

## 2. Тунельний ефект у надпровідниках

### 2.1. Енергетичний спектр надпровідника

Явище надпровідності обумовлене появою в надпровідниках при температурах нижче певної критичної температури  $T < T_k$  зв'язаних пар електронів. Зв'язок між електронами виникає завдяки електрон-фононній взаємодії, яка і визначає в основному енергію зв'язку двох електронів  $2\Delta$ .

Вираз для спектра елементарних збуджень в надпровіднику було одержано за допомогою мікроскопічної теорії надпровідності Бардіна-Купера-Шриффера (БКШ). Він має вигляд:

$$E(p) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2} \quad (2.1)$$

де  $E$ ,  $p$  - енергія та імпульс квазічастинки;  $v_F$ ,  $p_F$  - швидкість та імпульс електрону на поверхні Фермі, відповідно.

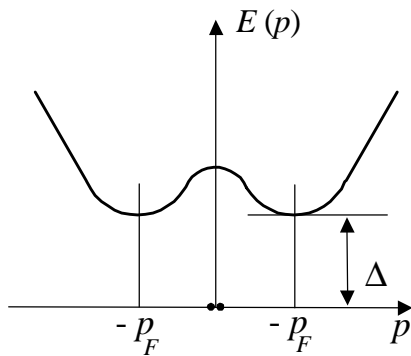


Рис. 2.1. Спектр елементарних збуджень у надпровіднику, ●-стан, що відповідає електронній парі.

Графічно спектр елементарних збуджень зображено на рис.2.1. Двома кружечками на рисунку зображений основний стан надпровідника. Сумарний імпульс електронної пари при відсутності електричного поля  $P = p_F + (-p_F) = 0^{*}$ .

За допомогою рис.2.1 можуть бути якісно вивчені усі можливі процеси взаємодії електронних пар та квазічастинок, як між собою, так і з іншими частинками.

Для прикладу на рис. 2.2 зображено процес поглинання в надпровіднику фотона з енергією  $\hbar\omega = 2\Delta$ , в результаті якого зникає одна електронна пара, і з'являються дві квазічастинки з імпульсами

$$p_1 \cong -p_2; \quad |p_1| \cong |p_F| \quad (2.2)$$

та енергіями  $E(p_1) + E(p_2) = 2\Delta$ . Співвідношення (2.2) зумовлені тим, що для реальних надпровідників частота фотона з енергією  $2\Delta$  лежить в міліметровому діапазоні, імпульс такого фотона  $\hbar\omega/c \ll p_F$ .

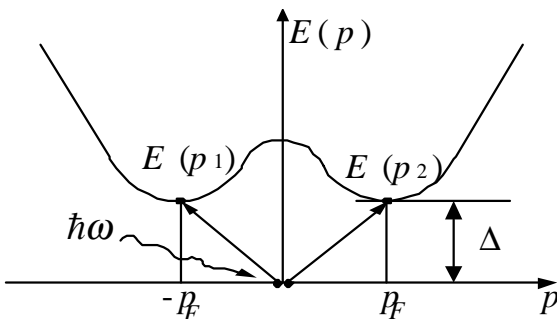


Рис. 2.2. Поглинання фотону з енергією  $\hbar\omega = 2\Delta$ .

Для багатьох випадків при розгляді елементарних процесів взаємодії частинок в надпровіднику виявляється достатнім враховувати лише його енергетичну структуру, опустивши інформацію про імпульс квазічастинок.

Дві спрощені моделі надпровідника - модель Адкінса та напівпровідникова модель наведені на рис. 2.3 та 2.4 відповідно. В моделі Адкінса є основний стан - конденсат

\*/ В утворенні електронних пар приймають участь лише електрони, що лежать поблизу поверхні Фермі і які мають однакові, але направлені протилежно імпульси.

електронних пар – відокремлений від збуджених рівнів забороненою зоною шириною  $\Delta$ . Напівпровідникова модель побудована для електронів, рівні енергій яких розщеплені електрон-фононою взаємодією на величину  $\Delta$  по обидва боки від енергії Фермі  $E_F$ .

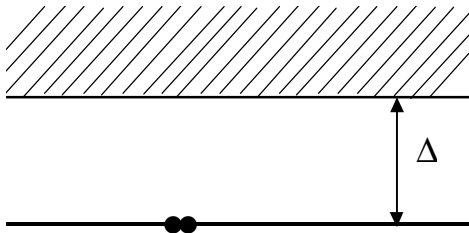


Рис.2.3. Модель Адкінса.

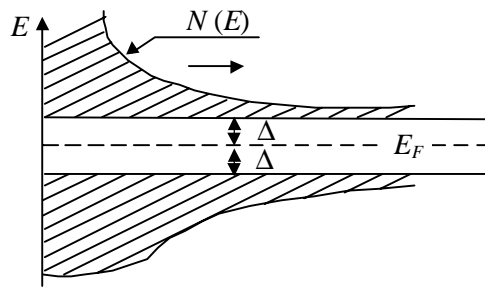


Рис. 2.4. Напівпровідникова модель надпровідника.  $N(E)$ -густина станів.

## 2.2. Тунелювання нормальних електронів

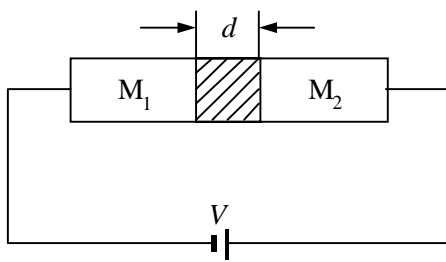


Рис. 2.5. Тунельний контакт двох металів  $M_1$  та  $M_2$ .

Розглянемо електричне коло, зображене на рис.2.5, коли два метали  $M_1$  та  $M_2$ , що приєднані до джерела напруги  $V$ , з'єднані між собою через діелектрик товщиною  $d$ . При достатньо тонкому діелектрику ( $d$  менше або має порядок декількох сотень ангстрем), між металами  $M_1$  та  $M_2$  може текти помітний тунельний струм. Головне при цьому, щоб виконувався закон збереження енергії, тобто, щоб частинка з лівого та правого боку від переходу мала однакову енергію. Для визначення умов, за яких може виникнути тунельний струм, необхідно розглянути систему

рівнів заряджених частинок в металах  $M_1$  та  $M_2$ . Тут в залежності від того, якими будуть ці метали  $M_1$  та  $M_2$  можуть мати місце декілька ситуацій.

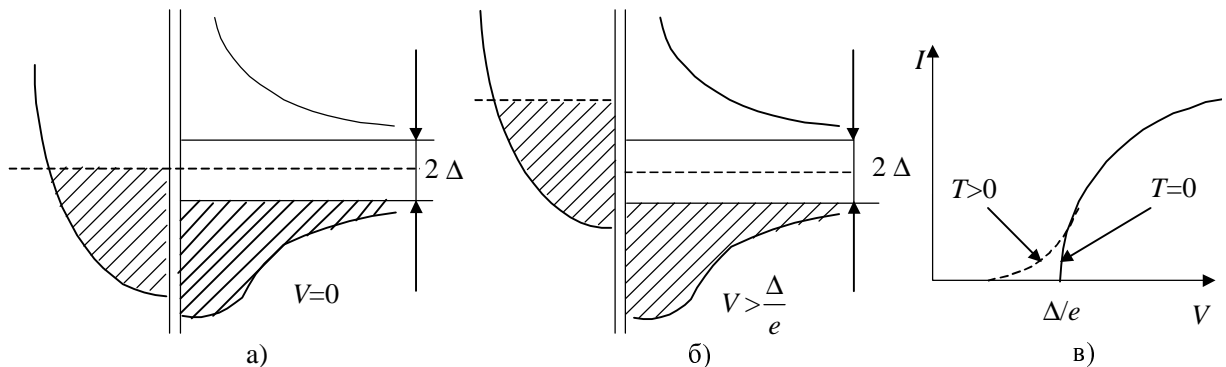


Рис. 2.6. Енергетична діаграма переходу N-S у відповідності до напівпровідникової моделі при  $V=0$  (а); теж саме при  $V > \Delta/e$  (б); вольт-амперна характеристика (в) [1].

$M_1$ - нормальний метал,  $M_2$  - надпровідний метал (перехід N-S). Спектр енергій квазічастинок для цього випадку зліва і справа від переходу зображений на рис.2.6. При  $0 \leq V < \Delta/e$  ( $e$ - заряд електрону) перехід електронів із нормального металу в надпровідник неможливий через те, що дозволені електронні рівні в надпровіднику

знаходяться вище рівня Фермі на енергію  $\Delta$ . Якщо  $V \geq \Delta/e$ , то тунелювання електронів стає можливим, що призведе при цих потенціалах до різкого збільшення струму крізь тунельний контакт. Приблизний вигляд вольт-амперної характеристики (ВАХ) N-S переходу зображений на рис.2.6 (в). При температурі  $T=0$  струм крізь перехід  $I=0$  для усіх  $V < \Delta/e$ . При  $T>0$  через появу в нормальному металі теплових електронів, які мають енергію  $E > E_F$ , можливе протікання невеликого струму і при  $V < \Delta/e$ , що зображене пунктиром на рис. 2.6(в) (див. також [1], рис.4.3).

$M_1$  та  $M_2$ - надпровідникові метали (перехід S-S або, у випадку різних надпровідників,  $S_1$ - $S_2$ ). Енергетична діаграма та струм  $S_1$ - $S_2$  переходу зображені на рис.2.7.

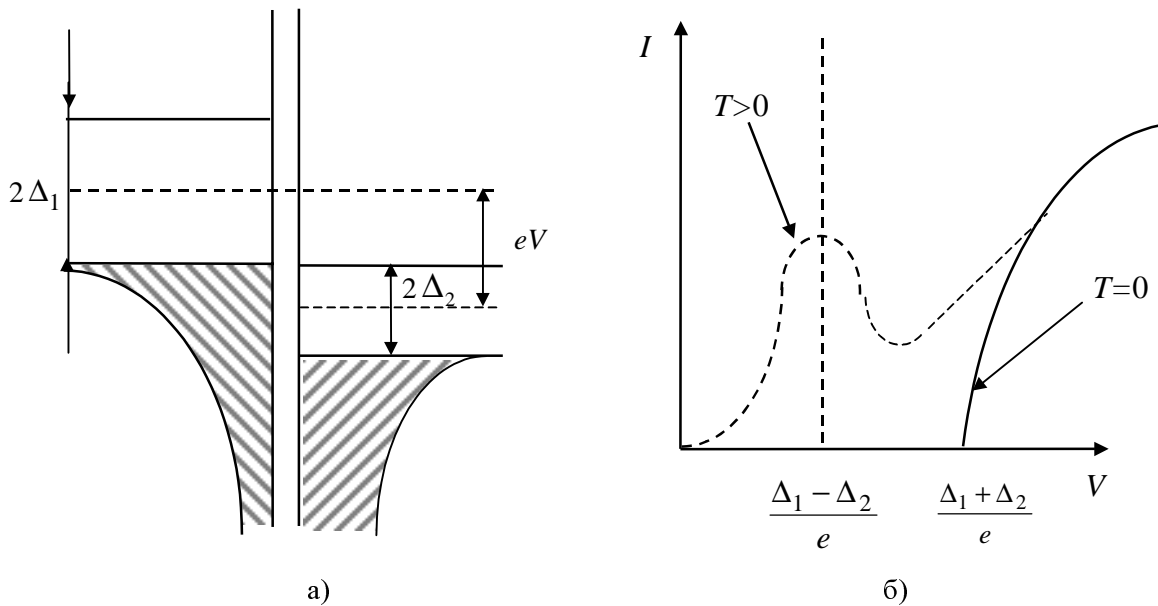


Рис. 2.7. Енергетична діаграма а) та вольт-амперна характеристика б)  $S_1$ - $S_2$  переходу [1].

При  $T=0$  струм в такому переході буде текти при  $V \geq (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ , коли верхній рівень нижньої зони надпровідника  $S_1$  досягає або перевищує нижній рівень верхньої зони надпровідника  $S_2$ . При  $T>0$ , як і у випадку переходу N-S, ненульові струми крізь перехід  $S_1$ - $S_2$  будуть текти і при напругах  $V < (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ , але у останньому випадку мають місце цікаві особливості, пов'язані з появою на ВАХ  $S_1$ - $S_2$  переходу ділянки з від'ємним опором. Для того, щоб продемонструвати це, достатньо вважати, що у надпровідника з меншою щільністю в верхній зоні є деяка кількість теплових електронів та така ж сама кількість дірок в нижній зоні. При  $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/e$  тунельний струм теплових електронів буде мати максимум завдяки максимальній густині станів зліва і справа від переходу для цього випадку. Приблизний вигляд ВАХ переходу  $S_1$ - $S_2$  при  $T>0$  представлено на рис. 2.7(б) пунктирною лінією (див. також [1], рис. 4.8 та 4.9).

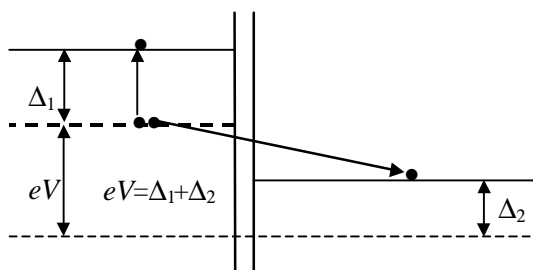


Рис. 2.8. Тунелювання електронів в  $S_1$ - $S_2$  переході відповідно до моделі Адкінса [1].

На рис.2.8 тунелювання в  $S_1$ - $S_2$  переході зображено за допомогою моделі Адкінса.

До цього часу розглядався найпростіший вид тунелювання, коли кожний електрон тунелюється крізь бар'єр незалежно від інших частинок. Існують і інші види тунелювання, які відбуваються хоча і з меншою, але все ж відмінною від нуля ймовірністю. До них, наприклад, можна віднести одночасне

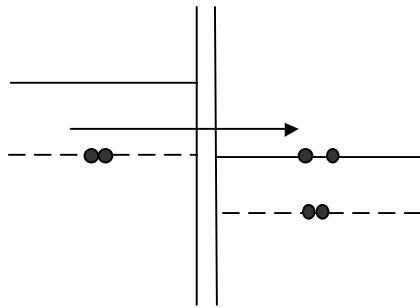


Рис. 2.9. Двохчастинкове тунелювання в S-S переході при  $V=\Delta/e$ .

тунелювання крізь бар'єр не одного, а відразу декількох електронів, тунелювання за участю одного або декількох фотонів або фононів і т.д. Розглянемо можливість тунелювання електронів в S-S переході при  $V=\Delta/e$ , та  $T=0$  (див. рис.2.9). Для цього електронна пара в лівому надпровіднику повинна розпастися і обидва електрони за час  $\Delta t$  повинні тунелювати в правий надпровідник. Порядок величини  $\Delta t$  можна визначити, користуючись співвідношенням невизначеності для енергії  $\Delta E \Delta t \approx h$ , у відповідності до якого електрон у

основному стані надпровідника, де можуть існувати тривалий час лише пари, повинен знаходитися не довше, ніж  $\Delta t \approx h/\Delta$ . Зрозуміло, що краще спостерігати за двохчастинковим тунелюванням при  $T \rightarrow 0$ , адже в такому випадку зменшується внесок струму теплових електронів. Експериментально двохчастинкове тунелювання спостерігається як незначний стрибок струму в S-S переході при напрузі  $V=\Delta/e$ .

На рис. 2.10 зображений один із можливих процесів тунелювання в  $S_1$ - $S_2$  переході, який супроводжується поглинанням фотону частотою  $\omega$ . Умову протікання процесу тунелювання з поглинанням фотону можна визначити з того, що енергії частинок до та після тунелювання повинні співпадати:

$$eV = \Delta_1 + \Delta_2 - \hbar\omega \quad (2.3)$$

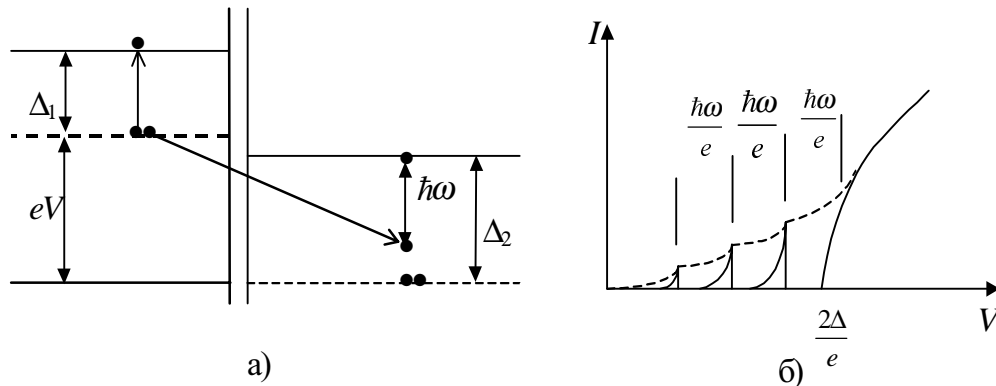


Рис. 2.10. Тунелювання в  $S_1$ - $S_2$  переході з поглинанням фотону (а) та вольт-амперна характеристика (б) при  $\Delta_1 = \Delta_2$ ; суцільна лінія -  $T=0$ , пунктир -  $T>0$ .

В загальному випадку може мати місце процес поглинання не одного, а  $n$  фотонів випромінювання, що падає на надпровідник. Тому умову (2.3) тепер можна записати

$$eV = \Delta_1 + \Delta_2 - n \hbar\omega \quad (2.3a)$$

Тунелювання з поглинанням фотонів спостерігається як у S-S, так і в  $S_1$ - $S_2$  переходах, які опромінюються електромагнітним полем частотою  $\omega$ . Тунелювання проявляється у вигляді стрибків струму при напругах, що відповідають формулі (2.3 а).

### 2.3. Ефекти Джозефсона

Ймовірність тунельного ефекту сильно залежить від маси та заряду частинок, що тунелюють. У зв'язку з цим ймовірність тунелювання пар суттєво менша ймовірності тунелювання нормальних електронів. Але можна все ж сподіватися, що при зменшенні товщини бар'єру  $d$  тунелювання надпровідних пар також буде складати помітну в експерименті величину. Вперше задачу про проходження надпровідних пар крізь тонкий ізолюючий шар розглянув Джозефсон, який одержав нетривіальні результати, які пізніше дістали назву ефектів Джозефсона.

Розглянемо знову тунельний контакт двох металів  $M_1$  та  $M_2$ , зображений на рис.2.5. Обидва метали є надпровідниками. Останнє означає, що усі надпровідні електрони в  $M_1$  знаходяться в одному єдиному стані, який може бути описаний хвильовою функцією  $\psi_1$ , відповідно в  $M_2$  усі надпровідні електрони описуються хвильовою функцією  $\psi_2$ . Якщо величина  $d$  значна, так що тунельний струм пар малий, то  $\psi_1$  та  $\psi_2$  повинні задовольняти незалежним рівнянням Шредінгера. Із зменшенням  $d$  тунельний струм приведе до зв'язку хвильових функцій пар  $\psi_1$  та  $\psi_2$  і для їх знаходження слід записати два зв'язаних рівняння Шредінгера

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_1 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= E_2 \psi_2 + K \psi_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де  $E_1, E_2$  – енергія пар відповідно в  $M_1$  і  $M_2$ ,  $K$ -константа зв'язку, яка залежить від характеристик переходу. Якщо до контакту прикладена напруга  $V$ , то енергії пар в  $M_1$  та  $M_2$  відрізняються на  $2eV$ , тобто  $E_1 - E_2 = 2eV$ . Якщо для зручності вибрати за нульовий рівень енергії  $(E_1 + E_2)/2$ , замість (2.4) отримаємо

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= eV \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -eV \psi_2 + K \psi_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) добре відомі з теорії коливальних, вони описують зв'язані коливання двох осциляторів в комплексних нормальних координатах  $\psi_1$  та  $\psi_2$ . Перейдемо в (2.5) до дійсних змінних за допомогою заміни:

$$\psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\varphi_1}; \quad \psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\varphi_2} \quad (2.6)$$

де  $\rho_1, \varphi_1; \rho_2, \varphi_2$  - густини електронів та фази хвильових функцій по обидва боки тунельного контакту відповідно. Після підстановки (2.6) в (2.5) маємо 4 диференціальні рівняння першого порядку для нових змінних:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{eV}{\hbar} \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{eV}{\hbar}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Проаналізуємо систему (2.7), припустивши, що густини зарядів несуттєво відрізняються від рівноважної:  $\rho_1 \cong \rho_2 \cong \rho_0$  та позначивши різницю фаз на контакті як  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ . Перші два рівняння означають, що навіть у випадку, коли  $V=0$ , крізь контакт протікає постійний надпровідний струм  $I$ , який залежить лише від різниці фаз  $\varphi$ :

$$\dot{\rho}_1 = I = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi = I_0 \sin \varphi \quad (2.8)$$

Явище протікання крізь джозефсонівський контакт (ДК) постійного надпровідного струму, який залежить від різниці фаз на контакті, дістало назву стаціонарного ефекта Джозефсона. Критичний струм джозефсонівського контакту  $I_0 = 2K/\hbar$  може бути розрахований з допомогою мікроскопічної теорії; для густини струму  $J_0$  для тунельного контакту [6, стор. 210]:

$$J_0 \cong \frac{\pi \Delta}{2eR_0} th \frac{\Delta}{2k_B T}, \quad (2.9)$$

де  $R_0$  – опір тунелювання у випадку, коли обидва метали знаходяться у нормальному стані. Для типових переходів  $I_0 \sim 1$  мА.

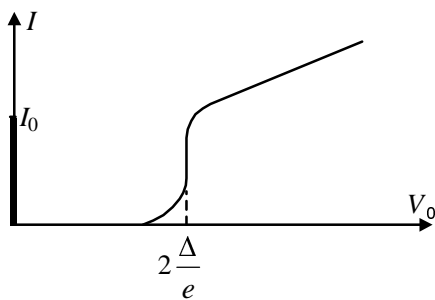


Рис. 2.11. Вольтамперна характеристика ідеального ДК при  $T > 0$ .

Тепер перейдемо до іншого явища – нестаціонарного ефекта Джозефсона. Він полягає у тому, що різниця фаз на контакті під дією падіння напруги на контакті  $V$  стає змінною величиною. З двох останніх рівнянь системи (2.7) можна отримати математичне формулювання нестаціонарного ефекта Джозефсона:

$$\dot{\varphi} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (2.10)$$

Якщо  $V=V_0=\text{const}$ , то

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t, \quad (2.11)$$

де  $\varphi_0$  - початкова різниця фаз.

Оскільки струм крізь контакт залежить від різниці фаз  $\varphi$ , то зміна  $\varphi$  означає, що струм крізь ДК при  $V_0 \neq 0$  стане змінним струмом. Підставляючи (2.11) в (2.8), маємо:

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V_0 t + \varphi_0\right) \quad (2.12)$$

Отже, ми маємо справу з досить незвичайним явищем: при  $V=0$  крізь ДК іде постійний струм, при збільшенні  $V_0$  постійний струм стрибком зникає, але виникає змінний струм з частотою

$$\omega_D = \frac{2e}{\hbar} V_0 \quad (2.13)$$

$$f_D = \frac{\omega_D}{2\pi} = 483,6 V_0 \text{ (МГц/мкВ)}. \quad (2.14)$$

ВАХ ідеального ДК представлена на рис.2.11.

Було показано, що  $I_0$  в формулі (2.12) залежить від частоти, тобто амплітуда змінного струму змінюється з частотою  $\omega_D$  (або з напругою  $V_0$ ). Вигляд цієї залежності був встановлений Ріделем, згідно цій залежності навіть при напругах, що перевищують щільову напругу в декілька разів, у переході існує змінний струм пар з помітною амплітудою. Максимум струму  $I_0(\omega_D)$  спостерігається при прикладених напругах  $V_0=2\Delta/e$  [8, стор.138]. При  $V_0 \geq 2\Delta/e$  стає помітним ефект тунелювання нормальних електронів.

#### 2.4. Джозефсонівський контакт (ДК) у присутності постійного магнітного поля

Через присутність в ДК діелектричного прошарку зовнішнє магнітне поле вздовж діелектрика може пронизувати весь контакт, змінюючи закони протікання надпровідного струму. Спрощено розглянемо нескінченно тонкий ДК, в площині якого

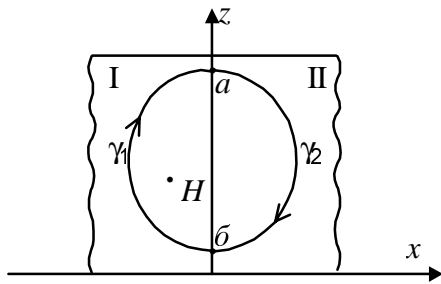


Рис. 2.12. ДК між надпровідниками I та II в постійному полі  $\vec{H}$ , що перпендикулярне площині малюнка. До виводу формули (2.22).

діє відмінне від нуля постійне магнітне поле  $\vec{H}$  (див. рис.2.12). Це поле призведе до появи у пар імпульсу, спрямованого вздовж осі  $z$ , тобто фаза хвильової функції пар буде різною в різних точках контакту. Різниця фаз по різні боки від контакту буде також залежати від  $z$ , що призведе, відповідно до (2.8), до того, що джозефсонівський струм стане неоднорідним:  $I=I(z)$ . Покажемо це. Імпульс пар в присутності магнітного поля  $\vec{H}$  має вигляд

$$\vec{P} = 2m_e \vec{v} + 2 \frac{e}{c} \vec{A} \quad (2.15)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (2.16)$$

де  $m_e$ -маса електрону,  $\vec{v}$ -швидкість пар,  $\vec{A}$ - векторний потенціал. Враховуючи, що довжина хвилі пар  $\lambda_e$

$$\lambda_e = \frac{h}{|\vec{P}|}, \quad (2.17)$$

можна записати для різниці фаз хвильової функції між точками  $a$  та  $b$  в I-ому надпровіднику (див. рис. 2.12)

$$\varphi_1^a - \varphi_1^b = 2\pi \int_{\gamma_1}^a \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} \frac{d\vec{r}}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{h} \int_{\gamma_1} \vec{P} d\vec{r}, \quad (2.18)$$

де  $\vec{r}$  - радіус вектор.

Аналогічно для різниці фаз між точками  $b$  та  $a$  в II-ому надпровіднику маємо

$$\varphi_2^{\bar{\sigma}} - \varphi_2^a = \frac{2\pi}{h} \int_{\gamma_2} \bar{P} d\bar{r} \quad (2.19)$$

Вважаючи й надалі, що ДК нескінченно тонкий, з (2.15), (2.18), (2.19) маємо:

$$(\varphi_1^a - \varphi_2^a) - (\varphi_1^{\bar{\sigma}} - \varphi_2^{\bar{\sigma}}) = \frac{2\pi}{h} \oint_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{P} d\bar{r} = \frac{2e}{\hbar c} \oint_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{A} d\bar{r} = \frac{2e}{\hbar c} \Phi_\gamma = 2\pi \frac{\Phi_\gamma}{\Phi_0} \quad (2.20)$$

В (2.20) взято до уваги, що  $\oint \bar{v} d\bar{r} = 0$  [1, стор. 167],  $\Phi_\gamma$ - магнітний потік, який пронизує ДК всередині контуру  $\gamma_1 + \gamma_2$ ;  $\Phi_\gamma = H(b-a)(d+2\lambda)$ .  $\lambda$ - глибина проникнення постійного магнітного поля в надпровідники I та II.  $\Phi_0$ - квант магнітного потоку – флюксон,  $\Phi_0 = ch/2e = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$ .

З формули (2.20) видно, що стрибок фази на контакті в точках "a"- $\varphi_a = \varphi_1^a - \varphi_2^a$  та "б"- $\varphi_b = \varphi_1^{\bar{\sigma}} - \varphi_2^{\bar{\sigma}}$  неоднаковий, тобто дійсно  $\varphi = \varphi(z)$ . Якщо сумістити точку "a" з точкою  $z=0$ , а точку "б" з довільною точкою  $z$ , одержимо вираз для зсуву фаз на контакті в точці  $z$ :

$$\varphi_z = \varphi_0 - \frac{2\pi H(d+2\lambda)z}{\Phi_0} \equiv \varphi_0 - 2\pi \frac{\Phi_z}{\Phi_0}. \quad (2.21)$$

Якщо підставити  $\varphi_z$  в формулу для джозефсонівського струму, маємо для густини струму  $J$  в точці  $z$ :

$$J = J(z) = J_0 \sin\left(\varphi_0 - 2\pi \frac{H(d+2\lambda)}{\Phi_0} z\right) = J_0 \sin\left(\varphi_0 - 2\pi \frac{\Phi_z}{\Phi_0}\right) \quad (2.22)$$

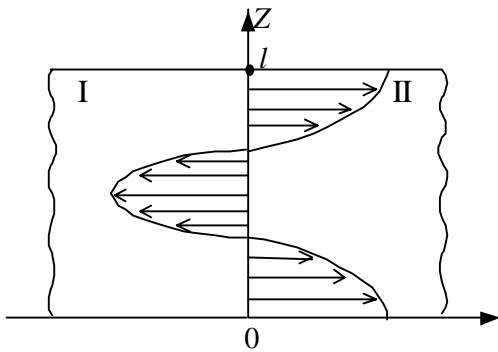


Рис. 2.13. Напрямок струму (стрілки) між надпровідниками I та II у присутності у контакті магнітного потоку  $\Phi = \Phi_0$ . Довжина стрілок пропорційна густині струму.

Вигляд протікання постійного струму крізь ДК довжиною  $l$  при постійному магнітному полі такому, що  $H(d+2\lambda)l = \Phi_0$  та  $\varphi_0 = \pi/2$  зображений на рис.2.13. Видно, що струм крізь ДК змінює не тільки свою величину, але й напрямок. Повний струм між надпровідниками I та II  $I$  можна отримати інтегруванням  $J(z)$  по площині переходу. В присутності магнітного поля повний струм крізь ДК має максимум вже не обов'язково при  $\varphi_0 = \pi/2$ , як для випадку  $H=0$ . Для визначення максимального значення повного струму  $I_{\max}$  необхідно з рівняння  $\partial I / \partial \varphi_0 = 0$  визначити оптимальну початкову фазу  $\varphi_0$ , яка дорівнює  $\pi/2 + \pi[H(d+2\lambda)l]/\Phi_0$ , та підставити її у вираз для  $I$ . Далі можна отримати:



$$I_{\max} = I_0 \left| \frac{\sin \frac{\pi \Phi_{\text{ДК}}}{\Phi_0}}{\frac{\pi \Phi_{\text{ДК}}}{\Phi_0}} \right|, \quad (2.23)$$

де  $I_0$  – як і раніше, максимальне значення джозефсонівського струму при  $H=0$ ;  $\Phi_{\text{ДК}}$  – магнітний потік через весь ДК:  $\Phi_{\text{ДК}}=Hl (d+2\lambda)$ .

Фактично рівняння (2.23) обумовлене дифракцією електронного потоку на ДК. Експериментальне підтвердження залежності (2.23) (див. рис.2.14) стало остаточним доведенням існування ефектів Джозефсона.

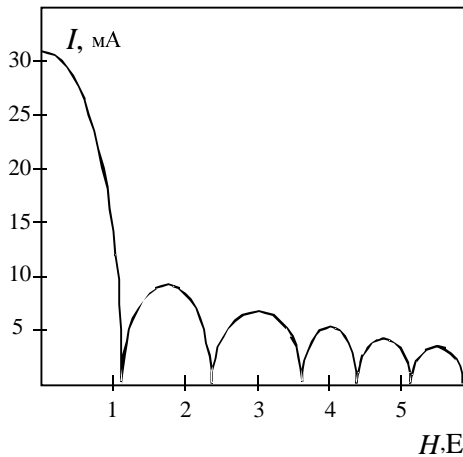


Рис. 2.14. Залежність максимального надпровідного струму в ДК Sn-I-Sn.

Власне магнітне поле, яке існує довкола джозефсонівського струму, також буде впливати на цей струм. Власне поле неоднорідне, отже, його вплив буде відрізнятися від розглянутого вище впливу на надпровідний струм зовнішнього однорідного магнітного поля. В цьому випадку струм по аналогії з ефектом Мейснера тектиме лише біля країв переходу:

$$J \sim \exp(-z/\lambda_{\text{Д}}), \quad (2.24)$$

де  $\lambda_{\text{Д}}$  – джозефсонівська глибина проникнення,  $\lambda_{\text{Д}} = [c\Phi_0/8\pi^2 J_0 (2\lambda + d)]^{1/2}$  [6, стор. 215]. При  $l \ll \lambda_{\text{Д}}$  можна вважати струм крізь ДК

однорідним. За порядком величини  $\lambda_{\text{Д}} \sim 1$  мм. Ще

один наслідок впливу поля джозефсонівського струму – провали максимального струму крізь ДК не досягають нуля, як зображено на рис.2.14.

## 2.5. Типи та характеристики реальних джозефсонівських контактів (ДК)

Якщо уважно розглянути рівняння (2.4) то можна переконатися, що для існування ефектів Джозефсона зовсім не обов'язкова наявність тунельного контакту. Важливо лише, щоб між надпровідниками мав місце слабкий зв'язок із константою зв'язку  $K$ . Сьогодні добре відомі декілька з'єднань різних типів, при яких здійснюється слабкий зв'язок надпровідників один з одним. Деякі з таких з'єднань показані на рис.2.15.

Перехід, зображений на рис.2.15 (а), фактично є класичним тунельним переходом Джозефсона, що був розглянутий вище. В такому ДК дві надпровідні смужки розділені

шаром окислу товщиною  $\sim 10-20$  Å. Технологічні труднощі контрольованого отримання окислів такої товщини призвели до створення ДК із заміною шару окислу шаром міді (див. рис.2.15(б)). Завдяки ефекту близькості до певних значень товщин мідного шару ( $\sim 1$  мкм) в такому ДК має місце слабкий зв'язок двох надпровідників. На рис.2.15 (в) зображено перехід, в якому здійснюється слабкий зв'язок завдяки ділянці надпровідника дуже малого перерізу (тонкоплівковий місток, місток змінної товщини). На рис.2.15(г) зображений технологічно найбільш простий притискний точковий контакт. У такому випадку слабкий зв'язок утворюється зміною ступеня стиснення надпровідників один із одним; при сильному стисненні виникає сильний зв'язок. Краплеподібний перехід (див. рис.2.15 (д)) утворюється, наприклад, шляхом нанесення краплі надпровідного припою  $Pb-Sn$  на надпровідний ніобієвий дріт. Так як дріт завжди

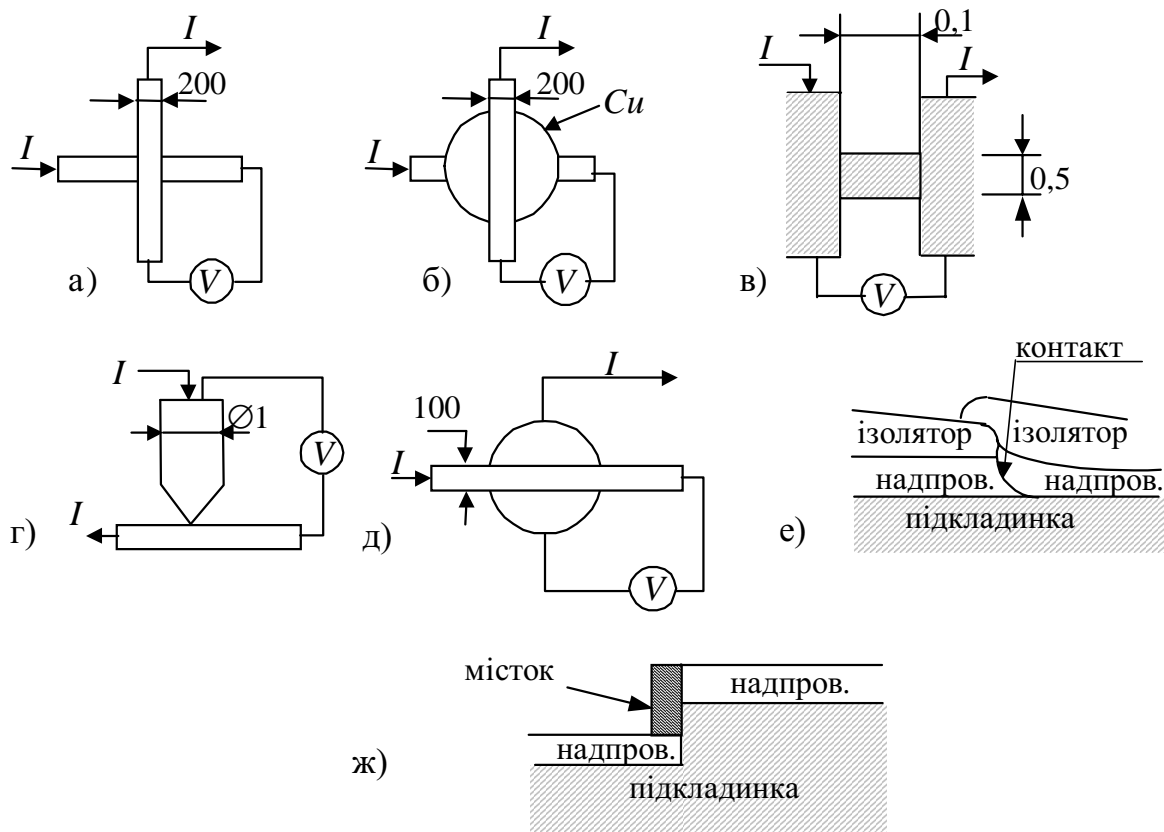


Рис.2.15 Типи джозефсонівських переходів[2]. Розміри приведені в мікрометрах.

вкритий окислом, то прями́й контакт надпровідників відсутній, а в окремих місцях, де окисел найбільш тонкий, має місце слабкий зв'язок. Перевагою краплеподібного переходу є повне екранування ДК від зовнішніх електромагнітних полів.

Зараз в кріоелектроніці домінують латеральні (торцеві) джозефсонівські контакти, які зображені на рис.2.15 (е) (тунельний) і 2.15 (ж) (містковий). Перевага цих контактів - простота технології, надійність і малі геометричні розміри. Площа тунельних контактів досягає  $10^{-10}$  см<sup>2</sup>, містки мають розміри 300 А × 300 А × 300 А. Містки можуть завдяки ефекту близькості виготовлятися із міді.

Починають застосовуватись контакти з ВТНП. Це перш за все природні контакти, які існують в середині надпровідника між його гранулами, точкові контакти, які виникають при з'єднанні двох шматків масивних полікристалічних високотемпературних надпровідників, а також джозефсонівські контакти на бікристалічній границі. В останньому випадку підкладинка складається з двох ділянок, кристалічні ґратки в яких повернуто на 20 - 30° одна відносно другої, в результаті чого на границі цих двох ділянок утворюється перехідний шар плівки ВТНП, що має джозефсонівські властивості. Робляться спроби створення латеральних місткових контактів ВТНП (див. рис.2.15 (ж)) з шунтуванням надпровідного містка краплею благородного металу.

ВАХ реальних ДК можуть суттєво відрізнитися від характеристики ідеального контакту, зображеної на рис. 2.11. Ця відміна, в першу чергу, обумовлена тим, що всякий реальний ДК має в нормальному стані кінцевий опір, він шунтується ємностями та йому притаманна індуктивність. Найбільш близький до ідеального - тунельний ДК. Його опір при кімнатній температурі складає  $R_0 \sim 10^2$  Ом. Але його ємність дуже велика -  $C_0 \sim 10^3$  пФ. Опір точкового контакту може досягати десятків Ом при власній ємності порядку декількох пікофарад. Надпровідним місткам притаманний незначний опір (від

$R_0 \sim 10^{-6}$  Ом до декількох Ом в латеральних контактах) та ємності того самого порядку, що і в найкращих точкових контактах.

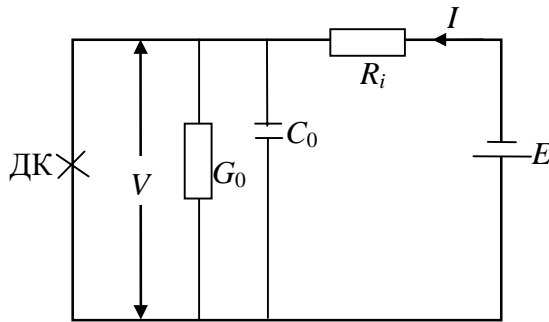


Рис. 2.16. Еквівалентна схема реального ДК з генератором струму  $I = E/R_i$ ;  $R_i \gg G_0^{-1}$ .

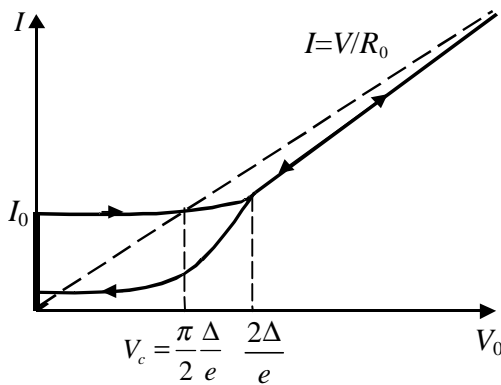


Рис.2.17. Вольтамперна характеристика реального тунельного ДК.

розв'язок якого у загальному вигляді можна знайти лише чисельними методами. Вигляд розрахованої таким чином вольтамперної характеристики тунельного ДК зображений на рис.2.17.

Для місткового ДК у наближенні  $G_0 = 1/R_0$  та  $C_0 = 0$  (резистивна модель) рівняння (2.24) для постійної напруги на контакті  $V_0$  має розв'язок:  $V_0 = R_0(I^2 - I_0^2)^{1/2}$  (див.рис.2.18).

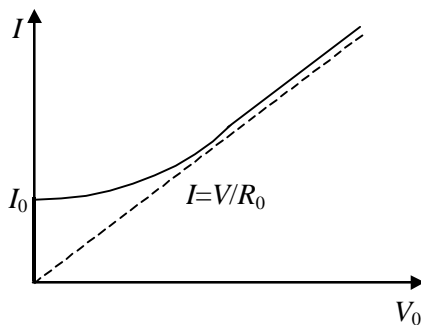


Рис. 2.18. Вольтамперна характеристика місткового ДК.

Вигляд ВАХ ДК залежить також і від опору джерела струму  $R_i$ , за допомогою якого знімається ця характеристика. Вольтамперну характеристику, яка схожа на зображену на рис.2.11, можна отримати навіть на ідеальному контакті лише за допомогою ідеального генератора напруги, тобто при  $R_i$  значно меншому, ніж опір ДК. Але, якщо взяти до уваги, що опір ДК в надпровідному стані дорівнює нулю, стануть зрозумілими труднощі реалізації генератора напруг для дослідження ДК. Тому, як правило, використовуються генератори струмів, коли  $R_i \gg R_0$ . Еквівалентна схема реального ДК з генератором струму зображена на рис.2.16. Для цієї схеми можна записати

$$I = I_0 \sin \varphi + G_0 V + C_0 \frac{dV}{dt} \cong E/R_i. \quad (2.24)$$

Для тунельного ДК провідність  $G_0$  дорівнює нормальній провідності тунельного переходу  $G_0 = G(V)$  (див. рис.2.6 (в)); для місткового ДК  $G_0 \cong 1/R_0$ . Якщо врахувати зв'язок між  $\varphi$  та  $V$ , що витікає із рівнянь (2.10), то (2.24) стане нелінійним диференціальним рівнянням,

Ємність, яка шунтує перехід призводить до появи гістерезису на вольтамперній характеристиці, аналогічно тому, як це мало місце для тунельного ДК. Гістерезис зазвичай знімається введенням шунтуючого резистора відповідного номіналу. Для переходів, зображених на рис.2.15 (в, г, ж) вольтамперні характеристики досить точно відповідають характеристикам для місткового ДК.

## 2.6. Джозефсонівський контакт під дією електромагнітних коливань

Нехай до ДК, крім постійної напруги  $V_0$ , прикладені змінні напруги різних частот. Обмежимо розгляд цієї ситуації випадком, коли до ДК прикладені дві напруги  $V_1$  та  $V_2$  з частотами відповідно  $\omega_1$  та  $\omega_2$ :

$$V = V_0 + V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \cos \omega_2 t \quad (2.25)$$

Напруги  $V_1$  та  $V_2$  в загальному випадку можуть мати як зовнішнє походження, так і внутрішнє, тобто можуть генеруватися самим контактом. Підставляючи (2.25) в формулу для нестационарного ефекту Джозефсона (2.10), маємо:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2e}{\hbar} \int (V_0 + V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \cos \omega_2 t) dt \quad (2.26)$$

Використовуючи (2.8) та (2.26), маємо для Джозефсонівського струму:

$$I = I_0 \sin \left\{ \varphi_0 + \omega_D t + \frac{2eV_1}{\hbar\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{2eV_2}{\hbar\omega_2} \sin \omega_2 t \right\} \quad (2.27)$$

Остаточний вираз для  $I$  маємо, якщо виразити (2.27) через функції Бесселя  $j_k(x)$ :

$$I = I_0 \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^{k+m} j_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega_1} \right) j_m \left( \frac{2eV_2}{\hbar\omega_2} \right) \sin (\varphi_0 + \omega_D t - k\omega_1 t - m\omega_2 t) \right\} \quad (2.28)$$

З формули (2.28) видно, що спектр джозефсонівського струму багатий гармоніками: в ньому мають місце складова джозефсонівської генерації з частотою  $\omega_D = \frac{2eV_0}{\hbar}$ , складові, які відповідають перемноженню, додаванню та відніманню частот. Розглянемо поки що тільки постійну складову джозефсонівського струму. Згідно (2.28) постійний струм обумовлюється доданками, для яких має місце рівність

$$\omega_D - k\omega_1 - m\omega_2 = 0 \quad (2.29)$$

Дослідимо декілька простих випадків:

а) на контакт не діють зовнішні змінні поля:  $V_2=0$ , а  $V_1$  обумовлена власною джозефсонівською генерацією, тобто  $\omega_1 = \omega_D$ . Тоді (2.28) матиме вигляд:

$$I = I_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^k j_k \left( \frac{V_1}{V_0} \right) \sin [\varphi_0 + \omega_D t (1 - k)] \right\} \quad (2.30)$$

При цьому постійна складова  $I_{=}$  струму  $I$  дорівнює:  $I_{=} = -I_0 j_1(V_1/V_0) \sin \varphi_0$ . Це означає, що з урахуванням високочастотних коливань навіть для ідеального ДК при довільному  $V_0$  крізь контакт буде протікати відмінний від нуля постійний струм. Величина цього струму пропорційна  $j_1(V_1/V_0) \sim V_1$ .  $V_1$  матиме максимум, якщо  $\omega_D$  співпадає з резонансною частотою контакту або з резонансною частотою об'ємного резонатора, в якому знаходиться ДК. З точки зору електродинаміки об'ємний резонатор і контакт, що також фактично є мікросмужковим резонатором довжиною  $l$ , мають велику кількість резонансних мод. Це призводить до великої кількості максимумів (або

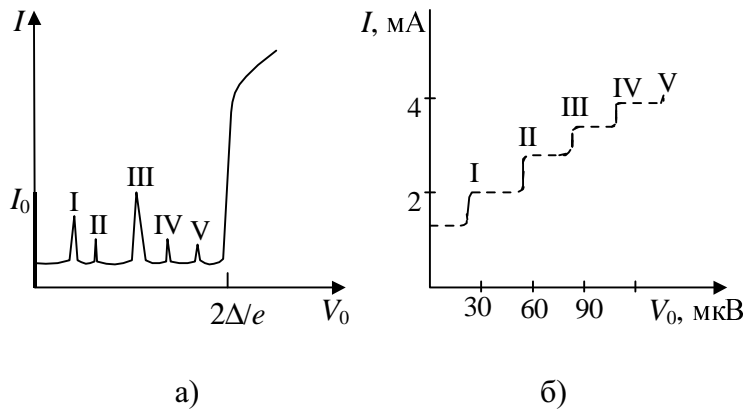


Рис. 2.19. Вольтамперні характеристики ідеального ДК (а) та реального ДК з генератором струму (б) з урахуванням власної джозефсонівської генерації контакту. Римськими цифрами позначаються номери резонуючих мод.

постійний струм виникає при

$$\frac{2eV_0}{\hbar} = \frac{m}{1-k} \omega_2; \quad m, k = -\infty \div \infty. \quad (2.31)$$

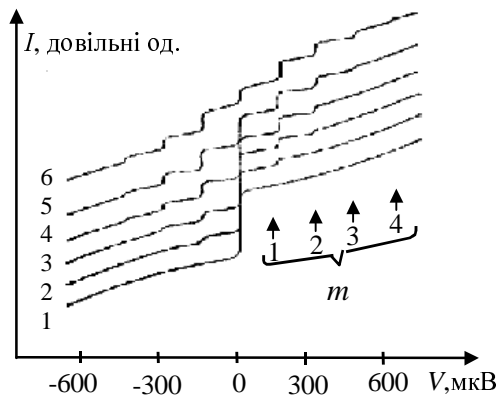


Рис. 2.20. Вольт-амперні характеристики точкового контакту  $Nb-Nb$  з генератором струму.

1-НВЧ випромінювання відсутнє; 2÷6 - потужність НВЧ випромінювання поступово підвищується,  $m$ - порядок сходинок.

кількість сходинок можна спостерігати, та тим чіткіше вони виявляються. При ефективній джозефсонівській генерації спостерігається сходинок, що відповідає биттю другої гармоніки джозефсонівської частоти з першою гармонікою НВЧ випромінювання ( $k = -1, m = 1$ ). На рис.2.20 вона відсутня, її місцезнаходження відповідало б напрузі  $V \sim 75$  мкВ. На сьогодні в деяких експериментах зареєстровано одночасно більше сотні сходинок (див. рис.17.9 в [1]);

в) джозефсонівська генерація відсутня ( $V_0=0$ ), на контакт діє тільки одна змінна напруга  $V_1$  частотою  $\omega_1$ . За допомогою (2.28) маємо

стрибків струму у схемі з генератором струму) на вольтамперній характеристиці (див. рис. 2.19). Фізичною причиною появи постійного струму у розглянутому випадку є змішування джозефсонівської частоти із самою собою, внаслідок чого виникає складова на нульовій частоті;

б) на контакт діє поле джозефсонівської генерації  $\omega_1=\omega_D$  і зовнішнє поле з частотою  $\omega_2$ . В цьому випадку, згідно (2.29)

Умова (2.31) означає, що постійний струм відмінний від нуля, коли джозефсонівська частота або її гармоніка дорівнює частоті  $\omega_2$  або будь-якій її гармоніці. При змішуванні частот в цьому випадку виникає складова на нульовій частоті.

На рис.2.20 зображена вольтамперна характеристика ДК, який опромінюється частотою 72 ГГц ( $\hbar\omega_2 / 2e = 149$  мкВ). На рисунку добре розрізняються стрибки струму (сходинок), що відповідають  $k=0$  та  $m=1,2,3,4$ . Ці сходинок виникають внаслідок биття першої гармоніки джозефсонівської генерації з 1,2,3,4 гармоніками падаючого випромінювання відповідно. Чим більша потужність НВЧ, тим більшу

$$I_{\pm} = I_0 j_0 \left( \frac{2eV_1}{\hbar \omega_1} \right) \sin \varphi_0 \quad (2.32)$$

Формула (2.32) означає, що під дією змінної напруги максимальний надпровідний струм крізь ДК (нульова сходинка) зменшується (адже  $j_0(x) < 1$ ). Це зменшення нульової сходинки чудово спостерігається на рис.2.20.

## 2.7. Параметрична індуктивність джозефсонівського контакту

Багато цікавих прикладів використання ДК пов'язані з інерційністю струму Джозефсона, яку можна описати еквівалентною диференційною індуктивністю  $L_D$ . Для визначення величини  $L_D$  у явному вигляді, потрібно продиференціювати (2.8) за часом та далі використати вираз (2.9)

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = VI_0 \frac{2e}{\hbar} \cos \varphi. \quad (2.33)$$

Якщо порівняти (2.33) з виразом для е.р.с. самоіндукції, маємо

$$L_D = \frac{\hbar}{2eI_0} \frac{1}{\cos \varphi} = L_{D0} \frac{1}{\cos \varphi}, \quad L_{D0} = \frac{\hbar}{2eI_0}. \quad (2.34)$$

При напрузі на контакті  $V \neq 0$  різниця фаз  $\varphi$ , та разом з нею і  $L_D$  є змінними у часі величинами. Тому, ДК уявляє собою параметричну індуктивність. У відповідності до (2.34) цій індуктивності притаманні досить незвичайні властивості, а саме:  $L_D$  в процесі модуляції може приймати, як додатні, так і від'ємні значення, при цьому глибина модуляції дорівнює нескінченності. Незвичайні властивості індуктивності призводять до того, що в ДК параметричні процеси генерації, підсилення та перетворення частоти можуть мати цілу низку особливостей. По-перше, ефекти перетворення частоти за допомогою ДК (див.2.28) можуть відбуватися з підсиленням сигналу. По-друге, на частотах  $\omega$ , що перевищують частоту джозефсонівської генерації  $\omega_D$  має місце ефект аномального імпедансу або одночастотної параметричної регенерації, який повністю відсутній у звичайних параметричних елементах [3]. Цей ефект виявляється у тому, що на частотах

$$\omega_D < \omega < \omega_D \left( 1 + \frac{4e^2 I_0^2 R_0^2}{\hbar 2\omega_D} \right)^{1/4} \quad (2.35)$$

ДК має від'ємний опір для малого сигналу частоти  $\omega$ . При цьому диференційний опір контакту  $R_D > 0$ , так що ефект не зводиться до регенерації, а обумовлений від'ємністю індуктивності.

Якщо контакт перебуває під дією постійного магнітного поля, то  $\varphi \rightarrow \varphi(z)$  і індуктивність ДК стає величиною  $L_D(z)$ , що періодично змінюється у просторі. Це означає можливість для параметричної взаємодії хвиль в ДК.