

## Фізика взаємодії світла із середовищем.

(Класична осциляторна модель середовища)

Світло змушує коливатись електрони в атомі  $\rightarrow$  віддаючи свою енергію, світло поглинається  $\rightarrow$  однак заряди, що коливаються, самі стають джерелами вторинних світлових хвиль  $\rightarrow$  світлове поле в середовищі формується в результаті інтерференції падаючого випромінювання і вторинних світлових хвиль.

Середовище веде себе як суцільна речовина.

### Класифікація середовищ.

1. Середовище без дисперсії: залежність  $\vec{P}(\vec{E}) \in$  локальна та безінерційна, тобто значення поляризації середовища в деякій точці простору і в деякій момент часу визначається значенням поля  $\vec{E}$  в тій же самій точці і в той же момент.
  2. Середовище з просторовою дисперсією: нелокальність відгуку:  $\vec{D} = \epsilon(k) \cdot \vec{E}$
  3. Часова (або частотна) дисперсія: інерційність відгуку, тобто запіздювання  $\vec{P}$  відносно  $\vec{E}$ .  $\Rightarrow \epsilon(\omega)$
  4. Лінійне середовище:  $\vec{P} = \hat{L}(\vec{E})$ , де  $\hat{L}$  - лінійний оператор.
  5. Нелінійне середовище:  $\vec{P} = \hat{NL}(\vec{E})$ , де  $\hat{NL}$  - нелінійний оператор
  6. Ізотропне середовище:  $\vec{P} \parallel \vec{E}$
  7. Анізотропне середовище:  $\vec{P} \nparallel \vec{E}$
- Властивості середовища (дисперсія, лінійність, ізотропність)  
не пов'язані між собою

Будемо розглядати ізотропне, лінійне середовище.

### Класична модель атома.



Опт. середовище складається із сукупності гармонічних ел-них осциляторів, які не взаємодіють між собою. (Така ситуація підходить до газу).

Під дією ел. поля хвилі в кожному осциляторі виникає дип. момент  $p = z \cdot e$ , де  $z$  - зміщення ел-на від положення рівноваги.

В од. об'єму  $\in N$  осциляторів.

Поларизація од. об'єму  $P = Np = N \cdot ze$

Вважаємо, що всі осцилятори одного типу і мають одну частоту власних коливань. В СИСЕ:

$$\begin{aligned} \text{Діел. індукція середовища } \vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \\ &= \vec{E} + 4\pi N e z \vec{z} \end{aligned}$$

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E} = 1 + 4\pi \beta$$

зв'язок поле поларизації  $\beta$  - діелектр. сприйнятл.

У гармон. наближенні діє квазіпружна сила  $\vec{F}_1 = -b \vec{z}$ , де  $b$  - стала кружності.

Колівання  $\in$  згасаючим  $\Rightarrow$  Сила тертя  $\vec{F}_2 = -g \frac{d\vec{z}}{dt}$   
де  $g$  - коеф. тертя.

На ел-н діє ще зовнішня сила з боку хвилі:

$$\vec{F}_3 = e \vec{E}, \text{ де } \vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \text{ (або } \vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \text{)}$$

Рівняння руху електрона:  $m \ddot{z} = -b z - g \dot{z} + e \vec{E}$  або:

$$(1) \quad \ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{e}{m} \vec{E} \quad \text{де } 2\gamma = \frac{g}{m}, \quad \gamma - \text{коеф. загук.}$$

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$ ; власна циркул. частота коливань ел-на ( $\omega$ )

(1) - рівняння вимушених коливань. Розв'язок шукаємо у вигляді  $\vec{z} = \vec{z}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d\vec{z}}{dt} = i\omega \vec{z}; \frac{d^2\vec{z}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{z}$

Атоми не взаємодіють між собою.

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p}$$

$$\vec{p} = e \vec{r} = \epsilon_0 \alpha \cdot \vec{E}$$

$$\vec{P} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$$

$\beta = N \cdot \alpha$   
 $\alpha$  - поляризованість атома  
 $\beta$  - діелектрична сприйнятливість  
 Електронна діелектрика  
 Теорія дисперсії світла

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E}, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{b}{m}$$

Всі:  
 $\epsilon = 1 + \frac{P}{E \cdot \epsilon_0} = 1 + \beta$

$$\vec{P} = e \vec{r} \cdot N = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E};$$

$$\epsilon = 1 + \frac{Ne^2/(m \cdot \epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (2) \quad \epsilon(\omega)!$$

(2) - вираз для комплексної діел. проникності середовища в моделі Лоренца

Дисперсія і поглинання світла в лінійному іскрінковому середовищі

В рамках моделі суцільного середовища (моделі Лоренца). Введемо дійсну і уявну частину комплексного показника заломлення середовища  $n^* = n' - in''$ .

Тех для хвильового числа  $k = k' - ik''$ , де параметри  $k' = \frac{\omega}{c} \cdot n'$  та  $k'' = \frac{\omega}{c} \cdot n''$ .

$n'$  визначає швидкість розповсюдження хвилі, а  $n''$  - загукання світлової хвилі

Оскільки  $n' = n'(\omega)$ , а  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$ , маємо, що  $v_\varphi$  залежить від частоти світла. Це з'являє називається дисперсією.

Враховуючи, що  $\epsilon = (n' - in'')^2$ , маємо

$$(n' - in'')^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad \left| * \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega} \right.$$

$$n'^2 - n''^2 - i2n' \cdot n'' = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} -$$

$$- i \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

Поділимо на дійсну (Re) та уявну (Im) частини:

Для спрощення викладок (за формою) позначимо:

$$n' \Rightarrow n ; n'' \Rightarrow \chi$$

$$\begin{cases} n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \\ 2n\chi = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \end{cases} \quad (A)$$

Співвідношення (A) визначають показник заломлення (n) та показник поглинання ( $\chi$ ) через частоту світла ( $\omega$ ) і молекулярні параметри резонансу N та  $e/m$ .

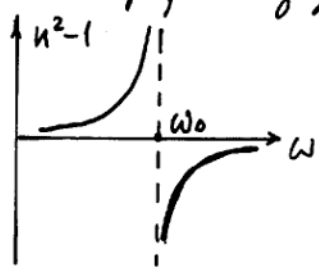
Аналіз (A):

I. Випадок коли  $\chi = 0$ .

Оскільки загучання ( $\gamma$ ) в оптичній діапазоні досить мале, за винятком частот  $\omega \approx \omega_0$ , тобто  $\gamma \cdot \omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$ , будемо вважати, що  $\chi = 0$  та  $\gamma = 0$ . Тоді з (A):

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \cdot N \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (B) \text{ залежність } n(\omega) \text{ в середов. бч загуч.}$$

- 1) При  $0 < \omega < \omega_0$       $n > 1$
- при  $\omega = \omega_0$       $n = \pm \infty$
- при  $\omega_0 < \omega \leq \infty$       $n < 1$



2) Для випадку  $\omega \ll \omega_0$  співвідношення (B) можна розклас.

ти в ряд за степенями  $\omega/\omega_0$  і обмежитись двома членами ряду. У цьому випадку:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} N \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (C)$$

Для випадку  $\omega \ll \omega_0$  (випадок далекого ІЧ світла або НВЧ діапазону)  $n \neq f(\omega) \Rightarrow n = \text{const}; n > 1$

Оскільки  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c$ , а  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot c$ , то  $(\epsilon) \Rightarrow$  9.

$$n^2 = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) \text{ де } A = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega_0^2}; \quad B = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}$$

Це рівняння порівняно до співвідношення Коші:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

Розходження між теорією і експериментом 10-20%

3) При  $\omega_0 = 0$  (цей стан х-ерний для плазми):

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\{ n < 1 \quad ! \Rightarrow \forall \varphi > c \right.$$

Якщо  $\omega^2 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}$ , то  $n = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}} = \omega_p$  - плазмова частота

Якщо  $\omega^2 > \omega_p$ , то  $0 < n < 1$  ( $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ).

Якщо  $\omega^2 < \omega_p$ , то  $n < 0$  - хвилі відбиваються (ефект відбиття хвиль з  $\lambda \sim 1$  м від іоносфери. Для космічного зв'язку на НВЧ)

4) При  $\omega \gg \omega_0$  - для рентгенівського діапазону спектру

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

$n < 1$  і мало відрізняється від 1 через велике значення частоти  $\omega$ .

Для скла  $n \approx 1$ .

З точністю  $90 \pm 10^{-6}$  - мала дисперсія!

Для рентгенівського випромінювання можна здійснити повне внутр. відб. (ПВВ) на межі коділу повітря - т.б. тіло при падінні променів з повітря.

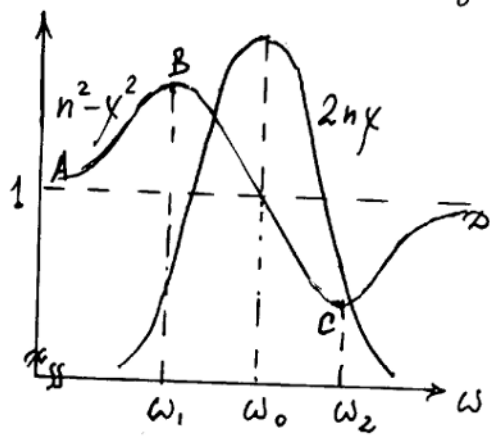
II. Випадає, коли  $\chi \neq 0$

врахуємо затухання коливань сл-на, коли  $\omega \rightarrow \omega_0$  і

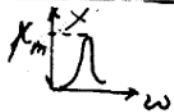
$\chi \neq 0$ . В (A) можна покласти  $(\omega + \omega_0) = 2\omega_0$  і спростити (A) до вигляду, зручного для аналізу:

випадає, коли  $\omega \rightarrow \omega_0$ , означає, що розпадається дисперсія світла поблизу лінії поглинання.

$$\begin{cases} n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m \omega_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega) + \frac{\gamma^2}{\omega_0 - \omega}} \\ 2n\chi = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{cases} \quad (\Phi)$$



Аналіз графіків та аналітичного виразу (Φ)

1.  $(2n\chi)_{\max} = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega_0 \gamma}$   При  $\gamma \uparrow$  величина  $\chi_{\max} \downarrow$
2. Ширина кривої  $\chi(\omega) - (\omega_0 - \omega)$  зростає із зростанням  $\gamma$ .
3. При деяких значеннях  $\omega(\omega_1$  та  $\omega_2)$  величина  $(n^2 - \chi^2)$  набуває екстремального значення  

$$\frac{d(n^2 - \chi^2)}{d\omega} = 0$$
4. При  $\omega = \omega_0$  величина  $(n^2 - \chi^2) = 1$
5. На ділянці ВС при  $\omega \uparrow$  величина  $n \downarrow$ , що відповідає аномальній дисперсії.
6. На ділянках АВ та DC - дисперсія нормальна.
7. Врахування згасання не змінило характер дисперсії.

## Нормальна та аномальна дисперсії

Обл. нормальної дисперсії:  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$  ( $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ ).

Обл. аномальної дисперсії:  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$  ( $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ ).

Біля центра лінії поглинання, там, де поглинання світла максимальне, дисперсія - аномальна: з ростом  $\omega$  величина  $n$  падає.

За межами смуги поглинання, там, де середовище прозоре, дисперсія - нормальна: з ростом  $\omega$  величина  $n$  зменшується.

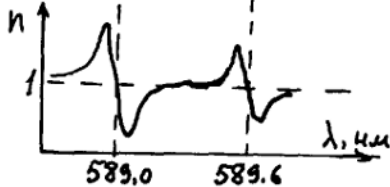
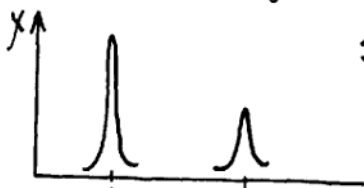
## Сила осциляторів

Вимірювання величини  $N$  у (1) не співпадають з кількістю осциляторів в од. об'єму ( $N_0$ ). Завжди  $N < N_0$ .

Тому для узгодження з експериментом було введено егалу  $f \leq 1$ , яка пов'язує  $N$  та  $N_0$ :  $N = f \cdot N_0$ .  
 $f$  називається силою осцилятора.

Реальні атоми мають не одну, а, як правило, декілька спектральних ліній поглинання. Тому з (2):

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\gamma_j \cdot \omega}$$



Звичайно  $f_j$  нормують:  $\sum_j f_j = 1$ .  
Для атомів лужних металів, у яких на зовн. оболонці 1 ел.-к.

Наприклад, для 2-х D-ліній натрію

$$f_1 (3^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}) = 0.325$$

$$f_2 (3^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{3/2}) = 0.65$$

$$f_1 + f_2 \approx 1$$

Врахування впливу взаємодії молекул на дисперсію. Показник заломлення шкільних середовищ

Треба розрізняти зовн. поле  $E$  (поле світлової хвилі) та діюче на осцилятор (ефективне)  $E_{\text{eff}}$  поле. Треба врахувати вплив полів від сусідніх атомів (молекул), поляризованих дією світла.

Розв'язок — для ізотропного випадку.

Лоренц показав, що  $E_{\text{eff}} = E + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{3} P$  (1). Тому рівняння  $m\ddot{z} + b\dot{z} = eE \rightarrow m\ddot{z} + b\dot{z} = eE + \frac{1}{3\epsilon_0} eP$

Враховуючи, що  $\vec{P} = eN\vec{z}$ , та помноживши (1) на  $eN$ , отримуємо  $m\ddot{P} + b\dot{P} = Ne^2E + \frac{Ne^2}{3\epsilon_0} P$  (2)

$$\omega_0^2 = \frac{b}{m}; \quad b = m\omega_0^2$$

$$m\ddot{P} + \left(m\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3}\right)P = Ne^2E \equiv Ne^2E_0 \sin \omega t \quad (3)$$

Розв'язок (3) шукаємо у вигляді  $\vec{P} = \vec{P}_0 \sin \omega t$

$$\text{де } P_0 = \frac{e^2 N E_0}{m\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} - \omega^2\right)}$$

Відома, що  $\epsilon = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}$ , та  $n^2 = \epsilon$ . Тоді

$$n^2 = \epsilon = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} - \omega^2\right)} = 1 + \frac{e^2 N \frac{1}{m\epsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0}}$$

$$(n^2 - 1)(\omega_0^2 - \omega^2) = -\frac{e^2 N}{3m\epsilon_0} (n^2 - 1 + 3)$$

$$\boxed{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N \frac{e^2}{3\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

Формула Лоренца-Лоренца  
1880р, Г.А. Лоренц та

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{N} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} = \text{const} \quad \text{де } \lambda = \text{const}$$



( $N$  - кількість атомів в од. об'єму, тобто  $N \sim \rho$ ) <sup>13</sup>

$\rho = m \cdot N$ ,  $m$  - маса атома (молекули).

Величина  $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{\rho} = R$  наз. (питомою) рефракцією середовища.

Дослід підтверджує той факт, що при зміні щільності багатьох прозорих середовищ (повітря, кисень, водяна пара тощо) під дією тиску при незмінній температурі і навіть при зміні агрегатного стану, величина  $R$  залишається сталою.

Для повітря (при зміні  $\rho$  в 150 разів):

Щільність, $\rho$	$n$	$R = \frac{1}{\rho} \frac{n^2-1}{n^2+2}$	$10^4(n-1)$
1	1.00029	$1953 \cdot 10^{-7}$	2.9
42,1	1.0124	$1959 \cdot 10^{-7}$	12.4
96.2	1.0284	$1961 \cdot 10^{-7}$	28.4
149.5	1.0442	$1956 \cdot 10^{-7}$	44.2

Із точністю 2-3% величина  $R$  - незмінна

Рефракція  $R$  при утворенні суміші складається адитивно:  $R \cdot m = \sum_i m_i R_i$ .

Це означає, зокрема, що вплив окремих атомів на заломлення світла є незалежним.

Фактори, які підтверджують клас. теорію дисперсії Лоренца

1. Рефракція  $R$

2. Дисперсія в обл. високих частот ( $\omega \gg \omega_0$ ):  $n \rightarrow 1$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad 2\pi c / \omega_p \approx 0.3 \text{ мкм (УФ)}.$$

Рентгєнівське випром. майже не відбивається і не заломлюється. Унергій електронів на ВЧ ел.м. випром. висока і не дозволяє їм відслідковувати коливання

Амплітуда коливань ел-нів в такому полі досить мала. Випромінювання та поглинання взаємодіють дуже слабо. Ускладнення у створенні релієв. лазера, рентгенівської оптики (призми, лінзи, дзеркала, резонатори).

3. Дисперсія в обл. низьких частот ( $\omega \ll \omega_0$ )

$n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$  дисперсійна формула Коші

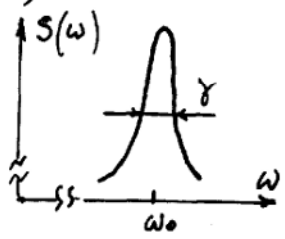
$A, B$ - сталі,	Газ	$A \cdot 10^5$	$B \cdot 10^{11}, \text{см}^2$	Експеримент
можна розрахувати	Аргон	27.92	5.6	
$A = 2\pi N \frac{e^2}{m\omega_0^2}$	Азот	29.19	7.7	
$B = \lambda_0^2 = \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^2$	Телій	3.48	2.3	
$h\omega_0 = E = \frac{me^2}{2h^2} = 13.6 \text{ eV}$	Водень	13.6	7.7	
	Кисень	26.63	5.07	
	Повітря	28.79	5.67	

$\lambda_0 = 10^{-5} \text{ см}; N = N_0 = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$

Для водню:  $A = 1.2 \cdot 10^{-4}; B = 10^{-10} \text{ см}^2$ . Результати вимірювань добре підтверджують ці оцінки.

4. Форма спектральної лінії

Для реальних атомів і молекул форми спектр. ліній відрізняються великою різноманітністю. Однак, всі спектр. лінії, які експериментально спостерігаються, що мають просту лоренцеву форму



$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0^2/4}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

$\gamma = \frac{1}{\tau}$ . Потужність випромінювання пропорц. числу осциляторів  $N$ , а також середній частоті спалахів окремого осцилятора  $\omega$ .

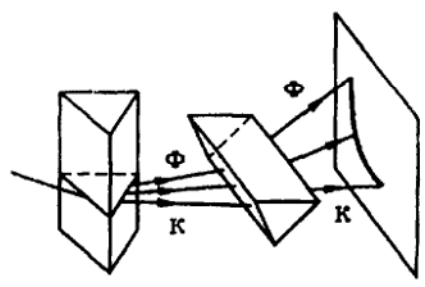
5. Модель Лоренца знаходить своє підтвердження в квантовій теорії: при не сильних світлових полях динаміка дип. моменту атома дійсно адекватно описується рівняннями класичного осцилятора.

Методи дослідження дисперсії і поглинання світла

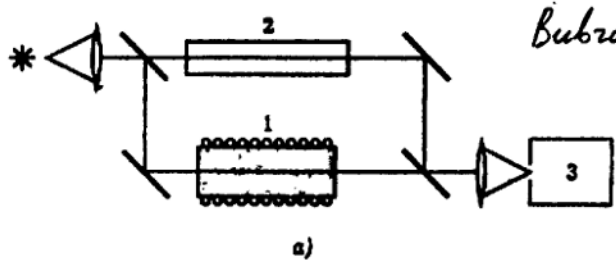
Дослід Ньютона



Метод схрещених призм Ньютона

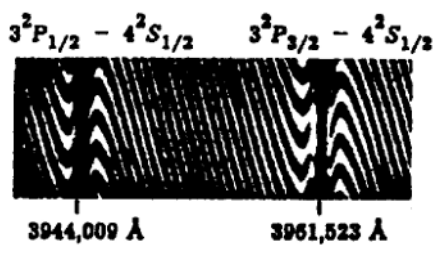


Спектральний прилад (призма або дифр. ґратка) вкупі з інтерферометром. (Метод "крюків" Рождественського)



Вивгається дисперсія атомних парів

1-кубета з парами  
 2-компенсаційна кубета  
 3-спектрограф



Утворюється інтерференційна картина ("крюки") в залежності від  $\lambda$  поблизу резонансних ліній алюмінію

б)

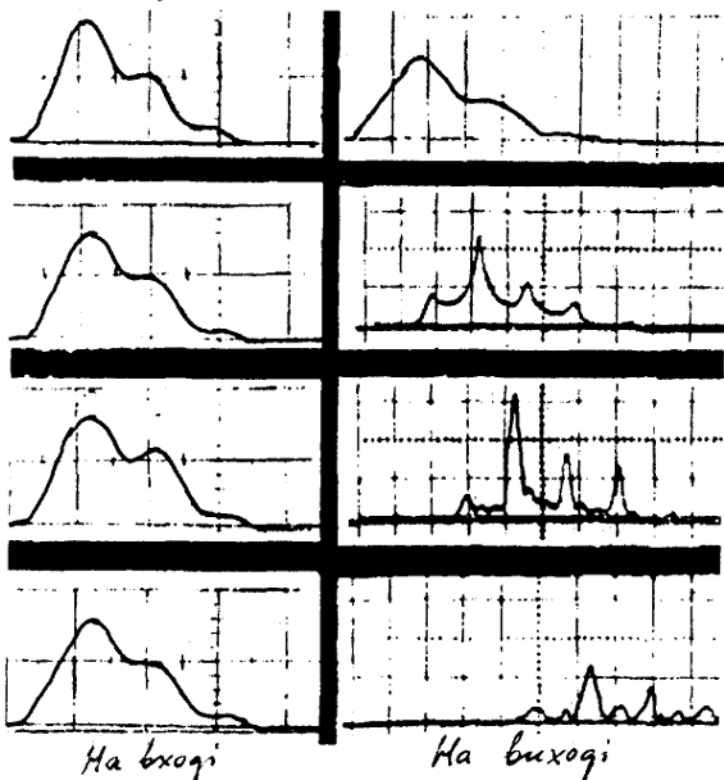
Розповсюдження світлового імпульсу в середовищі із дисперсією

Раніше розглядали монохроматичне світло. Світловий імпульс - не монохроматичне світло

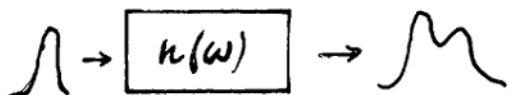
$n = n(\lambda) \Rightarrow$  різні спектральні компоненти кожен при розповсюдженні через дисперсійне середовище із різними швидкостями набувають різних фазових набігів

$v_{\varphi} = \frac{c}{n(\lambda)} = v_{\varphi}(\lambda)$ . Форма вихідного імпульсу відрізня-

ється від форми імпульсу на вході: імпульс деформується. Максимальна деформація (спотворення форми) імпульсу набуває в резонансних умовах, коли  $\omega \approx \omega_0$  - частота власних коливань середовища.



Інший приклад спотворення імпульсу - розповсюдження світл. імпульсу в прозорому оптич. волокні. Резонансний ефект відсутній, але через велику довжину волокна (до 100 км) теж імпульс деформується.

Постановка задачі:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

$\Delta\omega$  - ширина спектр. лінії;  $\omega$  - несуча частота

Розглядаємо світловий імпульс з вузькою смужкою:

$\Delta\omega \ll \omega$ .  $\Rightarrow$  тривалість імпульсу ( $\tau_0$ )  $\gg$  періоду світл. коливань ( $T_0$ ):  $\tau_0 \gg T_0$  - умова вузької смуги

В оптиці  $T_0 = 10^{-14} - 10^{-15}$  с. Знайти:

$$\tau_0 \geq 10^{-13} \text{ с}$$

Сигнал на вході:  $\vec{E}_{\text{вх}}(t) = \vec{E}_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Сигнал на виході:  $\vec{E}(t) = \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Розкладаємо амплітуду  $E_0(t)$  та  $E(t)$  в інтеграл Фур'є

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Процес розповсюдження світл. хвилі можна описати

$$\text{формулою } E(\omega) = E_0(\omega) e^{-ik(\omega)z} \quad (3)$$

Спектральна амплітуда  $E_0(\omega)$  виражається через комплексну амплітуду вх. сигналу  $E_0(t)$  за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$E_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

Задача розв'язка: знаючи вид амплітуди вх. сигналу  $E_0(t)$  по ф-лах (1)-(3) знаходити ампл. сигналу на виході дисперсного середовища.

Формули (1)-(3) виражають три послідовних етапи розв'язку задачі:

- Фур'є аналіз вх. сигналу;
- перетворення спектральної компоненти кола дисперцією середовищем;
- Фур'є синтез сигналу на виході

### Моделі середовищ із дисперсією

Закон дисперсії:  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega)$

Користуючись умовною вузької смуги, можна розкласти хвильове число в ряд Тейлора по степеням  $\omega - \omega_0$ :

поблизу  $\omega_0$

Відлік частот тут

відбувається відносно  $\omega_0$

$$k(\omega) = k_0 + \omega k'_0 + \frac{1}{2} \omega^2 k''_0 + \dots$$

введемо позначення:

$$k_0 = k(\omega_0); \quad k'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}; \quad k''_0 = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0}$$

Будемо користуватись:

1) моделлю середовища з дисперсією I порядку:

$$k(\omega) = k_0 + \omega k'_0$$

2) моделлю середовища з дисперсією II порядку:

$$k(\omega) = k_0 + \omega k'_0 + \frac{1}{2} \omega^2 k''_0$$

Середовище з дисперсією I порядку.

Фазова і групова швидкості:

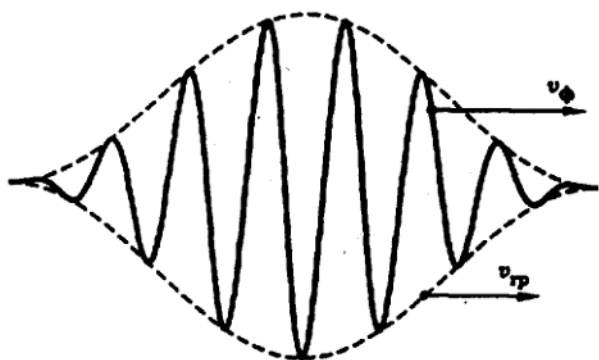
Швидкість розповсюдж. імпл  $u = v_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_0$

$$v_{\varphi} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}$$

$$v_{gr} = \frac{v_{\varphi}}{1 + \frac{\omega_0}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Можна показати, що:

В середовищі з дисперсією I порядку світловий імпульс з вузькою смугою розповсюдж БЕЗ зміни форми



$$v_{гр} < v_{ф}$$

Для вакууму  $n=1$   
 $v_{гр} = v_{ф}$



Середовище із дисперсією II порядку. Дисперсія групової швидкості

$$v_{гр} = v_{гр}(\omega) \quad \frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = k_0' + k_0'' \cdot \omega$$

1. Утворення імпульсів із стійкою формою очкаючої-  
 "спектрів"

Можна показати, що в дальній зоні дисперсії ( $Z \gg Z_{дисп}$ ) світлові імпульси набувають стійкої форми, яка визначається спектром вхідного імпульсу. Такий імпульс називається "спектроном".

$$Z_{дисп} = \frac{z_0^2}{2\pi k_0''}$$

2. Саме дисперсія  $v_{гр}$  призводить до розширення світлового імпульсу.

Зенце зв'язок:  $\tau_0 \cdot \Delta\omega = 2\pi$

В дальній зоні ( $z \gg z_{\text{дисп}}$ ):

$$\tau_u(z) = \Delta\omega \cdot k_0'' \cdot z \quad (A)$$

З (A) витікає, що  $\tau_u(z)$  лінійно зростає по мірі збільшення  $z$ . Це є дисперсійне розширення імпульсу.

Обидва ефекти (утворення "спектра" і розширення імпульсу) в дальній зоні можна пояснити за допомогою аналогії із бігунами на довгій дистанції.

Для зручності (A) можна записати так:

$$\tau_u(z) = \tau_0 \frac{z}{z_{\text{дисп}}}$$

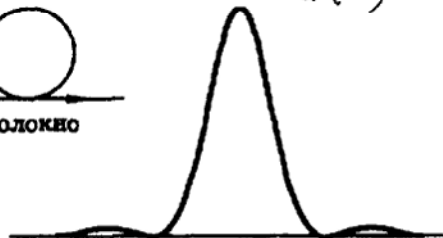
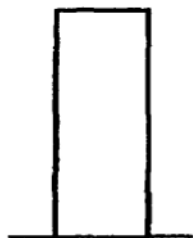
Приклад: опт. волокно;  $\lambda = 1 \mu\text{м}$ ;  $k_0'' = 3 \cdot 10^{-28} \text{ с}^2/\text{см}$   
 $\tau_0 = 10^{-12} \text{ с}$ . Можна розрахувати  $z_{\text{дисп}}$ :

$$z_{\text{дисп}} = 5 \text{ м.}$$

Якщо довжина волокна  $z = 50 \text{ м}$ , то імпульс на виході буде мати тривалість  $\tau_u(z) = 10^{-11} \text{ с}$ , тобто він прийде із 10-ти кратним розширенням.

Якщо на вході прямокутний імпульс  $\tau_0$ , то інтенсивність в дальній зоні має вигляд

$$I(t) = I_{\text{max}} \cdot \text{sinc}^2 \left[ \frac{\pi\theta}{\tau_u(z)} \right], \text{ де } \theta = t - k_0' \cdot z$$



Входной импульс

Импульс в дальней зоне