілю хвилі, описуваної рівнянням (3.6.3), рухаються з різною швидкістю.

Рівняння вигляду (3.6.3) можна отримати, наприклад, для потоку частинок, що не взаємодіють одна з одною. В нерухомій системі відліку для малої «краплі» такого потоку можна записати:

$$0 = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.6.4)$$

Окремий розв'язок рівняння (3.6.4) – $v = v_0 = const$ - відповідає немодульованому моноенергетичному потоку частинок.

Нехай тепер потік частинок зазнає початкової модуляції за швидкістю:

$$v(t, x = 0) = v_0 + v_m \cos \omega t \equiv v_0 + u. \quad (3.6.5)$$

Перейдемо в систему відліку, що рухається разом з пучком: $v = v_0 + u$, $t' = t$, $x' = x - v_0 t$. Тоді

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t'}, \quad (3.6.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \left(1 - v_0 \frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x'} \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{u}{u + v_0}.$$

Підставивши (3.6.6) до (3.6.4), отримаємо

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

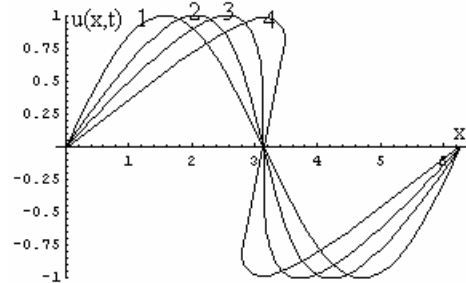
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.6.7)$$

тобто окремий випадок рівняння (3.6.3) при $c(u)=u$, коли швидкість потоку частинок пропорційна до його густини.

Обговоримо якісно поведінку розв'язку нелінійного рівняння (3.6.3). Як уже вказувалося, з нього випливає, що ділянки профілю хвилі з різними значеннями u мають різну фазову швидкість ($c=c(u)$). В результаті профіль хвилі змінюватиметься в процесі її поширення.

Нехай, наприклад, $dc/du > 0$. Тоді максимуми хвилі обганятимуть точки, де $u=0$, а мінімуми, навпаки, відставатимуть від цих точок. В результаті крутість переднього фронту хвилі почне зростати, а заднього - зменшуватися (криві 1-2 на рис.3.6.1). В деякий момент на передньому фронті з'явиться точка, в якій похідна du/dz перетвориться в нескінченність (крива 3 на рис.3.6.1). Після цього на передньому фронті хвилі з'явиться ділянка неоднозначності (крива 4 на рис.3.6.1). Говорять, що має місце *перекидання фронту* хвилі.

Рис.3.6.1. Еволюція первісно синусоїдальної хвилі в нелінійному консервативному середовищі без дисперсії: 1 - $t=0$; 2 - $t=0.5$; 3 - $t=1$; 4 - $t=1.5$.



Знайдемо момент часу, в який відбудеться перекидання фронту хвилі. Для цього врахуємо, що розв'язок нелінійного рівняння (3.6.3) також можна подати у формі (3.6.2), слід тільки врахувати залежність $c(u)$:

$$u(x,t) = f\{x - c[u(x,t)]t\}. \quad (3.6.8)$$

Функція $u(x,t)$ в (3.6.8) задана неявно.

Продиференціюємо (3.6.8) по x . Отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - c(u)t) \left[1 - c'(u)t \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.6.9)$$

(тут штрих позначає диференціювання за аргументом). Тоді, розв'язавши рівняння (3.6.9) щодо похідної $\partial u/\partial x$, можна записати для нахилу профілю хвилі:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f'(x - c(u)t)}{1 + f'(x - c(u)t)c'(u)t}. \quad (3.6.10)$$

Як випливає з (3.6.10), перекидання фронту відбувається тоді, коли на профілі з'являться точки з нескінченним нахилом, тобто в момент

$$t_0 = \frac{1}{\max\{f'c'\}}, \quad (3.6.11)$$

причому в точці, де $f' > 0$, тобто на передньому фронті хвилі. Навпаки, якщо $dc/du < 0$, перекидання відбуватиметься на задньому фронті.

В термінах спектрального аналізу можна сказати, що деформація профілю хвилі означає появу вищих гармонік у її спектрі. За відсутності дисперсії амплітуди вищих гармонік безперервно зростатимуть, оскільки ці гармоніки поширюються в синхронізмі з основною хвилею. Через консервативність системи зростання вищих гармонік відбуватиметься за рахунок відбору енергії у основної моди. В результаті спектр хвилі весь час розширюється в бік верхніх частот. Як кажуть, має місце *перекачування енергії вгору за спектром*.

Описана картина матиме місце, наприклад, при поширенні модульованого за швидкістю потоку частинок (неоднозначність залежності $u(x)$ означає в цьому випадку появу багатопотоковості) або при поширенні поверхневих хвиль у тонкому шарі рідини з твердим дном (перекидання фронту таких хвиль легко спостерігати на повер-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

хні води).

Але в багатьох випадках фізична величина, що описує хвилю, принципово не може бути неоднозначною (наприклад, тиск в акустичній хвилі або напруженість поля в електромагнітній хвилі). Тоді для коректного опису поведінки такої хвилі при $t > t_0$ необхідно враховувати вплив слабкої дисипації або слабкої дисперсії.

3.6.2. Хвилі в нелінійному слабкодисипативному середовищі.

Розглянемо модифікацію однохвильового рівняння для нелінійного середовища - так зване *рівняння Бюргерса*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.6.12)$$

в якому останній доданок описує дисипацію енергії (ν - параметр дисипації). Підставивши до (3.6.12) розв'язок у вигляді гармонічної хвилі, $u \sim \exp(i\omega t - ikx)$, легко зрозуміти, що рівняння Бюргерса описує середовище з дисипацією в короткохвильовій області (або на високих частотах).

Наявність дисипації на високих частотах приводить до обмеження спектру нелінійної хвилі згори. Це, в свою чергу, сповільнює процес укручування фронту. В результаті перекидання фронту хвилі не відбувається.

Рівняння Бюргерса має точний розв'язок для початкових умов, коли

$$u(t=0, x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} u(t=0, x) dx > 0. \quad (3.6.13)$$

Графік цього розв'язку поданий на рис.3.6.2. З часом довжина збурення зростає (задній фронт безперервно розтягається), а його амплітуда зменшується (внаслідок дисипації енергії хвилі):

$$x_0 = \sqrt{2It}, \quad u_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2It}}. \quad (3.6.14)$$

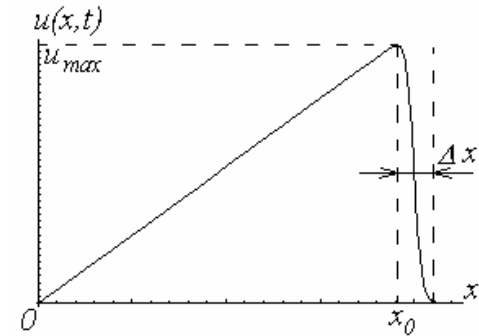


Рис.3.6.2. Початкове збурення в пізні моменти часу для середовища, описуваного рівнянням Бюргерса.

На передньому фронті хвилі, де її крутість максимальна, відбувається дисипація енергії, тому ширина фронту визначається параметром дисипації:

$$\Delta x \sim \nu. \quad (3.6.15)$$

Розв'язки такого типу дістали назву *ударних хвиль*¹.

Найчастіше ударні хвилі зустрічаються в газах або плазмі. Енерговиділення на фронті ударної хвилі в газі може бути настільки значним, що за фронтом газ іонізується. Для хвиль іще більшої інтенсивності іонізація газу може відбуватися навіть перед фронтом ударної хвилі - за рахунок теплового випромінювання від фронту.

3.6.3. Структура фронту ударної хвилі.

Розглянемо тепер більш детально структуру фронту ударної хвилі, описуваної рівнянням Бюргерса (3.6.12). Для цього накладемо граничні умови вигляду

$$u(x \rightarrow \infty) = u_1, \quad u(x \rightarrow -\infty) = u_2, \quad \frac{du}{dx}(x \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad (3.6.16)$$

вважаючи, що

$$u_1 < u < u_2. \quad (3.6.17)$$

¹ У військовій справі ударні хвилі - це акустичні імпульси великої амплітуди, що утворюються в повітрі в результаті сильних вибухів.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

Граничні умови (3.6.16) відповідають, наприклад, випадку, коли уздовж довгої трубки, заповненої газом, рухається поршень (зі швидкістю u_2 ; при цьому $u_1=0$).

Будемо шукати розв'язок рівняння (3.6.18) у вигляді *стаціонарної хвилі*, яка рухається з незмінною швидкістю, зберігаючи при цьому свою форму. Тоді можна скористатись *автомодельною* (самоподібною) *підстановкою* у формі

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt, \quad (3.6.18)$$

де V - швидкість стаціонарної хвилі. Врахувавши, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{du}{d\xi}, \quad (3.6.19)$$

замість (3.6.12) можна отримати:

$$(u - V) \frac{du}{d\xi} = v \frac{d^2 u}{d\xi^2}. \quad (3.6.20)$$

Рівняння (3.6.20) можна відразу проінтегрувати один раз. Дістанемо:

$$\frac{u^2}{2} - uV - v \frac{du}{d\xi} = C, \quad (3.6.21)$$

де C - стала інтегрування.

Рівняння (3.6.21) містить дві невідомі величини - V та C . Для їх знаходження підставимо до (3.6.21) граничні умови (3.6.16). Отримаємо систему двох рівнянь вигляду

$$\frac{u_1^2}{2} - Vu_1 = C; \quad \frac{u_2^2}{2} - Vu_2 = C. \quad (3.6.22)$$

Розв'язуючи систему (3.6.22) щодо невідомих V та C , можна дістати:

$$V = \frac{u_1 + u_2}{2}; \quad C = -\frac{u_1 u_2}{2}. \quad (3.6.23)$$

Тоді рівняння (3.6.21) з урахуванням (3.6.23) набуває вигляду

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2v \frac{du}{d\xi}. \quad (3.6.24)$$

Розділивши змінні в (3.6.24) та врахувавши, що

$$\frac{1}{(u - u_1)(u - u_2)} = -\frac{1}{\Delta u} \left(\frac{1}{u - u_1} + \frac{1}{u_2 - u} \right), \quad \Delta u \equiv u_2 - u_1, \quad (3.6.25)$$

отримаємо:

$$\int \frac{du}{u - u_1} + \int \frac{du}{u_2 - u} = -\frac{\Delta u}{2v} \int d\xi, \quad (3.6.26)$$

або

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u} = \exp \left[-\frac{\Delta u}{2v} (\xi - \xi_0) \right], \quad (3.6.27)$$

звідки остаточно маємо:

$$u = u_1 + \frac{\Delta u}{1 + \exp \left[\frac{\Delta u}{2v} (\xi - \xi_0) \right]}. \quad (3.6.28)$$

Графік залежності (3.6.28) поданий на рис.3.6.3. Як бачимо, при невід'ємних $u_{1,2}$ хвиля поширюється в бік області з меншою швидкістю (в даному випадку - праворуч, якщо взяти до уваги умову (3.6.17)).

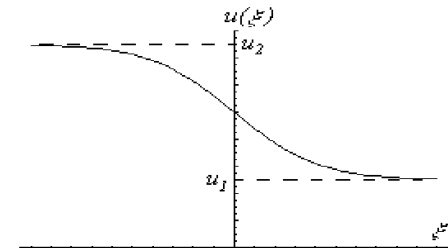


Рис.3.6.3. Форма фронту ударної хвилі.

Ширину фронту ударної хвилі легко оцінити з (3.6.28):

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

$$\Delta x \sim \frac{V}{\Delta u}, \quad (3.6.29)$$

тобто вона прямо пропорційна до параметру дисипації (пор. з формулою (3.6.15)).

3.6.4. Хвилі в нелінійному консервативному середовищі зі слабкою дисперсією.

Розглянемо тепер випадок, коли в нелінійному консервативному середовищі існує дисперсія, яка найбільш помітна для коротких хвиль. Одним із можливих модифікацій рівняння однохвильового наближення (3.6.4) на цей випадок є рівняння Кортевега - де Вріза (рівняння КдВ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.6.30)$$

де β - параметр дисперсії. Рівняння КдВ описує, наприклад, хвилі на неглибокій воді, іонно-звукові хвилі в замагніченій плазмі та ін.

Наявність дисперсії для коротких хвиль приведе до того, що умова синхронізму для вищих гармонік основної хвилі буде порушуватися, в результаті чого їхні амплітуди залишаться малими, і перекачування енергії вгору за спектром припиниться. В результаті перекидання фронту хвилі не відбудеться. Оскільки система є консервативною, то може відбуватись періодичний обмін енергією (в просторі) між основною гармонікою та вищими гармоніками, в результаті чого хвиля на певній віддалі від початку системи буде відновлювати свою первісну форму. Цей ефект дістав назву *повернуваності*.

Але можна так підібрати форму хвилі, що вищі гармоніки в її спектрі перебуватимуть у рівновазі з основною. Тоді отримаємо стаціонарну хвилю, що поширюється в середовищі, не змінюючи своєї форми. Для знаходження її явного вигляду підставимо розв'язок у рівняння (3.6.30) в автотельному вигляді (3.6.18). Врахувавши (3.6.19), замість (3.6.30) можна отримати:

$$(u - V) \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0. \quad (3.6.31)$$

Проінтегрувавши за ξ , дістанемо:

$$\frac{u^2}{2} - Vu + \beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} = const. \quad (3.6.32)$$

За рахунок відповідного вибору системи координат константу інтегрування в правій частині (3.6.32) можна завжди зробити рівною нулю. Тоді рівняння (3.6.32) формально можна розглядати як рівняння руху маси βu у потенціалі

$$\Phi(u) = \int \left(\frac{u^2}{2} - Vu \right) du = \frac{u^3}{6} - \frac{Vu^2}{2}, \quad (3.6.33)$$

де змінна u відіграє роль координати, а змінна ξ - роль часу.

На рис.3.6.4 подано хід потенціалу (3.6.33), фазовий портрет у координатах u , $du/d\xi$ та епюри коливань (профілі хвилі)². Аперіодична хвиля, що відповідає рухові уздовж петлі сепаратриси на фазовому портреті, дістала назву *відокремленої хвилі*, або *солітона*. Йому відповідає розв'язок вигляду

$$u(\xi) = \frac{u_m}{ch^2(\xi/\Delta)}. \quad (3.6.34)$$

Підставивши (3.6.34) до (3.6.32), можна отримати зв'язок між амплітудою солітона u_m , швидкістю V та шириною Δ :

$$u_m = 3V, \quad \Delta = \sqrt{\frac{4\beta}{V}}. \quad (3.6.35)$$

Отже, чим більша амплітуда солітона, тим більша його швидкість і менша ширина. Остання обставина пояснюється тим, що в солітоні укучування фронту за рахунок нелінійності компенсується його розпливанням за рахунок дисперсії, причому із зростанням ампліту-

² Пор. із рис.1.7.1, див. розділ 1.7.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

ди рівновага зсувається в бік нелінійності, тобто більшої крутості фронтів.

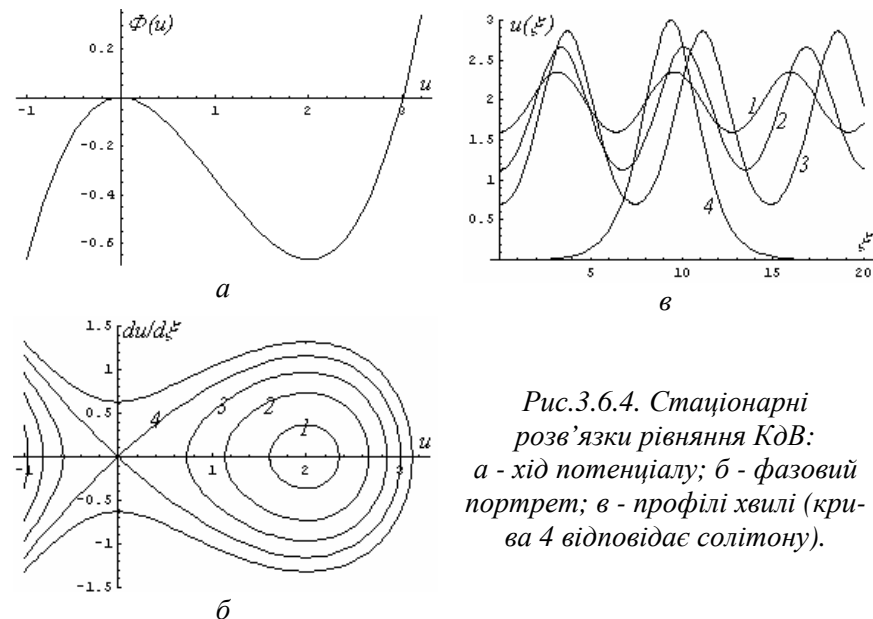
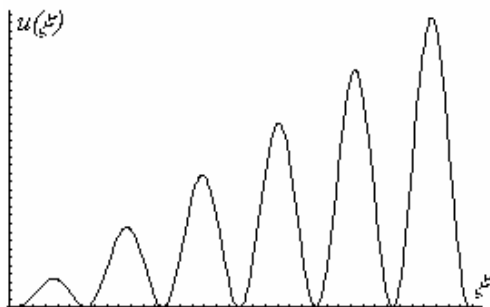


Рис.3.6.4. Стаціонарні розв'язки рівняння КдВ:
а - хід потенціалу; б - фазовий портрет; в - профілі хвилі (крива 4 відповідає солітону).

Рис.3.6.5. Послідовність солітонів КдВ, що утворилася в результаті еволюції початкового додатньо визначеного збурення



Можна показати, що будь-яке додатньо визначене початкове збу-

рення в середовищі, описуваному рівнянням КдВ, з часом розпадається на послідовність солітонів (рис.3.6.5), причому в силу першого із співвідношень (3.6.35) вершини цих солітонів весь час лежать на одній прямій (шлях, пройдений кожним солітоном, пропорційний його швидкості, а отже, і амплітуді).

Солітони КдВ мають ще одну дивну властивість: при зустрічі два таких солітони проходять один крізь одного без взаємодії³.

Вперше спостерігав солітони в експерименті у 30х-40х роках ХІХ століття англійський інженер-кораблебудівник Дж. Скот-Расел (у вигляді хвиль на поверхні води в неглибоких каналах). Однак його роботи були забуті. Сплеск інтересу до солітонів почався в другій половині ХХ століття одночасно в декількох галузях науки - нелінійній електродинаміці, фізиці твердого тіла, гідродинаміці, біофізиці та ін. Дослідження солітонів ще раз продемонструвало єдність нелінійних коливних (хвильових) процесів різної природи.

Крім рівняння КдВ, розв'язки у вигляді солітонів мають також деякі інші нелінійні хвильові рівняння - наприклад, рівняння синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0 \quad (3.6.36)$$

та нелінійне рівняння Шрьодінгера

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + i\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = i\beta u |u|^2. \quad (3.6.37)$$

Прикладами солітонів можуть служити хвилі на мілкій воді, іонно-звукові та магнітозвукові хвилі в плазмі, поширення надпотужних світлових імпульсів у нелінійних кристалах, антициклони в атмосфері Землі, Червона пляма на Юпітері.

³ Це можна показати, користуючись так званим методом оберненої задачі розсіювання. Про це див., наприклад: Э.Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., Советское радио, 1977. С.237-257.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

Контрольні питання до розділу 3.6.

- 3.6.1. В чому відмінність між нелінійною взаємодією хвиль у середовищах із сильною та слабкою дисперсією?
- 3.6.2. Чому ефект укручення фронту хвилі можна спостерігати лише в середовищах із слабкою дисперсією?
- 3.6.3. В яких випадках перекидання фронту хвилі відбувається на передньому фронті, а в яких - на задньому?
- 3.6.4. Що можна сказати про залежність $c(u)$ швидкості різних ділянок простої хвилі на мілкій воді від величини відхилення від положення рівноваги, спостерігаючи за хвилями на березі моря? На чому буде ґрунтуватись висновок?
- 3.6.5. В яких випадках ефект перекидання фронту нелінійної хвилі можливий, а в яких - ні?
- 3.6.6. Які ефекти можуть зупинити укручення фронту нелінійної хвилі?
- 3.6.7. Які хвилі описує автомодельний розв'язок нелінійного хвильового рівняння?
- 3.6.8. Чи можливе формування ударної хвилі в середовищі з дисипацією на низьких частотах? Відповідь обґрунтувати.
- 3.6.9. Чи може в нелінійному дисипативному середовищі за відсутності зовнішнього впливу поширюватися стаціонарна хвиля? Відповідь обґрунтувати.
- 3.6.10. Чи може ударна хвиля бути стаціонарною?
- 3.6.11. Потужна акустична хвиля в газі може спричинити його іонізацію. Який механізм цього явища?
- 3.6.12. В яких середовищах може спостерігатись ефект повернуваності хвиль?
- 3.6.13. Порівняйте еволюцію спектру первісно монохроматичної хвилі великої амплітуди в середовищах, описуваних рівняннями Бюргерса та КдВ.
- 3.6.14. Чому в рівнянні однохвильового наближення друга похідна за координатою (в рівнянні Бюргерса) описує дисипацію, а третя

похідна (в рівнянні КдВ) - дисперсію?

3.6.15. За яких умов власна хвиля нелінійного середовища може бути стаціонарною?

Задачі до розділу 3.6.

3.6.1. Швидкість потоку частинок, що не взаємодіють між собою, задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

В площині $z=0$ швидкість потоку модулюється за законом:

$$v(t, z=0) = V(1 + m \sin \alpha t).$$

Де виникне багатопотоковість?

3.6.2. По шосе рухається потік автомашин. Густина потоку - q , лінійна густина машин на дорозі - p . Машини не в'їжджають на дорогу і не з'їжджають з неї. Початкове збурення густини машин - гармонічне з амплітудою p_m і довжиною хвилі λ . Через який час відбудеться перекидання фронту, якщо $q(p) = ap(p_0 - p/2)$?

3.6.3. Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль, що задовольняють рівнянню синус-Гордона. Зобразити профілі хвиль, що відповідають різним фазовим траєкторіям.

3.6.4. Отримати аналітичний розв'язок $u(z, t)$ рівняння синус-Гордона у вигляді стаціонарної хвилі, що поширюється із швидкістю V , який відповідає рухові уздовж сепаратриси. Розглянути випадки $V > c$ та $V < c$. Зобразити просторові епюри для величин u та $\partial u / \partial z$.

3.6.5*. Показати, що нелінійному рівнянню Шредінгера

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = i \beta a |a|^2$$

задовольняє розв'язок у вигляді "радіосолітону"

$$a(x, t) = A \operatorname{sch} \left\{ \left| \frac{\beta}{2d^2 \omega / dk^2} \right|^{1/2} A [(x - x_0) - (v + V_0)t] \right\} \times$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.6. Хвилі в нелінійних пасивних системах зі слабкою дисперсією.

$$\times \exp \left\{ i \left[\frac{\beta}{2} A^2 t - \frac{(x - x_0) - (v + V)t + \psi_0}{d^2 \omega / dk^2} \right] \right\}.$$

3.6.6*. Іонно-звукові хвилі в плазмі описуються системою рівнянь для густини заряду ρ , швидкості v та потенціалу Φ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -4\pi e \left[\rho - \rho_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right) \right].$$

Намалювати фазовий портрет для стаціонарних хвиль з граничними умовами при $\xi \rightarrow \infty$: $\rho = \rho_0$, $v = 0$, $\Phi = 0$ у координатах Φ , $d\Phi/d\xi$ ($\xi = x - ut$; вважати $v < u$). Оцінити амплітуду солітона (за Φ).

3.6.7*. Рівняння для стаціонарних магнітозвукових хвиль, що поширюються перпендикулярно до магнітного поля, має вигляд

$$-\frac{c^2}{\omega_p^2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dB}{d\xi} \left(\frac{B^2 - B_0^2}{2B_0^2 M^2} - 1 \right) \right] \left(\frac{B^2 - B_0^2}{2B_0^2 M^2} - 1 \right) = B \left(\frac{B^2 - B_0^2}{2B_0^2 M^2} - 1 \right) + B_0,$$

де $M = u/c$ - число Маха. Вважаючи, що $1 < M < 2$, побудувати фазовий портрет системи в координатах B , $dB/d\xi$ і визначити амплітуду солітона.

3.6.8. Узагальнене рівняння Бюргерса - Кортевега - де Вріза, що описує так звані ударні хвилі без зіткнень, має вигляд:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c + v) \frac{\partial v}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Вважаючи виконаними умови $v(z \rightarrow \infty) = 0$, $v'(z \rightarrow \infty) = 0$, $v''(z \rightarrow \infty) = 0$, побудувати фазовий портрет системи для стаціонарних хвиль. Параметр дисипації α вважати малим. Якісно зобразити профіль ударної хвилі без зіткнень.

3.6.9. Користуючись результатами задачі 3.6.8, знайти розв'язки рівняння для стаціонарних хвиль, що відповідають станам рівноваги

перед фронтом і за фронтом ударної хвилі. Лінеаризувати рівняння навколо цих станів, розв'язати його і оцінити ширину фронту ударної хвилі, а також період та декремент осциляцій за її фронтом.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

У другій половині ХХ століття в зв'язку із задачами біофізики та хімічної кінетики почали обговорюватися процеси динаміки нелінійних дисипативних систем, що отримують енергію ззовні (відкриті системи) або мають значний запас енергії (нерівноважні системи). Типовими ефектами в таких системах є виникнення в первісно однорідних середовищах просторових структур (які, взагалі кажучи, можуть еволюціонувати з часом), причому параметри цих структур визначаються властивостями самого середовища і слабо залежать від початкових або граничних умов. Такі структури дістали в літературі назву *автохвиль*.

Галузь науки, що досліджує такі ефекти, дістала ряд альтернативних назв: *теорія самоорганізації*, *теорія автохвильових процесів*¹, *нерівноважна термодинаміка*², *синергетика*³.

3.7.1. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу.

Різноманітність автохвильових процесів обумовлює різноманітність математичних моделей, що використовуються для їхнього опису. Але, як з'ясувалося, велику кількість таких процесів різноманітного типу можна описати за допомогою так званих *нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу*:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{f}(\vec{u}) + \hat{D} \Delta \vec{u}. \quad (3.7.1)$$

Тут \vec{u} - набір змінних, функція $\vec{f}(\vec{u})$ визначає їхню зміну в часі за відсутності дифузії, \hat{D} - матриця коефіцієнтів дифузії (в загальному

¹ Термін "автохвилі" (за аналогією з автоколиваннями) запропонований російським дослідником Р.В.Хохловим.

² Термін запропонований бельгійським вченим, лауреатом Нобелівської премії І.Прігожином.

³ Термін запропонований німецьким дослідником Г.Хакеном. Походить від грецького слова *synergetikos* - спільний, той, що діє узгоджено.

випадку дифузія є нелінійною, тобто $\hat{D} = \hat{D}(\vec{u})$).

В теорії автохвиль виділяють такі основні типи активних середовищ:

- бістабільні середовища;
- середовища з відновленням;
- автоколивні середовища.

Оглянемо послідовно ці типи середовищ та основні різновиди автохвильових процесів у них.

3.7.2. Бістабільні середовища. Біжучі фронти.

Бістабільні середовища - це середовища, що мають два можливі стаціонарні стани. Наприклад, суміш газів у реакторі, куди надходять метан та повітря, може перебувати в стані горіння та в стані відсутності горіння. Перехід від одного стану до іншого відбувається у вигляді *хвилі перекидання*, або *біжучого фронту* - в наведеному прикладі в ролі таких хвиль можуть виступати хвиля запалювання або хвиля гасіння. Прикладом біжучого фронту може служити також хвиля заселення (для біологічних популяцій). Форма та швидкість біжучого фронту визначаються лише властивостями системи і не залежать від початкових (граничних) умов.

Для опису біжучого фронту досить одного скалярного рівняння вигляду (3.7.1). Розглянемо розв'язок такого рівняння для найпростішої одновимірної моделі хвилі запалювання в середовищі, куди надходить пальне. Кінетичну функцію, що визначається різницею між тепловиділенням в результаті горіння та втратами за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем, оберемо у модельній формі

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u), \quad 0 < u_0 < 1 \quad (3.7.2)$$

(рис.3.7.1а). Тоді рівняння (3.7.1) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(u - u_0)(1 - u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.7.3)$$

де u - температура горіння, D - коефіцієнт теплопровідності.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

Температура навколишнього середовища тут прийнята рівною нулю.

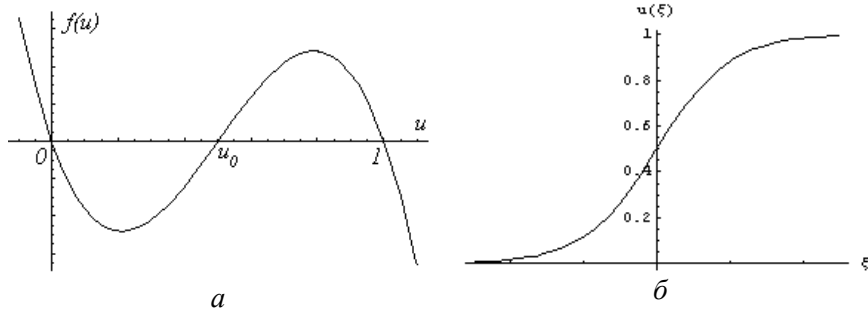


Рис.3.7.1: а - модельна кінетична функція $f(u)$; б - профіль біжучого фронту.

Рівняння (3.7.3) має три стаціонарні однорідні розв'язки вигляду $u = \text{const}(x, t)$: $u=0$, $u=u_0$ та $u=1$. Розв'язок $u=u_0$ є нестійким (це легко показати, відкинувши в правій частині рівняння (3.7.3) дифузійний доданок і лінеаризувавши кінетичну функцію за малими відхиленнями від положення рівноваги). Розв'язок $u=0$ відповідає відсутності горіння, коли температура системи збігається з температурою навколишнього середовища. Розв'язок $u=1$ описує стан горіння, коли вся теплота, що виділяється, розсіюється внаслідок теплообміну. Хвиля запалювання являє собою перехід від стану $u=0$ до стану $u=1$.

Для того, щоб знайти профіль хвилі запалювання, підставимо в рівняння (3.7.3) розв'язок у автотодельній формі (3.6.17). Отримаємо:

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0, \quad (3.7.4)$$

або у фазових змінних u , $w = du/d\xi$:

$$Dw \frac{dw}{du} + Vw + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (3.7.5)$$

Розв'язок рівняння (3.7.5) природно шукати у вигляді поліному третього ступеню від u :

$$w = au^2 + bu + c. \quad (3.7.6)$$

Підставляючи (3.7.6) до (3.7.5) і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при всіх ступенях u , отримаємо:

$$\begin{cases} 2Da^2 - 1 = 0; \\ 3Db + aV + 1 + u_0 = 0; \\ Db^2 + 2Dac + Vb - u_0 = 0; \\ Dbc + Vc = 0. \end{cases} \quad (3.7.7)$$

Розв'язок (3.7.7), що відповідає біжучому фронту, має вигляд:

$$a = -b = \pm \frac{1}{\sqrt{2D}}; \quad c = 0; \quad V = \mp \sqrt{2D} \left(u_0 - \frac{1}{2} \right). \quad (3.7.8)$$

Отже,

$$w(u) = \mp \frac{u(1-u)}{\sqrt{2D}}. \quad (3.7.9)$$

Інтегруючи рівняння (3.7.9) з урахуванням того, що $w = du/d\xi$, можна отримати:

$$u(\xi) = \frac{1}{1 + \exp\left(\mp \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{2D}}\right)}. \quad (3.7.10)$$

Графік залежності $u(\xi)$ подано на рис.3.7.1б. Як впливає з (3.7.10), ширина біжучого фронту складає

$$\Delta x \sim \sqrt{D}. \quad (3.7.11)$$

Як впливає з останнього співвідношення (3.7.8), напрямок руху біжучого фронту залежить від значення параметра u_0 . При $u_0 < 1/2$ розширюється область $u_0=1$, тобто отримуємо хвилю запалювання. Навпаки, при $u_0 > 1/2$ розширюється область $u_0=0$, тобто отримуємо хвилю гасіння.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

Аналогічний характер мають і біжучі фронти іншої природи: хвилі фазових переходів у твердих тілах (наприклад, рух доменної стінки в кристалі, перехід напівпровідник - метал у плівці), хвилі хімічних реакцій (наприклад, окислення аміаку на поверхні платини, реакції полімеризації) та інші.

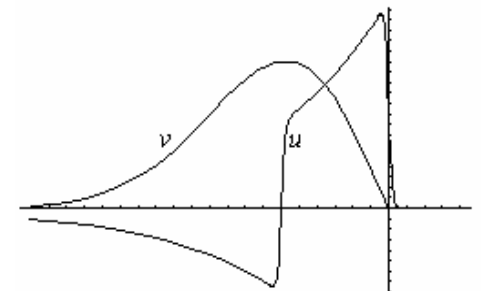
3.7.3. Середовища з відновленням. Біжучі імпульси та спіральні хвилі.

Середовища з відновленням відрізняються від бістабільних тим, що один із стаціонарних станів виявляється метастабільним, і система спонтанно переходить із нього в основний стан. Наприклад, після пожежі в степу протягом кількох місяців трава знову виростає, і система переходить в основний стан, відновлюючи попередні властивості. В таких системах перехід із основного стану в метастабільний, а потім знову в основний здійснюється у формі особливої автохвилі - так званого *біжучого імпульсу* (інколи його називають дисипативним солітоном). Для опису біжучого імпульсу необхідна система з двох скалярних рівнянь вигляду (3.7.1). Прикладом системи, в якій неперервно утворюються такі біжучі імпульси, може служити діод Ганна⁴. Передача імпульсів уздовж нервових волокон також являє собою біжучий імпульс. Ще один приклад біжучого імпульсу - збурення в плівці в'язкої рідини, що стікає по гладенькій поверхні.

Розглянемо реакцію горіння в середовищі, куди надходить пале. Нехай в результаті горіння виділяється деяка речовина - так званий *інгібітор*, - яка придушує реакцію горіння. Нехай за відсутності горіння інгібітор розпадається або відходить у навколишнє середовище. Припустимо також, що характерний час накопичення (або розпаду) інгібітору значно перевищує характерний час запалювання (гасіння). Тоді профіль біжучого імпульсу має вигляд, поданий на рис.3.7.2.

⁴ Діод Ганна - прилад з N-подібною вольтамперною характеристикою, яка має ділянку з від'ємною диференціальною провідністю. Являє собою зразок з арсеніду галію, вміщений у сильне електричне поле.

Рис.3.7.2. Профіль біжучого імпульсу: u - температура, v - концентрація інгібітору.



Передній фронт біжучого імпульсу - це, по суті, хвиля запалювання. Після його проходження температура середовища стрибком підвищується, і починається виділення інгібітору. Коли концентрація інгібітору досягає критичного значення, горіння припиняється, і температура стрибком падає. Далі починається розпад інгібітору, і середовище поступово релаксує до основного стану. Деталі профілю біжучого імпульсу визначаються конкретним виглядом кінетичних функцій для температури та концентрації інгібітору.

Слід підкреслити відмінність між солітонами та біжучими імпульсами. Солітони виникають у пасивних консервативних середовищах, а їхня форма значною мірою визначається початковим збуренням. Біжучі імпульси існують лише в активних середовищах, поширення їх супроводжується виділенням енергії, а форма та швидкість визначаються властивостями системи і не залежать від початкових (граничних) умов.

У дво- та тривимірних системах біжучі фронти не обов'язково є відокремленими плоскими хвилями. Часто вони бувають періодичними. Більш того, вони можуть мати форму спіральних хвиль, що обертаються навколо деякого центру (ревербератора).

3.7.4. Автоколивні середовища. Фазові хвилі.

Автоколивне середовище можна уявити собі як деяку мережу

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

зв'язаних між собою елементарних автогенераторів. Прикладом такого середовища може служити шар розчину, в якому відбувається так звана реакція Білоусова - Жаботинського - хімічна реакція автокаталітичного типу, що супроводжується періодичною зміною концентрації реагентів і відповідною зміною забарвлення розчину. Іншим прикладом автоколивного середовища може бути тканина серцевого м'яза.

Широкий клас автоколивних середовищ описує так звана λ - ω модель, якій відповідає скалярне рівняння вигляду (3.7.1) з комплексною змінною:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]u + (D_1 - iD_2)\Delta u, \quad (3.7.12)$$

де

$$u(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \exp[i\varphi(\vec{r}, t)], \quad (3.7.13)$$

ρ та φ - дійсні амплітуда та фаза коливань, а функція $\lambda(\rho)$ монотонно спадає зі зростанням ρ і перетворюється в нуль при деякому ρ_0 . Легко показати, що за відсутності дифузії ($D_1 + iD_2 = 0$) рівняння (3.7.12) описує автоколивання, що встановлюються на рівні ρ_0 і мають частоту $\omega(\rho_0)$.

За деяких додаткових припущень повне рівняння (3.7.12) описує так звані *фазові хвилі*. За своєю природою фазові хвилі подібні до біжучої стрічки тексту на табло, складеному з окремих лампочок, коли відповідне вмикання і вимикання лампочок створює ілюзію зображення, що рухається. Так само зсув фаз коливань сусідніх автогенераторів створює ілюзію хвиль, що рухаються в просторі.

Фазові хвилі мають такі різновиди:

- синфазні автоколивання в усьому просторі;
- біжучі плоскі хвилі;
- провідний центр, або пейсмейкер (джерело концентричних хвиль);
- ревербератор (джерело спіральних хвиль).

Наприклад, нормальний стан роботи серцевого м'яза - це синфазні автоколивання. Виникнення пейсмейкера в тканині серцевого м'яза

є причиною надзвичайно важкої хвороби - аритмії, тобто порушення нормального ритму роботи серця, яка може навіть спричинити смерть людини. Причиною виникнення пейсмейкера є, як прийнято вважати, деяка локальна неоднорідність середовища.

При взаємодії двох фазових хвиль із різними довжинами коротші хвилі придушують довші. Відповідно із кількох сусідніх пейсмейкерів в результаті конкуренції виживає той, що генерує найкоротші хвилі.

3.7.5. Дисипативні структури.

Нехай у деякому обмеженому об'ємі (реакторі) відбувається горіння пального. Вважатимемо коефіцієнт дифузії пального настільки великим, що його концентрація a підтримується однаковою в усіх точках реактора. Пальне надходить до реактора з постійною швидкістю Q . Нехай $q(T)$ - тепловиділення одиниці маси пального при температурі T , $p(T)$ - швидкість зменшення пального при горінні (обидві ці функції мають вигляд розмитих сходинок, рис.3.7.3).

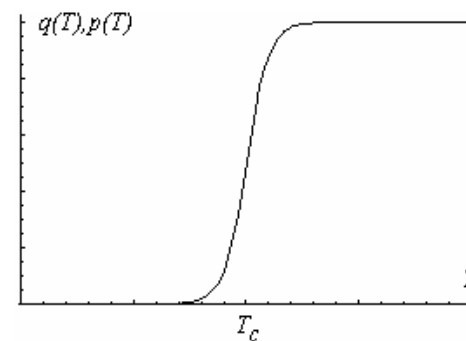


Рис.3.7.3. Тепловиділення та втрати пального в залежності від температури (T_c - температура запалювання).

Тоді рівняння для зміни температури можна записати у формі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = aq(T) - \gamma(T - T_0) + \chi\Delta T, \quad (3.7.14)$$

де доданок $\chi(T - T_0)$ описує теплообмін реактора з навколишнім сере-

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

довищем, яке має температуру T_0 , а доданок $\chi \Delta T$ - теплопередачу в реакторі (χ - коефіцієнт температуропровідності). Розв'язок рівняння (3.7.14) являє собою хвилю запалювання (див. п.3.7.2, пор. (3.7.14) та (3.7.3)), швидкість (і напрямок руху) якої залежить від концентрації пального.

Рівняння, що визначає баланс пального, має вигляд

$$\frac{da}{dt} = Q - a \int_{(V)} p[T(\vec{r})] d\vec{r}, \quad (3.7.15)$$

де інтегрування ведеться по об'єму реактора.

Нехай у реакторі почалося горіння в деякій малій області - *вогнищі горіння*. Спочатку від нього побіжить хвиля запалювання, і розміри вогнища горіння зростуть. Але це призведе до зменшення швидкості хвилі запалювання і, врешті, до її зупинки. В результаті розміри вогнища горіння визначатимуться балансом між надходженням пального в систему та його вигоранням. Слід відзначити, що форма вогнища буде залежати від початкових умов: може, наприклад, існувати декілька ізольованих вогнищ, але їхній сумарний розмір визначається властивостями системи і відновлюється після випадкових збурень.

Вогнище горіння - один з найпростіших прикладів дисипативних структур. Причиною виникнення дисипативних структур такого типу є розподілений зворотний зв'язок у системі. В наведеному прикладі такий зворотний зв'язок створюється через те, що концентрація пального в кожній точці реактора залежить від процесів горіння в усіх інших точках (див. (3.7.15)).

Інші типи дисипативних структур виникають у нерівноважних системах унаслідок розвитку нестійкостей аперіодичного типу. Приклад такої нестійкості демонструє система з двома однаковими за густиною та швидкістю зустрічними пучками (див. п.3.4.2), де розвивається періодичне в просторі збурення з нульовою частотою. Коли аперіодична нестійкість досягне насичення, в просторі може утворитися деяка періодична (або квазіперіодична) структура.

Ефектним прикладом дисипативних структур такого типу є шестикутні комірки, що утворюються за певних умов у шарі в'язкої рідини, який підігривається знизу (конвекція Релея - Бенара). Іншими прикладами можуть служити полярні сніжки, що мають структуру окремих волокон, стратифікація (розшарування) штучних плазмових хмар в іоносфері Землі⁵, структури в кометних хвостах та інше.

3.7.6. Турбулентність.

Ми бачили, що в нелінійних дисипативних системах, які є нерівноважними або можуть черпати енергію ззовні, можлива непередбачувана, хаотична поведінка. Такі ефекти можливі й у системах із розподіленими параметрами. Ці процеси дістали назву *турбулентності*. Найвідомішим прикладом є, мабуть, гідродинамічна турбулентність, що виникає в рідині з достатньо великою швидкістю течії. Турбулентними є й потоки повітря в атмосфері. Широко поширена турбулентність у фізиці плазми. Зокрема, саме турбулентність плазми значно ускладнює її утримання в магнітних пастках, необхідне для здійснення керованого термоядерного синтезу.

Слід відзначити, що в багатьох випадках турбулентний рух, що зовні виглядає хаотичним, характеризується значною впорядкованістю. По-перше, спектр турбулентності є не випадковим і характеризується закономірним розподілом густини енергії по частотах або довжинах хвиль (так звані колмогоровські спектри). По-друге, хоча з формальної точки зору система з розподіленими параметрами характеризується нескінченною кількістю ступенів вільності і нескінченновимірним фазовим простором, розмірність дивного атратора, що відповідає турбулентному рухові, в багатьох випадках виявляється скінченною, і її іноді вдається оцінити експериментально.

На сьогодні теорія турбулентності ще далеко не може вважатися завершеною.

⁵ Такі хмари утворюються в результаті вибуху спеціальних бомб, що викидаються з борту ракети. Після цього пари барію, який має низький потенціал іонізації, іонізуються під дією сонячного випромінювання.

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

Контрольні питання до розділу 3.7.

- 3.7.1. Опишіть ефекти, що відрізняють активні середовища від пасивних.
- 3.7.2. Якісно охарактеризуйте доданки в кінетичному рівнянні з дифузією, що описує поширення хвилі горіння.
- 3.7.3. Намалюйте форму хвилі горіння для двох відмінних значень коефіцієнта дифузії.
- 3.7.4. В чому полягає відмінність між солітонами та біжучими імпульсами?
- 3.7.5. До якого класу автохвильових процесів належить, на вашу думку:
- лісова пожежа;
 - розширення ареалу популяції чорних лебедів у Австралії;
 - періодичні структури хмар;
 - поширення імпульсу збудження у нервовому волокні;
 - течія води в річці;
 - збурення в тонкому шарі рідини, що стікає по гладенькій поверхні?
- Відповідь обґрунтувати.

Задачі до розділу 3.7.

3.7.1. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

- функція, що характеризує харчові ресурси. Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. Оцінити швидкість хвилі

переходу з одного стаціонарного стану в інший (так звана хвиля заселення).

Вказівка: ґрунтуючись на аналогії з нелінійним дисипативним осцилятором, записати співвідношення для балансу енергії.

3.7.2. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n^2 + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

(функція $m(n)$ визначена в задачі 3.7.1). Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. Розрахувати форму біжучого фронту, його швидкість і ширину.

3.7.3. Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\gamma u(1-u)(u-u_0),$$

де $0 < u < 1$ і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціонарним хвилям системи.

3.7.4. Користуючись результатами задачі 3.7.3, показати, що рівнянню задовольняє розв'язок у вигляді хвилі збудження $du/d\xi = \sigma u(1-u)$, де $\xi = z - Vt$. Знайти швидкість поширення збудження по волокну V . Отримати функцію $u(\xi)$ і зобразити профіль хвилі.

3.7.5. Система модельних рівнянь, що описують горіння з одночасним виділенням інгібітора (автохвильовий процес типу біжучого імпульсу), має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma u(u-u_0)(1-u) - v + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu[v - \lambda u], \end{cases} \quad 0 < u_0 < 1, \quad \mu \ll 1.$$

Частина III. Системи з розподіленими параметрами.

3.7. Хвилі в нелінійних активних системах.

Якісно зобразити профілі стаціонарних хвиль для змінних u та v .
Оцінити тривалість і амплітуду біжучого імпульсу та час рефрактерності (відновлення).

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

абсолютна нестійкість	абсолютная неустойчивость	absolute instability
абсолютна стійкість	абсолютная устойчивость	absolute stability
автогенератор	автогенератор	self-excited (self-sustained) oscillator
автоколивання	автоколебание	self-excited (self-sustained, self-induced, self-maintained) oscillation, self-oscillation
автономна система	автономная система	autonomous system
автохвиля	автоволна	self-excited wave
амплітуда	амплитуда	amplitude, magnitude
амплітудно-частотна характеристика	амплитудно-частотная характеристика	amplitude(-frequency) characteristics
ангармонізм	ангармонизм	anharmonicity
аномальна дисперсія	аномальная дисперсия	abnormal dispersion
асимптотична стійкість	асимптотическая устойчивость	asymptotic stability
атрактор	аттрактор	attractor
багатовимірний тор	многомерный тор	multidimensional torus
биття	биения	beating, beats
біжуча хвиля	бегущая волна	travelling (progressive, running, mobile) wave
біжучий імпульс	бегущий импульс	travelling impulse
біжучий фронт	бегущий фронт	travelling front
бістабільне середовище	бистабильная среда	bistable medium
біфуркація	бифуркация	bifurcation
вибухова нестійкість	взрывная неустой-	explosive instability

вимушена синхронізація	вынужденная синхронизация	forced synchronisation
вимушені коливання	вынужденные колебания	forced oscillations
вимушені коливання, що встановилися	установившиеся вынужденные колебания	stationary forced oscillations
виродження	вырождение	degeneracy, degeneration
вища гармоніка	высшая гармоника	higher (upper) harmonic, overtone
відкрита система	открытая система	open system
відокремлена хвиля	уединенная волна	solitary wave
вільні коливання	свободные колебания	free (shock-excited) oscillations
вкорочене рівняння	укороченное уравнение	reduced equation
власні коливання	собственные колебания	natural oscillations
вузол	узел	node, nodal point
гамільтоніан	гамильтониан	Hamiltonian function
гармоніка	гармоника	harmonic
гармонічні коливання	гармонические колебания	harmonic oscillations
генератор шуму	генератор шума	noise generator
гістерезис	гистерезис	hysteresis
граничний цикл	предельный цикл	limit cycle
грубість	грубость	roughness
групова швидкість	групповая скорость	group velocity
двоконтурний параметричний підсилувач	двухконтурный параметрический усилитель	(вихідна частота більша за частоту сигналу) up-converter; (вихідна частота менша від частоти сигналу) down-

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

двопучковий підсилювач	двухпучковый усилитель	converter two beams amplifier	згасання злиття квантів змінні дія - кут	затухание слияние квантов переменные действие - угол	damping quantums coalescence variables action-angle
декремент	декремент	decrement			
дельта-функція (Дірака)	дельта-функция (Дирака)	(Dirac) delta-function, unit impulse function	зображувальна точка	изображающая точка	image point
дивний аттрактор	странный аттрактор	strange attractor	зона нестійкості	зона неустойчивости	unstable domain
динамічне демпфірування	динамическое демпфирование	dynamic damping	зосереджені параметри	сосредоточенные параметры	lumped parameters
дисипативна структура	диссипативная структура	dissipative structure	зсув частоти	сдвиг частоты	frequency shift
дисипація	диссипация	dissipation	ізокліна	изоклина	isoclinic line
дисперсія	дисперсия	dispersion	ізохронність	изохронность	isochronism
дифузія Арнольда	диффузия Арнольда	Arnold diffusion	інгібітор	ингибитор	inhibitor
ділянки швидкого та повільного руху	участки быстрого и медленного движения	sections of fast and slow motion	індуктивний зв'язок	индуктивная связь	inductive coupling
			інерційний зв'язок	инерционная связь	inertia coupling
			інкремент	инкремент	increment, growth rate
			інтеграл Дюамеля	интеграл Дюамеля	Duhamel integral
			інтеграл Фур'є	интеграл Фурье	Fourier integral
			інтегровна система	интегрируемая система	integrable system
добротність	добротность	quality, Q-factor	квадратична нелінійність	квадратичная нелинейность	quadratic non-linearity
електромеханічні аналогії	электромеханические аналогии	electromechanical analogies	квазілінійна теорія	квазилинейная теория	quasilinear theory
електронний пучок	электронный пучок	electron beam			
ентропія Колмогорова - Синая	энтропия Колмогорова - Синая	Kolmogorov - Sinai entropy	керуючий параметр	управляющий параметр	driving parameter
ергодичність	эргодичность	ergodicity	кінетичне рівняння	кинетическое уравнение	rate (kinetic) equation
ємнісний зв'язок	емкостная связь	capacitive coupling			
зворотний зв'язок	обратная связь	feedback			
затягування частоти	затягивание частоты	frequency pulling			
зворотна хвиля	обратная волна	backward (back, inverse) wave			
			коефіцієнт зв'язку	коэффициент связи	coupling coefficient
зв'язаність	связанность	coupling	коефіцієнт нелінійного зв'язку між модами	коэффициент нелинейной связи мод	coefficient of the non-linear modes' coupling
зв'язані коливання	связанные колебания	coupled oscillations			
			коефіцієнт підсилення	коэффициент усиления	gain (factor)
зв'язані хвилі	связанные волны	bound (coupled) waves			

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

ня	ния			тор	
коефіцієнт розподілу амплітуд	коэффициент распределения амплитуд	amplitudes distribution coefficient	малий параметр математичний маятник	малый параметр математический маятник	perturbation simple pendulum
коливний контур	колебательный контур	oscillatory (resonant) circuit	метод Ван дер Поля монохроматична хвиля	метод Ван дер Поля монохроматическая волна	Van der Pol method monochromatic wave
коливання	колебание	oscillation, vibration	накачування	накачка	pump(ing)
коливання, що встановилися	установившиеся колебания	steady(-state) oscillations	невзасмний зв'язок	невозвратная связь	non-reciprocal coupling
комбінаційна частота	комбинационная частота	heterodyne frequency	неізохронність	неизохронность	amplitude dependent frequency shift
комірка Бенара	ячейка Бенара	Benar cell	нелінійне рівняння Шрьодінгера	нелинейное уравнение Шредингера	non-linear Schrödinger equation
компенсація	компенсация	compensation	нелінійність	нелинейность	non-linearity
конвективна нестійкість	конвективная неустойчивость	convective instability	нелінійний зв'язок	нелинейная связь	non-linear coupling
конкуренція мод	конкуренция мод	concurrence of modes	неоднозначність	неоднозначность	non-single-valued nature
консервативна система	консервативная система	conservative system	непередбачуваність	непредсказуемость	unpredictability
концентрична хвиля	концентрическая волна	concentric wave	непропускання	непропускание	opacity
кратність	кратность	multiplicity	нерівноважна система	неравновесная система	non-equilibrium system
критерій Брігса	критерий Бриггса	Briggs criterion	нестійкий вузол	неустойчивый узел	instable node
критерій Рауса - Гурвиця	критерий Рауса - Гурвица	Routh - Hurwitz criterion	нестійкий фокус	неустойчивый фокус	instable focus
кубічна нелінійність	кубическая нелинейность	cubic non-linearity	нестійкість	неустойчивость	instability, negative (unstable) stability
лампа біжучої хвилі (ЛБХ)	лампа бегущей волны (ЛБВ)	travelling wave tube (TWT)	нормальна дисперсія	нормальная дисперсия	normal dispersion
лампа зворотної хвилі (ЛЗХ)	лампа обратной волны (ЛОВ)	backward wave tube (BWT)	нормальні моди	нормальные моды	normal modes
ланцюжкова система	цепочечная система	network system	обмеження амплітуди	ограничение амплитуды	amplitude limitation
лінеаризація	линеаризация	linearization	обмін енергією	обмен энергией	interchange of energy, energy exchange
лінійний осцилятор	линейный осциллятор	linear oscillator	одноконтурний па-	одноконтурный па-	parametric amplifier

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

раметричний підсилювач	раметрический усилитель		принцип суперпозиції	принцип суперпозиции	superposition principle
орбітальна стійкість	орбитальная устойчивость	orbital stability	провідний центр	ведущий центр	driving centre
ортогональність	ортогональность	orthogonality	проста хвиля	простая волна	simple wave
осцилятор	осцилятор	oscillator	просторова гармоніка	пространственная гармоника	space (spatial) harmonic
осциляторна нестійкість	осциляторная неустойчивость	oscillator instability	просторова дисперсія	пространственная дисперсия	spatial dispersion
параметрична система	параметрическая система	parametric system	пульсація	пульсация	pulsation
парціальна частота	парциальная частота	partial frequency	реакція Білоусова - Жаботинського	реакция Белоусова - Жаботинского	Belousov - Zhabotinsky reaction
пейсмекер	пейсмекер	pace-maker	ревербератор	ревербератор	reverberation unit
передавальна функція	передаточная функция	transfer function	регенеративне підсилення	регенеративное усиление	regenerative amplification
перекачування енергії	перекачка энергии	energy transfer	резистивний підсилювач	резистивный усилитель	resistive amplifier
перекидання фронту хвилі	опрокидывание фронта	front tipping over	резонанс	резонанс	resonance
перекриття нелінійних резонансів	перекрытие нелинейных резонансов	non-linear resonances overlap	резонанс вищого порядку	резонанс высшего порядка	high order resonance
переміжність	перемежаемость	intermittence	релаксаційні коливання	релаксационные колебания	relaxation oscillations
перемішування	перемешивание	mixing	репелер	репеллер	repeller
період	период	period	рівняння Бюргерса	уравнение Бюргерса	Burgers equation
плоска хвиля	плоская волна	plane wave	рівняння Ван дер Поля	уравнение Ван дер Поля	Van der Pol equation
повільна амплітуда	медленно меняющаяся амплитуда	slow amplitude	рівняння Вольтерра	уравнения Вольтерра	Volterra equations
подвоєння періоду	удвоение периода	period doubling	рівняння Гамільтона	уравнения Гамильтона	canonical equations of motion, Hamilton equations
показник Ляпунова	показатель Ляпунова	Lyapunov exponent			
половинна гармоніка	половинная гармоника	harmonic of one-half frequency	рівняння Кортвега - де Вріза	уравнение Кортвега - де Вриза	Korteweg - de Vries equation
помноження частоти	умножение частоты	frequency multiplication	рівняння Лотки	уравнения Лотки	Lotka equations
поріг	порог	threshold			

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

рівняння Матьє	уравнение Матьё	Mathieu equation	нлі - Роу	- Роу	
рівняння однохвильового наближення	уравнение одноволнового приближения	equation of the single wave approximation	спіральна хвиля	спиральная волна	helical wave
рівняння Релея	уравнение Релея	Rayleigh equation	сповільнююча структура	замедляющая структура	slow-wave circuit, slow-wave structure
рівняння синус-Гордона	уравнение синус-Гордона	sine-Gordon equation	стаціонарна точка	стационарная точка	fixed point
розпадна нестійкість	распадная неустойчивость	decay instability	стаціонарна хвиля	стационарная волна	stationary wave
розподілені параметри	распределенные параметры	distributed parameters	стійкий вузол	устойчивый узел	stable nodal point
розсіювання Мандельштама - Брілюєна	рассеяние Мандельштама - Бриллюэна	Brillouin scattering	стійкий фокус	устойчивый фокус	stable focus
розстроювання "розштовхування" частот	расстройка "расталкивание" частот	detuning frequencies repulsion	стійкість	устойчивость	stability
ряд Тейлора	ряд Тейлора	Taylor series	стійкість за Андроновим - Понтрягіним	устойчивость по Андронову - Понтрягину	Andronov - Pontryagin stability
ряд Фур'є	ряд Фурье	Fourier series (F-series)	стійкість за Ляпуновим	устойчивость по Ляпунову	Lyapunov stability
самоорганізація	самоорганизация	self-organisation	стохастичний шар	стохастический слой	stochastic layer
секулярне зростання	секулярное возрастание	secular growth	стояча хвиля	стоячая волна	standing wave
сепаратриса	сепаратриса	separatrix	структурна стійкість	структурная устойчивость	structural stability
середовище з відновленням	среда с восстановлением	regenerating medium	ступінь вільності	степень свободы	degree of freedom
силовий зв'язок	силовая связь	force coupling	сценарій переходу до хаосу	сценарий перехода к хаосу	scenario of the transfer to chaos
синергетика	синергетика	synergetics	сценарій Помо - Маннервіля	сценарий Помо - Маннервиля	Pomeau - Mannerville scenario
синхронізм	синхронизм	synchronism	сценарій Рюеля - Такенса	сценарий Рюэля - Такенса	Ruelle - Takens scenario
сідло	седло	saddle	сценарій Фейгенбаума	сценарий Фейгенбаума	Feigenbaum scenario
смуга пропускання	полоса пропускания	bandwidth, transmission width	телеграфні рівняння	телеграфные уравнения	telegrapher's equations
солітон	солитон	soliton (solitary wave)	теорема взаємності	теорема взаимности	reciprocity theorem
спектр	спектр	spectrum	турбулентність	турбулентность	turbulence
співвідношення Менлі	соотношения Менли	Manley - Rowe relation	ударна хвиля	ударная волна	shock (knock) wave
			ударна хвиля без	бесстолкновитель-	collisionless shock

Додаток
КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

зіткнень	ная ударная волна	wave	енергією	ной энергией	ergy
укручення профілю	укручение профиля	waveprofile steepness	хвиля перекидання	волна опрокидыва-	change-of-state wave
хвилі	волны	increase		ния	
універсальність Фей-	универсальность	Feigenbaum universal-	хвиля просторового	волна пространст-	space charge wave
генбаума	Фейгенбаума	ity	заряду	венного заряда	
умова помірної нелі-	условие умеренной	moderate nonlinearity	холоста (ялова) час-	холостая частота	idler frequency
нійності	нелинейности	condition	тота		
фаза	фаза	phase	центр	центр	centre
фазова площина	фазовая плоскость	phase plane	часова дисперсія	временная диспер-	time dispersion
фазова траєкторія	фазовая траектория	phase trajectory		сия	
фазова хвиля	фазовая волна	phase wave	частота	частота	frequency
фазова швидкість	фазовая скорость	phase velocity			
фазові коливання	фазовые колебания	phase oscillations			
фазовий потік	фазовый поток	phase flow			
фазовий простір	фазовое пространст-	phase space			
	во				
фокус	фокус	focus			
фрактал	фрактал	fractal			
фрактальна розмір-	фрактальная раз-	fractal dimensionality			
ність	мерность				
фронт	фронт	front			
функція Гріна	функция Грина	Green function			
хаотична динаміка	хаотическая дина-	chaotic dynamics			
	мика				
характеристичне	характеристическое	characteristic (secular)			
рівняння	уравнение	equation			
хвильове рівняння	волновое уравнение	wave equation			
хвильове число	волновое число	wavenumber			
хвильовий вектор	волновой вектор	wave vector			
хвильовий пакет	волновой пакет	wave packet			
хвиля	волна	wave			
хвиля запалювання	волна возгорания	ignition wave			
хвиля з від'ємною	волна с отрицатель-	wave of negative en-			

Література.

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М., 1981.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М., 1981.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М., 1990.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. - М., 1988.
5. Левитский С.М., Кошечая С.В. Вакуумная и твердотельная электроника СВЧ. - К., 1986.
6. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. - М., 1990.
7. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. - М., 1988. -392с.
8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М., 1984.