

Розсіювання світла

Розсіювання світла в оптично неоднорідному середовищі
Оптично однорідне середовище - таке, для якого $n = \text{const}$ як у просторі, так і у часі. Для такого середовища р.с. не спостерігається.

При поширенні світла в опт. середовищі електр. поле хвилі викликає вимушені коливання оптичних електронів. \Rightarrow Ці

 електрони випромінюють ел.м. хвилі тієї ж частоти, що і частота падаючої хвилі.

Ці хвилі - вторинні. Якщо вони когерентні, то вони інтерферують. Єдиний напрям, в якому немає гасіння, це напрям падаючої хвилі. В цьому напрямі буде перевищуватись вторинна хвиля без гасіння і буде поширюватись хвиля.

Якщо в середовищі є неоднорідності (середовище - не гомогенне), то світло буде поширюватись у напрямках, відмінних від напрямку поширення падаючої хвилі. Це є розсіювання світла.

Неоднорідності середовища пов'язані із змінами показника заломлення.

Розподіл неоднорідностей розглядається як нерегулярний (неупорядкований).

Види макроскопічних неоднорідностей: 1) тверді частинки в газі (дим); 2) рідина, в якій наявні краплинки іншої нерозчиненої рідини (емульсії); 3) тверді частинки в рідині (суспензії).

Такі середовища наз. калатутними (рос. і "мутне середє").

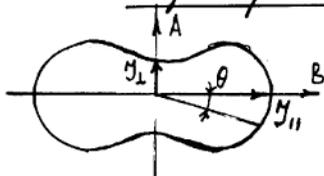
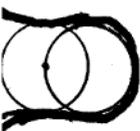
В цьому випадку відбувається дифракція на опт. неоднорідностях.

Ефекти розсіювання залежать від розмірів частинок:

I. Для $d < \lambda$ ($d \approx 0,1 \lambda$) - релєївське розсіювання. (Експериментальні дослідження Тіндала (1869 р.) та Релєя (1899 р.)).

Властивості: 1) інтенс. розс. світла $I_{\text{розс}} \sim 1/\lambda^4$ - закон Релєя; 2) $I_{\text{розс}} \sim N$; 3) $I_{\text{розс}} \sim V_{\text{част.}}$; 4) $I_{\text{розс}} = f(T, \text{°C})$.

Індикатриса розсіювання 5) розс. світло частково або повністю поляризує.



$$I_{\theta} = I_{\perp} (1 + \cos^2 \theta)$$

Інт. світла, що пройшло через сфероблицтво з розсіюванням, в напрямку поширення падаючої хвилі в 2 рази більша за I_{\perp} :

$$2I_{\perp} = I_{\parallel}$$

II. Для $d \gg \lambda$. Таке розсіювання поляється відбиттям, заломленням та дифракцією світла на цих частинках.

Властивості: 1) $I_{\text{розс}} \neq f(T, \text{°C})$; 2) $I_{\text{розс}} \neq f(\lambda)$;

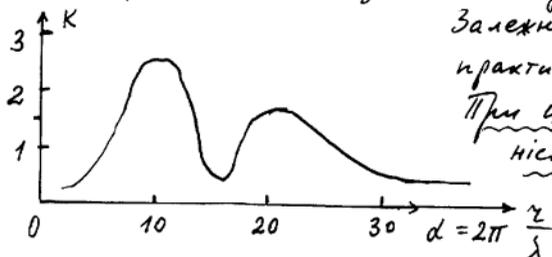
Тому туман має білий колір; 3) $I_{\text{розс}} \neq f(d)$

Внаслідок розсіювання світла оптично калямутними сфероблицтвами з такими частинками ($d \gg \lambda$) інтенсивність $I_{\text{розс}}$ зменшується за законом поглинання світла:

$$I_{\text{розс}} = I_0 \cdot e^{-2.3 N n^2 k x}$$

N - кількість частинок в 1 см^3 ; r - радіус частинки;

k - коефіцієнт, який залежить від відношення r/λ .



Залежність коєф. k від $d = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ практично зникає для $d > 40$.

При цьому зникає і залежність $I_{\text{розс}}$ від λ .

III. Для $d \sim \lambda$ - рассеивания Ми (дифракційне розсіюв.). 3.

$\mu_{розс} = f(\lambda)$; $\mu_{розс} \neq f(T, ^\circ C)$; $\mu_{розс}$ - частково поляризу

Молекулярне розсіювання світла

Р.с. спостерігається і в середовищах, в яких відсутні старонкі частинки.

Спочатку думали, що справа у забрудненості атмосфери. Але в голах небо ще синіше!?

Тоді таке Р.с. пояснили оптичними неоднорідностями, пов'язаними із флуктуаціями. Рештки пов'язані із тепловим рухом молекул і їх нерівномірним розподілом у просторі.

В малому об'ємі V_0 випадково (завдяки тепл. руху молекул) зібралась $N_0 + \Delta N$ частинок, де N_0 - число частинок в тому ж об'ємі V_0 при ідеально рівномірному розподілу молекул в об'ємі V_0 . В результаті такого накопичення частинок об'єм V_0 випромінює хвилю амплітуди $\vec{E}_0 + \vec{E}'$, де \vec{E}_0 - ампл. хвилі, що випромінює об'єм V_0 з числом частинок N_0 . На відміну від випадку абс. рівномірного розподілу частинок, в цьому випадку розсіювання не буде ^{гаситись} зникати інтерференцією ні в одному з напрямків. Напруженість поля світлової хвилі розсіяної нашим об'ємом V_0 , буде обумовлена полем \vec{E}' .

Об'єм, де відбуваються флуктуації, $V_0 \ll \lambda^3$. Тобто цей вид Р.с. відбувається за законами релєївського розсіювання.

В результаті теплової флуктуація призводить до того, що в деякому малому об'ємі V_0 зібралась $N_0 + \Delta N$ частинок.

Відповідно до цього густина речовини $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$

$$\overline{\Delta\rho^2} = \frac{m^2 N_0}{V_0} \quad \text{— це відрімо з молек. фізики.}$$

$\Delta\rho^2$ — абс. величина середнього значення квадрата флуктуації густини;

m — маса молекули; N_0 — середнє число молекул в одиниці об'єму речовини; V_0 — об'єм флуктуації.

$\Delta\rho \Rightarrow$ викликає ΔP — додатковий дипольний момент

$$\Delta P = \Delta E \cdot E_0 \cdot V_0 \cdot \frac{1}{4\pi} \quad (1) \quad \text{Це є джерелом випромінювання вторинних хвиль.}$$

У класичній теорії ел.м. випромінювання доведено, що ампл. напруж. ел. поля E_0 , яке випромінюється диполем, в точці, що знаходиться на відстані r від диполя, дорівнює:

$$(2) \quad E_0 = \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \cdot \sin \theta \quad \text{де } p_0 \text{ — ампл. коливань дип. момента}$$

θ — кут між \vec{r} та \vec{p}

$$(1) \rightarrow (2) : E_0 = \frac{\omega^2 \Delta E \cdot E_0 \cdot V_0}{c^2 r \cdot 4\pi} \cdot \sin \theta \quad \text{де } E_0 \text{ — ампл. розсіяної хвилі, яка випромінюється об'ємом } V_0$$

Інтегр. розсіяної світла: \int флуктуацією ΔE в напрямку θ .

$$J_\theta = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} E_0^2 \Rightarrow J_\theta = \frac{c \omega^4 \Delta E^2 \cdot E_0^2 \cdot V_0^2}{8\pi c^4 r^2 \cdot (4\pi)^2} \sin^2 \theta =$$

E_0 — ампл. падаюч. хвилі

$$= \frac{c}{8\pi} E_0^2 \frac{V_0^2}{(4\pi r)^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \cdot \Delta E^2 \cdot \sin^2 \theta = J_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0^2 \Delta E^2 \cdot \sin^2 \theta$$

Інтегр. розсіяного світла в об'ємі V дорівнює

$$J_{\text{розс}} = \frac{V}{V_0} \cdot J_\theta = J_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0 \cdot V \cdot \Delta E^2 \cdot \sin^2 \theta$$

$$\text{Через те, що } \epsilon - 1 = c \cdot \rho \Rightarrow \Delta E = c \cdot \Delta\rho = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = (\epsilon - 1) \delta$$

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$\Delta \varepsilon^2 = (\varepsilon - 1)^2 \cdot \delta^2$$

Для ідеального газу $\delta^2 = \frac{1}{N \cdot v_0}$

$$\text{Тоді } \mu_{\text{розс.}} = \mu_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot v_0^2 (\varepsilon - 1)^2 \frac{1}{N \cdot v_0} \cdot \sin^2 \theta =$$

$$= \mu_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{v_0}{N} (\varepsilon - 1)^2 \sin^2 \theta \quad \text{формула Релея}$$

$$\varepsilon - 1 = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2(n - 1)$$

$$\text{Тоді } \mu_{\text{розс.}} = \mu_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{v_0}{N} (n - 1)^2 \sin^2 \theta \quad \text{Формула Релея}$$

↑
n-1 для газу

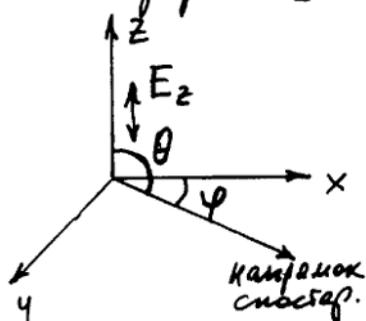
Для ідеального газу $\Delta N^2 = N$

Через те, що $\varepsilon - 1 = n^2 - 1 \sim N$, то $\mu_{\text{розс.}} \sim \frac{N^2}{N} = N$

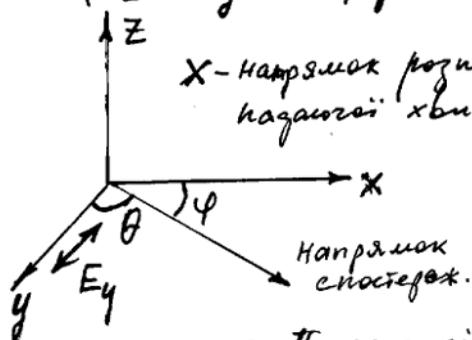
Для природного світла:

Розкладемо на 2 компоненти із ортогональними складовими: E_z (\perp пл. нахвн.) та E_y (в пл. нахвн.):

$$\mu_{\text{натур}} = \mu_z + \mu_y \quad \left(\mu_z = \mu_y = \mu_{\text{натур}} \cdot \frac{1}{2} \right)$$



X-напрямок розповсюдх. кожної хвилі



Полярна діаграма розподілу інтенсивн. розсіяного світла

$$\mu_{\varphi} = \mu_0 \frac{2\pi^2}{r^2 \lambda^4} (n - 1)^2 \frac{v_0}{N} (1 + \cos^2 \varphi)$$

φ - кут розсіювання (кут між напрямом спостереження і напрямом розповсюдження).

Висновки :

- 1) Колір неба пояснюється тільки молекул. Р.с.
- 2) Вимірювання $\mu_{роз}$ дало можливість за формулою Релея визначити число молекул в од. об'єму:

$$N_1 = \frac{N}{\sigma_0}$$
 та число Авогадро.
- 3) Формула Релея перестає бути справедливою, якщо розміри розсіюючих частинок стають $> \frac{\lambda}{20}$. В цьому випадку:
 - а) $\mu_{роз} \sim \frac{1}{\lambda^2}$;
 - б) розс. світло-частково поляризує;
 - в) індексація стає несиметричною відносно Ox ;
 - г) індексація стає \perp до Ox .
- 4) Розглянута теорія справедлива для ізотропних середовищ. Анізотропія молекул призводить до того, що в речовині виникають флуктуації орієнтації, які викликають деполаризацію розсіяного світла.
- 5) В критичному стані спостерігається тах флуктуації. Величина σ_0 при цьому сильно збільшується і стає більшою за λ : $\sigma_{кр} > \lambda$. Таке середовище стає каламутним і непрозорим для падаючого світла, дуже сильно розсіює світло всього діапазону спектра. Це розсіювання наз. опалесценцією.

Розсіювання Манделштама - Бріллюена

При релєївському і при молекулярному Р.с. частота розсіюваного світла не змінюється. Але є такі види Р.с., за яких ω змінюється. До них належить Р.М.-Б. Воно спостерігається в оптичному середовищі, в якому поширюються акустичні хвилі - відбувається так зване розсіювання на фононах. Акуст. хвилі створюють неоднорідності густини, на яких і відбувається розсіювання світла.

Акуст. хвилі: $A = A_0 \cos(\Omega t - q x)$, де $q = \frac{2\pi}{\Lambda}$

Зміна числа молекул в од. об'єму $\Delta N = N_0 \cos(\Omega t - q x)$

Світлові хвилі: $E = E_0 \cos(\omega t - k x)$, де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\vec{P} \sim N \cdot \vec{E} = (N_0 + \Delta N) \vec{E} = \underbrace{N_0 E_0 \cos(\omega t - k x)}_{\text{релєївська хв.}} + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cos(\omega_2 t - k_2 x)$

де $\omega_1 = \omega + \Omega$ $\omega_2 = \omega - \Omega$
 $k_1 = k + q$ $k_2 = k - q$

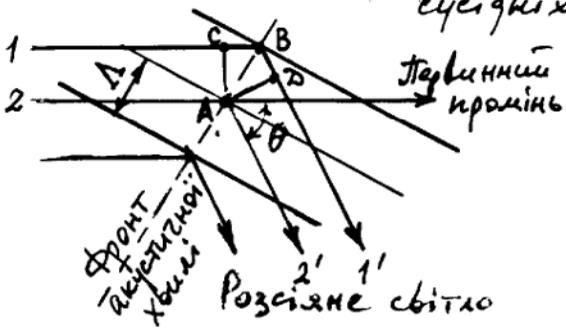
Тонка структура релєївської лінії

Для того, щоб розсіюані хвилі інтерферували і давали так інтенсивності в напрямі, який утворює кут θ з напрямом падаючої хвилі, необхідно, щоб опт. різниця ходу $\Delta = CB + BD$

сусідніх падаючих (1,2) і розсіюаних (1',2') променів дорівнювала би

$$\Delta = 2n \cdot \Lambda \sin \frac{\theta}{2} = \lambda$$

де $\Lambda = AB$ - довжина розсіюаної пружиної хвилі.



Розсіювання М.-Б. еквівалентне модуляції світла ⁸
 падаючого променя з частотою пружної хвилі

$$\Delta = \nu \frac{1}{\Delta \nu} ; \quad \lambda = c \frac{1}{\nu}$$

$$\Delta = 2\pi \frac{\nu}{\Delta \nu} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = c \frac{1}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu} = 2\pi \frac{\nu}{c} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Omega}{\omega} ;$$

$$\boxed{\frac{\Omega}{\omega} = 2\pi \frac{\nu}{c} \sin \frac{\theta}{2}}$$

Формула
Мандельштама-
Брільюена

Зауваження:

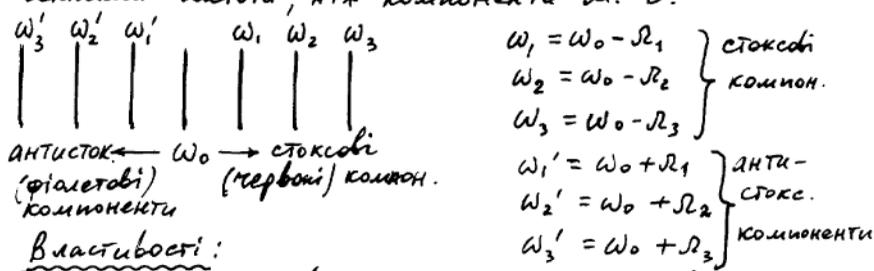
- ① Ситуація ускладнюється тим, що в кристалах у кожному напрямку може розповсюджуватись три акустичних хвилі (1-поздовжня і 2-поперечних). У тому ж напрямку може поширюватись дві світл. хвилі, поляризовані в перпендик. напрямках. Тому в розсіяному світлі — 24 компоненти (6 груп по 4 лінії), але роздільної сили спектр. приладів вистає, щоб розрізнити тільки 6 зміщених компонент.
- ② Р.с. М.-Б. можливе також і на інших колективних збудженнях: магнонах, екситонах, дефектах крист. ґратки, поляронах, плазмонах тощо.
- ③ Р.с. М.-Б. відноситься до ефектів лінійної оптики.
- ④ Під дією потужного лазерного випром. на середовище в ньому може виникнути випищення М.-Б. розс. світла, яке використовується для генерації потужних гіперзвук. хвиль у кристалах. Інтенс. розсіяного світла в цьому випадку може бути рівною інтенс. падаючого світла.
- ⑤ Якщо частота падаючого світла \approx власній частоті поглинання речовини, то спостер. резонансне Р.с. М.-Б.

Комбінаційне розсіювання світла. (Ефект Рамана).

КР виникає в результаті модуляції світ. хвилі власними коливаннями молекул.

1928 р. : Мандельштам та Ландсберг на CaCO_3 та сфери, Раман та Кришнан - на рідинах (бензол, толуол).

Експеримент: кожна спектр. лінія супроводжується випиканням системи додаткових ліній, які називаються супутниками (сателітами) із значно більшими значеннями частоти, ніж компоненти М.-Б.



Властивості:

- 1) Супутники супроводжують кожну лінію первинного світла. При переході від однієї спектр. лінії первинного променя до другої сукупність значень $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ залишається для певної величини незмінною.
- 2) Кожному сателіту з частотою ω_i^s відповідає сателіт із частотою ω_i^{as} ; $\Omega_i = \omega_0 - \omega_i^s = \omega_i^{as} - \omega_0$.
- 3) Частоти Ω_i лежать в ІЧ діапазоні і відповідають частотам коливань молекул.

Механізм КР →

КР виникає в результаті модуляції світ. хвилі власними коливаннями молекул.

На молекулу, яка має власну частоту коливань (Ω) падає світ. хвиля $E = E_0 e^{i\omega t}$. У молекулі

виникає дип. момент $p(\omega') = \alpha \cdot E(\omega)$, де α - коеф. поляризації молекули.

Вважаємо, що ω падає в обл. прозорості середовища. Тоді α - дійсна величина.

Зв'язок між атомами, які складають молекулу, зумовлений електронами. Електронна поляризація спричиняє збурення сил зв'язку, в результаті чого відбувається збудження коливань атомів молекули. Будемо вважати, що $\alpha = \alpha_0(1 + A \cos \Omega t)$

$$p(\omega') = \alpha_0(1 + A \cos \Omega t) \cdot E_0 e^{i\omega t} =$$

$$= \alpha_0 E_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \alpha_0 A E_0 e^{i(\omega + \Omega)t} + \frac{1}{2} \alpha_0 A E_0 e^{i(\omega - \Omega)t}$$

↑ скористалися формулою Ейлера: $\cos \Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$

I доданок описує релєївське Р.е;

II та III доданки описують КР.

Модуляція за рахунок коливань молекул.

Якщо падає на середовище монохром. світло, то в спектрі розсіяного світла спостер. три лінії:

- 1) основна (на частоті ω первинного світла);
- 2) стоксова компонента (на частоті $\omega - \Omega$, утворюється за рахунок втрати енергії ^{кванта} падаючої хвилі);
- 3) антистоксова компонента (утворюється за рахунок збільшення енергії ^{кванта} падаючого випром.).

Стоксова і антистоксова компоненти мають різкі інтенсивності. Різниця в інтенсивностях залежить від температури. Пояснення - квантовомеханічне.

§ 7.4. Оптичні явища, зумовлені розсіянням світла в атмосфері (денне світло, райдуга, гало, вінці)

Внаслідок розсіяння світла атмосфера світиться в усіх напрямках, створюючи денне світло, яке освітлює земну поверхню і всі предмети. Оскільки інтенсивність розсіяного світла чистою атмосферою обернено пропорційна четвертому степеню довжини світлових хвиль, то небо має голубий колір. За наявності в атмосфері завислих водних краплин та пилу розсіяння світла відбувається рівномірніше в усіх частинах спектра і колір неба стає менш голубим, тобто білястим. Розсіяння світла атмосферою є причиною плавного переходу від дня до ночі і навпаки. При опусканні Сонця за горизонт атмосфера освітлюється все менше і настає момент, коли вона зовсім не освітлюється. Проміжок часу між цим моментом і заходом Сонця являє собою присмерки.

До оптичних явищ, зумовлених розсіянням світла в атмосфері, належить райдуга. Це кольорова смуга у вигляді дуги, що спостерігається на фоні дощових хмар або дощу, коли дощова хмара знаходиться попереду спостерігача, а Сонце – позаду. Центр дуги райдуги знаходиться на продовженні прямої, що проходить через око спостерігача і Сонце. Кут між цією прямою і напрямом від спостерігача до дуги райдуги має значення $41\text{--}42^\circ$ (приклад 7.1). Різнокольорова дуга знаходиться від спостерігача на відстані 1–2 км, її можна також спостерігати на відстані 2–3 м на фоні водяних краплин фонтанів. Часто виникає побічна райдуга, концентрична до першої, із оберненим розміщенням кольорів. Її кутівий радіус має значення близько 52° . Вигляд дуги, яскравість кольорів та ширина смуг залежать від розмірів краплин води та їхньої кількості: більші краплини створюють вужчу райдугу з різко виділеними кольорами.

Виникнення райдуги Р. Декарт у 1637 р. пояснював заломленням і відбиванням світла в дощових краплинах. Утворення кольорів та їх послідовність пояснено після встановлення складної природи білого світла та його дисперсії в середовищах. Іноді одночасно спостерігається три, чотири і навіть п'ять райдуг. Вони можуть виникати не тільки від прямих сонячних променів, але й внаслідок дії відбитих. Райдугу можна спостерігати також і вночі після дощу, коли із-за хмар виходить Місяць. У цьому випадку вона буде білою, оскільки нічним зором кольори не розрізняються.

Нерідко спостерігають оптичне явище, яке називається гало. Ця назва об'єднує групу складних оптичних явищ в атмосфері, зумовлених заломленням і відбиванням світла в кристалах льоду пір'ястих хмар. Кристали, з яких складаються хмари, являють собою тонкі шестигранні пластинки-сніжинки або правильні шестигранні призми. Іноді пластинки та призми з'єднуються, тоді кристали мають форму парашутиків.

Оскільки кут між двома гранями шестигранної призми дорівнює 60° , а показник заломлення льоду для світлових хвиль, яким відповідає зеле-

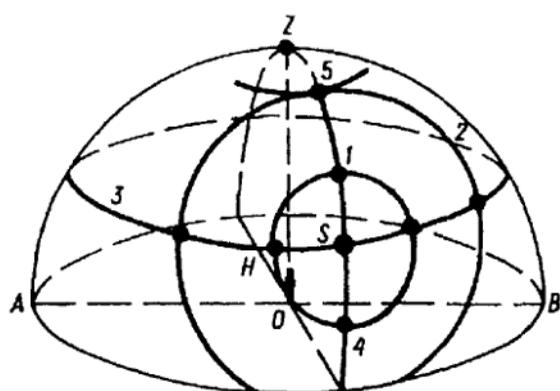


Рис. 7.5

такі явища. Малий круг гало 1, центр якого збігається з центром видимого розміщення Сонця; його кутовий радіус дорівнює 22° . Великий круг гало 2 і круг 1 концентричні, круг гало 2 має кутовий радіус 46° . Світлий круг 3 паралельний горизонту і проходить через видиме розташування Сонця. Кільце 4 розміщене у вертикальній площині й також проходить через видиме розташування Сонця. Круги 3 і 4 утворюють стовпи, які за формою подібні до хрестів. Вертикальні стовпи утворюються внаслідок відбивання і заломлення світла в горизонтально розміщених кристалах, які повільно падають і обертаються навколо горизонтальної осі.

Коли значна кількість кристаликів льоду у вигляді парашутиків повільно опускається, то у разі низького розміщення Сонця над горизонтом сонячні промені, заломлені гранями шестигранних призм, потрапляють в око під кутом 22° до напрямку на Сонце і створюють вертикальні стовпи з обох боків від Сонця. Ці стовпи в перетині з кругом 3 з обох боків Сонця утворюють два несправжніх Сонця.

Іноді тихим морозним ранком можна спостерігати над яскравим Сонцем, що піднімається над горизонтом, льодяні голки, що поблискують в його промінні, а зверху і знизу від Сонця – світні стовпи. Ці стовпи самі по собі кольору не мають, але коли Сонце стає жовтим, оранжевим або червоним, вони набирають того самого відтінку.

Навколо Сонця або Місяця можна спостерігати одне або кілька райдужних кілець, які називаються вінцями. Центр вінців збігається з центром світила, навколо якого вони виникають. Утворення вінців зумовлене дифракцією світла на водяних краплинах прозорих хмар, які знаходяться між світилом і спостерігачем. Не слід змішувати вінці з гало. Кутовий діаметр вінців значно менший від діаметра гало і становить $1-6^\circ$.

До оптичних явищ належить також мерехтіння зірок. Воно зумовлене випадковими змінами густини середовища, що приводить до зміни його показника заломлення.

Від зірки до Землі поширюється плоска світлова хвиля (промені паралельні). Внаслідок випадкових змін густини атмосфери Землі відбуваються

ний колір, $n = 1,31$, то за допомогою формули (2.11) знаходимо, що кут найменшого відхилення променя дорівнює 22° .

На рис. 7.5 показано загальну картину гало. У центрі небосхилу O, який зображено у вигляді півсфери, знаходиться спостерігач. Точки Z і S вказують розміщення відповідно Zenithу і Сонця для спостерігача, відрізок AB – лінію горизонту. В загальному випадку можна спостерігати

відповідні зміни її показника заломлення. Це приводить до зміни форми фронту хвилі (рис. 7.6). Оскільки промені нормальні до фронту, то в місцях виступів вони розходяться й яскравість цих ділянок зменшується, а в місцях впадін промені сходяться і яскравість відповідно збільшується. Оскільки зміни показника заломлення в атмосфері мають випадковий характер, то спостерігається мерехтіння зірок. Це явище характерне тільки для зірок, оскільки їх можна побачити у вигляді світних точок під кутом не більшим $0,05''$. Планети не мерехтять, так як видно їх під кутом десятків кутових секунд. Тому світло від ділянок хвильового фронту, яким відповідає менша інтенсивність світла, буде перекриватись світловим потоком від ділянок хвильового фронту, яким відповідає більша інтенсивність світла.

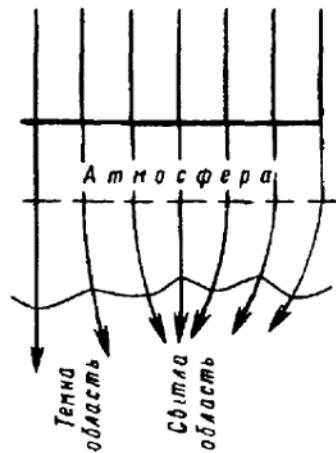


Рис. 7.6

Приклад 7.1. Показати, що кут між прямою, яка проходить через око спостерігача і Сонце, та напрямом від спостерігача до зовнішньої поверхні дуги райдуи має значення 42° .

Розв'язання. Розглянемо хід променів від Сонця через краплину води. Сонячний промінь, який падає на краплину в точці A під кутом i , заломлюється на поверхні краплини під кутом r , потім відбивається в точці B і знову заломлюється в точці D , виходячи з краплини під кутом i (рис. 7.7). Із трикутника ABC можна записати $r = (i - r) + \gamma/2$, звідки

$$\gamma = 4r - 2i. \quad (1)$$

Тоді кут відхилення променя ϵ дощовою краплиною дорівнює

$$\epsilon = \pi - \gamma = \pi - 4r + 2i. \quad (2)$$

Проведемо дослідження (2) на екстремум

$$\frac{d\epsilon}{di} = 4 \frac{dr}{di} + 2 = 0. \quad (3)$$

Шляхом диференціювання співвідношення $\sin i = n \sin r$ одержимо

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \quad (4)$$

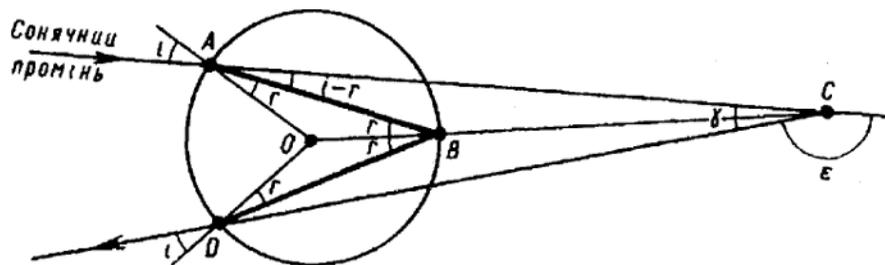


Рис. 7.7

Підставимо (4) у (3)

$$\frac{de}{di} = -4 \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} + 2 = 0.$$

Для $n = 1,33$ маємо

$$\sin i = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} = 0,86; \quad i \approx 60^\circ, \quad \text{а } r \approx 40^\circ 30'.$$

Підставимо ці значення в рівняння (2). Тоді

$$e = 180^\circ - 162^\circ + 120^\circ = 138^\circ, \quad \text{а } \gamma = 42^\circ.$$

Під кутом 42° промені звзають, найменшого відхилення, тому найбільша інтенсивність буде спостерігатись для цього кута. Оскільки, кут між лінією, яка проходить від Сонця через око спостерігача, і променем, що виходить, із крапинки і потрапляє в око, дорівнює 42° .

Внаслідок дисперсії показника заломлення води червоні промені будуть відхилятися менше ніж фіолетові. Тому райдуга є дугою, розкладеною в спектр, внутрішня сторона якої має фіолетовий колір, а зовнішня – червоний.