

ЗМІСТ

ПРАВИЛА ТЕХНІКИ БЕЗПЕКИ ПРИ ВИКОНАННІ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ	2
ВСТУП	3
1. ОПТИЧНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ	4
1.1. Поширення когерентного світла. Дифракція Френеля та Фраунгофера	4
1.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є	6
2. ЛІНІЙНА ОПТИЧНА ФІЛЬТРАЦІЯ	11
2.1 Лінійні системи	11
2.2 Оптична схема просторової фільтрації	11
2.3 Застосування лінійної просторової фільтрації	13
2.3.1 Метод фазової платівки	13
2.3.2 Метод ножа Фуко	14
2.3.3 Метод дефокусування	14
3. ОПТИЧНЕ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ	16
3.1 Корелятор з частотною площиною	17
3.2 Корелятор зі змінним масштабом	22
3.3 Корелятор з одночасним перетворенням	24
3.4 Корелятор з площиною зображення	27
3.5. Корелятори зі складними узгодженими просторовими фільтрами	27
3.6 Оптимізація параметрів узгодженого просторового фільтра	29
4. СЕНСОР ОПТИЧНОГО ХВИЛЬОВОГО ФРОНТУ ШЕКА – ХАРТМАНА	31
4.1. Сенсор хвильового фронту Шека – Хартмана як лінійна система	33
4.2. Оцінка центроїдів у сенсорі Шека – Хартмана	35
4.2.1. Одновимірний модель фокального зображення у гартманограмі	35
4.2.2. Похибка оцінки центроїду	36
4.2.3. Вимоги до просторової дискретизації зображення	37
4.2.4. Вплив помилки квантування інтенсивності на визначення центроїду	37
4.3. Модальний метод відновлення хвильового фронту	38
4.3.1. Оцінка модальних коефіцієнтів за мінімумом нев'язки (Метод найменших квадратів)	39
4.3.2. Вибір базису	40
Лабораторна робота №1. ОПТИЧНА ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ	41
Порядок виконання роботи	41
Контрольні питання	41
Лабораторна робота №2. СУМІСНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є	42
Порядок виконання роботи	42
Контрольні питання	42
Лабораторна робота №3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНЗИ ЗА ДОПОМОГОЮ СЕНСОРА ХВИЛЬОВОГО ФРОНТУ	43
Порядок виконання роботи.	44
Контрольні питання	45
ЛІТЕРАТУРА	46

ПРАВИЛА ТЕХНІКИ БЕЗПЕКИ ПРИ ВИКОНАННІ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Увага! Робота з оптичними квантовими генераторами (ОКГ) містить в собі небезпеку попадання на очі і шкіру людини прямого та відбитого нерозширеного лазерного випромінювання, а також небезпеку ураження струмом високої напруги.

1. Лабораторні роботи виконуються тільки за участю інженерно–технічного персоналу, що обслуговує прилад, або викладача, що проводить лабораторні роботи.
2. При користуванні лабораторними автотрансформаторами ЛАТР–1 чи ЛАТР–2 необхідно пам'ятати, що незалежно від того, на яку напругу встановлена рукоятка автотрансформатора, клемка “навантаження” по відношенню до землі може виявитись під напругою 220 В і доторкання до неї небезпечно для життя.
3. При проведенні лабораторної роботи кришки або дверцята (знімні або ті, що відкриваються) повинні бути зачинені.

ВСТУП

Методи аналізу систем, призначених для передачі та обробки випадкових радіотехнічних сигналів – функцій часу, та оптичних систем, призначених для перетворення світлового поля – функції просторових координат, мають багато спільного. Ця спільність обумовлена загальними закономірностями фізичних процесів, що відбуваються у радіотехнічних та оптичних системах. Наприклад, багатьом електронним приладам та системам формування зображення притаманні такі фундаментальні властивості, як лінійність та інваріантність. Будь-яку схему, прилад, пристрій, що має ці властивості, доцільно описувати математично, використовуючи методи частотного аналізу. Так, якщо підсилювач низьких частот зручно описувати його амплітудно-частотною характеристикою, то систему формування зображення (лінзу, об'єктив) так само зручно описувати просторовою частотною характеристикою – оптичною передавальною функцією. Розділ оптики, у якому перетворення оптичних полів досліджується з позицій теорії лінійних систем та засобами Фур'є аналізу, називається Фур'є-оптикою. Спільною рисою оптичних задач, розв'язаних в термінах лінійних систем, є те, що по-перше, їх лінійність впливає безпосередньо із вигляду відповідних диференціальних рівнянь, по-друге, вхідний і вихідний сигнали лінійної системи мають однаковий фізичний зміст комплексної амплітуди електромагнітного поля або його функції когерентності і розглядаються як функції неперервних координат та часу. Проте, існує ряд важливих задач, в яких співвідношення лінійності є неочевидними, а фізичні величини, для яких ці співвідношення виконуються, різняться за своїм змістом. Так, наприклад, при фотоелектричній реєстрації світла в режимі підрахунку фотонів ймовірність числа фотоподій є лінійним перетворенням густини ймовірності флуктуацій інтенсивності падаючого світла, координата спектральної лінії в спектроаналізаторі лінійно залежить від довжини хвилі тощо. У цьому посібнику значну увагу приділено сенсору хвильового фронту Шека – Хартмана, в якому вхідним сигналом є оптичний хвильовий фронт, а лінійним відгуком – вектор зміщень системи сфокусованих зображень у площині фотодетектора. Взагалі, припущення про неперервність виходу лінійної системи не відповідає більшості експериментів, коли зображення дискретизується в процесі вимірювань і доступне досліднику у вигляді набору вибіркового значень, отриманих з обмеженою точністю. Остання обставина є особливо важливою в обернених задачах відновлення сигналу на вході лінійної системи за його вимірним образом.

Метою цього посібника є ознайомлення студентів із основними методами Фур'є оптики: оптичною фільтрацією, кореляційним аналізом, а також із оберненою задачею відновлення оптичного хвильового фронту сенсором Шека – Хартмана. У посібнику викладено відповідні теоретичні відомості та завдання до трьох лабораторних робіт: «Оптична обробка інформації», «Сумісне перетворення Фур'є» та «Визначення параметрів лінзи за допомогою сенсора хвильового фронту».

1. ОПТИЧНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.

Перетворення Фур'є в оптиці – це досить проста операція, яка передбачає використання одного оптичного елементу – лінзи. Тобто, базовим компонентом оптичних систем обробки інформації є лінза (в реальних оптичних системах для усування аберацій використовують високоточні об'єктиви). Це пояснюється тим, що лінза спроможна перетворювати зображення об'єкта (найчастіше користуються терміном «транспарант»), що знаходиться в передній фокальній площині, в його Фур'є – образ, який знаходиться в задній фокальній площині цієї лінзи. Властивість лінзи виконувати перетворення Фур'є легко витікає з дифракційного інтегралу, який описує поширення монохроматичного світла в вільному просторі [1].

1.1. Поширення когерентного світла. Дифракція Френеля та Фраунгофера.

Дифракція на перешкодах є не єдиною причиною зміни світлової хвилі. В процесі звичайного поширення світла в просторі відбувається зміна поля (його комплексних амплітуд).

Нехай на транспарант з комплексним пропусканням $t(x, y)$ падає плоска монохроматична хвиля. Поле безпосередньо за транспарантом можна описати комплексною функцією $U(x, y)$, яка представляє собою амплітуду та фазу поля, яке пройшло в точці (x, y) . Для обчислення поля $U_z(x_z, y_z)$ в площині паралельній транспаранту, розташованій на відстані z за ним, скористаємось принципом Гюйгенса – Френеля (згідно з яким кожна точка (x, y) хвильового фронту є джерелом сферичних хвиль, що розходяться, вигляду $\exp(jk\vec{r})/|\vec{r}|$. Тоді, загальне поле в кожній точці (x_z, y_z) вихідної площини отримано додаванням поля від всіх точок первинного хвильового фронту:

$$U_z(x_z, y_z) = (j\lambda)^{-1} \iint U(x, y) \left\{ \exp(jkr_{1,2}) / r_{1,2} \right\} \cos\theta \, dx dy, \quad (1.1)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ (λ – довжина хвилі), $r_{1,2}$ – відстань від точки з координатами (x, y) до точки (x_z, y_z) , θ – кут між лінією $r_{1,2}$ та позитивним напрямком осі Z (рис.1.1).

Вважаючи, що відстань $r_{1,2}$ значно більша від фізичних розмірів транспаранта і області спостереження у вихідній площині (розглядається випадок параксіальних променів), знаменник у виразі (1.1) можна замінити на z , $\cos\theta$ – на одиницю, а під знаком експоненти можна зробити так звану апроксимацію Френеля вигляду:

$$r_{1,2} = \left[z^2 + (x_z - x)^2 + (y_z - y)^2 \right]^{1/2} \approx z + (x_z - x)^2 / 2z + (y_z - y)^2 / 2z.$$

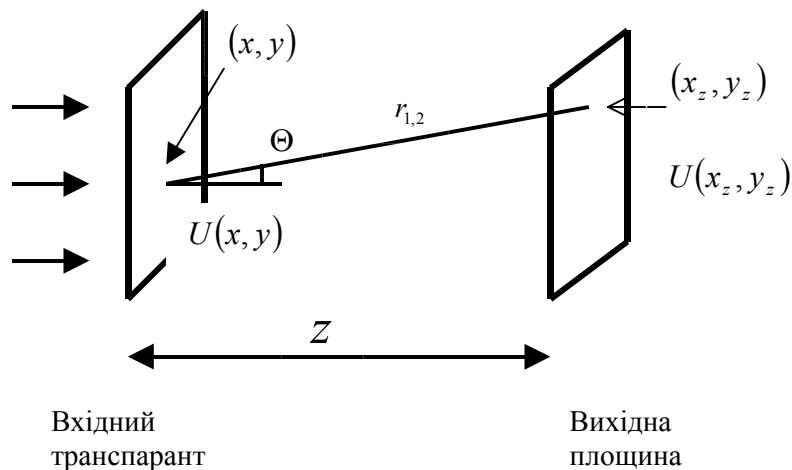


Рисунок 1.1

Тоді поле $U(x, y)$ можна записати у вигляді

$$U_z(x_z, y_z) = (j\lambda z)^{-1} \exp(jkz) \times \iint U(x, y) \exp\left[\frac{jk}{2z} \left[(x_z - x)^2 + (y_z - y)^2 \right]\right] dx dy \quad (1.2)$$

Нехтуючи постійним фазовим множником $\exp(jkz)$, розкриваючи дужки в показнику експоненти та виносячи за знак інтегралу множник, залежний від змінних інтегрування, отримаємо:

$$U_z(x_z, y_z) = (j\lambda z)^{-1} \exp(jk/2z) (x_z^2 + y_z^2) \times \iint U(x, y) \exp\left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{jk}{z} (xx_z + yy_z)\right] dx dy \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) з точністю до коефіцієнта пропорційності описує перетворення Френеля над вхідною функцією $U(x, y)$, а область дифракції, яку ми розглядаємо, називається областю дифракції Френеля (ближня зона).

При певних умовах квадратична фазова функція під знаком інтеграла $\exp\left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2)\right]$ може бути виключена, що забезпечує отримання дуже важливого результату. Це випадок далекого поля (або дальньої зони), який визначається умовою:

$$z \gg k(x_z^2 + y_z^2)_{\max} / 2 \quad (1.4)$$

При його виконанні квадратичний фазовий співмножник стає рівним приблизно одиниці. Тоді вираз (1.3) описує дифракцію Фраунгофера, в якій має місце сталий функціональний зв'язок між вхідною функцією $U(x, y)$ та полем $U_z(x_z, y_z)$. У цьому випадку з точністю до фазового співмножника, який стоїть перед інтегралом, $U_z(x_z, y_z)$ та $U(x, y)$ утворюють пару функцій, зв'язаних перетворенням Фур'є. Таким чином, в класичній дифракції Фраунгофера розподіл комплексних амплітуд $U_z(x_z, y_z)$ є Фур'є – образом вхідної функції $U(x, y)$. Потрібно врахувати, що умова спостереження дифракційної картини Фраунгофера (1.4) достатньо жорстка. Наприклад, при довжині хвилі $\lambda = 0.63$ мкм та величині вхідного транспаранту 2.5 см відстань z стає достатньо великою: $z \gg 1600$ м.

1.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є.

Розглянемо, як змінюється фаза хвилі після її проходження крізь тонку лінзу, максимальна товщина якої дорівнює Δ_0 , а товщина її в точці з координатами (x, y) дорівнює $\Delta(x, y)$. В точці, з координатами (x, y) повна зміна фази після проходження хвилі через лінзу буде мати вигляд

$$\Phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)], \quad (1.5)$$

де n – показник заломлення матеріалу лінзи; $kn\Delta(x, y)$ – зміна фази, викликана лінзою; $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ – зміна фази, яка виникла через проміжок вільного простору, що залишився між двома площинами.

Для того, щоб зрозуміти дію лінзи, необхідно встановити математичний вигляд функції товщини $\Delta(x, y)$. Класичний розрахунок, що дозволяє у параксіальному наближенні виразити $\Delta(x, y)$ як функцію Δ_0 , R_1 та R_2 радіусів кривизни поверхонь лінзи, наведено у [2]. Він дає:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - 0.5(x^2 + y^2)(1/R_1 - 1/R_2). \quad (1.6)$$

Підставляючи (1.6) в (1.5) і вводячи фокусну відстань лінзи f , можна отримати вираз для $\Phi(x, y)$ у вигляді добутку фазових перетворень

$$1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2), \quad (1.7)$$

$$t_l(x, y) = \exp[jkn\Delta_0] \exp[-0.5jk(x^2 + y^2)/f]. \quad (1.8)$$

Фізичний зміст цього перетворення полягає в дії лінзи на плоску хвилю одиначної амплітуди, що нормально падає на її поверхню. Перша з експонент в виразі (1.8) описує постійний фазовий зсув, а друга – є математичним виразом сферичної хвилі (яка збігається при $f > 0$, перетворюється в точку в фокальній площині лінзи $f=0$, яка лежить на оптичній осі системи, та розбігається при $f < 0$).

Розглянемо випадок, коли дуже близько перед лінзою розташовано транспарант, що освітлюється плоскою хвилею. Нехай $U_0(x, y)$ – амплітуда хвилі, яка пройшла крізь транспарант. Тоді розподіл амплітуд зразу ж після лінзи (з точністю до співмножника $\exp[jkn\Delta_0]$) приймає вигляд:

$$U(x, y) = U_0(x, y)t_l(x, y) = U_0(x, y) \exp[-(jk/2f)(x^2 + y^2)] \quad (1.9)$$

Для знаходження розподілу комплексних амплітуд поля в задній фокальній площині лінзи, скористаємось формулою дифракції Френеля. При підстановці розподілу (1.9) в формулу (1.3) квадратичний фазовий співмножник при $U_0(x, y)$ повністю компенсується. Далі, покладаючи $z=f$, отримаємо вираз, який характеризує дифракцію Фраунгофера:

$$U_f(x_f, y_f) = (j\lambda f)^{-1} \exp(jk/2f)(x_f^2 + y_f^2) \times \iint U_0(x, y) \exp[-(jk/f)(xx_z + yy_z)] dx dy \quad (1.10)$$

Тобто, картину дифракції Фраунгофера можна відобразити за допомогою лінзи, яка дає зображення дальнього поля. Оскільки це поле знаходиться на нескінченності, картина дифракції Фраунгофера локалізується в фокальній площині лінзи.

Таким чином, якщо за допомогою спеціального транспаранта з заданими амплітудними та фазовими властивостями, який розташовано в безпосередній

близькості від лінзи, задати деякий певний хвильовий фронт, то лінза з точністю до фазового співмножника виконає двомірне перетворення Фур'є над первинним хвильовим фронтом. Якщо в фокальній площині лінзи реєструється тільки інтенсивність хвильового фронту, цей співмножник не відіграє ніякої ролі. Від нього можна позбутися двома шляхами.

Перший – це використання пристрою, що вносить фазовий зсув в прохідну хвилю $\exp(jk/2f)(x_f^2 + y_f^2)$, згідно з виразом (1.10). Таким пристроєм є лінза з фокусною відстанню f , розташована в площині (x_f, y_f) . Тобто, система, яка складається з двох лінз з фокусними відстанями f , розташованими на відстані f одна від одної, перетворює вхідний сигнал $U_0(x, y)$ в його Фур'є – образ.

Інший спосіб – передбачає розташування вхідного транспаранту в передній фокальній площині лінзи (рис. 1.2).

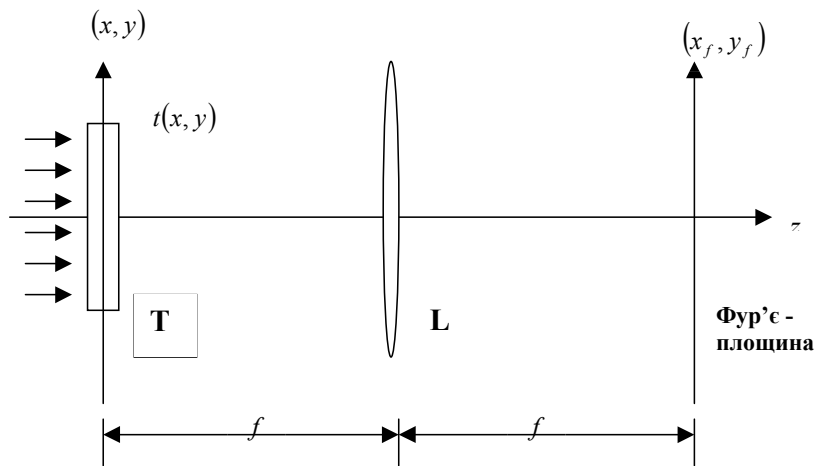


Рисунок 1.2

Тоді квадратичний член по x та y перетворюється в нуль [3] і розподіл амплітуд в задній фокальній площині представляє собою також Фур'є – образ первинного хвильового фронту, який пройшов крізь транспарант.

Враховуючи вище згадане, вираз (1.10) має наступний вигляд:

$$U_f(x_f, y_f) = F\{U_0(x, y)\} = \tag{1.11}$$

$$= \iint U_0(x, y) \exp[-(jk/f)(xx_f + yy_f)] dx dy$$

де символ $F\{U_0(x, y)\}$ означає Фур'є – перетворення над функцією $U_0(x, y)$.

Доцільно розглянути вираз (1.11) для деяких конкретних функцій $U_0(x, y)$. В деяких випадках рішення можна отримати аналітично в компактному вигляді, в інших же інтегрування повинно виконуватись чисельними методами. Деякі добре відомі співвідношення відіграють важливу роль.

1. Розглянемо дифракцію на прямокутній апертурі висотою $2b$ та шириною $2a$ [4]. При цьому розподіл комплексних амплітуд в Фур'є – спектрі дається виразом

$$U_f(x_f, y_f) = 4ab \cdot \text{sinc}(kax_f / f) \cdot \text{sinc}(kby_f / f), \tag{1.12}$$

де $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Особливістю отриманої дифракційної картини є те, що вона симетрична відносно обох осей та має ряд неперервних ліній нульової амплітуди,

що перетинають її в двох взаємно перпендикулярних напрямках та розташовані одна від одної на відстанях відповідно $f\lambda/2a$ та $f\lambda/2b$. В результаті цього утворюються ізольовані площинки амплітуди, в межах кожної з яких фаза постійна, однак при переході амплітуди через нуль фаза змінюється на 180° .

Таким чином, в такому полі існують тільки два значення фази, що обумовлено симетрією апаратної функції (вона має центральну симетрію). І навпаки, апертури, які не мають центральної симетрії, такі як трикутна апертура, мають перетворення Фур'є з неперервною фазою від 0 до 2π рад. До цього ж, картина дифракції від трикутної апертури не може бути описана аналітично в компактному вигляді.

2. Картина дифракції від круглої апертури діаметром $2a$ має кругову симетрію та описується аналітично в радіальних координатах r таким чином:

$$U(r) = \pi a^2 \{ [2I_1(kar/f)] / (kar/f) \}, \quad (1.13)$$

де I_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку, r – величина радіус – вектора в площині спостереження.

Розподіл інтенсивності в Фур'є – спектрі описується виразом:

$$I(r) = \pi^2 a^4 \{ [2I_1(kar/f)] / (kar/f) \}^2. \quad (1.14)$$

Цей розподіл іноді ще називають картиною Ейрі. Оскільки кругла апертура має центральну симетрію, то в межах центрального диску картини Ейрі фаза однорідна і дорівнює 0 , а фаза в кільцях – змінюється та приймає значення по черзі π , 0 , π і т.д. Неважко показати, що радіус першого темного кільця визначається виразом:

$$r_0 = 1.22(\lambda f) / 2a \quad (1.15)$$

В попередніх прикладах розглядалась дифракція на апертурах різноманітної форми. В цих випадках амплітудний коефіцієнт пропускання екрану дорівнює:

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{в межах апертури} \\ 0 & \text{поза межами апертури} \end{cases}. \quad (1.16)$$

3. Цікаво розглянути більш загальний тип вхідного екрану, коли амплітудний коефіцієнт пропускання є наперед заданою функцією координати. Залежність поглинання від координат можна вводити, наприклад, за допомогою транспаранта у вигляді фотографічного діапозитиву, який дозволяє отримати всі дійсні значення t між нулем та одиницею. Розглянемо, наприклад, синусоїдальну амплітудну ґратку, коефіцієнт пропускання якої описується функцією:

$$t(x, y) = 0.5(1 + \cos 2\pi nx), \quad (1.16)$$

де n – деяке число.

Розташуємо транспарант з цим коефіцієнтом пропускання в передній фокальній площині лінзи (рис. 1.3). Якщо його освітити нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, тоді безпосередньо за ним розподіл комплексних амплітуд поля описується виразом:

$$U(x, y) = 0.5 + 0.25 \exp(j2\pi v_x x) + 0.25 \exp(-j2\pi v_x x). \quad (1.17)$$

Для знаходження дифракційної картини Фраунгофера знайдемо перетворення Фур'є цього розподілу, скориставшись при цьому інтегральним представлення δ – функції:

$$\begin{aligned} F\{0.5 + 0.25 \exp[j2\pi v_x x] + 0.25 \exp[-j2\pi v_x x]\} = \\ = 0.5 \delta(0,0) + 0.25 \delta(-v_x,0) + 0.25 \delta(v_x,0) \end{aligned}. \quad (1.18)$$

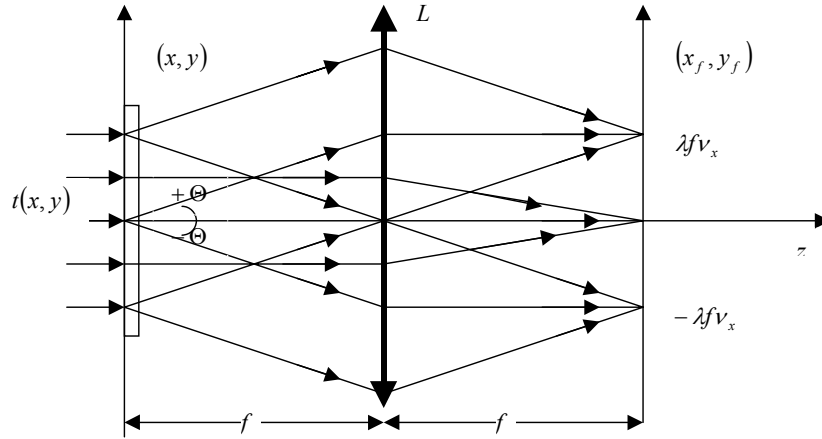


Рисунок 1.3

Аналіз виразів (1.17) і (1.18) показує, що зразу ж за транспарантом утворюються три плоскі хвилі. Одна з них, розповсюджується вздовж оптичної осі і збирається лінзою в точку (0,0) на Фур'є – площині. Ця хвиля відповідає постійній складовій коефіцієнта пропускання (1.16). Дві інші – хвилям, що дифрагували. Вони розповсюджуються відповідно під кутами $\theta \approx \pm \arcsin(\lambda v_x)$ до осі оптичної системи і збираються на Фур'є – площині в точках $(\pm x_f, 0)$ на осі x_f , які відстоять від точки (0,0) на відстань $x_f = \lambda f v_x$. Поява цих хвиль обумовлена періодичною структурою пропускання $t(x, y)$ транспаранта з просторовим періодом, який дорівнює $1/v_x$. Величина v_x називається просторовою частотою і, в наближенні малих кутів, дорівнює:

$$v_x = x_f / \lambda f \quad (1.19)$$

Звідси випливає, що величина амплітуди світла в Фур'є – площині з координатою x_f пропорційна амплітуді просторової гармоніки з просторовою частотою v_x . Аналогічно, можна ввести поняття просторових частот для координати y :

$$v_y = y_f / \lambda f \quad (1.20)$$

Враховуючи вище згадане, можна переписати вираз (1.10) для перетворення Фур'є, яке здійснюється лінзою у вигляді:

$$U_f(x_f, y_f) = \iint U_0(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy \quad (1.21)$$

Фізично це означає, що амплітуда і фаза хвильового фронту в Фур'є – площині з координатою (x_f, y_f) визначається амплітудою і фазою спектральної гармоніки з просторовою частотою:

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [(x_f / \lambda f)^2 + (y_f / \lambda f)^2]^{1/2} \quad (1.22)$$

Треба зауважити, що поняття просторової частоти аналогічно поняттю часової частоти в електроніці, але має важливі відмінності:

1. Двовірний характер просторових частот дозволяє доповнити класичний частотний аналіз виявленням залежності від орієнтації в площині $U(x, y)$.
2. Просторово – частотний спектр функції $U(x, y)$ є реальним і фізично доступним. Виключає використання спектроаналізаторів. Необхідна лише лінза та

транспарант з записаною на ньому функцією, і можна спостерігати розподіл світла в задній фокальній площині лінзи, яка є частотною площиною.

Отже, з теоретичних відомостей можемо логічно визначити області застосування когерентного оптичного Фур'є – аналізу [5–8]: розпізнавання і класифікація образів, вимірювання розмірів частинок, частотний аналіз широкосмугових сигналів і т.п.

2. ЛІНІЙНА ОПТИЧНА ФІЛЬТРАЦІЯ.

Принцип фільтрації просторових частот оптичними засобами виник на основі аналізу процесу утворення зображення, який в когерентній оптичній системі можна представити як процес подвійної дифракції Фраунгофера. Історично перші експерименти по зміні структури оптичних зображень шляхом впливу на їх Фур'є – спектри були зроблені Аббе в 1873 році і Портером в 1906 році. Їх кінцевою метою була перевірка створеної Аббе теорії формування зображення в мікроскопі. Експеримент Аббе – Портера полягав у наступному: сітка з тонких вертикальних та горизонтальних дротиків освітлювалась когерентним світлом, за сіткою встановлювалась лінза, в фокальній площині якої розташовувалась маска у вигляді горизонтальної або вертикальної щілини, при цьому в площині зображення лінзи залишались тільки відповідно вертикальні або горизонтальні лінії [2].

2.1 Лінійні системи.

При аналізі сучасних когерентних оптичних систем доцільно використовувати апарат теорії лінійних систем. Це обумовлено двома причинами: по – перше, велику кількість оптичних систем можна вважати лінійними (в деяких межах); по – друге, точне рішення ряду задач лінійної оптики може бути отримано за допомогою стандартних методів.

Система називається лінійною, якщо її реакція на суму вхідних збурень тотожно дорівнює сумі реакцій, які викликаються кожним вхідним збуренням окремо. Назвемо систему просторово – інваріантною, якщо її реакція на вхідне збурення точковим джерелом змінюється тільки за просторовим розташуванням, але не змінюється за формою і амплітудою при зсуві точкового джерела у вхідній площині.

У випадку, коли над вхідним сигналом $U(x, y)$ здійснюється операція лінійної просторово – інваріантної фільтрації, вихідний сигнал $g(x, y)$ знаходиться по цьому вхідному сигналу за допомогою простого рівняння згортки [7]:

$$g(x, y) = U(x, y) \otimes h(x, y) = \iint U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.1)$$

де \otimes – символ згортки, $h(x, y)$ – реакція фільтра в точці з координатами (x, y) на одиничний імпульс (точкове джерело) в точці з координатами (ξ, η) . Згідно з теоремою про згортку [9], зв'язок між відповідними перетвореннями Фур'є $G(v_x, v_y) = F\{g(x, y)\}$, $U(v_x, v_y) = F\{U(x, y)\}$ та $H(v_x, v_y) = F\{h(x, y)\}$ дається виразом:

$$G(v_x, v_y) = U(v_x, v_y) H(v_x, v_y). \quad (2.2)$$

Такий простий взаємозв'язок між спектрами Фур'є вхідного та вихідного сигналів і так званою передаточною функцією H – головна властивість, завдяки якій застосовують аналіз систем даного типу. Як буде показано нижче, з цього взаємозв'язку випливає простий метод реалізації лінійних просторово – інваріантних операцій засобами когерентної оптики.

2.2 Оптична схема просторової фільтрації.

Найчастіше системи лінійної оптичної фільтрації в когерентному світлі побудовані за схемою, що зображена на рис. 2.1. Вона складається з двох лінз L1 та L2, які знаходяться одна від одної на відстані, що дорівнює сумі їх фокусних

відстаней $2f$. Плоска хвиля нормально падає на транспарант T , розташований в передній фокальній площині лінзи $L1$. Функція пропускання транспаранта є вхідним (двомірним) сигналом $U(x, y)$, який потрібно обробити. Лінза $L1$ виконує перетворення Фур'є вхідного сигналу, в результаті чого в задній фокальній площині (Фур'є – площині) відображається двомірний просторово – частотний спектр цієї функції $U(x_f, y_f)$. Для виконання операції згортки u з h необхідно спочатку перемножити U та H . Ця операція здійснюється оптично шляхом розміщення в частотній площині фільтра–маски з передаточною характеристикою H .

Безпосередньо за фільтром розподіл комплексних амплітуд описується виразом (2.2), тобто ми спостерігаємо вже змінений Фур'є–спектр вхідного сигналу. Лінза $L2$ повторно виконує перетворення Фур'є, що дозволяє у вихідній площині спостерігати на екрані E (або сфотографувати) відфільтрований вхідний сигнал:

$$g(x, y) = F\{U(x_f, y_f)H(x_f, y_f)\} = u(x, y) \otimes h(x, y) \quad (2.3)$$

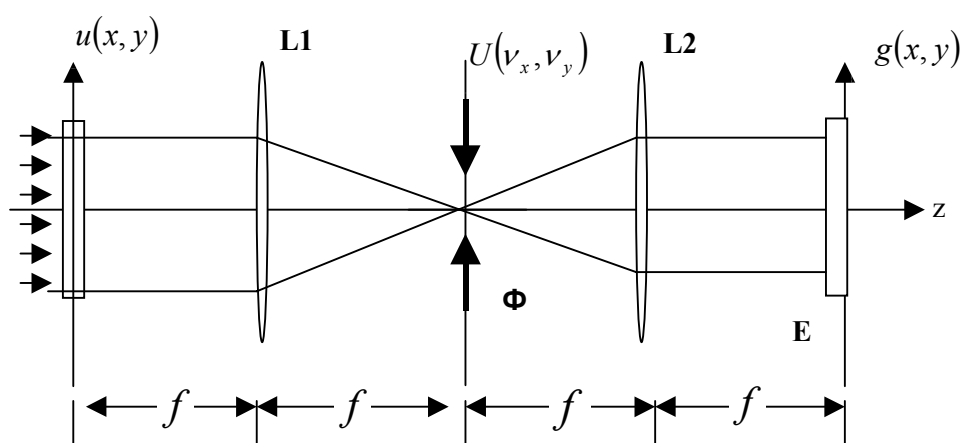


Рисунок 2.1

Комплексна функція $h(x, y)$, яка є Фур'є – образом передаточної функції $H(v_x, v_y)$, називається імпульсним відгуком просторового фільтра. Вона описує зображення, яке формується у вихідній площині, коли на вході розмістити точкове джерело: якщо $u(x, y) = \delta(x, y)$, тоді $g(x, y) = \delta(x, y) \otimes h(x, y) = h(x, y)$.

Таким чином, для обчислення згортки двох двомірних функцій необхідно одну з них подати на вхід схеми просторової фільтрації, а в частотну площину помістити Фур'є – образ другої фільтруючої функції.

Відзначимо деякі особливості операцій просторової фільтрації в когерентному світлі. Вхідні змінні системи просторової фільтрації, так само як і змінні в площині фільтра та у вихідній площині є комплексними величинами. Теоретично для цих комплексних змінних нема обмежень, що дозволяє:

- а) обробляти подану на вхід хвилю, використовуючи при цьому всю інформацію, яка в ній зберігається;
- б) здійснювати з нею будь–яку фільтрацію за допомогою просторових фільтрів з додатними, від'ємними або комплексними модуляційними характеристиками, які можна практично здійснити;
- в) отримати на виході будь–які потрібні функції.

Це дозволяє реалізовувати будь-які лінійні операції просторової фільтрації, які передбачає математика. Практично вони обмежуються лише вмінням експериментатора представляти математичні величини за допомогою існуючих матеріалів (обмежена ширина смуги пропускання, шум, динамічний діапазон і т.п.).

2.3 Застосування лінійної просторової фільтрації.

В розглянутому методі фільтрації просторових частот найчастіше використовуються бінарні просторові фільтри. В найпростішому випадку цей фільтр є маскою, тобто екраном з непрозорого матеріалу, в якому вирізані отвори. В більш складному випадку – це транспарант з амплітудним коефіцієнтом пропускання, який змінюється від 0 до 1. Фільтр вводять в частотну площину системи. За допомогою таких фільтрів можна реалізовувати такі операції:

а) низькочастотну фільтрацію, яка дозволяє послабити шум, усунути растр на зображеннях (наприклад, пригнічувати характерну регулярну структуру газетних знімків), або здійснювати операцію згладжування;

б) високочастотну фільтрацію, яка забезпечує підвищення контрасту зображення, поліпшення його роздільності або виділення на ньому контурів (наприклад, пригнічуючи низькі просторові частоти можна робити більш чіткими трохи розфокусовані фотознімки).

в) смугову фільтрацію, яка застосовується для виявлення прихованих періодичних структур на зображенні або структур певного розміру;

г) напрямлену фільтрацію, яка забезпечує виділення ліній певної просторової орієнтації;

д) мультиплікацію зображень у вигляді рядка або матриці з регулярним кроком за допомогою одномірних та двомірних ґраток.

Зупинимось більш детально на можливості використання просторової фільтрації для візуалізації фазових об'єктів.

Пропускання фазового об'єкту, розташованого у вхідній площині (рис. 2.1), визначається виразом:

$$t(x, y) = \exp[j\Phi(x, y)], \quad (2.4)$$

де $\Phi(x, y)$ – записаний на транспаранті зсув фази, j – уявна одиниця. Лінзи L1 та L2 утворюють зображення предмету у вихідній площині. Однак, око або фотоплівка, яка розміщена в площині зображення (вихідній площині), реєструє тільки розподіл інтенсивності

$$I(x, y) \cong |t(x, y)|^2 = 1 \quad (2.5)$$

тобто в площині зображення буде рівномірно освітлений екран. Існує декілька методів візуалізації зображень, записаних на фазових носіях (фазових об'єктів).

2.3.1 Метод фазової платівки.

Будемо розглядати об'єкти, які створюють тільки невеликі фазові зсуви, такі що

$$t(x, y) \approx 1 + j\Phi(x, y), \quad (2.6)$$

тоді в Фур'є-площині

$$T(v_x, v_y) = \delta(v_x, v_y) + jF\{\Phi(x, y)\}, \quad (2.7)$$

якщо в центрі Фур'є – площини на нульовій просторовій частоті помістити фазову платівку товщиною

$$d = \lambda / 4(n - 1), \quad (2.8)$$

де λ – довжина хвилі світла, n – показник заломлення матеріалу платівки, який дає зсув фази на нульовій частоті на $\pi/2$, то на виході фільтру розподіл амплітуд хвилі буде

$$T_{\Phi}(v_x, v_y) = -j\delta(v_x, v_y) + jF\{\Phi(x, y)\}. \quad (2.9)$$

Після оберненого перетворення Фур'є, виконаного лінзою L2 отримаємо у вихідній площині

$$t_{\Phi}(x, y) = -j + j\Phi(x, y) = -j[1 - \Phi(x, y)]. \quad (2.10)$$

Інтенсивність, яка реєструється, дорівнює

$$I_{\Phi}(x, y) \approx |t_{\Phi}(x, y)|^2 = |1 - \Phi(x, y)|^2 \approx 1 - 2\Phi(x, y). \quad (2.11)$$

Таким чином, ми перетворили фазовий контраст $\Phi(x, y)$ в контраст інтенсивності, пропорційний $2\Phi(x, y)$. Контраст інтенсивності можна підвищити, якщо на фазову платівку нанести шар поглинаючого покриття з амплітудним пропусканням $\alpha < 1$. В граничному випадку ($\alpha = 0$) метод фазової платівки трансформується в метод темного поля, в якому плоска хвиля, яка проходить через фазовий об'єкт без заломлення, просто пригнічується в Фур'є-площині.

2.3.2 Метод ножа Фуко.

Ніж Фуко, який встановлено в площині Фур'є, зрізає половину спектру просторових частот. Подібна операція еквівалентна множенню Фур'є – образу $F\{\Phi(x)\}$ на функцію Хевісайда $Y(v_x)$ [10]. При зворотному перетворенні Фур'є, яке здійснюється лінзою L2, в площині зображення з'явиться спотворена функція $\Phi_1(x)$.

Для її знаходження скористаємось теоремою про згортку

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \otimes W(x), \quad (2.12)$$

де $W(x)$ – Фур'є – образ функції Хевісайда $Y(v_x)$:

$$W(x) = 0.5[\delta(x) - j/\pi x], \quad (2.13)$$

Неважно показати, що інтенсивність спотвореного зображення у вихідній площині описується виразом [10]

$$I_1(x) \approx 1 - \pi^{-1}[\Phi(x) \otimes (1/x)]. \quad (2.14)$$

Для прикладу розглянемо синусоїдальну фазову ґратку

$$\Phi(x) = \alpha \sin v_x x, \alpha < 1. \quad (2.15)$$

Підставляючи (2.15) в (2.14) та пропускаючи проміжні обчислення отримаємо

$$I_1(x) \approx 1 - (\alpha/\pi) \sin(v_x x + \pi/2). \quad (2.16)$$

З (2.16) видно, що ніж Фуко при візуалізації зсуває в просторі фазову синусоїдальну ґратку по фазі на $\Delta\Phi = \pi/2$. Відфільтроване зображення отримує перекося в сторону, протилежну до леза ножа Фуко.

2.3.3 Метод дефокусування.

При дефокусуванні контраст інтенсивності виникає завдяки тому, що зворотне перетворення Фур'є не здійснюється повністю. Будь – які відхилення відтвореного

зображення від первинного утворюють контраст інтенсивності. Причому, при наближенні до площини спостереження до лінзи L2 виникає "темний" контраст (об'єкт буде виглядати темнішим за фон), а при віддаленні – "світлий" контраст. Більш детальне пояснення цього та інших методів візуалізації фазових об'єктів можна знайти в [10].

Нарешті відмітимо, що методи просторової фільтрації прості в реалізації, надійні та достатньо легко змінювані в залежності від різноманітних задач. Їх дуже легко використовувати як засіб для автоматичної обробки інформації, оскільки для будь – якої заданої операції фільтрації параметри просторового фільтру не залежать від характеру зображення, що обробляється.

3. ОПТИЧНЕ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

Розглянемо постановку задачі при розпізнаванні образів. Нехай на вхід оптичної системи подається ряд транспарантів з пропусканням $g(x, y)$, які ми будемо називати сигналами. Необхідно з цього ряду виділити шуканий сигнал $g(x, y)$ та відсіяти інші сигнали. Кожний сигнал $g(x, y)$ формує в Фур'є-площині спектр просторових частот $G(u, v)$. Якщо в Фур'є-площині встановити фільтр з пропусканням $G(u, v)$ (рис.3.1), тоді в той момент, коли на вхід подано сигнал $g(x, y)$, розподіл поля, яке пройшло через фільтр, буде дорівнювати

$$G(u, v)G(u, v) = |G(u, v)|^2 \quad (3.1)$$

тобто дійсній величині. Це означає, що фільтр повністю компенсує кривину хвильового фронту $G(u, v)$, що падає. Таким чином, поле, що проходить через фільтр, буде плоскою хвилею, яка фокусується в яскраву точку (відгук) в фокусі лінзи L3. Якщо на вхід подано сигнал, відмінний від $g(x, y)$, тоді кривина хвильового фронту в загальному випадку не компенсується фільтром, і світло, яке пройшло крізь оптичну систему, вже не буде збиратися у яскраву точку в фокусі лінзи L3 (відгук відсутній).

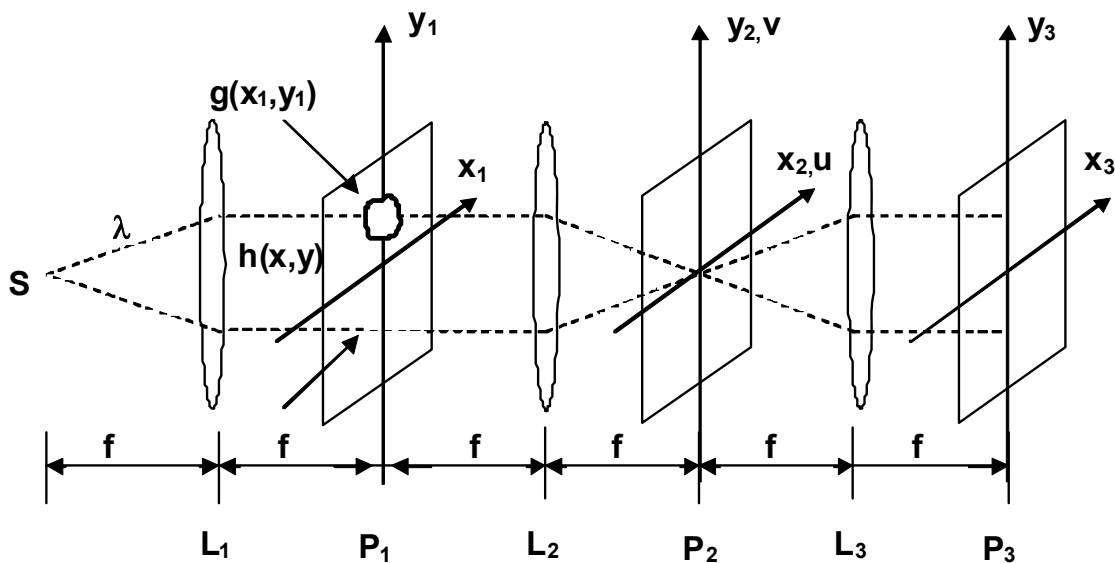


Рисунок 3.1.

Перевага такої системи в тому, що зсув шуканого сигналу у вхідній площині не зменшує яскравості відгуку, а тільки зсуває його на відповідну відстань у вихідній площині [4]. Це дозволяє, наприклад, відшукувати на аерофотознімках об'єкти, які нас цікавлять.

Труднощі полягають у тому, що функція $G(u, v)$ у загальному випадку є комплексна. Цю проблему у 1963 році вирішив Ван-дер-Люгт, який запропонував голографічний метод створення фільтрів, що реєструють як амплітуду, так і фазу хвилі, яка проходить, на амплітудних (тобто поглинаючих) фотоматеріалах [10]. Фільтри такого типу отримали назву узгоджених (з первинним вхідним сигналом) або фільтри Ван-дер-Люгта.

При аналізованні усіх оптичних схем використовуються одні й ті самі позначення для відповідних величин. Наприклад, вхідна площина, площина перетворення та вихідна кореляційна площина позначені відповідно P_1 P_2 P_3 з просторовими координатами у цих площинах відповідно (x_1, y_1) , (x_2, y_2) та (x_3, y_3) . Координати просторових частот у площині перетворення позначені через $(u, v) = (x_2 / \lambda f_2, y_2 / \lambda f_2)$ де λ – довжина хвилі світла, що використовується, f_2 – фокусна відстань лінзи, що робить Фур'є-перетворення над вхідним сигналом. Функції просторових змінних ми позначили маленькими літерами, а їх Фур'є-образи – відповідними великими літерами.

3.1 Корелятор з частотною площиною.

Найпершим і найбільш розповсюдженим оптичним корелятором був корелятор з частотною площиною або система узгодженої просторової фільтрації (рис.3.2).

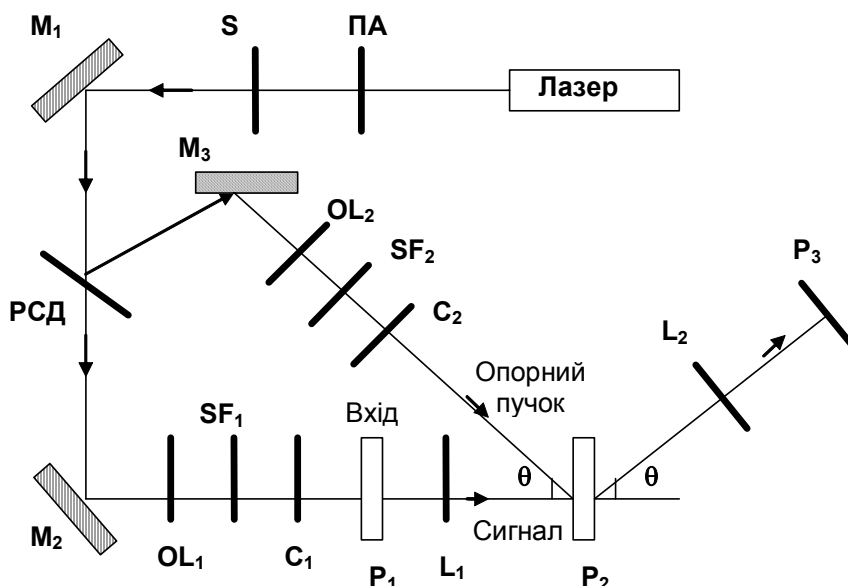


Рисунок 3.2.

ПА – атенюатор інтенсивності, S – фотозатвор, M_1, M_2, M_3 – дзеркала, РСД – регульований світлоподільник, OL_1, OL_2 – лінзи мікрооб'єктива, SF – точкові просторові фільтри низьких частот, C_1, C_2 – коліматори, L_1, L_2 – Фур'є-перетворюючі лінзи.

Для отримання взаємної кореляції вхідної $u(x, y)$ та еталонної $h(x_1, y_1)$ функцій, необхідно спочатку синтезувати в частотній площині P_2 фільтр $H^*(u, v)$, узгоджений з $h(x_1, y_1)$. З цією метою у вхідну площину P_1 направляють похилий (під кутом θ до оптичної осі) опорний пучок від спільного джерела когерентного випромінювання. Змінний атенюатор ПА полегшує настройку елементів схеми та забезпечує візуальний контроль картин розподілів світла у різних площинах схеми. Змінний світлоподільник РСД дозволяє керувати відношенням інтенсивності опорного та об'єктного пучків. Для того, щоб оптичні шляхи для опорного та об'єктного пучків були рівні, застосовується дзеркало M_3 . Така геометрія полегшує встановлення кута між опорним та об'єктним пучками, які в експериментах складають зазвичай приблизно 15° , а також спрощує складання оптичної схеми. При цьому значенні

кута просторові частоти інтерференційної картини виявляються досить високими. (При використанні випромінювання з довжиною хвилі $\lambda=0.63\text{мкм}$ просторова несуча частота дорівнює 412 мм^{-1} .) Для того, щоб зареєструвати цю інтерференційну картину, фотоплівка повинна мати відповідну роздільну здатність. Якщо роздільна здатність матеріалу недостатня для запису таких високих частот, між опорним та об'єктними пучками потрібно встановити менший кут. При цьому для зведення пучків під малим кутом потрібні додаткові оптичні елементи. Додаткові оптичні елементи, такі як просторові фільтри (мікрооб'єктив OL та точкова діафрагма SF), також потрібно використовувати для позбавлення від шумів лазерного випромінювання та впливу дефектів дзеркал, що використовуються.

Після того, як узгоджений просторовий фільтр виготовлений, та знову ж встановлений у площині P_2 , ми повертаємо його навколо оптичної осі на 180° . Завдяки цьому кореляція буде спостерігатись під кутом $+15^\circ$ по відношенню до осі об'єктного пучка, тобто у межах поверхні стола, а не під кутом -15° в напрямку продовження опорного пучка. Цей простий прийом допомагає використовувати стіл з меншою площею. При використанні операції кореляційного аналізу опорний пучок блокується, а у вхідну площину встановлюють транспарант з амплітудним пропусканням $u(x, y)$. Хвиля, що несе інформацію про кореляції вхідного та еталонного зображень, буде виходити з площини P_2 під кутом 15° до оптичної осі корелятора. Друга Фур'є-перетворююча лінза L_2 встановлюється вздовж цього напрямку на фокусній відстані від площини P_2 , а не вздовж осі сигнального пучка. Така схема корелятора істотно зменшує вимоги до розмірів апертур та кутів поля зору використаних лінз.

Розглянемо основні математичні співвідношення, які описують роботу цього корелятора. Спочатку проаналізуємо стадію, на якій здійснюється синтез узгодженого просторового фільтру. Якщо у вхідній площині P_1 помістити транспарант з амплітудним пропусканням $h(x_1, y_1)$, тоді розподіл комплексних амплітуд у площині P_2 буде дорівнювати $U_2(x_2, y_2) = H(u, v)$, де $H(u, v)$ – комплексний Фур'є-образ функції $h(x_1, y_1)$. Таким чином,

$$H(u, v) = \frac{1}{i\lambda f_1} \iint h(x, y) \exp(-2i\pi(ux + vy)) dx dy \quad (3.2)$$

Приймаємо, що будь-які перетворення Фур'є, які виконуються за допомогою лінз, виконуються точно, і отже, ми не враховуємо постійних коефіцієнтів амплітудного пропускання, а також множником $-i/\lambda f_1$ перед інтегралом. Координати просторових частот (u, v) у площині P_2 пов'язані з просторовими координатами (x_2, y_2) цієї площини співвідношеннями $x_2 = f_1 \lambda u$ та $y_2 = f_1 \lambda v$, де λ – довжина хвилі світла, f_1 – фокусна відстань Фур'є-перетворюючої лінзи L_1 .

Розподіл комплексних амплітуд у площині P_2 , що створює опорний пучок з постійною амплітудою r_0 , який падає на цю площину під кутом θ до об'єктного пучка, має вигляд $U_r(x, y) = r_0 \exp(-2i\pi\alpha x_2)$, де $\alpha = \sin \theta / \lambda$ – просторова частота, яка пов'язана з похилим падінням опорного пучка (в результаті в частотній площині

відбувається інтерференція Фур'є-образу еталонної функції $H(u, v)$ з опорною хвилею $U_r(x, y) = r_0 \exp(-2i\pi\alpha x_2)$.

При запису узгодженого фільтру припускають, що амплітудне пропускання фоточутливого матеріалу (фотоплівки) пропорційно розподілу інтенсивності світла, що на нього падає. Тоді при інтерференції у площині P_2 хвиль U_2 та $U_r(x, y)$, амплітудне пропускання отриманого узгодженого фільтру запишеться у вигляді

$$t(x_2, y_2) = |U_2 + U_r|^2 = r_0^2 + |H|^2 + r_0 H \exp(2i\pi\alpha x_2) + r_0 H^* \exp(-2i\pi\alpha x_2) \quad (3.3)$$

Для отримання кореляції опорний пучок перекривається, у площині P_2 розташовується узгоджений фільтр $t(x_2, y_2)$, а у вхідній площині P_1 встановлюється транспарант з амплітудним пропусканням $g(x_1, y_1)$. При цьому розподіл комплексних амплітуд світла, що падає на площину P_2 , описується функцією $G(u, v)$, і після проходження цього розподілу крізь узгоджений фільтр ми маємо $G(u, v)t(x_2, y_2)$. Оскільки площина P_2 збігається з передньою фокальною площиною другої Фур'є-лінзи L_2 з фокусною відстанню f_2 , розподіл комплексних амплітуд у задній фокальній площині цієї лінзи є Фур'є-образ результату множення $G \cdot t$. Таким чином,

$$\begin{aligned} U_3(x_3, y_3) = & r_0 g \delta(x, y) + [h \oplus h \oplus g] \delta(x, y) + \\ & + r_0 [h * g * \delta(x_3 + \alpha \lambda f_2, y_3)] + \\ & + r_0 [g \oplus h * \delta(x_3 - \alpha \lambda f_2, y_3)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $*$ – позначає згортку, \oplus – кореляцію.

У виразі (3.4) два перших доданки відповідають розподілам, які локалізовані на оптичній осі у вихідній площині. Третій доданок представляє собою згортку $h * g$, яка формується пучком, що виходить з площини P_2 під кутом $+\theta$, і цей розподіл локалізується у вихідній площині в околі точки з координатами $(-\alpha \lambda f_2, 0)$. Розподіл, що описує останній доданок з кореляцією $g \oplus h$ (саме це нас цікавить), створюється пучком, що виходить з площини P_2 під кутом $-\theta$, і локалізується у вихідній площині біля точки з координатами $(\alpha \lambda f_2, 0)$. Реально, при встановленні фотоплатівки з записаним на ній узгодженим фільтром в площину P_2 її повертають на кут 180° навколо оптичної осі, а лінзу L_2 розміщують в пучку, що виходить з площини P_2 під кутом $+\theta$, для того щоб сформувати на виході розподіл, що описує останнім доданком. Тоді розподіл, що формується у задній фокальній площині лінзи L_2 на її оптичній осі, представляє собою шукану функцію взаємної кореляції $g \oplus h$. Різні інші частини вхідної площини відображаються поблизу початку координат сформованої таким чином вихідної кореляційної площини. Зауважимо, що положення яскравої плями світла в цій площині однозначно зв'язано з положенням еталонної функції h у вхідному зображенні g , а інтенсивність цієї плями вказує на міру відповідності між h і g . З метою спрощення позначень при визначенні координат (x_3, y_3) у площині P_3 напрямки координатних осей, як правило, змінюють на обернені по відношенню до координатних осей у площинах P_1 та P_2 . Треба

зауважити, що масштабний коефіцієнт між вхідною та кореляційною площинами дорівнює відношенню фокусних відстаней f_2/f_1 двох Фур'є-перетворюючих лінз.

Якщо еталонна функція h відповідає значно більшим розмірам ніж частина зображення, що описує g , тоді кореляційний пік розташовується на осі в площині P_3 при умові, що g займає те саме положення у вхідній площині, яке займала еталонна функція h при записі фільтра. Будь-яке зміщення g з цього положення приведе до зміщення кореляційного піка у площині P_3 . Якщо функція g розташована на осі у вхідній площині, то положення кореляційного піка у площині P_3 буде характеризувати (з точністю до множника f_2/f_1) взаємне розташування h та g .

Перейдемо до розгляду важливої характеристики оптичних кореляторів, а саме проаналізуємо вимоги до роздільної здатності матеріалів, які використовуються для запису узгоджених фільтрів у частотній площині. Для спрощення аналізування будемо розглядати одновимірні функції. Позначимо ширини вхідної та еталонної функцій відповідно через W_g та W_h і розглянемо три випадки:

1) $W_g \gg W_h$; 2) $W_g \ll W_h$; 3) $W_g = W_h$.

Спочатку встановимо вимоги до роздільної здатності у частотній площині P_2 , необхідні для здійснення запису узгодженого фільтра. Для цього визначимо імпульсний відгук узгодженого просторового фільтра, підставивши у вираз (3.4) замість вхідної функції $g(x, y)$ дельта-функцію $\delta(x, y)$. Таким чином,

$$U_3(x_3, y_3) = r_0^2 \delta(x_3, y_3) + (h \oplus h) + r_0 [h * \delta(x_3 + \alpha \lambda f_2)] \quad (3.5).$$

Положення кожного з цих членів імпульсного відгуку у кореляційній площині, а також їх розміри для кожного з трьох вказаних вище випадків наведені у табл.3.1, а в табл.3.2 представлені аналогічні параметри для випадку взаємної кореляції.

Таблиця 3.1.

Положення та ширина окремих доданків імпульсного відгуку узгодженого фільтра на виході корелятора з частотною площиною

Доданок	Розташування	Ширина
r_0	Початок координат	0
$h \oplus h$	Початок координат	$2W_h$
$r_0 h$	$x_3 = -\alpha \lambda f_2$	W_h
$r_0 h$	$x_3 = +\alpha \lambda f_2$	W_h

Таблиця 3.2.

Положення та ширина окремих доданків розподілу на виході корелятора з частотною площиною

Доданок	Розташування	Ширина
$r_0 g$	Початок координат	0
$h \oplus h * g$	Початок координат	$2W_h + W_g$
$h * g$	$x_3 = -\alpha \lambda f_2$	$W_h + W_g$
$h \oplus g$	$x_3 = +\alpha \lambda f_2$	$W_h + W_g$

У таблиці позначено h – імпульсний відгук фільтра, g – вхідна функція.

У загальному випадку ширина розподілу, який відповідає імпульсному відгуку узгодженого фільтра, дорівнює $4W_h$ (при обов'язковому виконанні вимоги $\alpha\lambda f_2 = 1.5 W_h$, для того, щоб забезпечити повне розрізнення всіх членів імпульсного відгуку). Таким чином, потрібне розрізнення (число ліній на міліметр) у площині P_2 повинно бути рівним $0.25W_h$, а використане для запису узгодженого фільтра середовище (фотопластинка, фотоплівка) повинно забезпечувати ширину смуги пропускання просторових частот, що дорівнює $4W_h/\lambda f_1$. Але якщо нам необхідно забезпечити просторове відокремлення (розрізнення) члена взаємної кореляції від усіх інших, що присутні у вихідній площині, то з табл.2 видно, що потрібна виконуватись умова $\alpha\lambda f_2 \geq 0.5(2W_g + 3W_h)$. Використовуючи при обчисленні імпульсного відгуку значення величини $\alpha\lambda f_2$, що задовольняє цій умові (наприклад, у випадку $W_g = W_h = W$ можна прийняти $\alpha\lambda f_2 = 5W/2$), знаходимо ширину імпульсного відгуку, яка дорівнює $\alpha\lambda f_2 + W_h$. В табл.3.3 узагальнені вимоги до роздільної здатності (в лініях на мм) та ширини смуги пропускання просторових частот (що визначаються по числу ліній або точок, що можна розрізнити) корелятора для трьох вище вказаних випадків.

Таблиця 3.3.

Вимоги до роздільної здатності та смуги пропускання матеріалу, що використовується для запису узгодженого фільтра в кореляторі з частотною площиною

Умова	Розрізнення	Ширина смуги пропускання
$W_h \gg W_g$	$W_h/4$	$4W_h/\lambda f_1$
$W_g \gg W_h$	$W_g/2$	$2W_g/\lambda f_1$
$W_h = W_g$	$W/6$	$6W/\lambda f_1$

У таблиці позначено h – імпульсний відгук фільтра, g – вхідна функція, W – ширина відповідної функції у певній просторовій області.

Розглянемо тепер контрастність інтерференційної картини у площині P_2 . Це спрощує аналіз багатьох схем кореляторів. Якщо у виразі (3.3) записати амплітуду і фазу комплексної змінної H у вигляді $H(u, v) = |H(u, v)| \exp(i\varphi)$, то можна отримати наступний вираз для експозиції у площині P_2 :

$$E(x_2, y_2) = (r_0^2 + |H|^2)T + 2r_0|H|T \cdot \cos[2\pi\alpha x_2 + \varphi(x_2, y_2)] \quad (3.6)$$

де T – час експозиції. Якщо записати експозицію зміщення робочої точки у вигляді $E_e = r_0^2 T$, середню експозицію як $E_0 = (r_0^2 + |H|^2)T$, а відношення інтенсивностей опорного та об'єктного пучків припустимо рівним $K = r_0^2/|H|^2$, тоді вираз (3.6) приймає вигляд

$$E(x_2, y_2) = E_e \left[1 + 1/K + (2/\sqrt{K}) \cos \psi \right] \quad (3.7)$$

де $\psi = 2\pi\lambda x_2 + \arg(H)$. Зауважимо, що K – змінюється у просторі, оскільки змінюється $|H|$, і тим самим створюється модуляція інтерференційних смуг, яка залежить від K , E_e , та від характеру кривої $t-E$ (залежності амплітудного пропускання від експозиції) для матеріалу, що використовується при записі узгоджених просторових фільтрів у площині P_2 .

Розглянемо також питання про відносні зміщення елементів корелятора та їх вібрацій, яких можна припуститись з практичної точки зору, що не вплинуть на надійну його роботу. Для простоти проаналізуємо одновимірний випадок. Вираз для автокореляції вхідної функції g буде

$$\rho(x) = \int G(u)G^*(u)\exp(-i2\pi ux)du, \quad (3.8)$$

де G – одновимірний Фур'є-образ функції g , який визначається наступним чином

$$G(u) = \int g(x')\exp(-i2\pi ux')dx'. \quad (3.9)$$

Якщо узгоджений просторовий фільтр вигляду $G^*(u)$ змістити у частотній площині на величину Δu , то для автокореляційної функції маємо

$$\rho(x) = \int g(x')g^*(x+x')\exp[i2\pi\Delta(x+x')]dx'. \quad (3.10)$$

Звідси витікає, що фазові спотворення, які обумовлені зміщенням фільтру на величину Δu , повинні вдовольняти співвідношенню

$$|\varphi| \leq \pi Wx\Delta u \quad (3.11)$$

де W – ширина вхідного сигналу, причому припускається, що ширина автокореляційної функції дорівнює $\pm W$. Для того, щоб забезпечити якісну інтерференційну картину, ми повинні забезпечити виконання умови $\varphi \leq \pi/4$. Якщо зробити підстановку $u = \lambda f_1/4W$. У випадку, коли $\lambda = 633\text{нм}$, $f_1 = 600\text{мм}$ та $W = 35\text{мм}$ припустиме відхилення щодо розташування фільтру не повинно перевищувати $\Delta x_2 = 2.7\text{мкм}$.

Наведені тут співвідношення ілюструють методи аналізу та операції, які можна застосовувати для визначення аналогічних характеристик різноманітних кореляторів.

3.2 Корелятор зі змінним масштабом.

Незначна модифікація головної схеми оптичного корелятора з частотною площиною дозволяє змінювати масштаб перетворення Фур'є у площині P_2 шляхом зміни відстаней d та d_2 (рис. 3.3.)

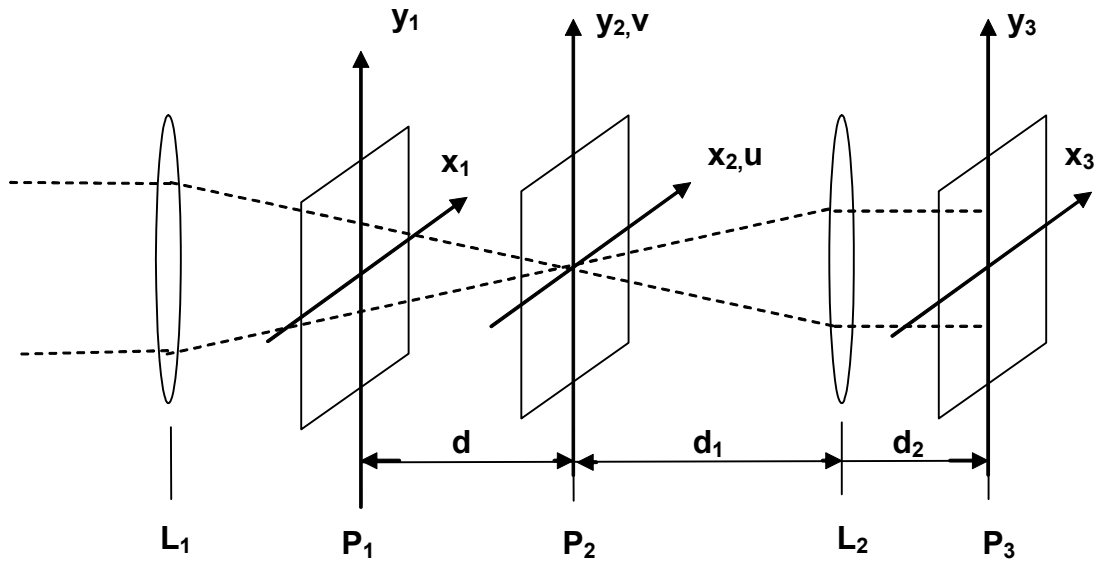


Рисунок 3.3.

P1 – вхідна площина, P2 – частотна площина, P3 – вихідна площина кореляції, L1, L2 – Фур'є-перетворюючі лінзи.

У цьому випадку розподіл комплексних амплітуд у площині P2, що створюється транспарантом $g(x_1, y_1)$, який розташований у площині P1, дається виразом

$$U(x_2, y_2) = (f_1 / i\lambda d^2) G(u, v) \exp[ik(x_2^2 + y_2^2) / 2d] \quad (3.12)$$

де $k = 2\pi/\lambda$. З цього виразу витікає, що змінюючи відстань d тобто положення вхідної площини P1, можна змінювати масштаб перетворення Фур'є. Узгоджений просторовий фільтр $G^*(u, v)$ для функції $g(x_1, y_1)$ створюється у площині P2 як результат запису інтерференції розподілу, що описується виразом (3.4), з плоскою хвилею. При цьому у вхідну площину P1 встановлюють транспарант з записом нової функції $g_1(x_1, y_1)$, яка представляє собою функцію $g(x_1, y_1)$, але з іншим масштабом. Зауважимо, що тепер площина P1 відстоїть від P2 на відстані $D = md$, де m – масштабний коефіцієнт для двох функцій. При зміні відстані D змінюється і масштаб перетворення Фур'є функції $g_1(x_1, y_1)$, до тих пір поки Фур'є-образи g та g_1 не стануть однаковими за масштабом. У цей момент у площині P3 з'явиться яскрава точка, яка відповідає піку максимуму взаємної кореляції.

В дійсності умови фокусування та перетворення Фур'є виконуються при фіксованій відстані між площинами P1 та P3, що дорівнює $3d$, причому повинно мати місце співвідношення $D \ll 2d$. Таким чином, даний корелятор забезпечує пошук за масштабом тільки у межах 20%, оскільки при $m = 1,2$ площина кореляції зміщується на 30мм або на 20% для Фур'є-перетворюючих лінз з фокусними відстанями 762мм.

Керування зміщенням лінз та транспарантів у вхідній площині вздовж осі z значно полегшує використання таких кореляторів. Завжди мається необхідність в кореляторах, які дозволяють здійснювати пошук за масштабом, оскільки на практиці дуже важко отримати два зображення без деякої зміни масштабу.

Другий підхід до реалізації оптичної кореляції, яка є інваріантною до масштабу вхідного зображення, передбачає використання у частотній площині P_2 складних узгоджених просторових фільтрів.

3.3 Корелятор з одночасним перетворенням

Схема корелятора з одночасним перетворенням наведена на рис. 3.4. У цій схемі транспаранти з записом функції, взаємну кореляцію яких потрібно визначити, розташовуються у вхідній площині поруч один з одним. Припускається, що кожна функція має ширину b , а відстань між центрами функцій дорівнює $2b$. Амплітудне пропускання у площині P_1 можна записати у вигляді

$$U_1(x_1, y_1) = g(x_1, y_1 - b) + h(x_1, y_1 + b). \quad (3.13)$$

Розподіл комплексних амплітуд світла в площині P_2 дорівнює Фур'є-образу амплітудного пропускання, яке визначається цим виразом

$$G(u, v) \exp(-i2\pi vb) + H(u, v) \exp(i2\pi vb). \quad (3.14)$$

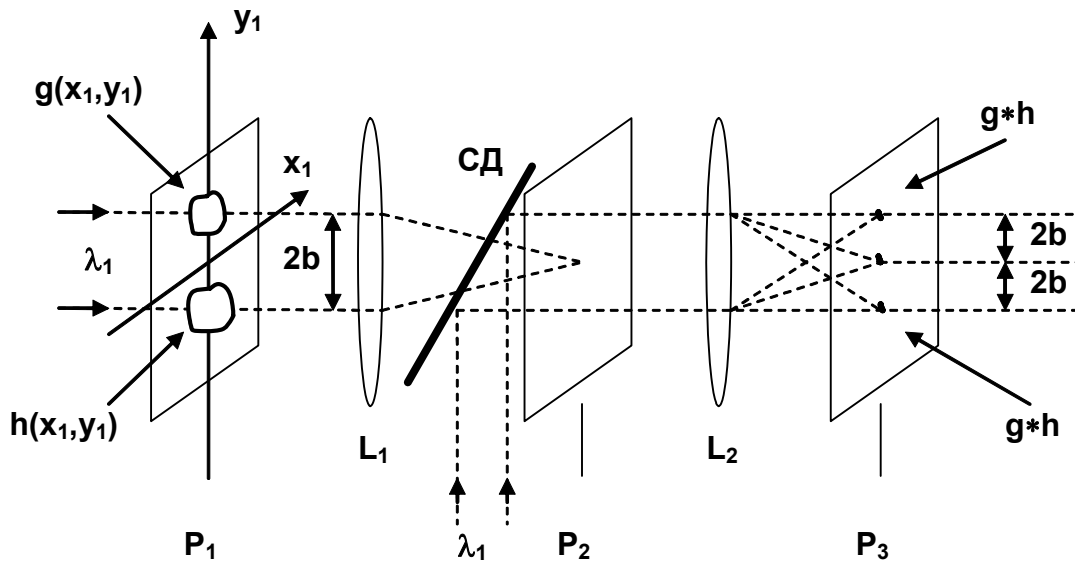


Рис унок 3.4.

У площині P_2 реєструється квадрат модуля цього розподілу, і ми припускаємо, що наступне амплітудне пропускання у площині P_2 дається виразом

$$t_2(u, v) = |G|^2 + |H|^2 + GH^* \exp(-i4\pi vb) + G^* H \exp(+i4\pi vb). \quad (3.15)$$

Цей розподіл реєструється з використанням світла з довжиною хвилі λ_1 для запису, і потім світла довжини хвилі λ_2 для зчитування (остання відбивається від світлоділяника CD). Лінза L_2 формує у площині P_3 Фур'є-образ функції $t_2(u, v)$, причому розподіл світла має вигляд

$$U_3(x_3, y_3) = g \oplus g + h \oplus h + g \oplus h * \delta(x_3, y_3 + 2b) + h \oplus g * \delta(x_3, y_3 - 2b). \quad (3.16)$$

Таким чином, у площині P_3 формується взаємна кореляція функцій g та h , яка локалізується у точці з координатами $(0, \pm 2bf_2/f_1)$.

Цей корелятор має декілька цікавих практичних особливостей та переваг. Для того, щоб повною мірою реалізувати переваги оптичної обробки інформації, необхідно у вхідній площині P_1 (а іноді у частотній P_2 див. рис. 3.1) використовувати просторово-часові модулятори світла. Що стосується реєстрації, то матеріал, що використовується для запису узгоджених фільтрів повинен забезпечувати запис у реальному часі з багаторазовим повторенням циклів запису та стирання, коли потрібна швидка зміна еталонних функцій. У кореляторі з одночасним перетворенням цей же матеріал, що використовується у площині P_2 повинен забезпечувати циклічний запис у реальному часі. Більш важливою є та обставина, що більшість модуляторів потребують для використання для запису та зчитування випромінювання з різними довжинами хвиль (λ_1 та λ_2 на рис. 3.4). Якщо в кореляторі з частотною площиною, узгоджений просторовий фільтр записаний на довжині хвилі λ_1 , а подальше зчитування та кореляційний аналіз здійснюється на довжині хвилі λ_2 , то це приведе до зміни масштабу і втраті розрізнення в еталонній функції. Крім того, якщо враховувати, що більшість матеріалів, які могли б бути використані для циклічного запису узгоджених фільтрів у реальному часі, не придатні для запам'ятовування, то застосування їх у кореляторах з частотною площиною стає неможливим. Зате немає ніяких перешкод для їх застосування у кореляторах з одночасним перетворенням. В останніх немає таких жорстких умов на точність встановлення його елементів, тому що площина P_2 освітлюється плоскою хвилею. Корелятор з одночасним перетворенням корисно застосовувати у тих випадках, коли обидві функції, кореляцію яких потрібно визначити, поступають на вхід у реальному часі або змінюються в кожному наступному кадрі або коли еталонна функція не залишається незмінною протягом багатьох циклів. Таким чином, з ряду практичних міркувань корелятор, що розглядається, є більш кращим, ніж класичний з частотною площиною, хоча і потребує використання як у вхідній площині P_1 , так і в площині фільтру P_2 модуляторів, які працюють у реальному часі.

Розглянемо питання, пов'язані з розрізненням та шириною смуги пропускання матеріалів, що застосовуються у площині Фур'є P_2 . Ці вимоги проаналізуємо так само, як було вказано вище.

Імпульсний відгук розподілу, який формується у площині P_2 , є ідентичним картині кореляції у вихідній площині, оскільки для отримання кореляції площина P_2 освітлюється плоскою хвилею. У таблиці 3.4 наведені значення для ширини та координат щодо розташування доданків, які входять у імпульсний відгук (або кореляційний розподіл), які безпосередньо витікають з виразу (3.16).

Таблиця 3.4.

Положення та ширина окремих доданків імпульсного відгуку або кореляційного розподілу на виході корелятора з одночасним перетворенням

Доданок	Розташування	Ширина
$g * g$	Початок координат	$2W_g$
$h * h$	Початок координат	$2W_h$
$g \oplus h$	$y_3 = -2b$	$W_g + W_h$
$h \oplus g$	$y_3 = +2b$	$W_g + W_h$

Як видно з таблиці 3.4, повна ширина імпульсного відгуку у випадку $W_h \gg W_g$ дорівнює $4W_h$, у випадку $W_h \ll W_g$ дорівнює $4W_g$, а у випадку $W_h = W_g = W$ складає W . У таблиці 3.5 наведені вимоги до роздільної здатності та ширини смуги пропускання для частотної площини P_2 . Порівнюючи данні табл. 3.5 та табл. 3.3 приходимо до висновку, що вимоги для обох кореляторів однакові, за винятком умови $W_g \gg W_h$. У цьому випадку (який є аналогічним випадку, коли узгоджений фільтр виготовлений на один об'єкт, а треба провести кореляційний аналіз великого набору зображень, або великого тексту) вимоги до розрізнення для корелятору з одночасним перетворенням будуть у двічі вищі, а отже у даному випадку корелятор з частотною площиною буде кращим.

Таблиця 3.5.

Вимоги до роздільної здатності та смуги пропускання матеріалу, що використовується в частотній площині P_2 корелятора з одночасним перетворенням

Умова	Розрізнення	Ширина смуги пропускання
$W_h \gg W_g$	$W_h/4$	$4W_h/\lambda f_1$
$W_g \gg W_h$	$W_h/4$	$4W_g/\lambda f_1$
$W_h = W_g$	$W/6$	$6W/\lambda f_1$

Друга перевага корелятора з одночасним перетворенням є те, що він формує дуже контрастну інтерференційну картину, і як наслідок цього, забезпечує гарну модуляцію усіх складових у спектрі просторових частот функцій g і h . Таким чином, тут не потрібне (і навіть не допускається) керування параметрами узгодженого фільтру, яке потрібно в кореляторі з частотною площиною. Для того, щоб показати це розглянемо вираз (3.15) через просторові координати (x_2, y_2) площини P_2 , а саме

$$t_2(x_2, y_2) = |G|^2 + |H|^2 + 2|G| \cdot |H| \cos[4\pi y_2 b / \lambda f_1 + \varphi(x_2, y_2)], \quad (3.17)$$

де $\varphi = \arg(GH^*) = \arg G - \arg H$. У випадку коли $g = h$ отримуємо

$$t_2(x_2, y_2) = 2|G|^2 [1 + \cos(4\pi y_2 b / \lambda f_1)]. \quad (3.18)$$

Порівнюючи цей вираз з виразом (3.7), отриманим для корелятора з частотною площиною, бачимо що у корелятора з одночасним перетворенням на всіх просторових частотах формуються інтерференційні смуги з 100% контрастом, тому його застосування є оптимальним у багатьох задачах.

Оскільки інтенсивність інтерференційних смуг у площині P_2 змінюється за законом $(1 - \cos x)/2$, експозиція у цій площині змінюється від 0 до свого максимального значення в синусоїдальній хвилі і вся модуляція повинна визначатися вхідним світлом. При помірних експозиціях ми будемо знаходитись на нелінійній частині кривої $t - E$, де коефіцієнт підсилення малий. Тому в цьому випадку необхідне додаткове некогерентне освітлення площини P_2 , яке забезпечить зміщення робочої точки на лінійний проміжок.

3.4 Корелятор з площиною зображення.

До винаходу голографічного узгодженого фільтру найбільш розповсюдженою для оптичного розпізнавання образів був корелятор з площиною зображення. Схема цього корелятора наведена на рис. 3.5.

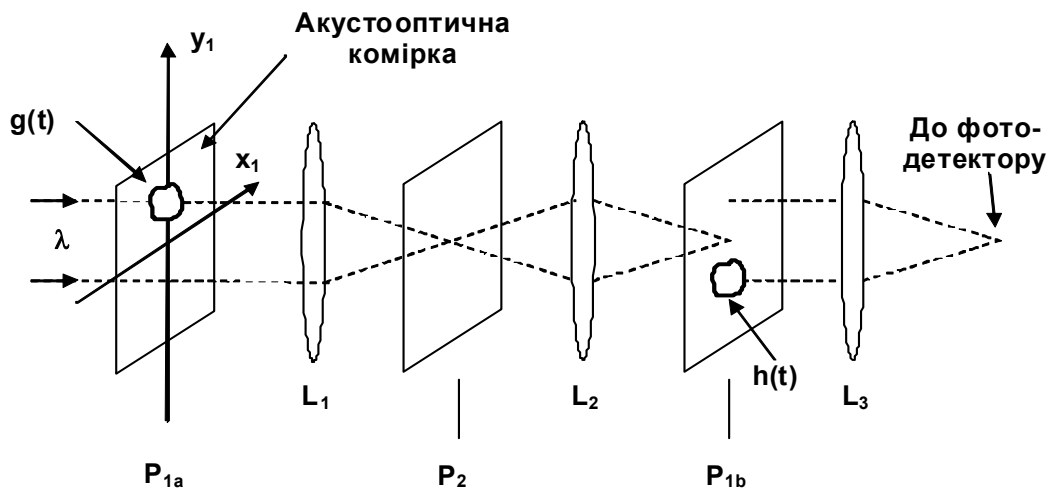


Рисунок 3.5.

У цьому кореляторі обидві функції, взаємну кореляцію яких потрібно визначити, задаються у просторовій області у вигляді транспарантів і розміщуються у площинах P_{1a} та P_{1b} . Лінзи L_1 та L_2 відображають площину P_{1a} на площину P_{1b} . Розподіл комплексних амплітуд світла безпосередньо за площиною P_{1b} дається виразом

$$U_1(x_1) = g(x_1)h(x_1) , \quad (3.19)$$

де для спрощення використані одновимірні функції. Лінза L_3 формує у площині P_3 Фур'є-образ розподілу $U_1(x_1)$ у вигляді інтегралу

$$U_3(x_3) = \int g(x_1)h(x_1)\exp(-i2\pi ux_1)dx_1 . \quad (3.20)$$

Якщо тепер вхідну функцію $g(x_1)$ зсунути вздовж осі x_1 з точки x_a в точку x_b і обчислювати сигнал в точці $x_3 = u = 0$ площини P_3 , то ми отримаємо функцію

$$U_3(x_3) = \int_{x_a}^{x_b} g(x_1 + x')h(x_1)dx_1 , \quad (3.21)$$

яка представляє собою взаємну кореляцію функцій g і h .

3.5. Корелятори зі складними узгодженими просторовими фільтрами.

Вище було розглянуто досить велике число схем запису мультиплексних голограм, і тому ми не будемо робити повний їх опис. Зауважимо лише, що деякі з цих схем придатні до запису складних узгоджених фільтрів, які використовуються в оптичних системах розпізнавання образів та знаків. Якщо узгоджений фільтр виготовляється для матриці з M функцій, тобто його імпульсний відгук має вигляд

$$h = \sum_{i=1}^M h_i * \delta(x_1 - x_i, y_1 - y_i) , \quad (3.22)$$

а у вхідній площині розташована функція g , тоді зображення у вихідній кореляційній площині, яке локалізовано у точці з координатами $(x_3, y_3) = (-\alpha\lambda f_2, 0)$, складається з M кореляційних розподілів вигляду

$$U_3(x_3, y_3) = \sum_{i=1}^M g \oplus h * \delta(x_3 - x_i, y_3 - y_i), \quad (3.23)$$

де припускаємо $f_2 = f_1$.

Якщо розмір результуючого імпульсного відгуку h дорівнює $W_{hx}W_{hy}$, а розмір кожного елементарного відгуку h_i , з яких він складається, дорівнює $W_{hxi}W_{hyi}$, тоді рядки та стовпці, які утворюють h повинні бути розділені один від одного проміжками не меншими ніж $W_{gx} + W_{hxi}$ та $W_{gy} + W_{hyi}$ відповідно. Вважаючи $W_{hx} \gg W_{gx}$ та $W_{hy} \gg W_{gy}$, отримаємо, що для оптимальної упаковки матриці вхідних відгуків складного фільтру повинна виконуватися умова $\alpha\lambda f_2 \geq 3W_{gx}/2$ та $W_{hy} = 4W_{hx}$. Звідки випливають вимоги до матеріалу, що використовується у площині P_2 , а саме до його роздільної здатності $1/(2\sqrt{2}W_{hx})$ і до смуги пропускання $B = (2\sqrt{2}W_{hx})/\lambda f_1$. Таким чином, при $W_g \gg W_{hi}$ найбільше число узгоджених просторових фільтрів, яке можливо записати у частотній площині, буде дорівнювати $(B\lambda f_1)^2 / 2W_{gx}W_{gy}$, а при $W_{hi} = W_g$ ми маємо $(B\lambda f_1)^2 / 2W_{hxi}W_{hyi}$.

Складний узгоджений фільтр можна виготовити або за одну експозицію (когерентний метод), або за M різних експозицій (некогерентний метод). Але зі збільшенням числа накладених експозицій спостерігається дифракційна ефективність окремих узгоджених фільтрів, а отже, зменшується інтенсивність кореляційного піка I_p та погіршується відношення сигнал–шум. Необхідно зауважити, що при даній розрізняльній здатності матеріалу в площині P_2 використання методу багаторазових експозицій дозволяє записати у три рази більше фільтрів, ніж при одноразовій експозиції.

При формуванні узгодженого просторового фільтру на матрицю з M еталонних функцій на вході можна отримати усереднений фільтр, імпульсний відгук якого (в одновимірному випадку) дається наступним виразом:

$$h(x_1) = \sum_{i=1}^M [h_i(x_i - i\Delta_1) + \delta(x_1 - i\Delta_1 - \Delta_2)]. \quad (3.24)$$

При запису фільтрів реєструється тільки квадрат величини $h(x_1)$, а отже, імпульсний відгук фільтру буде містити у собі член, яких дорівнює середньому значенню множини сигналів $\{h_i\}$. Головною проблемою при запису усередненого фільтру є виділення тих членів у фур'є-образі, які нас більш за все цікавлять. Крім того, когерентний запис даного фільтру потребує використання окремих імпульсних відгуків для кожного елемента матриці.

Слід також мати на увазі, що при когерентному запису (за одну експозицію) складного узгодженого фільтру з'являються інтермодуляційні члени, які дуже важко прибрати і які є головною причиною зменшення (приблизно у 3 рази) кількості складових його елементарних узгоджених фільтрів порівняно з некогерентним

записом. Тому більшість дослідників використовує багатоекспозиційний (некогерентний) метод синтезу фільтрів та синтезують складний узгоджений фільтр або зміною кута нахилу опорного пучка, або зміщенням між експозиціями положення кожної еталонної функції, для того, щоб реалізувати кодування кожної функції методом частотного мультиплексування (ущільнення, стискання).

Один з останніх запропонованих підходів до синтезу складного узгодженого просторового фільтру полягає у формуванні матриці Фур'є-образів еталонних функцій з використанням лінзи та голограми матриці точкових джерел з наступною фільтрацією спектрів вхідних функцій за допомогою отриманої матриці узгоджених фільтрів (УПФ). Якщо для запису декількох УПФ застосовується одне і те саме точкове джерело, то це приводить до отримання усередненої фільтрації, але у цьому випадку при перекритті вихідних площин окремих фільтрів можуть спостерігатися інтерференційні смуги. Головні проблеми у цьому підході пов'язані з тим, що у частотній площині корелятора використано просторове, а не частотне мультиплексування, а це приводить до більш жорстких вимог до лінз.

3.6 Оптимізація параметрів узгодженого просторового фільтра.

Розглянемо проблему синтезу УПФ, які необхідні для кореляторів з частотною площиною. А саме, ми обговоримо проблему вибору наступних трьох параметрів УПФ: експозиції зміщення E_B , відношення інтенсивності опорного та сигнального пучків K та смуги просторових частот f^* , у межах якої величина K дорівнює вибраному значенню. Як критерій оцінювання оптимальної кореляції ми використовуємо інтенсивність I_p піку кореляції та відношення сигнал-шум на виході корелятора. З співвідношення (3.25) витікає, що експозиція при запису УПФ має вигляд

$$E(x_2, y_2) = E \left[1 + 1/K + (2/\sqrt{K}) \cos \psi \right], \quad (3.25)$$

де $E_B = r_0^2 T$, T – час експозиції, $E_B = (r_0^2 + |H|^2) T$ – середня експозиція, $K = r_0^2 / |H|^2$ – відношення інтенсивності опорного та об'єктного пучків, а $\psi = 2\pi \alpha x_2 + \arg(H)$. Отже, амплітудне пропускання отриманого УПФ залежить від E_B , α та вигляду кривої $t - E$ для фотоплівки. Таким чином,

$$t = t_0 + (m/2) \cos \psi + A = t_0 + 2d \cos \psi + A, \quad (3.26)$$

тут t_0 – середнє пропускання, A – члени більш високих порядків, m – найбільший розмах змінної складової амплітудного пропускання (від максимального значення до мінімального), або найбільша модуляція косинусоїдальної хвилі, а $d = \sqrt{\eta}$ – амплітудна дифракційна ефективність. Тоді інтенсивність в піку автокореляції функції h приймає вигляд

$$I_p = \left| \iint H(x_1, y_1) d(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right|^2. \quad (3.27)$$

Проаналізуємо отримані результати. Передаточна функція фільтру $H(u, v)$ є функцією просторових частот, а отже так само як і K , m , d , залежить от вигляду кривої $t - E$ фотоплівки, та вибраних значень E_B K . Оскільки E_B та K змінюються з просторовою частотою, повинна буде забезпечена смуга просторових

частот f^* , у межах якої вимірюється величина K . Такі дані, нажаль, не досить часто зустрічаються у публікаціях по оптичному розпізнаванню образів. Після того, як стала відома залежність $t(E)$ та вибрана величина E_B , можна знайти залежність $d(K)$. Оскільки K , так само як і d , залежить від просторової частоти, її можна визначити, якщо відомий просторово–частотний спектр $G(u, v)$ вхідної функції $g(x_1, y_1)$.

Для більшості матеріалів, які використовуються для виготовлення УПФ, відомі залежності контрасту інтерференційних смуг $V = (2\sqrt{K})/(K + 1)$ від дифракційної ефективності η , з яких можливо визначити залежність амплітудної дифракційної ефективності $d = \sqrt{\eta}$ від K при різних середніх експозиціях, а також побудувати криву залежності $\sqrt{\eta}$ від експозиції E . Звичайно використовується лінійний проміжок цієї кривої. Лінійний запис потребує виконання умови $E < 2E_B$ (де величина E_B відповідає значенню $t = 0.5$), що також еквівалентно умові $K > 0.17$. Це добре узгоджується з тим, що для забезпечення лінійного запису даних ми повинні використовувати великі значення K ($K \gg 10$). При запису УПФ має місце насичення, якщо $K \leq 0.17$, то спостерігається обмеження при $0.17 \leq K \leq 5.8$. Тому вибирають $K = 1$, і питання полягає у тому, в якій смузі просторових частот f^* встановити $K = 1$. Очевидно, з цих зауважень витікає, що синтез УПФ відрізняється від звичайного голографічного запису, в якому нас цікавить висока якість відтвореного зображення, а не висока якість кореляції на виході.

Наведемо тепер результати деяких експериментів, для того, щоб краще показати вплив розглянутих параметрів УПФ на кореляційні параметри. При лінійному запису середня експозиція відповідає амплітудному пропусканню $t_0 \approx 70\%$ і значення K стає оптимальним. В результаті виконання великої кількості експериментів були отримані графіки залежності інтенсивності піка кореляції I_p і відношення сигнал–шум на виході від величини E_B для різних вхідних зображень, плівок, що використовувались, та лінз. У всіх випадках значення E_B , які відповідають максимумам I_p , складають усього 10% від величини E_B . Спостерігалось зменшення I_p у 100 разів при зменшенні E_B усього на 50%. Було знайдено, що нахил кривої залежності I_p від відношення сигнал–шум дорівнює 2 : 1. Це вказує на те, що шуми збільшуються при відхиленні величини E_B від свого оптимального значення і тому правильний вибір величини E_B дуже важливий для забезпечення гарної кореляції. Через те, що невеликі зміни амплітудного пропускання t_0 ведуть до великих змін величини E_B , то більш чутливим та більш практичним параметром для керування характеристиками УПФ є величина E_B , а не t_0 .

4. СЕНСОР ОПТИЧНОГО ХВИЛЬОВОГО ФРОНТУ ШЕКА – ХАРТМАНА

Сенсор Шека–Хартмана (СШХ) є найпоширенішим приладом для реєстрації та наступного відновлення форми оптичного хвильового фронту. Принцип його дії полягає у вимірюванні локальних нахилів оптичної хвилі у межах вхідної апертури системи формування зображення. Задача відновлення полягає у тому, щоб за набором вимірних нахилів відновити просторовий розподіл фази.

Конструктивно СШХ побудований та працює наступним чином. У площині вхідного отвору сенсора знаходиться матриця лінз із фокусними відстанями F (рис.4.1). Апертури окремих лінз (субапертури сенсора) звичайно мають квадратну або гексагональну форму.

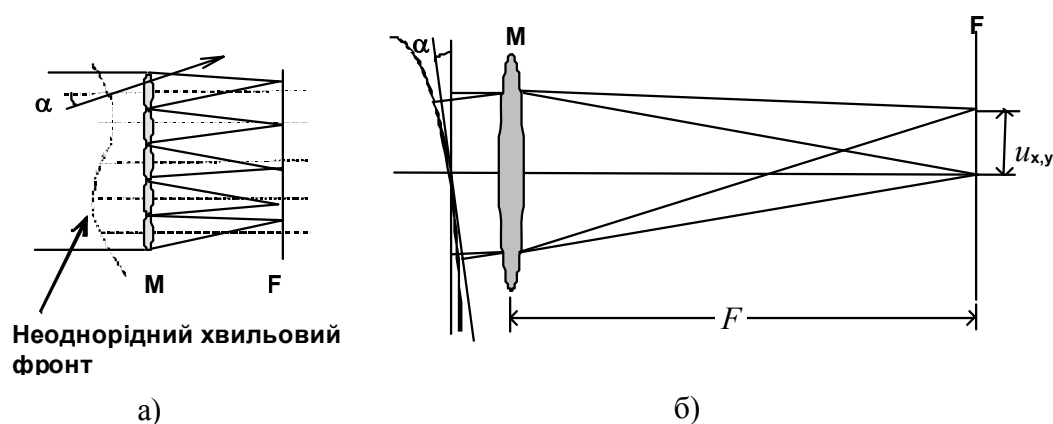


Рисунок 4.1.

(а) – сенсор Шека-Хартмана, (б) – збільшене зображення для однієї лінзи. М – матриця лінз, F– фокальна площина матриці, α – кут локального нахилу хвильового фронту.

Якщо на апертуру такої матриці падає плоска хвиля, то кожна лінза формує зображення на своїй оптичній осі. Якщо ж хвильовий фронт відрізняється від плоского, то зображення кожної субапертури у фокальній площині відхиляється від оптичної осі на величину, пропорційну значенню локального нахилу падаючого хвильового фронту. Вважається, що хвильовий фронт є досить гладким, тобто амплітуда і градієнт фази хвилі мало змінюються в межах області окремої субапертури. Зображення у фокальній площині матриці лінз називають гартманогомою хвильового фронту (рис.4.2).



Рисунок 4.2.

(а) – плоска хвиля, (б) – хвиля зі сферичною аберрацією.

Гартманограма реєструється відеокамерою і служить для визначення масиву даних, за яким здійснюється реконструкція просторового розподілу фази хвилі.

СШХ був створений під час роботи над проблемою покращення якості зображень штучних супутників, отриманих за допомогою наземних телескопів [15]. Добре відомо, що роздільна здатність останніх обмежується впливом атмосфери, що являє собою випадкове фазово–неоднорідне оптичне середовище [16–18]. Вимірювання фазових аберацій, внесених атмосферою у хвильовий фронт в момент фотографування, дозволяє розрахувати миттєву функцію розсіювання точки (ФРТ) об'єктива і провести деконволюцію зображення з оціненою ФРТ. Згодом сенсор був використаний у системах адаптивної корекції форми дзеркал у надпотужних лазерах та оптичних телескопах. У першому випадку це було необхідно для забезпечення рівномірного теплового навантаження на поверхню дзеркала резонатора, у другому – для компенсації атмосферних спотворень хвильового фронту у реальному масштабі часу при спостереженні об'єктів малої інтенсивності. Здешевлення основних компонент сенсора зробило можливим його різноманітні застосування, зокрема, для визначення розподілу амплітуди і фази в лазерних пучках, у т. ч. інфрачервоних, тестування рефракційних оптичних елементів, дослідження тонкої топографічної структури поверхні, вимірювання аберацій зору людини. Цим застосуванням сприяють такі переваги пристрою як відсутність особливих вимог до часової когерентності світла, нечутливість до механічних вібрацій, компактність, простота та гнучкість конструкції, що дозволяє модифікувати пристрій відповідно до потреб окремої задачі. Так, недавно було продемонстровано, що заміна матриці рефракційних лінз на дифракційні, виготовлені голографічними методами, дозволяє за певних умов істотно розширити динамічний діапазон сенсора [19, 20].

Різнманітні застосування СШХ вимагають адекватних математичних методів обробки гартманограм та відновлення хвильового фронту. Задача обробки гартманограми полягає у тому, щоб визначити середній нахил хвильового фронту в кожній субапертурі сенсора за розподілом інтенсивності в її зображенні. На точність визначення нахилу впливають просторове розрізнення, динамічний діапазон та шуми відеокамери, світло від сторонніх джерел, інтерференція хвиль від сусідніх субапертур, квантовий фотонний шум. Особливої уваги заслуговує питання про вплив просторової неоднорідності амплітуди оптичної хвилі на структуру гартманограми. В основі загальноприйнятої процедури обробки гартманограм лежить визначення центроїдів зображень окремих субапертур. Методи оптимального визначення центроїдів, що включають порогову фільтрацію, фільтрацію з вікном, узгоджену фільтрацію, активно обговорюються у літературі [21, 22].

Відновлення хвильового фронту ґрунтується на апроксимації просторового розподілу фази оптичної хвилі зваженою сумою лінійно незалежних функцій (модальний метод) або набором вибіркового значень у певних точках вхідної апертури (зональний метод) [17]. Якщо апріорна інформація про хвильовий фронт відсутня, то невідомі параметри апроксимації визначаються методом найменших квадратів таким чином, щоб значення локальних нахилів відновленого хвильового фронту якнайкраще співпадали із експериментально вимірними. З іншого боку, статистичні властивості оптичних хвильових фронтів, що утворюються при проходженні плоскої хвилі через турбулентну атмосферу, добре вивчені і звичайно

описуються моделлю Колмогорова – Татарського [16–18]. У таких випадках оцінку хвильового фронту доцільно будувати за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки. Ця доцільність обумовлена істотним вирашем у точності оцінювання модальних коефіцієнтів та у кількості коефіцієнтів, що можуть бути ефективно оцінені [23].

Необхідною умовою застосування методів статистичної оптимізації до задачі відновлення оптичного хвильового фронту є наявність адекватної теоретичної моделі сенсора. Найпростішою є "геометрична" модель СШХ, що докладно розглядається нижче.

4.1. Сенсор хвильового фронту Шека – Хартмана як лінійна система

У СШХ первинну інформацію про оптичний хвильовий фронт несе зображення у фокальній площині матриці лінз – гартманограма. Вона являє собою групу простих зображень, утворених у фокальній площині кожною окремою лінзою. Формування цих зображень повністю описується у межах класичної дифракційної теорії.

Нехай оптичне поле у вхідній площині сенсора має комплексну амплітуду $E(x, y)$:

$$E(x, y) = A \exp(j\theta(x, y)) \quad (4.1)$$

Будемо надалі вважати амплітуду поля A сталою, а фазу $\theta(x, y)$ розглядати як невідомий сигнал, що підлягає відновленню. Крім того, прийемо для визначеності, що всі лінзи матриці мають квадратну апертуру із стороною D та фокусну відстань F , а повна робоча апертура сенсора складається із M лінз. Тоді комплексна амплітуда поля у фокальній площині E_F визначається сумою дифракційних інтегралів:

$$E_F(x_F, y_F) \propto \sum_{n=1}^M \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \left\{ \exp(j\theta(x + x_n, y + y_n)) \times \exp\left(2\pi j \frac{x(x_F - x_n) + y(y_F - y_n)}{\lambda F}\right) dx dy \right\} \quad (4.2)$$

де x_F, y_F – координати у площині зображення, n – номер лінзи, x_n, y_n – координати оптичної осі (співпадають у вхідній та фокальній площині), λ – довжина хвилі. Фотодетектор (звичайно – відеокамера) реєструє зображення, інтенсивність якого $I(x_F, y_F)$ є

$$I(x_F, y_F) = |E_F(x_F, y_F)|^2 \quad (4.3)$$

Розглянемо фрагмент зображення в області, межі якої співпадають з апертурою n -тої лінзи. Якщо лінійний розмір окремого сфокусованого зображення на порядок менший за D , то можна знехтувати інтерференцією хвиль, що проходять через різні лінзи, і вважати, що зображення поблизу кожної оптичної осі утворюється лише „своюю” лінзою. Тоді інтенсивність у даному фрагменті пов’язана із фазою оптичного поля як:

$$I(x_F, y_F) \propto \int_{-D/2}^{D/2} dx \int_{-D/2}^{D/2} dy \int_{-D/2}^{D/2} d\xi \int_{-D/2}^{D/2} d\eta \left\{ \exp(j(\theta(x + x_n, y + y_n) - \theta(\xi + x_n, \eta + y_n))) \times \exp\left(2\pi j \frac{(x - \xi)(x_F - x_n) + (y - \eta)(y_F - y_n)}{\lambda F}\right) \right\} \quad (4.4)$$

Якщо оптичний хвильовий фронт є достатньо плавним, то фаза $\theta(x, y)$ в межах апертури окремої лінзи може бути подана у вигляді обірваного ряду Тейлора:

$$\theta(x + x_n, y + y_n) \approx \theta(x_n, y_n) + \theta'_x(x_n, y_n)x + \theta'_y(x_n, y_n)y \quad (4.5)$$

Підставивши (4.5) в (4.4), та виконавши інтегрування, отримаємо:

$$I(x_F, y_F) \propto \frac{\sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda F}\left(x_F - x_n + \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_x(x_n, y_n)\right)\right)}{\left(\frac{\pi D}{\lambda F}\left(x_F - x_n + \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_x(x_n, y_n)\right)\right)^2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda F}\left(y_F - y_n + \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_y(x_n, y_n)\right)\right)}{\left(\frac{\pi D}{\lambda F}\left(y_F - y_n + \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_y(x_n, y_n)\right)\right)^2} \quad (4.6)$$

Таким чином, кожна лінза створює у фокальній площині зображення, що є результатом дифракції Фраунгофера плоскої хвилі на апертурі лінзи, причому дифракційна картина зміщена відносно оптичної осі. Координати центру дифракційної картини $(x_F(C_n), y_F(C_n))$ пов'язані із градієнтом фази в центрі відповідної лінзи:

$$\begin{aligned} x_F(C_n) &= x_n - \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_x(x_n, y_n) \equiv x_n + u_x(n), \\ y_F(C_n) &= y_n - \frac{\lambda F}{2\pi}\theta'_y(x_n, y_n) \equiv y_n + u_y(n) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Чисельні значення зміщень центрів дифракційних зображень $u_x(n), u_y(n)$ відносно відповідних оптичних осей легко визначаються шляхом комп'ютерної обробки гартманогам як моменти першого порядку нормованої інтенсивності $i(x_F, y_F)$:

$$u_x(n) = \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} xi(x + x_n, y + y_n) dx dy, \quad (4.8)$$

$$u_y(n) = \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} yi(x + x_n, y + y_n) dx dy$$

$$i(x_F, y_F) = \frac{I(x_F, y_F)}{\int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} I(x + x_n, y + y_n) dx dy} \quad (4.9)$$

Отже, математична модель СШХ – це лінійна система з апаратною характеристикою $\mathbf{H}\{\theta\}$, що проектує просторовий розподіл фази $\theta(x, y)$ у вхідній апертурі на вектор \mathbf{u} , компоненти якого пропорційні частинним похідним фази на оптичних осях лінз:

$$\mathbf{H}\{\theta\} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}^+ = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{2M}];$$

$$u_n = H_n\{\theta(\vec{r})\} \equiv u_x(n) = -\frac{\lambda F}{2\pi} \theta'_x(x_n, y_n) \quad n = \overline{1, M} \quad (4.10)$$

$$u_{n+M} = H_{n+M}\{\theta(\vec{r})\} \equiv u_y(n) = -\frac{\lambda F}{2\pi} \theta'_y(x_n, y_n)$$

Аналізуючи відповідність такої моделі фізичному експерименту, слід звернути увагу на наступне.

Співвідношення між зміщеннями зображень у гартманогамі та фазою оптичної хвилі отримано у досить грубому припущенні про те, що в межах апертури окремої лінзи оптичну хвилю можна вважати плоскою та однорідною за інтенсивністю. В геометричній оптиці просторово обмеженій плоскій однорідній хвилі співставляють один промінь. З цього випливає, що в розглянутій моделі прийняте наближення вхідної оптичної хвилі пучком з M променів, а сенсор розглядається як прилад, що визначає напрямки кожного з цих променів.

Конкретизація форми апертури лінз була необхідна лише для спрощення викладок та більшої наочності отриманих співвідношень. Крім того, матриці, утворені лінзами з квадратними апертурами, є чи не найбільш поширеними у лабораторних пристроях. Можна показати, що загальний вид співвідношення між фазою хвилі та зміщенням зображення в гартманогамі не залежить від форми апертури окремих лінз.

Нарешті зазначимо, що, незважаючи на вказану грубість геометричної моделі сенсора, вона виявляється достатньо точною для переважної більшості експериментальних застосувань.

4.2. Оцінка центроїдів у сенсорі Шека – Хартмана

Важливою складовою частиною процесу відновлення форми оптичного хвильового фронту за його гартманогою є визначення центроїдів фокальних зображень $\vec{r}(C_n)$. Вище ми розглянули модель СШХ, що встановлює лінійний зв'язок між значеннями центроїдів та фазою $\theta(\vec{r})$ оптичної хвилі у вхідній апертурі сенсора, що виражається формально як $\mathbf{H}\{\theta\} = [\vec{r}_1 \quad \dots \quad \vec{r}_M]$. Так як відновлення фази має здійснюватись оберненням оператора \mathbf{H} , то цілком зрозуміло, що якість відновлення безпосередньо залежить від точності визначення центроїдів. Остання обмежується факторами, що умовно можуть бути поділені на дві групи. До першої відносяться шуми різного походження. Другу групу визначає дискретна структура зображення, зареєстрованого відеокамерою. Вплив просторової дискретизації (вибірки) та квантування інтенсивності зображення на помилку визначення центроїдів гартманогамі досліджено у [24].

4.2.1. Одновимірний модель фокального зображення у гартманогамі.

У одновимірному наближенні розподіл інтенсивності сфокусованого зображення, утвореного окремою лінзою, задається функцією $i(x)$, де x є координатою у фокальній площині. Прийемо, що $i(x)$ нормована на 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(x) dx = 1 \quad (4.11)$$

Тут і далі вважається, що область зображення є необмеженою: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Означимо шуканий центроїд x_c одновимірного зображення як момент першого порядку нормованої інтенсивності :

$$x_c \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xi(x) dx \quad (4.12)$$

Для його оцінки експериментатору доступні лише квантовані інтенсивності окремих пікселів зображення. Інтенсивність p -того пікселя приймається рівною інтегральній світловій потужності, що сприймається його поверхнею:

$$I_p = \int_{x_p - \Delta/2}^{x_p + \Delta/2} w(x_p - x) I(x) dx \quad (4.13)$$

де x_p – координата центру пікселя, Δ – його розмір (рис.4.3). Щоб врахувати конструктивні особливості фотоприймача тут також введено функцію вікна окремого пікселя $w(x)$, що надалі приймається дійсною та парною.

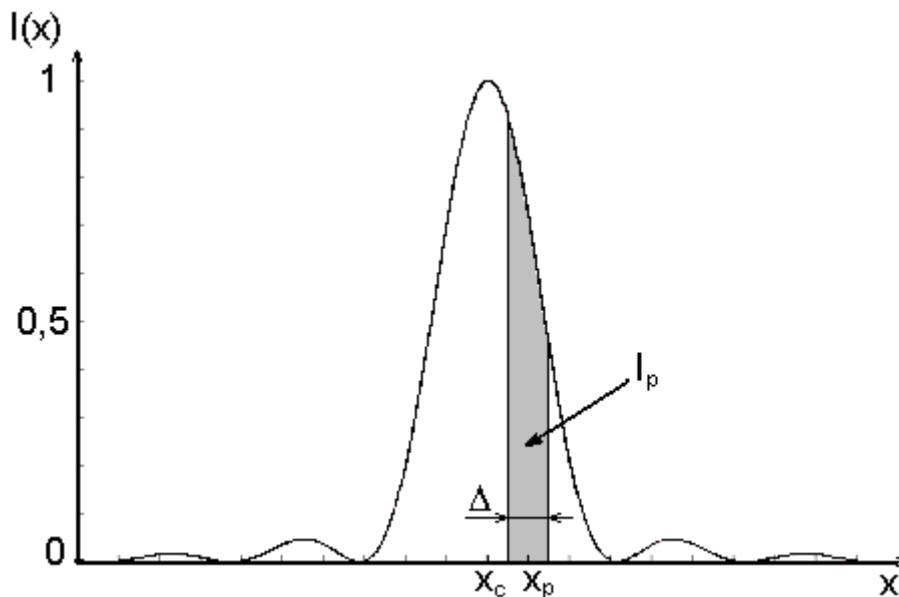


Рисунок 4.3.

I_p – інтенсивність пікселя, x_p – його координата, Δ – розмір пікселя, x_c – центроїд.

4.2.2. Похибка оцінки центроїду.

Оцінка центроїду зображення \tilde{x}_c є функціоналом інтенсивностей та координат окремих пікселів: $\tilde{x}_c = \mathbf{F}(I_p, x_p)$. У найпростішому випадку вона має вигляд:

$$\tilde{x}_c = \frac{\sum_p x_p I_p}{\sum_p I_p} \quad (4.13)$$

Помилка оцінки є різницею справжнього та оціненого значення центроїду: $\varepsilon_c = |x_c - \tilde{x}_c|$. Для визначеного вигляду інтенсивності зображення та способу оцінки

помилка ε_c є функцією координати центру зображення $\varepsilon_c = \varepsilon_c(x_c)$, яка може бути розрахована чисельно. Відзначимо, що $\varepsilon_c(x_c)$ має неочевидну поведінку та складним чином залежить від явного вигляду $i(x)$, яка в натурному експерименті не може вважатись відомою. Крім того $\varepsilon_c(x_c)$ є періодичною з періодом, рівним розміру пікселя. Тому за міру похибки розумно взяти максимальне значення ε_c у області $0 < x_c < \Delta$. Надалі ми використовуємо таке означення похибки оцінки центроїду зображення:

$$\varepsilon = \max_{0 < x_c < \Delta} |x_c - \tilde{x}_c| \quad (4.14)$$

Перевагою запропонованого означення є його незалежність від статистики x_c та відносна простота обчислень. Очевидно також, що середньоквадратична похибка не може перевищувати ε .

4.2.3. Вимоги до просторової дискретизації зображення.

Характерним розміром сфокусованого зображення (рис.4.3) є напівширина його основного дифракційного максимуму r , що залежить від довжини хвилі та числової апертури лінзи. Очевидно, що коли r є набагато меншим за розмір пікселя, помилка визначення центроїду складає приблизно $\Delta/2$. В реальних експериментах розмір зображення складає декілька одиниць розрізнення відеокамери. При цьому виявляється, що за виконання умови

$$\frac{D\Delta}{\lambda F} < 1 \quad (4.15)$$

просторова дискретизація не є фактором, що обмежує точність оцінки центроїду. Цей висновок базується на властивостях спектру Фур'є інтенсивності сфокусованого зображення. З точки зору оптичного експерименту умова (4.15) означає, що головний максимум дифракційно обмеженого сфокусованого зображення повинен мати у своєму перерізі більше двох пікселів відеокамери. Зазначимо, що мова йде саме про дифракційно обмежене зображення плоскої хвилі, утворене безабераційною лінзою. Для практичних потреб раціонально вимагати, щоб отримане зображення мало характерний розмір у 4–5 пікселів.

4.2.4. Вплив помилки квантування інтенсивності на визначення центроїду.

Інтенсивність пікселя у гартманогамі представляється своїми квантованими значеннями: $\dot{I}_p = Q(I_p)$, де Q – функція квантування. Звичайно використовується рівномірне квантування по 256 рівнях, що відповідає кодуванню значення інтенсивності одним байтом. Операція квантування може розглядатись як внесення випадкової похибки n_p у вимірне значення інтенсивності пікселя: $\dot{I}_p = I_p + n_p$. Так як експериментатору відомі лише квантовані значення інтенсивності, то при оцінці центроїду значення I_p замінюються їх квантованими версіями. Дослідження впливу квантування на точність визначення центроїдів, яке проводилось шляхом комп'ютерного моделювання, показало, що при дотриманні вимог до просторової

дискретизації квантування по 256 рівнях забезпечує точність не гіршу, ніж $\Delta/10$. Цей висновок цілком підтверджується численними експериментальними даними.

4.3. Модальний метод відновлення хвильового фронту.

Модальний метод відновлення хвильового фронту ґрунтується на його розвиненні у функціональний ряд. Нехай обрано нескінченну множину функцій (мод) $\{f_k(\vec{r})\}$, що утворює повний базис у просторі $L_2[\vec{r} \in \Omega]$, де Ω – повна вхідна апертура СШХ. Прийmemo, що невідомий хвильовий фронт $\theta(\vec{r}) \in L_2[\vec{r} \in \Omega]$, представлений своєю гартманогомою \mathbf{u} , добре описується лінійною комбінацією перших K мод обраного базису:

$$\theta(\vec{r}) \approx \theta_K(\vec{r}; a_1, a_2, \dots, a_K) = \sum_{k=1}^K a_k f_k(\vec{r}) \quad (4.16)$$

Це припущення буде справедливим завжди, якщо кількість врахованих мод K може бути обраною як завгодно великою. Задача відновлення зводиться до визначення невідомих модальних коефіцієнтів $\{a_k\}$, що задовольняють рівняння:

$$\mathbf{H}\{\theta_K\} = \mathbf{u} \quad (4.17)$$

Згідно (4.10, 4.16, 4.17) Зміщення центроїдів у гартманогомі пов'язані із невідомими коефіцієнтами $\{a_k\}$ співвідношенням:

$$\begin{aligned} u_x(n) &= -\frac{\lambda F}{2\pi} \sum_{k=1}^K a_k \frac{\partial f_k(x_n, y_n)}{\partial x} \\ u_y(n) &= -\frac{\lambda F}{2\pi} \sum_{k=1}^K a_k \frac{\partial f_k(x_n, y_n)}{\partial y} \end{aligned} \quad n = \overline{1, M} \quad (4.18)$$

Це співвідношення являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $\{a_k\}$, причому кількість рівнянь дорівнює подвоєній кількості лінз у сенсорі. Із загальних міркувань зрозуміло, що в залежності від кількості врахованих мод K система (4.18) може бути несумісною, невизначеною, а також погано обумовленою. Це означає, по–перше, що існує обмеження на максимальну кількість модальних функцій у розвиненні, що допускає однозначний розв'язок задачі відновлення. Врахування надлишкової кількості мод веде до невизначеності розв'язку. Іншою важливою проблемою є вплив похибки вимірювань на точність відновлення фази хвилі. Через скінчену точність вимірювання зміщень центроїдів значення кожного модального коефіцієнту також визначаються наближено, причому із збільшенням порядку моди шумова складова у оцінці відповідного коефіцієнту може необмежено зростати. Тому врахування великої кількості мод приводить до погіршення якості відновлення навіть у тому випадку, коли задача відновлення має однозначний розв'язок. Якщо кількість мод апроксимації обрана малою, то існує висока ймовірність втратити важливі особливості структури хвильового фронту, що описуються модами вищих порядків.

Отже, для практичного застосування бажано вміти обирати оптимальний порядок апроксимації для кожного окремого хвильового фронту, який не перевищує максимально можливого і при якому мінімізується вплив шумів.

4.3.1. Оцінка модальних коефіцієнтів за мінімумом нев'язки (Метод найменших квадратів).

Представимо систему рівнянь (4.18) у матрично–векторному вигляді:

$$\begin{bmatrix} h_{11}^x & h_{12}^x & \dots & h_{1K}^x \\ h_{21}^x & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M1}^x & \dots & \dots & h_{MK}^x \\ \hline h_{11}^y & h_{12}^y & \dots & h_{1K}^y \\ h_{21}^y & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M1}^y & \dots & \dots & h_{MK}^y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(1) \\ u_x(2) \\ \dots \\ u_x(M) \\ u_y(1) \\ u_y(2) \\ \dots \\ u_y(M) \end{bmatrix} \quad (4.19.a)$$

або, використовуючи матрично–векторні позначення:

$$\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{u} \quad (4.19.б)$$

де

$$h_{nk}^x = -\frac{\lambda F}{2\pi} \frac{\partial f_k(x_n, y_n)}{\partial x}; \quad h_{nk}^y = -\frac{\lambda F}{2\pi} \frac{\partial f_k(x_n, y_n)}{\partial y} \quad (4.20)$$

Щоб система (4.19) була визначеною, число коефіцієнтів $\{a_k\}$, що враховуються в розкладанні (4.16), повинне складати $K = 2M$. Але існує ряд обставин, що роблять вибір значення K не настільки однозначним. По–перше, функції $\{f_k(\vec{r})\}$ з великими номерами описують досить швидкі зміни градієнта фази хвильового фронту, що суперечить часто виправданому припущенню про його гладкість. По–друге, кількість базисних функцій, як і конкретний вид базису, можуть бути заданими умовами фізичного експерименту. Поки–що зазначимо, що значення K звичайно є істотно меншим за $2M$. Останнє означає, що у (4.19) кількість рівнянь перевищує кількість невідомих і система може не мати точного розв'язку. Тоді за оцінку шуканих коефіцієнтів розвинення $\{a_k\}$ беруть псевдорозв'язок $\{\tilde{a}_k\}$, що мінімізує нев'язку ε лівої та правої частини (4.19):

$$\varepsilon = \|\mathbf{H}\mathbf{a} - \mathbf{u}\| \quad (4.21)$$

У випадку квадратичної норми задача мінімізації $\varepsilon(\mathbf{a})$ веде до процедури найменших квадратів, а псевдорозв'язок подається у вигляді:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{u} \quad (4.22)$$

де $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}$ – матриця, псевдообернена до \mathbf{H} [25].

Метод найменших квадратів сам по собі не дає відповіді на запитання про “правильну” кількість доданків у розвиненні (4.16). Обмеження на максимальну кількість цих доданків можна отримати, аналізуючи поведінку сингулярних чисел матриці \mathbf{H} в залежності від кількості врахованих мод. Нагадаємо, що прямокутна матриця \mathbf{H} розмірності $2M \times K$ може бути представлена у вигляді сингулярного розвинення [25]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^+ \equiv [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_K] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^+ \\ \mathbf{w}_2^+ \\ \dots \\ \mathbf{w}_K^+ \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{v}_k^+ = [v_k^1 \quad v_k^2 \quad \dots \quad v_k^{2M}], \quad \mathbf{w}_k^+ = [w_k^1 \quad w_k^2 \quad \dots \quad w_k^K]$$

де λ_k – сингулярні числа, звичайно впорядковані за зменшенням, $\{\mathbf{w}_k\}$, $\{\mathbf{v}_k\}$ – набори векторів, що мають властивість ортонормованості: $\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{v}_q = \delta_{pq}$, $\mathbf{w}_p^+ \cdot \mathbf{w}_q = \delta_{pq}$. Якщо всі сингулярні числа мають один порядок малості, то задача мінімізації нев'язки $\varepsilon(\mathbf{a})$ має єдиний розв'язок $\tilde{\mathbf{a}}$.

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{u} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_K] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_K^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^+ \\ \mathbf{v}_2^+ \\ \dots \\ \mathbf{v}_K^+ \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (4.24)$$

Якщо ж серед сингулярних чисел є таке λ_p , для якого виконується $\lambda_p = o\left(\text{Max}_k(\lambda_k)\right)$, то рівняння (4.19) не матиме стійкого розв'язку, а конкретний результат застосування процедури найменших квадратів (4.24) визначатиметься головним чином випадковою експериментальною похибкою, що міститься у значеннях правої частини (4.19). З практичної точки зору можна сподіватись, що метод найменших квадратів дає надійні результати відновлення хвильового фронту, якщо відмінність між найбільшим та найменшим сингулярним числом не перевищує 2-х порядків.

Поведінка сингулярних чисел визначається двома чинниками: кількістю мод, врахованих у розвиненні (4.16), та геометрією сенсора, тобто кількістю лінз та способом їх упорядкування у матриці. Конкретні значення сингулярних чисел мають розраховуватись чисельно для кожного окремого сенсора, обраного базису $\{f_k(x, y)\}$ та фіксованої кількості врахованих мод K . Досвід показує, що у більшості випадків число мод апроксимації слід обирати таким, що не перевищує половини числа лінз у сенсорі: $K \leq M/2$.

4.3.2. Вибір базису.

Вище ми не конкретизували вигляд базису $\{f_s(\vec{r})\}$, вимагаючи від нього лише властивості повноти у просторі функцій, інтегрованих з квадратом на апертурі сенсора. В оптиці є загальноприйнятим представляти хвильовий фронт у вигляді суперпозиції функцій Церніке $Z_k(\vec{r})$ [2]:

$$\theta(\vec{r}) = \sum_k a_k Z_k(\vec{r}) \quad (4.25)$$

Перевагою мод Церніке є те, що вони відповідають стандартним абераціям оптичної хвилі, або оптичної системи, що спотворює хвилю.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. ОПТИЧНА ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ

Мета роботи – ознайомлення студентів з методами оптичної лінійної просторової фільтрації та оптичним просторовим спектральним аналізом.

Порядок виконання роботи

Вивчити опис роботи і необхідну літературу.

Зібрати оптичну схему для спостереження Фур'є-спектрів на екрані монітора. (рис.1.2) Оцінити за Фур'є – спектрами форму та розміри різних об'єктів (щілина, отвори прямокутної, трикутної форми та форми кола).

Використовуємо оптичну схему розділу 1 (рис. 1.2.). Фокусна відстань Фур'є-об'єктива $f=30\text{см}$, довжина хвилі лазерного випромінювання $\lambda=0.63\text{ мкм}$. Встановити перед лінзою стандартну міру. Одержати на екрані монітора зображення Фур'є-спектра однієї з ділянок міри та, знаючи просторову частоту ділянки міри, визначити коефіцієнт збільшення відеотракту.

Одержати Фур'є-спектр дифракційної ґратки. Розрахувати просторову частоту ґратки (рис. 1.2).

Зібрати оптичну схему для проведення лінійної оптичної фільтрації (рис. 2.1). За допомогою метода лінійної оптичної фільтрації виділити з вхідного зображення прямі певного напрямку (аналог експерименту Аббе–Портера). Оцінити зображення об'єктів до та після фільтрації.

За допомогою лінійної оптичної фільтрації подавити характерну структуру газетного фотознімку (рис. 2.1).

Візуалізувати фазовий об'єкт методом:

А) темного поля, Б) ножа Фуко, В) дефокусування (оптична схема рис. 2.1).

Оформити щоденник лабораторної роботи, який повинен містити наступні розділи: 1) основні теоретичні відомості та відповіді на контрольні запитання, 2) експериментальна частина, 3) висновки. В теоретичній частині потрібно викласти поняття просторових частот, основні поняття лінійної оптичної та узгодженої фільтрації, спектрального аналізу, описати роботи фазових носіїв оптичної інформації. В експериментальній частині потрібно замалювати оптичні схеми експериментів, вхідні транспаранти, використані маски, вихідні зображення, а також провести необхідні розрахунки. В третій частині потрібно проаналізувати отримані результати.

Контрольні питання

1. При якій умові можна вважати, що спостереження світлових хвиль відбувається у зоні Френеля або у зоні Фраунгофера?
2. Що таке спектральна площина, і що називають Фур'є спектром для оптичних сигналів?
3. Як розрахувати “розмір” точки у фокусі лінзи, яка має фокусну відстань $f=25\text{см}$, якщо на неї нормально падає плоска хвиля, а діаметр діафрагми перед лінзою $a=2\text{см}$, 6см , 10см ?
4. Що таке просторова частота? Як це поняття пов'язане з дифракційною ґраткою?

5. Чому при аналізі оптичних систем використовують апарат теорії лінійних систем?
6. Що таке **згортка**? Який взаємозв'язок між спектрами Фур'є вхідного та вихідного сигналів? Що таке **передаточна функція** і що вона означає для оптичної схеми?
7. У чому полягає принцип лінійної оптичної фільтрації, та за якою оптичною схемою його можна здійснити?
8. Як залежать параметри просторового фільтра від характеру зображення, що обробляється, для методу лінійної просторової фільтрації?
9. Як можна здійснити низькочастотну, високочастотну, смугову та напрямлену фільтрацію у оптичному діапазоні довжин хвиль?
10. Що називають фазовим об'єктом? Які методи його візуалізації? В якому випадку метод фазової платівки трансформується в метод темного поля? Що таке фазовий контраст і контраст інтенсивності?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. СУМІСНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Мета роботи: ознайомлення з кореляційним методом розпізнавання сигналів і з його практичним застосуванням на прикладі сумісного перетворення Фур'є.

Порядок виконання роботи

Вивчити опис роботи і необхідну літературу.

Розрахувати просторові частоти та визначити лінійні розміри та розташування об'єктів на транспаранті та у площині Фур'є у кореляторі з одночасним перетворенням Фур'є.

Зібрати оптичну схему для спостереження Фур'є спектрів досліджуваних сигналів та записати отримані картинки у вигляді файлів у bmp-форматі розмірності 256x256 пікселів (оцінити розмір 1 пікселю).

Провести моделювання за допомогою програми "Correlation" об'єктів/зображень, що досліджуються. Робота програми "Correlation" більш детально дається у Додатках.

Провести оптичний кореляційний аналіз реальних об'єктів на прикладі корелятора з одночасним перетворенням та порівняти з результатами моделювання. Визначити положення кореляційних піків і пояснити таке їх розташування.

Контрольні питання

1. Що таке просторові частоти оптичних сигналів, як вони пов'язані з лінійними розмірами зображень та їх окремих фрагментів?
2. Що таке оптичний корелятор і принцип його роботи?
3. Які типи кореляторів найчастіше використовуються в оптичній обробці інформації, їх переваги та недоліки?
4. Які умови повинні виконуватись для отримання можливості адекватного кореляційного аналізу (отримання кореляційного відгуку)?
5. Що таке узгоджений фільтр? Як можна проводити оптимізацію параметрів просторових фільтрів (теоретично, практично)?

6. Які методи аналізування спектрів сигналів існують, і при яких умовах застосовується той чи інший метод?

Робота з програмою "Correlation".

1. Запустити програму "Correlation", використовуючи файли **Correlation_24.exe** або **Correlation_8.exe**. При цьому з'являється вікно для виконання моделювання процесів, які відбуваються у оптичній системі при сумісному перетворенні Фур'є двох сигналів (зображень), за допомогою цієї програми.
2. Спочатку вибираємо 1-ше зображення, для цього вибираємо закладку "Image 1", а потім "Open" та відкриваємо потрібне зображення у bmp-форматі. Вибраний фрагмент програма розміщує посередині вікна і доповнює нулями до розміру 256x256, якщо зображення менше за ці розміри. Далі так само вибирається 2-ге зображення.
3. Програма розміщує ці два зображення на певних відстанях одне від одного і результат цього розміщення можна спостерігати, якщо розкрити закладку "Results".
4. Далі для виконання розрахунків натискаємо "Calculate", при цьому програма робить швидке перетворення Фур'є зображення, що отримане після розміщення 2 сигналів, кореляцію яких ми хочемо дослідити.
5. Спектр, що отриманий після розрахунків можна спостерігати у вікні "Results", а кореляцію – вибравши закладку "Results2".
6. Для збереження результатів розрахунків передбачена операція "Save", при цьому потрібно вказати формат bmp.

Лабораторна робота №3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНЗИ ЗА ДОПОМОГОЮ СЕНСОРА ХВИЛЬОВОГО ФРОНТУ

Мета роботи: ознайомлення з методами відновлення оптичного хвильового фронту та застосування сенсора Шека-Хартмана для діагностики оптичних елементів.

У роботі визначається фокусна відстань лінзи за допомогою спрощеної моделі сенсора хвильового фронту Шека-Хартмана (рис. ЛР3). Замість матриці мікролінз використовується одна лінза – об'єктив відеокамери. Відеокамера сканує хвильовий фронт, що проходить крізь досліджувану лінзу, послідовно у кількох точках (для спрощення експериментальної установки при скануванні хвильового фронту рухається не відеокамера, а сама тестова лінза). Апертура об'єктива занадто велика для визначення середнього локального нахилу у певній області, тому з плоского пучка, що освітлює лінзу, за допомогою діафрагми виділяється вузький промінь, який далі проходить крізь об'єктив відеокамери і формує на поверхні ПЗЗ-матриці світлу пляму. Очевидно, що кут заломлення цього променя співпадає з локальним нахилом хвильового фронту на виході з лінзи. Таким чином, локальні нахили хвильового фронту у кожній точці вимірювання визначаються співвідношеннями

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right|_i = \frac{X_i - X_0}{F} = -\frac{x_i - x_0}{f} = -\frac{\Delta x_i}{f}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right|_i = \frac{Y_i - Y_0}{F} = \frac{y_i - y_0}{f} = \frac{\Delta y_i}{f}$$
(1)

де $\varphi(x, y)$ – розподіл фази на виході з лінзи, (X_0, Y_0) , (x_0, y_0) – координати незаломленого зонduючого променя у площині лінзи та ПЗЗ–матриці відповідно, (X_i, Y_i) – деяке положення тестової лінзи, (x_i, y_i) – відповідне положення сфокусованої плями на поверхні ПЗЗ–матриці, f – фокусна відстань об’єктива камери, F – фокусна відстань лінзи. Можна вважати, що координати (X_0, Y_0) відповідають положенню лінзи, при якому її оптична вісь співпадає із зонduючим променем.

Слід зауважити, що безпосередньо відновлення форми хвильового фронту не проводиться, а фокусна відстань F та координати (X_0, Y_0) визначаються як середні значення для набору вимірювань методом лінійної регресії. Вимірювання проводяться на сітці 3×3 точки поблизу центру лінзи (з кроком 2–3 мм).

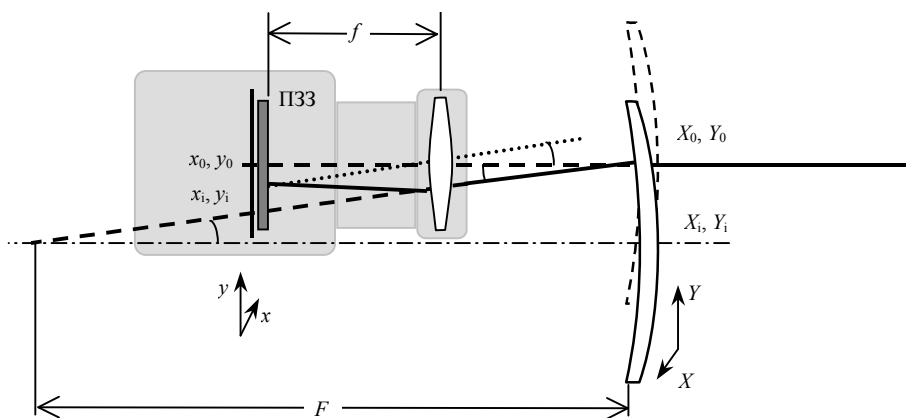


Рисунок ЛР3.

Порядок виконання роботи.

Вивчити опис роботи і необхідну літературу.

Визначити опорне положення зонduючого променя (x_0, y_0) . Йому відповідають координати центру сфокусованої плями на поверхні ПЗЗ–матриці, одержаної у відсутності зразка.

Провести ряд вимірювань, результати занести у таблицю:

Номер точки i	Положення лінзи, мм		Зміщення у пікселях*		Зміщення, мм	
	X_i	Y_i	Δx_i	Δy_i	Δx_i	Δy_i
1						
...						
9						

*Розмір пікселя ПЗЗ–матриці дорівнює 7.5 мкм.

Зв’язок між вимірюваннями задається співвідношеннями:

$$\Delta x_i = -fD(X_i - X_0) \quad \Delta y_i = fD(Y_i - Y_0) \quad (2)$$

де f – фокусна відстань об’єктива відеокамери (50 мм), $D=1/F$ – оптична сила досліджуваної лінзи.

Невідомі значення D , X_0 , Y_0 визначаються методом лінійної регресії. Іншими словами, необхідно знайти такі значення D , X_0 , Y_0 , для яких сума квадратів різниць між лівою та правою частиною масиву рівнянь (9) для всіх i буде мінімальною:

$$\sum_i \left[(\Delta x_i + fD(X_i - X_0))^2 + (\Delta y_i - fD(Y_i - Y_0))^2 \right] = \min \quad (3)$$

що відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial D} \sum_i \left[(\Delta x_i + fD(X_i - X_0))^2 + (\Delta y_i - fD(Y_i - Y_0))^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_0} \sum_i \left[(\Delta x_i + fD(X_i - X_0))^2 + (\Delta y_i - fD(Y_i - Y_0))^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial Y_0} \sum_i \left[(\Delta x_i + fD(X_i - X_0))^2 + (\Delta y_i - fD(Y_i - Y_0))^2 \right] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок системи рівнянь (11) знайдіть самостійно.

Зауваження

Система рівнянь (4) не є лінійною відносно невідомих D , X_0 , Y_0 , тому пропонується ввести наступну заміну змінних:

$$\xi = DX_0, \quad \eta = DY_0. \quad (5)$$

Тоді систему рівнянь (4) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial D} \sum_i \left[(\Delta x_i + fDX_i - f\xi)^2 + (\Delta y_i - fDY_i + f\eta)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_i (\Delta x_i + fDX_i - f\xi)^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_i (\Delta y_i - fDY_i + f\eta)^2 = 0 \end{cases} \quad (4a)$$

З розв'язку системи рівнянь (4a) визначте значення D , X_0 , Y_0 та оцініть похибку вимірювань.

Контрольні питання

1. Який принцип роботи сенсора хвильового фронту?
2. Чому у сенсорі хвильового фронту використовують лінзи з малою числовою апертурою?
3. Чому помилка визначення координат сфокусованих зображень у гартманограмі може бути зроблена істотно меншою за розмір «пікселя» зображення?
4. У чому полягає модальний метод відновлення хвильового фронту?
5. Скільки модальних коефіцієнтів можна оцінити за гартманограмою?

ЛІТЕРАТУРА

1. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. – М.: Мир – 1970. – 364 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука – 1973. – 720 с.
3. Старк Г. Применение методов Фурье-оптики. – М.: Радио и связь – 1988. – 535с.
4. Колфилд Г. Оптическая голография. Т.1. – М.: Мир – 1982. – 374 с.
5. Кейсесент Д. Оптическая обработка информации. – М.: Мир – 1980. – 350 с.
6. Фленнери Д., Харнер Дж. Оптические Фурье-процессоры // ТИИЭР – т.77, №10 – с.138-157 – 1989.
7. Казанне А., Флере Ж., Мэтр Г., Руссо М.. Оптика и связь. – М.: Мир – 1984. – 254с.
8. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. – М.: Мир – 1971. – 496с.
9. Литвиненко О.Н. Основы радиооптики. – Киев, Техника – 1974. – 208с.
10. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики – М.: Наука – 1971. – 616с.
11. Javidi B., Tang Q., Zhang G., Parchekani F. Image classification with a chirp-encoded joint transform correlator. // Appl.Opt. – v.33, №26 – p.6219-6227 – 1994.
12. Васильев А.А., Касасент Д., Компанец И.Н., Парфенов А.В. Пространственные модуляторы света. – М.: Радио и связь – 1987. – 320с.
13. Chumakov A.G., Kisil A.V., Kovalenko A.V., Kurashov V.N., Nakhodkin N.G., Podanchuk D.V. Optoelectronic system of digital holographic image processing. // Proc. SPIE – V. 2108 – p. 332-337 – 1993.
14. Юу Ф.Т. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию. – М.: Советское радио – 1979. – 304 с.
15. Platt B. C., Shack R. History and Principles of Shack-Hartmann Wavefront Sensing // Journal of Refractive Surgery. – V. 17 – p. 573-577 – 2001.
16. Гудмен Дж. Статистическая оптика – М.: Мир – 1988. – 528 с.
17. Adaptive Optics for Astronomy / ed. by D. M. Alloin and J.-M. Mariotti. – NATO ASI Series: Kluwer Academic Publ. – 1994. – 423 p.
18. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере – М.: Наука – 1967. – 548 с.
19. Son J.-Y., Podanchuk D. V., Dan'ko V. P., Kwak K.-D. Shack-Hartmann wavefront sensor with holographic memory // Optical Engineering. – V. 42, No. 11. – p. 3389-3398. – 2003.
20. Podanchuk D. V., Dan'ko V. P., Kotov M. M. [et al.] Extended-range Shack-Hartmann wavefront sensor with nonlinear holographic lenslet array // Optical Engineering. – V. 45, No. 5. – 053605. – 2006.
21. Nicolle M., Fusco T., Rousset G., Michau V. Improvement of Shack-Hartmann wavefront sensor measurement for Extreme Adaptive Optics // Optics Letters.– V. 29. – p. 2743-2745. – 2004.
22. Arines J., Ares J. Significance of thresholding processing in centroid based gradient wavefront sensors: effective modulation of the wavefront derivative // Optics Communications.– V. 237. – p. 257-266. – 2004.
23. Барчук О.І., Коваленко А. В. Оптималне відновлення оптичного хвильового фронту, спотвореного турбулентною атмосферою, за його гартманогомемою //

Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.– Вип. 3. – с. 277-283. – 2003.

24.Коваленко А.В. Кисіль О. В., Борківець О. В. Оцінка центроїдів у сенсорі Шека-Хартмана // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.– Вип. 3. – с. 396-402. – 2005.

25.Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры – М.: Наука, 1983. – 336 с.