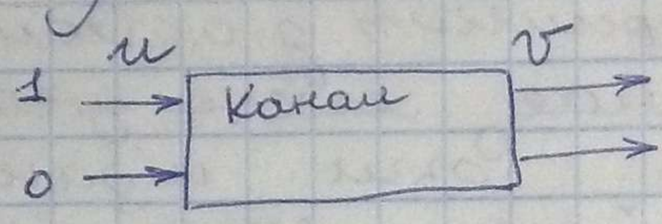
Лр.: # Баєсівська теорія оцінювання

вим. величину з експер., а намагаємося оцінити яке знач. має' другий парам., тобто $P(u|v)$ має певне значення

Лр: Розгл. канал передачі інформ. дискр.-канал (передача лише 1,0)



Вимірюючи вих. напругу, визначаємо чи на вх. була 1 чи 0.

Розгл. можливі випадки

①. нехай як у радіолокації ціль була, тобто

1 і на вих. 1

u v

$P(1|1)$ правильний прийом

② $P(0|0)$ правильний прийом

③. $P(0|1)$ – імов. пропуску ціл. сигналу.

$P(1|0)$

Запишемо ф-му Баєса

$$P(v|u) = \frac{P(v)}{P(u)} P(u|v)$$

по цій імов. відбув. оцінка

$P(v|u)$ → імов., що отримали в експерименті, як відомо

$P(u|v)$ – імов., що при прийнятому v сигнал був u

$$P(u|v) = \frac{P(u)}{P(v)} P(v|u)$$

Розгл. в граничному випадку: u і v - незалежні
u і v - функц. пов'язані

3

① u і v - <u>незалежні</u>

$P(u,v) = P(v)\,P(u)$

$P(u,v) = P(u)\,P(v|u)$ $\Rightarrow$ $\underline{P(v|u) = P(v)}$

якщо змінні незал. то ми нічого не можемо знати про u.

② $\underline{v = f(u)}$

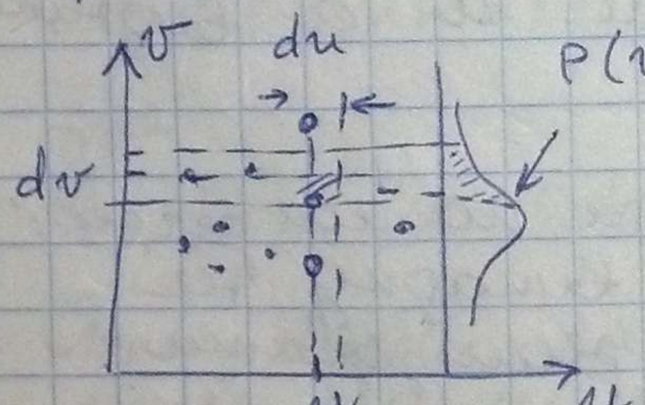
$P(u,v) = P(u)\,P(v|u) \equiv P(u)\,\delta(v - f(u))$

i) $v = u$.

Обернена задача – коли вим. дещо вел. через іншу.

Регресійний аналіз даних

Припустимо, ми вимір. обидві вел.



Діаграма розкиду точок

$\circ \to$ 1 реалізації з простору даних v, u.

Розгл. ансамбль таких експериментів в однакових умовах

маємо тогок, що вірнов. експерименту.

Нехай вимірили тепер тільки деяке u, а яке v?

u - вірнов. с-ма точок

Вимірене знач u зін. пов'язане з v (це моє припущення!). А як саму, взагал. гіперболічна →).

Розглянемо інтервал dv. Як оцінити ймов. умовну $P(v|u)$, тобто u лежить фікс. у деякому інтервалі du, ну і dv – малий. Підрахуємо число точок в інтервалі du N_u і відпов. dv $N_{v|u}$

$\frac{N_{v|u}}{N_u} \to p(v|u)$ побудуємо таку оцінку

Така оцінка наз. імовірнісною регресією

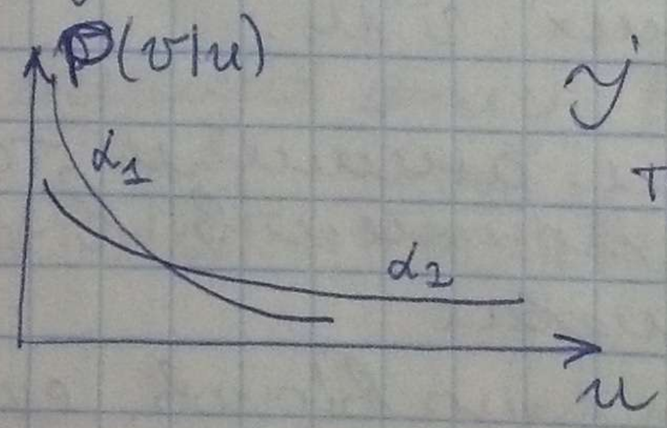
Оцінюємо за тах ймовірністю, оцінка $\tilde{v}$

Але є НЕДОЛІКИ

① Щоб оцінити вимірюну, необх. розподіл $P(v|u)$. Тобто треба провести багато експерим. з однаковим(и) об'єктом(ами), що майже нереально.

② $P(v|u) = Ce^{-\alpha(v)u}$, $u \geq 0$ $C(\alpha) = f(v)$.

Напр. такий розподіл, вим. u а визнач. хочу $\alpha(v)$

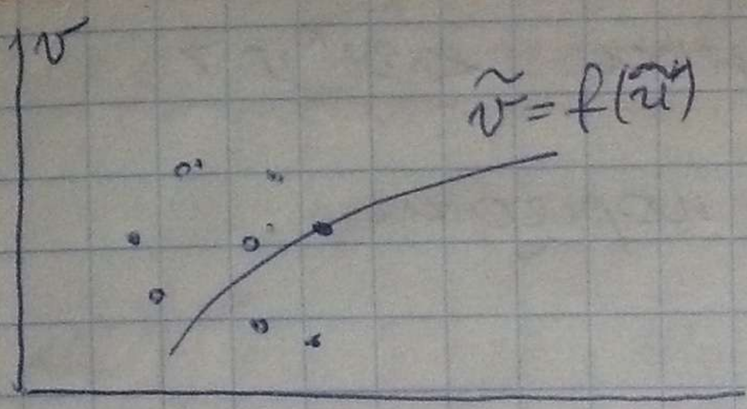


У цьому брати по лах регресії тут у ∀ випадку не можна реалізувати

Оцінимо середньоквадр. відхилення кривої регресії від експерим. даних.

Апроксимуємо вим. дані u $f(\tilde{u})$ – детермінована ф-ція

$f(u)$ – крива регресії



$$\varepsilon^2 = \langle (v-\tilde{v})^2 \rangle = \min$$

похибка

$$\langle (v-f(u))^2 \rangle = \min \Rightarrow$$

знайти f

3

Така зад. наз. варіаційна задача.

вибіркове усереднення — по вибірці (експерим.)
по імов. (теорет.)

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (v-f(u))^2 p(u,v)\,du\,dv = \min$$

підібрати таке $f(u)$, щоб був min

Треба параметризувати зад. л4.

В якості параметр. ф-ції вибирають у вигляді 23.09.13

$$f(u) = \sum_{n=0}^{N} a_n u^n,$$ і треба отримати коеф. a_n

Такий аналіз наз. поліноміальною регресією

$$\varepsilon^2 = \langle (f(u)-v)^2 \rangle = \min$$ (усередненого по $P(u,v)$)

$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_n} = 0$, $n = 0,1..N$. Такий поліном найкраще описує наші дані

Отже треба усереднити по тому розподілу який маємо експериментально. M – число вимірів, і вибираємо $N \ll M$, M-загальна кількість розподілу.

Візьмемо $f(u)=a+bu$ коли маємо лін. залежність.

$\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ і $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$

$$\varepsilon^2 = \langle (f(u)-v)^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{n=1}^{N} a_n u^n - v \right)^2 \right\rangle =$$

Отримаємо всі моменти до $2n$-порядку

Будуть знайдені моменти $\langle u^k v \rangle$

Лінійна регресія — 2гі порядки

$$\varepsilon^2 = \langle (a + bu - v)^2 \rangle$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} = 0$$

2/3

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = \langle 2(a + bu - v) \rangle = 0$$

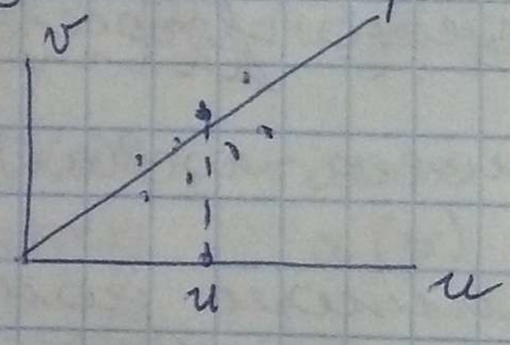
$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} = \langle 2(a + bu - v) \cdot bu \rangle = 0$$

$$\tilde{v} = f(u) = \gamma_{uv} \frac{\sigma_v}{\sigma_u} u + \left[\langle v \rangle - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} \gamma_{uv} \langle u \rangle \right]$$

коеф. кореляції

Знаходимо усереднені дані $\langle v \rangle$ і $\langle u \rangle$, розраховуємо вірогідну дисперсію.

Розглянемо граничні випадки:



Беремо, якого немає $\tilde{v}(u_i)$ то беремо середнє за регресією ξ – інтерполяція

Продовження даних – екстраполяція

1 випадок) $\gamma_{uv} = 0$ незалежні змінні $\tilde{v} = \langle v \rangle$

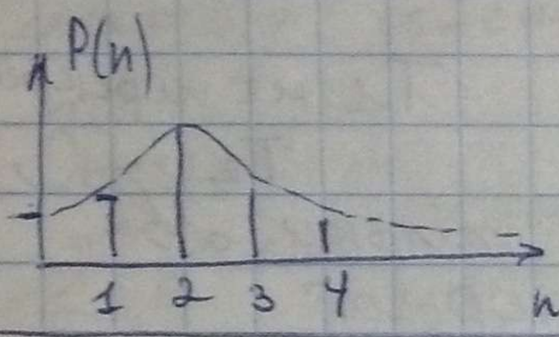
2) $v = u$ $\gamma_{uv} = 1$ $\tilde{v} = u$

$\langle u \rangle = \langle v \rangle$, $\sigma_u^2 = \sigma_v^2$

Пуассонівська випадкова змінна

приймає цілочисельні знач. від 0 до ∞

$\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad \mu_n = \overline{0,\infty}$.



Дискретний розподіл Пуассона

$$\boxed{P_n(n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}}$$

$$\chi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{isn}}_{\text{ядро перетворення для х-стичної ф-ції}} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!} = e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{is}\cdot\alpha)^n}{n!} \quad (=)$$

$$\boxed{\chi(s) \equiv e^{-\alpha}\exp[e^{is}\alpha] = \exp[\alpha(e^{is}-1)]} \text{ – х-стична ф-ція}$$

Диференціюючи по s можемо знайти моменти

$\boxed{<n> = \alpha}$ $\quad \sigma^2 = <n> = \alpha$. Цей розподіл однопараметр. (2/3) обрахувати на кл.

Отже він визнач. через середнє значення.

Для цілочисельних дійсних краще може буде введення факторіальних моментів

Фактор. моментом к-го порядку наз.

$$\boxed{\mu_k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$\mu_1 = <n>$

$\mu_2 = <n(n-1)> = <n^2> - <n> = m_2 - m_1$

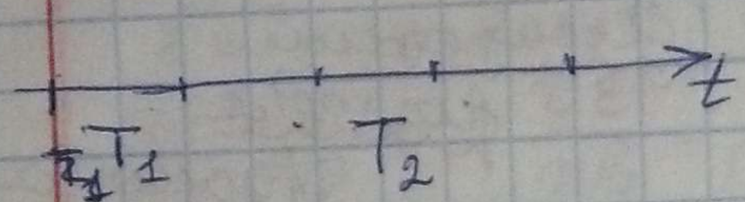
Такі моменти зручніть, оск. $\boxed{\mu_k = <n^{\underline{k}}>}$ (2/3) довести цю ф-лу.

Пр.: є деяка фіз модель, що описується цілочисельним аргументом

1. Скільки за час t на мене впаде крапель дощу? =))
2. Є вакуумний пристрій. Скільки електронів вилетить за час t. Отримуємо розподіл Пуассона.

Умови за якими отримаємо ф-р Пуассона

Як і умов. того, що за час t
виаде n крапель



$P(n,T)$. Події, що відбув в інтервалі T_1 незалежні від події, що відбув в інтервалі T_2

Умови

1) $P(n_1T_1, n_2T_2) = P(n_1,T_1)\,P(n_2T_2)$ T_1 не перекрив. T_2

2) на малому інтервалі $dT \in$ тільки 2ві ситуації: 1 поріе або жодної

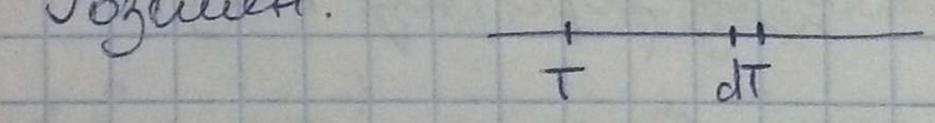
$$P(n, dT) = \begin{cases} P(0), & n=0 \\ P(1), & n=1 \\ P(n), & n>1 \end{cases}$$

3) якщо маємо справу з випадковими поріями чим більше dT тим більше шансів, тобто

$P(1, dT) = \lambda dT$; $P(0, dT) = 1 - \lambda dT$.

якщо ці умови вик. (завжди) розгл. ф-р Пуассона

Розмкнем.



$P(n, T+dT) =$

$P(n+1, T+dT) = P(n,T)\,P(1,dT) + P(n+1,T)\,P(0,dT) =$

неуспішні поріі

$= P(n,T)\,[\lambda dT] + P(n+1,T)\,[1-\lambda dT]$

λ - пов'язана з інтенсивністю поріі (доведу)

$$\frac{P(n+1,T+dT) - P(n+1,T)}{dT} = P(n,T)\lambda - P(n+1,T)\lambda$$

Отримуємо диференційно різницеве р-ня

$$\boxed{\frac{dP(n+1,T)}{dT} = \lambda [P(n,T) - P(n+1,T)]}$$

Щоб знайти р-зок р-ня через $P(n+1,T)$ можна вик. ітераційний метод або см II. - метод х-стичних ф-цій.

Знайдемо х-стичну ф-цію

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{is(n+1)} \frac{dP(n+1,T)}{dT} = \lambda \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{is(n+1)} P(n,t) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{is(n+1)} P(n+1,T) \right]$$

$$\begin{cases} \frac{d\chi(s,T)}{\partial T} = \lambda \left[e^{is} \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} P(n,t) - \gamma \chi \right. \\ n+1=k \\ n=k-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{isk} \frac{dP(k,T)}{dT} = \lambda e^{is} \chi(s,T) - \underbrace{\sum_{k=0} e^{isk} P(k,T)}_{\chi(s)}$$

$$\frac{d\chi(s,T)}{dT} = \lambda \chi(s,t) [e^{is} - 1]$$

Пуассонє.

$$\frac{d\chi(s,T)}{dT} = \lambda \chi(s,T) [e^{is} - 1]$$

$$\chi(s,T) = e^{[\lambda e^{is} - \lambda] T} = e^{\lambda T [e^{is} - 1]}$$

$c=1 \quad \langle n \rangle = \lambda T$

$$\frac{dP(n+1,T)}{dt} = \lambda [p(n,T) - p(n+1,T)]$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} e^{is(n+1)} \frac{dP(n+1,T)}{dt} = \lambda \sum_{n=-1}^{\infty} e^{is(n+1)} P(n,t) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{is(n+1)} P(n+1,T)]$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=-1}^{\infty} e^{is(n+1)} p(n+1,T) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} P(k,T) = \frac{d}{dt} \chi(s,T).$$

$n+1=k$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{is(n+1)} p(n,T) = e^{is} \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} p(n,T) = e^{is} \chi(s,T)$$

$p(-1,T) = 0$. за умі.

$$\frac{d\chi(s,T)}{dt} = \lambda [e^{is} - 1] \chi(s,T) \qquad \chi(0,T) = 1$$

$$\chi(s,T) = \exp [\lambda t (e^{is} - 1)]$$

$$\boxed{\langle n,T \rangle = \lambda T}$$

Фізичний зміст $\boxed{\lambda = \frac{\langle n,T \rangle}{T}}$ число подій на інтервалі T де $\langle n,T \rangle$ число подій за одиницю часу.

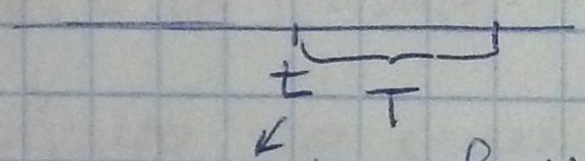
(2/3)

31 В наших умовах $\lambda = const$. А якщо $\lambda = \lambda(t)$ - відома ф-ція змінна у часі

$P(n,T,t)$ t - початок інтервалу.

32 λ - випадкова змінна

$\lambda = \lambda s$ - ?



$P(n,T)$ - ?

Нормальний розподіл або Гаусівський розподіл

Розглянемо $\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n = u}$, якщо мають місце умови:

Кожна u_n - якась випадкова змінна

1. u_n - незалежні змінні
2. N - достатньо багато
3. Кожна змінна розподілена рівномірно, але однаково.

④. дисперсія кожної з величин $\sigma_{u_n}^2 < \infty$

Тоді розподіл є нормальним

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(u-\langle u\rangle)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Гаусівський (нормальний) розподіл

σ^2 – дисперсія

Зауваження: 1) Випадковість обмежена законом. Отже нічого не знаємо про самі випадки, а можемо сказати, що розподіл тут всюди Гаусівський.

$\langle n,T\rangle$

2) А що, якщо ці умови не всюди, або виконуються не точно.

Коли $N \geq 10$, то похибка обчислення за цією ф-лою МЕНШЕ 5%. Отже можна користуватися.

3) А що, якщо всі дисперсії розподілені не однаково.

Тоді можна користув. цією дал., якщо дисперсії $i = 1, \dots n$ щоб сумарна дисперсія кожного конкретного розподілу давала суттєвий внесок у дисперсію.

4) B фізиці $\overline{\delta u_i^2} < \delta$ і такими бути не можуть.

4) Якщо НЕ ВИК умова незалежності, тоді розподіл НЕ вик.

Ми можемо розширити гаусівські багатовимірні.

Напр. розмірність ≥ 1 випадк. напруженість магнітного і т.д. поля.

$u = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}\}$ і як буде розподілено $u_1; u_2$ $\sum_i u_1^{(i)}$.

Тоді розподіл буде багатовим. гаусівський розподіл.

$P(u_1, u_2, \dots u_n)$. А ми запишемо не самі розподіли, а х-стичну ф-цію

х-стична ф-ція багатовимір. гаусів. дійсної

$$\boxed{\chi(s_1, \dots s_N) = \exp\left[i \sum_{n=1}^{N} s_n \langle u_n \rangle - \frac{1}{2} \sum_n \sum_m s_n s_m G_{nm} \right]}$$

G_{nm} – коваріаційні вел.

Воно більш зручно, оск. безпосередньо вкорсть фіз. вимірення.

$P(u_1 \dots u_N) \sim D$

D – визначник матриці $\hat{G}$

$\hat{G} = \{G_{nm}\}_{n,m=1}^{N}$

$D_{n,m}$ – мінор матриці G

У випадку

① $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle = \langle u \rangle = 0$, $\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = \sigma^2$

$$\boxed{P(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left[- \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\gamma u_1 u_2}{2\sigma^2\sqrt{1-\gamma^2}} \right]}$$

γ – коеф. кореляції u_1, u_2

Вла

①

②

Тр

$n =$

δ_n

χ

$=$

T:

$=$ t

a

Власт. розподілу.

① гаусів. нормальні змінні х-дують своїми моментами 1го і 2го порядку. Х-дуються скінченого порядку моментами.

② гаусів. змінні, що є некорельовані воєни не незалежними

Припустимо, що змінні некорельовані $G_{n\neq m}=0$.

$n=m \qquad G_{nn} = \langle (u_n - \langle u_n \rangle)^2 \rangle = \sigma_n^2$

$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases} \qquad \boxed{\overline{G_{nm}} = G_{nn} = \overline{\sigma_n^2 \delta_{nm}}}$

$$\chi(s_1,\dots s_N) = \exp\left[i \sum_{n=1}^{N} s_n \langle u_n \rangle - \frac{1}{2} \sum_{n}^{N} s_n^2 \sigma_n^2 \right] =$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \exp\left[i s_n \langle u_n \rangle - \frac{1}{2} s_n^2 \sigma_n^2 \right] =$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \chi(s_n) \longrightarrow p(u_1,\dots u_N) = \prod_{n=1}^{N} p(u_n)$$ а це і є однакового стат. незалежністю.

Т:
= ∀ лін. комбінація гаусів. змінних є також гаусівською змінною.

$$V = \sum_{n=1}^{N} a_n u_n$$, треба довести, що розподіл V має вигляд нормального розподілу.

a_n – константи

$$\chi_V(s) = \langle e^{isv} \rangle_{\{v\}} = \langle e^{is \sum_{n=1}^{N} a_n u_n} \rangle_{\{u_n\}}$$

$\{u_n\}$ – гаусівські змінні

$s_n = a_n \cdot s$

$\chi_V(s) = \langle e^{is \sum_{n=1}^{N} s_n u_n} \rangle_{\{u_n\}}$ – це і є х-стична багатовим. ф-ція гаусів. змінної

$$\chi_V(s_1 \dots s_N) = \exp\Big[i \sum_{n=1}^{N} a_n s \langle u_n \rangle - \frac{1}{2} \sum_{n,m}^{N} a_n a_m s^2 G_{nm} \Big]$$

Введемо позначення.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \langle u_n \rangle = \langle V \rangle$$

$$\sum_{n,m=1}^{N} a_n a_m G_{nm} = \sigma_V^2$$

$$\boxed{\chi_V(s_1 \dots s_N) = \exp\Big[i \langle V \rangle s - \frac{1}{2} \sigma_V^2 s^2 \Big]}$$

Випадкові процеси

Процес — щось, що протікає у часі.

Розглянемо процес $u(t)$. Як його описати випадкову ф-цію? З іншого боку це є ф-ція, а не деяке число.

Все що сказано про випадкові процеси, можна узагальнити на випадкову ф-цію $f(E)$, E-рівномірно.

Випадковий процес

Лб

14.10.13

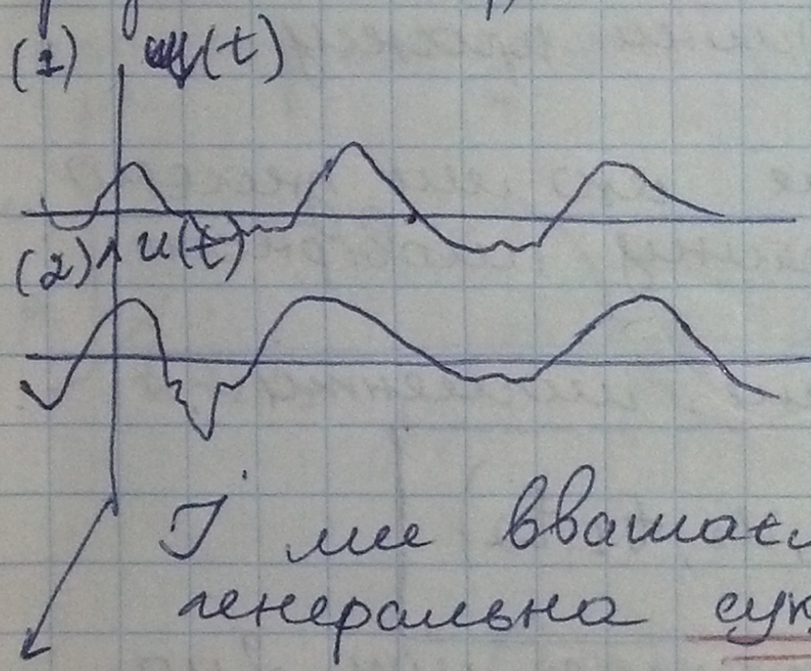
Напр., що показує осцилограф. $u(t)$

О випадкового процесу :

карт. на множ. напрузі не є випадк. процесом
A є визначена ф-ція

$u(t)$
дуже часто $\vec{t}$ замість t.
все вірноситься і до $\forall$ випадкової ф-ції"

"Нехай результатом експерименту є детермінована ф-ція. Це реалізація (одна з реалізацій) випадкового процесу (Вим. резистор при $t\uparrow$ для різних вимір)



Сукупність нескінченої ск к-сті реалізацій –

– генеральна сукупність.

І ми вважаємо що випадковий процес це генеральна сукупність всіх реалізацій вип. процесу.

де не є
випадк. процесом – вип процес це сук. реалізацій !!

Зафіксуємо деякий час t_1.

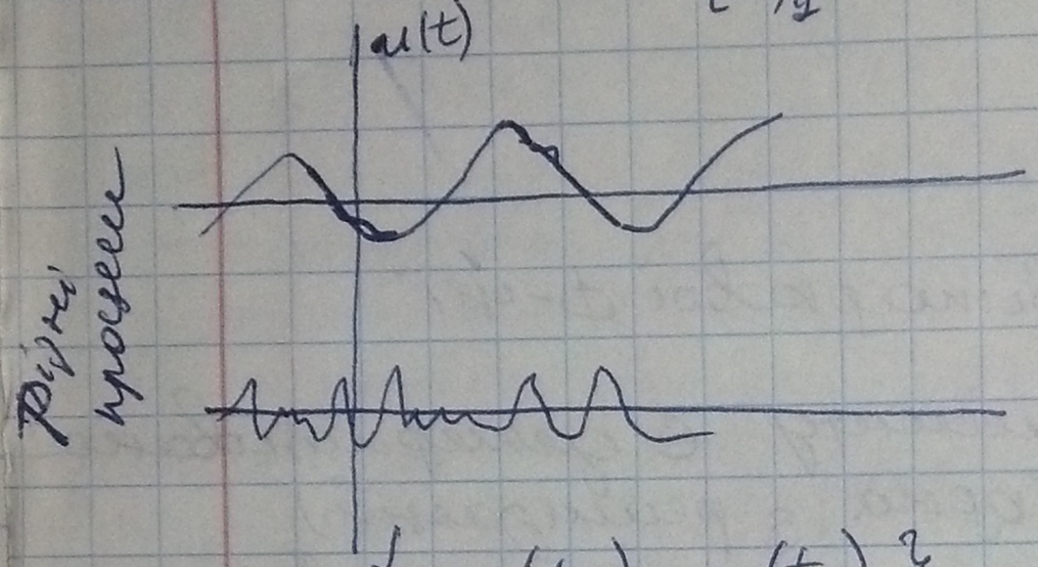
(1)
(2) $u(t_1)$ $u(t_1)$ для першої реалізації. Отримаємо ∞ к-сть (дійсних)! Користуватимемо випадкових дійсних. Аподійної закони роз. вип.

$\{u(t_1)\}$ і є густина розподілу $p(u, t_1)$

$\langle u(t_1) \rangle$ - середнє значення в час t_1 в різних реаліз.

$\overline{u(t)}$ — усереднення по часу в одній реалізації"

$$\overline{u(t)} = \lim_{T \to \infty} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t)\, dT$$



Напр. для таких ф-цій сер. значення по вертикалі приблизно однакові.

Тому для того щоб охарактеризувати ці процеси, цього не достатньо

$\{u(t_1); u(t_2)\}$ - двовимірна випадкова змінна вона дає інф. про швидкість зміни процесу.

$P(u_1, u_2; t_1, t_2)$, де вважається що ми знаємо 2х вим. густину ймовірності в ∀ моменти часу.
Ми можемо будувати двовим. моменти.

$$\boxed{G(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 du_2\, u_1 u_2\, p(u_1, u_2, t_1, t_2)}$$

Кореляційна ф-ція — кореляція між двома значеннями u_1 і u_2

Побудуємо $p(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3\}$

$p(u_1 \dots u_N; t_1 \dots t_N)$

О: випадковий процес вважається строго заданим, якщо такі густини імов. вірогідності для всіх N і для всіх t.

Нехай $\in t_1$: $P(u_1 u_2 u_3; t_1 t_2 t_3)$

О: випадковий процес вважається строго заданим якщо такі $P(u_1 \dots u_N t_1 \dots t_N)$ імовірності відомі для всіх N і для всіх t.

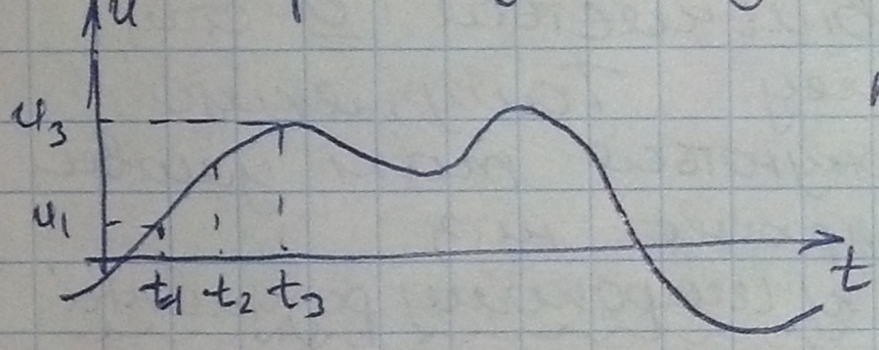
$I(t) = |u(t)|^2$ $\boxed{< I(t_1) I(t_2) >}$ - момент 4-го пор.

Підхід до випадкової ф-ції дещо інший ніж до детерм. Детерміновану ф-цію ми можемо описати статистично. Якщо процес детермінований, то всі його реалізації однакові.

$f(t)$ - детермінов. $P(u,t) = \begin{cases} 1 & u \text{ в момент } t \text{ співп. з } f \\ 0 & u \text{ не співпадає в те саме } t \end{cases}$.

$\boxed{P(u,t) = \delta(u - f(t))}$

Типова реалізація дискретного процесу



проміжки t_1, t_2, t_3 ми можемо брати довільно як завгодно малі. Тому якщо ми визначемо багато точок u, то можемо вважати, що ми знаємо як веде себе ф-ція в цих точках.

Стаціонарні і не стаціонарні випадкові процеси

Розгл. кореляційну ф-цію $< u(t_1) u(t_2) >$.

О: строго стац. випадковий процес - процес в якому жодна статистична характеристика не залежить від вибору початку відліку часу.

$P(u_1, \dots u_N, t_1 \dots t_N) = P(u_1 \dots u_N, t_1 \dots t_N)$

всі одновимірні х-стики такого процесу не зам. від часу

$$P(u_1, t_1) = p(u, t_1+T) = \left\{ \begin{array}{c} \text{нехай} \\ T = -t_1 \end{array} \right\} = P(u_1, 0)$$

$$\langle f(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) f(u) du$$ двічі видно, що $\forall$ одновим. х-стики не зам. від часу

Двовим. х-тики зам. не окремо від t_1 і t_2, а від $t_2 - t_1$

$$P(u_1 u_2 ; t_1 t_2) = P(u_1 u_2, t_1+T, t_2+T) = \{-t_1 = T\} =$$

$$= P(u_1 u_2 ; 0, t_2 - t_1) \Rightarrow \boxed{G(t_1, t_2) = G(t_2 - t_1) = G(\tau)}$$

Важливі висновки $\Rightarrow G(t_1 t_2)$, $\langle u(t) \rangle$, $\sigma^2(t)$, $\gamma(t_1, t_2)$ з яких наз. висновки Маркова бел.

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle u(t) \rangle = const \\ \sigma^2 = const \\ G(t_1, t_2) = G(t_2 - t_1) \end{array}}$$

це ознаки стаціонарного процесу, але це не задовільняється $\underline{\underline{O}}$ стац. процесу. Тому, якщо виконуються такі умови то процес наз. стаціонарні у широкому розумінні

Гаусівський випадковий процес стаціонарний у широкому розумінні є стац. процесом.

Щоб процес був ергодичним він повинен бути:

1. стаціонарним (необхідно)

$$\overline{u(t)} = \lim_{T\to\infty} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t)dt \quad \text{не зал. від } t.$$

Нехай є процес $u(t)$ - стаціонарний і ергодичний, тобто для к-ї реалізації $\overline{{}^{(k)}u(t)} = \langle u(t) \rangle$

Визначимо $V(t) = u(t) + \mathcal{E}$ $\mathcal{E}$ - випадкова const, в кожній реалізації різна

${}^{(k)}V(t) = {}^{(k)}u(t) + {}^{(k)}\mathcal{E}$ - стаціонарний процес не зал. від часу.

Але чи є він ергодичним

$$\overline{{}^{(k)}V(t)} = \overline{{}^{(k)}u(t)} + {}^{(k)}\mathcal{E}$$

ак. ергодики $\parallel$ $\not=$

$$\langle V(t) \rangle = \langle u \rangle + \langle \mathcal{E} \rangle$$

Отже процес стаціонарний але не є ергодичним

Припустимо що ${}^{(k)}\mathcal{E}$ const в к-й реалізації може мати 2 значення 0 або 1

$$\langle \mathcal{E} \rangle = 0{,}5 \qquad {}^{(k)}\mathcal{E} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$ Отже кожна реалізація, яка є в такому процесі не є типовою для всієї реалізації.

Для того, щоб процес був ергодичним.

необхідно, щоб всі його реалізації були типовими, тобто $\$ \in$ типового для всіх реалізацій.

Але як переєвірюється в тому, що процес буде все таки ергодичним?

Розглянемо стац. процес: $\langle u(t) \rangle = \overline{u(t)}$

Розгл. кореляційну ф-цію $G($

Умовою ергодичності (необхідна умова)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau)|^2 d\tau < \infty$$

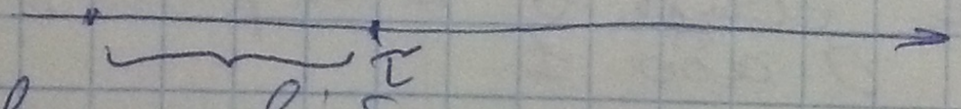
Збіжність інтегралу означає, що ф-ція мав.

$$\frac{\text{спадає}}{|G(\tau)|^2} \text{ повинна спадати} \longrightarrow O\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

швидше ніж

$$\overline{|G(\tau)|^2} \to O\left(\frac{1}{\tau}\right)$$ умова збіжності інтегралу.

А отже виміри в часі 0 і τ між собою не далекими. Вони є лінійно незалежними.



все що відбулось не впливає на наступні

Треба розбити на мін некорельовані групи напр. від 0 до τ.

Задача

Чи є процес ергодичним?

$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A рівномірно розподілена в інтервалі 0 до 1
φ — " — в 0 до 2π.

Чи є цей процес є стаціонарним і ергодичним у розширеному сенсі?

$\langle u(t) \rangle \stackrel{?}{=} \overline{u(t)}$.

$\overline{u(t)}$

Всі процеси в природі утв. клас. процесів.

Чим займається кореляційна теорія

$\begin{cases} \langle u(t) \rangle ; \sigma^2(t) \\ G(t_1, t_2) ; \gamma(t_1, t_2) \end{cases}$ дисперсія

Властивості кореляційної ф-ції для стаціонарного випадкового процесу.

(або умовно локально стаціонарні, в деякому проміжку)

$G(t_1, t_2) = G(t_2 - t_1) = G(\tau)$

Розширення $G(t,t) = \langle |u(t)|^2 \rangle = \langle I(t) \rangle$.

інтенсивність випадкового процесу

$$\gamma = \frac{G(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\,\sigma(t_2)}$$

Кореляційна ф-ція описує упорядкованість процесів.

Властивості:

① Симетрія кореляц. ф-ції

$$G(t_1, t_2) = G^*(t_2, t_1)$$

$$G(t_1, t_2) = \langle u^*(t_1)\, u(t_2) \rangle^* = \langle u(t_1)\, u^*(t_2) \rangle = G(t_2, t_1)$$

Виберемо послідовність $t_1, \dots t_N$

$G_{ij} = G(t_i, t_j)$. Визначимо матрицю

$$\hat{G} = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} \dots & G_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & G_{NN} \end{Bmatrix}$$ Кореляційна матриця.

$\hat{G} = \tilde{G}^* = G^+$ ермітова матриця.
транспонована

Для ермітової матриці вона може бути діагоналізована

$$\hat{G} = \begin{Bmatrix} g_1 & & 0 \\ & g_2 & \\ 0 & & g_N \end{Bmatrix}$$

$g_i = g_i^*$ - дійсні

②

$$|\gamma(t_1, t_2)| \leq 1$$

$$|G(t_1, t_2)| \leq \sqrt{G(t_1, t_1)\, G(t_2 t_2)}$$

$\boxed{|G(\tau)| \le G(0)}$ для стаціон. процесу.

$\boxed{|\gamma(\tau)| \le 1}$

$\sum_{n=1}^{N} a_n u(t_n)$, a_n - не є випадковими, комплексні

$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n u(t_n) \right|^2 \ge 0$

$< \sum_{n,m=1}^{N} a_n^* u^*(t_n) \cdot a_m u(t_m) > \ge 0$

$\sum_{n,m=1}^{N} a_n^* a_m < \underbrace{u^*(t_n) u(t_m)}_{G(t_n,t_m)} > \ge 0$

$\boxed{\sum_{n,m=1}^{N} a_n^* a_m G(t_n,t_m) \ge 0}$, де $\forall\, a_n, a_m$

квадратична форма така над. невір'ємно визначена

$G(t_n,t_m) = G_{nm}$ - невір'ємно визначена матриця.

② Кореляційна матриця не тільки ермітова, отже невід'ємно визначені

$g_n \ge 0$ - спектр (елементи) кор. матриці є дійсними і невід'ємними.

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t) f(t') G(t,t') \ge 0}$

$f(t), f(t')$ - довільні невипадкові ф-ції, щоб

$G(t,t')$ - ядро співвіднош., ермітове і невід'ємновизнач.

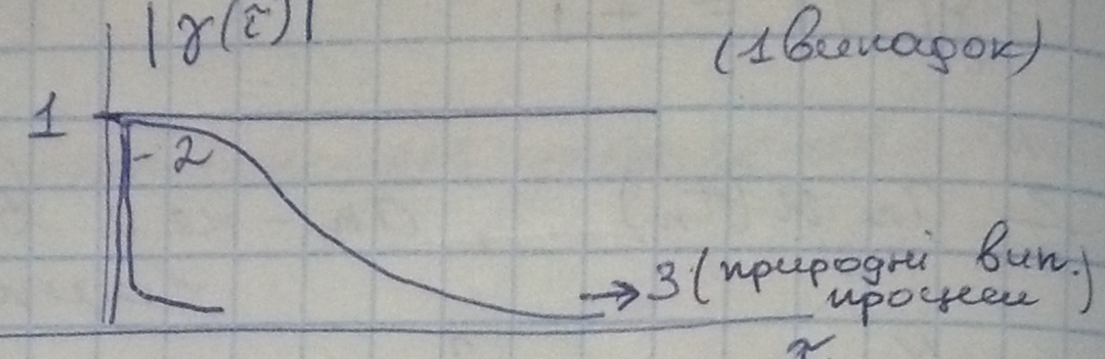
Доводиться аналітично.

Розглянемо випадок локально стац. процесу і часову поведінку кореляційної ф-ції.

$|G(\tau)| \le G(0)$

$|\gamma(\tau)| = |\gamma(-\tau)|$

$|\gamma(\tau)| \le 1$



∀ випадки

1) $|\gamma(\tau)| = 1$ випадковий процес дуже упорядкована і всі знач. реалізації зв'язані між собою лінійно.

$u(t) = A e^{-i(\omega t + \varphi^{(k)})}$, A, ω = невипадкові const

комплексний процес φ - випадкова величина

$G(t_1, t_2) = |A|^2 e^{-i\omega(t_2 - t_1)} \cdot e^{-i\varphi \cdot i\varphi} >$

1 ✓

~~(не)~~ $G(t_1, t_2) = |A|^2 e^{-i\omega|t_2 - t_1|}$ – процес стац, бо залежить лише від $t_2 - t_1$.

$|\gamma(\tau)| \equiv 1$

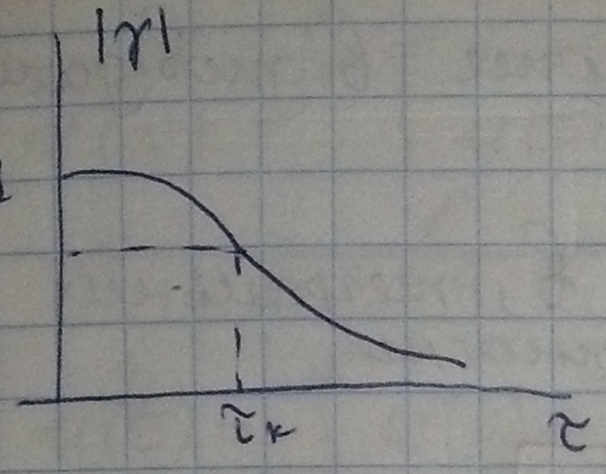
$|e^{i\alpha}| = 1$

$\boxed{|G(\tau)| = |A|^2}$

когерентний випадковий процес

З точку зору фізики, ск ми розглядаємо різну фазу, а не окремою фазою, вони не відрізняються.

Тобто процес у якого всі реалізації "відрізняються одна від одної" скінченим (лінійним) параметром наз. детермінованим випадковим процесом



Час когерентності випадкового процесу.

Л8

22.10.13

1) час за який коеф. кореляції падає вдвічі

2) Але більш зручно визначати як час, за який падає в 1/e.

3) В оптиці вважається, що видно на рівні 1/10.

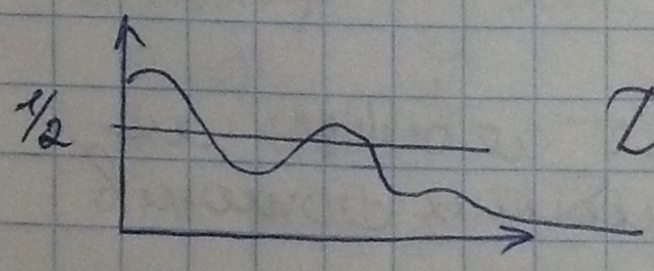
Контраст сприймається інтерференції в оці 1/10 контрасту.

Коеф. кореляції $|\gamma|$ – визначає безпосередньо контраст інтерференційної картини.

Проаналізуємо випадок:

$|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$ але ж ми сказав, що $\gamma(t)$ - є монотонною ф-цією?

Де час когерентності??



Взагалі беруть по перших нах. Але можна казати що при дуж тах наш випром. когерентне.

x-терна для випадку випром. лазера

На якій відстані можна отримати голограму?

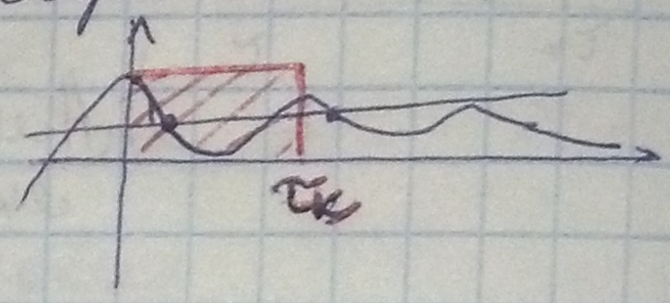
$l_к = c\tau_к$

для того щоб хв. були когерентними потрібно щоб відстань, що пройшли (різниця ходу) опорних і променів від об'єкту не перевищували відстань $l_к$.

Але $\tau_к$ при другому max може відповідати більшій відстані.

В фіз. прийнято два підходи в інтегральних визнач. часу когерентності

1) $\tau_к = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau$



оск.
$|\gamma|$ - симетрична ф-ція

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau$, $\tau_к = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau}{|\gamma(\tau)|^2_{-\infty}}$

Визначимо $\rho(\tau) = \frac{|\gamma(\tau)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau}$ і введемо до цієї ф-ції

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \rho(\tau) d\tau$ $\boxed{\tau_к = \sigma}$ час когерентності

Ці 2ві х-стики ф-ції у випадку складного х-тер $|\gamma(\tau)|$

σ^2 - безпосередньо х-ує таке явище як фотоефект, кількість вибитих фотонів.

Спектральний аналіз випадкових процесів.

Спектром будь-якої ф-ції $u(t)$ є перетворення Фур'є

$$\tilde{u}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{i 2\pi \nu t}\, dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu)\, e^{-i 2\pi \nu t}\, d\nu$$

Спектр Фур'є

(амплітудний спектр Ф-ф'є $u(t)$)

Має є 2ві проблеми для випадкових процесів.

① перетвор. Ф. існує лише тоді, коли ф-ція $u(t)$ є квадратично інтегровною.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty$$

Сам. вип. процес ($\forall$ реалізації), тоді така реалізація не задовольняє.

② Припустимо, що у нас такий процес, що виконується $\int_{-T/2}^{T/2}$ ум. $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty$. і ми відкинемо ми відкинемо $\int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt < \infty$ і ми отримаємо спектр для кожної реалізації.

$\{^{(k)} u(t)\} \longrightarrow \{^{(k)} \tilde{u}(\nu)\}$ для такого переходу нам треба знати

k-реалізацій

як $p(u) \to p(\tilde{u})$ але таке практично НЕМОЖЛИВО визначити.

Поняття спектр випадкового процесу довго не існувало (до кін. 40рр XIX ст.)

Вінер і Хінчин (Союз СРСР)

Спектр Вінера.

Розглянемо 2 типи детермінованих процесів.

1т. процес обмеженої енергії

$u(t) = A\sin\omega t$. якщо розглядати

$|u(t)|^2 = I(t)$ - інтенс. якщо розгл. енергію

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = W = \infty$$

у нашому випадку 1 гіпотезу

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = W < \infty .$$

2т. сигнал зі скінченною інтенсивністю.

$$|u(t)|^2 = I(t) < \infty$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = \overline{I} < \infty$$ для $\forall$ проміжку t.

Чи можна визначити відповідний спектр інтенсивності чи енергії (по аналогії).

1. це спектральна ф-ція має мати власт.

спектр $S(\nu) \geq 0$ невід'ємний

2. $\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\, d\nu = W$ повна енергія.

3. $S(\nu) \sim |\tilde{u}(\nu)|^2$ (тобто або інтенсивності або енергії)

Розглянемо

1. Рівність Парсеваля.

для тих ф-цій, для яких існує перетвор. Фур'є

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\nu)|^2 d\nu$$

Рівність Парсеваля

$W = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\nu)|^2 d\nu$ — енергія сигналу.

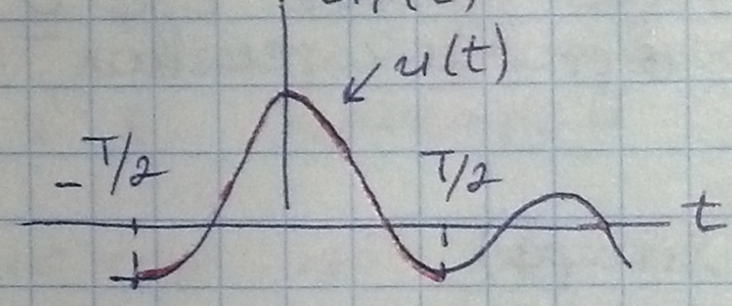
Одне для сигналу $u(t)$

$$S_W(\nu) = |\tilde{u}(\nu)|^2$$

спектр Вінера для сигналів зі скінченною енергією

Для того, щоб розгл. стаціон. процесів, який відноситься до 2ї групи.

II. Розгл. ф-цію $u_T(t) = \begin{cases} u(t), & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & |t| \ge T/2. \end{cases}$



$$\tilde{u}_T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t) e^{-i2\pi\nu t}$$

Отже має місце теорема Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |u_T(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}_T(\nu)|^2 d\nu$$

$$I = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}_T(\nu)|^2 d\nu\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |u_T(t)|^2 dt.$$

середня потужність.

$I =$ lim (")

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |\tilde{u}_T(\nu)|^2 d\nu$$

Спектр інтенсивності для процесу зі скінченною інтенсивністю

$$\boxed{S_I(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}_T(\nu)|^2 d\nu}$$

Великая фазова проблема:

в спектрі не розміщ. фазу, чи можна вирах. фазу знаючи лише спектр?

19
29.10.13

Ці ф-ли, що ми записали вик. для певної реалізації. Тепер для випадкового процесу (усереднивши все по реалізаціях)

Для процесу з фіксованою енергією

$$E_w(\nu) = \langle |\tilde{u}(\nu)|^2 \rangle$$

$$S_I(\nu) = \left\langle \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |u_T(\nu)|^2 \right\rangle$$ В спектрах Вінера фаза зникає і да $\underline{\underline{0}}$ цих величин не можна відновити сигнал.

Теорема Вінера–Хінчі (? Хітчера)

Розширяємо наше спектр інтенсивності

$$S(\nu) = \left\langle \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |u_T(\nu)|^2 \right\rangle$$

$$\tilde{u}_T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t) e^{i2\pi\nu t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, u(t)\, e^{i2\pi\nu t}$$

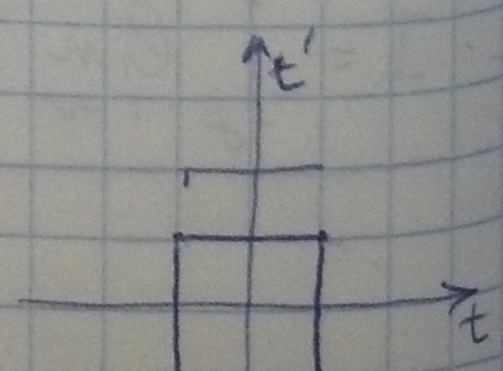
$$S(\nu) = \left\langle \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, u_T^*(t)\, u_T(t')\, e^{-i2\pi\nu t} e^{i2\pi\nu t'} \right\rangle =$$

$$= \left\langle e^{i2\pi\nu(t'-t)} \right\rangle = \left\langle \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt'\, u^*(t)\, u(t') \right\rangle \quad (=)$$

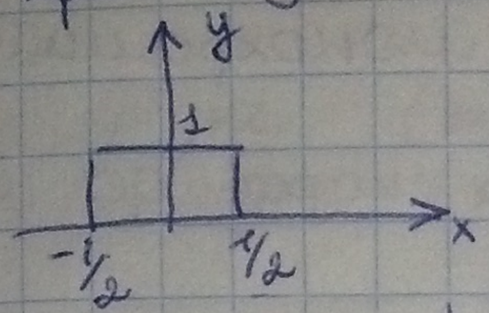
$$G(\tau) = \langle u^*(t)\cdot u(t') \rangle$$

$$(=) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle u^*(t)\, u(t') \rangle e^{i2\pi\nu\tau} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-}^{+} dt \int_{-}^{+} dt'\, G(t'-t) e^{i2\pi\nu(t'-t)} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t'}{T}\right)$$



Ф-ція прямокутника $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$



$u_T(t) = u(t)\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Перейдемо до $\begin{cases} \tau = t' - t \\ t = t \end{cases}$ $\quad t' = t + \tau$

$$S(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dt \ \ldots = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, G(\tau) e^{i2\pi\nu\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$$

I″

$$\boxed{S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau}$$

Теорема Вінекера для випадкового процесу.

спектральне перетворення Фур'є кореляц. ф-ції і є спектром Вінера для випадкового процесу.

Для того, щоб ці ф-ції вик. потрібно, щоб $G(\tau)$ мала перетворення Фур'є. Для цього необх. щоб воно було квадратично інтегровною

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau)|^2 d\tau < \infty \qquad \lim_{\tau\to\infty} |G(\tau)|^2 = o\left(\frac{1}{\tau}\right)}$$

вик. те що воно менше $\frac{1}{\tau}$.

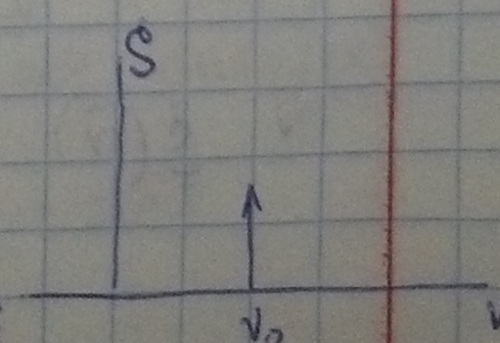
Для виконання збіжності

Для $G(\tau) = 1$ $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu\tau} d\tau = \delta(\nu)}$ дельта ф-ція Дірака

Коеф. кореляції $|\gamma(\tau)| = 1$ то це абсолютно когерентний процес.

$$G(\tau) = G_0 e^{-i2\pi\nu_0\tau}$$

$$\boxed{S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0 e^{-i2\pi t(\nu-\nu_0)} d\tau = G_0 \delta(\nu - \nu_0)}$$



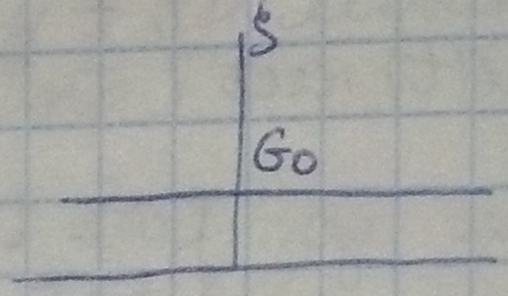
монохроматичні

Абсолютно когерентний процес - монохроматичний

Якщо кореляц. процес миттєво спадає до нуля (абс. некогерент. процес)

$$G(\tau) = G_0 \delta(\tau)$$

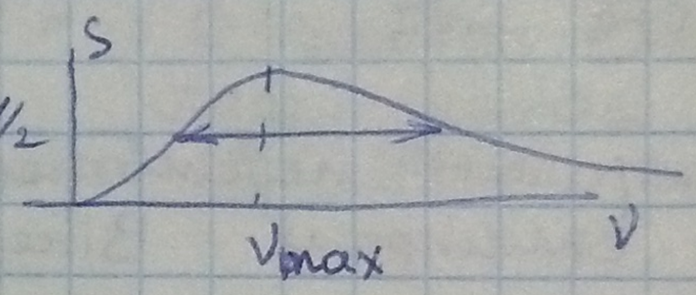
$$S(\nu) = G_0 \int_{-}^{+} \delta(\tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau = G_0$$



Ця так само модельний випадок. Такий процес — білий шум (≡ некогерентний процес)

Розглянемо вектор АЧТ.

$$S(\nu) \approx \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} + 1}$$



$\nu_{max} \sim 10^{15} T_y$ $T = 6000\,^\circ C$

$\Delta\nu \sim 3\nu_{max}$. Але ∀ прилад спектр детектування набагато менше ніж $\Delta\nu$. Тоді для такого вузького (спектру) інтервалу спектр буде рівномірним.

Тому вектор АЧТ буде білим шумом

$$G(\tau) = G_0 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}}$$

Ф-ція має вигляд (Але не Гаусівський процес)

Гаусівська кореляційна

$$G(\tau) = G_0 e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}}$$

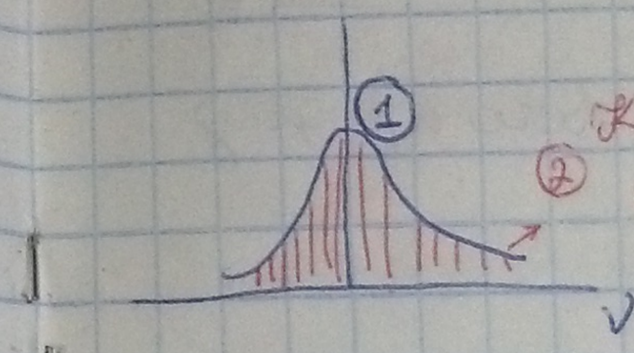
$S(\nu)$ для такої $G(\tau)$ -

1) $G(\tau)$ - Лоренцівський спектр

2) $G(\tau)$ - Гаусівський спектр

Існують 2 види уширення спектральних х-стик:

① однорідне (коли всі атоми уширюються однаково)
② неоднорідне (коли атоми випромінюють ідеально, але на різних частотах).



Для ① Лоренцівський спектр
② Гаусівський спектр.

Спектр періодичного випадкового процесу.

О: вип. процес, кореляційна ф-ція якого має вигляд наз. періодичним

$$\boxed{G(\tau) = G(\tau + nT)}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$
T - фіксоване

$$\langle |u(t) - u(t+nT)|^2 \rangle = 0$$
реалізація

$$\langle u^*(t)u(t)\rangle + \langle u^*(t+nT)\cdot u(t+nT)\rangle - \langle u^*(t)u(t+nT)\rangle -$$
$$-\langle u(t)\cdot u^*(t+nT)\rangle$$
$$G(0) + G(0) - G(nT) - G(-nT) = 0.$$

Тоді для кожної реалізації $u(t) = u(t+nT)$.

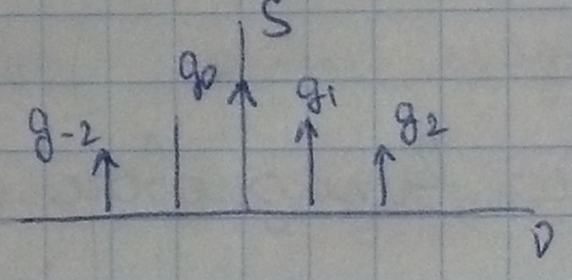
А який спектр цього процесу.

Розглянемо $G(\tau)$ періодична ф-ція $\Rightarrow$ спектру Фур'є немає, а сума Фур'є є (розподіл)

$G(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{-\frac{n\tau 2\pi}{T}}$ і підставимо у ф-му Вінекера - Хінчіна

$$\boxed{S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu\tau(\nu - \frac{n}{T})} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \delta(\nu - n\nu_0)}$$

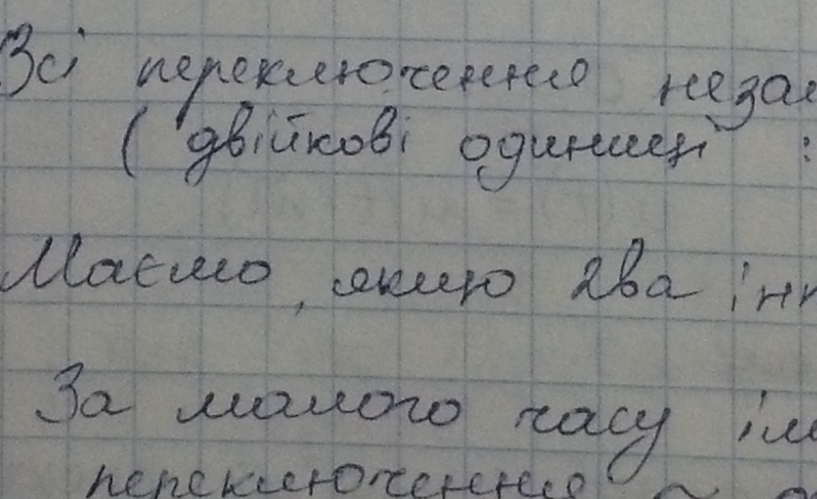
Тобто спектр періодичного випаркового процесу є дискретним.



Спектр телеграфного сигналу

Лю

5.11.13



Основна частота сигналу – середня к-сть перекидань

Сигнал випарковий – ск. перекидання випарковi

$2c^{-1}$

Знаходимо Т. Вінера - Хінчіна : ① Знайдемо кореляційну ф-цію (для випарковго процесу, а не ансамблю реалізацій)

1) Всі перекидання незалежні & один від одного. (двійкові одиниці : 1 і -1)

2) Маємо, якщо два інтервали

3) За малого часу імов. того, що на ній буде перекидання ~ довжині (тобто ~ часу) а імов. подвійного перекидання дор. нулю

Отже маємо справу з Пуассонівським процесом

$$P(n,T) = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

за час T буде рівно n-перемикачів

$$\lambda T = \langle n,T \rangle$$ – швидкість перемикачів (середня к-сть перемикачів за одиницю часу ~ частоті)

Для того, щоб мінімізувати $\Delta\nu \sim 2\lambda$

Запишемо кореляційну ф-цію сигналу

$$G(\tau) = \langle u(t)\,u(t+T)\rangle = (+1)\,\text{Prob}\,(u(t)=u(t+T)) +$$

→ імов.

осц. сигнал приймає знач. -1 і 1

$$+\,(-1)\,\text{Prob}\,(u(t)=-u(t+T))$$

Імов. того, що

якщо число перемикачень парне, тоді 1 та імов +1

$$G(T) = \text{Prob}(n=2k,T) - \text{Prob}(n=2k+1,T) =$$

парне

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T}(-1)^n\frac{(\lambda T)^n}{n!} = e^{-\lambda T}\cdot e^{-\lambda T} = e^{-2\lambda T}$$

для парних

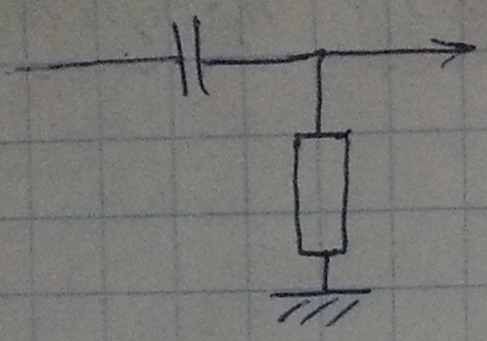
$$G(T) = e^{-2\lambda T}$$

За Т. Вінера-Хінчіна спектр сигналу

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|T|} e^{i2\pi\nu T}\,dT = 2\int_0^{\infty} e^{-2\lambda T} e^{i2\pi\nu T}\,dT = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 + \lambda^2}$$

=

це є Лоренцівський спектр.



Для білого шуму на вході RC-контуру а на виході спектр Лоренца

Спектр уширеної спектральної лінії

внаслідок зіткнень

Розглядаємо газове середовище і вважаємо, що випром. і поглинання цих молекул не є монохроматичним.

Для ізольованого атома випромінюв. повинно було б бути на одній частоті $\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$. Уширення виз-ване, тим, що випр. (при русі атом n) і це випр. взаємодіє з сусідніми атомами і гальмується (або). Для 1 ат. уширення к-лька 10^7 Гц.

Уширення 10^6 Гц., що зал від тиску газу, $t°$, від середовища (за нормальних умов)

А чим обумовлене таке велике уширення?

1. Зіткнення і при цьому довжина хвилі випром.

2. Зіткнення молекул дістінками. Ми розгл.

1. Ми вик. модель:
   ① Випром. атома є класичним (поле описується класс.) В ідеальному вип.,

$$u(t) = u_0 e^{-i2\pi\nu_0 t}$$

2. Ми розгл.

2. Маємо, що при зіткненні амплітуда хв. не змінюється, а фаза змінюється. $\varphi(t)$ – рівномірно розподілена в $[0, 2\pi]$

$u(t) = u_0 e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi(t))}$ Зіткнення незал. один від одного.

Як знайти спектр такого процесу?

1. Зіткнення незалежні
2. для кожної молекули імов. 2х зіткнень на малому інтервалі $= 0$. Отже зіткнення або відбулось або ні. $\sim \Delta t$

Вик. Т. Вінера - Хінчіна $G(\tau) = \langle u^*(t) u(t+\tau) \rangle$

$G(\tau) = e^{-i2\pi\nu\tau} \langle e^{i\varphi(t) - i\varphi(t+\tau)} \rangle = e^{-i2\pi\nu_0\tau} [1 \cdot Prob(n=0) \oplus \dots] =$

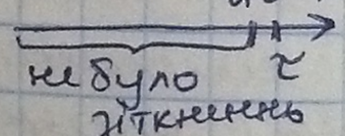
$e^{-i\Delta\varphi(\tau)}$, $\Delta\varphi(\tau) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ - зміна фази, що каже про зіткнення

$\oplus = e^{+i2\pi\nu_0\tau} [1 \cdot Prob(n=0) + 0 \cdot Prob(n \geq 1)]$, n – к-сть зіткнень

$\langle e^{-i\Delta\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\Delta\varphi} \cdot d\Delta\varphi = 0$

Отже треба знайти імов. того, що на інтервалі τ не було зіткнень.

Як позначити, що зіткнення точно було у τ, то



$P_\tau(\tau) = e^{-\lambda\tau} \cdot \lambda d\tau$

→ імов, що зіткнення на $d\tau$.

Імов., що на інтервалі τ - зіткнень не було

$P = \int_\tau^\infty P_\tau(\tau') d\tau' = \left| +\lambda \int_\tau^\infty e^{-\lambda\tau'} d\tau' = P \right| = e^{-\lambda\tau} = e^{-\tau/\tau_0}$

$\frac{1}{\lambda} = \tau_0$ – середній час між зіткненнями

$$G(\tau) = e^{-i2\pi\nu_0\tau} e^{-\tau/\tau_0}$$

стаціонарне.

11 Квант
15 Сват
20 Дерк.
23 Медь
28 Н/п

Р/3

2. $S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi\nu_0 + \frac{1}{\tau_0})\tau} \cdot e^{i2\pi\nu\tau} d\tau =$

зворотне Фур'є

Знову отримуємо Лоренцівський спектр.

$\tau_0 = \frac{(MkT)^{1/2}}{16\pi^{1/2} p a^2}$, a - ефективний радіус
M - маса молекули.

Л11

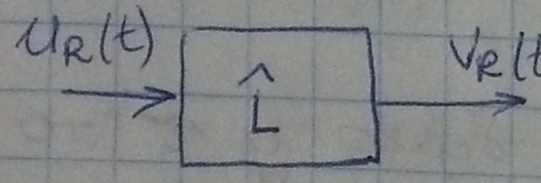
12.11.13

Аналітичний сигнал та його властивості

$u_R(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ - реальна ф-ція

$u(t) = Ae^{-i(\omega t + \varphi)}$

Якщо маємо лін. пристрій



$\hat{L}u_R(t) = v_R(t)$. Напр. LC-ланцюг

лін. оператор.

Перевага опису такого пристрою через комплексні ф-ції. Оск. гармонічний сигнал — не є власним сигналом, і на виході сигнала не гармонічний

$\hat{L}u(t) = cu(t)$ - для комп. лінійних

Отже, для $\forall$ лін пристрою з постійними параметрами, тобі сигнал записаний у комплексній ф-ції — є власною ф-цією цієї с-ми

Прим: експонента є власною ф-цією для лін. оператора?

Якщо сигнал не гармонічний $u_R(t) = Ae^{-t/\tau_n}$, $t \geq 0$.

Введення аналітичного сигналу в тому, що ми можемо ввести його як відображення дійсного сигналу у комплексний ф-ій.

Які умови цього відображення?

Визначає дійсний сигнал: 1 амплітуда
2. пог. фаза $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$
3. середня інтенсив. за період – інтенс. $I = \frac{A^2}{2}$.

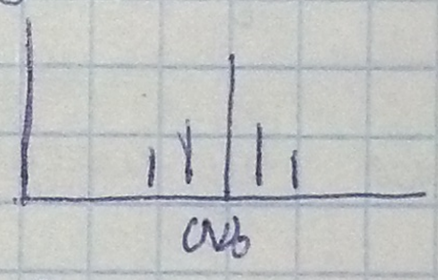
Для комплексного сигналу
1. $A = |u(t)|^2$
2. $\arg(u) = \varphi(t)$
3. $I = \frac{|A|^2}{2} = \frac{|u(t)|^2}{2}$

Розглянемо більш складний сигнал:

31
$u_A(t) = A[1 + m\cos\Omega t]\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 \gg \Omega$

$e^{-i(\omega_0 t)}$ замінимо коцен cos відповідного експоненетого
$e^{-} = \cos(\omega_0 t) + i^2 \sin\omega_0 t$ e^{-}

32 Розглянемо спектр сигналу



2/3

$u_R(t) = \sum_{R=1}^{N} A_N \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, де ми

$|\omega_n - \omega_0| \leq \omega_0$ $n = \overline{1, N}$ вузькосмугового

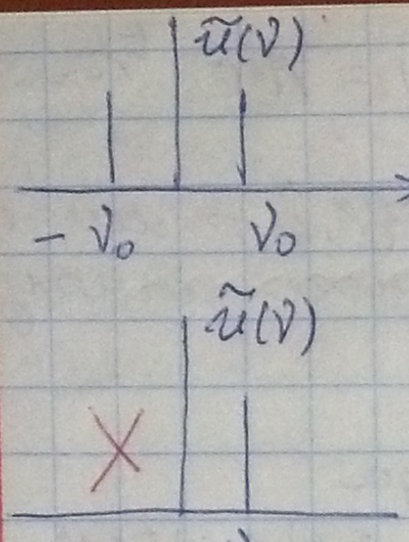
Показати, що як і ми "1" дар. дробити перетворення cos, то отримуємо самі такі вирази ми

$I = \frac{|A|^2}{2} = \frac{|u(t)|^2}{2}$

Як знайдуть аналітичний сигнал.

$u_R(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ знайдемо його спектральний вигляд
Запишемо у вер Фур'є $u_R(t) = A\frac{1}{2}(e^{-i\omega t} \pm e^{i\omega t})$

2/3



Амплітуда $\frac{A}{2} e^{-i(\varphi_0 \nu_0)} = \tilde{u}(\nu)$.

Який спектр буде мати сигнал що є аналогічним у комплексній Ф-ї

$u(t) = A e^{-i(\omega t + \varphi)}$

$\tilde{u}(\nu) = A e^{-i\varphi_0}$ Амплітуда ↑у два рази.

Зробимо те саме з дійсним сигналом $u_R(t)$. Запишемо спектр

$$\tilde{u}_R(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u_R(t) e^{i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{0} u_R(t) e^{i2\pi\nu t} dt + \int_{0}^{\infty} u_R(t) e^{i2\pi\nu t} dt$$

$$u_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_R(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu = \int_{0}^{\infty} \tilde{u}_R(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu + \int_{-\infty}^{0} \tilde{u}_R(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$$

як було видно з попереднього спектру – використано відємні частоти, а фор. 2. Це і буде

$$u_R(t) = 2 \int_{0}^{\infty} \tilde{u}_R(\nu) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Аналітичний сигнал

У таке визначення є справедливим для ∀ реал. сигн, с.

Доцільним є вигнат. аналітичного сигналу безпосередньо через сам сигнал.

$$\tilde{u}(\nu) = \begin{cases} 2\tilde{u}_R(\nu), & \nu \geq 0 \\ 0, & \nu < 0 \end{cases}$$

Розглянемо знакову ф-цію

$$\operatorname{sign}\nu = \begin{cases} 1, & \nu \geq 0 \\ -1, & \nu < 0 \end{cases}$$ (включаємо точку 0 для спрощення)

$$\tilde{u}(\nu) = (1 + \operatorname{sign}\nu)\tilde{u}_R(\nu)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{u}_R(\nu) + \operatorname{sign}\nu\, \tilde{u}_R(\nu)] e^{-i2\pi\nu t} d\nu = u_R(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}\nu \cdot \tilde{u}_R(\nu) e^{-i2\pi\nu t}$$

≡ Тим

1.1. $\hat{\mathcal{F}}[\mathrm{sign}\nu] * u_R(t) = \frac{P_i}{t} * u_R(t) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_R(t')}{t'-t}\,dt'$

Згортка

[Фур'є перетв. від добутку = Згортка Фур'є перетв.]

$\mathrm{sign}\nu$ – не є квадратично інтегровною, і вона може бути виражена від узагальненими ф-ціями. Тому була введена така ф-ція $\frac{P_i^0}{t} \div P_i^0$ – інтеграл береться ($\int$ з викколотою точкою нуль). У головному знач. інтегр. $P_i^0 = -\frac{i}{\pi}$.

$$\mp f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{-i2\pi\nu t}\,d\nu \quad ; \quad f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') g(t-t')$$

1) $u_R(t) + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_R(t')}{t'-t}\,dt'$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, u(t) = u_R(t) \text{ - дійсна част. аналіт. сигналу.} \\ \mathrm{Im}\, u(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, u(t)}{t'-t}\,dt' \end{cases}$$

Отже (дійсна) і уявна част. повністю відновлюється через $\mathrm{Re}\, u(t)$, тобто від самого сигналу!

$$\mathrm{Re}\, u(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, u(t')}{t'-t}\,dt'$$

Ок. права частина де $\mathrm{Im}\, u(t) \in$ інтегральне перетвор., тобо інтеграл Фур'є.

$f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \hat{f}$. Ядро тут $\frac{1}{\pi(t'-t)}$ і таке перетвор. над $\hat{f}$ перетворенням Гільберта

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, u(t')}{t-t'}}$$

Перетворення Гільберта (пряме перетвор.)

Зворотне перетв. Фур'є $\hat{\mathcal{F}}^{-1}[\tilde{f}(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t}\,d\nu$

$\nu \cdot \tilde{u}_R(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu t}$

Зворотне перетв. Гільберта

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}}^{-1} = \hat{\mathcal{H}}}$$

зворотне перетв. = пряме перетвор.

2/3 показати це

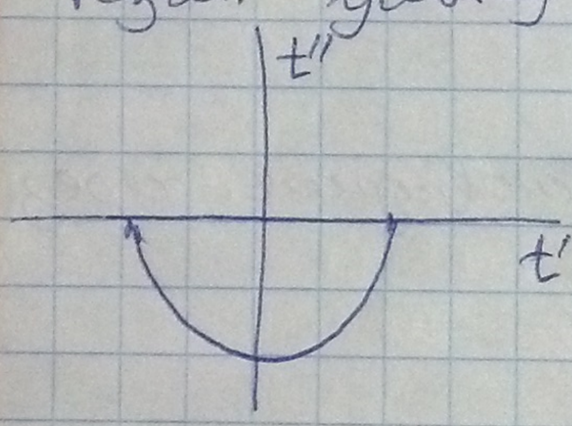
$\mathcal{I}m\, u(t) = \hat{H}\, Re\, u(t)$

Дисперсійними співвідношеннями : ом. наз. співвідн. такого типу, коли в нас дійсна част. повністю визнач. уявну, і навпаки.

Це тому, що напр. якщо в сер. є поглинання, то діелектр. проникність $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ і міра ε' - дисперсійною кривою і ε'' - поглинання вик. саме такі співвідн.

Дисперс. співвідн. ⟶ Крамерса - Кронікера

Чому сигнал наз. аналітичним? Розглян. $\forall$ аналітичний сигнал, у якого є тільки додатні часи. Розгл. уявну с-му координат, де



$t = t' + it''$ (t - може бути $\forall$ величина)

$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\nu)\, e^{-i2\pi\nu(t'+it'')}\, d\nu$

$\tilde{u}(\nu)$ для $[-\infty, 0] = 0$.

Коли $t'' < 0$ то інтегр. збіжний
$t'' > 0$ інтеграл розбіжний.

Отже ця ф-ція є аналітичною у нижній частині такої площ., у розумінні комплексного t.
За теорією лишків можемо знайти безліч співвідношень.

А що буде, якщо ф-ція випадкова? (випадковий сигнал – ансамбль детермінованих реалізацій).

$\{^{(k)} u_k(t)\}$. Давайте для кожної реалізації застосуємо аналіт. перетворення

$\{^{(k)} u(t)\}$ Замінимо комплексну дійсному сигналу у відпов. комплексне, через інтеграл. перетвор. Гільберта.

Припустимо стаб. х-стики реального сигналу нам відомі. А як відомі такі х-стики для $u(t)$ (і навпаки). Оск. інтегральні х-стики не дають такої можливості, але нас цікавить дисперсія і сер. знач - то можна безпосередньо. А д кореляційною ф-цією так не можна

$$G_R(\tau) \overset{?}{\leftrightarrow} G(\tau)$$

Кор. ф-ція аналіт. сигналу буде мати лише дробові частини, оск.

$$S(\nu) = \lim_{T\to\infty} |\tilde{u}_T(\nu)|^2$$, а у нас $S(\nu) \equiv 0$, $\nu < 0$.

Отже вона має бути.

Доведемо, що кор. ф-ція аналітичного сигналу є теж аналіт. сигналом. (2/3)

Л12

19.11.13

Теорема про оцінку

Оцінка якогось детермін. процесу — як цей процес веде себе у часі.

Розглянемо стац. комплексний випадковий процес. Запишемо кореляційну ф-цію випадкового процесу $G(\tau)$

$$G(\tau) = G_0(\tau) e^{-i 2\pi \nu_0 \tau}$$

ν_0 - фіксована частота

Для монохром. випадкового сигналу

$G(\tau) = G_0 e^{-i 2\pi \nu_0 \tau}$. А у нас $G_0(\tau)$ змінюється значно повільніше ніж exp.

Тоді такий проце можна розуміти як квазімонохромаї а $G_0(\tau)$ – оцінка кореляційної ф-ції

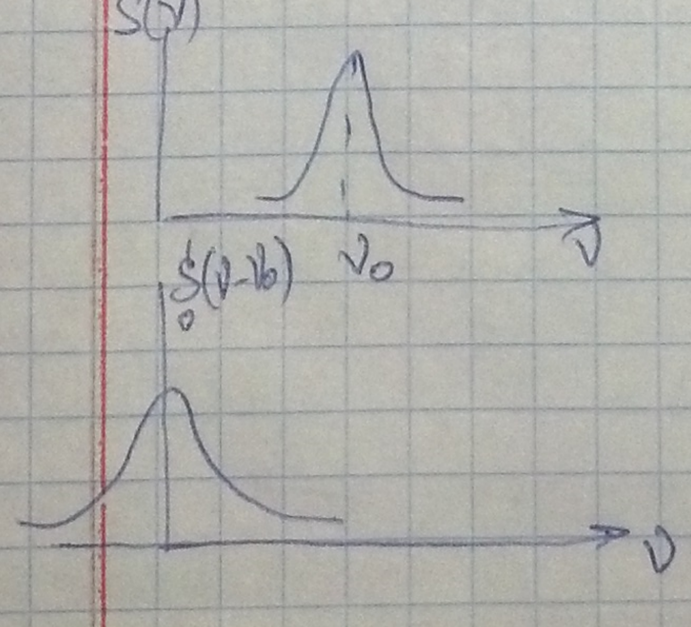
(ф-ція $G(\tau)$ існує завжди (по-моєму ?))

Знайдемо спектр Вінера кореляційної ф-ції

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau) e^{-i 2\pi \nu_0 \tau} e^{i 2\pi \nu \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau) e^{i 2\pi (\nu - \nu_0)\tau} d\tau = S_0(\nu - \nu_0)$$

ядро Фур'є перетвор. — можна не розглядати як нове ядро Фур'є перетв.

$$S(\nu) = S_0(\nu - \nu_0)$$ – спектр випадкового процесу зсунутий по вісі частот відносно до спектру оцінки



Теорема про оцінку

оцінки має такий самий спектр як і спектр випадкового процесу але зсунутий до „нуля" на ν_0.

! Якщо ког. процес є аналітичним — огинаючого не є аналіт. сигналом (бо містить від'ємні частоти) !

Співвідношення невизначеностей
(універсальне, не тільки для випадкових процесів)

Якщо сигнал має деяку протяжність Δt, то його частота не може бути виявлена краще ніж $\Delta\nu$, де

$$\boxed{\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1}.$$

Насправді є точно визначене співвідношення

$$\Delta\nu\tau_к \geq \frac{1}{4\pi}$$ для випадкових процесів

$$\boxed{\Delta\nu\tau_к \geq \frac{1}{4\pi}}$$

$\tau_к$ час когерентності

Співвідношення невизначеності

Для часу когерентності

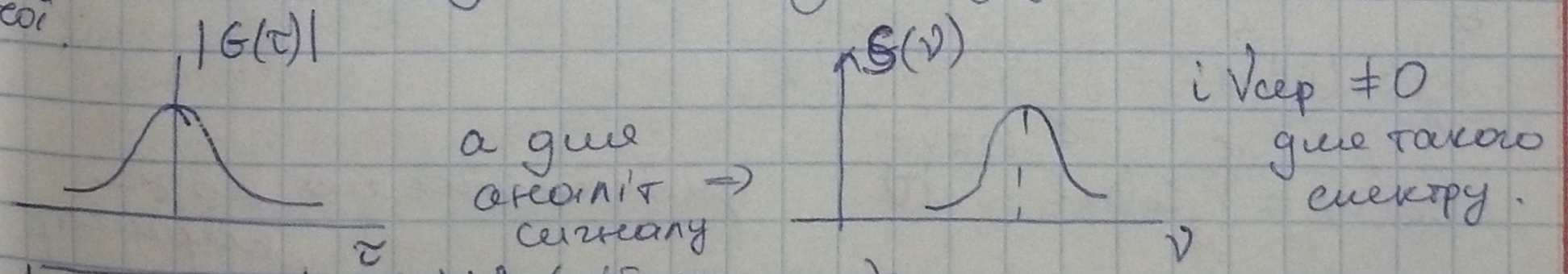
1) $$\rho_\tau(\tau) = \frac{|G(\tau)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau)|^2 d\tau}$$ (нівідʼємна і нормована на 1)

Тоді дисперсія

$$\sigma_\tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \rho_\tau(\tau) d\tau \quad (\langle\nu\rangle = 0) \quad \boxed{\tau_к = \sigma_\tau}$$

2) Введемо аналог. вел. для $\Delta\nu$ по спектру Вінера.

Заув. ! Ми розглядаємо сигнали як аналітичний процес і спектр Вінера існує лише для додатніх частот



$$\boxed{\rho_\nu(\nu) = \frac{|\tilde{S}(\nu)|^2 \text{ (дійсна невід'ємна)}}{\int_0^{\infty} |S(\nu)|^2 \cdot d\nu}}, \quad S(\nu) = 0, \ \nu < 0.$$

$$\sigma_\nu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_0 < \nu >)^2 \rho_\nu(\nu)\, d\nu \quad , \quad < \nu > = \int_{-\infty}^{\infty} \nu \rho_\nu(\nu)\, d\nu$$

$$\boxed{\Delta\nu = \sigma_\nu}$$

Тіри такому визначенні маємо співвідношення $\boxed{\Delta\nu \tau_к \geq \frac{1}{4\pi}}$

↓ Доведемо це співвідношення

$$\tau_к^2 \Delta\nu^2 \equiv \sigma_\tau^2 \cdot \sigma_\nu^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |G(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_0 < \nu >)^2 |S(\nu)|^2 d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau)^2 d\tau}$$

Спектр Вінера і кореляц. ф-ція повязані Фур'є перетв.

$$\boxed{S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{i 2\pi \nu \tau} d\tau}$$

Висновок: скрізь де має місце дія 2х ф-цій перетворення Фур'є, то таке співвідношення. Буде вірним дія $\forall$ таких ф-цій. Це не є х-стикою лише випадкових процесів.

С/Р Наступний парі у Вт

$S(\nu) = S_0(\nu - \nu_0)$ покладемо $\nu_0 = < \nu >$ і замінено

в $\tau_к^2 \Delta\nu^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |G_0(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \nu'^2 |S(\nu' = \nu - < \nu >)|^2 d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau)|^2 d\tau}$

Далі ν' знову позначено як ν.

$|G(\tau)|^2 = |G_0(\tau)|^2$

$S_0(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau) e^{i 2\pi \nu \tau}$ тут має місце рівність Парсеваля

$\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |S_0(\nu)|^2 d\nu$

$G_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\nu) e^{-i 2\pi \nu \tau} d\nu$ диференціюємо по τ - параметр

$\frac{\partial G_0(\tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\nu) (-i 2\pi \nu) e^{-i 2\pi \nu \tau} d\nu$ знову Т. Парсеваля

$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial G_0(\tau)}{\partial \tau} \right|^2 d\tau = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} |S_0(\nu)|^2 \nu^2 d\nu$

$$\tau_к^2 \Delta V^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |G_0(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial G_0}{\partial \tau}\right|^2 d\tau}{4\pi^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau\right]^2}$$

З нер. аналізу, якщо відомо $g(\tau)$, $f(\tau)$ деякі ф-ції

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 |f(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau \geq \frac{1}{4}\left|\int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau) g^*(\tau) + f^*(\tau) g(\tau)] d\tau\right|^2$$

Отже дамінаємо в чисельнику

ребує

$$\boxed{\begin{aligned} g(\tau) &= \tau G_0(\tau) \\ f(\tau) &= \frac{\partial G_0}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\tau_к^2 \Delta V^2 \geq \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} [\tau G_0^*(\tau) \frac{\partial G_0}{\partial \tau} + \tau G_0(\tau) \frac{\partial G_0^*}{\partial \tau}] d\tau\right|^2}{4 \cdot 4\pi^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau\right]^2} =$$

ий

ій.

$$= \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\partial}{\partial \tau} |G_0(\tau)|^2 d\tau\right|^2}{16\pi^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\тау)|^2 d\tau\right]^2} \quad (=)$$

Проінтегруємо чисельник

$$\begin{cases} u = \tau & du = d\tau \\ dv = \frac{\partial |G_0(\tau)|^2}{\partial \tau} & v = |G_0(\tau)|^2 \end{cases}$$

ненно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\partial |G_0(\tau)|^2}{\partial \tau} d\tau = \tau |G_0(\tau)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau$$

ого

$|G_0(\tau)|\Big|_{-\infty}^{+\infty} = O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ щоб 1й інтеграл був збіжним.
(мала велич.)

арєва

Ф-ція $G_0(\tau)$ повинна бути квадратично інтегровною, щоб існувало перетворення Фур'є

Кореляційна ф-ція спадає до нуля досить швидко. Тому це співвідношення вик для ∀ фізичних процесів.

ер.

$$(=) \quad \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau\right|^2}{16\pi^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau)|^2 d\tau\right]^2} \Rightarrow \sigma_\tau^2 \sigma_\nu^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_к \Delta\nu \geq \frac{1}{4\pi}}$$

В проведені немає специфіки випарного процесу.

$\Delta V \tau_к \sim 1$ (якісна оцінка).

З н-сті: (1) Чи існують процеси $\tau_к \Delta V = \frac{1}{4\pi}$. можна визнач. Якщо такий процес існує його наз. мінімально невизначеним процес

(2) Чи є процеси реальних $\tau_к \Delta V \gg \frac{1}{4\pi}$.

(1). Знак = рос.гає тоді і тільки тоді $f(\tau) = c\,g(\tau)$

$\frac{\partial G_0(\tau)}{\partial \tau} = \tau \cdot c\, G_0(\tau)$ Для того, щоб рос.гав. знак рівності

$G_0(\tau) = G_0 e^{\frac{c\tau^2}{2}}$ $c = -1/\tau_0^2$

const

$$G_0(\tau) = G_0 e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}}$$

Мінімально невизначений процес, для цього процесу кореляційна ф-ція має вигляд Гауссівського процесу

$$G(\tau) = G_0 e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0}} e^{-i 2\pi \langle \nu \rangle \tau}$$

Повна кореляц. ф-ція такого процесу.

Куралов Віталій Маликович лаб. 204 3.09.13

17 лекцій 2 модулі 2 теорія, 2 задачі обов'язкові
залік. на КР, можна користув.
гониометром, калькулятором
(сигналу)

Стат. радіофізика
— це перерах. приймом і обробку інформ. за
рах. хвиль.

Література:

"Екзамен головне!!"
Користув. лише конспектами

1. Мінаков, Тарнов "Предмет стат. радіофізика" 2003р.
2. Ахманов, Дьяков, Чиркин "Введення в стат. радіофізику і оптику"
3. Дж. Гудмен "Статистическая оптика", 1988.
4. Тихонов "Стат. радіотехніка"
5. Левін "Теоретические основы стат. радиотехники"

Випадкові змінні та їх х-ки

Як описується випад. змінна?

- область значень змінної u — $\{u\}$ неперервна випадкова змінна, дискретна
- ф-ція розподілу імовірності $F(u)$ у припущенні що вона існує для кожної змінної u.

$F(u_0)$ - імов. $F(u_0) = \underset{\text{імовірність}}{Prob}(u \le u_0)$

$F(3) = Prob(u \le 3)$

Розглянемо $Prob(a < u \le b)$ $a \le b$ ①

$Prob(a < u \le b) = Prob(u \le b) - Prob(u > a) = F(b) - F(a)$

Нехай $F(u)$ - неперервно- диф. ф-ція

$\frac{dF}{du}\Delta u = P(u)\Delta u$ імов. того що вел. u лежить в інтервалі Δu

$P(u)$ - густина імов.

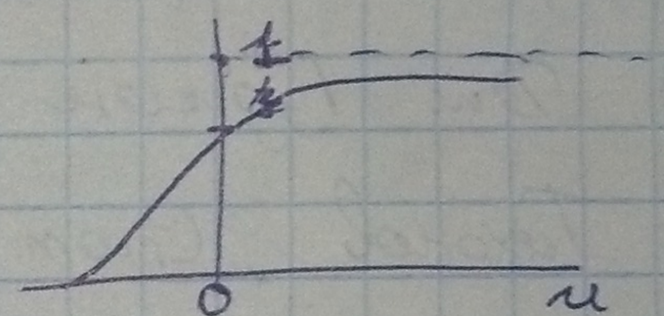
! $F(u)$ - це густина розподілу імовірності !!

$$\boxed{P(u) = \frac{dF}{du}} \qquad \boxed{F(u) = \int_{-\infty}^{u} P(u)\,du}$$

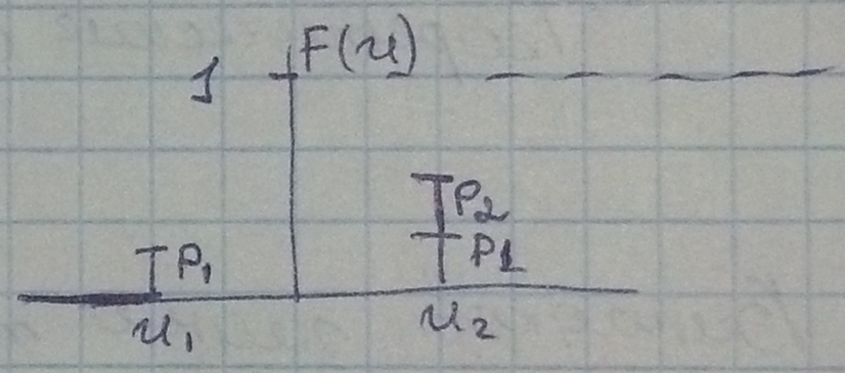
$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$F(u_1) \ge F(u_2)$ $u_1 \ge u_2$



$F(u) = \sum_{u_k \le u} P_k$



Розгл. густину імов. для дискретної дійсної

$P(u) = \sum_{u_k \le u_k} P_k \delta(u - u_k)$, де дельта-ф-ція Дірака

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - u_k)\,du = \cancel{10k}\ 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} P(u)\,du = \sum_{u_k \le u_k} P_k(u_k) = F(u)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} P(u) = \frac{dF}{du} & \text{для неперервної дійсної} \\ P(u) = \sum_{u_k \le u_k} P_k \delta(u - u_k) & \text{для дискретної дійсної.} \end{array}}$$

Х-тики випарк. змінних

Статистичні середні

① Розглянемо $\forall$ ф-цію $g(u)$. Стат. середнє цієї ф-ції

$$\boxed{\langle g(u)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, g(u)\, du}$$

$\{\langle g(u)\rangle\}$ – статистичні х-тики випадкової змінної

Властивості густини розподілу ймов.

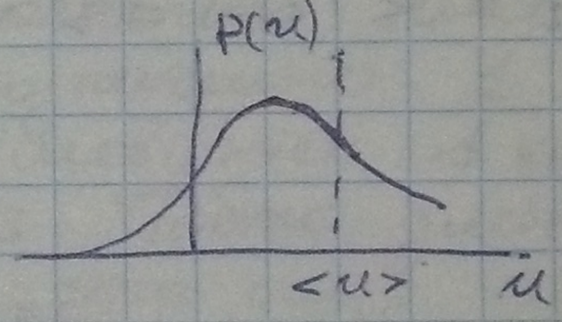
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, du = 1$$

$$P(u) \geq 0$$

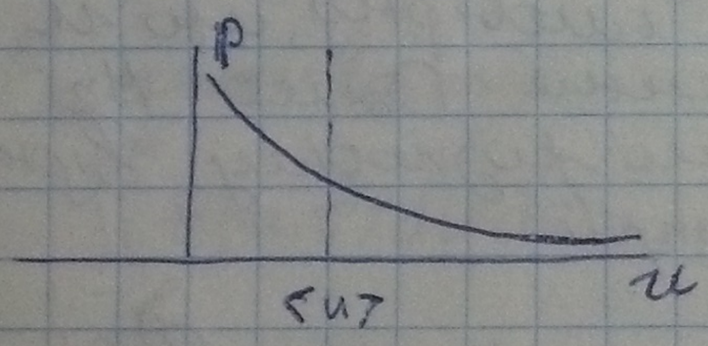
② Моменти $\langle u^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^n P(u)\, du$, $n = 0, 1 \ldots$

$$\langle u\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, u\, du$$ – середнє

в певному розумінні х-дує max найбільш ймовірне знач.

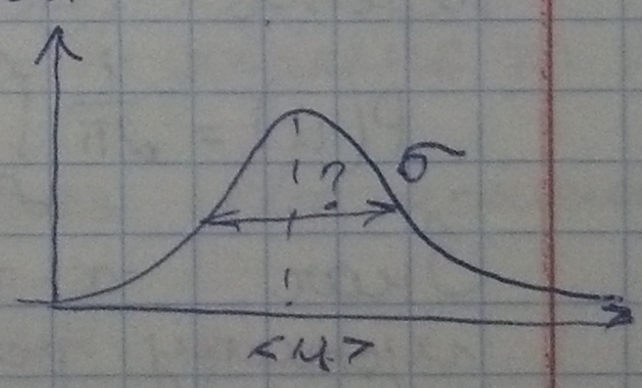


$P(u) = C e^{-\alpha u}$, $C(\alpha)$ $u \geq 0$



Обернена задача теорії ймовірності

$\{\langle u^n\rangle\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow[\text{однозначно}]{\text{відновлює}} P(u)$



Середній момент

$$\langle (u - \langle u\rangle)^n\rangle = M_n$$

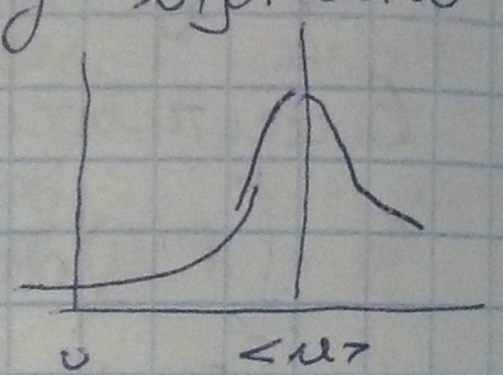
$\langle u^n\rangle = m_n$ – початкові моменти

$M_2 = \langle (u - u\langle u\rangle)^2 \rangle = \sigma^2$ дисперсія випадкової вел.

σ - середньоквадратичне відхилення.

$M_3 = \langle (u - \langle u\rangle)^3 \rangle$

якщо $M_3 < 0$ то більш імовірно, що u приймає від'ємні значення. Отже M_3 х-ує асиметрію кривої розподілу відносно $\langle u\rangle$ – нед. коеф. асиметрії



Середній момент

$\langle (u - \langle u\rangle)^n \rangle = M_n$

$\langle u^n \rangle = m_n$ - початкові моменти

$M_2 = \langle (u - \langle u\rangle)^2 \rangle = \sigma^2$ дисперсія випадкової величини

σ - середньоквадратичне відхилення

$M_3 = \langle (u - \langle u\rangle)^3 \rangle$

якщо $M_3 < 0$ то більш імовірно, що u приймає від'ємні значення. Отже M_3 х-ує асиметрію кривої розподілу відносно $\langle u\rangle$ – нед. коеф. асиметрії

Х-стична ф-ція випадк. ф-ції є Фур'є перетв. густини розподілу $\chi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) e^{isu} du$

$P(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) e^{-isu} ds$ - зворотня ф-ція

Знач. х-чної ф-ції повністю визначає густину розподілу.

Властивості характеристичної ф-ції

1. $\chi(0) = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$

2. $|\chi(s)| \le 1 \qquad |\chi(s)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(u)e^{isu}du\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |p(u)e^{isu}du| \le$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$$

3. Продиф. ф-цію $\chi(s)$ n разів по s:

$$\frac{\partial^n \chi(s)}{\partial s^n} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} u^n p(u) e^{isu} du \Big|_{s=0} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} u^n p(u)du = m_n$$

n-й момент випадкової величини

Багатовимірні випадкові величини

Розгл. експеримент: ми підкидаємо 1 кубик, і всі парні числа зафарбуємо в жовтий, нехай тепер випадає жовтий це позначимо 1, а коли інший колір – 0. Яка ймовірність 1 коли випаде пофарбований? В: 1/3. Тобто дивимо чи випадкові величини ми використаємо густину ймовірності двох величин $P(u,v)$; $\{u,v\}$

Властивості:

1. $\iint_{-\infty}^{\infty} P(u,v)\,du\,dv = 1$

2. $P(u,v) \ge 0$

3. Умова самоузгодженості: якщо V - довільне, то $\int_{-\infty}^{\infty} P(u,v)dv = P(u)$ – апріорна ймовірність. Ми можемо ввести х-ну ф-цію для двовим. ф-ції:

$$\chi(s,t) = \iint_{-\infty}^{\infty} du\,dv\, P(u,v)\, e^{i(su+tv)}$$

Введемо момент: $\cancel{\gamma(s,t)} = \iint_{-\infty}^{\infty} u^{n_1} v^{n_2} p(u,v)\,du\,dv$, де $m_{n_1 n_2}$

$n_1, n_2 = \overline{0,\infty}$ довільні, тобто → момент порядку n_1+n_2
змінні

$$m_{n,0} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p(u)\,du$$

$$M_{n_1 n_2} = \iint_{-\infty}^{\infty} (u-\langle u\rangle)^{n_1} (v-\langle v\rangle)^{n_2} p(u,v)\,du\,dv -$$

змішаний момент порядку n_1+n_2

$$m_{n_1 n_2} = \frac{\partial^{n_1+n_2} \gamma(s,t)}{\partial s^{n_1} \partial t^{n_2}}\Big|_{s=t=0} \cdot \frac{1}{i^{n_1+n_2}}$$

Для практики мають знач. змішані моменти другого порядку.

$$\langle u \cdot v \rangle = \iint u v\, p(u,v)\,du\,dv = G_{uv}$$ - кореляція змінних u і v

$$\langle (u-\langle u\rangle)(v-\langle v\rangle) \rangle = \Gamma_{uv}$$ - коваріація випадк. змінних

Доведемо що для $v = au+b$ $|\gamma_{uv}| = 1$:

$$|\Gamma_{uv}|^2 = \left| \iint p(u,v)\,(u-\langle u\rangle)(v-\langle v\rangle)\,du\,dv \right|^2$$

Нерівність Шварца перетворюється на рівність якщо $g(u,v) = f(u,v)$, тобто

$(u-\langle u\rangle) = (v-\langle v\rangle)$ а тут має місце загальний лінійний зв'язок. Тобто для $\forall$ мін. зв'язку $|\gamma_{uv}| = 1$. Якщо зв'язок не лінійний, змінні статистично зв'язані то $|\gamma_{uv}|$ менше $= 0$.

Пр. 1: Розгл. випадок коли u і v функціонально зв'язані:

$v = u^2$ і нехай u вибрано так, що $\langle u \rangle = 0$ і $\langle u^3 \rangle = 0$

$$\Gamma_{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} P(u,v)\,(u - \langle u \rangle)(v - \langle v \rangle)\,du\,dv \quad , \text{оск. } v = u^2$$

$$\Gamma_{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} P(u,v)\,(u - \underbrace{\langle u \rangle}_{=0})(u^2 - \langle u^2 \rangle)\,du\,dv = \langle u^3 \rangle - \underbrace{\langle u \rangle}_{=0}\langle u^2 \rangle = 0$$

Рівність нулеві коеф. кореляції не означає відсутності статистичного зв'язку

Пр.: $\begin{cases} u = \sin\theta \\ v = \cos\theta \end{cases}$ Знайти коеф. кореляції, якщо

① $0 \le \theta \le 2\pi$, $P(\theta) = \frac{1}{2\pi}$

② $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $P(\theta) = \frac{2}{\pi}$

Якщо $\gamma_{uv} = 1$ то вел. лінійно залежні

$\gamma_{uv} = 0$ то вел. некорельовані

$0 < \gamma_{uv} < 1$ частково корельовані

Ступінь зв'язку між залежними γ_{uv} не дає, тому вводять поняття умовної імов.:

$$\boxed{P(u,v) = P(v)\,P(u|v)}$$

над. умовною ф-цією розподілу вел. u при фіксованому v.

$P(u,v)$ – над. апріорною (недаленною від'ємного) імов.

$P(u|v)$ – апостеріорного (після досліду) імов.

Проінтегруємо $P(u,v)$ по u: $\int_{-\infty}^{\infty} du$: $P(v) = P(v)\int_{-\infty}^{\infty} P(u|v)\,du$

$P(u,v) = P(v)\, p(u/v)$ (ми відбуд. подію u при фіксованому v).

Л3.

Розгляне. множ. реалізації" змінених подій 17.09.13 3

N вибрали де реалізувалась N_u

$\lim_{N\to\infty} \frac{N_u}{N} \Rightarrow P(u)$ імов. що в деякому

Візьмемо заг. експеримент з околом N (N реалізацій подіяч. реалізації" де має місце знач. v N_v де v-фіксоване. Розгл. підансамбль N_v і виберемо реалізації" при яких мала місце реалізація u $N_{u/v}$ (одночасно u і v)

$\frac{N_{u/v}}{N} \to P(u,v)$ $\quad \frac{N_{u/v}}{N}\frac{N_v}{N_v} = \frac{N_v}{N}\frac{N_{u/v}}{N_v}$

$\frac{N_v}{N} \to P(v)$ $\quad \frac{N_{u/v}}{N_v} \to$ умовна імов. $P(u/v)$ при v-фіксованому

$$\boxed{P(u,v) = P(v)\, P(u/v)}$$

$P(u/v)$ – умовна імовірність події u при фіксованому v

змінна ↓ умова

Ф'Ю. Зміст: імов. того що при вик. деякої події буде не приймати певне знач. u.

$P(u,v) = P(u)\, P(v/u)$

$P(v)\, P(u/v) = P(u)\, P(v/u)$

оцінка однієї ум. імов. значень u через ум. ім.

$$\boxed{P(u/v) = \frac{P(u)}{P(v)} P(v/u)}$$

Ф-ла Баєсса