## Висновки із формули Планка

① Атоми, які утворюють стінки нагрітої порожнини, в котрій знаходиться рівноважне теплове випром., здатні випромінювати і поглинати світло данної частоти $\omega$ не в будь-якій кількості, а лише дискретними порціями (квантами) з ен. $E_0 = \hbar\omega = h\nu$.

② Розв'язується парадокс Релея-Джинса („УФ катастрофа").

ВЧ світло ($\omega \to \infty$) може випромінювати лише достатньо великі порції (кванти) енергії. В умовах, коли $\hbar\omega \gg kT$, в стінках порожнини не знаходиться атомів, здатних випромінювати ВЧ кванти: теплової ен. атомів, яка має порядок $kT$, буде для цього надто мало. Таким чином, при $\omega \to \infty$ спектр. густина випр. $u(\omega, T) \to 0$. Це знаходиться у повній відповідності з експериментом.

В НЧ обл. спектра, коли $\hbar\omega \ll kT$, дискретність випромінювання не буде грати суттєвої ролі. Ось чому в НЧ обл. спектра (коли $\omega \to 0$) справедлива класична теорія.

③ Середнє значення енергії осцилятора, яка припадає на 1 ступінь свободи, в дійсності, не є величиною сталою, як в класичній фізиці для коливань – $kT$, а залежить від частоти $\omega$. Із збільшенням $\omega$ ця енергія зменшується.

④ Із формули Планка можна вивести закон Релея-Джинса: в обл. малих частот і/або великих температур, коли $h\nu \ll kT$, експоненту можна розкласти в ряд: $e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \ldots$

Тоді $u(\nu,T) = \frac{1}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{1}{\pi^2 c^3}\,\frac{h\nu^3}{1+\frac{h\nu}{kT}-1} =$

$= \frac{kT}{\pi^2 c^3}\cdot\nu^2$ — закон Релея-Джинса

5. Із формули Планка можна вивести закон Стефана-Больцмана: $\frac{dW}{dV} = \int_0^\infty u(\omega,T)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} =$

$= \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4\cdot\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \mathrm{const}\cdot T^4$

$u(T) = \sigma\cdot T^4$

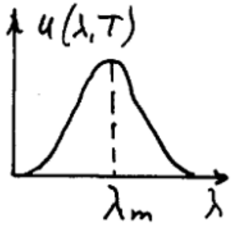
$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}\ \text{табл. інтегр.}}$

$\sigma = \frac{\pi^2\cdot k^4}{15\hbar^3c^3} = 7.55\cdot10^{-15}$ ерг·см$^{-3}$·$K^{-4}$

6. Із формули Планка можна вивести закон зміщення Віна: $u(\omega,T)\cdot d\omega = u(\lambda,T)\cdot d\lambda$ (1)

$u(\lambda,T) = u(\omega,T)\cdot d\omega/d\lambda$ (2)

Підставимо формулу Планка в (2):




$u(\lambda,T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$

$\frac{\partial u(\lambda,T)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{x\cdot e^x}{e^x-1} = 5$ (3)

де $x = \frac{hc}{kT\lambda_m}$. Розв'язком трансцендент. р-ня (3) є:

$x = 4{,}965$. Таким чином, $\lambda_m = \frac{hc}{4{,}965\,kT} = \frac{0.29\ \text{см}\cdot K}{T(K)}$

## Світловий квант

$E = h\nu$ – min порція енергії коливань (хвилі) з частотою $\nu$, яка м.б. поглинена або випромінена при переході осцилятора із одного енергетичного стану в інший.

Квант енергії прямо пропорційний частоті світла.

М. Планк (1900 р.) приписав цю властивість середовищу. А. Ейнштейн (1905 р.) розвинув цю ідею і поширив квантованість енергії і на випромінювання (світло). Він ввів поняття фотон – квант світла. Не тільки енергія $E = h\nu$, але і імпульс $p = h\nu/c$.

Зв'язок між хвильовими ($\nu$ та $\lambda$) та корпускулярними ($E$ та $p$) х-ками. Дуалізм хвиля-частинка.

Луї де Бройль (1924 р.) узагальнив дуалізм на всі матер. тіла: кожному тілу з масою $m$, яке рухається із швидкістю $v$, можна співставити довж. хвилі $\lambda_Б$

$\lambda_Б = h/mv = h/p$.

Девісон та Джермер (1927 р.) експериментально спостерігали дифракцію електронів.

## Оптичні переходи. Квантова модель атома.

Н. Бор (1913 р.) сформулював 2 постулати:

1. Існують стаціонарні стани атомів, в яких вони не випромінюють і не поглинають. В цих станах атоми мають енергії, які утворюють дискретний ряд $W_1$, $W_2$, ... (енергетичні рівні).
2. Світло, яке поглинається або випромінюється атомом при переході із стаціонарного рівня енергії $W_m$ на рівень з енергією $W_n$, є монохроматичним,

а його частота ω визначається з умови

$$W_m - W_n = \hbar\omega$$

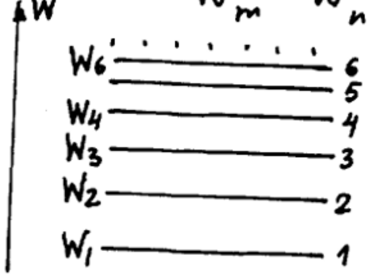
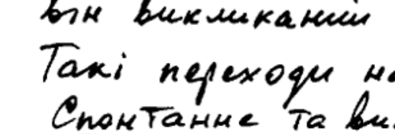



Схема енергетичних рівнів атома.

Якщо атом змінює свою енергію з більшої на меншу $(m > n)$, то відбувається випромінювання світла. Якщо перехід відбувається з нижнього рівня на вищий рівень $(m < n)$, то він викликаний поглинанням світла іззовні. Такі переходи називаються оптичними переходами.

<u>Спонтанне та вимушене випромінення, поглинання</u>

Позначимо число атомів, які знаходяться в стані




з енергією $E_1$ через $N_1$, а число атомів з ен. $E_2$ через $N_2$. В стані теплової рівноваги заселеності рівнів підпорядковані розподілу Больцмана $N_i = const \cdot e^{-E_i/kT}$ (1)

Дворівнева система взаємодіє із випроміненням, частота якого підпорядкована умові Бора

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \qquad (2)$$

За Ейнштейном (1915 р.) можливі такі типи радіаційних процесів:

<u>1. Спонтанне випромінення</u>

В момент часу $t$ збуджений атом знаходиться на енерг. рівні $E_2$. Через деякий час $\Delta t$ атом може залишитись у збудженому стані або може самодовільно (спонтанно) перейти в нижній ен. стан з ен. $E_1$. При цьому випромінюється фотон з ен. $h\nu = E_2 - E_1$.

Спонтанне випромінення здійснюється незалежно від дії зовнішнього випромінювання. Не можна бути впевненим, що перехід відбудеться, про це можна стверджувати лише з певною достовірністю.

Спонтанний перехід – випадкова подія.

Ймовірність спонт. переходу в од. часу – $A_{21}^{спонт}$.

$$A_{21}^{спонт} = 1/\Delta t \quad (3)$$

$\Delta t$ – середня тривалість життя атома в стані $E_2$

Спонтанні переходи одного і того ж атома в різні моменти часу, а також різних атомів в один і той же момент часу ніяк не пов'язані між собою: між фазами та амплітудами спонтанно випромінених хвиль не існує ніякої закономірності, тобто спонтанне випромінення – некогерентне.

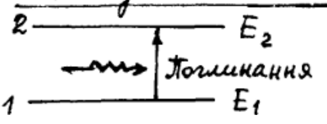
$Z_{21}^{спонт}$ – число спонтанних переходів атома з верхнього рівня 2 на нижній рівень 1 за одиницю часу пропорційно числу атомів на верхньому рівні:

$$Z_{21}^{спонт} = A_{21} \cdot N_2 \quad (4)$$

де $A_{21}$ – коеф. Ейнштейна ≡ ймовірність спонтаних переходів

Примітка: Крім оптичних переходів, є неоптичні переходи (рос. – „безизлучательные"), коли перехід атому з одного енерг. стану в інший здійснюється при співударах атомів і ніяке випромінювання в цьому не задіяне.

2. Вимушене поглинання



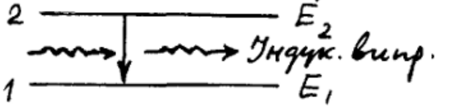

Поява випромінювання (його дія на атом) може привести до переходу атома у збуджений стан. Цей процес наз. поглинанням індукованим, або вимушеним. Його ІНТЕНСИВНІСТЬ пропорційна густині випромінення, що викликало цей перехід

$$Z_{12}^{\text{інд}} = B_{12}\cdot N_1\cdot u(\omega, T) \qquad (5)$$

Коеф. $B_{12}$ теж наз. коеф. Ейнштейна ≡ ймовірність поглин.

<u>Вимушене (індуковане) випромінення</u>

Ейнштейн постулював опт. переходи з верхнього енерг. рівня на нижній рівень під дією зовнішнього випромінення.




Такі опт. переходи називаються вимушеними, або індукованими переходами з випроміненням.

Дослід показує, що ел.м. випр., яке викликане вимушеним переходом, повністю тотожне випроміненню, яке викликало цей перехід; тобто в обох випадках частота, напрямок розповсюдження та поляризація однакові. Вимушене і вимушуюче випромінення – когерентні.

Ймовірність цього процесу $Z_{21}^{\text{інд}} = B_{21}\cdot N_2\cdot u(\omega, T)$. (6)

В стані рівноваги переходи, що супроводжуються випроміненням і поглинанням квантів світла, повинні врівноважувати один одного (за визначенням):

$$Z_{21}^{\text{спонт}} + Z_{21}^{\text{інд}} = Z_{12}^{\text{інд}} \qquad (7)$$

(4), (5), (6) → (7): $A_{21}\cdot N_2 + B_{21}\cdot N_2\cdot u(\omega, T) = B_{12}\cdot N_1\cdot u(\omega, T)$ (8)

З урахуванням (1) та (2) із (8):

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{B_{12}}{B_{21}}\cdot e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \qquad (9)$$

Відношення коеф. Ейнштейна можна знайти із розгляду граничних випадків:

а) Якщо $T \to \infty$, то $u(\omega, T) \to \infty$, а населеності рівнів будуть вирівнюватись: $N_1 \to N_2$.

При цих умовах із (8) витікає, що $B_{12} = B_{21}$ (10)

б) Якщо $\omega \to 0$, то $\hbar\omega \ll KT$, тобто квантова структура не проявляється і для спектр. густини випромінення справедлива класична формула Релея–Дж.:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} KT \qquad (11)$$

При умові $\omega \to 0$ із (9), враховуючи, що $B_{12} = B_{21}$, витікає:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{KT}{\hbar\omega} \qquad (12)$$

Порівнюючи (11) та (12), знаходимо, що

$$(13) \qquad \boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}}$$

(10), (13) → (9):

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/KT} - 1}}$$

Це є формула Планка. Ми вивели формулу Планка. (Формулу Планка вивів Ейнштейн. Планк її вгадав, підібрав і відібрав із всіх можливих).