

***МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ***

**Московский государственный университет экономики,  
статистики и информатики**

**Московский международный институт эконометрики,  
информатики, финансов и права**

---

**Мастяева И.Н.  
Семенихина О.Н.**

**Практикум по курсу  
«Численные методы»**

**Москва 2002**

УДК 519.6  
ББК 22.193  
М-327

И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина. Практикум по курсу «Численные методы» /  
Московский государственный университет экономики, статистики и информатики.-  
М.:МЭСИ,2002.- 71 с.

© Мастяева И.Н., 2002 г.

© Семенихина, 2002 г.

© Московский государственный университет экономики, статистики и  
информатики, 2002 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Программа курса "Численные методы".	4
2. Вопросы по курсу "Численные методы".	4
3. Введение.	5
4. Методические указания и типовые задачи.	5
4.1. Приближенные вычисления.	5
4.2. Интерполирование.	15
4.3. Численное дифференцирование.	29
4.4. Численное интегрирование.	34
4.5. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Одномерная оптимизация.	44
4.6. Решение систем линейных уравнений.	57
4.7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	66
5. Литература.	71

## 1. Программа курса "Численные методы".

Тема 1. Погрешность результата численного решения задачи. Источники и классификация погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешность функции. Обратная задача теории погрешностей.

Тема 2. Приближение функций. Постановка задачи приближения функций. Классы аппроксимирующих функций. Критерии согласия. Погрешность аппроксимации.

Интерполяционные методы приближения функций. Алгебраическое интерполирование. Многочлен Лагранжа и его остаточный член. Оптимизация узлов интерполирования. Многочлены Чебышева. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционные многочлены Ньютона с разделенными разностями. Конечные разности и их свойства. Интерполяционные многочлены Ньютона, Стирлинга и Бесселя. Интерполирование с кратными узлами. Обратное интерполирование. Интерполяция и приближение сплайнами.

Тема 3. Численное дифференцирование. Вывод формул численного дифференцирования. Остаточная погрешность. Вычислительная погрешность при численном дифференцировании и выбор оптимального шага таблицы производных.

Тема 4. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Оценка погрешности квадратурной формулы. Повышение точности интегрирования за счет разбиения отрезка на части. Интегрирование функций с заданной степенью точности. Практическая оценка погрешности. Правило Рунге. Квадратурные формулы Гаусса.

Тема 5. Решение нелинейных уравнений и методы одномерной оптимизации. Отделение корней: правило кольца, теорема Лагранжа, теорема Штурма. Уточнение корней: метод итераций, метод Ньютона, метод хорд. Постановка задачи одномерной оптимизации. Поиск отрезка, содержащего точку экстремума. Дихотомический поиск. Метод золотого сечения. Метод средней точки (бисекции). Метод хорд. Метод ДСК-Пауэлла. Метод кубической аппроксимации. Метод Ньютона-Рафсона.

Тема 6. Численные методы алгебры. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простой итерации, условия его сходимости. Оценка погрешности.

Тема 7. Основные понятия численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи. Численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты. Контроль погрешности на шаге. Понятие о конечноразностных методах. Экстраполяционная и интерполяционная формулы Адамса.

## 2. Вопросы по курсу "Численные методы".

1. Математические характеристики точности приближенных чисел.
2. Общая формула погрешностей.
3. Погрешность арифметических действий.
4. Обратная задача теории погрешностей.
5. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
6. Оценка погрешностей многочлена Лагранжа.
7. Конечные разности и их свойства.
8. Интерполяционные формулы Ньютона.
9. Интерполяционные формулы Стирлинга и Бесселя.
10. Обратное интерполирование.
11. Численное дифференцирование.
12. Формулы численного дифференцирования, основанные на формулах Ньютона.

13. Формулы численного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга.
14. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
15. Формула трапеций.
16. Формула Симпсона.
17. Интегрирование с заданной степенью точности.
18. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Отделение корней.
19. Метод половинного деления. Алгоритм.
20. Метод хорд.
21. Метод Ньютона.
22. Метод итераций.
23. Метод Свенна.
24. Метод дихотомического поиска.
25. Метод золотого сечения.
26. Метод средней точки.
27. Метод секущих (одномерная оптимизация).
28. Метод Ньютона-Рафсона.
29. Метод Гаусса с выбором главного элемента.
30. Метод простой итерации.
31. Метод Эйлера.
32. Метод Эйлера-Коши.
33. Метод Рунге-Кутты.
34. Метод Адамса.

### 3. Введение.

Программа обучения на заочном отделении по специальности 0719 предусматривает выполнение студентами по курсу "Численные методы" одной контрольной работы. Эта контрольная работа состоит из 13 типовых задач, охватывающих следующие разделы курса:

- 1) приближенные вычисления - задачи А1, А2;
- 2) интерполирование функций - задачи Б1, Б2, Б3, Б4;
- 3) численное дифференцирование - задача В;
- 4) численное интегрирование функций - задача Г;
- 5) решение нелинейных уравнений - задачи Д1, Д2;
- 6) решение систем линейных уравнений - задачи Е1, Е2;
- 7) решение дифференциальных уравнений - задача Ж.

Для каждой из задач (А1, А2, Б1, Б2, Б3, Б4, В, Г, Д1, Д2, Е1, Е2, Ж) предложено 25 вариантов. Номером варианта студента является остаток от деления пятизначного шифра (номер зачетной книжки) на 25.

### 4. Методические указания и типовые задачи.

#### 4.1. Приближенные вычисления.

**Числа точные и приближенные. Характеристики приближенных чисел. Общая формула погрешности. Обратная задача теории погрешностей.**

Решение большинства практических задач с определенной степенью условности можно представить в виде двух последовательных этапов:

- 1) математическое описание рассматриваемой проблемы;
- 2) решение сформулированной математической задачи.

На первом этапе мы встречаемся с двумя характерными источниками погрешности. Во-первых, это то, что реально протекающие процессы не всегда можно точно описать математически, а вводимые значения дают возможность получить лишь более или менее идеализированные модели. Во-вторых, это неточность задания

исходных параметров, получаемых, как правило, из эксперимента, дающего лишь приближенный результат.

В соответствии с этим суммарная погрешность математической модели и начальных данных объединяется в погрешность исходной информации.

Имея в виду независимость этой погрешности от второго этапа решения исходной задачи, ее часто называют **НЕУСТРАНИМОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ**.

Получение точного решения математической задачи (второй этап) независимо от того, строится ли оно аналитически или на ЭВМ, как правило, не осуществимо. Поэтому в практических расчетах используются методы получения приближенных решений и, в первую очередь - численные.

Такая вынужденная замена точного решения приближенным и порождает **ПОГРЕШНОСТЬ МЕТОДА**, или, как ее часто называют, **ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ**.

Наконец, в процессе решения задачи мы производим округление исходных данных, промежуточных и окончательных результатов. Эти погрешности, а также погрешности, возникающие при выполнении арифметических операций над приближенными числами, в той или иной мере переносятся в результат вычислений и образуют так называемую **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНУЮ ПОГРЕШНОСТЬ** или **ПОГРЕШНОСТЬ ОКРУГЛЕНИЙ**.

В связи со сказанным при постановке задачи либо указывается требуемая точность окончательного результата, то есть задается погрешность, максимально допустимая в процессе решения математической задачи, либо ограничиваются требованием подсчета суммарной погрешности результата.

В практике вычислений часто возникает необходимость в округлении числа, то есть в замене его другим числом с меньшим количеством цифр, причем сохраняется одна или несколько цифр, считая слева направо.

Сформулируем **ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ**, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1. Если отбрасываемые цифры составляют число, большее половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).

Если отбрасываемые цифры составляют число, меньшее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемые цифры остаются без изменения.

2. Если же отбрасываемые цифры составляют число, равное половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная.

Пример. Числа  $A_1 = 273,25001$ ;  $A_2 = 2,71828$ ;  $A_3 = 273,15$ ;  $A_4 = 273,25$  округлить до десятых долей.

Решение. Следуя правилу округления, имеем  
 $a_1 = 273,3$ ;  $a_2 = 2,7$ ;  $a_3 = 273,2$ ;  $a_4 = 273,2$ .

В повседневной практической деятельности, а также при решении той или иной математической задачи используются числа двух родов: **ТОЧНЫЕ** и **ПРИБЛИЖЕННЫЕ**.

**ПРИБЛИЖЕННЫМ ЧИСЛОМ**  $a$  для точного числа  $A$  называется число, незначительно отличающееся от точного и заменяющего его в вычислениях.

Определение 1. **АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ**  $\Delta a$  приближенного числа  $a$  называется величина, не меньшая абсолютного значения разности между точным числом  $A$  и его приближенным значением  $a$  :

$$\Delta a \geq |a - A|. \quad (1)$$

Таким образом, точное число  $A$  заключено в границах :

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a.$$

Этот факт сокращенно можно записать так :  
 $A = a \pm \Delta a$ .

Определение 2. ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ  $\delta a$  приближенного числа  $a$  называется величина, определяемая неравенством :

$$\delta a \geq \frac{|A - a|}{|a|}, \quad (a \neq 0). \quad (2)$$

Таким образом, за относительную погрешность числа  $a$  можно принять

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}. \quad (3)$$

Всякое положительное число  $a$  можно представить в следующем виде:

$$a = \alpha_1 \times 10^m + \alpha_2 \times 10^{m-1} + \dots + \alpha_n \times 10^{m-n+1} + \dots, \quad (4)$$

где  $\alpha_i$  - десятичные цифры числа  $a$  ( $\alpha_i = 0, 1, \dots, 9$ ), причем  $\alpha_1 \neq 0$ , а  $m$  - целое число, называемое старшим десятичным разрядом числа  $a$ .

Определение 3. ЗНАЧАЩИМИ ЦИФРАМИ числа называются все цифры, кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры.

Нули, записанные в конце числа, всегда значащие (в противном случае их не пишут).

Например, числа 0,001406; 5,0300 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр.

Если же мы хотим показать, что у числа 400000 только два значащих нуля, то это число следует записать в виде произведения двух сомножителей:  $400 \cdot 10^3$ , или  $0,400 \cdot 10^6$ . Последняя форма записи называется нормальной и является предпочтительной.

Определение 4. Цифры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  приближенного числа  $a$  называются ВЕРНЫМИ В СМЫСЛЕ  $\omega$ , если абсолютная погрешность числа  $a$  не превосходит  $\omega$  единиц разряда последней верной цифры:

$$\Delta a \leq \omega \cdot 10^{m-n+1}. \quad (5)$$

При  $\omega = 1$  ( $\omega = 0,5$ ) цифры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называются верными в широком(узком) смысле.

Аналогичного рода зависимость можно установить между количеством верных значащих цифр и относительной погрешностью:

$$\delta a \leq \frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n}, \quad n > 1. \quad (6)$$

Рассмотрим ОБЩУЮ ЗАДАЧУ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ.

Вычисляется значение функции  $n$  переменных  $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в некоторой точке  $A(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , координаты которой известны лишь приближенно. Требуется определить получающуюся при этом погрешность.

Приведем одно из возможных решений сформулированной задачи. Пусть  $a_i$  и  $\Delta a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) есть приближенные значения и их погрешности для координат точки  $A$ , а  $u = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  - приближенное значение искомой величины  $U = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Применяя теорему Лагранжа о приращении функции, для абсолютной величины разности точного и приближенного значений можно получить следующую оценку :

$$|U - u| = |f(A_1, A_2, \dots, A_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)| \leq \sum_{i=1}^n B_i \Delta a_i, \quad (7)$$

где  $B_i = \max_P \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$ , а область  $P$  есть область возможных значений координат

$$A_i: P = \{A_i: a_i - \Delta a_i \leq A \leq a_i + \Delta a_i; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Если функция  $f$  имеет непростую структуру, то получение  $B_i$  может оказаться сложной задачей. Поэтому, используя малость области  $P$  изменения параметров, в практических расчетах полагают

$$B_i \approx b_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{и} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \Delta a_i \quad (8)$$

Рассмотрим, какой вид приобретет формула (8) применительно к некоторым функциям, наиболее часто встречающимся в практике расчетов.

1. Алгебраическая сумма приближенных слагаемых -

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \Delta a_i. \quad (9)$$

2. Произведение приближенных множителей -

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$\delta u = \sum_{i=1}^n \delta a_i. \quad (10)$$

3. Частное -

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2};$$

$$\delta u = \delta a_1 + \delta a_2.$$

4. Степень-

$$f(x) = x^m, \quad m > 0; \quad (12)$$

$$\delta u = m \cdot \delta a.$$

5. Корень -

$$f(x) = \sqrt[m]{x}, \quad m > 0;$$

$$\delta u = \frac{\delta a}{m}. \quad (13)$$

В вычислительной практике важное значение имеет ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ - определение допустимых погрешностей приближенных значений аргументов, позволяющих вычислить значение функции с погрешностью, не превышающей заданного  $\varepsilon$ .

В такой постановке задача является неопределенной, поскольку можно найти бесчисленное множество значений  $\Delta a_i$ , обеспечивающих выполнение неравенства

$$\Delta u \leq \varepsilon. \quad (14)$$

Поэтому необходимо наложить дополнительные требования на искомые величины  $\Delta a_i$ , диктуемые конкретной ситуацией.

Например, потребуем, чтобы вклад в суммарную погрешность каждого слагаемого левой части (14) был одинаков, то есть



$$b_1 \Delta a = b_2 \Delta a_2 = \dots = b_n \Delta a_n \leq \varepsilon / n .$$

Выписанное условие часто называют ПРИНЦИПОМ РАВНЫХ ВЛИЯНИЙ, для которого очевидно

$$\Delta a_i \leq \frac{\varepsilon}{n \cdot b_i} ; i = 1, 2, \dots, n . \quad (15)$$

В случаях, когда все аргументы имеют одинаковую размерность, можно предположить, что

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \dots = \Delta a_n .$$

Эти условия называют ПРИНЦИПОМ РАВНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ, согласно которому из соотношения (14) имеем

$$\Delta a_i \leq \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n b_i} ; i = 1, 2, \dots, n . \quad (16)$$

Аналогично можно построить ПРИНЦИП РАВНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ, определяемый соотношениями

$$\delta a_1 = \delta a_2 = \dots = \delta a_n . \quad (17)$$

Следуя условию (17), из соотношения (14) имеем:

$$\Delta a_i \leq \frac{\varepsilon \cdot |a_i|}{\sum_{i=1}^n b_i \cdot |a_i|} ; i = 1, 2, \dots, n . \quad (18)$$

### ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ.

Задача 1. Дано приближенное число  $a = 88,325$  и известно, что у этого числа три верных значащих цифры в широком(узком) смысле. Оценить абсолютную и относительную погрешность в обоих случаях.

Решение. Поскольку у числа  $a$  три верные цифры в широком(узком) смысле, то абсолютная погрешность данного числа не превосходит единицы (половины единицы) последнего верного разряда, т.е.

$$\Delta a \leq \omega \cdot 10^{m-n+1} = 0,1 \cdot \omega = \begin{cases} 0,1 & \omega = 1; \\ 0,05 & \omega = 0,5. \end{cases}$$

$$\delta a \leq \frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n} = 0,0013 \cdot \omega = \begin{cases} 0,002 & \omega = 1; \\ 0,00065 & \omega = 0,5. \end{cases}$$

Задача 2. Дано приближенное число  $a = 2,7182$  и его абсолютная погрешность  $\Delta a = 0,007$ .

Определить, какие значащие цифры приближенного числа будут верными в широком(узком) смысле.

Решение. В силу соотношения (5) имеем:

$$0,007 \leq \omega \cdot 10^{0-n+1}.$$

Решение этого неравенства есть

$$n \leq 3 \text{ при } \omega = 1;$$

$$n \leq 2 \text{ при } \omega = 0,5.$$

Таким образом, у приближенного числа  $a = 2,7182$  по крайней мере три верных знака в широком смысле и два верных знака в узком смысле. Про остальные цифры мы не можем сказать, верные они или нет.

Задача 3. Дано приближенное число  $a = 2,7182$  и его относительная погрешность  $\delta a = 1\%$ .

Определить, какие значащие цифры приближенного числа будут верными в широком(узком) смысле.

Решение.

Определим  $\Delta a = \delta a \cdot |a| \approx 0,028$

и потребуем выполнения неравенства (5):

$$0,028 \leq \omega \cdot 10^{-n+1}.$$

Решив это неравенство, получим

$$n \leq 2 \quad \text{при} \quad \omega = 1 \quad \text{и} \quad \omega = 0,5.$$

Таким образом, у приближенного числа по крайней мере два верных знака в широком и узком смысле. Про остальные цифры мы не можем сказать, верные они или нет.

Задача 4. Со сколькими верными знаками в широком(узком) смысле следует вычислить  $\sqrt{21} = 4, \dots$ , чтобы

а) абсолютная погрешность не превышала 0,007;

б) относительная погрешность не превышала 1%?

Решение.

а) Если у приближенного числа будет  $n$  верных знаков в смысле  $\omega$ , то его абсолютная погрешность не будет превышать  $\omega \cdot 10^{m-n+1}$ . Поэтому  $n$  следует выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство:

$$\omega \cdot 10^{m-n+1} \leq \varepsilon,$$

принимающее для данной задачи следующий вид:

$$\omega \cdot 10^{-n+1} \leq 0,007.$$

Решая его при  $\omega = 1$ , получаем  $n \geq 4$ , а при  $\omega = 0,5$  —  $n \geq 3$ .

Следовательно, для того, чтобы абсолютная погрешность приближенного числа  $a = \sqrt{21}$  не превышала 0,007, необходимо взять не менее четырех верных знаков в широком смысле: 4,582 (или трех верных знаков в узком смысле: 4,58).

б) Если у приближенного числа  $a$  будет  $n$  верных знаков в смысле  $\omega$ , то его относительная погрешность не будет превышать  $\frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n}$ . Поэтому  $n$  следует выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n} \leq \delta,$$

принимающее для данной задачи следующий вид:

$$\frac{\omega}{4} 10^{1-n} \leq 0,01.$$

Решая его при  $\omega = 1$  и  $\omega = 0,5$ , получаем один и тот же результат:

$n \geq 3$ . Следовательно, для того, чтобы относительная погрешность приближенного значения  $a = \sqrt{21}$  не превышала 1%, необходимо взять не менее трех верных знаков в широком и узком смысле: 4,58.

Задача 5. Вычислить значение  $y = \lg \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} + e^{\frac{3}{2}}$  и оценить абсолютную

погрешность результата, взяв приближенные значения аргументов с четырьмя верными знаками.

Решение. В формулу для вычисления  $y$  входят три приближенных аргумента:

$x_1 = \sqrt{5}$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = e$ . Возьмем их значения с четырьмя верными знаками.

$x_1 = 2,236$  ;  $x_2 = 3,142$  ;  $x_3 = 2,718$

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,0005$ .

Вычислим приближенное значение функции

$$y = \lg x_1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}} + x_3^{3/2} = 5,513216.$$

Согласно (8)

$$\Delta y = b_1 \Delta x_1 + b_2 \Delta x_2 + b_3 \Delta x_3, \quad \text{где}$$

$$b_1 = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| = \frac{\lg e}{x_1} = \frac{0,4343}{2,236} = 0,1942 \quad ;$$

$$b_2 = \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_2^4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3,142^4}} = 0,0724 \quad ;$$

$$b_3 = \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| = \frac{3}{2} \sqrt{x_3} = \frac{3}{2} \sqrt{2,718} = 2,4730$$

и, следовательно,

$$\Delta y = (0,1924 + 0,0724 + 2,4730) \cdot 0,0005 = 0,00137.$$

Итак, результат  $y = 5,513216$  имеет абсолютную погрешность  $\Delta y = 0,00137$ , т.е. три верных знака.

Задача 6. С каким числом верных знаков следует взять значения аргументов

функции  $y = \lg \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} + e^{3/2}$ , чтобы вычисленное значение этой функции имело 4 верных знака?

Решение. Исходя из приближенных значений  $x_1 = \sqrt{5} = 2,2$  ;  $x_2 = \pi = 3,1$  ;  $x_3 = e = 2,7$ , определим приближенные значения функции и ее частных производных.

$$y = \lg 2,2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3,1}} + 2,7^{3/2} = 5,465 ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,197 \quad ; \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| = 0,074 \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = 2,46.$$

Абсолютная погрешность величины  $y$  удовлетворяет неравенству (5):

$$\Delta y \leq \frac{1}{2} 10^{0-4+1} = 0,0005 .$$

Используя предположение о равенстве абсолютных погрешностей аргументов, имеем, согласно (16) :

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \leq \frac{\varepsilon}{\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right|} = \frac{0,0005}{0,197 + 0,074 + 2,465} = 0,183 \cdot 10^{-3} .$$

Таким образом, каждый из приближенных аргументов следует взять с пятью верными знаками.

Задача 7. Вычислить значение функции  $y = \frac{\sqrt{e} \cdot \sin^3 \sqrt[3]{11}}{\pi^2} + \lg(\operatorname{tg} 20^\circ)$  и

оценить абсолютную погрешность результата, взяв значения аргументов с четырьмя верными знаками.

Решение. В формулу для вычисления  $y$  входят четыре аргумента:  $x_1 = e$  ;  $x_2 = \sqrt[3]{11}$  ;  $x_3 = \pi$  ;  $x_4 = \operatorname{tg} 20^\circ$  ; Их приближенные значения с

четырьмя верными знаками:  $x_1=2,718$  ;  $x_2 = 2,222$  ;  $x_3 = 3,142$  ;  $x_4 = 0,3640$  ;  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,0005$ ;  $\Delta x_4 = 0,00005$ .

Представим функцию  $y$  как сумму двух функций:

$$y = y_1 + y_2 ,$$

где

$$y_1 = \frac{\sqrt{x_1} \cdot y_3}{x_3^2}; y_2 = \lg x_4; y_3 = \sin x_2 .$$

Вычислим приближенные значения этих функций

$$y_3 = \sin 2,222 = 0,7954;$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2,718} \cdot 0,7954}{3,142^2} = 0,1328 ;$$

$$y_2 = \lg 0,3640 = -0,4389;$$

$$y = y_1 + y_2 = -0,3061.$$

Согласно (8)

$$\Delta y_2 = \left| \frac{dy_2}{dx_4} \right| \cdot \Delta x_4 = \frac{\lg e}{x_4} \Delta x_4 = \frac{0,4343}{0,3640} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} = 0,60 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta y_3 = \left| \frac{dy_3}{dx_2} \right| \cdot \Delta x_2 = |\cos x_2| \cdot \Delta x_2 = 0,6061 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 3,031 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютную погрешность  $\Delta y_1$  выразим через относительную

$$\Delta y_1 = \delta y_1 \cdot |y_1| ,$$

а для вычисления  $\delta y_1$  удобно воспользоваться равенствами (10), (12), (13) :

$$\delta y_1 = \frac{1}{2} \delta x_1 + \delta y_3 + \delta x_3 ,$$

$$\delta x_1 = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} = \frac{0,0005}{2,718} = 0,000184 ;$$

$$\delta y_3 = \frac{\Delta y_3}{|y_3|} = \frac{0,000303}{0,7954} = 0,000381 ;$$

$$\delta x_3 = \frac{\Delta x_3}{|x_3|} = \frac{0,0005}{3,142} = 0,000159 ;$$

$$\delta y_1 = 1/2 \cdot 0,000184 + 0,000381 + 2 \cdot 0,000159 = 0,000791;$$

$$\Delta y_1 = 0,1328 \cdot 0,000791 = 0,000105.$$

Согласно (9) имеем

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 0,000105 + 0,000060 = 0,000165.$$

Таким образом, приближенное значение  $y = -0,3061$  имеет три верных знака.

Задача 8. С каким числом верных знаков следует взять значения аргументов функции  $y = \frac{\sqrt{e} \sin \sqrt[3]{11}}{\pi^2} + \lg \operatorname{tg} 20^\circ$ , чтобы вычисленное значение функции имело три верных знака?

Решение. Положим, как в задаче 7,  $x_1 = e$  ,  $x_2 = \sqrt[3]{11}$  ,  $x_3 = \pi$ ,

$x_4 = \operatorname{tg} 20^\circ$ ;  $y = y_1 + y_2$ ;  $y_1 = \frac{\sqrt{x_1 \cdot y_3}}{x_3}$ ;  $y_2 = \lg x_4$ ;  $y_3 = \sin x_2$ . Взяв предварительно

приближенные аргументы с двумя верными знаками:  $x_1 = 2,7$ ;  $x_2 = 2,2$ ;  $x_3 = 3,1$ ;  $x_4 = 0,36$ , вычислим приближенные значения функций:

$$y_3 = \sin 2,2 = 0,79$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2,7 \cdot 0,79}}{(3,1)^2} = 0,13$$

$$y_2 = \lg 0,36 = -0,44$$

$$y = y_1 + y_2 = 0,13 - 0,44 = -0,31.$$

По условию (5)

$$\Delta y \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{1-3+1} = 0,0005.$$

Воспользовавшись (9) имеем

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 \leq 0,0005$$

откуда, предполагая, что  $\Delta y_1 = \Delta y_2$  получим согласно (8)

$$\Delta y_2 = \frac{\lg e \cdot \Delta x_4}{x_4} \leq 0,00025$$

и  $\Delta x_4 \leq 0,00025 \cdot \ln 10 \cdot x_4 = 0,00025 \cdot 2,303 \cdot 0,35 = 0,00020$ .

Вычислим теперь предельно допустимое значение для относительной погрешности

$\delta y_1$ . Т.к.  $\delta y_1 = \frac{\Delta y_1}{|y_1|}$ , а  $\Delta y_1 \leq 0,00025$ ,

то  $\delta y_1 \leq 0,00025 / |y_1| = 0,00025 / 0,13 = 0,0019$ .

Согласно (10)

$$\delta y_1 = 0,5 \delta x_1 + \delta y_3 + 2 \delta x_3 \leq 0,0019.$$

Предполагая, что  $\delta x_1 = \delta y_3 = \delta x_3$ , получим

$$\delta x_1 = \delta y_3 = \delta x_3 \leq 0,0019 / 3,5 = 0,00054.$$

Для  $x_1$  имеем

$$\Delta x_1 = \delta x_1 \cdot |x_1| \leq 0,00054 \cdot 2,7 = 0,0014...$$

Для  $y_3 = \sin x_2$

$$\Delta y_3 = \delta y_3 \cdot |y_3| \leq 0,00054 \cdot 0,79 = 0,00042...$$

но  $\Delta y_3 = |\cos x_2| \cdot |x_2|$ ,

откуда

$$\Delta x_2 \leq \frac{0,00042...}{|\cos x_2|} = \frac{0,00042...}{0,589} = 0,00071...$$

Для  $x_3$  –

$$\Delta x_3 = \delta x_3 \cdot |x_3| \leq 0,00054 \cdot 3,1 = 0,0016...$$

Итак, получили:  $\Delta x_1 \leq 0,0014...$ ;  $\Delta x_2 \leq 0,00071...$ ;  $\Delta x_3 \leq 0,0016...$ ;  $\Delta x_4 \leq 0,00020...$ ; откуда следует, что значения всех аргументов необходимо взять с четырьмя верными знаками.

### ***A1. Прямая задача теории погрешностей.***

Вычислить значение выражения, беря значения аргументов с четырьмя верными знаками. Оценить погрешность результата.

$$1. y = \frac{\ln(\operatorname{tg} 20^\circ)}{\sqrt{\pi} \cdot \lg \sqrt{5}} + \sqrt[3]{e};$$

$$2. y = \frac{\cos \sqrt{5}}{\ln \pi \cdot \sqrt{30}} + e^2;$$

$$3. y = \frac{\sin \sqrt{11}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{\lg \sqrt{19}};$$

$$4. y = \frac{\lg \sqrt{5} + e}{\sqrt{29} \cdot \sin \pi^2};$$

$$5. y = \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{e} \cdot \lg \pi^3}{\operatorname{tg} 31^\circ};$$

$$6. y = \frac{\lg(\cos 50^\circ)}{\sqrt{17}} + \frac{\sqrt[3]{e}}{\sin \sqrt{3}};$$

$$7. y = \frac{\lg \sqrt{11}}{\pi^2} + \sqrt{7} \cdot \operatorname{tge};$$

$$8. y = \frac{e^2 + \lg \sqrt{3}}{\sin 11^\circ + \sqrt{\pi}};$$

$$9. y = \frac{e^{0.5} \cdot \sin(\ln 5) + \ln \sqrt{\pi}}{\operatorname{tg} 29^\circ};$$

$$10. y = \frac{\cos 22^\circ}{\lg \sqrt{\pi} \cdot \ln \sqrt{2}} + e^2;$$

$$11. y = \frac{\sqrt{2} + \sin 22^\circ}{\lg \sqrt{\pi} + \cos 12^\circ};$$

$$12. y = \frac{\sqrt{2} \cdot \ln(\cos 25^\circ)}{e^3} + \sqrt{\pi};$$

$$13. y = \frac{\sqrt{3} \cdot \ln \sqrt{2} + \cos \sqrt{\pi}}{\sin 31^\circ};$$

$$14. y = \frac{\cos \sqrt{\pi} + \ln(\sin 15^\circ)}{\lg e^2 + \sqrt{21}};$$

$$15. y = \frac{\sqrt[3]{e}}{\cos 13^\circ} + \frac{\sin \sqrt{11}}{\ln \pi^2};$$

$$16. y = \frac{\sin \sqrt{e} + \lg \sqrt{11}}{\sqrt{\pi} + \operatorname{tg} 7^\circ};$$

$$17. y = \frac{\sin e + \cos 13^\circ}{\lg \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{\pi}};$$

$$18. y = \frac{e^3 + \sqrt{2}}{\lg \sqrt{\pi} \cdot \sin 33^\circ};$$

$$19. y = \sqrt{13} \cdot \lg(\cos 23^\circ) + \pi^3 \cdot \sin \sqrt{3};$$

$$20. y = \frac{\lg e^3 + \cos \sqrt{3} \cdot \ln \pi}{\sin 32^\circ};$$

$$21. y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt[3]{e} \cdot \lg \pi^3}{\cos 21^\circ};$$

$$22. y = \frac{\sqrt[3]{7} + \sin e^2}{\ln \sqrt{2} + \cos 21^\circ};$$

$$23. y = \frac{\lg(\cos 32^\circ)}{\sqrt[3]{\pi}} + \sqrt{e} \cdot \operatorname{tg} 5;$$

$$24. y = \frac{\sqrt{e} + \cos(\lg 5)}{\pi^3 + \sqrt{27}};$$

$$25. y = \frac{\lg \sqrt{\pi} + e^3}{\sin \sqrt{2} + \cos 20^\circ}.$$

### ***A2. Обратная задача теории погрешностей.***

С каким числом верных знаков следует взять значения аргументов функции из задачи A1, чтобы значение этой функции имело четыре верных знака?

## 4.2. Интерполирование.

### **Постановка задачи интерполирования. Полином Лагранжа, Стирлинга, Бесселя, Ньютона. Обратное интерполирование.**

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , непрерывную на интервале  $[a, b]$  и заданную некоторыми своими значениями  $y_i=f(x_i)$ ,  $i=0, 1, \dots, n$  для соответствующих значений аргумента  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Необходимо найти значение этой функции в точке  $x^* \in [a, b]$ ,  $x^* \neq x_i$  и оценить погрешность полученного приближенного значения.

Один из возможных путей решения поставленной задачи заключается в следующем:

- 1) для функции  $f(x)$  по значениям  $y_i$  в узлах  $x_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$  строится многочлен степени не выше  $n$

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n, \quad (1)$$

принимаящий в точках  $x_i$  значения  $y_i$ , т.е. значения коэффициентов многочлена  $a_i$  – находятся из условия:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

Этот многочлен называется интерполяционным. Он всегда существует и единственен.

$$\text{Функция } f(x) \text{ представляется в виде: } f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

где  $R_n(x)$  – остаточный член интерполяционной формулы. Если функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $(n+1)$  на  $[a, b]$ , то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad \xi \in (a, b). \quad (3)$$

2) Вычисляется значение  $P_n(x^*)$ . Если значения  $y_i$  заданы приближенно или же по каким-либо причинам вычисления не могут быть выполнены абсолютно точно, то фактически вычисляется лишь приближенное значение  $\bar{P}_n(x^*)$  для точного значения  $P_n(x^*)$ .

$$3) \text{ Приближенно принимается, что } f(x^*) \approx \bar{P}_n(x^*).$$

4) Оценивается погрешность метода по остаточному члену интерполяционной формулы:

$$R_n(x^*) \leq \Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x^* - x_0)(x^* - x_1)\dots(x^* - x_n)|, \quad (4)$$

$$\text{где } M_{n+1} = \max_{[x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (5)$$

5) Оценивается погрешность вычисления по погрешностям приближенных значений исходных данных:

$$\Delta_2 \geq |P_n(x^*) - \bar{P}_n(x^*)|. \quad (6)$$

Таким образом, полная погрешность приближенного значения есть

$$\Delta \geq \Delta_1 + \Delta_2 \geq |f(x^*) - \bar{P}_n(x^*)|. \quad (7)$$

Для достаточно гладких функций и достаточного количества узлов на интервале интерполирования погрешность метода будет достаточно мала. При достаточной точности исходных значений  $y_i$  и достаточной точности вычислений  $\bar{P}_n(x^*)$  вычислительная погрешность будет также достаточно мала; следовательно,

приближенное значение  $\bar{P}_n(x^*)$  в этом случае будет достаточно мало отличаться от точного значения  $f(x^*)$ .

При решении практических задач интерполяционный многочлен строят в различных формах.

Одна из таких форм – интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_i. \quad (8)$$

Остаточная погрешность значения  $L_n(x^*)$ , вычисленного по формуле (8), оценивается формулой (4), а вычислительная погрешность

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^n \left| \frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)\dots(x^*-x_{i-1})(x^*-x_{i+1})\dots(x^*-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \right| \Delta y_i, \quad (9)$$

где  $\Delta y_i$  – погрешность исходных данных (значений функции в узлах).

Обычно интерполяционный полином составляется не по всем узлам таблицы, а лишь по некоторым, находящимся вблизи  $x^*$ .

В случае равноотстоящих узлов, то есть когда

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i=0,1,\dots,n, \quad (10)$$

где  $h$  - шаг интерполяции, целесообразно использовать интерполяционные полиномы Стирлинга, Бесселя и Ньютона.

Для более компактной записи этих полиномов обычно вводят понятие конечных разностей.

Будем называть конечными разностями первого порядка функции  $y=f(x)$  в точке  $x_i$  следующие величины :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad (11)$$

а конечные разности  $k$ -го порядка определяются такими рекуррентными соотношениями :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i. \quad (12)$$

Конечные разности функции  $y=f(x)$  удобно записать в виде таблицы 1 :

Таблица 1.

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$x_{-2}$	$y_{-2}$	$\Delta y_{-2}$			
$x_{-1}$	$y_{-1}$	$\Delta y_{-1}$	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$		
$x_2$	$y_2$				
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.



Например,

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
30°	0,5000				
		0,0736			
35°	0,5736		-0,0044		
		0,0692		-0,0005	
40°	0,6428		-0,0049		0
		0,0643		-0,0005	
45°	0,7071		-0,0054		0,0002
		0,0589		-0,0003	
50°	0,7660		-0,0057		-0,0004
		0,0532		-0,0007	
55°	0,8192		-0,0064		
		0,0468			
60°	0,8660				

Если все исходные значения  $y_i$  заданы с одной и той же погрешностью  $\Delta^*$ , то эта погрешность распространяется на разности порядка  $m$  с коэффициентом  $2^m$  и быстро растет с ростом  $m$ :  $\Delta^*(\Delta^m y_i) = 2^m \cdot \Delta^*$  (это легко показать, если вспомнить определение погрешностей арифметических действий). А так как соответствующие конечные разности  $\Delta^m y_i$  будут убывать с ростом  $m$ , то наступит такая ситуация, когда все погрешности конечных разностей станут сравнимы или больше самих конечных разностей, и их использование станет нецелесообразным. Поэтому порядок последних конечных разностей, которые еще целесообразно использовать в вычислениях, называют порядком правильности таблицы конечных разностей, который, в свою очередь, определяет максимально допустимый порядок интерполяционного полинома, строящегося для данной функции с заданным шагом интерполирования.

Обратимся вновь к формуле (4) оценки остаточной погрешности интерполяционного полинома. На практике точно определить производную  $f^{(n+1)}(x)$  и ее максимальное по модулю значение  $M_{n+1}$  бывает, как правило, невозможно, так как функция обычно задается лишь в виде таблицы своих значений. Поэтому прибегают к приближенной оценке  $M_{n+1}$ . Известно, что для функций,  $m$  раз непрерывно дифференцируемых, конечные разности порядка по  $m$  включительно обладают следующим свойством:

$$\Delta^m y_i = h^m \cdot f^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_i, x_{i+m}).$$

На основании этого свойства

$$M_{n+1} \approx \frac{\max_{\{a,b\}} |\Delta^{n+1} y_i|}{h^{n+1}}. \quad (13)$$

Перейдем к рассмотрению названных форм интерполяционных полиномов для функции  $y=f(x)$ , заданной своими значениями  $y_i$  в узлах  $x_i$  равномерной сетки с шагом  $h$ .

Интерполяционный полином Бесселя и Стирлинга.

Пусть точка  $x^*$  расположена вблизи от некоторого узла, который назовем  $x_0$ . Для интерполирования выберем узлы, симметричные относительно  $x_0$ :

$$\dots x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$$

Введем в рассмотрение новую переменную

$$t = \frac{x - x_0}{h}. \quad (14)$$

Выбор полинома осуществляется исходя из требования получения минимальной величины погрешности интерполяции и определяется величиной  $|t^*|$ :

$$\text{Если } |t^*| = \frac{|x^* - x_0|}{h} \leq 0,25, \quad (15)$$

то используется полином Стирлинга, если

$$0,25 < t^* < 0,75, - \quad (16)$$

полином Бесселя.

Одно из условий (15) или (16) может быть обеспечено выбором соответствующего узла таблицы в качестве  $x_0$ . При этом полином Стирлинга - полином четной степени - строится по нечетному числу узлов; полином Бесселя - нечетной степени - строится по четному числу узлов.

Итак, интерполяционный полином Стирлинга строится в виде:

$$\begin{aligned} S_{2k}(t) = & y_0 + \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} t + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t^2 + \\ & + \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} \frac{t(t^2 - 1)}{3!} + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} t^2(t^2 - 1) + \\ & + \frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} \frac{t(t^2 - 1)(t^2 - 2^2)}{5!} + \frac{\Delta^6 y_{-3}}{6!} t^2(t^2 - 1)(t^2 - 2^2) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Оценка (4) остаточной погрешности значения  $S_{2k}(t^*)$  может быть представлена в виде

$$\Delta_1 = \frac{M_{2k+1}}{(2k+1)!} h^{2k+1} \left| t^* \prod_{i=1}^k (t^{*2} - i^2) \right| \quad (18)$$

или, согласно (13), -

$$\Delta_1 = \frac{\max_{[a,b]} |\Delta^{2k+1} y_i|}{(2k+1)!} \left| t^* \prod_{i=1}^k (t^{*2} - i^2) \right|.$$

Оценим теперь вычислительную погрешность результата

$$S_k(t^*) = y_0 + \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} t^* + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t^{*2} + \dots$$

Как было сказано выше, абсолютная погрешность конечной разности порядка  $m$  есть  $2^m \cdot \Delta^*$ , поэтому

$$\Delta_2 = \Delta^* (1 + 2 |t^*| + 2 t^{*2} + \dots) \quad (19)$$

Если выполняется условие (16), то есть точка интерполирования находится вблизи середины отрезка между узлами  $x_0$  и  $x_1$  (если так пронумерованы эти узлы), и строится полином нечетной степени, то следует использовать узлы, симметричные относительно середины отрезка между  $x_0$  и  $x_1$ , то есть относительно точки  $t=1/2$ .

Интерполяционный полином Бесселя для узлов

$\dots x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$

строится в следующем виде:

$$B_{2k+1} = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{\Delta y_0}{1!} \left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} \cdot \frac{t(t-1)}{2!} + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!} \left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1) + \dots \quad (20)$$

Оценки остаточной и вычислительной погрешностей результата  $B_{2k+1}(t^*)$  имеют соответственно следующий вид :

$$\Delta_1 = \frac{M_{2k+2}}{(2k+2)!} h^{2k+2} \left| \prod_{i=-k}^{k+1} (t^* - i) \right| = \frac{\max_{[a,b]} |\Delta^{2k+2} y_i|}{(2k+2)!} \left| \prod_{i=-k}^{k+1} (t^* - i) \right|, \quad (21)$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left(1 + 2 \left| t^* - \frac{1}{2} \right| + 2 \left| t^* (t^* - 1) \right| + \frac{4}{3} \left| \left(t^* - \frac{1}{2}\right) t^* (t^* - 1) \right| + \dots \right)$$

### **Интерполяционные полиномы Ньютона.**

I и II интерполяционные полиномы Ньютона используют для определения значений функции в точках, находящихся соответственно в начале и конце таблицы интерполирования. В этом случае не всегда имеется возможность выбора достаточного количества узлов (слева или справа) для построения необходимых конечных разностей  $S_{2k}, B_{2k+1}$ .

Пусть точка  $x^*$  расположена вблизи первого узла интерполирования  $x_0$  на сетке  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Тогда следует использовать первую интерполяционную формулу Ньютона :

$$N_n^I(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1). \quad (22)$$

$t$  определяется формулой (14);

$x_0$  - ближайший к  $x^*$  узел слева.

Оценки погрешностей приближенного значения  $N_n^I(t^*)$  могут быть представлены в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot |t^*(t-1)\dots(t-n)| \approx \frac{\max_{[a,b]} |\Delta^{n+1} y_i|}{(n+1)!} \cdot |t^*(t^*-1)\dots(t^*-n)| \quad (23)$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left(1 + |t^*| \cdot 2 + 2 |t^* (t^* - 1)| + \dots + 2^n \frac{|t^* (t^* - 1)\dots(t^* - n)|}{n!}\right)$$

Если точка интерполирования  $x^*$  расположена вблизи последнего узла сетки  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то используют второй интерполяционный полином Ньютона:

$$N_n^{II}(t) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} t(t+1)(t+2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1)\dots(t+n-1), \quad (24)$$

где  $x_n$  - ближайший к  $x^*$  узел справа,  $t = \frac{x^* - x_n}{h}$ .

Оценки погрешностей приближенного значения  $N_n^{II}(t^*)$  можно записать в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} |t^*(t^*+1)\dots(t^*+n)| \approx \frac{\max_{[a;b]} |\Delta^{n+1} y_i|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (t^*+i) \right| \quad (25)$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot (1 + 2|t^*| + 2|t^*(t^*+1)| + \dots + \frac{2^n}{n!} |t^*(t^*+1)\dots(t^*+n-1)|)$$

### Обратное интерполирование

Постановка задачи.

Рассмотрим функцию  $y=f(x)$ , непрерывную на интервале  $[a,b]$ , заданную в виде таблицы своих значений  $y_i$  для соответствующих значений аргумента  $x_i$ .

Необходимо найти, в какой точке  $x^*$  из интервала  $(x_{k-1}, x_k)$  значение функции равно  $y^*$  из интервала  $(y_{k-1}, y_k)$ . При этом предполагается, что интервал  $(x_{k-1}, x_k)$  настолько мал, что значение  $x^*$  будет единственным.

Фактически мы имеем дело с задачей определения корня уравнения:

$$f(x) = y^* \quad (26)$$

Одним из возможных путей решения этой задачи является аппроксимация функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом  $P_n(x)$  и замена уравнения (26) уравнением:

$$P_n(x) = y^* \quad (27)$$

Действительный корень  $\tilde{X}^* \in (x_{k-1}, x_k)$  уравнения (27) является приближенным значением корня  $X^*$  уравнения (26).

Поэтому принимаем, что

$$X^* \approx \tilde{X}^*.$$

Погрешность значения  $\tilde{X}^*$  определяется двумя моментами: построением интерполяционного полинома и решением уравнения (27) и может быть представлена в виде:

$$|X^* - \tilde{X}^*| \leq \frac{\Delta}{m_1} + \varepsilon, \quad (28)$$

где  $\Delta$  - суммарная погрешность интерполирования,

$$0 < m_1 \leq \min_{[x_{k-1}, x_k]} |f'(x)|,$$

$\varepsilon$  - погрешность решения уравнения (27).

Если заданных значений функции, для которых надо найти соответствующие значения аргументов, много, то имеет смысл пользоваться следующим способом решения задачи обратного интерполирования.

Пусть существует гладкая функция  $x=g(y)$ , обратная к  $f(x)$ , непрерывная со своими производными на минимальном интервале, содержащем значения  $y_i=f(x_i)$ ,  $i=0,1,\dots$ . В этом случае достаточно вычислить значение обратной функции  $g(y)$  в точке  $y^*$ , используя методы прямого интерполирования, т.е.  $x^* = g(y^*) \approx L_n(y^*)$ .

Остаточную погрешность полученного значения  $L_n(y^*)$  можно согласно (4) оценить следующим образом

$$\Delta_1 = \frac{\max_{[y_0; y_n]} |g^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |(y^* - y_0)(y^* - y_1)\dots(y^* - y_n)| \quad (29)$$

Оценка вычислительной погрешности в этом случае будет иметь более сложный по сравнению с (9) вид, поскольку от приближенных величин  $y_0, y_1, \dots, y_n$  зависят теперь множители Лагранжа

$$L_i^{(n)} = \frac{(y^* - y_0)(y^* - y_1)\dots(y^* - y_{i-1})(y^* - y_{i+1})\dots(y^* - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1)\dots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\dots(y_i - y_n)}.$$

Приведенный способ является более эффективным в сравнении с ранее изложенным. Однако его недостатком является требование гладкой функции  $g(y)$ , что далеко не всегда выполняется.

### Типовые задачи

Задача 1. Пользуясь известными значениями функциями  $y = \sqrt{x}$  в точках  $x=14,16,19,21$ , вычислить  $\sqrt{15}$  и оценить погрешность.

Решение. В качестве интерполяционного полинома выбираем полином Лагранжа, так как узлы интерполирования не являются равноотстоящими.

Используя формулу (8), определяем множители Лагранжа:

$$L_0^{(3)} = \frac{(15-16)(15-19)(15-21)}{(14-16)(14-19)(14-21)} = \frac{12}{35}, L_1^{(3)} = \frac{(15-14)(15-19)(15-21)}{(16-14)(16-19)(16-21)} = \frac{4}{5},$$

$$L_2^{(3)} = \frac{(15-14)(15-16)(15-21)}{(19-14)(19-16)(19-21)} = -\frac{1}{5}, L_3^{(3)} = \frac{(15-14)(15-16)(15-19)}{(21-14)(21-16)(21-19)} = \frac{2}{35}$$

Замечание. Отметим свойство множителей Лагранжа:  $\sum_{i=0}^n L_i^{(n)} = 1$ . Для того, чтобы найти значение функции с максимальной точностью, необходимо определить, с какой точностью следует брать значения функции  $y = \sqrt{x}$  в узлах, для этого определим погрешность метода, используя формулу (4):

$$\Delta_1 = \frac{M_4}{4!} |(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)|.$$

Находим

$$M_4 = \max_{[14;21]} |f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{14^7}},$$

$$\Delta_1 = \frac{15}{16 \cdot \sqrt{14^7} \cdot 24} |(15-14)(15-16)(15-19)(15-21)| < 0,9 \cdot 10^{-4}.$$

Далее вычисляем минимально возможную полную погрешность результата; имеем:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \leq 10^{-4}.$$

Теперь осталось определить вычислительную погрешность:

$$\Delta_2 \leq 10^{-4} - \Delta_1 = 10^{-4} - 0,9 \cdot 10^{-4} = 0,1 \cdot 10^{-4};$$

учитывая формулу (9) и предполагая, что все значения функции имеют одинаковую точность  $\Delta^*$ , имеем:

$$\sum_{i=0}^3 |L_i^{(3)}| = \frac{7}{5} = 1,4; \quad \Delta^* \leq \frac{10^{-4}}{1,4} = 0,71 \cdot 10^{-4}.$$

То есть значения функции в узлах берем с 5 знаками после запятой.

Записав далее таблицу исходных значений с требуемой точностью, вычисляем конечный результат:

$x_i$	14	16	19	21
$f(x_i)$	3,74166	4,00000	4,35890	4,58258

$$L_3(15) = \frac{12}{35} \cdot 3,74166 + \frac{4}{5} \cdot 4,00000 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 4,35890 + \frac{2}{35} \cdot 4,58258 = 3,87294$$

Ответ:  $\sqrt{15} = 3,87294 \pm 0,0001$ .

### Задача 2.

Составить соответствующие интерполяционные полиномы и вычислить в точках  $x_1^*=0,63$  и  $x_2^*=1,35$  значения функции  $f(x)=3^x$ , заданной в виде следующей таблицы, содержащей значения  $y_i$  с четырьмя верными в широком смысле знаками.

$x_i$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
$y_i$	1,732	2,280	3,000	3,948	5,196

Оценить погрешность результата.

Решение. Дополним заданную таблицу значениями конечных разностей:

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,50	1,732				
		0,548			
0,75	2,280		0,172		
		0,720		0,056	
1,00	3,000		0,228		0,016
		0,948		0,072	
1,25	3,948		0,300		
		1,248			
1,50	5,196				

Так как значение  $x_1^*=0,63$  расположено в начале таблицы, а  $x_2^*=1,35$  - в конце ее, то для вычисления значения  $f(x_1^*)$  следует использовать первый, а для вычисления значения  $f(x_2^*)$  - второй интерполяционные полиномы Ньютона.

Отметим, что конечная разность четвертого порядка приближенно равна своей погрешности. Поэтому функцию  $y=3^x$  с точки зрения вычислительной погрешности нецелесообразно аппроксимировать полиномом степени выше третьей, и, следуя формулам (22) и (24), имеем:

$$N_3^I(t_1^*) = 1,732 + 0,548 \cdot t_1^* + \frac{0,172}{2!} \cdot t_1^* (t_1^* - 1) + \frac{0,056}{3!} \cdot t_1^* (t_1^* - 1)(t_1^* - 2);$$

$$N_3^{II}(t_2^*) = 5,196 + 1,248 \cdot t_2^* + \frac{0,300}{2!} \cdot t_2^* (t_2^* + 1) + \frac{0,072}{3!} \cdot t_2^* (t_2^* + 1)(t_2^* + 2).$$

Вычислим значения  $t_1^*$  и  $t_2^*$ .

$$t_1^* = \frac{x_1^* - x_0}{h} = \frac{0,63 - 0,50}{0,25} = 0,52,$$

$$t_2^* = \frac{x_2^* - x_n}{h} = \frac{1,35 - 1,50}{0,25} = -0,60.$$

Таким образом, получим:

$$f(x_1^*) \approx N_3^I(0,52) = 1,998942,$$

$$f(x_2^*) \approx N_3^{II}(-0,60) = 4,407168.$$

Оценим погрешности по формулам (23) и (25):

$$\Delta_1(0,63) = \frac{4 \cdot (\ln 3)^4}{4!} \cdot (0,25)^4 \cdot 0,52 \cdot 0,48 \cdot 1,48 \cdot 2,48 = 0,0009;$$

$$\Delta_1(1,35) = \frac{5,2 \cdot (\ln 3)^4}{4!} \cdot (0,25)^4 \cdot 0,60 \cdot 0,40 \cdot 1,40 \cdot 2,40 = 0,001.$$

Учитывая, что все приведенные знаки у функции  $y=3^x$  верны в широком смысле, имеем:

$$\Delta^*(y_i) = 0,001; \quad \Delta^*(\Delta y_i) = 0,002;$$

$$\Delta^*(\Delta^2 y_i) = 0,004; \quad \Delta^*(\Delta^3 y_i) = 0,008.$$

Поэтому вычислительные погрешности суть:

$$\Delta_2(0,63) = 0,001 + 0,0011 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0031;$$

$$\Delta_2(1,35) = 0,001 + 0,0012 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0032.$$

Округлим полученные результаты до четырех знаков.

$$N_3^I(0,52) \approx 1,999;$$

$$N_3^{II}(-0,60) \approx 1,407.$$

Погрешности округления равны соответственно:

$$\Delta_3(0,63) = 0,0001;$$

$$\Delta_3(1,35) = 0,0002.$$

Суммируя погрешность метода, вычислительную погрешность и погрешность округления, получаем:

$$f(x_1^*) = 3^{0,63} = 1,999 \pm 0,0041;$$

$$f(x_2^*) = 3^{1,35} = 4,407 \pm 0,0044.$$

Заметим, что остаточные погрешности в данной задаче можно оценить с помощью конечных разностей. Для значения  $N_3^I(t_1^*)$  эта оценка имеет вид

$$\Delta_1(0,63) \approx \frac{0,016}{4!} \cdot 0,52 \cdot 0,48 \cdot 1,48 \cdot 2,48 = 0,0006,$$

а для значения  $N_3^{II}(t_2^*)$  -

$$\Delta_1(1,35) \approx \frac{0,016}{4!} \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 1,4 \cdot 2,4 = 0,0005.$$

### Задача 3.

Функция  $f(x)$  задана таблицей своих значений, верных в написанных знаках.

$x_i$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_i$	1,8221	2,0138	2,2255	2,4596	2,7183

$x_i$	1,1	1,2
$y_i$	3,0042	3,3201

Используя соответствующий интерполяционный полином, вычислить значения функции в точках  $x_1^* = 0,85$  и  $x_2^* = 0,98$ . Оценить погрешности результатов.

Решение. Так как мы имеем достаточное количество узлов, меньших и больших  $x_1^*$  и  $x_2^*$ , то для вычисления  $f(x_1^*)$  и  $f(x_2^*)$  следует использовать интерполяционный полином Стирлинга или интерполяционный полином Бесселя, а в качестве центрального узла выбирать такой, чтобы выполнялось одно из соотношений (15) и (16). Далее, в зависимости от того, какое из двух условий выполняется, применить соответственно формулу Стирлинга или Бесселя.

В нашей задаче для вычисления  $f(0,85)$  в качестве центрального узла выберем  $x_0 = 0,8$  ( $t_1^* = \frac{x_1^* - x_0}{h} = 0,5$ ) и воспользуемся формулой Бесселя, а для вычисления

$f(0,98)$  в качестве центрального узла выберем  $x_0 = 1,0$  ( $t_2^* = \frac{x_2^* - x_0}{h} = -0,2$ ) и воспользуемся формулой Стирлинга.

Составим таблицу конечных разностей, обращая внимание на то, что если абсолютная погрешность значения  $y_i$  есть  $0,5 \cdot 10^{-4}$ , то абсолютная погрешность конечных разностей порядка  $m$  есть  $0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 2^m$ .

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,6	1,8221				
		0,1917			
0,7	2,0138		0,0200		
		0,2117		0,0024	
0,8	2,2255		0,0224		-0,0002
		0,2341		0,0022	
0,9	2,4596		0,0246		0,0004
		0,2587		0,0026	
1,0	2,7183		0,0272		0,0002
		0,2859		0,0028	
1,1	3,0042		0,0300		
		0,3159			
1,2	3,3201				
<hr/>					
$\Delta^*(\Delta^m y_i)$	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008

Погрешность конечных разностей четвертого порядка больше абсолютных величин значений самих этих разностей, а это означает, что с точки зрения вычислительной погрешности функцию нецелесообразно аппроксимировать полиномом степени выше третьей.

Таким образом, так как полином Бесселя строится по четному числу узлов и является полиномом нечетной степени, а полином Стирлинга строится по нечетному числу узлов и является полиномом четной степени, то для вычисления  $f(x_1^*)$  построим полином Бесселя третьей степени, а для вычисления  $f(x_2^*)$  - полином Стирлинга второй степени.

Следуя формулам (20) и (17) и учитывая, что в формуле (20) будут отсутствовать слагаемые, содержащие множитель  $(t-1/2)$ , так как  $t_1^* = 1/2$ , получим:

$$f(0,85) \approx B_3(0,5) = \frac{2,2255 + 2,4596}{2} + \frac{0,0246 + 0,0224}{2} \cdot \frac{0,5(-0,5)}{2} = 2,339612;$$

$$f(0,98) \approx S_2(-0,2) = 2,7183 + \frac{0,2587 + 0,2859}{2} \cdot (-0,2) + \frac{0,0272}{2} \cdot (-0,2)^2 = 2,664384.$$

Оценим погрешности полученных результатов.

Погрешности метода равны соответственно

$$\Delta_1(0,85) = \frac{\max |\Delta^4 y_i|}{4!} |t_1^*(t_1^{*2} - 1)(t_1^* - 2)| = \frac{0,0004}{24} \cdot 0,5 \cdot 0,75 \cdot 1,5 = 0,00001$$

$$\Delta_1(0,98) = \frac{\max |\Delta^3 y_i|}{3!} |t_2^*(t_2^{*2} - 1)| = \frac{0,0028}{6} \cdot 0,2 \cdot 0,96 = 0,00009$$

а вычислительные погрешности -



$$\Delta_2(0,85) = 0,00005 \cdot (1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5) = 0,000075;$$

$$\Delta_2(0,98) = 0,00005 \cdot (1 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2^2) = 0,000074.$$

Округлим результаты до шести знаков.

$$f(0,85) \approx B_3(0,5) \approx 2,33961, \quad \Delta_3(0,85) = 0,000002;$$

$$f(0,98) \approx S_2(-0,2) \approx 2,66438, \quad \Delta_3(0,98) = 0,000004.$$

Суммируя для каждого результата погрешность метода, вычислительную погрешность и погрешность округления, получим

$$f(0,85) = 2,33961 \pm 0,000087; \quad f(0,98) = 2,66438 \pm 0,000168.$$

Задача 4. По заданной таблице значений функции  $y=f(x)$  определить, какому значению аргумента  $x^*$  соответствуют значения функции  $y_1^*=2,000$  и  $y_2^*=5,000$ .

$X_i$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
$y_i$	1,732	2,280	3,000	3,948	5,196

Решение. Так как значение  $y_1^*=2,000$  расположено в начале таблицы, а  $y_2^*=5,000$  - в конце ее, то для вычисления  $x_1^*$  следует использовать первый, а для вычисления  $x_2^*$  - второй интерполяционные полиномы Ньютона.

Дополним заданную таблицу значениями конечных разностей.

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,50	1,732				
		0,548			
0,75	2,280		0,172		
		0,720		0,056	
1,00	3,000		0,228		0,016
		0,948		0,072	
1,25	3,948		0,300		
		1,248			
1,50	5,196				

Для определения  $x_1$  имеем уравнение

$$N_3^I(t_1) = 1,732 + 0,548 \cdot t_1 + \frac{0,172}{2} t_1(t_1 - 1) + \frac{0,056}{6} t_1(t_1 - 1)(t_1 - 2) = 2,000,$$

а для определения  $x_2$  -

$$N_3^{II}(t_2) = 5,196 + 1,248 \cdot t_2 + \frac{0,300}{2} t_2(t_2 + 1) + \frac{0,072}{6} t_2(t_2 + 1)(t_2 + 2) = 5,000, \text{ где}$$

$$t_1 = \frac{x - 0,5}{0,25}, \quad t_2 = \frac{x - 1,5}{0,25}.$$

Решая эти два уравнения, получим

$$t_1^* = 0,522; \quad t_2^* = -0,140.$$

$$\text{Отсюда } x_1^* = 0,50 + 0,25 \cdot 0,522 = 0,630; \quad x_2^* = 1,50 + 0,25 \cdot (-0,140) = 1,465.$$

Задача 5.

По заданной таблице значений функции  $y=f(x)$  определить значение  $x^*$ , для которого  $f(x^*)=10$ .

$x_i$	10	15	17	20
$y_i$	3	7	11	17

**Решение.** Функция  $f(x)$  монотонна на отрезке  $[10;20]$ , следовательно, существует обратная функция  $x=g(y)$ . Построим для нее интерполяционный полином  $L_3(y)$  и вычислим  $L_3(10)$ .

$$x^* \approx L_3(10) = \sum_{i=0}^3 L_i^{(3)} \cdot x_i = \left(-\frac{3}{64}\right) \cdot 10 + \frac{49}{160} \cdot 15 + \frac{49}{64} \cdot 17 + \left(-\frac{1}{40}\right) \cdot 20 = 16,641$$

### **Б1. Интерполирование с помощью полинома Лагранжа**

Со сколькими верными знаками необходимо взять значение указанной функции в точках  $x_i$ , чтобы вычислить значение функции в точке  $x^*$  с минимальной погрешностью. Вычислить результат.

$$y = \cos x;$$

1.  $x_i=20^\circ, 22^\circ, 25^\circ, 26^\circ$ ;  $x^*=23^\circ$ .
2.  $x_i=27^\circ, 28^\circ, 30^\circ, 32^\circ$ ;  $x^*=29^\circ$ .
3.  $x_i=30^\circ, 31^\circ, 33^\circ, 35^\circ$ ;  $x^*=32^\circ$ .
4.  $x_i=35^\circ, 38^\circ, 40^\circ, 43^\circ$ ;  $x^*=37^\circ$ .
5.  $x_i=40^\circ, 45^\circ, 48^\circ, 51^\circ$ ;  $x^*=43^\circ$ .

$$y = \ln x;$$

21.  $x_i=2, 2,5, 3, 4$ ;  $x^*=e$ .
22.  $x_i=10, 13, 14, 16$ ;  $x^*=11$ .
23.  $x_i=11, 13, 16, 18$ ;  $x^*=12$ .
24.  $x_i=1, 2, 4, 5$ ;  $x^*=e$ .
25.  $x_i=5, 6, 8, 9$ ;  $x^*=7$ .

$$y = \sin x;$$

6.  $x_i=7^\circ, 9^\circ, 14^\circ, 17^\circ$ ;  $x^*=12^\circ$ .
7.  $x_i=15^\circ, 18^\circ, 21^\circ, 23^\circ$ ;  $x^*=20^\circ$ .
8.  $x_i=17^\circ, 22^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ ;  $x^*=28^\circ$ .
9.  $x_i=25^\circ, 29^\circ, 34^\circ, 37^\circ$ ;  $x^*=30^\circ$ .
10.  $x_i=40^\circ, 45^\circ, 51^\circ, 55^\circ$ ;  $x^*=50^\circ$ .

$$y = \lg x;$$

11.  $x_i=6, 8, 11, 12$ ;  $x^*=10$ .
12.  $x_i=9, 12, 15, 19$ ;  $x^*=10$ .
13.  $x_i=98, 102, 107, 112$ ;  $x^*=100$ .
14.  $x_i=110, 115, 119, 121$ ;  $x^*=113$ .
15.  $x_i=115, 119, 124, 128$ ;  $x^*=120$ .

$$y = \sqrt{x}$$

16.  $x_i=14, 16, 19, 21$ ;  $x^*=17$ .
17.  $x_i=15, 18, 21, 23$ ;  $x^*=20$ .
18.  $x_i=12, 14, 17, 19$ ;  $x^*=16$ .
19.  $x_i=20, 22, 26, 29$ ;  $x^*=25$ .
20.  $x_i=8, 10, 11, 13$ ;  $x^*=9$ .

## **Б2. Интерполирование с помощью формул Ньютона, Стирлинга, Бесселя.**

Используя таблицу значений функции (все приведенные знаки верны в узком смысле):

- а) составить таблицу конечных разностей;
- б) вычислить значения функции для указанных значений аргументов и оценить погрешность результатов.

$x_i$	$y_i$
1,1	0,89121
1,2	0,93204
1,3	0,96356
1,4	0,98545
1,5	0,99750
1,6	0,99957
1,7	0,99166
1,8	0,97385
1,9	0,94630
2,0	0,90930
2,1	0,86321
2,2	0,80850

1.  $x_1^* = 1,18$ ;  $x_2^* = 1,38$ ;  
 $x_3^* = 1,25$ ;  $x_4^* = 2,16$ .
2.  $x_1^* = 1,12$ ;  $x_2^* = 1,46$ ;  
 $x_3^* = 1,55$ ;  $x_4^* = 2,18$ .
3.  $x_1^* = 1,16$ ;  $x_2^* = 1,57$ ;  
 $x_3^* = 1,65$ ;  $x_4^* = 2,17$ .
4.  $x_1^* = 1,15$ ;  $x_2^* = 1,75$ ;  
 $x_3^* = 1,88$ ;  $x_4^* = 2,14$ .
5.  $x_1^* = 1,17$ ;  $x_2^* = 1,66$ ;  
 $x_3^* = 1,95$ ;  $x_4^* = 2,15$ .

$x_i$	$y_i$
0,50	1,6487
0,51	1,6653
0,52	1,6820
0,53	1,6989
0,54	1,7160
0,55	1,7333
0,56	1,7507
0,57	1,7683
0,58	1,7860
0,59	1,8040
0,60	1,8221
0,61	1,8404

6.  $x_1^* = 0,504$ ;  $x_2^* = 0,524$ ;  
 $x_3^* = 0,535$ ;  $x_4^* = 0,604$ .
7.  $x_1^* = 0,503$ ;  $x_2^* = 0,533$ ;  
 $x_3^* = 0,545$ ;  $x_4^* = 0,603$ .
8.  $x_1^* = 0,502$ ;  $x_2^* = 0,542$ ;  
 $x_3^* = 0,555$ ;  $x_4^* = 0,602$ .
9.  $x_1^* = 0,506$ ;  $x_2^* = 0,556$ ;  
 $x_3^* = 0,565$ ;  $x_4^* = 0,606$ .
10.  $x_1^* = 0,508$ ;  
 $x_2^* = 0,568$ ;  
 $x_3^* = 0,575$ ;  $x_4^* = 0,608$ .

$x_i$	$y_i$
1010	3,00432
1020	3,00860
1030	3,01284
1040	3,01703
1050	3,02119
1060	3,02531
1070	3,02938
1080	3,03342
1090	3,03743
1100	3,04139
1110	3,04532
1120	3,04922

11.  $x_1^* = 1013$ ;  $x_2^* = 1043$ ;  
 $x_3^* = 1065$ ;  $x_4^* = 1113$ .
12.  $x_1^* = 1012$ ;  $x_2^* = 1032$ ;  
 $x_3^* = 1055$ ;  $x_4^* = 1112$ .
13.  $x_1^* = 1014$ ;  $x_2^* = 1054$ ;  
 $x_3^* = 1075$ ;  $x_4^* = 1114$ ;
14.  $x_1^* = 1016$ ;  $x_2^* = 1066$ ;  
 $x_3^* = 1085$ ;  $x_4^* = 1116$ .
15.  $x_1^* = 1018$ ;  $x_2^* = 1078$ ;  
 $x_3^* = 1095$ ;  $x_4^* = 1118$ .

$x_i$	$y_i$
2,70	0,3704
2,72	0,3676
2,74	0,3650
2,76	0,3623
2,78	0,3597
2,80	0,3571
2,82	0,3546
2,84	0,3521
2,86	0,3497
2,88	0,3472
2,90	0,3448
2,92	0,3425

16.  $x_1^*=2,706$ ;  
 $x_2^*=2,756$ ;  
 $x_3^*=2,77$ ;  $x_4^*=2,906$ .  
17.  $x_1^*=2,708$ ;  
 $x_2^*=2,768$ ;  
 $x_3^*=2,87$ ;  $x_4^*=2,908$ .  
18.  $x_1^*=2,709$ ;  
 $x_2^*=2,769$ ;  
 $x_3^*=2,81$ ;  $x_4^*=2,909$ .  
19.  $x_1^*=2,712$ ;  
 $x_2^*=2,772$ ;  
 $x_3^*=2,85$ ;  $x_4^*=2,912$ .  
20.  $x_1^*=2,715$ ;  
 $x_2^*=2,835$ ;  
 $x_3^*=2,89$ ;  $x_4^*=2,915$ .

$x_i$	$y_i$
0,6	1,8221
0,7	2,0138
0,8	2,2255
0,9	2,4596
1,0	2,7183
1,1	3,0042
1,2	3,3201
1,3	3,6693
1,4	4,0552
1,5	4,4817
1,6	4,9530
1,7	5,4739

21.  $x_1^*=0,63$ ;  $x_2^*=0,88$ ;  
 $x_3^*=1,05$ ;  $x_4^*=1,63$ .  
22.  $x_1^*=0,68$ ;  $x_2^*=0,93$ ;  
 $x_3^*=1,25$ ;  $x_4^*=1,68$ .  
23.  $x_1^*=0,64$ ;  $x_2^*=1,07$ ;  
 $x_3^*=1,45$ ;  $x_4^*=1,64$ .  
24.  $x_1^*=0,67$ ;  $x_2^*=1,22$ ;  
 $x_3^*=1,15$ ;  $x_4^*=1,67$ .  
25.  $x_1^*=0,66$ ;  $x_2^*=1,34$ ;  
 $x_3^*=0,95$ ;  $x_4^*=1,66$ .

### ***Б3. Обратное интерполирование (случай неравноотстоящих узлов)***

По таблице задачи Б1 определить значение аргумента  $x^*$ , соответствующее указанному значению  $y^*$  функции  $f(x)$ .

- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. $y^*=0,914$  | 2. $y^*=0,857$  | 3. $y^*=0,829$  |
| 4. $y^*=0,777$  | 5. $y^*=0,695$  | 6. $y^*=0,175$  |
| 7. $y^*=0,326$  | 8. $y^*=0,391$  | 9. $y^*=0,454$  |
| 10. $y^*=0,743$ | 11. $y^*=0,93$  | 12. $y^*=1,15$  |
| 13. $y^*=2,02$  | 14. $y^*=2,07$  | 15. $y^*=2,09$  |
| 16. $y^*=3,873$ | 17. $y^*=4,062$ | 18. $y^*=4,243$ |
| 19. $y^*=4,9$   | 20. $y^*=3,5$   | 21. $y^*=0,8$   |
| 22. $y^*=2,5$   | 23. $y^*=2,7$   | 24. $y^*=1,1$   |
| 25. $y^*=2$     |                 |                 |

#### **Б4. Обратное интерполирование (случай равноотстоящих узлов)**

По таблице задачи Б2 определить значение аргумента  $x^*$ , соответствующее указанному значению  $y^*$  функции  $f(x)$ .

1. $y^*=0,81$	2. $y^*=0,82$	3. $y^*=0,83$
4. $y^*=0,84$	5. $y^*=0,86$	6. $y^*=1,7$
7. $y^*=1,75$	8. $y^*=1,8$	9. $y^*=1,65$
10. $y^*=1,83$	11. $y^*=3,008$	12. $y^*=3,010$
13. $y^*=3,046$	14. $y^*=3,035$	15. $y^*=3,040$
16. $y^*=0,35$	17. $y^*=0,36$	18. $y^*=0,37$
19. $y^*=0,345$	20. $y^*=0,361$	21. $y^*=3,2$
22. $y^*=2$	23. $y^*=3$	24. $y^*=4$
25. $y^*=5$		

### **4.3. Численное дифференцирование.**

#### **Формулы численного дифференцирования. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании. Выбор оптимального шага численного дифференцирования**

При численном решении многих практических задач часто возникает необходимость получить значения производных различных порядков функции  $y=f(x)$ , заданной в виде таблицы или в виде сложного аналитического выражения, непосредственное дифференцирование которого затруднено. В таких случаях используются приближенные методы дифференцирования.

Рассматривается следующая задача:

На сетке  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  в узлах  $x_i$  заданы значения  $y_i=f(x_i)$  функции  $f(x)$ , непрерывно дифференцируемой  $n+1+m$  раз. Требуется вычислить производную  $f^{(m)}(x^*)$ ,  $x^* \in [a, b]$  и оценить погрешность.

Один из возможных путей решения этой задачи заключается в применении теории интерполирования. Построим для функции  $f(x)$  по узлам  $x_i$ ,  $i=0,1,\dots,n$  интерполяционный полином  $P_n(x)$  с остаточным членом  $R_n(x)$  так, что

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \quad (1)$$

Продифференцируем правую и левую части соотношения (1) по  $x$   $m$  раз и положим  $x=x^*$

$$f^{(m)}(x^*) = P_n^{(m)}(x^*) + R_n^{(m)}(x^*). \quad (2)$$

Производная от многочлена  $P_n^{(m)}(x)$  применяется для приближенного представления искомой производной  $f^{(m)}(x)$ :

$$f^{(m)}(x^*) \approx P_n^{(m)}(x^*). \quad (3)$$

Вычисление высших производных может быть сведено к последовательному вычислению низших, поэтому мы остановимся более подробно на получении расчетных формул для  $f'(x)$ . Приближенные формулы для вычисления производных в начале и в конце таблицы получаются путем дифференцирования интерполяционных многочленов Ньютона, а для вычисления производных в середине таблицы - путем дифференцирования интерполяционных многочленов Стирлинга и Бесселя.

Например, если выбрать узлы  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  и воспользоваться первым интерполяционным многочленом Ньютона, то мы получим формулу численного дифференцирования вида

$$f'(x) \approx \frac{dN_4^I(x)}{dx} = \frac{dN_4^I(x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left[ \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6} \Delta^3 y_0 + (2t^3-9t^2+11t-3) \frac{\Delta^4 y_0}{12} \right], \quad (4)$$

$$\text{где } t = \frac{x-x_0}{h}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

На практике часто выгоднее выражать значения производных не через конечные разности, а непосредственно через значения функции в узлах. Для получения таких безразностных формул удобно воспользоваться многочленом Лагранжа с равномерным расположением узлов ( $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ).

Запишем многочлен Лагранжа второй степени (три узла интерполирования).

$$L_2(x) = \frac{1}{2h^2} \left[ (x-x_1)(x-x_2)y_0 - 2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2 \right] \quad (5)$$

Тогда

$$f'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{2h^2} \left[ (2x-x_1-x_2)y_0 - 2(2x-x_0-x_2)y_1 + (2x-x_0-x_1)y_2 \right] \quad (6)$$

В основном формулы численного дифференцирования применяют для вычисления производных в узлах  $x_i$ . Подставим в равенство (6) последовательно значения  $x=x_0; x_1; x_2$ . Получим:

$$f'(x_0) \approx L_2'(x_0) = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2); \quad (7)$$

$$f'(x_1) \approx L_2'(x_1) = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2); \quad (8)$$

$$f'(x_2) \approx L_2'(x_2) = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2). \quad (9)$$

Остаточные члены формул численного дифференцирования (7) - (9) получим дифференцированием остаточного члена

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

многочлена Лагранжа (5) и последовательной подстановкой в выражение для  $R_2'$  значений  $x=x_0; x_1; x_2$ .

$$R_2'(x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3} h^2; \quad (10)$$

$$R_2'(x_1) = -\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6} h^2; \quad (11)$$

$$R_2'(x_2) = \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3} h^2. \quad (12)$$

Записывая интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени (четыре узла) и его остаточный член, получим следующие формулы для производных в узлах:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_0); \quad (13)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_1); \quad (14)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi_2); \quad (15)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi_3). \quad (16)$$

В случае многочлена четвертой степени (пять узлов) получим:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi_0) \quad (17)$$

;

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi_1); \quad (18)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi_2); \quad (19)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi_3) \quad (20)$$

;

$$f'(x_4) = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi_4) \quad (21)$$

.

### **Выбор оптимального шага численного дифференцирования**

Оценка абсолютной погрешности численного дифференцирования складывается из остаточной погрешности, оцениваемой величиной  $|R'_n(x)|$ , и вычислительной погрешности, определяемой приближенным заданием величин  $y_i$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , (погрешностью округления результата пренебрегаем). Рассмотрим для определенности формулу (19).

Приближенное значение производной

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) \quad (22)$$

имеет остаточную погрешность

$$\Delta_1 = \frac{h^4 M_5}{30} \geq \left| \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi) \right|, \quad M_5 = \max_{[a;b]} |f^{(5)}(x)|,$$

и вычислительную погрешность согласно равенству (9) темы I

$$\Delta_2 = \frac{18\Delta^*}{12h} = \frac{3\Delta^*}{2h},$$

где  $\Delta^*$  - абсолютная погрешность каждого из чисел  $y_i$ ,  $i=0,1,\dots,n$ .

Таким образом, полная погрешность формулы численного дифференцирования (22)-

$$\Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{h^4 M_5}{30} + \frac{3\Delta^*}{2h}.$$

Для малости  $\Delta_1$  необходима малость  $h$ , но при уменьшении  $h$  растет  $\Delta_2$ . Из уравнения  $\Delta'(h) = 0$  получаем значение  $h^*$ , при котором погрешность  $\Delta(h)$  формулы (22) имеет минимальное значение.

$$\Delta'(h) = \frac{4M_5}{30}h^3 - \frac{3\Delta^*}{2h^2} = 0, \quad h^* = \sqrt[5]{\frac{45\Delta^*}{4M_5}}$$

#### Задача.

Функция  $f(x)$  задана таблицей своих значений, верных в написанных знаках. Найти первую производную этой функции в точках  $x_1^* = 0,7$  и  $x_2^* = 1,0$ . Оценить погрешности результатов. Найти оптимальный шаг  $h^*$  для каждой из формул численного дифференцирования.

$X_i$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_i$	0,4794	0,5646	0,6442	0,7174	0,7833	0,8415

Решение.

Точка  $x_1^*=0,7$  - центральный узел таблицы. Для вычисления  $f'(0,7)$  в данной задаче следует воспользоваться одной из формул (8), (14), (15), (18).

1) Воспользуемся формулой (8), обозначив  $x_0=0,6$ ;  $x_1=0,7$ ;  $x_2=0,8$ . Тогда  $f'(0,7) \approx \frac{1}{2 \cdot 0,1} (0,7174 - 0,5646) = 0,764$ .

Остаточная погрешность результата в соответствии с формулой (11) -

$$\Delta_1 = \frac{M_3 h^2}{6},$$

где  $M_3 = \max_{[a;b]} |f^{(3)}(x)|$ .

Чтобы оценить  $M_3$ , построим для данной функции таблицу конечных разностей.

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,5	0,4794				
		0,0852			
0,6	0,5646		-0,0056		
		0,0796		-0,0008	
0,7	0,6442		-0,0064		-0,0001
		0,0732		-0,0009	
0,8	0,7174		-0,0073		0,0003
		0,0659		-0,0006	
0,9	0,7883		-0,0077		
		0,0582			
1,0	0,8415				

$$M_3 \approx \frac{\max_{[a;b]} |\Delta^3 y_i|}{h^3} = \frac{0,0009}{(0,1)^3} = 0,9;$$

$$\Delta_1 = \frac{0,9 \cdot (0,1)^2}{6} = 0,0015.$$

Вычислительная погрешность результата -

$$\Delta_2 = \frac{\Delta^*}{h} = \frac{0,00005}{0,1} = 0,0005.$$

где  $\Delta^* = 0,00005$  - абсолютная погрешность величин  $y_i$ .

$$\Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,0015 + 0,0005 = 0,002.$$

Определим оптимальный шаг для использованной формулы численного дифференцирования.

$$\Delta(h) = \frac{M_3 h^2}{6} + \frac{\Delta^*}{h}; \Delta'(h) = \frac{2M_3 h}{6} - \frac{\Delta^*}{h^2} = 0,$$

откуда

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{3\Delta^*}{M_3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{0,9}} = 0,119.$$



2) Решим теперь данную задачу с помощью формулы (14), обозначив  $x_0=0,6$ ;  $x_1=0,7$ ;  $x_2=0,8$ ;  $x_3=0,9$ .

$$f'(0,7) = \frac{1}{6 \cdot 0,1} (-2 \cdot 0,5646 - 3 \cdot 0,6442 + 6 \cdot 0,7174 - 0,7833) = 0,7655$$

$$\Delta_1 = \frac{h^3 M_4}{12},$$

$$M_4 = \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)| \approx \frac{\max_{[a;b]} |\Delta^4 y_i|}{h^4} = \frac{0,0003}{(0,1)^4} = 3;$$

$$\Delta_1 = \frac{(0,1)^3 \cdot 3}{12} = 0,000025; \Delta_2 = \frac{2 \cdot \Delta^*}{h} = \frac{2 \cdot 0,00005}{0,1} = 0,001;$$

$$\Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,001025.$$

Определим для этой формулы оптимальный шаг численного дифференцирования.

$$\Delta(h) = \frac{h^3 M_4}{12} + \frac{2\Delta^*}{h}; \Delta'(h) = \frac{h^2 M_4}{4} - \frac{2\Delta^*}{h^2} = 0,$$

$$h^* = \sqrt[4]{\frac{8\Delta^*}{M_4}} = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{3}} = 0,107.$$

Точка  $x_2^*=1,0$  является последним узлом таблицы. Для вычисления  $f'(1,0)$  служат формулы (9), (16), (21). Воспользуемся формулой (16), обозначив  $x_0=0,7$ ;  $x_1=0,8$ ;  $x_2=0,9$ ;  $x_3=1,0$ .

$$f'(1,0) = \frac{1}{6 \cdot 0,1} (-2 \cdot 0,6442 + 9 \cdot 0,7174 - 18 \cdot 0,7833 + 11 \cdot 0,8415) = 0,54217;$$

$$\Delta_1 = \frac{M_4 h^3}{4} \approx \frac{\max_{[a;b]} |\Delta^4 y_i|}{4 \cdot h} = \frac{0,0003}{4 \cdot 0,1} = 0,00075;$$

$$\Delta_2 = \frac{40 \cdot \Delta^*}{6h} = \frac{20 \cdot \Delta^*}{3h} = \frac{20 \cdot 0,00005}{3 \cdot 0,1}.$$

Определим соответствующий данной формуле оптимальный шаг таблицы.

$$\Delta(h) = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{M_4 h^3}{4} + \frac{20\Delta^*}{3h}; \Delta'(h) = \frac{3M_4 h^2}{4} - \frac{20\Delta^*}{3h^2} = 0,$$

$$h^* = \sqrt[4]{\frac{80\Delta^*}{9M_4}} = \sqrt[4]{\frac{80 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 3}} = 0,110.$$

### Задача В

Пользуясь таблицей задачи Б2, вычислить первую производную заданной функции в точке  $x^*$  и оценить погрешность результата. Определить оптимальный шаг таблицы для выбранной формулы численного дифференцирования.

- |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1. $x^*=1,1$   | 2. $X^*=1,2$   | 3. $X^*=1,3$   | 4. $X^*=2,0$   |
| 5. $x^*=2,2$   | 6. $X^*=0,50$  | 7. $X^*=0,52$  | 8. $X^*=0,56$  |
| 9. $x^*=0,60$  | 10. $X^*=0,61$ | 11. $X^*=1080$ | 12. $X^*=1090$ |
| 13. $x^*=1100$ | 14. $X^*=1110$ | 15. $X^*=1120$ | 16. $X^*=2,70$ |
| 17. $x^*=2,74$ | 18. $X^*=2,76$ | 19. $X^*=2,80$ | 20. $X^*=2,84$ |
| 21. $x^*=0,7$  | 22. $X^*=0,9$  | 23. $X^*=1,1$  | 24. $X^*=1,3$  |
| 25. $x^*=1,5$  |                |                |                |

#### 4.4. Численное интегрирование

Постановка задачи. Пусть требуется вычислить интеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если функция  $f(x)$  является непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , то интеграл (1) существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$J = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Однако для большинства функций  $f(x)$  первообразную  $F(x)$  не удастся выразить через элементарные функции. Кроме того, функция  $f(x)$  часто задается в виде таблицы ее значений для определенных значений аргумента. Все это порождает потребность в построении формул численного интегрирования, или квадратурных формул.

Определение 1. Приближенное равенство

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=1}^N A_i f(x_i) = J_N \quad (3)$$

называется квадратурной формулой, определяемой узлами  $x_i \in [a; b]$  и коэффициентами  $A_i$ .

Величина

$$R_N(f) = J - J_N \quad (4)$$

называется остаточным членом квадратурной формулы.

В зависимости от способа задания подынтегральной функции  $f(x)$  будем рассматривать два различных в смысле реализации случая численного интегрирования.

Задача 1. На отрезке  $[a; b]$  в узлах  $x_i$  заданы значения  $f_i$  некоторой  $f$ , принадлежащей определенному классу  $F$ . Требуется приближенно вычислить интеграл (1) и оценить погрешность полученного значения.

Так обычно ставится задача численного интегрирования в том случае, когда подынтегральная функция задана в виде таблицы.

Задача 2. На отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  задана в виде аналитического выражения. Требуется вычислить интеграл (1) с заданной предельно допустимой погрешностью  $\varepsilon$ .

Рассмотрим алгоритмы решения задач 1 и 2.

Алгоритм решения задачи 1.

1. Выбирают конкретную квадратурную формулу (3) и вычисляют  $J_N$ . Если значения функции  $f(x_i)$  заданы приближенно, то фактически вычисляют лишь приближенное значение  $\bar{J}_N$  для точного  $J_N$ .

2. Приближенно принимают, что  $J \approx \bar{J}_N$ .

3. Пользуясь конкретным выражением для остаточного члена или оценкой его для выбранной квадратурной формулы, вычисляют погрешность метода

$$\Delta_1 \geq |J - J_N| = |R_N(f)|.$$

4. Определяют погрешность вычисления  $\bar{J}_N$

$$\Delta_2 \geq |J_N - \bar{J}_N|,$$

по погрешностям приближенных значений  $f(x_i)$ .

5. Находят полную абсолютную погрешность приближенного значения  $\bar{J}_N$ :

$$|J - \bar{J}_N| \leq \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$$

6. Получают решение задачи в виде

$$J = \bar{J}_N \pm \Delta.$$

Алгоритм решения задачи 2.

1. Представляют  $\varepsilon$  в виде суммы трех неотрицательных слагаемых

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

где  $\varepsilon_1$  - предельно допустимая погрешность метода;  $\varepsilon_2$  - предельно допустимая погрешность вычисления  $\bar{J}_N$ ;  $\varepsilon_3$  - предельно допустимая погрешность округления результата.

2. Выбирают N в квадратурной формуле так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_1 = |J - J_N| = |R_N(f)| \leq \varepsilon_1.$$

3. Вычисляют  $f(x_i)$  с такой точностью, чтобы при подсчете  $J_N$  по формуле (3) обеспечить выполнения неравенства

$$\Delta_2 = |J_N - \bar{J}_N| \leq \varepsilon_2.$$

Для этого, очевидно, достаточно вычислить все  $f(x_i)$  с абсолютной погрешностью

$$\varepsilon_T = \frac{\varepsilon_2}{(b-a) \sum_{i=1}^N |A_i|}.$$

4. Найденную в п.3 величину  $\bar{J}_N$  округляют (если  $\varepsilon_3 \neq 0$ ) с предельно допустимой погрешностью  $\varepsilon_3$  до величины  $\bar{\bar{J}}_N$ .

5. Получают решение задачи в виде

$$J = \bar{\bar{J}}_N \pm \varepsilon.$$

### ***Построение простейших квадратурных формул***

Формула прямоугольников. Допустим, что  $f(x) \in C_2[a; b]$ . Отрезок  $[a; b]$  разделим на N равных частичных отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$ , где  $x_i = a + ih$ ;  $i = \overline{0, n-1}$ ;  $x_N = b$ ;  
 $h = \frac{b-a}{N}$ .

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (5)$$

Обозначим среднюю точку отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$  через

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \quad (6)$$

Запишем для функции  $f(x)$  на каждом из отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(\xi_i) + (x - \xi_i) f'(\xi_i) + \frac{(x - \xi_i)^2}{2!} f''(\eta_i); \quad \eta_i \in (x_{i-1}; x_i). \quad (7)$$

Подставим в правую часть соотношения (5) вместо  $f(x)$  ее представление (7)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\xi_i) + (x - \xi_i)f'(\xi_i) + \frac{(x - \xi_i)^2}{2!} f''(\eta_i)]dx = \\ &= \sum_{i=1}^N [f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx + f'(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - \xi_i)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - \xi_i)^2}{2} f''(\eta_i)dx] \quad (8)\end{aligned}$$

Используя для вычисления  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - \xi_i)^2}{2} f''(\eta_i)dx$  вторую теорему о среднем значении функции и, учитывая, что  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - \xi_i)dx = 0$ , получим, что

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^N f(\xi_i) + \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^N f''(\bar{\eta}_i); \quad \bar{\eta}_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (9)$$

В силу непрерывности  $f''(x)$  существует такая точка  $\eta \in (a; b)$ , что

$$\sum_{i=1}^N f''(\bar{\eta}_i) = N f''(\eta). \quad (10)$$

Используя (10), получаем

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^N f(\xi_i) + \frac{h^3}{24} N f''(\eta)$$

или, так как  $h = \frac{b-a}{N}$ ,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} f(\xi_i) + \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta). \quad (11)$$

Приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} f(\xi_i) = J_N^{np} \quad (12)$$

называется квадратурной формулой прямоугольников, определяемой узлами  $\xi_i \in [a; b]$  и коэффициентами  $A_i = \frac{1}{N}$ . Величина

$$R_N(f) = \int_a^b f(x)dx - J_N^{np} = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta) \quad (13)$$

является остаточным членом формулы прямоугольников (12).

Оценка остаточной погрешности формулы прямоугольников может быть записана в виде

$$|R_N(f)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \Delta_1, \quad (14)$$

где

$$M_2 = \max_{[a; b]} |f''(x)|.$$

Выражения для остаточного члена (13) и остаточной погрешности (14) показывают, что формула прямоугольников (12) является точной для любой линейной функции, так как вторая производная такой функции равна нулю, и, следовательно,  $\Delta_1 = 0$ .

Оценим вычислительную погрешность  $\Delta_2$  формулы прямоугольников, которая возникает за счет приближенного вычисления значений функции  $f(x)$  в узлах  $\xi_i$ .

Пусть, например, значения  $f(\xi_i)$  в формуле (12) вычислены с одинаковой абсолютной погрешностью  $\Delta^*$ , тогда

$$\Delta_2 = |J_N - \bar{J}_N| = (b-a) \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \Delta^* = (b-a) \Delta^*. \quad (15)$$

Пример 1. Вычислить с помощью формулы прямоугольников

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-2}.$$

Применяя алгоритм решения задачи 2, представим суммарную погрешность  $\varepsilon$  в виде суммы трех слагаемых.

$$\varepsilon = 0,01 = 0,009 + 0,0005 + 0,0005.$$

Выберем  $h$  из условия

$$\Delta_1 = \frac{h^2 (b-a) M_2}{24} \leq 0,009.$$

Так как  $M_2 = \max_{[0;1]} |f''(x)| = \max_{[0;1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2$  и  $(b-a)=1$ , то  $h \leq \sqrt{0,009 \cdot 12} < 0,32$

и, следовательно,  $N = \frac{b-a}{h} > 3,1$ , т.е.  $N=4$ ,  $h=0,25$ ,  $\Delta_1 = 0,0052$ .

Составим таблицу значений функции  $1/(1+x)$  с тремя знаками после запятой, так как  $\Delta_2 = \Delta^* (b-a) \leq 0,0005$ ,  $\Delta^* = 0,0005$ .

$\xi_i$	0,125	0,375	0,625	0,875
$f(\xi_i)$	0,889	0,727	0,615	0,533

Используя формулу (12), получаем

$$\bar{J}_4^{np} = 0,25 \cdot (0,889 + 0,727 + 0,615 + 0,533) = 0,25 \cdot 2,764 = 0,691.$$

Так как в данном случае погрешность округления равна  $\varepsilon_3 = 0,0005$ , то получим

$$J = 0,691 \pm (0,0052 \pm 0,0005) = 0,691 \pm 0,0057.$$

Формула трапеций. Предположим, что  $f(x) \in C_2[a; b]$ . Разделим отрезок  $[a; b]$  на  $N$  равных частей, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad (16)$$

где  $x_i = a + ih; i = \overline{0, N-1}; x_N = b; h = \frac{b-a}{N}$ .

Заменим функцию  $f(x)$  на каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  первой интерполяционной формулой Ньютона первой степени

$$f(x) = f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{h} (f(x_i) - f(x_{i-1})) + \frac{f''(\eta_i)}{2!} (x - x_{i-1})(x - x_i), \quad (17)$$

$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ .

Подставляя формулу (17) в правую часть (16), интегрируя и используя вторую теорему о среднем значении функции, получим

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N h \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^N f''(\bar{\eta}_i); \bar{\eta}_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (18)$$

В силу (10) получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = h \left( \frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) - \frac{h^2}{12} (b-a) f''(\eta). \quad (19)$$

Приближенное равенство

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \left( \frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) = J_N^{TP} \quad (20)$$

называется формулой трапеции. Величина

$$R_N(f) = J - J_N^{TP} = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\eta) \quad (21)$$

является остаточным членом формулы трапеций. Оценка остаточной погрешности формулы трапеций может быть записана в виде

$$|R_N(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \Delta_1. \quad (22)$$

Формула трапеций, как и формула прямоугольников, является точной для любой линейной функции. Вычислительная погрешность формулы трапеций также равна

$$\Delta_2 = (b-a) \Delta^*. \quad (23)$$

Так как остаточные члены формул прямоугольников и трапеций (13) и (21) имеют противоположные знаки, то формулы (12) и (20) дают двухстороннее приближение для интеграла (1), то есть

$$J_N^{np} < J < J_N^{TP}, \text{ если } f''(x) > 0,$$

$$J_N^{TP} < J < J_N^{np}, \text{ если } f''(x) < 0.$$

В таком случае можно принять, что

$$J \approx \frac{J_N^{np} + J_N^{TP}}{2} = \tilde{J}, \quad (24)$$

тогда

$$|J - \tilde{J}| < \frac{|J_N^{np} - J_N^{TP}|}{2}, \quad (25)$$

т.е. погрешность выражается через приближенные значения интегралов.

Пример 2. Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  по формуле трапеций, полагая  $N=4$ ; оценить

полную погрешность результата. Учитывая результаты примера 1, найти  $\tilde{J}$  по формуле (24) и оценку (25).

Применяя алгоритм решения задачи 1, находим:

$$\Delta_1 = \frac{h^2}{12} (b-a) M_2 = \frac{0,25^2}{12} 1 \cdot 2 = 0,0104.$$

Составим таблицу значений функции  $1/(1+x)$  с тремя знаками после запятой

$$\Delta_2 = \Delta^* (b-a) = \Delta^* \leq 0,5 \cdot 10^{-5}.$$

$x_i$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
$f(x_i)$	1,000	0,800	0,667	0,571	0,500

$$\overline{J_4^{TP}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1,000 + 0,500}{2} + 0,800 + 0,667 + 0,571 \right) = 0,697.$$

Суммарная погрешность равна

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0,0104 + 0,0005 \approx 0,011.$$

Если округлить результат до двух знаков, то  
 $\varepsilon_3 = 0,70 - 0,697 = 0,003$  и

$$J = 0,70 \pm (0,0109 + 0,003) = 0,70 \pm 0,014.$$

Используя формулы (24) и (25) и результаты примера 1, получим  
 $0,691 < J < 0,697$ ;

$$\tilde{J} = \frac{0,691 + 0,697}{2} = 0,694;$$

$$|J - \tilde{J}| < \frac{0,697 - 0,691}{2} = 0,003;$$

$$J = 0,694 \pm 0,003.$$

Формула Симпсона. Предположим, что  $f(x) \in C_4[a, b]$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $N = 2k$  равных частей, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx, \quad (26)$$

где  $x_i = a + ih$ ;  $i = \overline{0, 2k-1}$ ;  $x_{2k} = b$ ;  $h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2k}$ .

Заменим функцию  $f(x)$  на каждом из отрезков  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  длиной  $2h$  по формуле Стирлинга второго порядка. Проводя рассуждения, аналогичные сделанным при выводе формулы трапеций, получим квадратурную формулу Симпсона

$$J = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_{2k}) + 4 \sum_{i=1}^k f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) \right] = J_{2k}^C \quad (27)$$

с остаточным членом

$$R_N(f) = J - J_{2k}^C = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(IV)}(\eta), \quad \eta \in (a, b). \quad (28)$$

Оценка остаточной погрешности формулы Симпсона примет вид

$$\left| R_N(f) \right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 = \Delta_1, \quad (29)$$

где  $M_4 = \max_{[a, b]} |f^{(IV)}(x)|$ .

Вычислительная погрешность формулы Симпсона равна

$$\Delta_2 = \Delta^*(b-a). \quad (30)$$

Из выражения для остаточного члена формулы Симпсона следует, что она точна для многочленов третьей степени.

Пример 3. Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  по формуле Симпсона с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

Применяя алгоритм решения задачи II, представим суммарную погрешность  $\varepsilon$  в виде суммы трех слагаемых  $\varepsilon = 0,0001 = 0,000045 + 0,000005 + 0,00005$ .

Выберем  $h$  из условия  $\Delta_1 = \frac{h^4(b-a)}{180} M_4 \leq 0,000045$ .

Так как  $M_4 = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{[0,1]} \frac{24}{(1+x)^5} = 24$ , то

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{0,45 \cdot 10^{-4} \cdot 180}{24}} = \sqrt[4]{3,375 \cdot 10^{-4}} \approx 0,135 \text{ и, следовательно,}$$

$$N = \frac{b-a}{h} \geq \frac{10}{1,35} \approx 7,38 \approx 8.$$

Таким образом,  $N = 8$ ,  $h = 0,125$  и  $\Delta_1 = \frac{0,125^4}{180} \cdot 24 = 0,0000325$ .

Составим таблицу значений функций  $\frac{1}{1+x}$  с пятью знаками после запятой

$$\Delta_2 = \Delta^*(b-a) = \Delta^* \leq 0,5 \cdot 10^{-5}$$

$x_i$	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
$f(x_i)$	1.000	0.8888 9	0.800	0.7272 7	0.6666 7	0.6153 8	0.5714 3

$x_i$	0.875	1.000
$f(x_i)$	0.5333 3	0.500

Используя формулу (27), получаем:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{0,125}{3} [1,5 + 4(0,88889 + 0,72727 + 0,61538 + 0,53333) + 2(0,8 + 0,66667 + 0,57143)] =$$

$$= \frac{0,125}{3} [1,5 + 4 \cdot 2,7648 + 2,03810 \cdot 2] = 0,6931533 \quad .$$

Округляя полученный результат, получим

$$J = 0,69315 \pm (0,0000325 + 0,000005 + 0,0000033) = 0,69315 \pm 0,000041.$$

### **Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул.**

Пусть  $f(x) \in C_4[a, b]$  и интеграл (1) вычисляется по формуле

прямоугольников. Наличие у  $f(x)$  производных  $f'''(x)$  и  $f^{IV}(x)$  позволяет при выводе формулы прямоугольников (7)-(13) получить следующее полезное соотношение

$$J = \int_a^b f(x) dx = J_N^{np} + ch^2 + O(h^4), \quad (31)$$

где 
$$c = \frac{1}{24} \int_a^b f'''(x) dx \quad (32)$$

- постоянная, не зависящая от  $h$ . Величина  $ch^2$  называется главной частью погрешности формулы прямоугольников.

Если  $f(x) \in C_4[a, b]$ , то справедливо аналогичное соотношение и для формулы трапеций

$$J = J_N^{TP} + c_1 h^2 + O(h^4), \quad (33)$$

где 
$$c_1 = -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx \quad (34)$$

не зависит от  $h$ .



При условии  $f(x) \in C_6[a, b]$  можно получить аналогичные (31) и (33)

$$\text{соотношения для формулы Симпсона} \quad J = J_N^C + ch^4 + O(h^6), \quad (35)$$

где  $c$  - не зависящая от  $h$  постоянная.

Обозначим через  $J_N$  приближенное значение интеграла (1), найденное по одной из трех формул (12), (20), (27), и объединим соотношения (31), (33), (35) в одно

$$J = J_h + ch^k + O(h^{k+2}), \quad (36)$$

где  $c$  не зависит от  $h$ ,  $k = 2$  для формул прямоугольников и трапеций,  $k = 4$  для формулы Симпсона. Предполагается, что  $f \in C_{k+2}[a, b]$ . Запишем соотношение

(36) для  $h_1 = 2h$

$$J = J_{2h} + c(2h)^k + O(h^{k+2}), \quad (37)$$

вычтем из (37) (36) и получим

$$0 = -J_h + J_{2h} + ch^k(2^k - 1) + O(h^{k+2}) \quad \text{или}$$

$$J_h - J_{2h} = ch^k(2^k - 1) + O(h^{k+2}) \quad \text{или}$$

$$J - J_h = ch^k + O(h^{k+2}) = \frac{J_h - J_{2h}}{2^k - 1} + O(h^{k+2})$$

и, следовательно, с точностью до  $O(h^{k+2})$  имеем

$$|J - J_h| \approx \frac{|J_h - J_{2h}|}{2^k - 1}. \quad (38)$$

Вычисление приближенной оценки погрешности квадратурной формулы по формуле (38) называется правилом Рунге.

#### Уточнение приближенного решения по Ричардсону.

Вычитая из умноженного на  $2^k$  равенства (36) равенство (37), получаем:

$$J(2^k - 1) = 2^k J_h - J_{2h} + O(h^{k+2}), \quad (39)$$

$$\text{откуда } J = \frac{2^k J_h - J_{2h}}{2^k - 1} + O(h^{k+2}). \quad (40)$$

$$\text{Число } J_h^R = \frac{2^k J_h - J_{2h}}{2^k - 1} \quad (41)$$

называется уточненным по Ричардсону приближенным значением интеграла  $J$ .

$$\text{Согласно (40) } J - J_h^R = O(h^{k+2}). \quad (42)$$

Таким образом, с помощью приближенных значений интегралов  $J_h, J_{2h}$ , найденных по соответствующим квадратурным формулам с шагом  $h$  и  $2h$ , можно, во-первых, оценить погрешность более точного значения интеграла  $J_h$  по правилу Рунге (38) и, во-вторых, вычислить по формуле (41) приближенное значение интеграла  $J_h^R$ , имеющее погрешность более высокого порядка относительно  $h$ , чем  $J_h$ .

### Вычисление интегралов с заданной степенью точности с помощью правила Рунге.

При применении алгоритма решения задачи II выбор шага интегрирования  $h$  связан с решением неравенств либо (14), либо (22), либо (29), решение которых

связано с нахождением  $\max_{[a, \epsilon]} |f^{(k)}(x)|$ , что на практике не всегда возможно. Применение правила Рунге позволяет избежать этих трудностей.

*Алгоритм вычисления интеграла с заданной степенью точности с автоматическим выбором шага.*

1 шаг. Пусть  $f(x)$  – заданная функция,  $[a, \epsilon]$  – интервал интегрирования,  $\epsilon$  – допустимая точность.

2 шаг. Положить  $h_0 \approx \sqrt[k]{\epsilon}$ , где  $k = 2$  для формул прямоугольников и трапеций,  $k = 4$  для формулы Симпсона;

$N \approx \left\lceil \frac{\epsilon - a}{h_0} \right\rceil$ ; и кратно 2 или 4;  $h_0 = \frac{\epsilon - a}{N}$ .

3 шаг. Вычислим  $x_i = a + ih$ ;  $i = \overline{0, N}$ ;  $f(x_i) = y_i$ ;  $J_{h_0}$ .

4 шаг. Положим  $h_1 = 2h_0$  и вычислим  $J_{h_1}$ .

5 шаг. Определим  $\Delta = \frac{|J_{h_0} - J_{h_1}|}{2^k - 1}$ .

6 шаг. Если  $\Delta \leq \epsilon$ , то положим  $J^R = \frac{2^k J_{h_0} - J_{h_1}}{2^k - 1}$ ;  $J = J^R \pm \Delta$  и остановимся, иначе положим  $h_0 = \frac{h_0}{2}$  и перейдем к шагу 3.

Пример 4. Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398163...$  по формуле

прямоугольников с точностью  $\epsilon = 0,05$ .

1 шаг.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;  $a = 0$ ;  $\epsilon = 1$ ;  $\epsilon = 0,05$ .

2 шаг. Положим  $h_0 = \sqrt[4]{0,05} \approx 0,22$ ;  $N = \left\lceil \frac{1}{0,22} \right\rceil = [4,5] = 4$ , так как  $N$  должно быть четным;  $h = \frac{1}{4} = 0,25$ .

3 шаг. Составим таблицу значений функции  $f(x)$  в точках  $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ;

$x_i = a + i \cdot 0,25$ ;  $i = \overline{1, 4}$  с тремя знаками после запятой.

4

$\xi_i$	0,125	0,375	0,625	0,875
$f(\xi_i)$	0,985	0,877	0,719	0,566

$$J_{0,25} = 0,25 \sum_{i=1}^4 f(\xi_i) = 0,7867.$$

4 шаг. Положим  $h_1 = 2h_0 = 0,5$ ; вычислим

$$J_{0,5} = 0,5[f(0,25) + f(0,75)] = 0,5 \cdot [0,941 + 0,640] = 0,7905.$$

5 шаг. Определим  $\Delta = \frac{J_{h_1} - J_{h_0}}{3} = 0,0024$ .

6 шаг. Так как  $\Delta = 0,0024 \leq \varepsilon = 0,05$ , то положим  $J^R = \frac{4J_{h_0} - J_{h_1}}{3} = 0,78542$ .

Сравнение полученных результатов с точным значением интеграла показывает, что

$$\Delta J_{h_0} = |J - J_{0,2}| = |0,78539 - 0,7867| = 0,0013,$$

$$\Delta J^R = |J - J^R| = |0,78539 - 0,78542| = 0,00003,$$

следовательно,  $J_{0,2}$  имеет 2 верных знака, а  $J^R$  – 4 верных знака, что и следует из выражения (42).

Итак,  $J = 0,78542 \pm 0,0024$ .

Пример 5. Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  по формуле Симпсона с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

1 шаг. Положим  $h_0 \approx \sqrt[4]{\varepsilon} = 0,1$ , тогда  $N = \frac{1}{0,1} = 10$ , но так как  $N$  должно быть кратным 4, то выберем  $N = 8$ ;  $h = 0,125$ .

2 шаг. Составим таблицу значений функции  $f(x)$  в точках  $x_i = 0,125$ ;  $i = \overline{0,8}$  с шестью знаками после запятой.

$x_i$	0,0	0,125	0,25	0,375	0,5
$f(x_i)$	1,000000	0,984615	0,941176	0,876712	0,8

$x_i$	0,625	0,75	0,875	1,0
$f(x_i)$	0,719101	0,64	0,566372	0,500

$$J_{0,125} = \frac{0,125}{3} [1,0 + 0,5 + 4(0,984615 + 0,876712 + 0,719101 + 0,566372) +$$

Вычислим

$$+ 2(0,941176 + 0,8 + 0,64)] = \frac{1}{24} (1,5 + 12,5872 + 4,762352) = 0,785393.$$

4 шаг. Положим  $h_1 = 0,25$ ; вычислим

$$J_{0,25} = \frac{1}{12} [1,5 + 4(0,941176 + 0,64) + 2 \cdot 0,8] = 0,785392.$$

5 шаг. Определим  $\Delta = \frac{J_{0,125} - J_{0,25}}{15} = \frac{0,6 \cdot 10^{-5}}{15} = 0,4 \cdot 10^{-6}$ .

6 шаг. Так как  $\Delta = 0,4 \cdot 10^{-6} < \varepsilon = 10^{-4}$ , то вычислим

$$J^R = \frac{16 \cdot J_{0,125} - J_{0,25}}{15} = 0,7853984 \text{ и положим } J = 0,7853984 \pm 0,4 \cdot 10^{-4}.$$

ЗАДАЧА Г.

Вычислить интеграл по формуле прямоугольников с точностью 0,01.

$$1. \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}; \quad 2. \int_1^2 x^3 \lg x dx; \quad 3. \int_1^{2.2} \ln^2 x dx; \quad 4. \int_1^{2.2} \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$5. \int_0^1 x^2 \sin x dx; \quad 6. \int_0^{0.8} x^2 \cos x dx; \quad 7. \int_1^2 x^2 \lg x dx; \quad 8. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3};$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x}.$$

Вычислить интеграл по формуле трапеций с точностью 0,01.

$$10. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}; \quad 11. \int_1^2 x^3 \ln x dx; \quad 12. \int_1^{2.2} \lg^2 x dx; \quad 13. \int_1^{2.2} \sqrt{x} \lg x dx;$$

$$14. \int_0^1 x \sin x dx; \quad 15. \int_0^{0.8} x \cos x dx; \quad 16. \int_1^2 x^2 \ln x dx; \quad 17. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Вычислить интеграл по формуле Симпсона с точностью  $10^{-4}$ .

$$18. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}; \quad 19. \int_{1.5}^{2.5} x^2 \lg x dx; \quad 20. \int_{1.2}^{2.2} \ln^2 x dx; \quad 21. \int_1^{2.2} \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$22. \int_{0.5}^{1.5} x^2 \cos x dx; \quad 23. \int_{0.8}^{1.8} x \cos x dx; \quad 24. \int_{1.5}^{2.5} x^2 \lg x dx; \quad 25. \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x}.$$

#### 4.5. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Одномерная оптимизация.

##### Отделение корней. Метод хорд. Метод касательных. Метод итераций.

Рассмотрим некоторую функцию  $f(x)$ .

*Определение.* Всякое число  $\xi$ , обращающее функцию в ноль, то есть такое, что  $f(\xi) \equiv 0$ , называется корнем (нулем) функции или корнем уравнения

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Приближенное вычисление корня, как правило, распадается на две задачи:

1. Отделение корней, то есть определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.
2. Уточнение корня, то есть вычисление его с заданной степенью точности.

При отделении корней уравнения общего вида (1) часто используется известная из курса математического анализа теорема Больцано-Коши:

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то есть  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда существует такая точка  $\xi$ , принадлежащая интервалу  $(a, b)$ , в которой функция обращается в ноль.

Заметим, что корень будет единственным, если  $f'(x)$  (или  $f''(x)$ ) существует и сохраняет знак на рассматриваемом отрезке.

Остановимся более подробно на алгебраических уравнениях

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (2)$$

Верхнюю границу модулей корней уравнения (2) дает следующая теорема:

Пусть  $A = \max_{1 \leq i < n} |a_i|$ . Тогда любой корень  $\xi$  уравнения (2) удовлетворяет неравенству

$$|\xi| < 1 + \frac{A}{|a_0|} = R. \quad (3)$$

Из этой теоремы следует, что все корни уравнения (2) расположены внутри интервала  $(-R, R)$ .

Рассмотрим теперь задачу уточнения корня, то есть задачу вычисления корня  $\xi$  с заданной степенью точности  $\varepsilon$ . В дальнейшем во всех методах будем предполагать, что корень  $\xi$  уравнения (1) отделен на отрезке  $[a, b]$  и функция  $f(x)$  непрерывна вместе со своей производной.

Одним из простейших методов уточнения корня является метод хорд или, как еще его называют, метод пропорциональных частей. Для реализации этого метода необходимо предварительно выбрать отрезок  $[a, b]$ , содержащий искомый корень  $\xi$  так, чтобы  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняли знак и не обращались в 0 при  $x \in [a, b]$ . Определим величину  $m_1$  так, чтобы при  $x \in [a, b]$  выполнялось неравенство:

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0.$$

Последовательность приближенных значений  $\{x_n\}$  корня  $\xi$  строится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}(x_n - c), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

где  $c$  – один из концов отрезка  $[a, b]$ , удовлетворяющий условию:  $f(c) \cdot f''(c) > 0$ . За начальное приближение  $x_0$  в методе хорд принимается конец отрезка, противоположный  $c$ . Абсолютная погрешность  $\Delta x_{n+1}$  приближения  $x_{n+1}$  оценивается формулой

$$\Delta x_{n+1} = \frac{|f(x_{n+1})|}{m_1}. \quad (5)$$

*Сформулируем алгоритм метода хорд.*

Шаг 1.  $N = 0$ .

Шаг 2. Если  $f(a) \cdot f''(a) > 0$ , то идти на шаг 4.

Шаг 3.  $x_n = a$ ;  $c = b$ , идти на шаг 5.

Шаг 4.  $x_n = b$ ;  $c = a$ .

Шаг 5. Вычислить  $x_{n+1}$  и  $\Delta x_{n+1}$  по формулам (4) и (5).

Шаг 6. Если  $\Delta x_{n+1} \leq \varepsilon$ , то  $\xi = x_{n+1} \pm \Delta x_{n+1}$ , конец.

Шаг 7.  $n = n + 1$ , идти на шаг 5.

Рассмотрим еще один метод вычисления корня  $\xi$  с заданной степенью точности – метод касательных (Ньютона). Будем предполагать, как и в методе хорд, что функция  $f(x)$  на концах отрезка  $[a, b]$  имеет разные по знаку значения; ее первая и вторая производные сохраняют свои знаки и не обращаются в ноль при  $x \in [a, b]$ . Определим  $m_1 = \min_{[a, b]} |f'(x)|$ ;

$M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$ . Приближенное значение  $x_{n+1}$  корня  $\xi$  вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, \dots \quad (6)$$

В качестве начального приближения  $x_0$  выбирается тот конец отрезка  $[a, b]$ , в котором функция  $f(x)$  и ее вторая производная  $f''(x)$  имеют одинаковые по знаку значения. Абсолютная погрешность полученного методом касательных приближения  $x_{n+1}$  определяется по формуле

$$\Delta x_{n+1} = \frac{M_2}{2m_1} (x_{n+1} - x_n)^2. \quad (7)$$

*Сформулируем алгоритм метода касательных.*

Шаг 1.  $N = 0$ .

Шаг 2. Если  $f(a) \cdot f''(a) < 0$ , то идти на шаг 4.

Шаг 3.  $x_n = a$ ; идти на шаг 5.

Шаг 4.  $x_n = b$ .

Шаг 5. Вычислить  $x_{n+1}$  и  $\Delta x_{n+1}$  по формулам (6) и (7).

Шаг 6. Если  $\Delta x_{n+1} \leq \varepsilon$ , то  $\xi = x_{n+1} \pm \Delta x_{n+1}$ , конец.

Шаг 7.  $n = n + 1$ , идти на шаг 5.

Один из наиболее важных методов уточнения корней является метод итераций. Для реализации этого метода необходимо уравнение (1) преобразовать в эквивалентное ему уравнение вида

$$x = \varphi(x) \quad (8)$$

и построить последовательность

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n=0,1,\dots \quad (9)$$

При этом для обеспечения сходимости метода правая часть уравнения (8) должна удовлетворять условиям:  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ ,  $\varphi(x) \in [a, b]$  при  $x \in [a, b]$  и  $x_0 \in [a, b]$ .

Абсолютная погрешность приближенного значения  $x_{n+1}$  определяется по формуле:

$$\Delta x_{n+1} = \frac{q}{1-q} |x_{n+1} - x_n|. \quad (10)$$

*Теперь сформулируем алгоритм метода итераций.*

Шаг 1. Задать  $x_0 \in [a, b]$ .

Шаг 2.  $N = 0$ .

Шаг 3. Вычислить  $x_{n+1}$ ,  $\Delta x_{n+1}$  по формулам (9), (10).

Шаг 4. Если  $\Delta x_{n+1} \leq \varepsilon$ , то  $\xi = x_{n+1} \pm \Delta x_{n+1}$ , конец.

Шаг 5.  $n = n + 1$ , идти на шаг 3.

Приведем один из возможных примеров построения уравнения (8). Пусть при  $x \in [a, b]$   $0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1$ . Тогда принять  $\varphi(x) = x - \frac{2}{M_1 + m_1} f(x)$  при  $f'(x) > 0$  и

$\varphi(x) = x + \frac{2}{M_1 + m_1} f(x)$  при  $f'(x) < 0$ . Так что соотношение (9) в этом случае

преобразуется к виду:

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{2}{M_1 + m_1} f(x_n), \quad (11)$$

а оценка погрешности (10) -

$$\Delta x_{n+1} = \frac{M_1 - m_1}{2m_1} |x_{n+1} - x_n|. \quad (12)$$

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ.

Задача 1. Отделить корни уравнения

$$e^x - 3x = 0$$

Решение. Функция  $f(x) = e^x - 3x$  непрерывна на всей числовой оси, следовательно, мы можем воспользоваться теоремой Больцано-Коши. Заметим, что при  $x \leq 0$   $f(x) > 0$ ; далее  $f(x) < 0$ , а при  $x \geq 3$   $f(x) > 0$ . Это означает, что при  $x \leq 0$  и при  $x \geq 3$  данное уравнение не имеет действительных корней. С другой стороны, мы

имеем два отрезка:  $[0,1]$  и  $[1,3]$ , на концах которых непрерывная функция  $f(x)$  принимает противоположные по знаку значения. Следовательно, на этих отрезках имеется по крайней мере по одному корню.

Рассмотрим теперь первую производную функции  $f'(x) = e^x - 3$ . Она сохраняет знак (отрицательна) на отрезке  $[0,1]$ ; следовательно, на этом отрезке уравнение имеет только один корень. На втором отрезке  $[1,3]$   $f'(x)$  знака не сохраняет. Рассмотрим вторую производную  $f''(x) = e^x$ . Вторая производная положительна на всей числовой оси, поэтому на отрезке  $[1,3]$  - также один корень уравнения.

Задача 2. Отделить корни уравнения

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Решение. Данное уравнение – алгебраическое уравнение третьей степени. Найдем границы его корней.

$$A = \max\{|3|, |-7|, |1|\} = 7; \quad a_0 = 2; \quad R = 1 + \frac{7}{2} = 4,5.$$

Таким образом, все корни уравнения находятся внутри отрезка  $[-4,5, 4,5]$ .

Определим знаки функции  $f(x)$  в различных точках этого отрезка.

$X$	-4,5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-	-	-	+	+	+	-	+

На концах отрезков  $[-3; -2]$ ,  $[0; 1]$ ,  $[1; 2]$  непрерывная функция  $f(x)$  имеет разные по знаку значения, следовательно, в каждом из этих отрезков содержится по крайней мере один корень уравнения. Поскольку алгебраическое уравнение третьей степени может иметь не более трех действительных корней, то в каждом из этих отрезков содержится ровно один корень уравнения. Таким образом, задача отделения корней данного уравнения решена:

$$\xi_1 \in [-3; -2], \quad \xi_2 \in [0; 1], \quad \xi_3 \in [1; 2].$$

Задача 3. Методом хорд вычислить наибольший корень уравнения  $2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$  с точностью до двух верных знаков в узком смысле.

Решение. В задаче 2 показано, что наибольший корень данного уравнения принадлежит отрезку  $[1; 2]$ . Следовательно, уточнение корня необходимо производить до тех пор, пока не будет достигнута точность  $\varepsilon = 0,05$ . Производная  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 7$  на рассматриваемом отрезке  $[1; 2]$  положительна, причем

$$m_1 = \min_{[1; 2]} |f'(x)| = 5.$$

Вторая производная  $f''(x) = 12x + 6$  тоже положительна на отрезке  $[1; 2]$ . Вычислим  $f(1) = -1$ ;  $f(2) = 15$ . Очевидно, что начальное приближение  $x_0 = 1$ , а  $c = 2$ . Перейдем непосредственно к уточнению корня по формуле (4):

$$x_1 = 1 - \frac{-1}{-1 - 1,5}(1 - 2) = 1,06.$$

Оценим погрешность полученного приближенного значения по формуле (5), предварительно определив  $f(x_1) = -0,67$ .

$$\Delta x_1 = 0,67 / 5 = 0,14.$$

Поскольку требуемая точность еще не достигнута ( $\Delta x_1 > \varepsilon$ ), продолжим вычисления, а весь процесс решения оформим в виде следующей таблицы:

Таблица 2.

n	$X_n$	$f(x_n)$	$\Delta x_n$
1	1,06	-0,68	0,14
2	1,10	-0,41	0,09
3	1,12	-0,27	0,06
4	1,14	-0,12	0,03

Из таблицы 2 видно, что погрешность метода  $\Delta x_4 = 0,03$  меньше требуемой точности  $\varepsilon = 0,05$ .

Далее, поскольку все вычисления проводились с двумя знаками после запятой, то необходимо учесть погрешность округления, равную 0,005. Окончательный результат следует представить в виде:

$$\xi = 1,14 \pm 0,35.$$

Задача 4. Вычислить методом касательных корень уравнения  $2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$ , расположенный на отрезке  $[0; 1]$  с точностью до 0,005.

Решение. Вычислим значение функции на концах отрезка  $[0; 1]$ :  $f(0) = 1$ ;  $f(1) = -1$ . Определив первую и вторую производные, заметим, что первая производная меняет свой знак на отрезке  $[0; 1]$ . Сузим рассматриваемый отрезок так, чтобы на новом отрезке первая производная не меняла знака. Рассмотрим середину отрезка  $[0; 1]$  - точку 0,5. Вычислим значение функции в этой точке:  $f(0,5) = -1,5$ . Следовательно, корень данного уравнения принадлежит отрезку  $[0; 0,5]$ . На этом новом отрезке первая производная сохраняет свой знак (отрицательна), вторая производная тоже сохраняет знак (положительна). Вычислим

$$m_1 = \min_{[0; 0,5]} |f'(x)| = 2,5; \quad M_2 = \max_{[0; 0,5]} |f''(x)| = 12.$$

Так как на левом конце отрезка  $[0; 0,5]$  функция  $f(x)$  имеет тот же знак, что и ее вторая производная, в качестве начального приближения возьмем точку 0:  $x_0 = 0$ .

$$x_1 = 0 - 1 / (-7) = 0,143.$$

Погрешность этого значения есть (формула (7)):

$$\Delta x_1 = \frac{12}{2 \cdot 2,5} \cdot (0,143 - 0)^2 < 0,05,$$

что больше требуемой точности  $\varepsilon = 0,005$ , поэтому следует перейти к вычислению приближения  $x_2$ .

$$x_2 = 0,143 - \frac{0,066}{(-6,019)} = 0,154; \quad \Delta x_2 = \frac{12}{2 \cdot 2,5} (0,154 - 0,143)^2 = 0,0003.$$

Погрешность второго приближения  $\Delta x_2 = 0,0003$  меньше требуемой точности  $\varepsilon = 0,005$ . Учитывая погрешность округления, равную 0,0005, получим:

$$\xi = 0,154 \pm 0,0008.$$

Задача 5. Методом итераций вычислить отрицательный корень уравнения  $2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$  с точностью до  $\varepsilon = 0,05$ .

Решение. В задаче 2 было показано, что отрицательный корень данного уравнения находится на отрезке  $[-3; -2]$ .

Вычислим:

$$M_1 = \max_{[-3; -2]} |f'(x)| = 29; \quad m_1 = \min_{[-3; -2]} |f'(x)| = 5.$$



Таким образом, итерационный процесс (11) примет следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{17}(2x_n^3 + 3x_n^2 - 7x_n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а оценка погрешности (12)

$$\Delta x_{n+1} = 2,4|x_{n+1} - x_n|.$$

В качестве начального приближения примем середину рассматриваемого отрезка  $[-3; -2]$ :  $x_0 = -2,5$ .

Далее вычислим приближение корня:

$$x_1 = x_0 - 1 / 17(2x_0^3 + 3x_0^2 - 7x_0 + 1) = -2,853.$$

Оценим погрешность приближенного значения  $x_1$ :

$$\Delta x_1 = 2,4|x_1 - x_0| = 0,85,$$

что больше требуемой точности  $\varepsilon = 0,05$ , поэтому следует перейти к вычислению  $x_2$  и его погрешности.

Дальнейшие рассуждения аналогичны вышеприведенным, а весь итерационный процесс удобно оформить в виде следующей таблицы:

Таблица 3.

N	$X_{n-1}$	$X_n$	$\Delta X_n$
1.	-2,5	-2,853	0,848
2.	-2,857	-2,791	0,149
3.	-2,791	-2,816	0,060
4.	-2,816	-2,807	0,022

Из таблицы 3 видно, что требуемая точность достигнута и можно принять  $\xi = -2,81 \pm 0,025$ .

Следует отметить, что все вычисления велись с двумя запасными знаками, а погрешность округления (0,003) добавлена к погрешности метода.

### Методы одномерной оптимизации.

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $P \subseteq E_1$ . Задачей одномерной оптимизации будем называть задачу, в которой требуется найти

$$\max (\min) f(x), \quad x \in P$$

Решением или точкой максимума (минимума) этой задачи назовем такую точку  $x^* \in P$ , что  $f(x^*) \geq (\leq) f(x)$  для всех  $x \in P$ . Запишем

$$f(x^*) = \max_{x \in P} (\min) f(x)$$

Методы одномерной оптимизации условно подразделяются на три группы. К первой группе относятся методы, основанные лишь на вычислении значений самой функции  $f(x)$  (методы нулевого порядка).

Вторую группу составляют методы, использующие значения как самой функции, так и ее первой производной (методы первого порядка). И, наконец, к третьей группе относятся методы, использующие значения функции, ее первой и второй производной (методы второго порядка).

В дальнейшем будем считать, что максимизируемая функция является унимодальной.

Определение. Функция  $f(x)$  называется унимодальной на множестве  $P$ , если существует единственная точка  $x^*$  ее максимума на  $P$  и для любых  $x_1, x_2 \in P$ :

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x^*), \text{ если } x_1 \leq x_2 \leq x^*;$$

$$f(x^*) \geq f(x_1) \geq f(x_2), \text{ если } x^* \leq x_1 \leq x_2.$$

Другими словами, унимодальная функция монотонно возрастает слева от точки максимума и монотонно убывает справа от нее.

Отметим, что предположение об унимодальности функции в окрестности точки  $x^*$  весьма естественно, поэтому получение информации о таком промежутке является важным этапом процедуры оптимизации. Обычно в процессе применения методов одномерной оптимизации можно выделить два этапа: поиск отрезка, содержащего точку максимума, и уменьшение длины этого отрезка до заранее установленной величины (уточнение координаты точки максимума на данном отрезке).

#### Поиск отрезка, содержащего точку максимума. Алгоритм Свенна.

Исходные данные.  $x_0$  - начальная точка,  $h$  - шаг поиска ( $h > 0$ ).

Шаг 1. Вычислить  $f(x_0)$ ;  $f(x_0+h)$ ;  $f(x_0-h)$ ;  $k=1$ .

Шаг 2. Если  $f(x_0-h) \leq f(x_0) \leq f(x_0+h)$ , то  $x_1 = x_0 + h$ , перейти к шагу 4.

Шаг 3. Если  $f(x_0-h) \geq f(x_0) \geq f(x_0+h)$ , то  $x_1 = x_0 - h$ ,  $h = -h$ , перейти к шагу 4, в противном случае ( $f(x_0-h) \leq f(x_0) \geq f(x_0+h)$ )  $a = x_0 - h$ ;  $b = x_0 + h$ , конец.

Шаг 4.  $x_{k+1} = x_k + 2^k h$ , вычислить  $f(x_{k+1})$ .

Шаг 5. Если  $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ , то  $k = k + 1$ , перейти к шагу 4.

Шаг 6. Если  $h > 0$ , то  $a = x_{k-1}$ ,  $b = x_{k+1}$ , конец, в противном случае  $a = x_{k+1}$ ,  $b = x_{k-1}$ , конец.

Заметим, что случай  $f(x_0-h) \geq f(x_0) \leq f(x_0+h)$  (шаг 3) не рассматривается, так как он противоречит предположению об унимодальности функции  $f(x)$ .

Уменьшение длины отрезка, содержащего точку максимума, достигается путем последовательного исключения частей этого отрезка. Величина интервала, исключаемого на каждом шаге, зависит от расположения двух пробных точек внутри отрезка. Поскольку координата точки максимума априори неизвестна, целесообразно размещать пробные точки таким образом, чтобы обеспечивать уменьшение длины отрезка в одном и том же отношении.

#### Дихотомический поиск (метод деления отрезка пополам).

Пробные точки  $y, z$  на каждом шаге этого метода выбираются следующим образом:

$$y = \frac{a+b}{2} - \delta; \quad z = \frac{a+b}{2} + \delta,$$

где  $\delta$  – параметр метода,  $0 < \delta < (b-a)$ .

При малых  $\delta$  каждая из пробных точек делит отрезок почти пополам, т.е. исключению будет подлежать почти половина отрезка.

Алгоритм.

Исходные данные. Отрезок  $[a; b]$ , содержащий точку максимума; параметр  $\delta$  и параметр окончания счета  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 2\delta$ ).

Шаг 1.  $a_1 = a$ ;  $b_1 = b$ ;  $k = 1$ .

Шаг 2. Если  $b_k - a_k < \varepsilon$ ,  $x^* \in [a_k, b_k]$ , конец.

Шаг 3.  $y = \frac{a_k + b_k}{2} - \delta$ ;  $z = \frac{a_k + b_k}{2} + \delta$ ;

$A = f(y)$ ;  $B = f(z)$ .

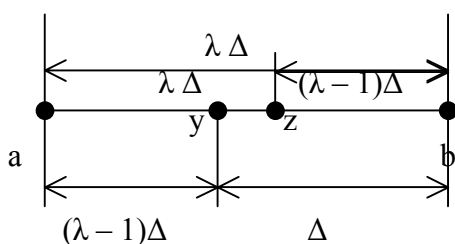
Шаг 4. Если  $A > B$ , то  $a_{k+1} = a_k$ ;  $b_{k+1} = z$ ; в противном случае  $a_{k+1} = y$ ;  $b_{k+1} = b_k$

Шаг 5.  $k = k+1$ , перейти к шагу 2.

На каждой итерации дихотомического поиска производятся два вычисления значения функции и после  $n$  вычислений ( $n/2$  итераций) длина начального интервала уменьшается приблизительно в  $2^{n/2}$  раз.

#### Метод золотого сечения.

Как известно, золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Легко доказать, что золотое сечение отрезка  $[a; b]$  производится двумя точками  $y$  и  $z$ , симметричными относительно середины отрезка.



$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a} = \frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z} = \lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180...$$

Отсюда

$$y = (\lambda - 1)a + (\lambda - 1)^2 b = 0,618 a + 0,382 b.$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a + (\lambda - 1)b = 0,382 a + 0,618 b.$$

Нетрудно также проверить, что точка  $y$  производит золотое сечение отрезка  $[a; z]$ , а точка  $z$  производит золотое сечение отрезка  $[y; b]$ . На этом свойстве, позволяющем на каждой итерации вычислить значение функции лишь в одной пробной точке, и основан алгоритм метода золотого сечения.

Исходные данные:  $[a; b]$  – отрезок, содержащий точку максимума;  $\varepsilon$  – параметр окончания счета.

Шаг 1.  $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ;  $k = 1$ ;  $a_k = a$ ;  $b_k = b$ ;

$$y = (\lambda - 1)a_k + (\lambda - 1)^2 b_k; A = f(y);$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_k + (\lambda - 1)b_k; B = f(z).$$

Шаг 2. Если  $A > B$ , то перейти к шагу 4.

Шаг 3.  $a_{k+1} = y$ ;  $b_{k+1} = b_k$ ;

$$y = z; A = B;$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_{k+1} + (\lambda - 1)b_{k+1};$$

$$B = f(z), \text{ перейти к шагу 5.}$$

Шаг 4.  $a_{k+1} = a_k$ ;  $b_{k+1} = z$ ;  $z = y$ ;  $B = A$ ;

$$y = (\lambda - 1)a_{k+1} + (\lambda - 1)^2 b_{k+1};$$

$$A = f(y).$$

Шаг 5. Если  $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$ , то

$$x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}], \text{ конец.}$$

Шаг 6.  $k = k + 1$ , перейти к шагу 2.

Как было отмечено выше, на каждой итерации метода золотого сечения производится лишь одно вычисление значения функции. При этом длина полученного в результате одной итерации отрезка составит  $(\lambda-1)\Delta$ , где  $\Delta$  – длина исходного интервала.

Если сравнить методы дихотомического поиска и золотого сечения, используя в качестве критерия эффективности  $F = \frac{\Delta_n}{\Delta}$  – относительное уменьшение интервала после  $n$  вычислений значений функции  $f(x)$ , где  $\Delta_n$  – длина интервала, полученного после  $n$  вычислений, то

$$F = \begin{cases} (0,5)^{n/2} & \text{для дихотомического поиска;} \\ (0,6180)^n & \text{для метода золотого сечения,} \end{cases}$$

т.е. метод золотого сечения оказывается более эффективным.

#### Метод средней точки.

Для отыскания корня уравнения  
 $f'(x) = 0$ ,

которому соответствует точка максимума унимодальной и дифференцируемой на заданном отрезке функции  $f(x)$ , будем пользоваться алгоритмом исключения интервалов, на каждой итерации которого рассматривается лишь одна точка  $z$ .

Если в точке  $z$  выполняется условие  
 $f'(z) > 0$ ,

то с учетом предположения об унимодальности можно утверждать, что точка максимума не может находиться левее точки  $z$ , следовательно, интервал  $x \leq z$  может быть исключен. С другой стороны, если  $f'(z) < 0$ , то точка максимума не может находиться правее точки  $z$ , т.е. исключению подлежит интервал  $x \geq z$ . На этих рассуждениях и основан метод средней точки (поиск Больцано).

#### Алгоритм.

Исходные данные. Точки  $a$  и  $b$  такие, что  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) < 0$ ,  $\varepsilon$  – параметр окончания счета.

Шаг 1.  $z = \frac{a+b}{2}$ . Вычислить  $f'(z)$ .

Шаг 2. Если  $|f'(z)| \leq \varepsilon$ , то  $x^* \approx z$ , конец.

Шаг 3. Если  $f'(z) > 0$ , то  $a = z$ , перейти к шагу 1. В противном случае  $b = z$ , перейти к шагу 1.

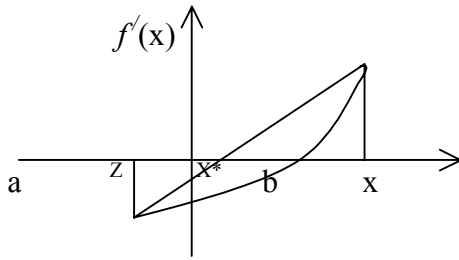
#### Метод хорд (секущих).

При реализации этого метода учитывается не только знак производной, но и ее значение. Метод заключается в решении уравнения

$$f'(x) = 0$$

методом хорд и носит поэтому те же название.

Предполагаем, как и в предыдущем разделе, что знаки производной унимодальной функции  $f(x)$  на концах отрезка  $[a; b]$  различны:  $f'(a) > 0$ ;  $f'(b) < 0$ .



Тогда приближение  $z$  к стационарной точке  $x^*$  определится по формуле:

$$z = b - \frac{f'(b)}{f'(b) - f'(a)}(b - a). \quad (13)$$

Алгоритм метода хорд тот же, что и алгоритм метода средней точки за исключением того, что координата точки  $z$  вычисляется по формуле (13).

### Метод Ньютона-Рафсона.

Предполагаем, что унимодальная функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема. Тогда для решения уравнения  $f'(x)=0$  можно применить метод касательных (Ньютона)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Алгоритм.

Исходные данные.  $x_0$ - начальная оценка координаты стационарной точки,  $\xi$  – параметр окончания счета.

Шаг 1.  $k=0$ .

Шаг 2.  $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$

Шаг 3. Если  $|f'(x_{k+1})| < \xi$ , то  $x^* = x_{k+1}$ , конец.

Шаг 4.  $k=k+1$ , перейти к шагу 2.

Последовательность (14) сходится к стационарной точке лишь при выполнении определенных условий, накладываемых на вид функции и выбор начальной точки (теорема о сходимости метода касательных).

Типовые задачи.

Задача 6. Определить отрезок, содержащий точку максимума функции

$$f(x) = 200x - x^2 - 10000; x_0 = 30; h = 5.$$

Решение.

$$f(x_0) = f(30) = -4900;$$

$$f(x_0 + h) = f(35) = -4225;$$

$$f(x_0 - h) = f(25) = -5625.$$

Поскольку  $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ ,

$$x^* > 30, x_1 = 35.$$

Далее  $x_2 = x_1 + 2h = 35 + 10 = 45$ .

$$f(x_2) = f(45) = -3025 > f(x_1)$$

$$x^* > 35, x_3 = x_2 + 2^3 \cdot h = 45 + 20 = 65.$$

$$f(x_3) = f(65) = -1225 > f(x_2).$$

$$x^* > 45, x_4 = x_3 + 2^3 \cdot h = 65 + 40 = 105.$$

$$f(x_4) = f(105) = -25 > f(x_3),$$

$$x^* > 65, x_5 = x_4 + 2^4 \cdot h = 105 + 80 = 185.$$

$$f(x_5) = f(185) = -7225 < f(x_4),$$

$$x^* < 185, a = 65, b = 185.$$

Задача 7. Найти точку максимума функции  $f(x) = \sin(x)$  на отрезке  $[1,5; 1,6]$  методом дихотомического поиска.  $\delta = 0,01; \varepsilon = 0,035$ .

Решение.

Итерация 1.

$$b_1 - a_1 = 0,1 > \varepsilon,$$

$$y = \frac{1,5 + 1,6}{2} - 0,01 = 1,54;$$

$$z = \frac{1,5 + 1,5}{2} + 0,01 = 1,56; A = f(1,54) = 0,9995;$$

$$B = f(1,56) = 0,9999;$$

$$A < B, a_2 = 1,54; b_2 = 1,58;$$

Итерация 2.

$$b_2 - a_2 = 0,06 > \varepsilon.$$

$$y = \frac{1,54 + 1,6}{2} - 0,01 = 1,56;$$

$$z = \frac{1,54 + 1,6}{2} + 0,01 = 1,58;$$

$$A = f(1,56) = 0,9999; B = f(1,58) = 1,0000;$$

$$A < B; a_3 = 1,56; b_3 = 1,6.$$

Итерация 3.

$$b_3 - a_3 = 0,04 > \varepsilon,$$

$$y = 1,57; z = 1,59; A = 1,000; B = 0,9998;$$

$$A > B; a_4 = a_3 = 1,56; b_4 = 1,59.$$

Итерация 4.

$$b_4 - a_4 = 0,03 < \varepsilon; x^* \in [1,56; 1,59].$$

Задача 8. Найти точку максимума функции  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[1,5; 1,6]$  методом золотого сечения,  $\varepsilon = 0,02$ .

Решение.  $\lambda = 1,6180; a_1 = 1,5; b_1 = 1,6$ .

$$y = 0,6180 \cdot 1,5 + 0,3820 \cdot 1,6 = 1,5382.$$

$$z = 0,3820 \cdot 1,5 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5618.$$

$$A = \sin y = 0,99947; B = \sin z = 0,99996.$$

Итерация 1. Так как  $A < B$ , то  $a_2 = y = 1,5382; b_2 = b_1 = 1,6$ .

$$y = z = 1,5618; A = B = 0,99996;$$

$$z = 0,3820 \cdot 1,5382 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5764;$$

$$B = \sin z = 0,999984;$$

$$b_2 - a_2 = 0,0618 > \varepsilon.$$

Итерация 2. Так как  $A < B$ , то  $a_3 = y = 1,5618; b_3 = b_2 = 1,6$ .

$$y = z = 1,5764; A = B = 0,99998;$$

$$z = 0,3820 \cdot 1,5618 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5854;$$

$$B = \sin z = 0,99989;$$

$$b_3 - a_3 = 0,0382 > \varepsilon.$$

Итерация 3. Так как  $A > B$ , то  $a_4 = a_3 = 1,5618$ ;  $b_4 = z = 1,5854$ .

$$z = y = 1,5764; B = A = 0,99998;$$

$$y = 0,6180 \cdot 1,5618 + 0,3820 \cdot 1,5854 = 1,5708;$$

$$A = 1,00000;$$

$$b_4 - a_4 = 0,0236 > \varepsilon.$$

Итерация 4. Так как  $A > B$ , то  $a_5 = a_4 = 1,5618$ ;  $b_5 = z = 1,5764$ .

$$z = y = 1,5708; B = A = 1,00000;$$

$$y = 0,6180 \cdot 1,5618 + 0,3820 \cdot 1,5764 = 1,5674;$$

$$A = \sin y = 0,99999;$$

$$b_5 - a_5 = 0,0146 < \varepsilon, \text{ следовательно,}$$

$$x^* \in [1,5618; 1,5764].$$

Задача 8. Найти точку максимума функции  $f(x) = -2x^2 - 16/x$  на отрезке  $[1; 5]$  методом средней точки,  $\varepsilon = 0,1$ .

Решение.

$$f'(x) = 16/x^2 - 4x.$$

Итерация 1.

$$z = \frac{1+5}{2} = 3; f'(3) = -10,222 < 0; b=3.$$

Итерация 2.

$$z = \frac{1+3}{2} = 2; f'(2) = -4 < 0; b=2.$$

Итерация 3.

$$z = \frac{1+2}{2} = 1,5; f'(1,5) = 1,111 > 0; a=1,5.$$

Итерация 4.

$$z = \frac{1,5+2}{2} = 1,75; f'(1,75) = -1,775 < 0; b=1,75.$$

Итерация 5.

$$z = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625; f'(1,625) = -0,441 < 0; b=1,625.$$

Итерация 6.

$$z = \frac{1,5+1,625}{2} = 1,562; f'(1,562) = 0,3036 > 0; a=1,5625.$$

Итерация 7.

$$z = \frac{1,5625+1,625}{2} = 1,594; f'(1,594) = -0,077;$$

$$|f'(1,594)| < \varepsilon, x^* \approx 1,594.$$

Задача 10. Найти точку максимума функции  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[1; 3]$  методом Ньютона-Рафсона,  $x_0=2$ ;  $\varepsilon = 0,001$ .

Решение.

Итерация 1.

$$f'(2) = \cos 2 = -0,4161; f''(2) = -\sin 2 = -0,9093;$$

$$x_1 = 2 - \frac{0,4161}{-0,9093} = 1,5424; f'(x_1) = \cos 1,5424 = 0,0284 > \varepsilon.$$

Итерация 2.

$$f''(1,5424) = -\sin 1,5424 = -0,9996;$$

$$x_2 = 1,5424 - \frac{0,0284}{(-0,9996)} = 1,5708;$$

$$|f'(1,5708)| = |\cos 1,5708| = |-0,000015| < \varepsilon;$$

$$x^* = 1,5708.$$

Задача Д1.

Отделить все корни уравнения  $f(x)=0$  и вычислить 3 корня с точностью до трех знаков различными методами (хорд, касательных, итераций).

1.  $x^3 - 10x + 2 = 0$

2.  $x^5 - 7x + 1 = 0$

3.  $5\cos x + x = 0$

4.  $x^3 - 9x + 2 = 0$

5.  $x^5 - 6x + 2 = 0$

6.  $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$

7.  $3\sin x - x - 0,2 = 0$

8.  $x^3 - 3x - 1 = 0$

9.  $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$

10.  $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$

11.  $x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0$

12.  $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$

13.  $x^3 - 8x + 2 = 0$

14.  $x^3 - 7x + 3 = 0$

15.  $x^3 - 12x + 1 = 0$

16.  $2x^3 - 7x + 3 = 0$

17.  $3x^3 - 5x + 1 = 0$

18.  $x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = 0$

19.  $4\cos x - x = 0$

20.  $2x^3 - 9x + 2 = 0$

21.  $2x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = 0$

22.  $x^3 - 11x + 4 = 0$

23.  $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$

24.  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

25.  $x^5 - 6x^2 + 1 = 0$

Задача Д2.

Методом Свенна найти отрезок, содержащий точку экстремума унимодальной функции  $f(x)$ .

Вычислить точку экстремума методом хорд,  $\varepsilon = 0,05$ .

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = 3x - x^2 - 1 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 2x - x^2 - 1 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 2x^2 + 3 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \rightarrow \min.$$

Вычислить точку экстремума методом Ньютона-Рафсона,  $\varepsilon = 0,01$ .

$$f(x) = 10x^2 + 7x + 1 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = 15x - 2x^2 + 5 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 3 + 7x - 2x^2 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 4 - 3x^2 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 5 - 4x - x^2 \rightarrow \max.$$

Вычислить точку экстремума методом средней точки,  $\varepsilon = 0,05$ .

$$f(x) = 4 - 5x + x^2 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = 4 - 2x - x^2 \rightarrow \max.$$

$$f(x) = 2 - x^2 \rightarrow \max.$$

Вычислить точку экстремума методом дихотомического поиска,  $\varepsilon = 0,2$ .

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow \max.$$



$$\frac{x^2 - 1}{f(x) = x^2 + 1 \rightarrow \min.}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \rightarrow \min.$$

$$f(x) = x^2 + 2 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = x^2 + x + 2 \rightarrow \min.$$

Вычислить точку экстремума методом золотого сечения,  $\varepsilon = 0,2$ .

$$f(x) = 3 - x - x^2 \rightarrow \max.$$

$$\frac{1 - x^2}{f(x) = 1 + x^2 \rightarrow \max.}$$

$$f(x) = 2x^2 - 7x - 3 \rightarrow \min.$$

$$f(x) = x^2 + 4x - 5 \rightarrow \min.$$

$$25 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow \min.$$

#### 4.6. Решение систем линейных уравнений.

Точные и приближенные методы. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Метод простой итерации.

Современному экономисту приходится решать достаточно большие системы линейных уравнений. Так, при составлении межотраслевого баланса число неизвестных превышает сто. Данная тема посвящена этому актуальному разделу программы.

Все методы решения систем уравнений можно разбить на условно точные и приближенные. К точным алгоритмам относится – метод Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса и т.д. Среди приближенных следует отметить, прежде всего, итерационные методы, метод квадратного корня и т.д.

Контрольная работа предусматривает решение одной системы методом Гаусса с выбором главного элемента и одной системы методом простой итерации. Примеры на эти методы разобраны ниже.

Метод Гаусса с выбором главного элемента.

Запишем систему линейных уравнений следующим образом:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (1)$$

Расширенная матрица  $A$  этой системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

На первом шаге элемент  $a_{11} \neq 0$  называется ведущим. Разделим на него первую строку матрицы  $A$ , в результате получим (3).

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (3)$$

Найдем  $x_1$  из (3), подставим его значение во все остальные уравнения и тем самым исключим  $x_1$  из всех уравнений, кроме первого. Взяв теперь полученную

систему без первого уравнения, повторяем этот процесс, беря в качестве ведущего элемента коэффициент при  $x_2$  и т.д. Этот процесс, называемый прямым ходом метода Гаусса, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего ( $n$ -ого) уравнения не останется лишь один член с неизвестным  $x_n$ , т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду. Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное неизвестное  $x_n$ . Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем  $x_{n-1}$  и т.д. Последним находим  $x_1$  из первого уравнения.

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента. Она состоит в том, что требование  $a_{kk} \neq 0$  (на  $a_{kk}$  происходит деление в процессе исключения) заменяется более жестким: из всех оставшихся в матрице элементов нужно выбрать наибольший по модулю и представить уравнение так, чтобы этот элемент оказался на месте ведущего элемента  $a_{kk}$ .

Схему вычислений по методу Гаусса с выбором главного элемента поясняет следующий пример:

$$\begin{aligned} 2,74x_1 - 1,18x_2 + 3,17x_3 &= 2,18; \\ 1,12x_1 + 0,83x_2 - 2,16x_3 &= -1,15; \\ 0,18x_1 + 1,27x_2 + 0,76x_3 &= 3,23. \end{aligned}$$

Решение ведется в таблице 1.

Выбираем максимальный элемент в столбцах  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  раздела А ( $a_{13}=3,17$ ). Заполняем столбец  $m_i$  раздела А, полученный делением элементов столбца  $x_3$  (результат деления берется с обратным знаком) на максимальный элемент  $a_{13}=3,17$ :

$$\frac{-(-2,16)}{3,17} = 0,6814 \quad ; \quad -\frac{0,76}{3,17} = -0,2397$$

Таблица 1.

	$m_i$	Коэф-ты при неизвестных			Сво-бодн. члены	$\Sigma$	$\Sigma'$
		$x_1$	$x_2$	$x_3$			
А	-1	2,74	-1,18	3,17	2,18	6,91	—
	0,6814	1,12	0,83	-2,16	-1,15	-1,36	
	—	0,18	1,27	0,76	3,23	5,44	
	0,2397						
Б	-1	2,9870	0,0259	—	0,335	3,348	3,348
	0,1596	—	1,5528	—	5	4	5
		0,4768			2,707	3,783	3,783
					5	5	7
В	—	—	1,5569	—	2,760	4,317	4,318
					1	0	1

В столбец  $\Sigma$  записываются суммы коэффициентов строк матрицы А:

$$\begin{aligned} 2,74 + (-1,18) + 3,17 + 2,18 &= 6,91; \\ 1,12 + 0,83 + (-2,16) + (-1,15) &= -1,36; \\ 0,18 + 1,27 + 0,76 + 3,23 &= 5,44. \end{aligned}$$

Переход к разделу Б ведется следующим образом: строку, содержащую главный (ведущий) элемент, умножаем на  $m_i$  и прибавляем к соответствующей  $i$ -ой строке.

Результат записываем в раздел Б. Строка с ведущим элементом в раздел Б не переписывается.

$$2,74 \cdot 0,6814 + 1,12 = 2,9870;$$

$$(-1,18) \cdot 0,6814 + 0,83 = 0,0259;$$

$$2,28 \cdot 0,6814 + (-1,15) = 0,3355;$$

$$6,91 \cdot 0,6814 + (-1,36) = 3,3485$$

(результат заносится в столбец  $\Sigma'$ ).

Далее считаем сумму  $\Sigma$  в каждой строке раздела Б.

$$2,9870 + 0,0259 + 0,3355 = 3,3484;$$

$$-0,4768 + 1,5528 + 2,7075 = 3,7835.$$

Если столбцы  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  совпадают (с заданной точностью), то вычисления выполнены верно и можно переходить к следующему шагу: выбираем главный элемент (2,9870), считаем  $m_i$  и т.д.

В результате обратного хода получаем:

$$x_2 = \frac{2,7601}{1,5569} = 1,7728$$

$$x_1 = \frac{0,3355 - 0,0259 \cdot 1,7728}{2,9870} = 0,0970$$

$$x_3 = \frac{2,18 - 2,74 \cdot 0,0970 + 1,18 \cdot 1,7728}{3,17} = 1,2638$$

Практически, вследствие вычислительных погрешностей, полученное методом Гаусса решение системы является приближенным. Покажем, как уточнить это решение.

Пусть для системы

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

получено приближенное решение  $\bar{x}^{(0)}$ . Положим  $\bar{x} = \bar{x}^{(0)} + \bar{\Delta}$ .

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

Тогда для вектора поправки  $\bar{\Delta}$  будем иметь уравнение

$$A \cdot (\bar{x}^{(0)} + \bar{\Delta}) = \bar{b}$$

или

$$A\bar{\Delta} = \bar{\varepsilon},$$

где  $\bar{\varepsilon} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}^{(0)}$  – вектор невязок для приближенного решения  $\bar{x}^{(0)}$ . Таким образом, чтобы найти  $\bar{\Delta}$ , нужно решить систему с прежней матрицей  $A$  и новым вектором свободных членов  $\bar{\varepsilon}$ . Заметим, что преобразованные коэффициенты матрицы  $A$  можно не уточнять, так как при малых невязках соответствующие ошибки будут иметь более высокий порядок малости.

Найдем поправку  $\bar{\Delta}$  к полученному в нашем примере решению

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,0970 \\ 1,7728 \\ 1,2638 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2,18 \\ -1,15 \\ 3,23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,74 & -1,18 & 3,17 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0970 \\ 1,7728 \\ 1,2638 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0001 \\ -0,0003 \\ -0,0964 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при неизвестных  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  уже имеются готовыми в таблице 1. Остается лишь преобразовать вектор свободных членов.

Прямой ход

Таблица 2.

	mi	Коэф-ты при неизвестных			Свобод . члены	$\Sigma$	$\Sigma'$
		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$			
А	-1	2,74	-1,18	3,17	—	4,7299	—
	0,6814	1,12	0,83	—	0,0001	—	
	—	0,18	1,27	2,16	—	0,2103	
	0,2397			0,76	0,0003	2,1136	
					—		
					0,0964		
Б	-1	2,9870	0,025	—	—	3,0125	3,012
	0,1596	—	9	—	0,0004	0,9796	7
		0,4768	1,552		—		0,979
			8		0,0964		8
В	—	—	1,556	—	—	1,4605	1,460
			9		0,0964		4

Обратный ход.

$$\begin{aligned} & \underline{-0,0964} \\ \Delta_2 = & \frac{1,5569}{-0,0004 - 0,0259 \cdot (-0,0619)} = -0,0619; \\ \Delta_1 = & \frac{2,9870}{-0,0001 - 2,74 \cdot 0,0004 + 1,18 \cdot (-0,0619)} = 0,0004; \\ \Delta_3 = & \frac{3,17}{-0,0003 - 0,18 \cdot 0,0004 + 1,27 \cdot (-0,0619)} = -0,0234. \end{aligned}$$

Вектор  $|\bar{\Delta}|$  может служить для приближенной оценки абсолютной погрешности полученного решения.

Метод простой итерации.

При большом числе уравнений и неизвестных метод Гаусса мало применим, т.к. его реализация требует слишком большого числа вычислений, а, следовательно, даже при точных исходных данных неизбежно появляются погрешности вычислений, которые будут тем больше, чем больше самих вычислений. Потому для решения больших систем используются итерационные методы, которые обладают следующими преимуществами:

1. Если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы, то получается выигрыш во времени решения.
2. Метод итераций является самокорректирующимся, т.е. отдельные ошибки не отражаются на конечном результате решения.
3. Процесс итераций легко программируется на ЭВМ.

Ниже рассматривается один из методов итераций – метод простой итерации.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (4)$$

где  $A$  – невырожденная матрица.

Приводя с помощью линейных преобразований эту систему к эквивалентному виду

$$\bar{x} = c\bar{x} + \bar{d}, \quad (5)$$

будем решать последнюю методом последовательных приближений. Взяв за нулевое приближение какой-либо вектор  $\bar{x}^{(0)}$ , вычислим приближение  $\bar{x}^{(1)}$  по формуле

$$\bar{x}^{(1)} = c\bar{x}^{(0)} + \bar{d}, \quad (6)$$

аналогично

$$\bar{x}^{(2)} = c\bar{x}^{(1)} + \bar{d} \quad \text{и т.д.} \quad (7)$$

Последовательность векторов  $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ,  $k=1,2,\dots$ , сходится к точному решению  $\bar{x}^*$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{x}^* \quad (8)$$

если норма матрицы  $c$

$$\|c\| < 1. \quad (9)$$

Норма  $\|c\|$  определяется по одному из следующих способов:

$$\begin{aligned} \|c\|_m &= \max_i \sum_j |a_{ij}|; \\ \|c\|_1 &= \max_j \sum_i |a_{ij}|; \\ \|c\|_k &= \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При сделанных предположениях о норме матрицы  $c$  погрешность  $k$ -ого приближения можно оценить следующим образом:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|^{k+1}}{1 - \|c\|} \|\bar{d}\| \quad \text{при } \bar{x}^{(0)} = \bar{d}; \quad (11)$$

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|}{1 - \|c\|} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\| \quad (12)$$

Первая из этих формул позволяет оценить количество итераций, теоретически необходимых для достижения заданной точности.

Пример. Решить систему с точностью до 0,001.

$$4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7; \quad (I)$$

$$3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6; \quad (II)$$

$$1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2. \quad (III)$$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы сумму модулей остальных элементов строки. Это обеспечит выполнение условия (9):

$$\|c\|_m < 1.$$

$$7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9; \quad (I + II)$$

$$2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7; \quad (2III + II - I)$$

$$-1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. \quad (III - II)$$

Отсюда

$$10x_1 = 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9;$$

$$10x_2 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7;$$

$$10x_3 = 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3 - 1,4.$$

В окончательном виде наша система запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 + 0,19; \\x_2 &= -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97; \\x_3 &= 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 - 0,14.\end{aligned}$$

Матрица  $c$  и вектор  $\bar{d}$  для этой системы будут иметь вид:

$$c = \begin{pmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & -0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{pmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{pmatrix}.$$

Нормы матрицы  $c$ , вектора  $\bar{d}$  будут соответственно равны:

$$\begin{aligned}\|c\|_m &= \max(0,24+0,05+0,24; 0,22+0,09+0,44; 0,13+0,02+0,42)= \\ &= \max(0,53; 0,75; 0,67)=0,75 < 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|c\|_l &= \max(0,24+0,22+0,13; 0,05+0,09+0,02; 0,24+0,44+0,42)= \\ &= \max(0,59; 0,16; 1,10)=1,10 > 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|c\|_k &= \sqrt{(-0,24)^2 + (-0,05)^2 + (-0,24)^2 + (-0,22)^2 + 0,09^2 + (-0,44)^2 + 0,13^2 + \\ &+ (-0,02)^2 + 0,42^2} = 0,73 < 1.\end{aligned}$$

$$\|\bar{d}\|_m = \max(0,19; 0,97; 0,14)=0,97.$$

$$\|\bar{d}\|_l = \max(0,19+0,97+0,14)=1,30.$$

$$\|\bar{d}\|_k = \sqrt{0,19^2 + 0,97^2 + (-0,14)^2} = 1.$$

Т.к.  $\|c\|_m < 1$ , то процесс итераций сходится, и теоретическое число итераций  $k$  будет определяться по формуле:

$$\left\| \bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} \right\|_m \leq \frac{\|c\|_m^{k+1}}{1 - \|c\|_m} \|\bar{d}\|_m \leq 10^{-3}, \text{ или}$$

$$\frac{0,75^{k+1}}{1 - 0,75} \cdot 0,97 \leq 10^{-3}, \text{ т.е.}$$

$$0,75^{k+1} \leq \frac{0,25}{0,97} \cdot 10^{-3}$$

Отсюда  $k \geq 28$ .

Теоретическая оценка числа итераций, необходимых для обеспечения заданной точности, практически всегда очень завышена. Вычисления располагаем в таблице.

Номер итерации	x1	x2	x3
0	0,19	0,97	−0,14
1	0,2207	1,0703	−0,1915
2	0,2354	1,0988	−0,2118
3	0,2424	1,1088	−0,2196
4	0,2454	1,1124	−0,2226
5	0,2467	1,1138	−0,2237
6	0,2472	1,1143	−0,2241
7	0,2474	1,1145	−0,2243

На 7 итерации имеем, что

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(7)}\|_m \leq \frac{\|c\|_m}{1 - \|c\|_m} \|\bar{x}^{(7)} - \bar{x}^{(6)}\|_m = \frac{0,75}{0,25} \cdot 0,0002 = 0,0006 < \varepsilon = 0,001.$$

Следовательно, необходимая точность достигнута.

Ответ: x1=0,2474; x2=1,1145; x3=−0,2243.

#### Задача Е1.

Решить систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Для полученного решения найти вектор поправок.

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| №1. | 0,34x1+0,71x2+0,63x3=2,08;<br>0,71x1−0,65x2−0,18x3=0,17;<br>1,17x1−2,35x2+0,75x3=1,28. | №2. | 3,75x1−0,28x2+0,17x3=0,75;<br>2,11x1−0,11x2−0,12x3=1,11;<br>0,22x1−3,17x2+1,81x3=0,05. |
| №3. | 0,21x1−0,18x2+0,75x3=0,11;<br>0,13x1+0,75x2−0,11x3=2,00;<br>3,01x1−0,33x2+0,11x3=0,13. | №4. | 0,13x1−0,14x2−2,00x3=0,15;<br>0,75x1+0,18x2−0,77x3=0,11;<br>0,28x1−0,17x2+0,39x3=0,12. |
| №5. | 3,01x1−0,14x2−0,15x3=1,00;<br>1,11x1+0,13x2−0,75x3=0,13;<br>0,17x1−2,11x2+0,71x3=0,17. | №6. | 0,92x1−0,83x2+0,62x3=2,15;<br>0,24x1−0,54x2+0,43x3=0,62;<br>0,73x1−0,81x2−0,67x3=0,88. |
| №7. | 1,24x1−0,87x2−3,17x3=0,46;<br>2,11x1−0,45x2+1,44x3=1,50;<br>0,48x1+1,25x2−0,63x3=0,35. | №8. | 0,64x1−0,83x2+4,20x3=2,33;<br>0,58x1−0,83x2+1,43x3=1,71;<br>0,86x1+0,77x2+0,88x3=0,54. |

№9.	$0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32;$ $0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = -0,44;$ $0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64.$	№10.	$0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 = 0,58;$ $1,25x_1 + 0,66x_2 - 0,78x_3 = 0,66;$ $0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 = 0,92.$
№11.	$0,62x_1 - 0,44x_2 - 0,86x_3 = 0,68;$ $0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 = 1,24;$ $0,58x_1 - 0,37x_2 - 2,62x_3 = 0,87.$	№12.	$1,26x_1 - 2,34x_2 + 1,17x_3 = 3,14;$ $0,75x_1 + 1,24x_2 - 0,48x_3 = -1,17;$ $3,44x_1 + 1,85x_2 + 1,16x_3 = 1,83.$
№13.	$0,46x_1 + 1,72x_2 + 2,53x_3 = 2,44;$ $1,53x_1 - 2,32x_2 - 1,83x_3 = 2,83;$ $0,75x_1 + 0,86x_2 + 3,72x_3 = 1,06.$	№14.	$2,47x_1 + 0,65x_2 - 1,88x_3 = 1,24;$ $1,34x_1 + 1,17x_2 + 2,54x_3 = 2,35;$ $0,86x_1 - 1,73x_2 - 1,08x_3 = 3,15.$
№15.	$4,24x_1 + 2,73x_2 - 1,55x_3 = 1,87;$ $2,34x_1 + 1,27x_2 - 3,15x_3 = 2,16;$ $3,05x_1 - 1,05x_2 - 0,03x_3 = -1,25.$		
№16.	$0,43x_1 + 1,24x_2 - 0,58x_3 = 2,71;$ $0,74x_1 + 0,83x_2 + 1,17x_3 = 1,26;$ $1,43x_1 + 1,58x_2 + 0,83x_3 = 1,03.$	№17.	$0,43x_1 + 0,63x_2 + 1,14x_3 = 2,18;$ $1,64x_1 - 0,83x_2 - 2,45x_3 = 1,84;$ $0,58x_1 + 1,55x_2 + 3,18x_3 = 0,74.$
№18.	$1,24x_1 + 0,32x_2 - 0,95x_3 = 1,43;$ $2,25x_1 - 1,18x_2 + 0,57x_3 = 2,43;$ $1,72x_1 - 0,83x_2 + 0,57x_3 = 3,88.$	№19.	$0,62x_1 + 0,56x_2 - 2,43x_3 = 1,16;$ $1,32x_1 - 0,88x_2 + 1,76x_3 = 2,07;$ $0,73x_1 + 1,42x_2 - 0,34x_3 = 2,18.$
№20.	$1,06x_1 + 0,34x_2 + 1,26x_3 = 1,17;$ $2,54x_1 - 1,16x_2 + 0,55x_3 = 2,23;$ $1,34x_1 - 0,47x_2 - 0,83x_3 = 3,26.$	№21.	$3,15x_1 - 1,72x_2 - 1,23x_3 = 2,15;$ $0,72x_1 + 0,67x_2 + 1,18x_3 = 1,43;$ $2,57x_1 - 1,34x_2 - 0,68x_3 = 1,03.$
№22.	$1,73x_1 - 0,83x_2 + 1,82x_3 = 0,36;$ $0,27x_1 + 0,53x_2 - 0,64x_3 = 1,23;$ $0,56x_1 - 0,48x_2 + 1,95x_3 = -0,76.$	№23.	$0,95x_1 + 0,72x_2 - 1,14x_3 = 2,15;$ $0,63x_1 + 0,24x_2 + 0,38x_3 = 0,72;$ $1,28x_1 - 1,08x_2 - 1,16x_3 = 0,97.$
№24.	$2,18x_1 + 1,72x_2 - 0,93x_3 = 1,06;$ $1,42x_1 + 0,18x_2 + 1,12x_3 = 2,07;$ $0,92x_1 - 1,14x_2 - 2,53x_3 = -0,45.$	№25.	$2,18x_1 + 1,72x_2 - 0,93x_3 = 1,06;$ $1,42x_1 + 0,18x_2 + 1,12x_3 = 2,07;$ $0,92x_1 - 1,14x_2 - 2,53x_3 = -0,45.$

#### Задача E2.

Методом простой итерации решить с точностью до 0,001 систему линейных уравнений.

№1.	$2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1;$ $3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7;$ $4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8.$	№2.	$1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7;$ $2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1;$ $4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8.$
№3.	$3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2;$ $1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1;$ $7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6.$	№4.	$9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8;$ $3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7;$ $4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8.$



№5.	$3,3x1+2,1x2+2,8x3=0,8;$ $4,1x1+3,7x2+4,8x3=5,7;$ $2,7x1+1,8x2+1,1x3=3,2.$	№6.	$7,6x1+5,8x2+4,7x3=10,1;$ $3,8x1+4,1x2+2,7x3=9,7;$ $2,9x1+2,1x2+3,8x3=7,8.$
№7.	$3,2x1-2,5x2+3,7x3=6,5;$ $0,5x1+0,34x2+1,7x3=-0,24;$ $1,6x1+2,3x2-1,5x3=4,3.$	№8.	$5,4x1-2,3x2+3,4x3=-3,5;$ $4,2x1+1,7x2-2,3x3=2,7;$ $3,4x1+2,4x2+7,4x3=1,9.$
№9.	$3,6x1+1,8x2-4,7x3=3,8;$ $2,7x1-3,6x2+1,9x3=0,4;$ $1,5x1+4,5x2+3,3x3=-1,6.$	№10.	$5,6x1+2,7x2-1,7x3=1,9;$ $3,4x1-3,6x2-6,7x3=-2,4;$ $0,8x1+1,3x2+3,7x3=1,2.$
№11.	$2,7x1+0,9x2-1,5x3=3,5;$ $4,5x1-2,8x2+6,7x3=2,6;$ $5,1x1+3,7x2-1,4x3=-0,14.$	№12.	$4,5x1-3,5x2+7,4x3=2,5;$ $3,1x1-0,6x2-2,3x3=-1,5;$ $0,8x1+7,4x2-0,5x3=6,4.$
№13.	$3,8x1+6,7x2-1,2x3=5,2;$ $6,4x1+1,3x2-2,7x3=3,8;$ $2,4x1-4,5x2+3,5x3=-0,6.$		
№14.	$5,4x1-6,2x2-0,5x3=0,52;$ $3,4x1+2,3x2+0,8x3=-0,8;$ $2,4x1-1,1x2+3,8x3=1,8.$	№15.	$7,8x1+5,4x2+4,8x3=1,8;$ $3,3x1+1,1x2+1,8x3=2,3;$ $4,5x1+3,3x2+2,8x3=3,4.$
№16.	$3,8x1+4,1x2-2,3x3=4,8;$ $-2,1x1+3,9x2-5,8x3=3,3;$ $1,8x1+1,1x2-2,1x3=5,8.$	№17.	$1,7x1-2,2x2+3,0x3=1,8;$ $2,1x1+1,9x2-2,3x3=2,8;$ $4,2x1+3,9x2-3,1x3=5,1.$
№18.	$2,8x1+3,8x2-3,2x3=4,5;$ $2,5x1-2,8x2+3,3x3=7,1;$ $6,5x1-7,1x2+4,8x3=6,3.$	№19.	$3,3x1+3,7x2+4,2x3=5,8;$ $2,7x1+2,3x2-2,9x3=6,1;$ $4,1x1+4,8x2-5,0x3=7,0.$
№20.	$7,1x1+6,8x2+6,1x3=7,0;$ $5,0x1+4,8x2+5,3x3=6,1;$ $8,2x1+7,8x2+7,1x3=5,8.$	№21.	$3,7x1+3,1x2+4,0x3=5,0;$ $4,1x1+4,5x2-4,8x3=4,9;$ $-2,1x1-3,7x2+1,8x3=2,7.$
№22.	$4,1x1+5,2x2-5,8x3=7,0;$ $3,8x1-3,1x2+4,0x3=5,3;$ $7,8x1+5,3x2-6,3x3=5,8.$	№23.	$3,7x1-2,3x2+4,5x3=2,4;$ $2,5x1+4,7x2-7,8x3=3,5;$ $1,6x1+5,3x2+1,3x3=-2,4.$
№24.	$6,3x1+5,2x2-0,6x3=1,5;$ $3,4x1-2,3x2+3,4x3=2,7;$ $0,8x1+1,4x2+3,5x3=-2,3.$	№25.	$1,5x1+2,3x2-3,7x3=4,5;$ $2,8x1+3,4x2+5,8x3=-3,2;$ $1,2x1+7,3x2-2,3x3=5,6.$

#### 4.7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера. Метод Эйлера-Коши. Метод Рунге-Кутты. Метод Адамса.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Задача (1) при определенных ограничениях, наложенных на функцию  $f(x, y)$  (в дальнейшем мы будем предполагать, что эти ограничения выполняются), имеет единственное решение.

При численном решении задачи (1) требуется определить значение неизвестной функции  $y(x)$  в некоторой точке  $x^*$ .

Для решения поставленной задачи интервал  $[x_0, x^*]$  разбивается на  $n$  частей с точками разбиения  $x_0, x_1, \dots, x_n = x^*$  ( $x_i - x_{i-1} = h_i$ ). Затем по приближенным формулам находят последовательно  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$ , ...,  $y_n = y(x_n)$ .

Большинство приближенных формул вычисления  $y_i = y(x_i)$  получаются следующим образом. Перепишав уравнение (1) в форме дифференциалов  $dy = f(x, y) \cdot dx$  и проинтегрировав его в пределах от  $x_{i-1}$  до  $x_i$ , получим:

$$y_i - y_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$$

или

$$y_i = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad (2)$$

Это и есть исходное соотношение для различных методов. Сами методы в дальнейшем различаются тем дополнительным предположением, которые принимаются для приближенного вычисления приращения

$$\Delta y_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \quad (3)$$

В методе Эйлера интеграл  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$  вычисляется с помощью формулы левых прямоугольников:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}, y_{i-1}) dx = h_i f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (4)$$

$$y_i = y_{i-1} + h_i f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Погрешность приближенной формулы (4), а следовательно, и формулы (5) на одном шаге есть

$$R(h_i) = \frac{h_i^2}{2} y''(c) \quad (6)$$

;  $c \in (x_{i-1}, x_i)$ .

В этом случае говорят, что погрешность метода на одном шаге имеет порядок  $h_i^2$ .

В методе Эйлера-Коши сначала определяют вспомогательные величины

$$\tilde{y}_i = y_{i-1} + h_i f(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$$

а затем интеграл  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx$  вычисляют с помощью формулы трапеций. Тогда приближенная формула для вычисления  $y_i$  принимает следующий вид:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h_i}{2} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \tilde{y}_i)] \quad (7)$$

Погрешность этой формулы на одном шаге имеет порядок  $h_i^3$ .

В методе Рунге-Кутты сначала последовательно вычисляются вспомогательные величины

$$\begin{aligned} k_1^i &= h_i f(x_{i-1}, y_{i-1}); \\ k_2^i &= h_i f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, y_{i-1} + \frac{k_1^i}{2}\right); \\ k_3^i &= h_i f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2^i}{2}\right); \\ k_4^i &= h_i f(x_{i-1} + h_i, y_{i-1} + k_3^i), \end{aligned}$$

а затем приближенно принимается, что

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i) \quad (8)$$

Погрешность этой формулы на одном шаге имеет порядок  $h_i^5$ .

В методе Адамса для вычисления  $y_{i-1}$  функция  $f(x, y)$  приближенно заменяется интерполяционным полиномом третьей степени, построенным по четырем предыдущим точкам  $x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}$ . Таким образом, чтобы построить решение задачи Коши в точке  $x = x_4$ , необходимо по начальному значению  $y_0 = y(x_0)$  предварительно вычислить его в точках  $x_1, x_2, x_3$  каким-либо другим методом (наиболее часто для этой цели используется метод Рунге-Кутты). Точки  $x_0, x_1, x_2, x_3$  обычно называются разгонными точками.

Итак, если  $h_i$  постоянны и равны  $h$ , то, заменяя  $f(x, y)$  вторым интерполяционным полиномом Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{i-1} + \frac{\Delta f_{i-2}}{1!h} (x - x_{i-1}) + \frac{\Delta^2 f_{i-3}}{2!h^2} (x - x_{i-1})(x - x_{i-2}) + \\ &+ \frac{\Delta^3 f_{i-4}}{3!h^3} (x - x_{i-1})(x - x_{i-2})(x - x_{i-3}), \quad f_k = f(x_k, y_k), \end{aligned}$$

и тогда

$$y_i = y_{i-1} + h \left( f_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta f_{i-2} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{i-3} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{i-4} \right) \quad (9)$$

Погрешность этой формулы на одном шаге имеет порядок  $h^5$ .

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ.

Задача 1.

$$y' = y \left( \frac{1}{2x} - 1 \right)$$

Решить дифференциальное уравнение с начальным условием  $y(1)=2,70$  на интервале  $[1; 1,5]$  методом Эйлера, принимая  $h=0,125$ . Все вычисления вести с тремя верными в узком смысле знаками.

Решение. По исходным начальным данным  $x_0=1$  и  $y_0=2,70$  вычисляем  $y'_0 = 2,70 \left( \frac{1}{2 \cdot 1} - 1 \right) = -1,35$ . Далее, следуя формуле (4), имеем  $\Delta y_0 = -0,169$ . Таким образом, по формуле (5) получаем  $y_1 = 2,70 - 0,169 = 2,53$ .

Дальнейшие вычисления выполняем аналогично, принимая за исходные значения  $x_1, y_1$ ;  $x_2, y_2$  и так далее. Результаты вычислений представлены в следующей таблице.

i	$x_i$	$y_i$	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$
0	1,000	2,70	-1,35	-0,169
1	1,125	2,53	-1,41	-0,176
2	1,250	2,35	-1,41	-0,176
3	1,375	2,17	-1,38	-0,172
4	1,500	2,00		

Задача 2.

$$y' = y \left( \frac{1}{2x} - 1 \right)$$

Решить методом Эйлера-Коши уравнение с начальным условием  $y(1)=2,70$  на интервале  $[1; 2]$ , принимая  $h=0,25$ . Все вычисления вести с тремя верными в узком смысле знаками.

Решение. По исходным начальным данным  $x_0 = 1$  и  $y_0 = 2,70$  вычисляется  $y'_0 = -1,35$ . Затем вычисляются вспомогательные величины  $\tilde{y}_1 = 2,36$  и  $\tilde{f}_1 = -1,42$ . Наконец, по формуле (7) вычисляется  $y_1 = 2,70 - 0,35 = 2,35$ .

Принимая теперь за исходные данные  $x_1=1,25$  и  $y_1=2,35$ , дальнейшие вычисления выполняем аналогично вышеприведенным, а их результаты представим в виде следующей таблицы:

i	$x_i$	$y_i$	$y'_i = f_i$	$hf_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{y}'_i = \tilde{f}_i$	$h\tilde{f}_i$	$\Delta y_{i-1}$
0	1,00	2,70	-1,35	-0,338				
1	1,25	2,35	-1,41	-0,352	2,36	-1,42	-0,355	-0,346
2	1,50	2,01	-1,34	-0,355	2,00	-1,33	-0,332	-0,342
3	1,75	1,69	-1,21	-0,302	1,68	-1,20	-0,300	-0,318
4	2,00	1,41			1,39	-1,04	-0,260	-0,281

Задача 3.

$$y' = y \left( \frac{1}{2x} - 1 \right)$$

Решить методом Рунге-Кутта уравнение с начальным условием  $y(1)=2,70$  на интервале  $[1; 2]$ , принимая  $h = 0,5$ . Все вычисления вести с тремя верными в узком смысле знаками.

Решение.

$$k_1^0 = 0,5 \cdot 2,70 \left( \frac{1}{2 \cdot 1} - 1 \right) = -0,675;$$

$$k_2^0 = 0,5 \cdot 2,36 \left( \frac{1}{2 \cdot 1,25} - 1 \right) = -0,71;$$

$$k_3^0 = 0,5 \cdot 2,34 \left( \frac{1}{2 \cdot 1,25} - 1 \right) = -0,70;$$

$$k_4^0 = 0,5 \cdot 2,00 \left( \frac{1}{2 \cdot 1,5} - 1 \right) = -0,665$$

По формуле (8) имеем:

$$y_1 = 2,70 + \frac{1}{6}(-0,675 - 1,42 - 1,40 - 0,665) = 2,70 - 0,693 = 2,01$$

Вычисление  $y_2 = y(2,0)$  аналогично вычислению  $y_1$ , а результат его представлен в следующей таблице:

i	x	Y	f(x,y)	k1,2k2,2k3, k4	Δy
0	1,00	2,70	-1,35	-0,675	-0,693
	1,25	2,36	-1,42	-1,42	
	1,25	2,34	-1,40	-1,40	
	1,50	2,00	-1,33	-0,665	
1	1,50	2,01	-1,34	-0,670	-0,602
	1,75	1,68	-1,20	-1,20	
	1,75	1,71	-1,22	-1,22	
	2,00	1,40	-1,05	-0,525	
2	2,00	1,41			

Задача 4.

Решить методом Адамса уравнение  $y' = y \left( \frac{1}{2x} - 1 \right)$  с начальным условием  $y(1) = 2,70$  на интервале  $[1; 2,5]$ , принимая  $h=0,25$ . В качестве разгонных точек  $x_0, x_1, x_2, x_3$  и решений  $y_0, y_1, y_2, y_3$  взять значения, полученные в задаче 2. Все вычисления вести с тремя верными в узком смысле знаками.

Решение. Примем в качестве разгонных точек значения  $x_0 = 1,00$ ;  $x_1 = 1,25$ ;  $x_2 = 1,50$ ;  $x_3 = 1,75$ . Используя в качестве значений  $y_i$  и  $f_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) значения, полученные в задаче 2, вычислим конечные разности  $\Delta f_2 = 0,13$ ;  $\Delta_2 f_1 = 0,06$ ;  $\Delta_3 f_0 = -0,07$ .

Теперь по формуле (9) при  $h = 0,25$  и  $i = 4$  получим  $y_4 = 1,40$ .

Далее вычисляется  $f_4 = -1,05$  и конечные разности  $\Delta f_4 = 0,16$ ;  $\Delta_2 f_2 = 0,03$ ;  $\Delta_3 f_1 = -0,03$ , а затем опять по формуле (9) при  $i=5$  вычисляется  $y_5=1,16$  и т.д.

Весь процесс решения удобно представить в виде следующей таблицы:

i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	Δf <sub>i</sub>	Δ <sup>2</sup> f <sub>i</sub>	Δ <sup>3</sup> f <sub>i</sub>
0	1,00	2,70	-1,35			
1	1,25	2,35	-1,41	-0,6		
2	1,50	2,01	-1,34	0,07	0,13	
3	1,75	1,69	-1,21	0,13	0,06	-0,07
4	2,00	1,40	-1,05	0,16	0,03	-0,03
5	2,25	1,16				

Задача Ж.

Решить уравнение  $y' = f(x,y)$  на интервале  $[x_0, x^*]$  с начальным условием  $y(x_0)=y_0$ , принимая  $h = 0,1$ ,

а) методом Эйлера;

б) методом Рунге-Кутты:

$y' = x^2 + y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = 2x^2 + y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = 2x + y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = x + 2y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = x^2 - y;$	$[1; 1,2];$	$y_0 = 0.$
$y' = x - 2y;$	$[1; 1,2];$	$y_0 = 0.$
$y' = 2(x+y);$	$[1; 1,2];$	$y_0 = 0.$
$y' = 2x - 3y;$	$[1; 1,2];$	$y_0 = 0.$
$y' = 2x + 3y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = x + 3y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = 4x + y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = 3x - y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$
$y' = 4x - y;$	$[0; 0,2];$	$y_0 = 1.$

в) методом Адамса, вычислив  $y_1, y_2, y_3$  методом Эйлера-Коши:

$y' = 1 + xy;$	$[1; 1,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = x + y;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = 2x + y;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = 3x + y;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = 4x + y;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = \frac{y+x}{2};$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = y - 2x;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = y - 3x;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = x + y^2;$	$[0; 0,5];$	$y_0 = 1.$
$y' = x - y^2;$	$[1; 1,5];$	$y_0 = 0.$
$y' = x - 2y^2;$	$[1; 1,5];$	$y_0 = 0.$
$y' = 2x - y^2;$	$[1; 1,5];$	$y_0 = 0.$

## **5. Литература**

1. Бахвалов Н.С. "Численные методы", Наука, 1975.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. "Численные методы", Наука, 1987.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. "Основы вычислительной математики", Физматгиз, 1963.
4. Волков Е.А. "Численные методы", Наука, 1987.
5. Турчак Л.И. "Основы численных методов", Наука, 1987.