Класична теорія ел.м. випромінювання

Модель лінійного гармонічного осцилятора (електричного диполя): ізольований атом у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$; $v = c$). Осцилює електрон, ядро – нерухоме.

Рівняння руху електрона: $m\ddot{\vec{r}} = \alpha \vec{r}$ (α – коеф. квазіпружн.)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \text{де} \quad \omega_0^2 = \frac{\alpha}{m} \qquad (1)$$

Зміщення ел-на створює дип. мом. $\vec{p}(t) = q\cdot\vec{r}(t)$

Диполь Герца є джерелом сферичн. ел.м. хвиль, вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ якої на великій відстані від джерела, в так званій хвильовій зоні, рівні по величині і взаємно перпендикулярні.

хвильова зона ≡ дальня зона: $a \ll \lambda \ll R$
a – розмір диполя (характерний розмір атома або молекули)
$a \approx 10^{-8}$ см
$\lambda \approx 10^{-4}$ см
$R \approx 1$ см

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin\omega t \qquad (2)$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin\omega t \qquad (3)$$

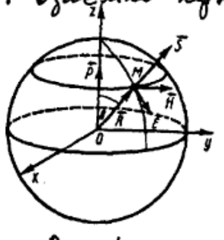


Рис. 1

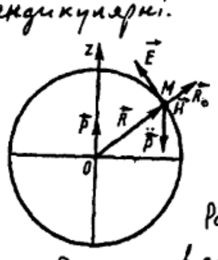


Рис. 2

Вектори $\vec{p}$ та $\ddot{\vec{p}}$ протилежні за напрямом.

Радіус-вектор $\vec{R}$, проведений з початку СК в точку спостереження т.M, складає кут θ з напрямом $\vec{p}$ (рис. 1).

Розв'язуючи хвильове рівняння для хвильової зони, можна отримати, що

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{c^2 R}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R}{c}\right) \times \vec{R}_0\right] \qquad (4)$$

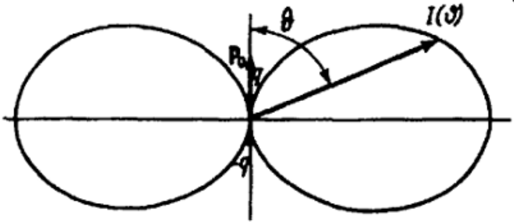
$$\vec{E}(t) = \left[\vec{H}(t) \times \vec{R}_0\right] \qquad (5) \quad \text{де } \vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \text{ – одиничний вектор по напряму } \vec{R}$$

Аргумент $\left(t - \frac{R}{c}\right)$ при $\vec{p}$, обумовлений кінцевою величиною швидкості розповсюдження ел.м.хв. (хвиля в т.M в момент часу t визначається значенням в більш ранній момент часу).

$$\boxed{|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}(t-R/c)|}{c^2 R} \cdot \sin\theta} \qquad (A)$$

Проаналізуємо (A):

1) При $\theta = 0$ (вздовж $\vec{p}$) $H = E = 0$: диполь не випромінює ел.м. енергію в напрямку своєї осі;
2) При $\theta = \pi/2$ $E = E_{max}$: max випромінювання відбувається в напрямку $\perp$ до осі диполя.
3) При $\theta = const$ $E = H \sim \frac{1}{R}$: випромінюється сферична хв. хвиля



4) $E \sim \frac{1}{R} \Rightarrow$ в обл. хвильової зони можна позбавитися від впливу $E_{стат} \sim \frac{q}{R^3}$ і можна його не враховувати.

Інтенсивність випромінювання

Вектор Умова-Пойнтинга

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta \qquad (6)$$

Величина S визначає миттєве значення потоку ел.м. енергії в напрямку θ. Потік ен. за од. часу по всім напрямам $J = \int S \cdot d\sigma$. Інтегруємо по замкненій поверхні, яка оточує осцилятор.

В сфер. системі коорд. $d\sigma = R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$J = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \boxed{\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = J} \quad (7) \quad \xrightarrow{\vec{p} = q \cdot \vec{r}} \quad \boxed{J = \frac{2q^2 \cdot \ddot{r}^2}{3c^3}} \quad (8)$$

Світлові хвилі випромінюються при прискореному русі заряду

Частота світл. коливань $\nu = 10^{14} \div 10^{15}\, c^{-1}$. Око реагує на усереднене по часу T значення енергії

$$\langle J \rangle = \frac{2}{3c^3}\langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T J\,dt = \frac{2\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \underbrace{\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle}_{=1/2} =$$

$p = p_0 \cos\omega_0 t$

$$(9) \quad = \boxed{\frac{\omega_0^4}{3c^3} \cdot p_0^2 = \langle J \rangle}$$

$\langle J \rangle$ - сер. енергія, або потужн. випр.

$\langle J \rangle \sim \omega_0^4$ або $\langle J \rangle \sim \frac{1}{\lambda_0^4}$ (Як і в релеєвськ. розсіюв.

Добротність випромінювання

Осцилятор - затухаючий. Розглянута вище теорія (не враховували затухання!) правильна, якщо втрати ен. за рахунок випромінювання при великому числі коливань складає малу долю середньої ен. осцилятора. Покажемо це.

$$W_{повн} = \overline{W}^n + \overline{W}^k = \frac{\alpha r^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

Для гармон. осц.: сер. кін. ен. = сер. пот. ен. (див. „Коливання").

$$\frac{\overline{\alpha r^2}}{2} = \frac{\overline{m\dot{r}^2}}{2}$$

$$\overline{W}_{повн} = \overline{\alpha r^2} = \overline{m\dot{r}^2} = \frac{m\omega_0^2}{2} r_{max}^2 = \frac{m\omega_0^2}{2q^2} \cdot p_0^2 \quad (10)$$

де $p_0 = q \cdot r_{max}$.

Ен., що випром. за період: $W_{вип} = \langle J \rangle \cdot T = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\omega_0^3 p_0^2}{3c^3} = W_{випр.}$ (11)

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}_{повн.}}{W_{вип}} = 2\pi \frac{m\omega_0^2 p_0^2}{2q^2 \cdot 2\pi\omega_0^3 \cdot p_0^2} \cdot 3c^3 = \frac{3mc^3}{2q^2\omega_0} \quad (12)$$

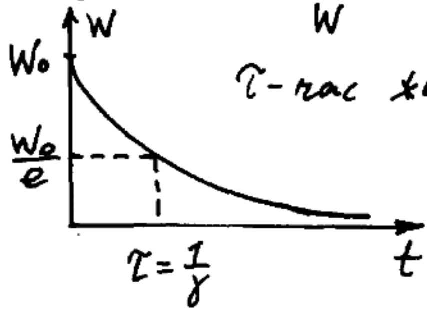
Для $\nu = 10^{15} c^{-1} \Rightarrow Q = 10^7$ – дуже багато: можна брати середнє значення для великої кількості коливань. Це середнє значення ен. повільно змінюється із часом.

„Повільно" – порівняно із яким часом?:

Тривалість випромінювання осцилятора

$$\frac{dW}{dt} = -\langle \mathcal{Y} \rangle \overset{\text{із (9)}}{=} -\frac{\omega_0^4}{3c^3}\cdot p_0^2 \overset{\text{із (11)}}{=} \frac{2\omega_0^2 q^2}{3mc^3}\cdot W_{\text{вип}}$$

Позначимо $\frac{dW}{W} = -\gamma\, dt \Rightarrow W = W_0 e^{-\gamma t}$ (13)



τ – час життя осцилятора

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2\omega_0^2 q^2}$$

Для $\lambda = 500$ нм; $\omega_0 = 4\cdot 10^{15}\,c^{-1}$ і для електрона $m = 9\cdot 10^{-28}$ г; $(q/mc) = 1.76\cdot 10^7$

$\tau \sim 10^{-8}$ с. За цей час осцилятор здійснює n коливань. n – ?

$\tau = \frac{1}{\gamma}$ (γ – декр. загух.); логар. дек. загух – δ

$\delta = \gamma \cdot T = \gamma \cdot \frac{2\pi}{\omega}$; $n = \frac{1}{\delta} = \frac{\omega}{2\pi\gamma} \sim 10^7$