Медична радіофізика

Лекція 5.

Реконструкція томограм.

Реконструкція методом Радона.

Йоган Радон (Johann Karl August Radon, 16 грудня 1887р. – 25 травня 1956 року) – австрійський математик.

Radon, Johann, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten", Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse (Leipzig: Teubner, 1917, 69: 262–277).

Про визначення функцій по їх інтегральним значенням уздовж відомих многовидів

Многовид.

Многовид — це об'єкт, який локально має характер метричного простору розмірності n.

Метричний простір — це множина *X* із елементів і відстані *d*, яка визначена для будь-якої пари елементів цієї множини.

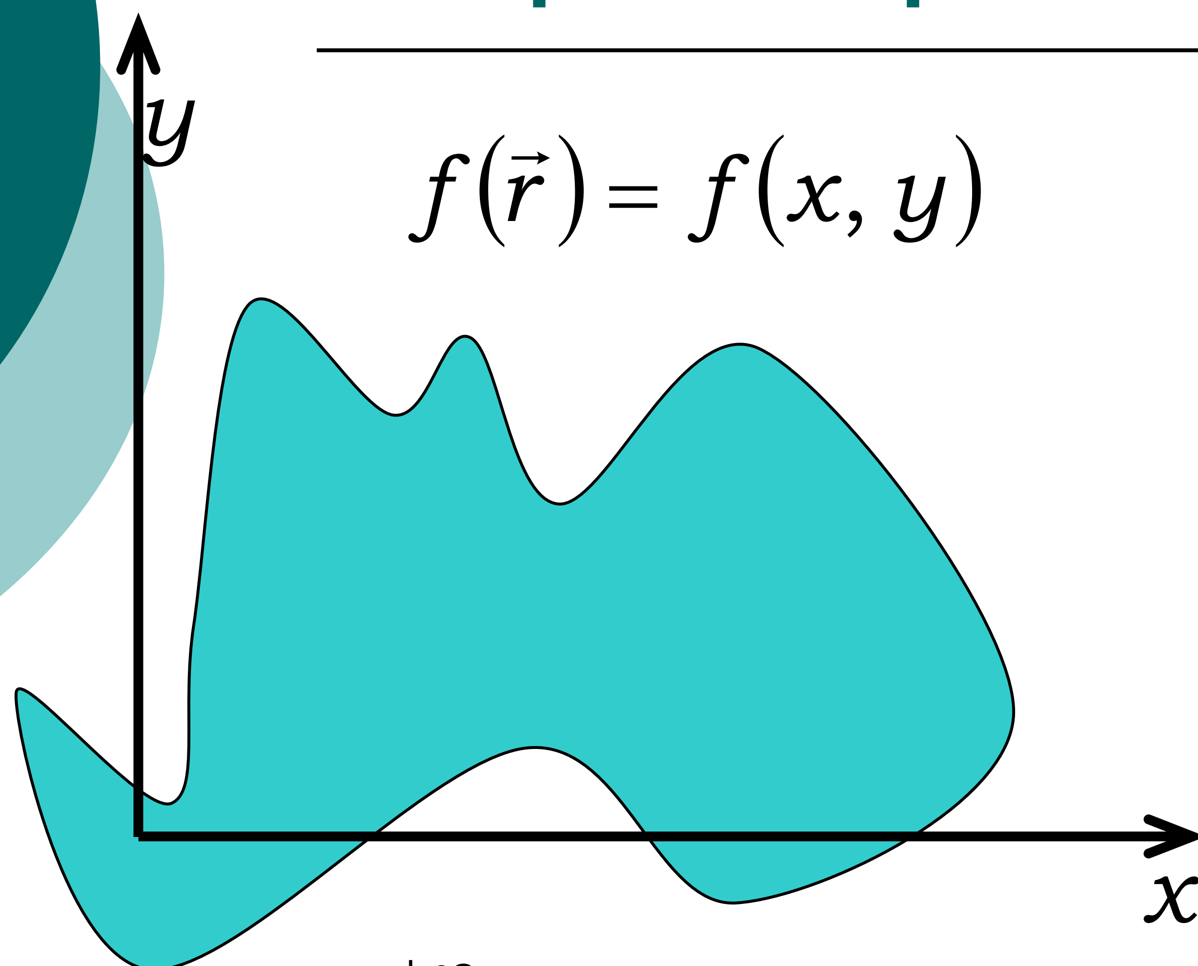
Приклад:

Множина *X* дійсних чисел *r* утворює метричний простір R^1;

$$d\left(r_1; r_2\right) = \left|r_1 - r_2\right|$$

$$r_1; r_2\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{i}\left(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)^2}$$

Перетворення Радона.



$$f(\vec{r}) = f(x, y)$$

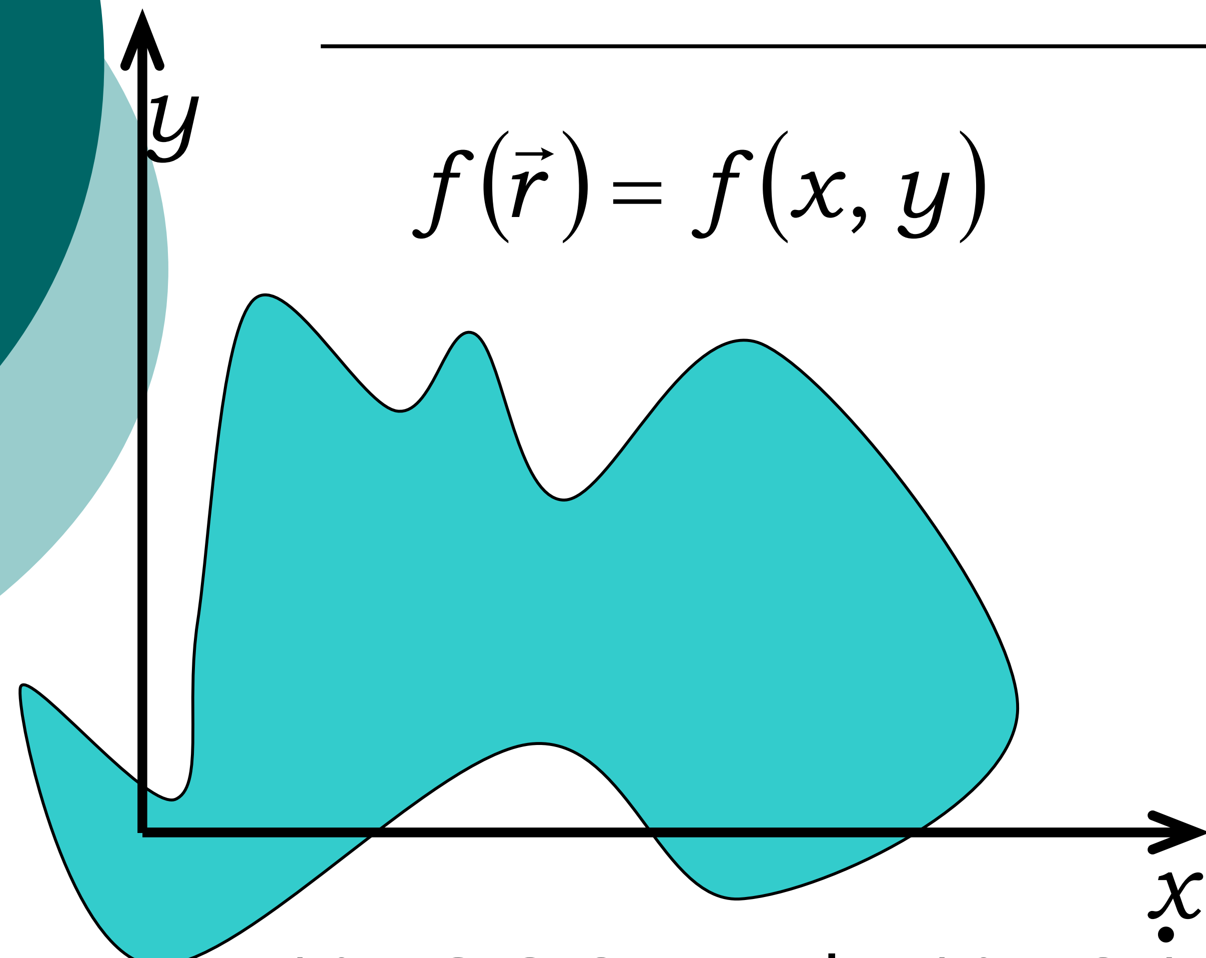
$$\lim_{|x|,\,|y|\to 0} f(x, y) = 0$$

$$R[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\alpha - z\sin\alpha,\; s\sin\alpha + z\cos\alpha)\,dz$$

$$F_R(s, \alpha) = R[f(x, y)]$$

Заміна змінних. $F_R(s,\alpha)=R\left[f(x,y)\right]$

$$f(\vec{r})=f(x,y)$$



$$x_1 = s\cos\alpha - z\sin\alpha$$

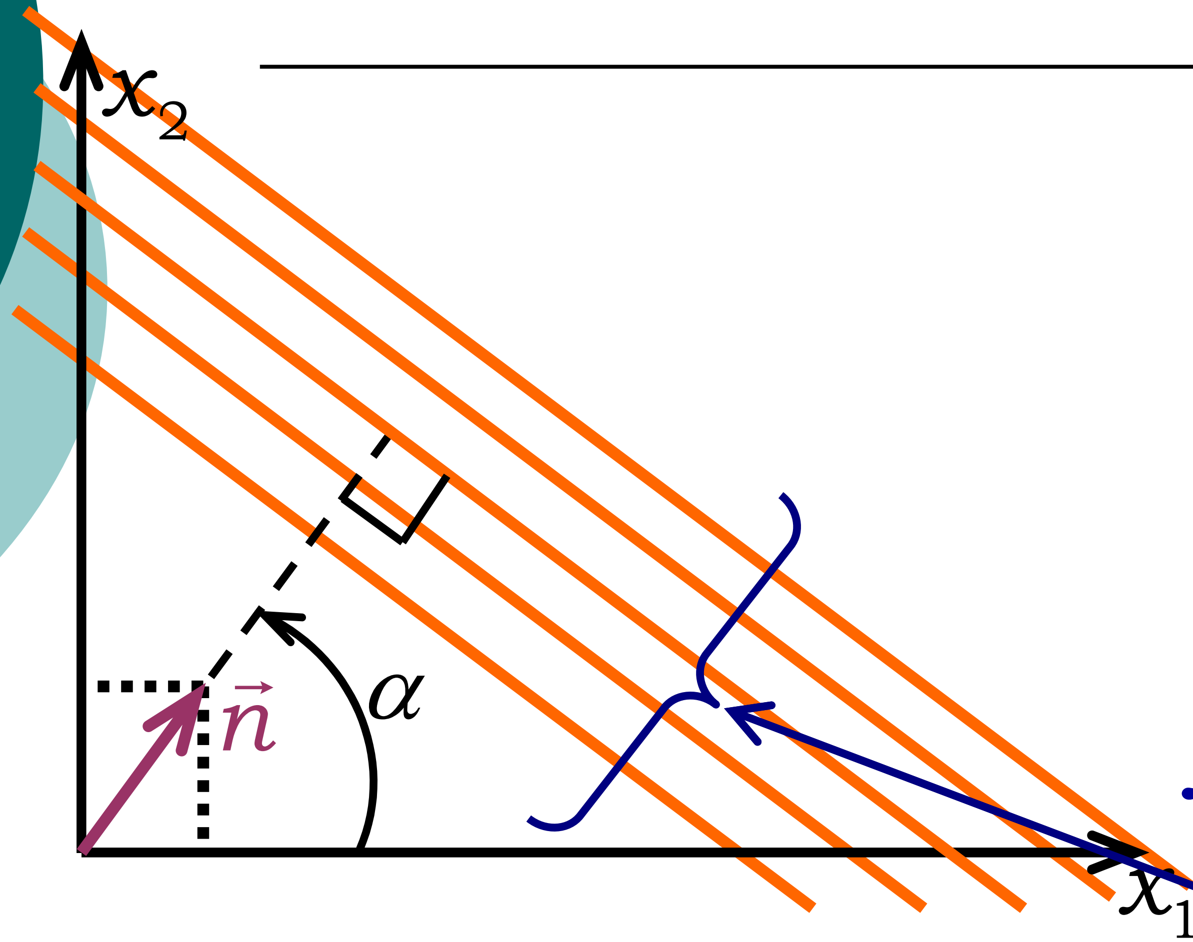
$$x_2 = s\sin\alpha + z\cos\alpha$$

$$R[f]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dz$$

$$x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha = s$$

$$x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha - s = 0$$

Заміна змінних. $F_R(s,\alpha) = R[f(x,y)]$



$$x_1 = s\cos\alpha - z\sin\alpha$$
$$x_2 = s\sin\alpha + z\cos\alpha$$

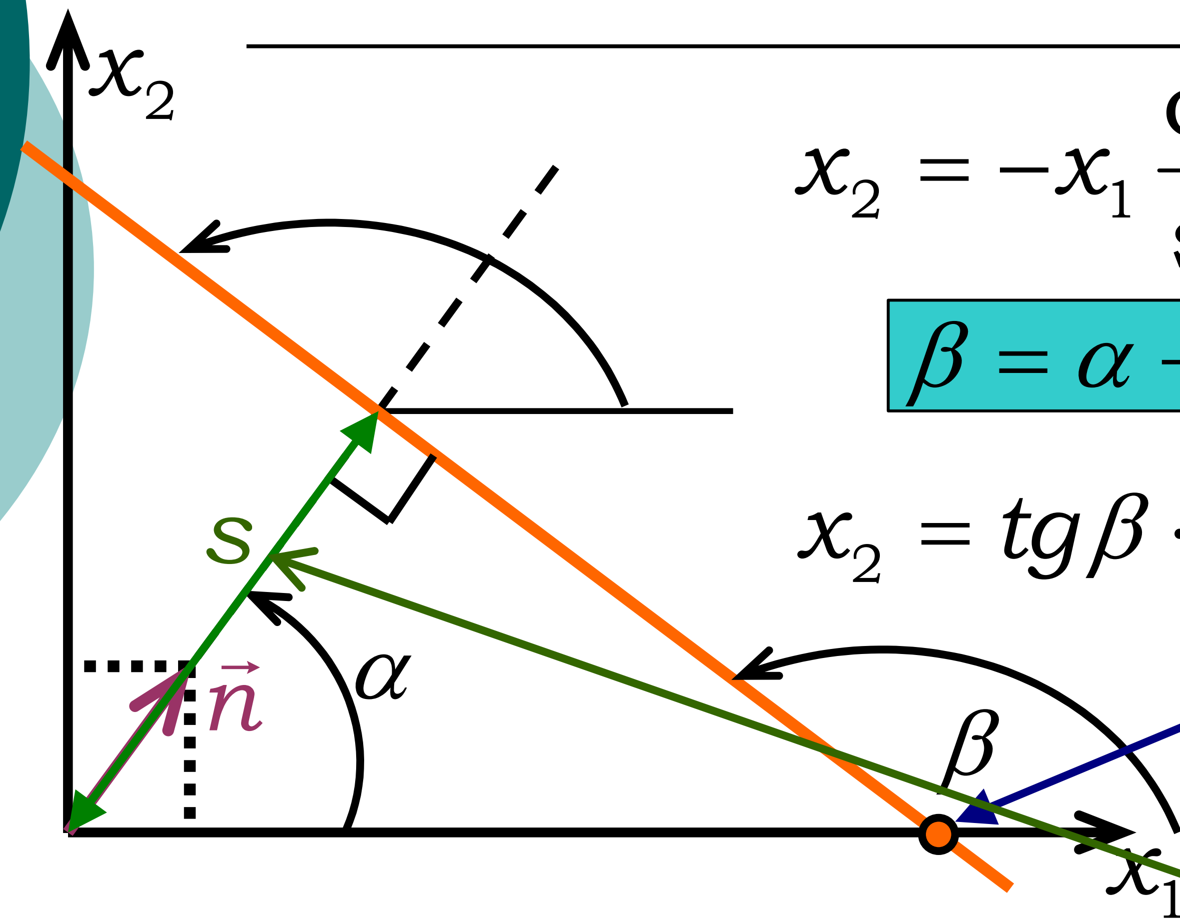
$$R[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dz$$

$$x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha = s$$

$$x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha - s = 0$$

$$\vec{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$$

Заміна змінних. $F_R(s,\alpha)=R\left[f(x,y)\right]$



$$x_2=-x_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{s}{\sin\alpha}=-ctg\alpha\cdot x_1+\frac{s}{\sin\alpha}$$

$$\beta=\alpha+90^\circ \quad\Rightarrow\quad tg\beta=-ctg\alpha$$

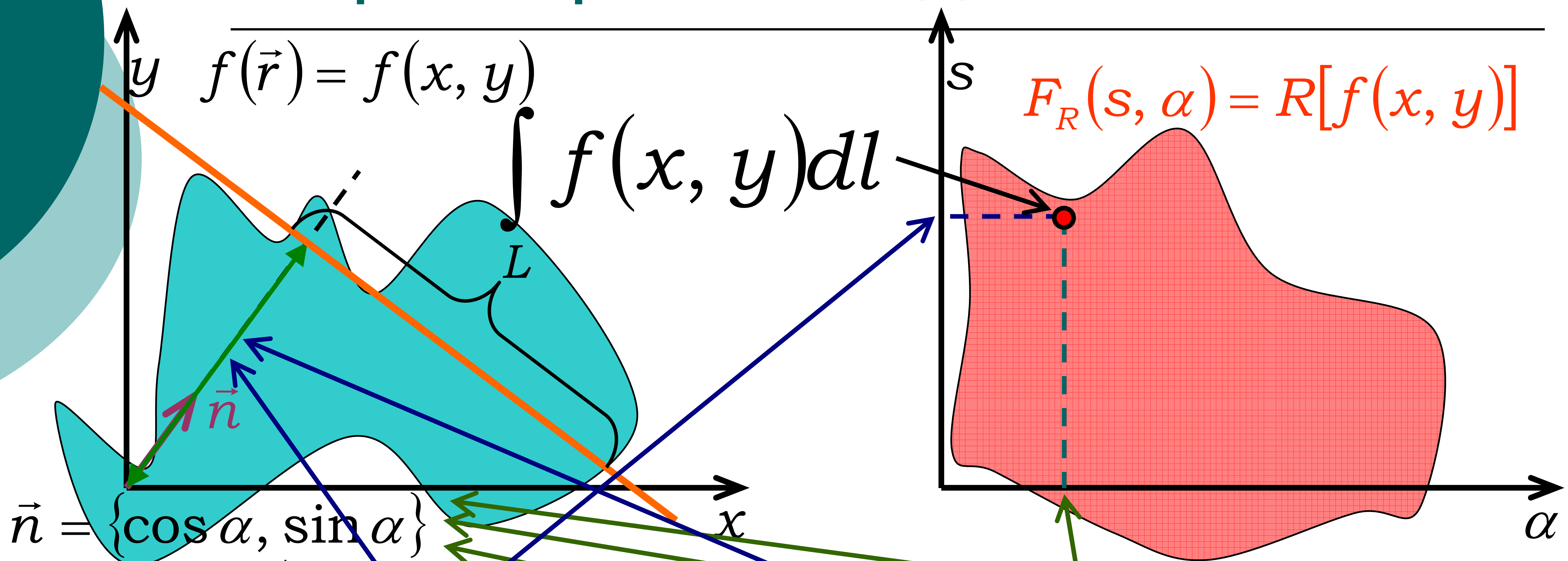
$$x_2=tg\beta\cdot x_1+b=kx_1+b\qquad b=\frac{s}{\sin\alpha}$$

$$x_1^{(0)}=-\frac{b}{k}=\frac{s}{\cos\alpha}$$

$$x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha-s=0$$

$$\vec{n}=\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\}$$

Перетворення Радона.



$$R[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\alpha - z\sin\alpha, s\sin\alpha + z\cos\alpha)\,dz$$

Перетворення Радона $F_R(s, \alpha)$ – віднесення функції $f(x, y)$ до її інтегралів вздовж ліній у всіх можливих напрімках.

Образ Фур'є і Радона.

$$F\left[f(x,y)\right] = F_F(\omega_x,\omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left(2\pi i(\omega_x x + \omega_y y)\right)dxdy$$

$$\vec{\omega} = \left\{\omega_x,\omega_y\right\} = \omega\cdot\vec{n}_\omega$$

$$\omega \equiv \left|\vec{\omega}\right| = \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2},$$

$$\vec{n}_\omega = \left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\},\ \alpha = arctg\frac{\omega_y}{\omega_x}$$

$$F\left[f(\vec{r})\right] = F_F(\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\exp\left(2\pi i\vec{\omega}\vec{r}\right)d\vec{r}$$

Заміна змінних.

Пряма

$$s = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$z = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Зворотна

$$x = s\cos\alpha - z\sin\alpha$$

$$y = s\sin\alpha + z\cos\alpha$$

$$F\left[f(x,y)\right] = F_F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi i\omega s) \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\alpha - z\sin\alpha, s\sin\alpha + z\cos\alpha)dz} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s,\alpha)\exp(2\pi i\omega s)ds =$$

$$= F\left[F_R(s,\alpha)\right]$$

$$F_R(s,\alpha) = R\left[f(x,y)\right]$$

Образ Фур'є і Радона.

$$F^{(II)}\left[f\left(x,\,y\right)\right]=F^{(I)}\left[F_R\left(\mathrm{s},\,\alpha\right)\right]$$

$$F_F\left(\omega\cos\alpha,\,\omega\sin\alpha\right)=F_F\left(\omega,\,\alpha\right)$$

Зворотне перетворення Радона.

$$f(x, y) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \omega \tilde{F}_R(\omega, \alpha) \exp(2\pi i \omega (x \cos\alpha + y \sin\alpha)) d\omega$$

$$\tilde{F}_R(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(\mathrm{s}, \alpha) \exp(-2\pi i \omega \mathrm{s}) ds$$

Алгоритм реконструкції.

Сканування $\Rightarrow$ набір проекцій

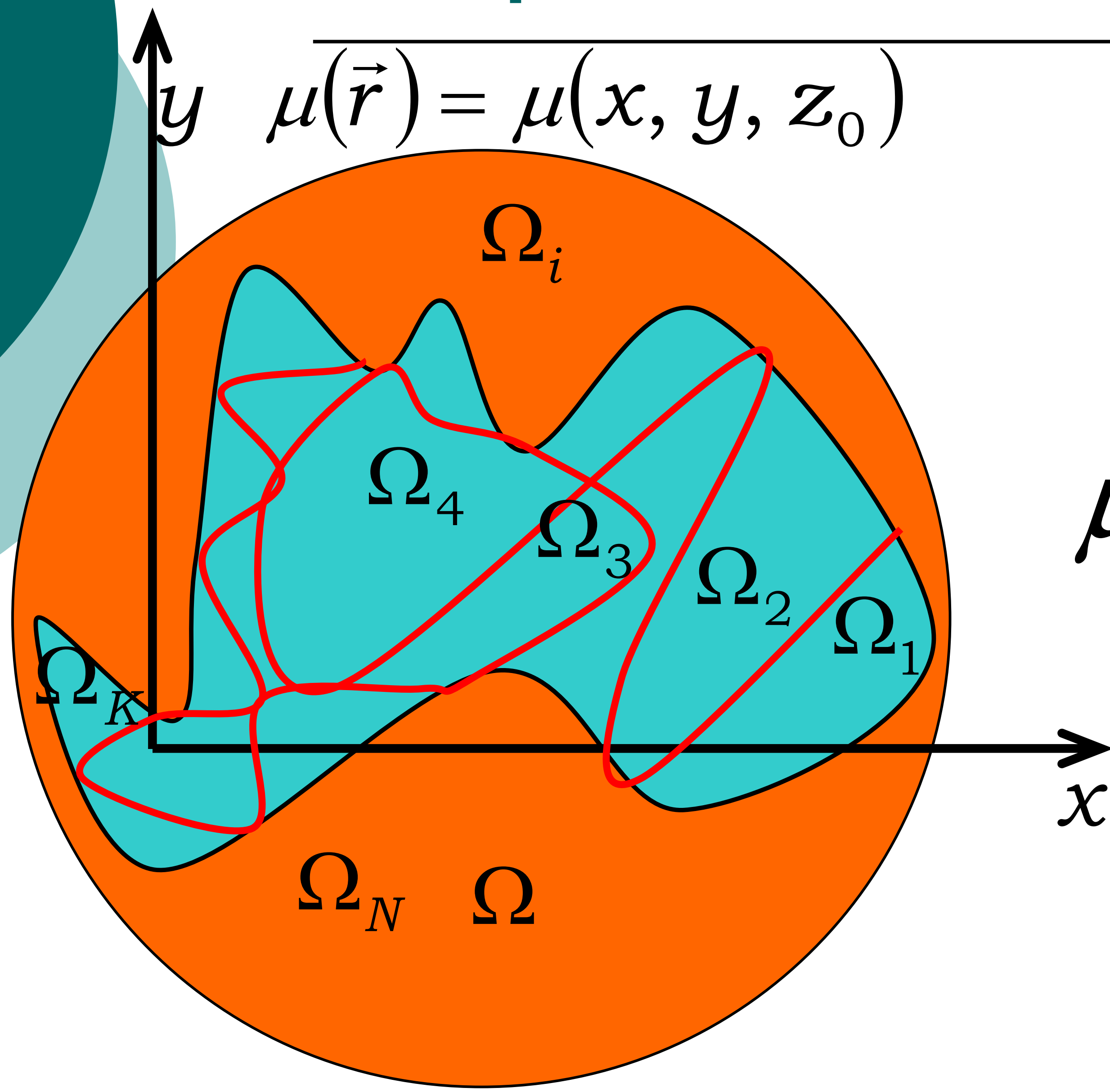
Обчислення набору логарифмічних проекцій

Накопичення у просторі Радона

Зворотне перетворення Радона

Ітераційні алгоритми

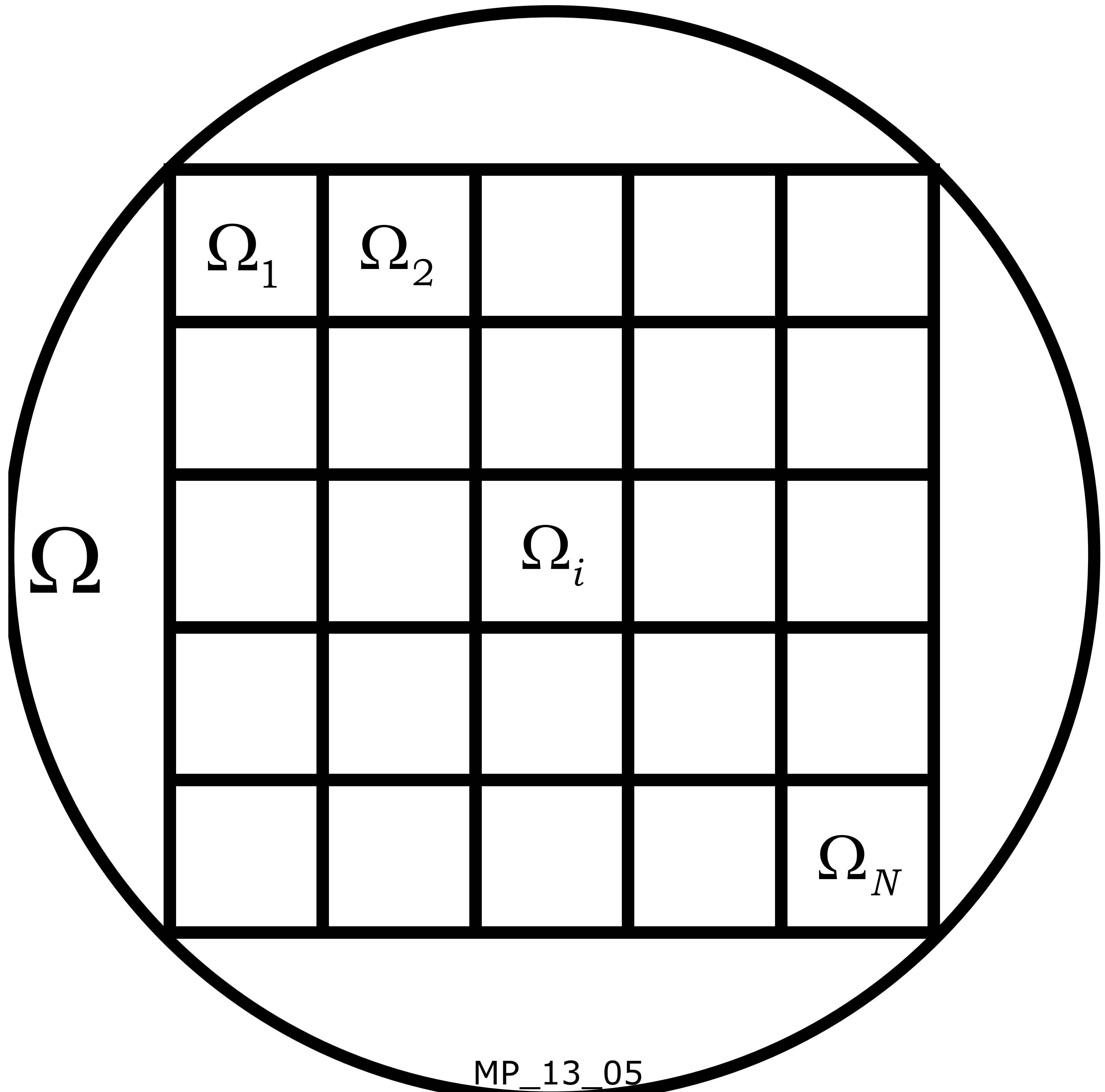
$\mu(\vec{r}) = \mu(x, y, z_0)$



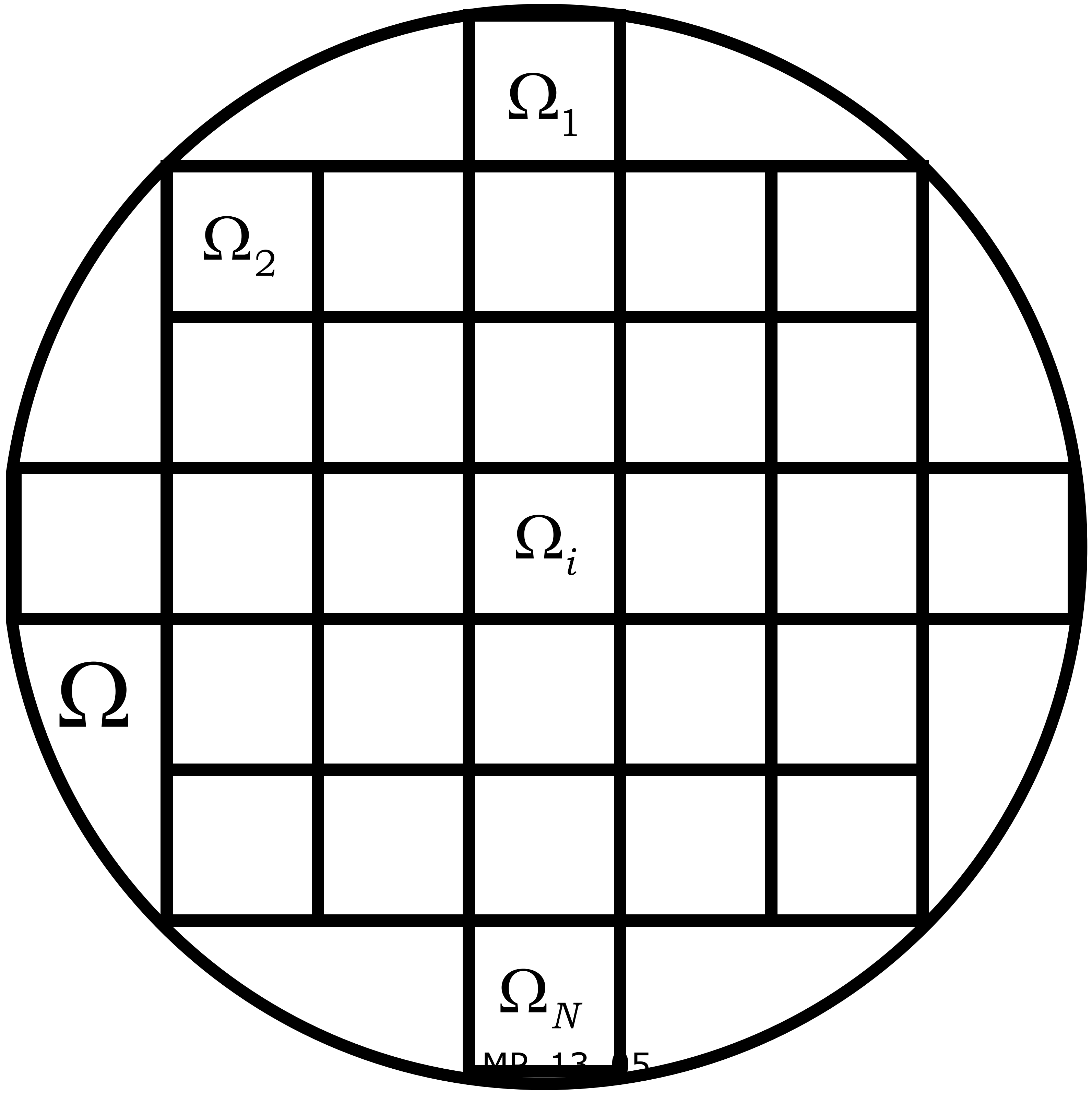
$$\Omega = \sum_{n=1}^{N} \Omega_n$$

$$\mu(x, y) = \mu_n, \ (x, y) \in \Omega_n$$

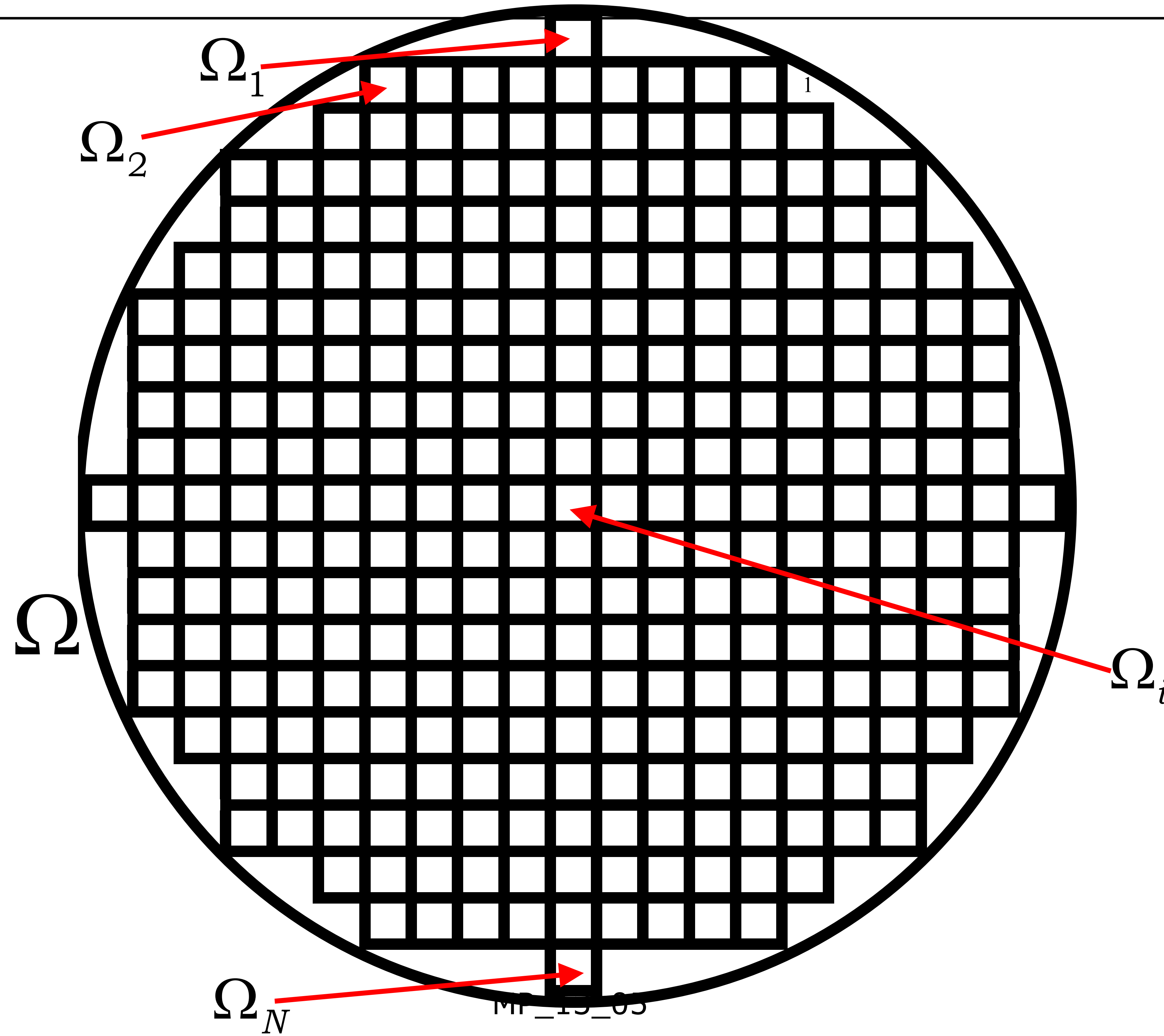
Вибір підобластей.



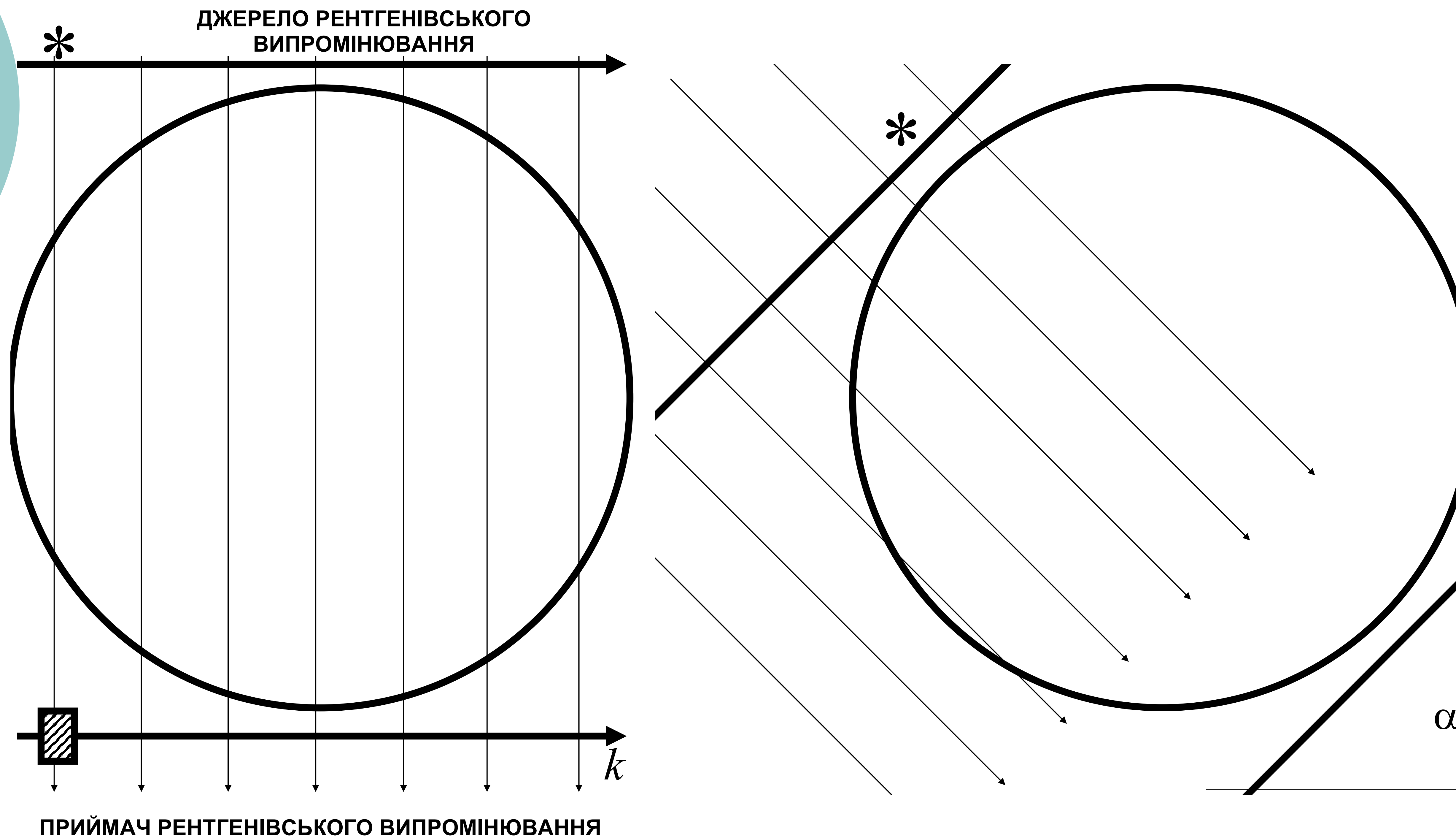
Вибір підобластей.



Вибір підобластей.

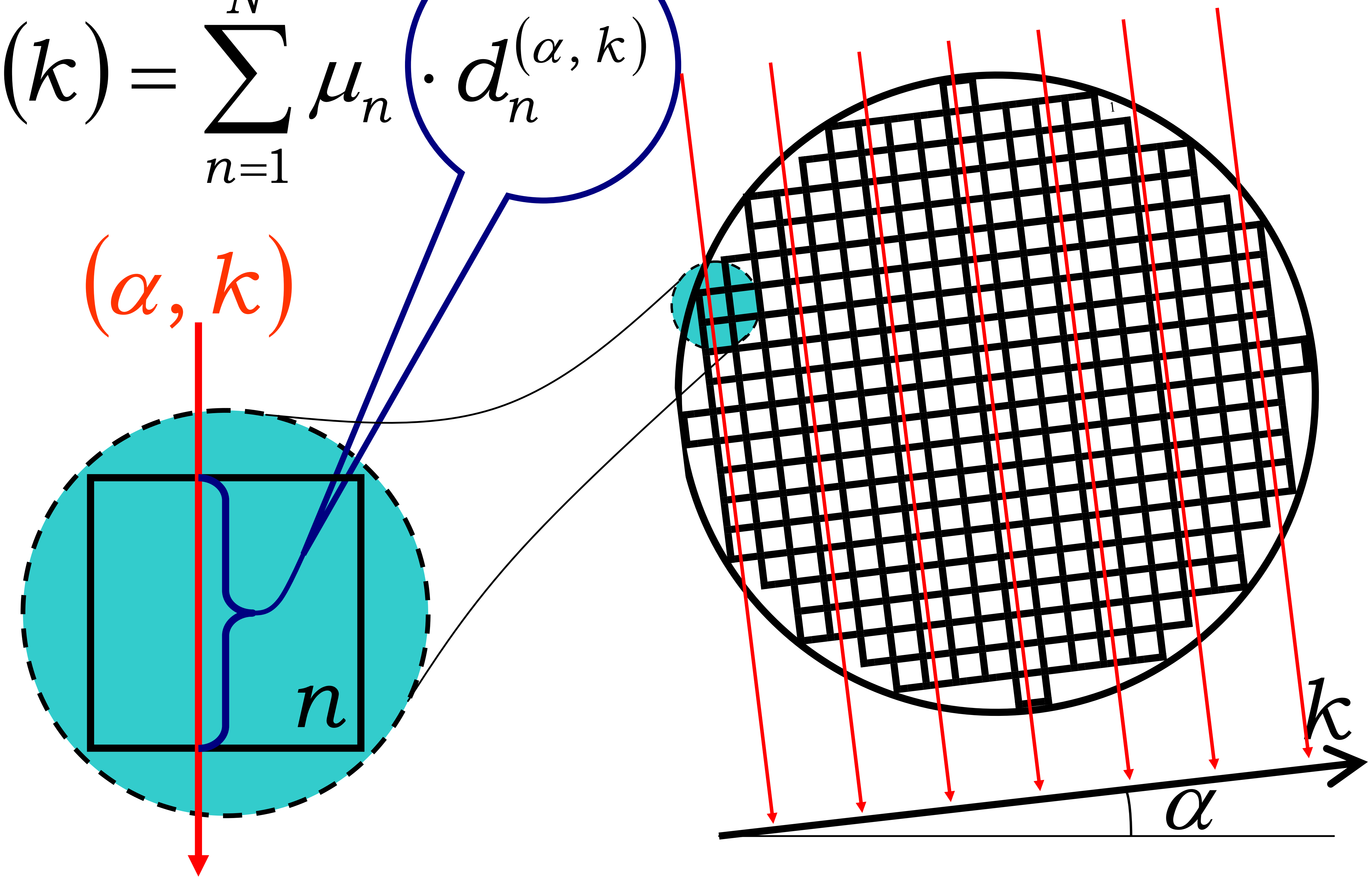


Сканування.


ДЖЕРЕЛО РЕНТГЕНІВСЬКОГО
ВИПРОМІНЮВАННЯ
*
k
ПРИЙМАЧ РЕНТГЕНІВСЬКОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ
*
α

Сканування.

$$i_\alpha(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot d_n^{(\alpha,\,k)}$$



Сканування.

$$i_\alpha(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot d_n^{(\alpha,\, k)}$$

$$k = -k_{\max} \div k_{\max}$$

$$\alpha = 0 \div 180^\circ$$

$$d_n^{(\alpha,\, k)}, n = 0 \div N$$

Реконструкція.

$$i_\alpha(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot d_n^{(\alpha,k)} \qquad d_n^{(\alpha,k)}, n = 0 \div N$$

$$\mu_n^{(0)} = \mu^{(0)} = const, n = 0 \div N$$

$$i_\alpha^{(0)}(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^{(0)} \cdot d_n^{(\alpha,k)}$$

$$\Delta i_\alpha^{(1)} = i_\alpha^{(1)} - i_\alpha^{(0)}(k) = i_\alpha^{(1)} - \sum_{n=1}^{N} \mu_n^{(0)} \cdot d_n^{(\alpha,k)}$$

Реконструкція.

$$i_\alpha(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot d_n^{(\alpha,\,k)} \qquad d_n^{(\alpha,\,k)},\, n = 0 \div N$$

$$\Delta i_\alpha^{(1)} \Rightarrow \Delta\mu_n^{(1)} \Rightarrow \mu_n^{(2)} = \mu_n^{(0)} + \Delta\mu_n^{(1)}$$

Реконструкція.

$$i_\alpha(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n \cdot d_n^{(\alpha,k)} \qquad d_n^{(\alpha,k)}, n = 0 \div N$$

$$i_\alpha^{(i)}(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^{(i-1)} \cdot d_n^{(\alpha,k)} \qquad \Delta i_\alpha^{(i)} = i_\alpha^{(i)} - i_\alpha^{(i-1)}$$

$$\Delta i_\alpha^{(i)} \Rightarrow \Delta \mu_n^{(i)} \Rightarrow \mu_n^{(i)} = \mu_n^{(i-1)} + \Delta \mu_n^{(i)} \qquad i \Rightarrow i+1$$

$$\mu_n^{(0)} = \mu^{(0)} = const, n = 0 \div N$$

$$i_\alpha^{(0)}(k) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^{(0)} \cdot d_n^{(\alpha,k)}$$