# Дифракція світла

Дифракція пов'язана з відхиленням від прямолін. розповсюдження світл. хвиль (порівняно з напрямом, передбаченим законом геом. оптики) та з просторови[м] перерозподілом інтенс. світла під впливом перешкод та неоднорідностей на їх шляху.

А. Зоммерфельд: „Дифр. – будь-яке відхилення у розповсюдженні світла від прямолінійного, не пов'язане з відбиттям або заломленням."

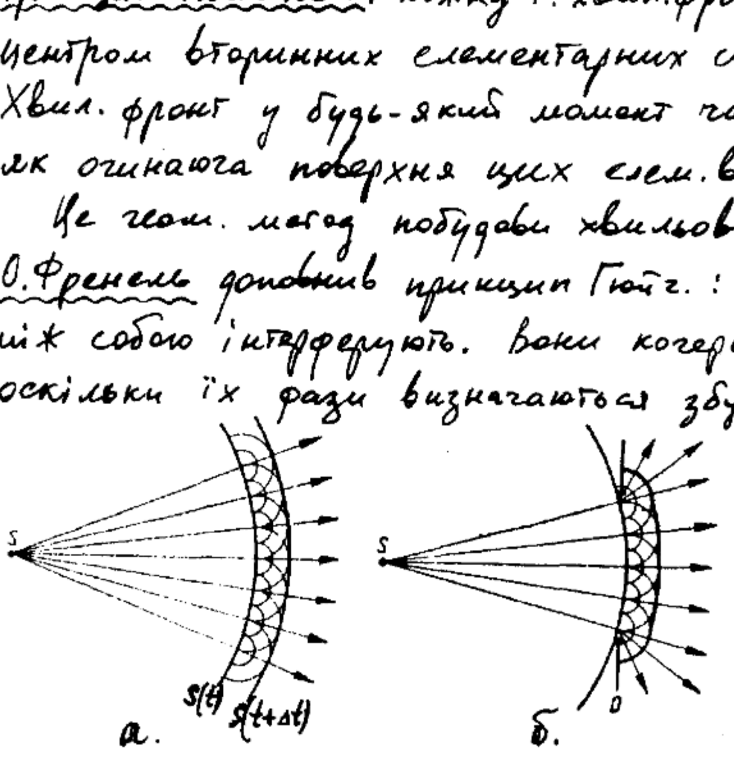
Дифракція – прояв хвильової природи світла.

Грімальді (1665 р.) описав дифр., Гюйгенс (1690 р.), Френель (1818 р.), Кірхгоф (1882 р.)

Принцип Гюйгенса: кожну т. хвил. фронту можна вважати центром вторинних елементарних світлових хвиль. Хвил. фронт у будь-який момент часу визначається як огинаюча поверхня цих елем. вторинних хвиль.

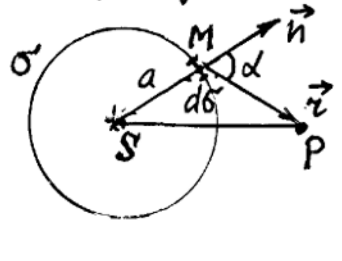
Це геом. метод побудови хвильового фронту.

О. Френель доповнив принцип Гюйг.: вторинні хвилі між собою інтерферують. Вони когерентні між собою оскільки їх фази визначаються збудженням, яке зумовлене дією одного первинного джерела.



# Дифракційний інтеграл Френеля. (Математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля)

Згідно до Френеля кожний елемент поверхні хвильового фронту σ випромінює вторинну хвилю.

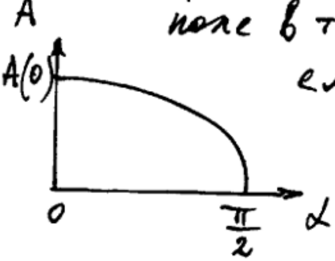



Хвильове поле в т. P (точка спостереж.) являє собою суперпозицію вторинних хвиль і визначається інтегралом (1)

Інтеграл (1) $$E(P) = \iint_\sigma \underbrace{E_0 \frac{e^{-ika}}{a}}_{E(M)} \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-ikr} \, d\sigma$$

де $E(P)$ та $E(M)$ – комплексні амплітуди поля $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Множник $\frac{e^{-ikr}}{r}$ описує розподіл елементарної вторинної сферичної хвилі.

$A(\alpha)$ – „коеф. нахилу", змінюється від 1 до 0 при зміні $\alpha$ від 0 до $\pi/2$. Враховує той факт, що внесок елемента $d\sigma$ в результуючому поле в т. P залежить від орієнтації цього елементу поверхні відносно напрямку на т. P.



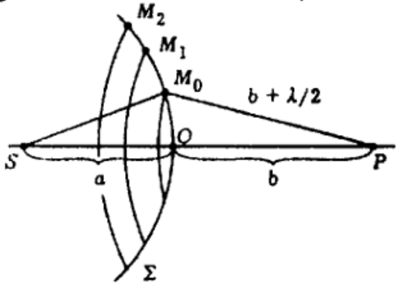

$$A(0) = 1 \; ; \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

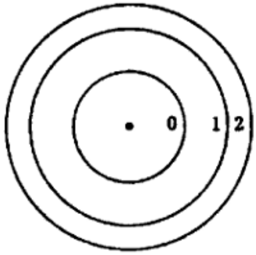
Інтеграл враховує фази вторинних хвиль, які приходять в т. P від різних елементів поверхні σ. Так враховується інтерференція вторинних хвиль.

$$E(P) = \iint_\sigma E(M) \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-i(kr - \omega t + \varphi_0)} \cdot d\sigma$$

## Зони Френеля

Оберемо на поверхні $\sigma$, яка в даному випадку обов'язково повинна бути сферичною, кільцеві зони так, щоб відстань від границь зони до т. спостереження $P$ відрізнялись на $\frac{\lambda}{2}$. Края зон: $M_0, M_1, M_2, \ldots$

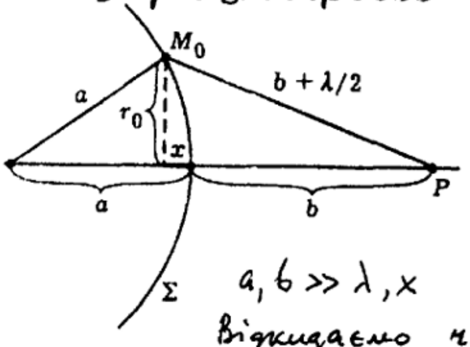



$$
\begin{cases}
M_0P = OP + \frac{\lambda}{2} \\
M_1P = M_0P + \frac{\lambda}{2} \\
\ldots \\
M_nP = M_{n-1}P + \frac{\lambda}{2}
\end{cases}
$$

т. $O$ – центр нульової зони Фр. Кожну зону Фр. розглядаємо, як джерело вторинних хвиль з визначеною фазою. Дві сусідні зони Фр. діють як джерела, які коливаються у протифазі.

### Розміри зон Френеля.




Положення країв зон Фр. залежить від відстані до т. $P$

$$r_0^2 = a^2 - (a-x)^2$$

$$r_0^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2$$

$a, b \gg \lambda, x$ $\qquad 2ax = b\lambda - 2bx + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

Відкидаємо члени $\sim x^2$ та $\lambda^2$

$$x = \frac{b\cdot\lambda}{2(a+b)} \quad \text{та} \quad r_0^2 \approx 2ax \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

Аналогічно знаходимо:

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{r_n = \sqrt{(n+1)\,\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

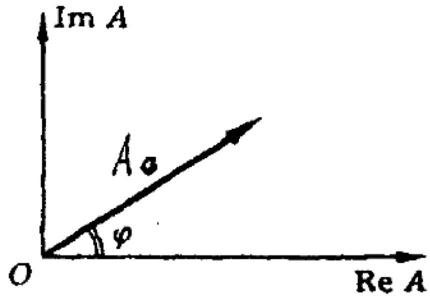
## *Побудова дифракційних картин графічним способом.*

## *(Метод спіралі Френеля)*

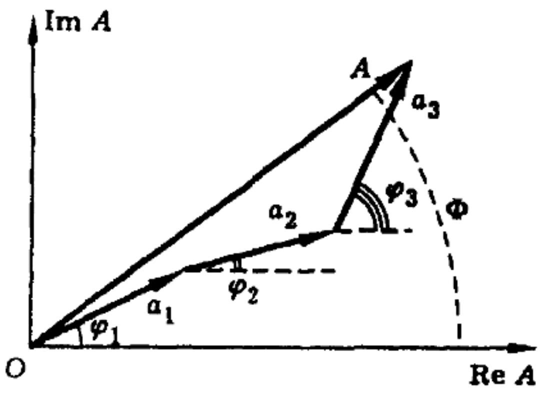
Векторна діаграма. Гармонічні коливання з амплітудою $A_0$ та фазою $\varphi$ можна представити у вигляді комплексного числа $A = A_0 \exp(i\varphi)$ або вектором на площині змінних Re A та Im A (довжина вектора – $A_0$, кут нахилу вектора до осі Re A - $\varphi$).

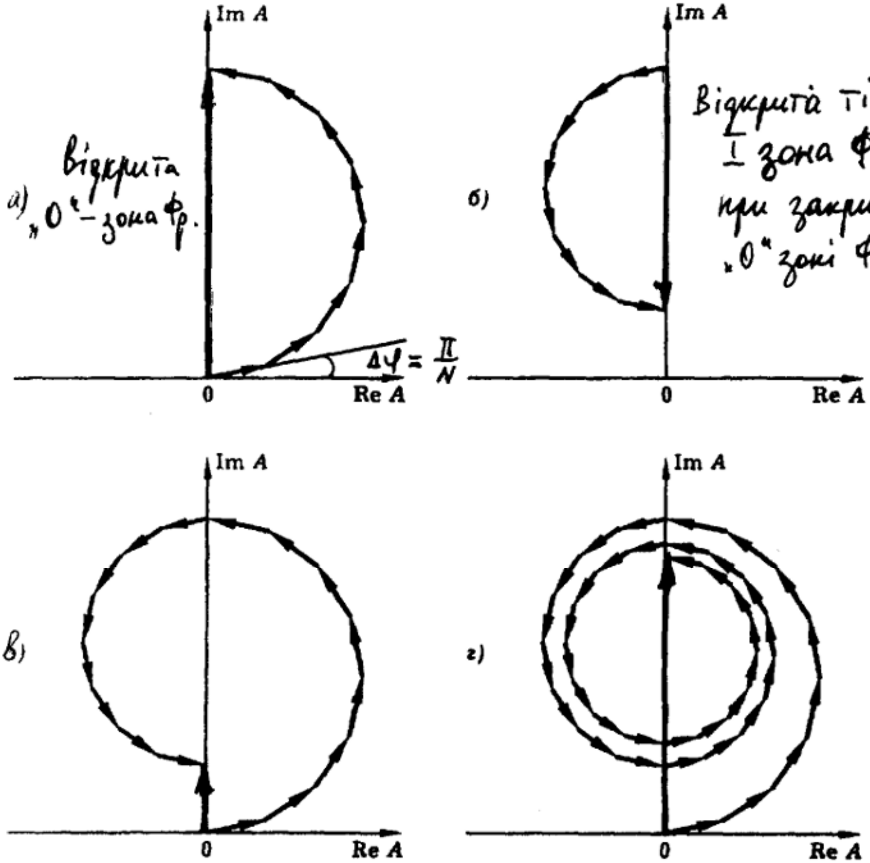
$A = \mathrm{Re}\,A + i \cdot \mathrm{Im}\,A$

$A = A_0 e^{i\varphi}$




Як додати декілька гармонічних коливань частоти $\omega$ з довільними амплітудами та фазами:





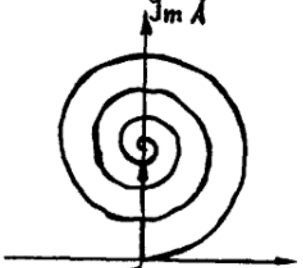

а) Відкрита „0"-зона Фр.

б) Відкрита тільки I зона Френеля при закритій „0" зоні Фр.

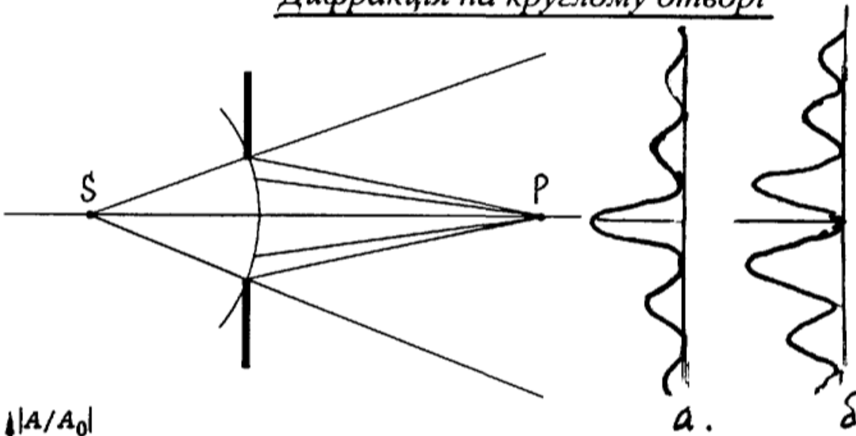
в) Відкриті „0" та „I" зони Фр.

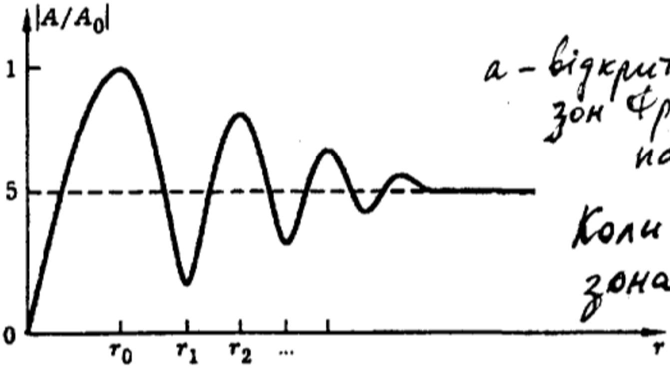
г) Відкрито 5 зон Фр.

Якщо кожну зону Фр. поділити на $\infty$ кількість підзон ($N \to \infty$), то ламана крива перетворюється в дугу і кожній зоні Фр. відповідає півитка спіралі



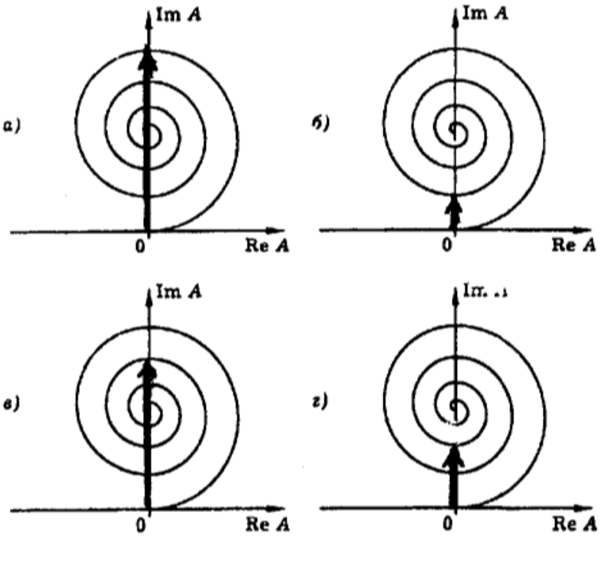
## *Дифракція на круглому отворі*



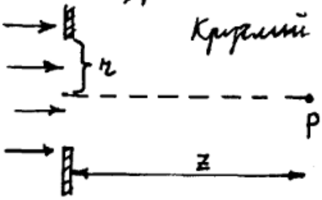




а – відкрита непарна кількість зон Френеля; б – відкрита парна кількість зон Фр.

Коли відкрита лише „0"-зона Фр., то амплітуда в т. P в 2 рази, а інтенсивність в 4 рази більша за випадок, коли відкриті всі зони Фр (екран відсутній).



## Дифракція плоскої хвилі




Круглий отвір діаметром $2r$

$a \to \infty$ ; $b = z$

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Площа зони Фр. $S_n = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right) = \pi \cdot \lambda \cdot z \neq f(n)$!

Число Френеля:

$N_F$ – число зон Фр., яке попадає в межі отвору (число відкритих зон Фр.).

Якщо покласти $r_n = r$, $n+1 = N_F$, то $\boxed{N_F = \dfrac{r^2}{\lambda \cdot z}}$

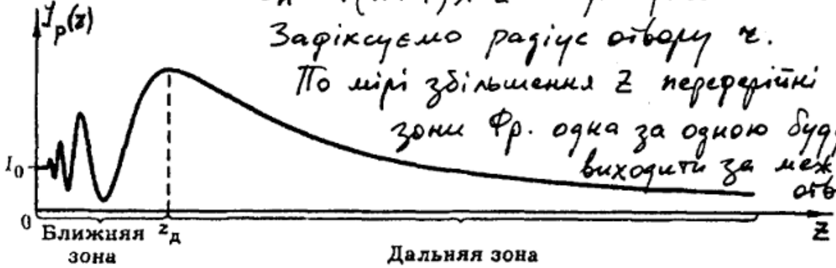
## Дифракційна довжина світлового променя. Ближня та дальня зони.

Продовжимо розгляд дифр. плоскої хвилі на кругл. отворі. Як змінюється інт. світла в т. P по мірі збільшення відстані до екрану $z$:

$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$ – для фіксованої $z$.

Зафіксуємо радіус отвору $r$.

По мірі збільшення $z$ переферійні зони Фр. одна за одною будуть виходити за межі отвору




При деякому $z = z_д$ в межах отвору залишиться лише одна „0" зона Фр. В цей момент інтенсивність світла $I_p$ досягне max, після чого монотонно почне зменшуватись по мірі збільшення $z$.

Для $z \ll z_д$ – ближня зона дифракції. В цій зоні:

- світл. промінь зберігає структуру, задану отвором;
- інтенс. світла в середньому приблизно дорівнює інтенс. падаючої світл. хвилі;
- в межах отвору вміщується певна кількість зон Фр.;
- поперечний переріз променя підтримується постійним (за рахунок інтерференції елементарних вторинних хвиль, які йдуть від різних зон Фр.);

<u>Для $z \gg z_g$ — дальня зона дифракції.</u> В цій зоні:

- інтенс. світла на осі променя набагато менша за інтенс. вихідного променя; це означає, що промінь розширюється ?!?!

- для точок дальньої зони в межах отвору вміщується тільки частина (центральної) 0-зони Фр.

- інтерференція елементарних вторинних хвиль виражена слабше. Вона не може підтримати вихідний поперечний профіль променя. Промінь стає розбіжним!

Знайдемо $z_g$: $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z} \Rightarrow \boxed{z_g = \frac{r^2}{\lambda}}$

$r$ - радіус променя (радіус отвору)

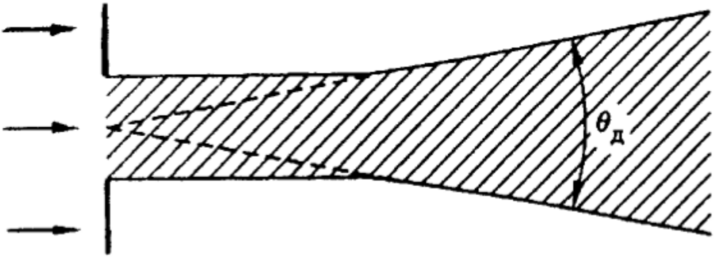
Вводим число Френеля $N_F = r^2/\lambda \cdot z$. Тоді

$\boxed{N_F = \frac{z_g}{z}}$

В ближній зоні $N_F > 1$

В дальній зоні $N_F < 1$

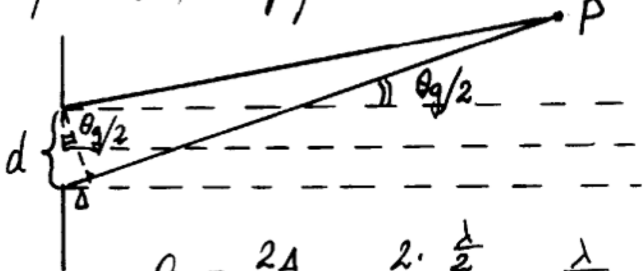
## Дифракційна розбіжність променя в дальній зоні




Интерференція вторинних елементарних хвиль визначає положення границі світлового променя.

Умова інтерф.: $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, де $\Delta$ – різниця ходу 2-х променів, які приходять від протилежних границь отвору.

$\Delta \approx d \cdot \sin \frac{\theta_g}{2}$




$\theta_g$ – кут дифракційної розбіжності,

Як правило: $\theta_g \ll 1$

Тому $\Delta \approx d \cdot \frac{\theta_g}{2}$

$$\theta_g = \frac{2\Delta}{d} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{2}}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{\theta_g = \frac{\lambda}{d}}$$

Діаметр променя в дальній зоні:

$$\boxed{d(z) = \frac{\lambda}{d} \cdot z}$$

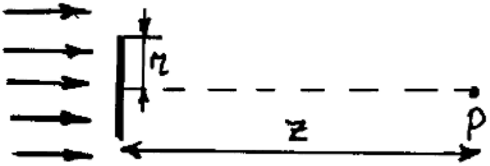
Зробимо оцінки для He-Ne лазера

$d = 2$ мм; $\lambda = 0.63$ мкм

$z_g = 1.5$ м; $\theta_g = 3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Ці розрахунки можна легко перевірити на досліді.

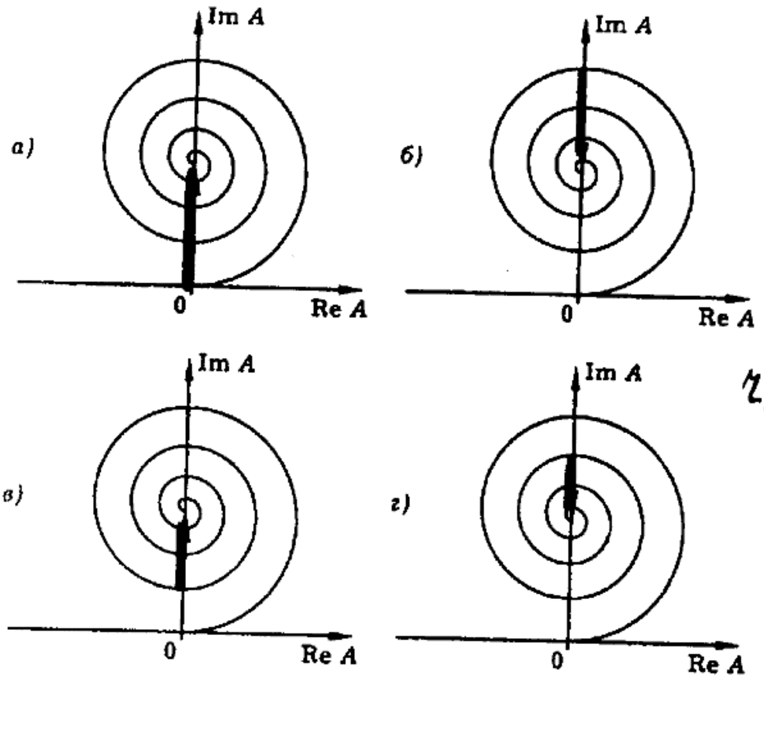
## Дифракція на диску. Пляма Пуасона




Хвиля – плоска, монохроматична


1) Амплітуда світлових коливань в т. P ($A_p$) залежить від радіусу диску.

2) Навіть при великому радіусі в центрі геом. тіні інтенсивність світла $\neq 0$. Точка Пуасона.



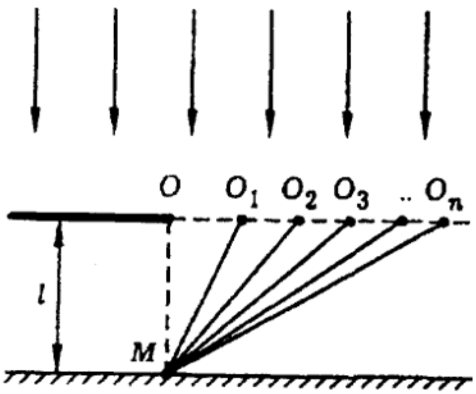

Обидві властивості витікають із звернень до спіралі Ф.

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

# Дифракція на краю екрана

Одна з основних задач дифракції: як відбувається перехід від світла до тіні на межі геометр. оптики та хвильової оптики.

Скористаємось методом зон Френеля (у випадку циліндричної хвилі – зон Шустера).




Введемо зони Фр. для т. M, яка лежить на екрані точно під його краєм (межею). Зони Фр. – плоскі смуги, паралельні краю екрану. Межі зон Фр. – $O_1, O_2, O_3 \dots O_n$

$$\begin{cases} OM = l \\ O_1M = l + \frac{\lambda}{2} \\ O_2M = O_1M + \frac{\lambda}{2} = \\ \dots \qquad = l + 2\frac{\lambda}{2}; \end{cases}$$

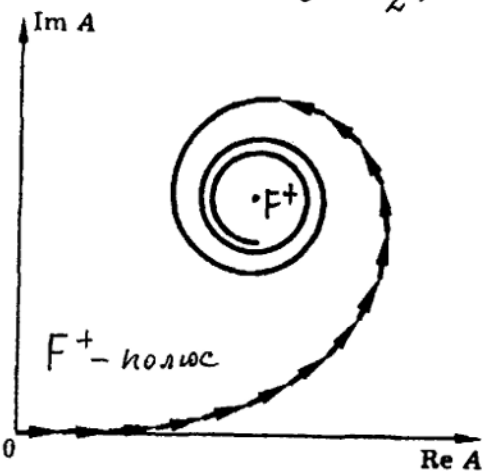
Позначимо через $d_n$ відстань від краю екрана до початку зони Фр. з номером $n$

$$d_n^2 = OO_n^2 = \left(l + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - l^2 =$$

$$= nl\lambda + \left(n\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$l \gg \lambda$ і можна знехтувати членом $\sim \lambda^2$. Тоді

$$d_n = \sqrt{n \cdot l \cdot \lambda}$$




Площа $n$-ої зони Фр.

$$S_n = (d_{n+1} - d_n) \cdot L$$

де $L$ – довжина екрану

$$S_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot L \cdot \sqrt{\lambda l} = \frac{L \cdot \sqrt{\lambda \cdot l}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \approx \frac{L}{2}\sqrt{\frac{\lambda \cdot l}{n}} \Rightarrow$$

$S_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ Нагадаємо, що раніше (при розгляді дифракції на круглому отворі, круглому екрані) $S_n \approx const \neq f(n)$.

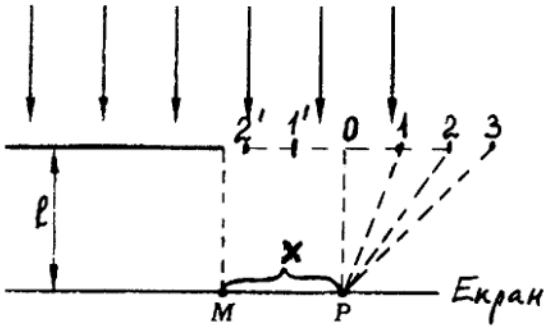
Ділять кожну із зон Фр. на велике (аж до $\infty$) число підзон.

Для визначення інтенс. продифрагованого світла потрібно просумувати коливання, які створюються в т. P елементарними вторинними хвилями, які приходять від всіх відкритих зон та підзон.

Сумування проводять методом векторних діаграм.

Через те, що ширина зони і її площа по мірі віддалення від краю екрану весь час зменшуються, то довжина вектора, який зображає внесок окремої зони (підзони), буде весь час зменшуватись; тим більше, чим далі розташована зона (підзона) від краю екрану.

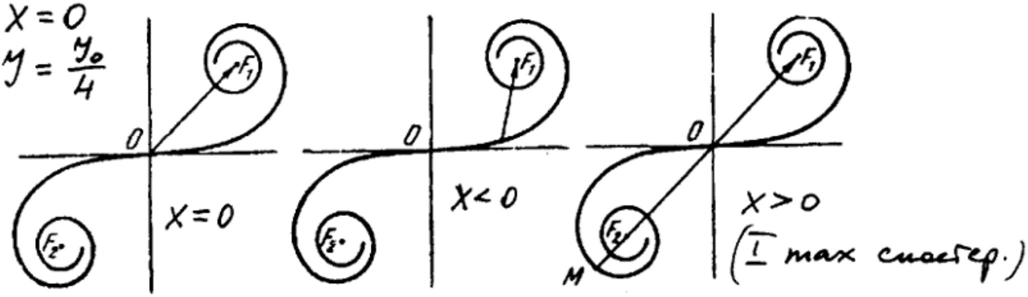
## Як користуватись спіраллю Корню:




Зони з номерами $m$ та $m'$ мають однакову ширину. Коливання від нештрихованих зон описуються правим завитком спіралі. За коливання від штрихованих зон відповідає лівий завиток спіралі Корню.

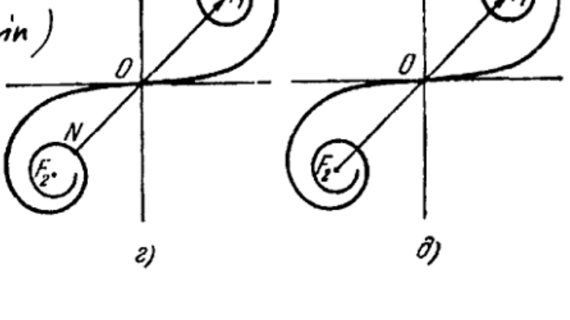
1. Якщо т. P лежить на межі геом. тіні, то коливання від нештрихованих зон (штриховані зони закриті) дадуть результ. вектор, початок якого - в т. O, а кінець - в т. $F_1$ (рис. а): $I = \left(\frac{1}{2}E_0\right)^2 = \frac{1}{4}I_0$

$X = 0$
$I = \frac{I_0}{4}$




а)  б)  в)

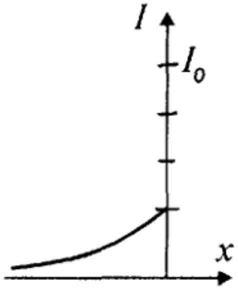
$X > 0$
(I min)




г)  д)

повністю відкриті всі зони (екрану немає).

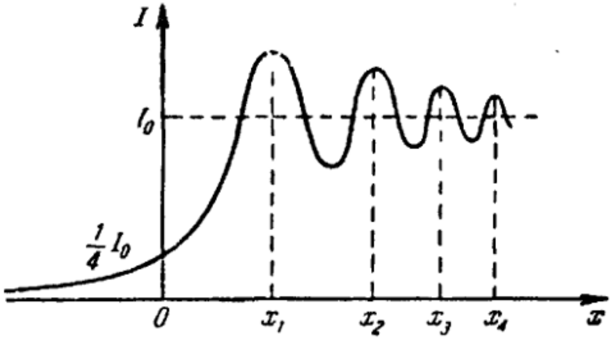
$I = I_0 = A_0^2$




2) При зміщенні т.Р в обл. геом. тіні ($x<0$, рис.б) на півплощина почне закривати все більше нештрих. зон. Тому початок результуючого вектора з т.О почне переміщуватись по правому завитку, наближаючись до полюсу $F_1$ . В результаті амплітуда монотонно прямує до нуля (див. рис).

3) Для $x>0$: т.Р зміщується від границі геомет. тіні вправо. Додатково до нештрих. зон додаються (відкриваються) весь час зростаюче число штрих. зон. Початок результуючого вектора сковзає по лівому завитку спіралі в напрямку полюсу $F_2$ . В результаті амплітуда проходить через ряд максимумів. Перший з них відповідає довжині відрізку $MF_1$ (рис. *в*). Перший мінімум дорівнює довжині відрізку $NF_1$ (рис. *г*). При повністю відкритій хвильовій поверхні амплітуда хвилі в точці спостереження дорівнює відрізку $F_2\ F_1$ (рис. *д*). В останньому випадку амплітуда в 2 рази більша за амплітуду на межі тіні (інтенсивність в 4 рази більша).

В результаті отримуємо залежність *I(x)*, яка показана на рис.




Правий завиток спіралі відповідає зонам, розташованим справа від т.О. лівий – зліва від т.О.

Кожній точці спіралі Корню відповідає параметр $v$:

$$\boxed{v = x \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda \cdot L}}.}$$

Цей параметр пропорційний довжині дуги спіралі, яка починається з т.О. ***Значення параметра v вказане на спіралі.***

Приклад: Дано:L=100 см; λ=500 нм; $I_0$- інтенсивність падаючого світла.

Знайти відстань Δx між першими двома максимумами на екрані та інтенсивність першого максимуму.

Враховуючи, що $x = v\sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{2}}$, маємо

$\Delta x = x_2 - x_1 = (v_2 - v_1)\cdot\sqrt{\lambda \cdot L/2}$

По графіку із спіраллю Корню знаходимо, що

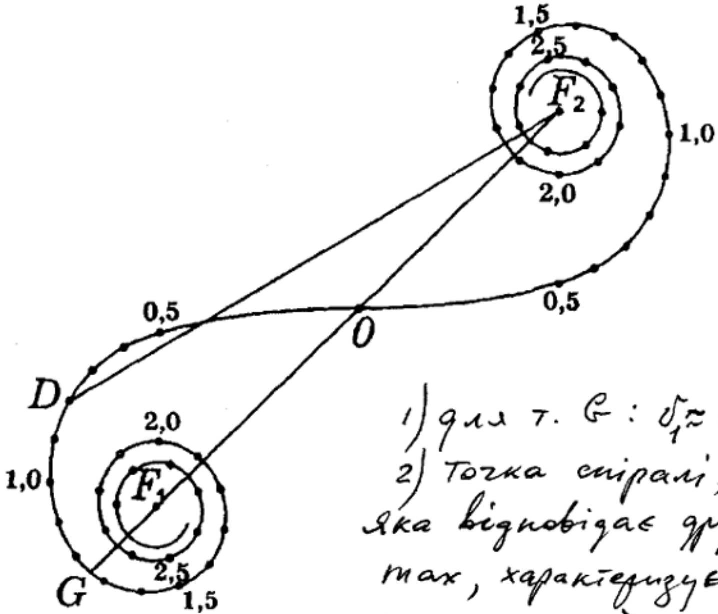
$v_2 = 2.35$; $v_1 = 1.25$ для 2-х перших максимумів.

$\Delta x = (2.35 - 1.25)\cdot\sqrt{\frac{500\cdot 10^{-9}\cdot 1}{2}} = 5.5\cdot 10^{-4}\,м = 0.55\,мм$

За допомогою графіка і лінійки знаходимо, що відношення амплітуди 1-го max (тобто відстань між точками $GF_2$) до амплітуди падаючого світла (довжина $F_2F_1$)

$$\eta = \frac{GF_2}{F_2F_1} = \frac{94}{80} \approx 1.17$$

Тобто $J_1 = \eta^2 J_0 = 1.37\,J_0$




1) для т. G : $v_1 \approx 1.25$

2) точка спіралі, яка відповідає другому max, характеризується значенням $v_2 \approx 2.35$