Хвильова оптика

Основні положення ел.м. теорії світла

Світло – ел.м. хвилі від НВЧ ($1\,мм = \lambda$) до м'якого рентгена ($120\,\mathring{A} = \lambda$)

Система рівнянь Максвелла при умові, що середовище однорідне ($\varepsilon = const$; $\mu = const$), непровідне (поверхн. – σ та об'ємна – ρ густина зарядів $= 0$, струм провідн. – $j = 0$)

$$(A)\begin{cases} div\,\vec{E} = 0 \\ div\,\vec{B} = 0 \\ rot\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ rot\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

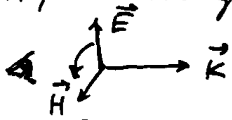
Із системи рівнянь Максвелла можна зробити такі висновки:

1) ел.м. поле поширюється у вигляді ел.м. хвиль із швидк. $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

2) ел.м. хвилі поперечні:

$\vec{H} \perp \vec{E}$; $\vec{H} \perp \vec{k}$ ($\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{n}$; $\vec{k} \parallel \vec{v}$); $\vec{E} \perp \vec{k}$

3) вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ складають правогвинтову систему



4) Вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в плоскій монохроматичній хвилі, що розповсюджується, (не в стоячій хвилі!) коливаються як у часі, так і у просторі синфазно (max $\vec{E}$ співпадає з max $\vec{H}$, те ж з min).

Всі 4 властивості ел.м. хвиль випливають з р-нь Максвелла. Їх можна довести: див. Білий... с. 10, або Годжаев... с. 21

Нагадаємо, що:

Оператор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$\nabla \to grad$

$\nabla^2 = \Delta$ - оператор Лапласа : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(в) $$rot\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Продиф. за часом останнє з рівнянь Максвелла:

$rot\,\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Через те, що $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}\,rot E$,

маємо: $-\frac{c}{\mu}\,rot\,rot\,\vec{E} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Враховуючи, що $rot\,rot\,\vec{E} = grad\,div\,E - \Delta E$, а $div\,E = 0$, маємо: $\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (1)

Так само можна отримати:

$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$ (2) (1) та (2) – хвильові рівн.

$\boxed{\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$ Розв'язок (1) має вигляд:

$E = E_0\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$, або:

$E = E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)} = E_0 \cdot exp\, i\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}\vec{r}\cdot\vec{n}\right) =$

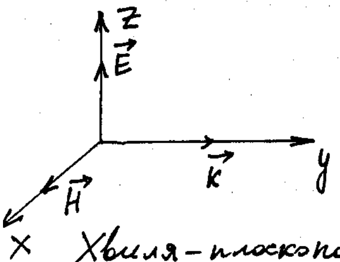
$\vec{n}$ – нормаль до фронту хвилі; $\vec{r}$ – радіус-вектор.

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\vec{n} = \frac{\omega}{\upsilon}\vec{n}$

$= E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (3); $H = H_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (4)

$(3) \to \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\mu}\,H_x = \sqrt{\varepsilon}\cdot E_z}$

Умова синфазності



$E_y = E_x = 0$; $E_z = E(y,t)$

$H_y = H_z = 0$; $H_x = H(y,t)$

$$E_z = E_z(y,t) = E_{0z}\cdot e^{i(\omega t - ky)} \quad (5)$$

Хвиля – плоскополяризована

x-компонента магн. поля (H_x), як витікає із (A) та (B), визначається із: $\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$. (6)

z-компонента ел. поля (E_z), як витікає із (A) та (B), визначається із:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (7).$$

Із (5) $\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$ (8)

$$(8) \to (6): \; -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\cancel{c}}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\mu}{\cancel{c}}\frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (9)$$

Проінтегруємо (9) по часу:

$$\sqrt{\mu}\cdot H_x(y,t) = \sqrt{\varepsilon}\cdot E_z(y,t) + const.$$

Оскільки постійне (стаціонарне) поле в електродинаміці не грає ролі, то const = 0. Тоді:

$$\sqrt{\mu}\cdot H_x = \sqrt{\varepsilon}\cdot E_z$$ — умова синфазності

Для опт. діапазону $\mu=1$ $(B=H) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E=H}$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}=\frac{1}{v^2} \Rightarrow v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{n}$$

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}=\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow n\cdot E=H$$

Енергія ел.м. хвилі. Вектор Умова-Пойнтинга

Об'ємна густина ен. $u=\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2+\frac{\mu}{8\pi}H^2=\frac{\varepsilon}{4\pi}E^2$

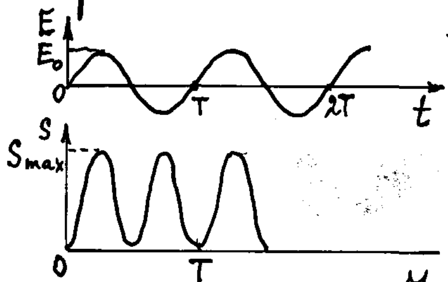
Густина потоку ен. (s) – кількість енергії, яка переноситься через од. поверхні за од. часу

$$s=v\cdot u=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot u=\frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi}E^2=\frac{c}{4\pi}\cdot E\cdot H$$

$$\boxed{\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]}$$ Вектор Умова-Пойнтинга

Вектор $\vec{S} \perp$ пл., де розташовані $\vec{E}$ та $\vec{H}$

Вектор $\vec{S}$ в ізотропному середовищі визначає напрям переносу хвильової енергії, тобто напрям світлового променю.



Значення потоку ен. св. хвилі коливається з подвійною частотою порівняно з $\vec{E}$ або $\vec{H}$

$$S_{max}=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}\,E_0^2$$

Інтенсивність світла (I)

I – середнє значення густини потоку ел.м. випромінення по часу, рівному 1 періоду коливань

$$I=\langle s\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi}E_0^2\cos^2(\omega t-rk)\,dt=$$

$$=\frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi}E_0^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi}E_0^2 \Rightarrow I\sim E_0^2;\ I\sim n$$

Фазова і групова швидкості

Плоска монохроматична хвиля в однорідному середовищі описується виразом

$E = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$ Фаза $\varphi = \omega t - kx$

$\varphi = const$ Хвильова поверхня – геом. місце точок, які коливаються в однаковій фазі.

Фронт хвилі – геом. місце точок, до яких в данний момент часу дійшла хвиля і викликала коливання.

Для однорідних ізотропних середовищ хвильова поверхня і фронт хвилі співпадають; для анізотр. – ні.

$\varphi = \omega t - kx = const \Rightarrow \omega \cdot dt - k dx = 0$

$$\frac{dx}{dt} = v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi \nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu \cdot \lambda$$

Фаз. шв. – шв. переносу фронту хвилі

Групова шв. – шв. амплітуди групи хвиль (шв. переносу енергії хвилею), швидкість хвильового пакету

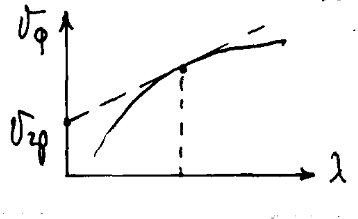
$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_\varphi \cdot k) = \boxed{v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk}} =$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{k}{\lambda} \cdot d\lambda$$

$$\frac{dv_\varphi}{dk} = \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{k}$$

Формула Релея

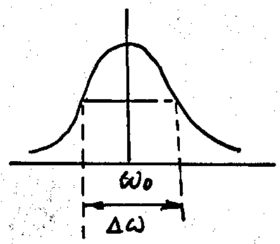
$$= v_\varphi + k\left(-\frac{dv_\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{k}\right) = \boxed{v_\varphi - \lambda\frac{dv_\varphi}{d\lambda} = v_{гр}}$$



Метод визначення $v_{гр}$ (П. Еренфест)

Необхідність розгляду, поруч з $v_{ф}$, групової шв. $v_{гр}$ пов'язана із негармонічними ЕМХ.

ЕМХ з кінечним (відмінним від 0) значенням $\Delta\omega$ м.б. представлена у вигляді суперпозиції плоских гармонічних хвиль різної частоти ⇒ Різні частоти – різні швидкості (дисперсія). Тому така хвиля являє собою збурення ел.м. поля у вигляді імпульсу, рівного нулю за межами деякого інтервалу Δx (об'єму ΔV) і проміжку часу τ. Таке хвильове поле називають хвильовим пакетом. Амплітуди гармонічних хвиль, які складають таке збурення, відмінні від нуля лише всередині деякого інтервалу частот $\Delta\omega$ поблизу середньої частоти ω_0.



Якщо $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, то хвиля називається квазігармонічною (майже гармонічною).

Хвильові пакети широко використовуються при розгляді взаємодії ЕМХ із речовиною, а також процесів передачі інформації тощо.

Зауваження: 1) $v_{ф} \cdot v_{гр} = c^2$

2) Для плоских гармонічних ЕМХ $v_{ф} = v_{гр}$

3) У вакуумі $v_{гр} = v_{ф} = c$. (У вакуумі немає хвильового пакету, немає дисперсії, „немає" $v_{гр}$, її не розрізняють, про неї не говорять).