<u>**К лекциям 48 - 51**</u>

Метод сеток

Сеточные технологии представляют собой в настоящее время один из наиболее быстро развивающихся разделов математики. *Метод сеток* относится к числу наиболее эффективных методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

В процессе решения интегральных или интегро-дифференциальных уравнений ключевой задачей является приближенное вычисление интегралов по областям с криволинейной границей, нахождению *кубатурных формул*, что также ведет к необходимости построения сеток с нужными свойствами.

Здесь мы сможем лишь проиллюстрировать метод сеток на простейших примерах, оставляя читателю дальнейшее изучение метода по указанной ниже литературе. Мы рассматриваем следующие вопросы: метод сеток для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в прямоугольнике; сетки в плоских областях общего вида; триангуляция; метод пустой сферы Делоне.[1]

---

[1]Литература: С.К. Годунов, Уравнения математической физики, М.: Наука, 1971; К.И. Бабенко, Основы численного анализа, Москва - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002; С.Л. Соболев, Введение в теорию кубатурных формул, М.: Наука, 1974; С.Л. Соболев, В.Л. Васкевич, Кубатурные формулы, Новосибирск: Изд-во Института математики, 1996; М. Абрамовиц и И. Стиган, Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, М.: Наука, 1979; С.К. Годунов, Г.П. Прокопов, О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т. 7, n. 5, 1967, 1031 – 1059; П.П. Белинский, С.К. Годунов, Ю.В. Иванов, И.К. Яненко, Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криврлинейными границами, Журн. вычисл. математики и мат. физики, т. 15, 1975, 1499-1511; С.К. Годунов, Е.И. Роменский, Г.А. Чумаков, Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений, Вычислительные проблемы в задачах математической физики, Тр. АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т математики, т. 18, Новосибирск: Наука, 1990, 75-84; В.М. Гордиенко, О четырехугольниках на поверхностях постоянной кривизны, Вычислительные проблемы в задачах математической физики, Тр. АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т математики, т. 22, Новосибирск: Наука, 1992, 124-133; И.К. Даугавет, Теория приближенных методов. Линейные уравнения, Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2006; Ю.И. Шокин, В.Д. Лисейкин, А.С. Лебедев, Н.Т. Данаев, И.А. Китаева, Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток, Новосибирск: Наука, 2005; Статья Делоне "О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного", перевод с французского А.Ю. Игумнова, Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып. 1, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2006, 147-153; А.В. Скворцов, Триангуляция Делоне и её применение, Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002; А.В. Скворцов, И.С. Мирза, Алгоритмы построения и анализа триангуляции, Томск: Изд-во Томск.

1. Метод сеток для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что нам требуется решить уравнение

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\frac{du}{dx} + r(x)u = f(x) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0) = a, \quad u(1) = b\,.$$

Воспользуемся соотношениями

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(u(x+h) - u(x-h))$$

и

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))\,,$$

из которых следует, что при малых h выполнено

$$\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{1}{2h}(u(x+h) - u(x-h)) \tag{2}$$

и

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) \approx \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))\,. \tag{3}$$

Зададим целое $n \geq 1$ и разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных отрезков. Пусть $h = \frac{1}{n}$. Для произвольного $k = 0, 1, \ldots, n$ полагаем

$$x_k = kh\,,\ p_k = p(x_k)\,,\ q_k = q(x_k)\,,\ r_k = r(x_k)\,,\ f_k = f(x_k)\,.$$

Заменяя приближенно в уравнении (1) производные разностными отношениями (2), (3) в точках x_k, приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения величин $u_k = u(x_k)$:

$$u_0 = a\,,$$

$$\frac{p_k}{h^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + \frac{q_k}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1}) + r_k\,u_k = f_k\,,\quad k = 1, \ldots, n-1\,,$$

$$u_n = b\,.$$

Данная система состоит из $n+1$ уравнения для определения приближенных значений решения $u(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. В точках x_0 и x_n решение задано, так что неизвестными являются лишь значения в *узловых точках* $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

ун-та, 2006; В.М. Миклюков, Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя, Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып. 1, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2006, 154-162; В.А. Клячин, Об одном обобщении условия Делоне, Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып. 2, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2007, 102-107; В.А. Клячин, О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию, Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып. 4, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009, 169-182; А.Ю. Игумнов, Характеристика невырожденности треугольника, Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып. 4, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009, 207-219; J. Eells, B. Fuglede, Harmonic Maps between Riemannian Polyhedra, Cambridge University Press, 2001; В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.

Тем самым, метод сеток позволяет свести граничную задачу для дифференциального уравнения (1) к системе уравнений, теория которых разработана в линейной алгебре. Система уравнений, в которых неизвестными являются значения искомой функции в узловых точках, называется *конечно-разностной.*

Вопрос о точности метода связан с точностью выполнения соотношений (2) и (3).

2. Уравнение с частными производными в прямоугольнике

Пусть
$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a < \infty, \quad 0 \leq y \leq b < \infty\},$$
— прямоугольник в плоскости переменных (x, y) и ∂R — его граница.

Пусть $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y)$ — наперед заданные, непрерывные в прямоугольнике R функции и пусть $\varphi(x, y)$ — некоторая функция непрерывная на границе ∂R.

Предположим, что нам требуется решить *краевую задачу*: найти решение уравнения
$$A(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D(x, y), \tag{1}$$
удовлетворяющее на границе ∂R прямоугольника *краевому условию*
$$f|_{\partial R} = \varphi. \tag{2}$$

Зафиксируеи целые положительные M и N. Разобьем прямоугольник R системой параллельных вертикальных и горизонтальных прямых на мелкие прямоугольные *ячейки* со сторонами $\Delta x = \frac{a}{N}$ и $\Delta y = \frac{b}{M}$. Будем искать приближенные значения решения
$$f(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots N, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$
в вершинах этих прямоугольных ячеек, исключая[2] вершины $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$. В точках $(x_i, y_j) \in \partial R$ в силу граничного условия (2) имеем $2(M+1)+2(N+1)-4 = 2(M + N)$ соотношений
$$f(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j). \tag{3}$$

Аппроксимируем на построенной *сетке* уравнение (1). В узловых точках $(x_i, y_j) \in R \setminus \partial R$ будем заменять приближенно производные
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
соответствующими *конечными разностями*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{4(\Delta x)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i, y_j)}{4\Delta x \Delta y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{4(\Delta y)^2}.$$

В качестве примера приведем обоснование второй из формул. По определению второй производной имеем
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \approx \frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y},$$

[2] Выяснить почему это не обязательно ?

где, опять же по определению,

$$f'_x(x, y + \Delta y) \approx \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x},$$

$$f'_x(x, y) \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Подставляя последние два соотношения в выражение для смешанной производной, находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \approx \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \Delta y},$$

что и требуется.

На основании уравнения (1) в узловых точках $(x_i, y_j) \in R \setminus \partial R$ можем приближенно записать

$$A(x_i, y_i)\frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{4(\Delta x)^2} + \tag{4}$$

$$+B(x_i, y_j)\frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i, y_j)}{4\Delta x \Delta y} +$$

$$+C(x_i, y_j)\frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{4(\Delta y)^2} \approx D(x_i, y_j).$$

Положим $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Тогда

$$f(x_i + \Delta x, y_j) = f_{i+1,j}, \quad f(x_i - \Delta x, y_j) = f_{i-1,j},$$

$$f(x_i, y_j + \Delta y) = f_{i,j+1}, \quad f(x_i, y_j - \Delta y) = f_{i,j-1}$$

и

$$f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) = f_{i+1,j+1}.$$

Соотношения (3), (4) приводят к системе из $(M - 1) \times (N - 1)$ линейных алгебраических для определения $(M - 1) \times (N - 1)$ величин $f_{i,j}$.

Относительно разрешимости этой системы и скорости сходимости найенного решения к решению краевой задачи см. указанную литературу.

3. Сетки в плоских областях общего вида

Скорость, точность и надежность вычислений могут быть повышены путем подходящего выбора метода построения сетки. Здесь существенное влияние оказывают такие факторы, как число узлов сетки, топология сетки, размер и форма ячеек и т.п.

В общем случае сетки могут быть не обязательно ортогональными и даже не обязательно четырехугольными.

В областях общего вида к числу эффективных методов построения сеток относятся методы, базирующиеся на вспомогательных отображениях (*конформных, квазиконформных, почти квазиконформных, гармонических*) областей на канонические области (прямоугольный параллелепипед, шар, тетраэдр и т.п.). В канонических областях сетки легко строятся. Посредством вспомогательного отображения построенные сетки переносятся в наперед заданные области. Необходимо лишь отслеживать, чтобы при этом они не слишком портились.

В настоящее время сеточные технологии представляют собой одну из стремительно развивающихся областей вычислительной математики.

4. Триангуляция. Метод Делоне

Триангуляция есть метод разбиения двумерной области на треугольники, в трехмерном случае — на тетраэдры. При этом в задаче построения в области треугольной сетки важно, чтобы получающиеся при этом треугольники не имели углов, близких к нулевым.

Одним из наиболее распространенных методов триангуляции является метод, предложенный в статье Б. Делоне [1934]. Автор называет его методом "пустой сферы" и описывает следующим образом: *Пусть дана какая-либо система точек в n-мерном пространстве. Я предлагаю рассматривать сферу, перемещающуюся между точками этой системы, как угодно сужающуюся и расширяющуюся и подчиненную только условию "быть пустой", другими словами, не содержать внутри себя точек этой системы. Это и есть "метод пустой сферы"...* (перевод с фр. А.Ю. Игумнова).

Говоря иначе, если дана какая-либо система точек в n-мерном пространстве и какой-либо шар, то в случае, когда он не содержит точек системы, шар называется пустым. Система тетраэдров удовлетворяет *условию пустоты шара*, если для каждого тетраэдра системы шар, описанный вокруг этого тетраэдра, не содержит внутри себя вершин тетраэдров системы.

Многие алгоритмы построения триангуляции Делоне базируются на следующем утверждении: *Триангуляцию Делоне можно получить из любой другой триангуляции области по той же системе точек, последовательно перестраивая пары соседних треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, не удовлетворяющим условию Делоне, в пары треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$.* (См., например, указанную выше монографию А.В. Скворцова и И.С. Мирзы, а также имеющиеся в ней ссылки.)

Упражнения: 1) Написать конечно-разностный аналог производной

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

в точке (x, y).

2) Пользуясь формулой Тейлора, найти приближенные значения частных производных в вершинах треугольника, зная значения функции в этих вершинах.

3) Выбирая в качестве узловых точек районные центры Волгоградской области, указать ее триангуляцию Делоне.