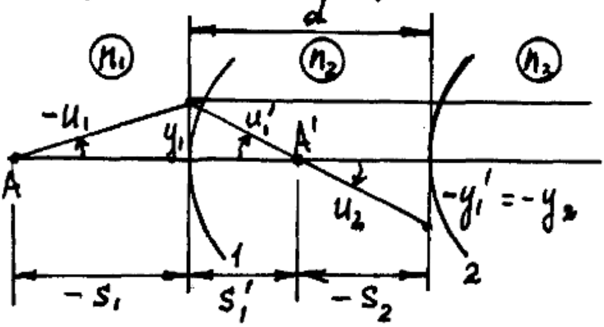
Матричний метод в оптиці



Поширення параксіального проміня через дві послідовні межі поділу опт. системи

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{u}{u'} \rightleftarrows$$

$y'\cdot n'\cdot u' = y\cdot n\cdot u$ – інваріант Лагранжа – Гельмголь

Введемо позначення:

$$\begin{cases} \text{узагальнений кут} & V = n\cdot u \\ \text{зведена довжина} & T = d/n \end{cases}$$

Рівняння Аббе: $\dfrac{n'}{s'} - \dfrac{n}{s} = \dfrac{n'-n}{r} = \phi$

для точок A та A' має вигляд:

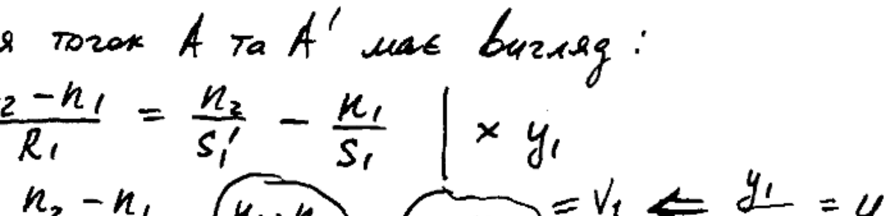
$$\frac{n_2-n_1}{R_1} = \frac{n_2}{s_1'} - \frac{n_1}{s_1} \quad \Big| \times y_1$$

$$y_1\cdot\frac{n_2-n_1}{R_1} = \underbrace{\frac{y_1\cdot n_2}{s_1'}}_{=V_2} - \frac{y_1\cdot n_1}{s_1} = V_1 \Leftarrow \frac{y_1}{s_1} = u_1$$

$$\frac{y_2}{s_1'} = u_2$$

$$V_2 = \frac{n_2-n_1}{R_1}\cdot y_1 + V_1 \quad (1) \text{ рівняння узагальнених кутів}$$

Далі:



$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{y_1-y_2}{d} \Rightarrow d\cdot u_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow y_2 = y_1 - du_2 =$$

$$= y_1 - \frac{d}{n_2}\cdot\overbrace{(u_2\cdot n_2)}^{=V_2} \overset{(1)}{=} y_1 - \frac{d}{n_2}\left(\frac{n_2-n_1}{R_1}\cdot y_1 + V_1\right) \Rightarrow$$

оптичного проміжку

$$y_2 = y_1\left(1 - \frac{d}{n_2}\cdot\frac{n_2 - n_1}{R_1}\right) - \boxed{\frac{d}{n_2}}\cdot V_1 \qquad (2)$$

Маємо систему лін. рівнянь (1), (2), за допомогою яких координати променя на кожній наступній межі поділу виражаються через координати променя на попередній межі. Систему рівнянь (1), (2) можна записати у вигляді матриці:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \frac{d}{n_2}\cdot\frac{n_2 - n_1}{R_1} & -\frac{d}{n_2} \\ \hline \frac{n_2 - n_1}{R_1} & 1 \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \text{або:}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ – матриця оптичної системи}$$

вектор-стовпець (вектор променя)

Коеф. A, B, C, D містять тільки конструктивні елементи оптичної системи (d, R, n). Задача розрахунку опт. системи зводиться до знаходження цих коефіцієнтів.

Знайдемо матриці окремих елементів опт. системи.

1. Сферична заломлююча поверхня

В результаті заломлення висота променя не змінюється. Змінюється лише узагальнений кут. Тому:

$d = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow V_2 = \frac{n_2 - n_1}{R_1}\cdot y_1 + 1\cdot V_1 \\ (2) \Rightarrow y_2 = y_1\cdot 1 - 0\cdot V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{матриця } R \text{ заломлення на сферичній поверхні}$$

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi & 1 \end{pmatrix}}$$

$\det R = A\cdot D - B\cdot C = 1$ – матриця унімодулярна

2. Матриця переміщення (трансляції, оптичного проміжку).

Узагальнений кут при поширенні променя в однорідному середовищі не змінюється. Змінюється лише висота променя:

$(1) \Rightarrow y_2 = y_1 - T \cdot V_1$; $\quad (2) \Rightarrow V_2 = V_1$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \det T = 1$$

3. Матриця плоского дзеркала

Висота променя не змінюється: $y_1 = y_2$. Геометр. кут змінює знак на протилежний: $u_1 = -u_2$

$n_1 \cdot u_1 \cdot \cancel{y_1} = n_2 \cdot u_2 \cdot \cancel{y_2} \Rightarrow \boxed{n_2 = -n_1}$ правило знаків: для променя, що рухається проти опт. осі, при обчисленні узаг. кута та зведеної довжини необхідно перед показником заломл. середовища ставити знак "–"

$y_2 = y_1$; $\quad V_2 = V_1$

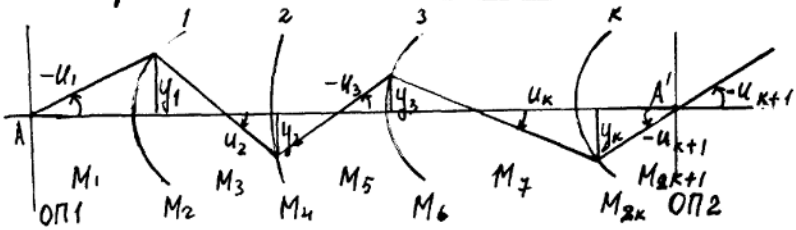
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – одинична матриця (не змінює координат променя). $\det R = 1$

4. Матриця сферичного дзеркала

Із матриці сфер. заломл. поверхні, із врахуванням правила знаків для показника заломл.: $n_2 = -n_1 = -n$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad \det R = 1$$

Матриця оптичної системи



M_i – матриці заломлення і переміщення

Для вектора променя на виході опт. системі маємо

$$\begin{pmatrix} y_k \\ V_k \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

де M – матриця опт. системи.

З іншого боку (див. рис.):

$$\begin{pmatrix} y_k \\ V_k \end{pmatrix} = M_{2k} \begin{pmatrix} y_{k-1} \\ V_{k-1} \end{pmatrix} = M_{2k} \cdot M_{2k-1} \begin{pmatrix} y_{k-2} \\ V_{k-2} \end{pmatrix} = \ldots$$

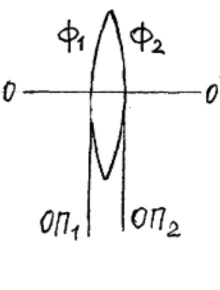
$$= M_{2k} \cdot M_{2k-1} \cdot M_{2k-2} \ldots M_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Порівнюючи (1) та (2), маємо: $M = M_{2k} \cdot M_{2k-1} \cdots M_1$

Матриця опт. системи, яка дає перетворення променя від входу опт. системи до її виходу, дорівнює добутку матриць окремих її елементів, починаючи з останнього.

$\det M = A \cdot D - B \cdot C = 1$

Матриця тонкої лінзи



$d \ll R_{1,2}$ $(d \to 0)$.

$$M = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 + \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$$

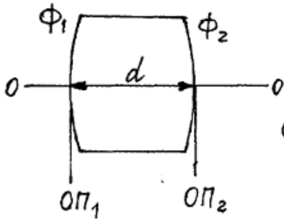
$$\Phi_1 = \frac{n_л - n_с}{R_1}; \quad \Phi_2 = \frac{n_с - n_л}{-R_2} = \frac{n_л - n_с}{R_2}$$

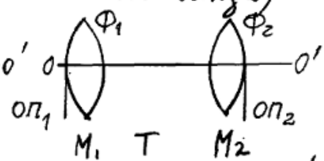
$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (n_л - n_c)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Матриця товстої лінзи

$\equiv$ дві тонкі лінзи на відстані d ($d \equiv$ товщині товстої лінзи)





$$M = M_2 \cdot T \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1 \cdot \Phi_2 = \Phi$$

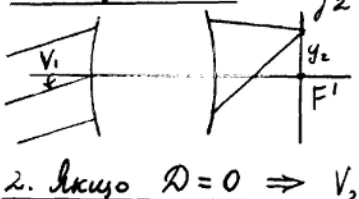
Якщо $\left|\frac{d}{n}\cdot\Phi_1\cdot\Phi_2\right| > \left|\Phi_1 + \Phi_2\right|$, то система двох лінз (товста лінза) є такою, що розсіює світло

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ \Phi_2 & \Phi_2\left(-\frac{d}{n}\right)+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \frac{d}{n}\cdot\Phi_1 & -\frac{d}{n} \\ \hline \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2\frac{d}{n} & -\Phi_2\frac{d}{n} + 1 \end{array}\right)$$

Властивості матриць окремих оптичних систем

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = A\cdot y_1 + B V_1 \\ V_2 = C\cdot y_1 + D\cdot V_1 \end{cases}$$

1. Якщо $A = 0 \Rightarrow y_2 = B\cdot V_1$



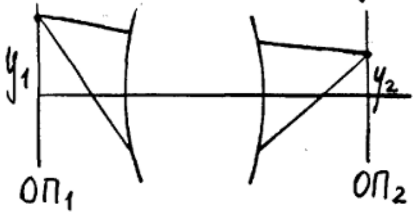
Враховуючи унімодулярність матриці опт. системи, маємо

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & D \end{pmatrix}$$

2. Якщо $D = 0 \Rightarrow V_2 = C\cdot y_1$

$$M = \begin{pmatrix} A & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

3. Якщо $B = 0$, $\Rightarrow y_2 = A \cdot y_1 \Rightarrow A = \dfrac{y_2}{y_1} = \beta$



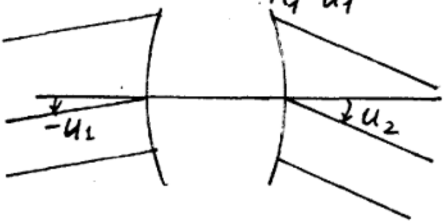
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1/A \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{A} = \frac{1}{\beta} = \alpha$$ коеф. кут. збільшення

$B = 0$ – умова спряженості

4. Якщо $C = 0 \Rightarrow V_2 = D \cdot V_1$

$$D = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2 \cdot u_2}{n_1 \cdot u_1};$$ Для $n_1 = n_2 \Rightarrow D = \dfrac{u_2}{u_1} = \alpha$

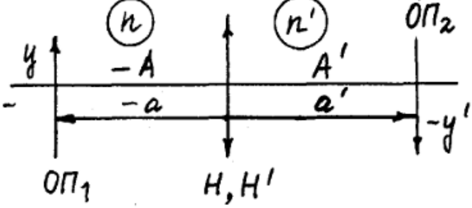


Це – афокальна система

$C = 0$ – умова (ознака) афокальності

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{D} & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Матриця оптичної системи: тонка лінза, опорні площини – спряжені



A, A' – зведені довжини (зведені проміжки).

$$A = \frac{a}{n}; \quad A' = \frac{a'}{n'}$$

ОП$_1$, ОП$_2$ – спряжені площини

$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{vmatrix} 1 & -A' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \Phi & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & A' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & A \\ \Phi & A\Phi + 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{c|c} 1 - A'\Phi & A - A'A\Phi - A' \\ \hline \Phi & A\Phi + 1 \end{array} \right|;$$

$\underline{B = A - A' - A \cdot A' \cdot \Phi = 0\,!} \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi = \frac{A - A'}{A \cdot A'}}$$

$$\boxed{A' = \frac{A}{1 + A \cdot \Phi}}$$

$$\boxed{A = \frac{A'}{1 - A' \cdot \Phi}}$$