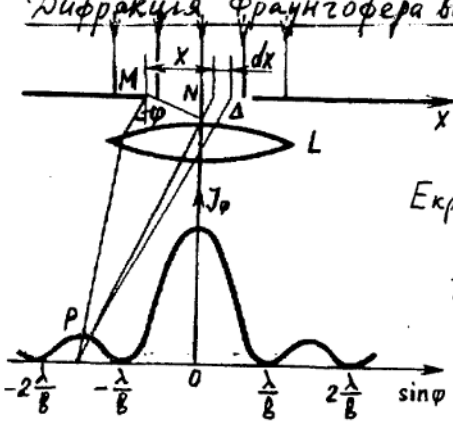


Дифракція Фраунгофера

- Д. в дальній зоні.
 - Д. в паралельних променях.
 - Д., що встановлюється на таких відстанях, для яких кутові розміри неоднорідностей \ll відношення λ до лінійних розмірів цих неоднорідностей.
- Між Д. Френеля і Д. Фраунгофера не існує принципової різниці і різкої межі.

Дифракція Фраунгофера від прямокутної щілини



Ширина щілини - b .
 $b \ll$ довжина щілини.
 Плоска монохр. хвиля.
 Екран із зображен. - у фокальній площині лінзи L .
 Поділимо відкриту частину хвильового фронту на елементарні зони завширшки dx , паралельні довжині щілини.

Вторинні хвилі від цих зон збираються лінзою у т. Р.
 Напруженість хвилі від ел. зони dx

$$dE = c \cdot dx \cdot \cos \omega t \quad \text{де } c - \text{стала.}$$

Сумарна напруженість хвилі від всієї щілини
 $E_0 = \int c \cdot dx = c \cdot b \Rightarrow c = E_0 / b$

$$E = E_0 \cdot \cos \omega t$$

Отже: $dE = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos \omega t$

$$\Delta = x \cdot \sin \varphi \Rightarrow \delta = k \cdot x \cdot \sin \varphi = 2\pi \frac{1}{\lambda} x \cdot \sin \varphi$$

$$dE = \frac{E_0}{b} dx \cos(\omega t - kx \cdot \sin \varphi)$$

$$E = \int_0^b \frac{E_0}{b} \cos(\omega t - kx \cdot \sin \varphi) dx = E_0 \frac{\sin[\frac{kb}{2} \sin \varphi]}{\frac{kb}{2} \sin \varphi} \cdot \cos(\omega t - \frac{kb}{2} \sin \varphi)$$

Амплітуда коливань

$$E_\varphi = E_0 \frac{\sin[\frac{kb}{2} \sin \varphi]}{\frac{kb}{2} \sin \varphi} = \frac{E_0 \cdot \sin[\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi]}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi}$$

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi)}{(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi)^2} \quad (A)$$

I_0 - інт. світла від всієї щільності в напрямку $\varphi = 0$

Аналіз (A): 1) $I_\varphi = I_0$: дифр. картинка симетрична відносно головної оптичної осі лінзи.

2) Дослідимо (A) на екстр.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ - відома границя.}$$

Тоді для $\varphi = 0$ (в центрі дифр. картини) буде тах. (головний, а краще - "нульовий" тах).

3) Умова для "нульового" тах не залежить від λ , "нульовий" тах не розкладається в спектр.

4) мін інтенсивності спостерігаються для кутів дифр., коли $\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi = \pm m \cdot \pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)

(*) $b \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda$ - умова мін

5) Між мін розміщені тах інтенсивності, кути дифр. яких знаходять, розв'язуючи трансцендентне рівняння $\text{tg } u = u$, де $u = \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi$, тобто для кутів $\sin \varphi_1 = \pm 1.43 \frac{\lambda}{b}$; $\sin \varphi_2 = \pm 2.46 \frac{\lambda}{b}$; ...

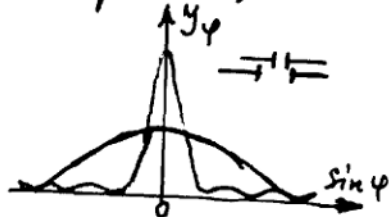
3.
6) U_3 збільшенням φ інтенс. тах швидко спадає:
 $U_0 : U_1 : U_2 : U_3 : \dots = 1 : 0.045 : 0.016 : 0.008 : \dots$

Основна частина світла зосереджена в головному ("нульовому") тах.

5% св. ен. припадає на два перших тах і 2% на два других тах.

7) Для некохроматичного (напр., "білого") світла: гол. тах не зміщується (він - "білий"); вторинні тах ($m=1,2,3,\dots$) - кольорові: для кожної λ - свій кут φ . Фіолетова частина розміщена ближче до "нульового" тах, а червона - далі.

8) З (А) видно, що дифр. картина залежить від b - ширини щілини: при $b \uparrow$ величина $\varphi \downarrow$ (для $m=1$)

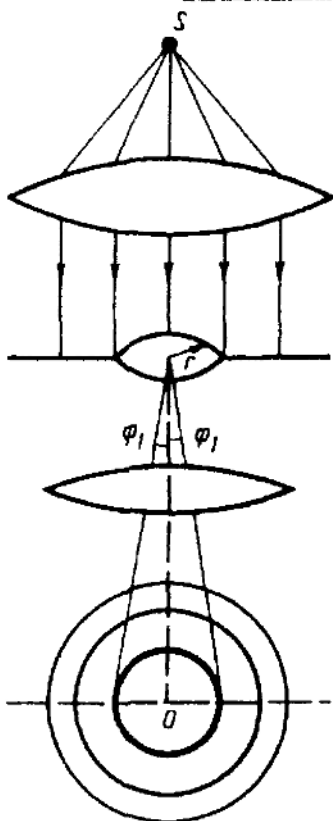


З чим, $\sin \varphi \downarrow$ (*):
9) При $b = \lambda \Rightarrow \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ головний тах в цьому разі охоплює всю область екрану.

10) Для $b > \lambda$ кутова відстань між першими тах зменшується, а головний тах стає більш різким.

11) Коли $b \gg \lambda$, то в центрі дифр. картини буде чітке зображення джерела, що відповідає прямолінійному розповсюдженню світла.

Дифракція світла на круглому отворі



Трикутково не важливо:
плоска або сферична хвиля \leftrightarrow лінза.

1) У центрі дифр. картини - світла пляма (завжди!).

2) Розподіл інтенсивності в дифракц. картині виражається через спеціальну ф-цію Бесселя I порядку $J_1(u)$,

$$\text{де } u = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \sin \varphi$$

r - радіус отвору;

φ - кут дифракції.

Корінь цієї ф-ції, що відновідає I міні (визначає кутові розміри центральної світлової плями), визначається з умови

$$\sin \varphi_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} \quad (**)$$

Це дуже важлива формула.

Її можна записати так: $\sin \varphi_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

Розподіл інтенсивності в дифракц. картині описується залежністю

$$J_\varphi = J_0 \left[\frac{2J_1(u)}{u} \right]^2$$

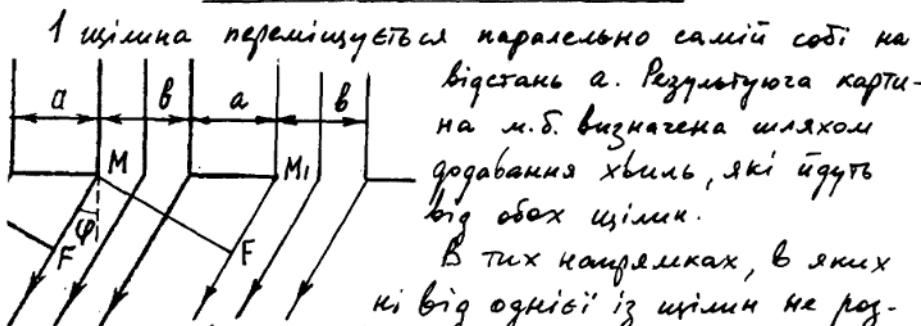
Наближена формула для u визначає напрямків на наступні ($m = \pm 2, \pm 3, \dots$) міні:

$$\sin \varphi_m \approx m \cdot 0.61 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Наприклад: $\sin \varphi_2 = 1.12 \frac{\lambda}{r}$; $\sin \varphi_3 = 1.62 \frac{\lambda}{r}$

$$\sin \varphi_4 = 2.12 \frac{\lambda}{r}$$

Дифракція світла на двох щілинах



Умова спроста відбувається з тых же напрямках, що і у випадку 1 щілини. Це пов'язане з взаємною інтерференцією хвиль від 2 щілин \Rightarrow в деяких напрямках вони будуть компенсуватись \Rightarrow виникають додаткові тін, напрямки на які визначаються умовою:

умова тін: $\Delta = MF = MM_1, \sin \varphi = m\lambda + \frac{\lambda}{2} \equiv (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (1)$

Для 1 щілини буде відкидатись дією $m = 0, 1, 2, \dots$

умова тых: іншої щілини, якщо $M_1F = MM_2, \sin \varphi = m\lambda \quad (2)$

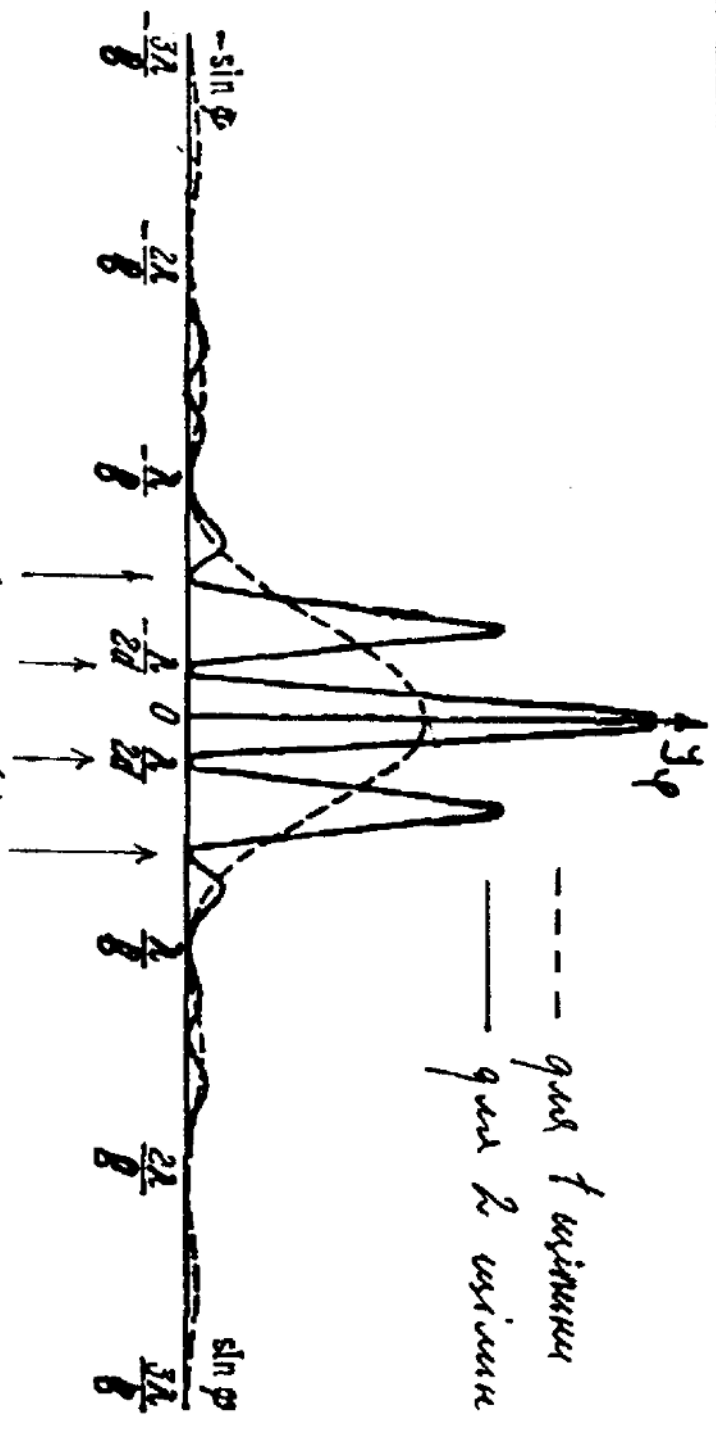
(2) - умова головних тых.

Якщо $a+b = d$, то (1) і (2) переписуються:

$d \cdot \sin \varphi = (2m+1) \lambda / 2$ - умова додаткових тін

$d \cdot \sin \varphi = m\lambda$ - умова головних тых

Попередні тін спостерігались в напрямках, яким задовольняє умова $b \cdot \sin \varphi = m\lambda$ - умова головних тін (для 1 щілини шириною b).



--- глав 1-го порядка
 — глав 2-го порядка

Рядовый мин.

Ряд 2-х порядков не образуется

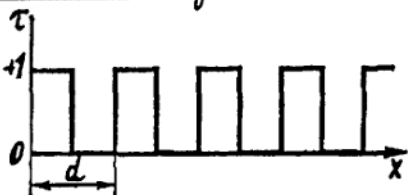
так как число рядовых мин.

Ряд 3-х порядков — 2 рядов. мин., так

как число — $(N-1)$ рядов. мин.

Дифракція світла на багатьох щілинах

По аналогії із дифр. на 2-х щілинах приходимо до висновку, що у випадку з 3-ма щілинами між сусідніми макс спостерігається 2 додаткових міні; у випадку з N щілинами число додаткових міні, які спостерігаються між сусідніми макс, дорівнює $N-1$.



Період $d = a + b$

ζ -коєф. пропускання (змінюється стрибком)

В напрямку $\varphi = 0$ результ. ампл. від N щілин $E_0 = N E_{01}$, де E_{01} - амплітуда коливань від 1-ї щіли.
Інтенсивність в напрямку $\varphi = 0$ $I_0 = c N^2 E_{01}^2$
де c - коєф. пропуск. $I_0 \sim N^2!$

Міні буде спостерігатися в тому випадку, коли коливання від \perp і останньої щілини будуть відрізятися по фазі на 2π : $N \cdot \delta = 2\pi$, де δ - різниця фаз коливань від сусідніх щілин $\Rightarrow \delta = 2\pi/N$.

З іншого боку $\delta = k \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l$, де Δl - різниця ходу променів від сусідніх щілин.

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{\lambda}{N}$$

Умова додаткових міні, розташованих між головними

$$\text{макс: } d \cdot \sin \varphi = m \lambda + p \cdot \frac{\lambda}{N} \quad (B) \text{ де } p = 1, 2, \dots, N-1$$

Між двома сусідніми головними макс знаходяться $(N-1)$ додаткових міні та $(N-2)$ додаткових макс.

$$\text{Дифер. (B): } d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{\lambda}{N} \cdot dp; \quad dp = 1 \Rightarrow$$

$$\Delta \varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d \cdot \cos \varphi} = \frac{\lambda}{L \cdot \cos \varphi} \quad (C) \text{ } L - \text{ширина головної макс}$$

L - ширина періодичної структури.

Анализ (с): 1) При малых φ градиент $\cos \varphi \approx 1$.

Тогда $\Delta \varphi = \frac{1}{\lambda} \cdot \Delta d$. При $d = \text{const}$ из зависимости рас-

на ширины (N), кристаллической решетки d

($\sim N^2$), вычисляется $\Delta \varphi$ ($\sim \frac{1}{N}$) Δd (здесь Δd — разность толщин макс. (где макс. невелика) $\cos \varphi$), $\cos \varphi \approx 1$).

2) Величина $\Delta \varphi$ зависит не от d , а от N , то есть $\Delta \varphi \sim \frac{1}{N}$.

3) В разном направлении φ ширина разности макс. увеличивается.

4) Тогда макс. $\Delta \varphi$ там, где d минимальна, то есть ширина разности $\Delta \varphi$ (здесь Δd) та же, что и в направлении φ .

Розподіл інтенсивності в дифракційній картині від N щілин

Для 1 щілини було знайдено

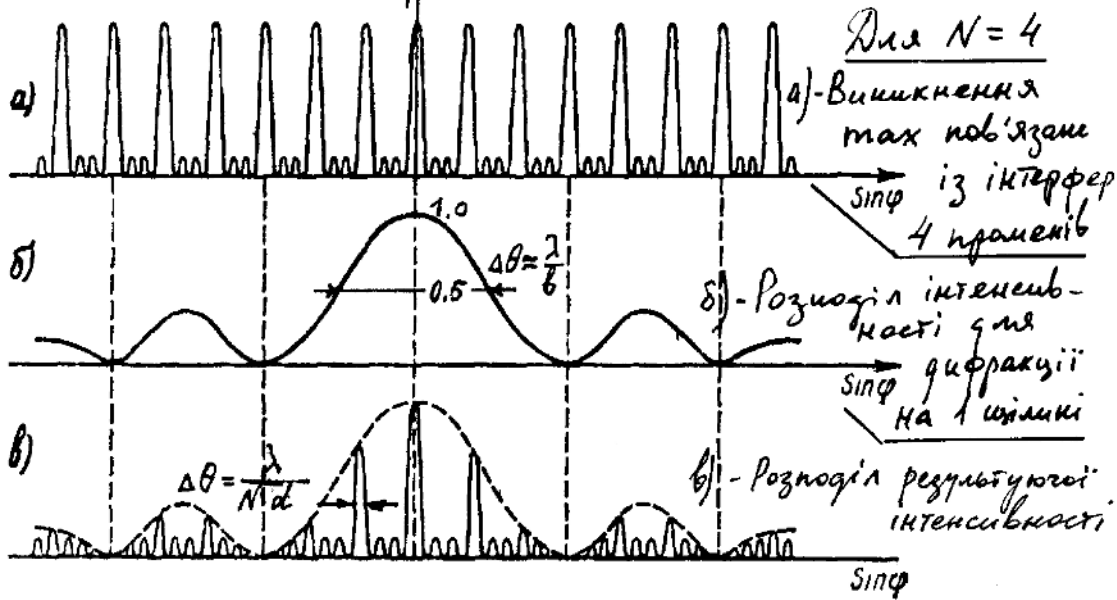
$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi\right)^2} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

де $u = \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi$; I_0 - інтенсивність біля осі
щілини в напрямку $\varphi = 0$

Для N щілин:

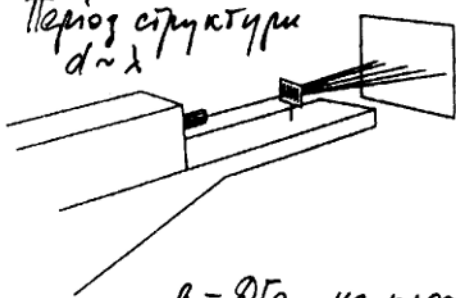
$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin Nd}{\sin d}\right)^2$$

де $d = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi$; φ - кут на тлі



Дифракційна ґратка (ДГр)

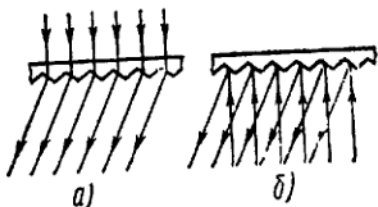
Період структури
 $d \sim \lambda$



Типи періодичних структур



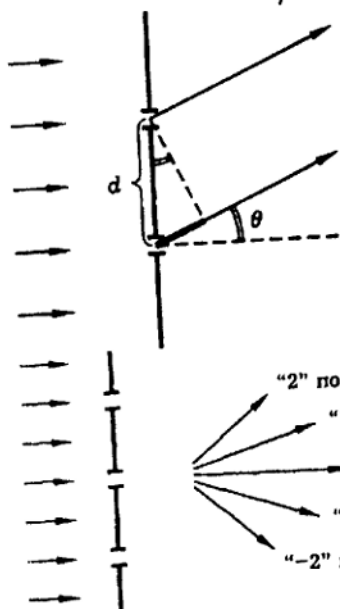
α - ДГр "на прохід"
 β - ДГр "на відбиття"



Рівняння ДГр

$$\Delta = d \cdot \sin \theta \quad - \text{з рис.}$$

$$\Delta = m \cdot \lambda \quad - \text{цього максимум (за визначенням)}$$



$$\boxed{d \cdot \sin \theta = m \lambda} \quad (1) \quad m = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{Аналіз (1):}$$

$$1) \quad d \sim \lambda \cong 10^{-4} \text{ см} = 1 \text{ мкм}$$

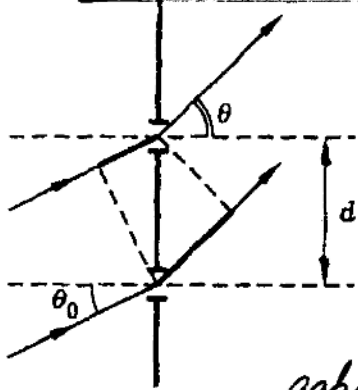
При цьому максимум і мінімум будуть помітними під значними кутами φ . З цього також випливає, що ДГр повинно мати густо штрихів $\sim 10^2 \div 10^3 / \text{мм}$

$$2) \quad \text{Якщо } d < \lambda, \text{ то при } m = 1 \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{d} > 1 - \text{Ні!}$$

Залишається лише $m = 0$. Це означає, що дифракції немає.

3) Положення максимум залежить від $\lambda \Rightarrow \theta(\lambda) \Rightarrow$
ДГр - спектральний прилад та аналізатор спектру.

Нахилене падіння променів на дифракційну ґратку



$$\Delta = d(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

$$\Delta = m \lambda, \text{ де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m \lambda$$

При скосзагому націнці, коли $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, навіть зруба ДГр (з періодом $d \gg \lambda$) може

давати помітну дифракцію

$$\theta \approx \theta_0 \Rightarrow \sin \theta - \sin \theta_0 = 2 \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \cdot \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \approx$$

$$\approx (\theta - \theta_0) \cdot \cos \theta_0$$

$$(\theta - \theta_0) \cdot \cos \theta_0 = \frac{m \lambda}{d} \Rightarrow \frac{m \lambda}{d \cdot \cos \theta_0} = \frac{m \lambda}{d_{\text{eff}}} = \theta - \theta_0$$

Через те, що $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_{\text{eff}} \ll d$

Дифракцію світла можна спостерігати навіть на грамофонній платівці з $d \sim 100 \mu\text{m}$



Скосзагому націнці білого світла

Характеристики ДГр як спектрального приладу

- 1) Кутова дисперсія: $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ де $\delta\varphi$ - кутова відстань між двома спектральними лініями, які відстоять одна від одної на $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.
- 2) Лінійна дисперсія: $D_l = \frac{dl}{d\lambda}$; $D_l = f \cdot D_\varphi$
де f - фокусна відстань лінзи, яка проєктує спектр на екран.

Для ДГр тах спостерігається, коли $d \cdot \sin\varphi = m \cdot \lambda$

$$d \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda \Rightarrow D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos\varphi}$$

D_φ (а значить і D_l) $\sim m \Rightarrow$ збільшуй m !

$D_\varphi \sim \frac{1}{d} \Rightarrow$ зменшуй d !

- 3) Роздільна сила ($A = \frac{1}{\delta\lambda}$)

Принцип роздільної

здатності Релея:

мінімальна відстань між двома

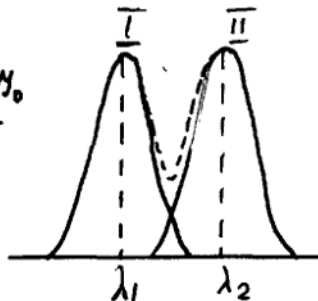
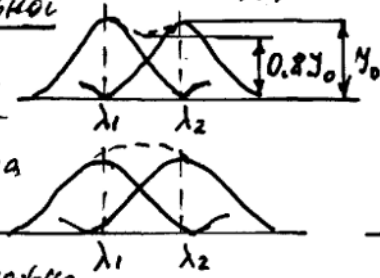
спектральними

лініями, які можна

розділити (розрізнити як дві), відповідає випадку, коли тах I лінії співпадає із тін II лінії

Тах m -го порядку для краєніх з λ_1 та λ_2 спостерігаються відповідно під кутами $\varphi_m^{(1)}$ та $\varphi_m^{(2)}$

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi_m^{(1)} = m \lambda_1 \\ d \cdot \sin\varphi_m^{(2)} = m \lambda_2 \end{cases}$$



Перехід від max до сусіднього min x-ється різни-
цею ходу $\Delta = \frac{\lambda}{N}$, де N - загальна кількість штри-
хів в ДГр. Тоді m -ий min для λ_1 буде задоволь-
няти умові: $d \cdot \sin \varphi_{\min}^{(1)} = m \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$

Відповідно до критерію Релея, розділення ліній має
місце, коли $\varphi_{\min}^{(1)} = \varphi_{\min}^{(2)} \Rightarrow m \cdot \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N} = m \lambda_2$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = m \cdot N = A$$

роздільна сила (A)
чим більше, тим краще

Аналіз (A):
1) $A \sim m$ (якідисперсія $\Delta \varphi \sim m$).
2) $A \sim N$ ($\Delta \varphi \sim n$) N - загальна кіль-
кість штрихів; n - число штрихів на од. довжини
ДГр $n = N/L$.

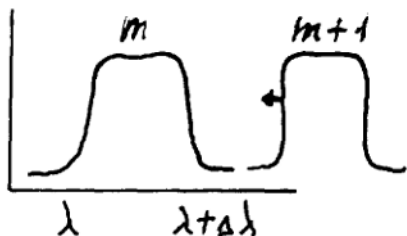
3) Знайдемо max значення A (A_{\max}):
 $d \cdot \sin \varphi = m \lambda \Rightarrow m = d \cdot \sin \varphi / \lambda \Rightarrow m_{\max} = \frac{d}{\lambda}$

$$A_{\max} = m_{\max} \cdot N = \frac{d}{\lambda} \cdot N = \frac{L}{\lambda} \quad N \cdot d = L - \text{робота}$$

довжина ДГр

4) Якщо є декілька ДГр з різними d_i ,
але однаковими $L = N_1 d_1 = N_2 d_2 = \dots$, то ці ДГр
мають однакову A. Але тоді треба дивитися на n -
кількість штрихів на 1 од. довжини $n = \frac{N}{L} = \frac{L/d}{L} = \frac{1}{d}$
Намагаються виготовити ДГр з великим розміром робо-
зої довжини $L = 8-15-20$ см. Сучасні ДГр мають
 $A = 10^5 - 2 \cdot 10^5$ (у інтерфером. Ф.-П. А до 10^6).

Дисперсна область (G) - максимальна ширина
спектрального інтервалу, при якому ще не
відбувається перекриття спектрів сусідніх
порядків, що відповідають погатурі і кічку інтер-
вала.



Спектр. прилад може розрізати окремі довжини хвиль і ідентифікувати їх, якщо правий край спектру m -го порядку розташований лівіше, ніж

лівий край спектру $(m+1)$ -го порядку.

Умовою межі ідентифікації спектральних ліній буде співпадання $(m+1)$ -го максимуму з довжиною хв. λ з m -им максимумом довж. хвилі $(\lambda + \Delta\lambda)$:

$$d \cdot \sin \varphi_m = m(\lambda + \Delta\lambda); \quad d \cdot \sin \varphi_{m+1} = (m+1)\lambda$$

$$\varphi_{m+1} = \varphi_m \quad \text{— за визначенням } \Theta$$

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow \Theta = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

$\Theta \sim \frac{1}{m}$! Для ДГр m -мало ($\sim 2, 3..$)
Тому $\Theta \sim \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) \lambda$! $\Theta \sim 2000 \text{ \AA}$

Для порівняння: інтерфер. спектроскопи (інтерфер.

Фабрі-Перо) мають $m = 10^5 \div 10^6 \Rightarrow \Theta = \frac{\lambda}{10^6} =$

$= \frac{5000 \text{ \AA}}{10^6} = 0.005 \text{ \AA}$. Для дослідження точної і надточної структури спектр. ліній.

Для ДГр дуже велика дисп. область. Це добре: стає можливим проведення спектр. аналізу в широкому діапазоні спектру (навіть білого світла).

Питання: Θ — краще більше, чи краще менше?

Відповідь: "Дивлячись для того!"