

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 1:

«Операторы, их собственные функции и собственные значения»

Задачи

1. Перемножьте операторы $\hat{L} - \hat{M}$ и $\hat{L} + \hat{M}$.

Произведение

$$(\hat{L} - \hat{M})(\hat{L} + \hat{M}) = \hat{L}(\hat{L} + \hat{M}) - \hat{M}(\hat{L} + \hat{M}) = \hat{L}^2 - \hat{M}^2 + (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}).$$

Ответ: $\hat{L}^2 - \hat{M}^2 + (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})$.

2. Для операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$, удовлетворяющих соотношению $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$, найдите $\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L}$.

К соотношению $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$ добавим и отнимем $\hat{M}\hat{L}\hat{M}$

$$\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L}\hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})\hat{M} + \hat{M}(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}) = 2\hat{M}$$

т.к. $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$.

Ответ: $\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L} = 2\hat{M}$.

3. Для операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$, удовлетворяющих соотношению $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$, найдите $\hat{L}f(\hat{M}) - f(\hat{M})\hat{L}$.

Используя результаты предыдущей задачи, докажем, что полученное при $n = 2$ соотношение верно и для $n + 1$. Пусть

$$\hat{L}\hat{M}^n - \hat{M}^n\hat{L} = n\hat{M}^{n-1},$$

тогда

$$\hat{L}\hat{M}^{n+1} - \hat{M}^{n+1}\hat{L} = \hat{L}\hat{M}^n\hat{M} - \hat{M}(\hat{M}^n\hat{L}) = \hat{L}\hat{M}^n\hat{M} - \hat{M}(\hat{L}\hat{M}^n - n\hat{M}^{n-1}) =$$

$$= \hat{L}\hat{M}^{n+1} - \hat{M}(\hat{L}\hat{M}^n - n\hat{M}^{n-1}) = \hat{L}\hat{M}^{n+1} - \hat{M}\hat{L}\hat{M}^n + n\hat{M}^n = \\ = (\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})\hat{M}^n + n\hat{M}^n = (n+1)\hat{M}^n.$$

Это соотношение справедливо для любого n . Разложим $f(\hat{M})$ в ряд по $\hat{M}$

$$f(\hat{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{M}^n \\ \hat{L}f(\hat{M}) - f(\hat{M})\hat{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\hat{L}\hat{M}^n - \hat{M}^n\hat{L}) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} n\hat{M}^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[f'(0)]^{(n-1)}}{(n-1)!} \hat{M}^{n-1} = f'(\hat{L}).$$

Ответ: $\hat{L}f(\hat{M}) - f(\hat{M})\hat{L}$.

4. Проверьте, является ли оператор возведения в квадрат линейным.

Условие линейности оператора

$$\hat{L}(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1\hat{L}\psi_1 + C_2\hat{L}\psi_2.$$

Возведем в квадрат линейную комбинацию функций

$$(C_1\psi_1 + C_2\psi_2)^2 = (C_1\psi_1)^2 + (C_2\psi_2)^2 + 2C_1C_2\psi_1\psi_2 \neq C_1\psi_1^2 + C_2\psi_2^2.$$

Оператор возведения в квадрат не является линейным.

5. Проверьте, является ли оператор $\hat{L} = \frac{d}{dx}$ линейным.

Условие линейности оператора

$$\hat{L}(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1\hat{L}\psi_1 + C_2\hat{L}\psi_2.$$

Найдем

$$\frac{d}{dx}(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1 \frac{d\psi_1}{dx} + C_2 \frac{d\psi_2}{dx}.$$

Оператор $\hat{L} = \frac{d}{dx}$ является линейным.

6. Докажите, что оператор комплексного сопряжения не является линейным.

Пусть оператор комплексного сопряжения $\hat{K}$. Тогда по определению

$$\hat{K}\psi = \psi^*.$$

Тогда для любых a_1, a_2 и ψ_1, ψ_2 имеем

$$\begin{aligned}\hat{K}(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) &= (a_1\psi_1 + a_2\psi_2)^* = a_1^*\psi_1^* + a_2^*\psi_2^* = \\ &= a_1^*\hat{K}\psi_1 + a_2^*\hat{K}\psi_2 \neq a_1\hat{K}\psi_1 + a_2\hat{K}\psi_2,\end{aligned}$$

что требовалось доказать.

7. Найдите оператор, переводящий функцию $\psi(x)$ в функцию $\psi(x+a)$ (оператор трансляции).

Воспользуемся определением оператора

$$\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a)$$

и разложим функцию $\psi(x+a)$ в ряд по степеням a :

$$\psi(x+a) = \psi(x) + a \frac{d\psi}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \psi(x).$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$, можем записать получившийся

ряд в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \psi(x) = e^{a \frac{d}{dx}} \psi(x)$, а оператор

$$\hat{T}_a = e^{a \frac{d}{dx}}.$$

Ответ: $\hat{T}_a = e^{a \frac{d}{dx}}$.

8. Найдите оператор, переводящий функцию $\psi(\varphi)$ в функцию $\psi(\varphi+\alpha)$, где φ – угловая переменная (оператор поворота пространства на угол α).

Воспользуемся определением оператора

$$\hat{T}_\alpha\psi(\varphi) = \psi(\varphi+\alpha)$$

и разложим функцию $\psi(\varphi+\alpha)$ в ряд по степеням α :

$$\psi(\varphi+\alpha) = \psi(\varphi) + \alpha \frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{d\varphi^n} \psi(\varphi).$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha \frac{d}{d\varphi}\right)^n}{n!} = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}$, можем записать оператор

$$\hat{T}_\alpha = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}.$$

Ответ: $\hat{T}_\alpha = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}$.

9. Найдите собственные функции и собственные значения оператора $\frac{d}{d\varphi}$.

Уравнение на собственные функции и собственные значения

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \lambda\psi.$$

Решение уравнения следует искать в виде $\psi = Ae^{\alpha\varphi}$, где $\alpha = \lambda$. По условию угловой периодичности переменной $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$,

$$Ae^{\lambda\varphi} = Ae^{\lambda(\varphi+2\pi)} = Ae^{\lambda\varphi} e^{2\pi\lambda}, \quad e^{2\pi\lambda} = 1,$$

что может быть, если $\lambda = im$, где m – целое.

Пронормируем функцию

$$1 = \int_0^{2\pi} A^* e^{-im\varphi} A e^{im\varphi} d\varphi = |A|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = |A|^2 2\pi,$$

откуда $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тогда собственная функция

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

Ответ: $\lambda = im, \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$.

10. Найдите собственные функции и собственные значения оператора $\sin \frac{d}{d\varphi}$.

Уравнение на собственные функции и собственные значения

$$\sin \frac{d\psi}{d\varphi} = \lambda \psi.$$

Чтобы решить это уравнение, разложим оператор $\sin \frac{d}{d\varphi}$ в степенной ряд

$$\sin \frac{d}{d\varphi} \psi = \left(\frac{d}{d\varphi} - \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{1}{5!} \frac{d^5}{d\varphi^5} - \dots \right) \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1}}{d\varphi^{2k+1}} \psi.$$

Решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1}}{d\varphi^{2k+1}} \psi = \lambda \psi$$

следует искать в виде $\psi = Ae^{i\alpha\varphi}$ и из требования периодичности функции $\alpha = im$, где m – целое. Нормировка на 1 дает $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Подставим эту функцию в уравнение и получим собственные значения:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (im)^k = \sin(im).$$

Ответ: $\lambda = \sin(im)$, $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$.

11. Найдите собственное значение оператора $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}$, соответствующее собственной функции $f(x) = \sin kx$.

Согласно определению собственных функций $f(x)$ и собственных значений λ оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}f(x) = \lambda f(x),$$

применим определение к заданной функции

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin kx = -k^2 \sin kx.$$

Сравнивая данное равенство с определением, получаем, что

заданной функции соответствует собственное значение оператора $\hat{L}$:

$$\lambda = -k^2.$$

Ответ: $\lambda = -k^2$.

12. Найдите спектр собственных значений и собственных функций уравнения $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k^2 f(x)$, если граничные условия имеют вид $f(0) = 0$, $f(a) = 0$.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$$

волновое уравнение. Его общее решение:

$$f(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

где A и B – произвольные постоянные интегрирования.

Из граничных условий

$$f(0) = 0 \Rightarrow B = 0,$$

$$f(a) = 0 \Rightarrow A \sin ka + B \cos ka = 0.$$

То есть постоянная A – произвольная, а $\sin ka = 0$ при $ka = \pi n$, где n – целое. Т.е. $k = \frac{\pi n}{a}$. Собственные функции уравнения:

$$f(x) = A \sin \frac{\pi n x}{a},$$

а соответствующие им собственные значения

$$k = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ответ: $f(x) = A \sin \frac{\pi n x}{a}$, $k = \frac{\pi n}{a}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

13. Найдите условие нормировки волн де Бройля. Волна де Бройля имеет вид:

$$\psi(x, t) = C \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right) = \psi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right),$$

где

$$\psi(x) = C \exp \frac{ipx}{\hbar}.$$

Если период волны де Бройля равен ℓ , то есть $\psi(x) = \psi(x + \ell)$, то

$$C \exp \frac{ipx}{\hbar} = C \exp \frac{ipx}{\hbar} \cdot \exp \frac{ip\ell}{\hbar},$$

то есть

$$\exp \frac{ip\ell}{\hbar} = 1,$$

следовательно,

$$p = \frac{2\pi n}{\ell} \hbar.$$

Из условий нормировки

$$\int_0^{\ell} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

или

$$\int_0^{\ell} C^* e^{\frac{ipx}{\hbar}} C e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx = |C|^2 \int_0^{\ell} dx = |C|^2 \ell = 1,$$

то есть

$$C = \frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

Отсюда нормировка волны де Бройля имеет вид:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right).$$

Для трехмерного случая

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{\ell_x} \hbar, \quad p_y = \frac{2\pi n_y}{\ell_y} \hbar, \quad p_z = \frac{2\pi n_z}{\ell_z} \hbar,$$

где $V = \ell_x \cdot \ell_y \cdot \ell_z$ – параллелепипед периодичности, $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Волна де Бройля

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\ell_x \cdot \ell_y \cdot \ell_z}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})\right).$$

Ответ: $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right).$

14. Функция $f(\varphi) = Ce^{ik\varphi}$ задана в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Определите нормирующий на единицу множитель C .

Условие нормировки на единицу

$$\int f^*(x) f(x) dx = 1,$$

интегрирование производится по всей области определения функции. Следовательно, для полярной координаты φ нормировка

$$\int_0^{2\pi} C^* e^{-ik\varphi} C e^{ik\varphi} d\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = |C|^2 2\pi = 1,$$

откуда нормирующий множитель

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

а нормированная функция имеет вид:

$$f(\varphi) = \frac{e^{ik\varphi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ответ: $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

15. В момент времени $t = 0$ частица описывается функцией $\psi(x, 0) = Ae^{-a^2 x^2 + ik_0 x}$, где a и k_0 – постоянные. Определите ширину волнового пакета.

Разложим данную функцию в ряд Фурье по k :

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk$$

– волновой пакет, описывающий частицу.

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) e^{ikx} dx = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 + i(k_0 - k)x} dx.$$

Дополняя показатель экспоненты до полного квадрата, получим

$$C(k) = \frac{A}{2\pi} e^{-\frac{(k_0-k)^2}{2a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2} \left(x - i \frac{(k_0-k)}{a}\right)^2} dx = \frac{A}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k_0-k)^2}{2a^2}}.$$

Значение $C(k)$ максимально вблизи $k = k_0$. Выражение

$$|C(k)|^2 dk = \frac{A^2}{2\pi a^2} e^{-\frac{(k_0-k)^2}{a^2}} dk$$

пропорционально вероятности найти у частицы квазиимпульс в интервале $k \div k + dk$. Ширину пакета в квазиимпульсном про-

странстве можно определить как $\Delta k \approx \frac{1}{a}$.

Ответ: $\Delta k \approx \frac{1}{a}$.

16. Пусть собственные функции и собственные значения двух операторов удовлетворяют условиям $\hat{L}_1 f_1(x) = \lambda_1 f_1(x)$ и $\hat{L}_2 f_2(y) = \lambda_2 f_2(y)$. Будет ли собственная функция оператора $\psi(x, y)$ иметь вид $\psi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, если $\hat{L}\psi(x, y) = \lambda\psi(x, y)$, а $\hat{L} = \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2$, причем $\hat{L}_1 = \frac{d}{dx}$ и $\hat{L}_2 = \frac{d}{dy}$?

Решим уравнение на собственные функции и собственные значения:

$$\hat{L}\psi(x, y) = \lambda\psi(x, y).$$

Подставим в него явное значение оператора $\hat{L} = \frac{d^2}{dxdy}$ и функцию $\psi(x, y)$ в виде произведения $\psi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dxdy} f_1(x)f_2(y) &= \frac{d}{dx} \left(f_1(x) \frac{d}{dy} f_2(y) \right) = \frac{d}{dx} (f_1(x)\lambda_2 f_2(y)) = \\ &= \left(\frac{d}{dx} f_1(x) \right) \lambda_2 f_2(y) = \lambda_1 f_1(x) \lambda_2 f_2(y) = \lambda_1 \lambda_2 f_1(x)f_2(y). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\psi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ является собственной функцией оператора $\hat{L}$, соответствующей собственному значению $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$.

Ответ: да.

17. Найдите собственные функции и собственные значения оператора $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Какая волновая функция соответствует проекции момента $L_z = 3\hbar$?

Уравнение на собственные функции и собственные значения

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \psi &= \lambda \psi, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \lambda \psi \end{aligned}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{\psi} = i\hbar\lambda d\varphi,$$

его решение $\psi = Ce^{i\hbar\lambda\varphi}$. В силу периодичности функции угловой координаты $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$:

$$Ce^{i\hbar\lambda\varphi} = Ce^{i\hbar\lambda\varphi + i\hbar\lambda 2\pi}, \quad e^{i\hbar\lambda 2\pi} = 1,$$

следовательно, $\hbar\lambda = m$, где m – целое. То есть собственному значению $L_z = m\hbar$ соответствует собственная функция $\psi_m = Ce^{im\varphi}$.

Пронормируем ее:

$$1 = \int_0^{2\pi} |\psi_m(\varphi)|^2 d\varphi = |C|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi |C|^2, \quad \text{откуда } C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\text{тогда } \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

Собственному значению $L_z = 3\hbar$ соответствует функция

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$

$$\text{Ответ: } \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad L_z = m\hbar, \quad \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}.$$