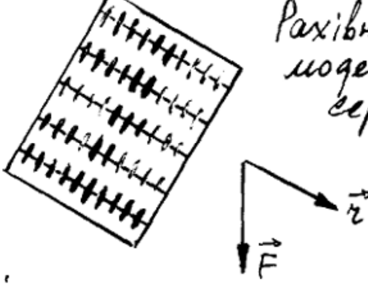
Оптика анізотропних середовищ.

I. Експеримент

В природі існують речовини, розповсюдження хвиль в яких відбувається за законами, відмінними від тих, якими описується поведінка ізотропних середовищ: формулами Френеля і законом Снелліуса.

Це – анізотропні середовища. Їх властивості обумовлені: – особливостями їх молекул (атомів);
– особливостями їх кристалічної гратки.



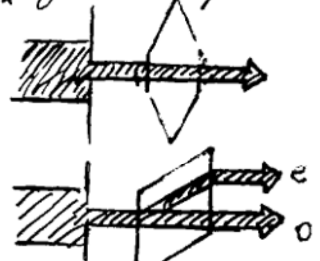
Рахівниця – модель анізотр. середовища

Модель, яка пояснює анізотропні властивості електрона в кристалі

Основні експериментальні факти

1670 р. – Бартоліні, 1690 р – Гюйгенс „Трактат про світло".

1) Незвичайне заломлення в кристалах „із Ісландії" – $CaCO_3$



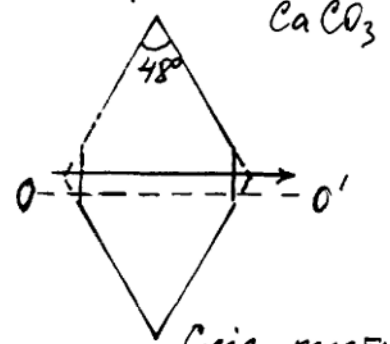
2) Навіть при нормальному падінні світла на межу відбувається заломлення – незвичайний („e") промінь.

В кристалах з кубічною симетрією кристал. гратки двопромене. не відбув.

3) „e" промінь може не лежати в площині падіння.

4) В кристалі існує оптична вісь (OO'), вздовж якої двопроменезаломлення відсутнє.

Площина, в якій лежить OO' і падаючий промінь, називається головною площиною (або головним перерізом).



В природі існують кристали з однією та з двома OO': одновісні та двовісні кристали. Слюда – двовісний кристал. Ісландський шпат ($CaCO_3$) – одновісний кристал.

Слід казати про OO' як про напрямок, а не як про лінію!

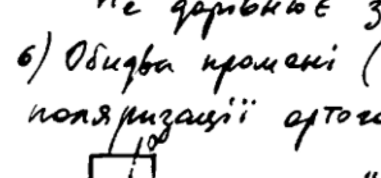
5) Для „о" променя показник заломл. $n_o \neq n_o(i)$ де i – кут падіння.

Для „е" променя $n_e = n_e(i)$.

Для $\lambda = 5893$ Å (жовтий дублет Na) в $CaCO_3$:

$n_o = 1.658$; $1.486 < n_e < 1.658$ (верхня межа n_e дорівнює значенню n_o).

6) Обидва промені („о" і „е") повністю поляризовані. Їх поляризації ортогональні.



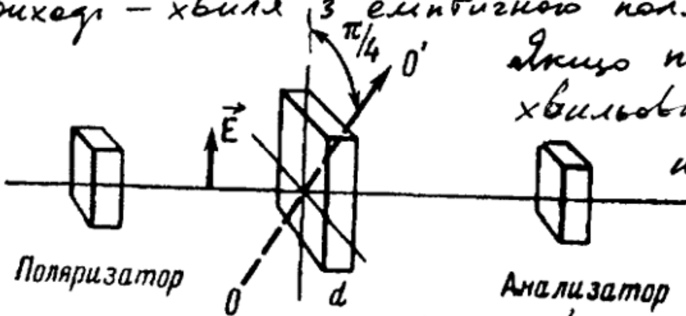
Коливання вектора $\vec{E}$ в „о" промені перпендикулярні до площ. головного перерізу.

„е"-Промінь поляризован в головній площині

7) При розповсюдженні променя в напрямку, перпендик. до OO', двопроменезаломлення відсутнє (як і для напрямку $\parallel OO'$), хоча $|n_e - n_o|$ набуває max знач.

Це означає, що в одному напрямку розповсюджуються дві лін. поляризовані хвилі ($\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$) з різними фазовими швидкостями: $u_o = \frac{c}{n_o}$ та $u_e = \frac{c}{n_e}$ $\Rightarrow$ $u_o \neq u_e$. В залежності від товщини (d) платівки промені вийдуть із неї з деякою різницею фаз (δ).

Якщо $\delta = 0, \pi, \ldots$, то результуюча хвиля буде лінійно поляризованою. Для інших значень δ на виході – хвиля з еліптичною поляризацією.



Якщо платівка – „чвертьхвильова" ($\lambda/4$) – така, що $\Delta = d(n_o - n_e) = \left(m + \frac{1}{4}\right)\cdot\lambda$, то $\delta = \Delta \cdot k =$

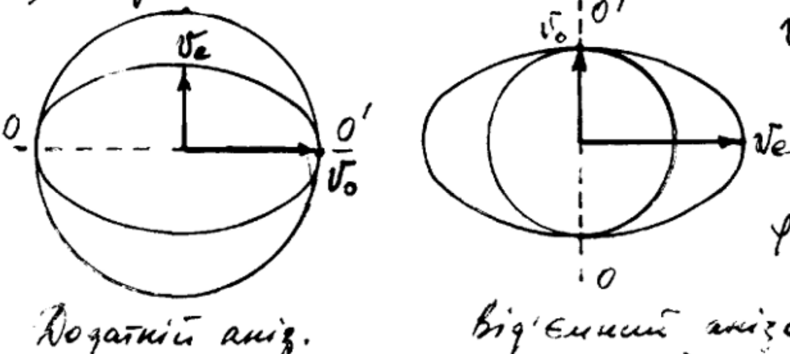
$$\Delta = d(n_o - n_e) = (4m+1)\lambda/4$$

$$\widehat{\vec{E}, 00'} = 45^\circ, \text{ щоб } |\vec{E}_o| = |\vec{E}_e|$$

$$= (4m+1)\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = (4m+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$$

Лінійно поляриз. світло на вході $\rightarrow$ циркулярно поляризоване світло на виході.

8) Є кристали, в яких $n_o > n_e$ і в яких $n_o < n_e$



$v = \frac{c}{n}$! Не плутати n_e та v_e!..

$v_o \neq v_o(\varphi)$

$v_e = v_e(\varphi)$

$\varphi = \widehat{\vec{k}\,\vec{00'}}$

Додатній аніз. кристал: $v_o > v_e$
Кварц, TiO_2, HgS

Від'ємний анізотропний кристал: $v_o < v_e$ ($n_o > n_e$)
$CaCO_3$, турмалін, апатит

Оптика анізотропних середовищ.

(Кристалооптика). II. Теорія.

Структура світлової хвилі в анізотропному середовищі.

В лінійному середовищі (незалежно від того ізотропно воно чи анізотропно) визначається рівняннями Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \qquad \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= 0 & \qquad \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Для плоскої хвилі: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \end{aligned}\right| \quad (2)$$

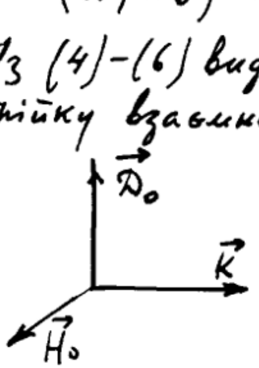
де $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{D}_0$ — комплексні амплит.

$(2) \to (1)$: $[\vec{K}, \vec{E}_0] = \frac{\omega}{c}\vec{H}_0$; (3)

$$[\vec{K}, \vec{H}_0] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}_0 \quad (4)$$

$$(\vec{k}, \vec{D}_0) = 0 \quad (5) \qquad (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0 \quad (6)$$

Із (4)-(6) видно, що $\vec{D}_0, \vec{H}_0, \vec{k}$ утворюють праву трійку взаємно перпендикулярних векторів:

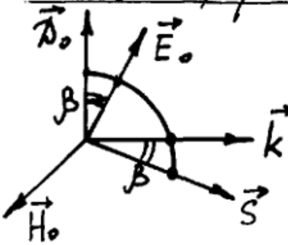


Залишається вектор $\vec{E}_0$, який фігурує тільки в (3).

$\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0 \Rightarrow$ вектор $\vec{E}_0$ лежить в площині векторів $\vec{D}_0$ і $\vec{k}$, але, взагалі кажучи, $\vec{E}_0 \nparallel \vec{D}_0$!

Примітка: відомо, що $\vec{E}$ входить в вектор Умова-Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$.

Всі 4 вектори: $\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{k}, \vec{S}$ лежать в одній площині, до якої вектор $\vec{H}_0$ перпендикулярний.



Кут $\beta = \widehat{\vec{D}_0 \vec{E}_0} = \widehat{\vec{k}\vec{S}}$ – кут анізотропії;
k – нормаль до хвильового фронту;
$\vec{S}$ – напрям світлового променя.
Непаралельність векторів $\vec{E}_0$ та $\vec{D}_0$ світлової хвилі обумовлює специфічні оптичні властивості анізотропних кристалів

В анізотропному середовищі при розповсюдженні в ньому світл. хвилі на електрони діють зовн. сили, напрямлені вздовж $\vec{E}$ хвилі. Однак електрони зміщуються в іншому напрямку, який визначається структурою кристалу – вздовж $\vec{D} \parallel \vec{P}$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi_{ij}(\omega)\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_{ij}(\omega)\cdot\vec{E}$$

$\varepsilon_{ij}(\omega)$ – тензор діел. проникності лінійного анізотр. середовища

Якщо декартову СК обрати не довільно, а спеціально (така СК існує завжди), то тензор ε_{ij} можна діагоналізув.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Такі осі x, y, z назив. головними осями координат. Одна з головних осей направлена вздовж $\vec{P}$, а напрямок 2-х інших – довільний.

В головних осях співвідношення такі:

$$\vec{D}_x = \varepsilon_{xx}\vec{E}_x; \quad \vec{D}_y = \varepsilon_{yy}\vec{E}_y; \quad \vec{D}_z = \varepsilon_{zz}\vec{E}_z$$

В залежності від співвідношень між ε_{ii} кристали діляться: – ізотропні ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$);
– одновісні ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$); – двовісні ($\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$)

В обл. прозорості кристали характеризуються тим, що $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Одновісний кристал має 2 головних показника заломл. $n_o = \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_e = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

Двовісний кристал має 3 головних показника заломл.: $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$; $n_y = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

В одновісному кристалі, якщо $n_o < n_e$ – кристал додатній; якщо $n_o > n_e$ – кристал від'ємний.

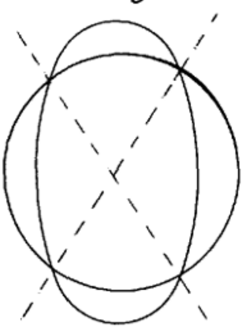
Наприклад: 1) Одновісні кристали

Додатні:	n_o	n_e	Від'ємні:	n_o	n_e
Льод	1.309	1.310	$LiNiO_3$	2.300	2.208
Кварц	1.544	1.553	$NaNO_3$	1.587	1.336
Рутил	2.616	2.903	Прустит	3.019	2.739

2) Ізотропні кристали: CdTe $n = 2.69$

NaCl $n = 1.544$; Алмаз $n = 2.417$; GaAs $n = 3.40$

3) Двовісні кристали	n_x	n_y	n_z
Гіпс	1.520	1.523	1.530
Польовий шпат	1.522	1.526	1.530
Слюда	1.552	1.582	1.588
Топаз	1.619	1.620	1.627



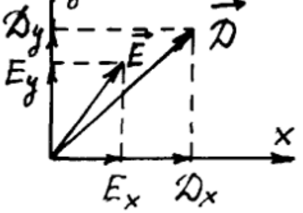
Про двовісні кристали можна прочитати: Білий... с. 249-251

Гаджаєв ... с. 259

Власні стани поляризації світлової хвилі в анізотропному середовищі

Можна показати, що світлова хвиля з довільним станом поляризації ($\vec{D}$ не направлений вздовж ні однієї з головних осей) в анізотропному кристалі нестійка: вона розпадається на дві лінійно поляризовані, ортогональні хвилі, які розповсюджуються із різними фазовими швидкостями.

Ці стани поляризації назив. власними станами пол.



$$\vec{D} = \vec{x}_0 D_x + \vec{y}_0 D_y$$

По мірі розповсюдження хвилі в кристалі різниця фаз між ортогональними компонентами поля буде змінюватись. Тобто: хвиля буде поляризована по еліпсу і параметри еліпсу будуть змінюватись.

Як аналітично описати цю залежність? Для одноосного кристалу:

Якщо $\vec{k} \parallel OO'$ (опт. вісь) $\parallel OZ$ (головна вісь кристалу), то хвиля зберігає свою поляризацію і розповсюджується з однією швидкістю; $\vec{D} \parallel \vec{E}$; вектори $\vec{E}, \vec{D}, \vec{k}$ лежать в одній площині (в силу рівнянь Максвелла).

N Якщо $\vec{k} \nparallel OO' \parallel OZ$, то:

1) $D_x = \varepsilon_{xx} E_x$; $D_y = \varepsilon_{yy} \cdot E_y$; $D_z = \varepsilon_{zz} \cdot E_z$, або
$D_x = n_o^2 \cdot E_x$; $D_y = n_o^2 E_y$; $D_z = n_e^2 \cdot E_z$ (1)

2) змішаний добуток $(\vec{k}[\vec{E}\vec{D}]) = 0$ (2) — витікає з рівняння Максв.

(1) та (2) незалежні один від одного.

Обидва ці рівняння виконуються не для будь-яких хвиль, а лише для вибраних поляризацій, які наз. власними

$$[\vec{E},\vec{D}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ E_x & E_y & E_z \\ n_o^2 E_x & n_o^2 E_y & n_e^2 E_z \end{vmatrix}$$

$OO' \parallel OZ \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] \perp OZ \Rightarrow (\vec{z}_0[\vec{E},\vec{D}]) = 0 \Rightarrow$
$\vec{z}_0, \vec{E}, \vec{D}$ - компланарні.

Умови (1) та (2) виконуються у двох випадках:

1) якщо $\vec{D} \parallel \vec{E} \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] = 0$ (3)
2) якщо $\vec{D}$ лежить в пл. векторів $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$, що математично можна записати у вигляді $(\vec{z}_0[\vec{k},\vec{D}]) = 0$.

Вводять поняття головної площини - пл., в якій лежать вектори $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$ (опт. вісь та хвильовий вектор).

Висновки (підсумки):

1) для будь-якого $\vec{k}$ в одновісному анізотропному кристалі існує 2 дозволених („власних") напрямки світлової хвилі. Один з них $\perp$ головній пл., другий - їй паралельний;
2) хвиля з довільним станом поляризації розпадається в кристалі на 2 лінійно поляриз. хвилі із взаємно ортогональними поляризаціями („власними" поляр.);
3) швидкості розповсюдження цих („власних") хвиль різні;
4) швидкість звичайної хвилі не залежить від напрямку розповсюдження і дорівнює $v_0 = c/n_0$

5) швидкість незвичайної хвилі залежить від напрямку розповсюдження в кристалі і лежить у межах між c/n_o та c/n_e.

Швидкість розповсюдження незвичайної хвилі.
Еліпсоїд показника заломлення

Незвич. хвиля розповсюдж. вздовж $\vec{k}$. Вектор $\vec{k}$ не співпадає ні з одним із напрямків головних осей.

Задача: визначити $v = v(\vec{k})$.

Без доведення: 1) Для звичайної хвилі $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = n_o^2 \vec{E}$

$$n_o = c \cdot \frac{k}{\omega} = c\,\frac{1}{v_o} \Rightarrow v_o = \frac{c}{n_o}$$

Для звичайної хвилі фазова шв. не залежить від напрямку.

2) Для незвичайної хвилі: $\vec{D} \nparallel \vec{E}$; $(\vec{E}, \vec{k}) \neq 0$

Якщо напрямок розповсюдження хвилі х-ться кутом φ, де φ – кут між $\vec{k}$ та OO' кристалу, то

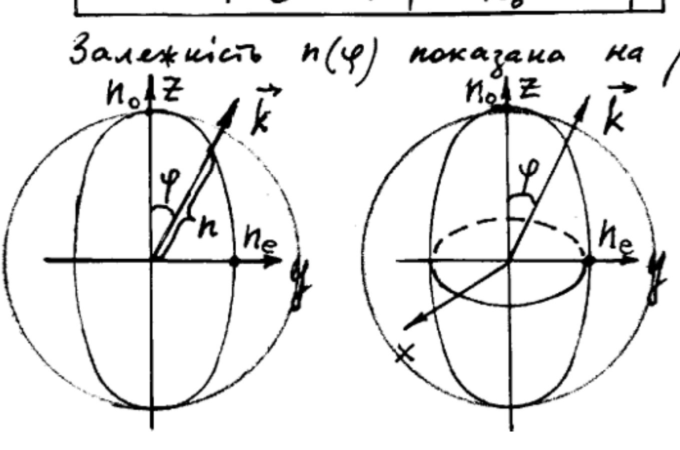
$$\frac{\sin^2\varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\varphi)}$$

Значення n_o та n_e визначаються вздовж головних осей.

$$\text{A)}\quad \boxed{n(\varphi) = \frac{n_o \cdot n_e}{\sqrt{n_e^2 \cdot \cos^2\varphi + n_o^2 \cdot \sin^2\varphi}}}$$

Знаючи $n(\varphi)$, розраховують $v(\varphi) = \dfrac{c}{n(\varphi)}$

Залежність $n(\varphi)$ показана на рис.

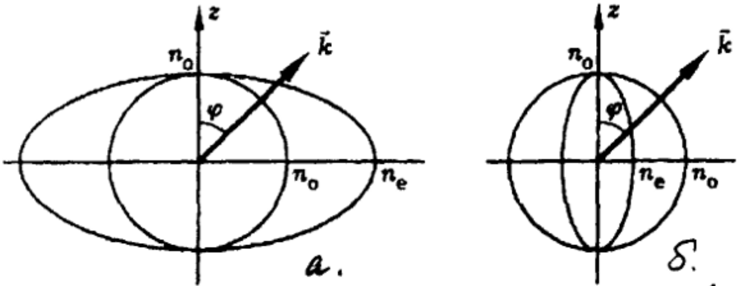


Еліпс і еліпсоїд показника заломл. На осі – n_o та n_e

Від'ємний анізотр. кристал

Подвійне променезаломлення світла на границі з анізотропним середовищем

Перерізи сфери і еліпсоїду показників заломлення для додатного (а) і від\`ємного (б) одновісного анізотропного кристалу

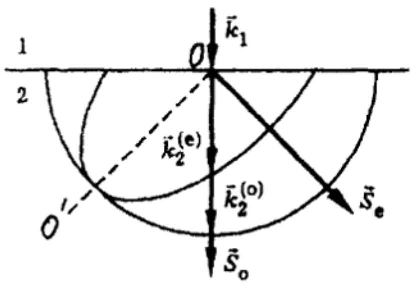


Граничні умови для ел.м. поля вимагають неперервності tg- (тобто паралельних границі поділу) компонент ел.м. поля: $E_{t1} = E_{t2}$; $H_{t1} = H_{t2}$ (1)
Як і у випадку з ізотропними середовищами, з (1) витікає рівність tg-компонент хвильових векторів відбитої та заломленої хвиль: $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}$ (2)
Закон відбиття залишається в силі: $\theta_1 = \theta_0$.
Закон заломлення теж залишається, але треба враховувати, що є 2 показника заломлення n_o та n_e:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2^{(o)} \cdot \sin\theta_2^{(o)} \\ n_1 \sin\theta_1 = n_2^{(e)} \cdot \sin\theta_2^{(e)} \end{cases}$$

Опт. вісь OO' лежить в пл. падіння.

Аналіз: 1) Як видно з рис., кути заломлення для „o" та „e" променів різні. 2) Вектор Умова-П. $\vec S = \frac{c}{4\pi}[\vec E, \vec H]$ не співпадає за напрямком з $\vec k$. Саме цим пояснюється ефект заломлення в анізотр. крист. при нормальному падінні (див. наступний рис.).

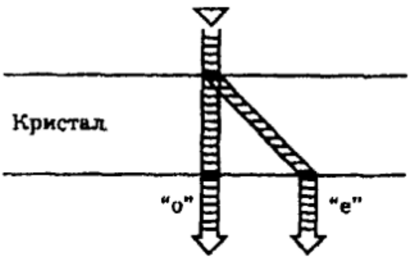


8.

для нормального падіння

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x} = 0 \text{ — із (1)}$$

Тобто: хвильові вектори в кристалі, як і хв. вектор падаючої хвилі, направлені перпендикулярно до межі.



3) Як знайти напрямки „o" та „e" променів?:

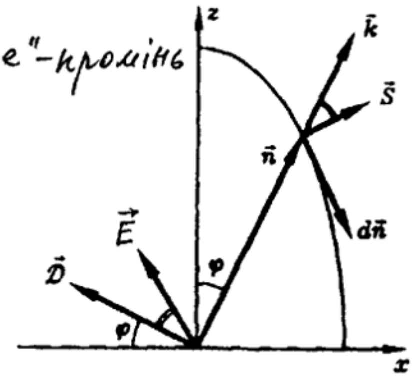
Напрямок „e" променя співпадає з малою напів-віссю еліпса показника заломлення $n(\varphi)$, а останній будується за законом (A). Цей напрямок — перпендикулярний до 00'!

Напрямок „o" променя визначається за законом Снелліуса

4) Попередній розгляд проводився у припущенні, що 00' лежить в пл. падіння. В цьому випадку заломлений промінь теж лежить у пл. падіння. А якщо 00' не лежить в пл. падіння? Тоді заломлений „e" промінь не буде лежати в пл. падіння, через те, що він завжди повинен знаходитись в головній площині.

Тобто: <u>заломлення світла в анізотропному кристалі відбувається не завжди в пл. падіння.</u>

5) Як визначити напрямок „е"-промення при довільному куті падіння проміння (φ) на межу розділу? (п. 3 стосувався нормального падіння).



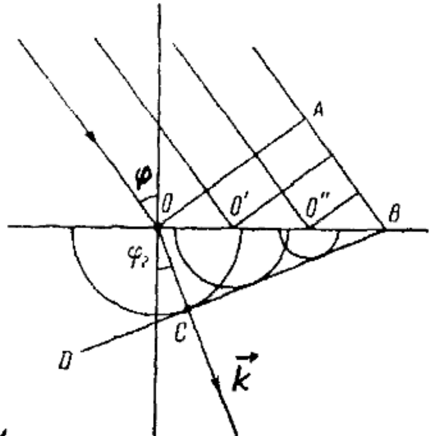
Відповідь: В одновісному анізотропному кристалі „е"-промінь направлений по нормалі до еліпсоїду показника заломлення: вектор $\vec{S} = 4\pi/c\,[\vec{E}, \vec{H}] \perp$ до дотичної в точці $n(\varphi)$ (див. рис.).

З рис., крім того, видно, що:

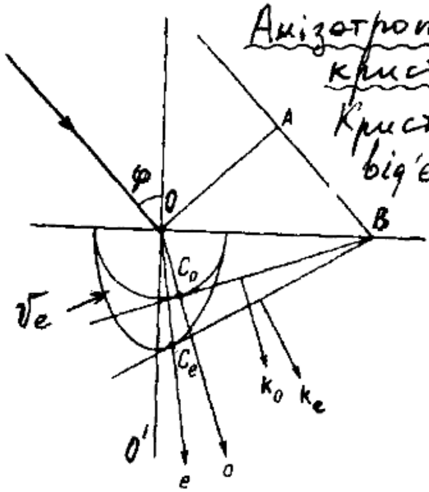
- кут $\widehat{\vec{K}\vec{S}}$ = кут $\widehat{\vec{D}\vec{E}}$ – кут анізотропії;
- $\vec{S} \perp \vec{E}$; $\vec{k} \perp \vec{D}$;
- $\vec{E} \parallel d\vec{n}$ ($\vec{S} \perp d\vec{n}$), де $d\vec{n}$ – дотична до еліпсоїду показника заломлення в точці $n(\varphi)$. Фізичний зміст $d\vec{n}$ пов'язаний із прироащенням вектора $\vec{n}$, яке виникає при збільшенні кута φ на величину $d\varphi$.

Побудова Гюйгенса

Гюйгенс постулював, що кожна точка, до якої доходить світлове збудження, може розглядатись, як центр відповідних вторинних хвиль. Для побудови хвильового фронту в наступні моменти часу слід побудувати огинаючу цих вторинних хвиль.



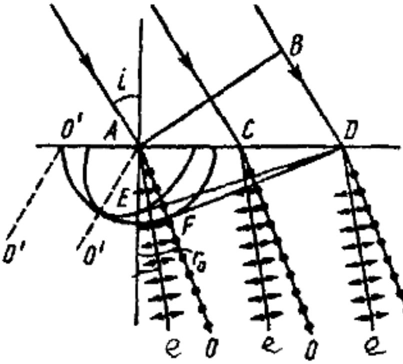
Ізотропний кристал

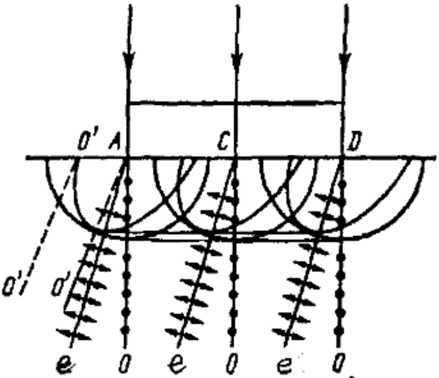


Анізотропний кристал. Кристал-від'ємний

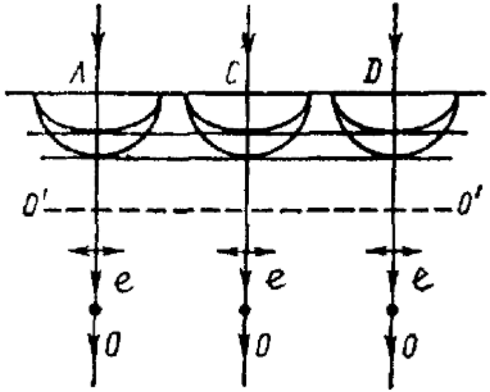
Головна площина співпадає з площиною малюнку

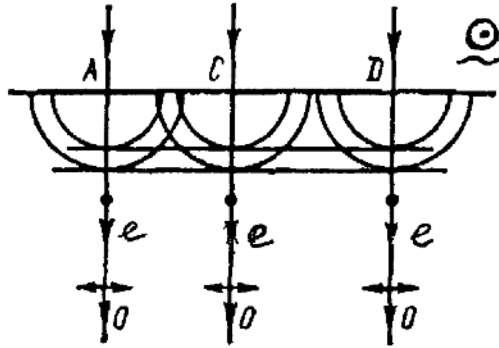
Як знайти поляризацію хвиль в анізотропному кристалі? Вектор $\vec{E}$ для "е"-хвилі завжди лежить в головній площині. Вектор Е для "о"-хвилі – перпендикулярний до головної площини.





„е"-промінь не перпендикулярний до хвильового фронту!





$v_o > v_e$ – для додатнього кристалу

Зауваження: побудова Гюйгенса дає напрямок $\vec{k}$ (положення хвильового фронту, нормалі до нього), а не напрямок променів (напрямок $\vec{S}$). На досліді ми спостерігаємо безпосередньо за поведінкою променів, а не за нормалью до хвилі. Але треба враховувати, що: 1) побудова Гюйгенса – проста і наглядна – в ряді випадків надзвичайно полегшує правильний розв'язок задачі; 2) треба враховувати, що кут між $\vec{k}$ та $\vec{S}$ – невеликий.