

8. Чисельне інтегрування

8.1. Постановка задачі чисельного інтегрування

Нехай нам потрібно знайти

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \quad (1)$$

де f – задана функція, $\rho(x) > 0$ – деякий ваговий множник.

Ця задача часто потребує чисельного вирішення, оскільки

- Значна кількість задач типу (1) не може бути вирішена аналітично.
- Інформація про функцію f може бути задана у вигляді таблиці.

Нагадаємо, що за означенням

$$I(f) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а $\{x_i\}_{i=0}^n$ – розбиття проміжку $[a, b]$, $x_i \in [a, b]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$\Delta = \max_i \Delta x_i$ – не залежить від вибору x_i та ξ_i . Тому візьмемо як наближення таку суму :

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k), \quad (2)$$

де x_k – вузли квадратурної формули (2), а c_k – її ваги.

Задача полягає в тому, щоб вибрати $\{x_k, c_k\}_{k=0}^n$, так щоб похибка була найменша :

$$R_n(f) = I(f) - I_n(f) \rightarrow \min$$

Квадратурну формулу (2) називають *квадратурною формулою замкнутого типу*, якщо $x_0 = a$ та $x_n = b$, і *відкритого типу*, якщо $x_0 > a$ та $x_n < b$

Кажуть, що квадратурна формула (2) має m -ий *ступінь алгебраїчної точності*, якщо

$$R_n(f) = 0 \quad (3)$$

$\forall f \in \pi_m$ (π_m – множина поліномів m -го степеня), і $\exists P_{m+1}(x) \in \pi_{m+1}$, такий що $R_n(P_{m+1}) \neq 0$.

Цю умову можна замінити умовою

$$R_n(x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m}, \quad R_n(x^{m+1}) \neq 0 \quad (5)$$

(вона більш зручна для перевірки).

Деякі підходи до побудови квадратурних формул.

1. інтерполяційний

– приводить до квадратурних формул інтерполяційного типу.

В інтегралі (1) покладають $f(x) \approx L_n(x)$ по деяких вузлах $\{x_k\}_{k=0}^n$ (вузли як правило фіксовані), тоді:

$$I_n(f) = I(L_n(x)) = \int_a^b \rho(x) \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k) \omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)} dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)} dx,$$

отже вузлами цієї квадратурної формули є вузли інтерполяційного многочлена, а вагові множники

$$c_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)} dx$$

2. найвищого алгебраїчного степеня точності

Вибираємо одночасно x_k і c_k з умови $R_n(x^\alpha) = 0$ $\alpha = \overline{0, m}$, щоб m було максимальним

Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку отримуємо квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності.

3. складені квадратурні формули

Проміжок $[a, b]$ розбиваємо на проміжки (наприклад рівномірно), а потім на кожному проміжку використовуємо, з невеликим степенем, формули з пункту 1 або 2. Наприклад, для інтерполяційного типу:

$$I(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n c_k^i f(x_k^i) = I_h(f)$$

Квадратурна формула складеного типу I_h має *порядок (ступінь точності) p по кроку h* , якщо $R_h(f) = I(f) - I_h(f) = O(h^p)$ (p – чим більше, тим краще)

4. квадратурні формули оптимальні на класі функцій

Вибираємо $\{x_k, c_k\}$ так, щоб досягався $\inf_{\{x_k, c_k\}} \sup_{f \in F} R_n(f)$. Це ми можемо робити, коли знаємо з яким класом функцій маємо справу.

Зауваження 1 (про квадратурні формули інтерполяційного типу)

При підвищенні степеня інтерполяції погіршується якість наближення внаслідок розбіжності процесу інтерполяції: $\|f - L_n\|_c \not\rightarrow 0$. Але $R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, наприклад для $f \in C[a, b]$. Та все-одно цей недолік “вилазить”.

Розглянемо випадок, коли функція задана неточно:

$$\tilde{f}(x_k) = f(x_k) + \delta_k, \quad |\delta_k| < \delta,$$

тоді

$$\mathcal{I}_n(f) = I_n(\tilde{f}) - I_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k \delta_k,$$

далі, якщо $c_k > 0$, то

$$|\mathcal{I}| = \sum_{k=0}^n c_k |\delta_k| \leq \delta \sum_{k=0}^n c_k = \delta(b-a)$$

(при $\rho \equiv 1$, якщо підставити $f \equiv 1$, то отримаємо $b-a = \int_a^b dx = \sum_{k=0}^n c_k$,

при $\rho \neq 1$ $\sum_{k=0}^n c_k = \int_a^b \rho(x) dx$, бо хоча б нульовий ступінь точності будь-яка квадратурна формула повинна задовольняти).

Нагадаємо, що при $n \rightarrow \infty$ $\max_k |c_k| \rightarrow \infty$, а оскільки $\sum c_k > 0$, то $\exists c_k > 0$ і $\exists c_k < 0$, тому з ростом n зростає $|c_k|$, а відповідно і вплив похибки на результат. Тому не можна використовувати великі степені і використовують метод 3 – розбивають на проміжки, де використовують невисокий ступінь.

Зауваження 2. Ясно, що квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний степінь точності принаймні n , бо ми заміняємо $f \rightarrow L_n$, а якщо $f \in \pi_n$, то $f \equiv L_n$, але виявляється, що для n – парних $m = n + 1$, тобто алгебраїчний степінь точності на одиницю вищий степеня інтерполяції.

8.2. Квадратурні формули прямокутників

$\rho \equiv 0$.

а) **лівих** прямокутників: квадратурна формула інтерполяційного типу при $n = 0$,

$$x_0 = a : I_0^{лів} = (b - a)f(a)$$

б) **правих** прямокутників: $I_0^{прав} = (b - a)f(b)$ (те саме, але $x_0 = b$).

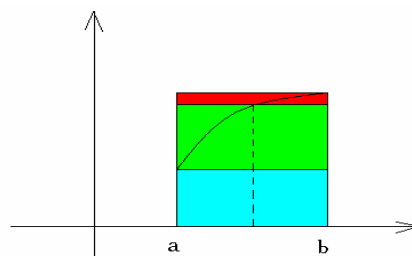
в) **середніх** прямокутників:

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

$$I_0(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \quad (1)$$

Геометрична інтерпретація :

синій колір – а), зелений та синій – в), всі три – б)
справжнє значення інтегралу – площа під кривою.



Знайдемо тепер алгебраїчну степінь точності цих квадратурних формул:

Для лівих прямокутників:

$$I_0^{лів}(1) = b - a = I(1),$$

$$I_0^{лів}(x) = a(b - a) \neq I(x) = \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

отже степінь точності $p = 0$. Така ж вона буде і для $I_0^{прав}$. А для середніх прямокутників

$$I_0(x) = (b - a) \frac{a + b}{2} = I(x),$$

$$I_0(x^2) \neq I(x^2),$$

тому $p = 1$. Отож нею ми і будемо користуватися.

Давайте оцінимо для неї похибку. Взагалі для формули інтерполяційного типу:

$$R_n(f) = I(f) - I_n(f) = I(f) - I(L_n) = I(f - L_n) = I(r_n) = \int_a^b r_n(x) dx,$$

де $r_n(x)$ – залишковий член інтерполяції.

$$|R_n(f)| \leq (b - a) \max_x |r_n(x)| \leq (b - a) \frac{M_{n+1}}{n+1} \max_x |\omega_n(x)|.$$

Для I_0 :

$$|R_0(f)| = \left| \int_a^b r_0(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_0(x)| dx \leq \int_a^b \frac{M_1}{1!} |x - x_0| dx = M_1 \int_a^b |x - x_0| dx \leq M_1 \frac{b^2 - a^2}{4},$$

але це погана оцінка, вона не використовує той факт, що квадратурна формула має степінь точності на одиницю вищу. Отримаємо кращу оцінку :

$$f(x) = f\left(x_0 \equiv \frac{a+b}{2}\right) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi)$$

(при $f \in C^2[a, b]$), де $\xi \in [a, b]$, тоді

$$\begin{aligned} R_0(f) &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b [f(x) - f(x_0)]dx = \int_a^b \left[(x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi) \right] dx = \\ &= \int_a^b \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi) dx = (\text{за теоремою про середнє}) = f''(\eta) \int_a^b \frac{(x-x_0)^2}{2} dx = \frac{f''(\eta)}{24} (b-a)^3. \end{aligned}$$

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)^3 \quad (2)$$

але тут у нас немає впливу на точність (величину похибки), тому використовують **формулу ускладненого типу**. Давайте її побудуємо (на рівномірній сітці) :

$$I(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N hf(\bar{x}_i) = I_h^{np}(f),$$

$$\text{де } \bar{x}_i = x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}.$$

Оцінимо похибку цієї квадратурної формули:

$$\begin{aligned} R_h(f) &= I(f) - I_h(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(\bar{x}_i)] dx = \sum_{i=1}^N f''(\eta_i) \frac{h^3}{24} \\ |R_h(f)| &\leq \frac{M_2}{24} \sum_{i=1}^N h^3 = \frac{M_2 h^2}{24} \sum_{i=1}^N h = \frac{M_2 h^2 (b-a)}{24} \quad (3) \end{aligned}$$

тобто має степінь точності $p = 2$ (по кроку h) (не слід плутати з алгебраїчним степенем точності $p = 1$ (для цієї формули)).

Якщо $f(x) \in C^4[a, b]$, тоді

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}_i) &= f(\bar{x}_i) + (x - \bar{x}_i)f'(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\bar{x}_i) + \\ &+ \frac{(x - \bar{x}_i)^3}{6} f'''(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^4}{24} f^{(4)}(\xi_i) - f(\bar{x}_i). \end{aligned}$$

При непарних степенях інтеграли пропадуть :

$$R_h(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\bar{x}_i) dx + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - \bar{x}_i)^4}{24} f^{(4)}(\xi_i) dx = \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^N hf''(\bar{x}_i) + \sum_{i=1}^N \frac{h^5 f^{(4)}(\eta_i)}{1920}$$

оскільки $\sum_{i=1}^N hf''(\bar{x}_i)$, то це є квадратурна формула середніх прямокутників для $f''(x)$

(з похибкою $O(h^2)$),

то

$$R_h(f) = \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x)dx + O(h^4) = O(h^4).$$

$$R_h^{np}(f) = R_h(f) + \alpha(h), \quad (4)$$

де

$$R_h^0(f) = \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx, \quad \alpha(h) = O(h^4).$$

– використовується для побудови програм, що автоматично обирають крок інтегрування.

8.3. Формула Трапеції

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = b$, $L_1(x) = f(x)$

Тоді отримаємо формулу:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (1)$$

Формула має степінь точності нижче двох, тобто $I(x^2) \neq I_1(x^2)$

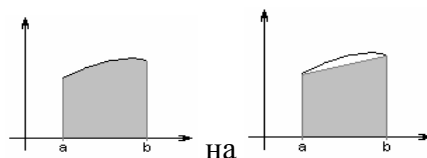
Формула замкненого типу

Залишковий член:

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)(x-a)(x-b)}{2} dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad (2)$$

Оцінка залишкового члена:

$$|R_1(f)| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12} \quad (3)$$



З геометричної точки зору замінюється площа

Ускладнена квадратурна формула:

$$I_h(f) = \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} h f(x_i) + \frac{h}{2} f(b) \quad (4)$$

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = \overline{0, N}$$

$$|R_h(f)| \leq M_2 \frac{(b-a)^2}{12} h^2, \quad f \in C^2[a, b] \quad (5)$$

Якщо

$$f \in C^4[a, b] \quad R_h(f) = R_h^0(f) + \alpha(h) \quad (6)$$

$$R_h^0(f) = -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx, \quad \alpha(h) = O(h^4)$$

8.4. Квадратурна Формула Сімпсона

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, використовуємо $L_2(x)$

Тоді отримаємо формулу:

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad - \quad (1)$$

квадратурна формула Сімпсона

Задача 7 Довести, що алгебраїчна степінь точності квадратурної формули Сімпсона $p = 3$

Задача 8 Довести, що для залишкового члену квадратурної формули Сімпсона має місце представлення :

$$f \in C^4[a, b], \quad R_2(f) = \frac{1}{24} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) f^{(4)}(\xi) dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5 \quad (2)$$

та має місце оцінка

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{2880} (b-a)^5 \quad (3)$$

Ускладнена квадратурна формула:

$$\begin{aligned} I_h(f) &= \sum_{i=1}^N \frac{h}{6} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f(x_i) \right] = \\ &= \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 4f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1}) + 4f\left(x_{N-\frac{1}{2}}\right) + f(x_N) \right] \end{aligned}$$

Якщо $f \in C^4[a, b]$, то оцінка:

$$|R_h(f)| \leq \frac{M_4}{2880} (b-a)h^4, \quad m = 4 \quad (5)$$

Якщо $f \in C^6[a, b]$, то оцінка:

$$\begin{aligned} R_h(f) &= R_h^0(f) + \alpha(h), \quad \text{де } R_h^0(f) = \frac{h^4}{2880} \int_a^b f^{(4)}(x) dx, \\ \alpha(h) &= O(h^6) \end{aligned}$$

Задача 7 Побудувати квадратурну формулу $n = 3$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{3a+b}{4}$, $x_2 = \frac{a+3b}{4}$, $x_3 = b$

8.5. Принцип Рунге

Нехай задана деяка величина I (сіткова функція, інтеграл, неперервна функція)

Нехай вона $I \approx I_h$ наближається при $h \rightarrow 0$

Нехай похибка послідовності I_h представляється у вигляді

$$R_h = I - I_h = R_h^0 + \alpha(h) \quad (1)$$

де $R_h^0 = C \cdot h^m$, $\alpha(h) = o(h^m)$, C не залежить від h

Обчислимо $I_{h/2}$:

З (1) слідує:

$$I = I_h + Ch^m + \alpha(h), \quad I = I_{h/2} + C \frac{h^m}{2^m} + \alpha(h)$$

Звідки

$$I_{h/2} - I_h = \frac{Ch^m}{2^m} (2^m - 1) + \alpha(h)$$

Оскільки

$$R_{h/2}^0 = \frac{Ch^m}{2^m} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1} + \alpha(h)$$

то

$$\begin{aligned} R_{h/2}^0 &= \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1} + o(h^m) \\ R_h^0 &= \frac{2^m}{2^m - 1} (I_{h/2} - I_h) \end{aligned} \quad (2)$$

Алгоритм:

Обчислюємо $I_h, I_{h/2}$, потім $R_{h/2}^0$, перевіряємо чи $|R_{h/2}^0| < \varepsilon$

якщо виконується то кінець, якщо ні, то обчислюємо далі $I_{h/2}, I_{h/4}$ і далі аналогічно

поки не стане виконуватись $|R_{h2^{1-k}}^0| < \varepsilon$

Зауваження:

1. Ми даємо оцінку не похибки, а її головного члена з точністю $\alpha(h)$, але при достатній гладкості все нормально

2. Принцип дає збої, бо процес може не збігатись:

а) Умова збіжності $|\alpha(h)| \ll |R_h^0|$

б) Похибка заокруглення

Знаходимо m :

використаємо $I_h, I_{h/2}, I_{h/4}$:

$$I_{h/2} - I_h = \frac{Ch^m}{2^m} (2^m - 1) + \alpha(h), \quad I_{h/4} - I_{h/2} = \frac{Ch^m}{2^{2m}} (2^m - 1) + \alpha(h)$$

розділимо з точністю $\alpha(h)$

Маємо

$$2^m = \frac{I_{h/2} - I_h}{I_{h/4} - I_{h/2}},$$

звідки

$$m = \log_2 \frac{I_{h/2} - I_h}{I_{h/4} - I_{h/2}} + \alpha(h)$$

Оцінка $|R_{h/4}^0| < \varepsilon$ - **найбільш точна**

За допомогою головного члена похибки можна отримати краще значення I

$$\tilde{I}_{h/2} = I_{h/2}^{(1)} = I_{h/2} + R_{h/2}^0 = \frac{1}{2^m - 1} \left(2^m I_{h/2} - I_h \right)$$

Екстраполяційна Формула Річардсона: $I_h - \tilde{I}_{h/2} = \alpha(h)$

Екстраполяційна Формула Річардсона: $I_h - \tilde{I}_{h/2} = \alpha(h)$

Апріорні оцінки – до обчислення величини

Апостеріорні оцінки – під час обчислення

8.6. Апостеріорна оцінка похибки чисельного інтегрування

Складемо квадратурну формулу трапецій для $m = 2$

$$I - I_h = Ch^2 + O(h^4), \quad R_{h/2}^0 = \frac{I_{h/2} - I_h}{3}, \quad h_0 = b - a$$

поки не виконується $\left| R_{h2^{-k}}^0 \right| < \varepsilon$

МАЄМО:

$$R_h = -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx + O(h^4) = O(h^4),$$

So $f'(b) = f'(a)$

отже, якщо застосовувати екстраполяційну формулу Річардсона

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{4}{3}I_{h/2} - \frac{1}{3}I_h$$

Задача.8 Написати явний вигляд квадратурної формули, яка отримується екстраполяцією Річардсона від квадратурної формули трапецій

Покажемо чому формулу прямокутників не використовують у принципі Рунге:

Нехай $I_h \leftrightarrow 0$, $I_{h/2} \leftrightarrow X$

Покажемо обчислення:

Для Формули трапецій

Для Формули прямокутників ~~X0XX0XX0XX0XX0XX0XX0X~~

$$I_h^{mp} = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b) \right)$$

$$I_{h/2}^{mp} = \frac{h}{4} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_{i-1/2}\right) + f(b) \right) = \frac{1}{2} I_h^{mp} + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_{i-1/2}\right)$$

Отже, на одному кроці методу Рунге кількість обчислень:

$$Q^{mp} = O(N) \text{ , a } Q^{gp} = O(2N)$$

Цей принцип застосовується й для формули Сімпсона $m = 4$

Головна частина залишкового члена:

$$R_{h/2}^0 = \frac{I_{h/2} - I_h}{15}$$

Сітка вузлів рівновіддалена:

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{16}{15} I_{h/2} - \frac{1}{15} I_h, \quad I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^6)$$

Запишемо формулу із змінним кроком:

$$I_h^{mp}(f) = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] , \text{ де } h_i = x_i - x_{i-1}$$

Оцінимо похибку а кожному інтервалі:

$$R_{h_i} = I_i - I_{h_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{h_i}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = -\frac{h_i^3}{6} f''\left(x_{i-1/2}\right) + O(h_i^5)$$

$m = 3$ головний член має похибку:

$$R_{h_{i/2}} = \frac{\left(I_{h_{i/2}} - I_{h_i}\right)}{2}$$

Умова припинення:

$$\left|R_{h_{i/2}}^0\right| \leq \frac{\varepsilon \cdot h_i}{b-a}$$

Це забезпечує

$$\left|R_{h/2}\right| = \left|\sum_{i=1}^N R_{h_{i/2}}\right| \leq \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon \cdot h_i}{b-a} = \varepsilon \frac{b-a}{b-a} = \varepsilon$$

8.7. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності

Розглянемо інтеграл

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx , \quad (1)$$

де

$$\rho(x) > 0 \quad x \in [a, b] \quad \left| \int_a^b \rho(x) x^i dx \right| < \infty .$$

Розглянемо задачу: побудувати квадратурну формулу

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) , \quad (2)$$

яка при заданому n була б точною для алгебраїчного багаточлена можливо більшого степеня. Такі квадратурні формули існують, вони називаються **квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності** або **формули Гауса (або Гауса – Кристофеля)**.

В (2) невідомими є $c_k, x_k, k = \overline{1, n}$. Їх обирають з умови, що (2) точна для будь-якого багаточлена степеня m , а це еквівалентно умові, щоб формула була точною для функції $f(x) = x^\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, m$. Звідси отримуємо умови

$$I_n(x^\alpha) = \int_a^b \rho(x) x^\alpha dx = \sum_{k=1}^n c_k x_k^\alpha, \quad \alpha = \overline{0, m} . \quad (3)$$

Ми хочемо отримати формули для $m \rightarrow \max$

Щоб кількість рівнянь була рівною кількості невідомих нам потрібно, щоб $m+1 = 2n$.

Задача. Побудувати квадратурну формулу найвищого степеня точності (розв'язати систему рівнянь (3)) для $a = -1, b = 1, \rho(x) = 1$.

Теорема 1.

Квадратурна формула (2) буде точною для будь-якого багаточлена степеня $m = 2n - 1$, тобто $f(x) \in \pi_{2n-1}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови :

1) поліном $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ортогональний з вагою $\rho(x)$ до будь-якого багаточлена степеня менше n Q_{n-1} :

$$\int_a^b \omega(x) Q_{n-1}(x) \rho(x) dx = 0 \quad (4)$$

2) формула (2) є квадратурною формулою інтерполяційного типу, тобто коефіцієнти обчислюються за формулою

$$c_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx \quad (5)$$

◁ **Необхідність.** Нехай формула (2) точна для багаточлена степеня $m = 2n - 1$. Будь-яку функцію $f(x) \in \pi_{2n-1}$ можемо подати у вигляді $f(x) = \omega(x) Q_{n-1}(x) \in \pi_{2n-1}$. Тобто

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) \omega(x) Q_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \omega(x_k) Q_{n-1}(x_k) = 0,$$

тобто виконується (4).

$f(x)$ можемо подати у вигляді

$$f(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_j) \omega'(x_j)} \in \pi_{n-1} \subset \pi_{2n-1}.$$

Отримаємо

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_j) \omega'(x_j)} dx = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\omega(x_k)}{(x_k - x_j) \omega'(x_j)} = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{kj} = c_j,$$

тобто отримали умову (5).

Достатність. Нехай виконується (4) і (5). Подамо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \omega(x) Q_{n-1}(x) + R(x)$$

Розглянемо

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) (\omega(x) Q_{n-1}(x) + R(x)) dx = \sum_{k=1}^n c_k \omega(x_k) Q_{n-1}(x_k) + \sum_{k=1}^n c_k R(x_k) [=]$$

Так як $R(x) = f(x) - \omega(x) Q_{n-1}(x)$, то

$$[=] \sum_{k=1}^n c_k (f(x_k) - \omega(x_k) Q_{n-1}(x_k)) = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k),$$

Тобто формула (2) є точною для будь-якого багаточлена степеня $2n - 1$. ▷

Отже, з точністю до сталого множника багаточлени $\omega(x)$ співпадають з багаточленами n -того степеня ортогональної системи багаточленів. Ця система ортогональна на проміжку $[a, b]$ з вагою $\rho(x)$.

1) Покажемо, що c_k, x_k визначаються однозначно.

Представимо багаточлен $\omega(x)$ у вигляді $\omega(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$.

Умови ортогональності приймуть вигляд

$$\int_a^b \rho(x) \omega(x) x^\alpha dx = \int_a^b \rho(x) (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n) x^\alpha dx = 0.$$

$$\int_a^b \rho(x) (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) x^\alpha dx = - \int_a^b \rho(x) x^n x^\alpha dx$$

Покажемо, що відповідна однорідна система рівнянь

$$\int_a^b \rho(x) (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) x^\alpha dx = 0, \quad \alpha = \overline{0, n-1}$$

має єдиний розв'язок $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Помножимо систему на a_α і просумуємо по всіх $\alpha = \overline{0, n-1}$.

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} a_\alpha \int_a^b \rho(x) (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) x^\alpha dx = \int_a^b \rho(x) \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_\alpha x^\alpha x^j dx = \int_a^b \rho(x) \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \right)^2 dx = 0$$

Звідси і з умови $\rho(x) > 0$ випливає, що $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Тому і відповідна неоднорідна система має єдиний розв'язок. Отже існує єдиний багаточлен $\omega(x)$ степеня n , який ортогональний з вагою $\rho(x)$ до будь-якого багаточлена степеня $n-1$.

2) Покажемо, що **найвищий степінь точності формули Гауса** $m = 2n-1$.

З теореми випливає, що $m \geq 2n-1$.

Покажемо, що існує багаточлен степеня $2n$, для якого формула не є точною. Для цього введемо функцію $f(x) = \omega^2(x) \in \pi_{2n}$.

Маємо

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx > 0,$$

але

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n c_k \omega^2(x_k) = 0$$

Отже, $I(f) \neq I_n(f)$. Звідси $m \leq 2n-1$, тобто $m = 2n-1$.

3) Коефіцієнти формул Гауса додатні, тобто $c_k > 0$.

Покажемо це. Розглянемо багаточлени

$$\varphi_j = \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \right]^2,$$

які мають степінь $2n-2$ і властивість

$$\varphi_i(x_k) = \delta_{ik} \cdot \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) dx > 0.$$

Так як для цих багаточленів справедливі формули Гауса, то

$$I_n(\varphi_j) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_j(x_k) = \sum_{k=1}^n c_k \left[\frac{\omega(x_k)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \right]^2 = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{jk}^2 = c_j.$$

Звідси випливає, що $c_j > 0$, $j = \overline{1, n}$.

4) Теорема

Нехай вагова функція $\rho(x) > 0$ $x \in [a, b]$ $f(x) \in C^{2n}[a, b]$, тоді існує точка $\xi \in [a, b]$ така, що залишок рівний

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx \quad (6)$$

◁ Розглянемо інтерполяційний багаточлен Ерміта з двократними вузлами $H_{2n-1}(x)$:

$$f(x_i) = H_{2n-1}(x_i), \quad f'(x_i) = H'_{2n-1}(x_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Для нього

$$r_{2n-1}(x) = f(x) - H_{2n-1}(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \omega^2(x).$$

Звідси

$$R_{2n-1}(x) = \int_a^b \rho(x) r_{2n-1}(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx. \quad \triangleright$$

8.8. Частинні випадки квадратурної формули Гауса

1) Розглянемо відрізок $[0,1]$ і вага $\rho(x) = 1$, тобто виведемо формули Гауса для обчислення інтегралу

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Щоб знайти вузли квадратурної формули розглянемо багаточлени Лежандра

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad L_0 = 1, \quad L_1(x) = x$$

Багаточлени Лежандра задовольняють умовам теореми 1 (пункт 1), тобто

$$\omega(x) = L_n(x)$$

і вузлами квадратурної формули є корені цього багаточлена.

Квадратурну формулу будуємо за формулою

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k).$$

При $n = 1$ потрібно знайти c_0, c_1, x_0, x_1 .

Заміною $x = 2t - 1$ переведемо $[0,1]$ на проміжок $[-1,1]$.

Запишемо

$$L_2(t):$$

$$L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

а

$$L_2(t) = \frac{3(2t-1)-1}{2} = \frac{12t^2-12t+2}{2} = 6t^2-6t+1=0$$

$$\text{Звідси } t_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, t_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

За формулою (5) порахуємо

$$c_1 = \int_0^1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} dx = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} dx = \frac{1}{2}.$$

Тобто квадратурна формула має вигляд

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \right).$$

А залишковий член

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n)!} \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \quad (7)$$

2) Розглянемо відрізок $[-1,1]$ і вага $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, тобто виведемо формули Гауса для обчислення інтегралу

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ці формули називають формулами Ерміта.

Багаточлени Чебишова задовольняють умовам теореми 1(п.1), тому

$$\omega(x) = \overline{T_n(x)} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Вузлами квадратурної формули Ерміта є корені цього багаточлена, тобто $\cos(n \arccos x) = 0$ звідси

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Відповідні коефіцієнти обчислюються за формулами

$$c_k = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2} T'_n(x_k)(x-x_k)} = \frac{\pi}{n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Отже, формули Ерміта мають вигляд

$$I_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

де (x_k) – корені багаточлена Чебишова.

Залишковий член має вигляд

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

3) Розглянемо відрізок $[-\infty, \infty]$ і вага $\rho(x) = e^{-x^2}$, тобто виведемо формули Гауса для обчислення інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx.$$

Аналогічно

$$\omega(x) = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^2} e^{-x^2}$$

– багаточлени Ерміта

Коефіцієнти обчислюються за формулами

$$c_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}$$

Залишковий член рівний

$$R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

Так як багаточлени Ерміта обчислюються за рекурентними формулами

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_{-1} = 0, H_0 = 1,$$

то при $n=1$ $H_1(x) = 2x$. Корінь $x_0 = 0$,

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Квадратурна формула

$$I_1(x) = \sqrt{\pi} f(0)$$

4) Розглянемо відрізок $[0, \infty]$ і вага $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, тобто виведемо формули Гауса для обчислення інтегралу

$$\int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) dx.$$

Аналогічно

$$\omega(x) = L_n^\alpha(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

– багаточлени Лагера.

Коефіцієнти обчислюються за формулами

$$c_k = \frac{P(n+1)P(n+\alpha+1)}{x_k [L_n^\alpha(x_k)]^2}.$$

Залишковий член рівний при $\alpha = 0$

$$R_n(f) = \frac{n! P(n+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

6) Квадратурні формули Гауса – Кристофеля – Лабатто.

Інколи деякі точки при побудові квадратурних формул задано (наприклад крайова задача), тоді $x_0 = a$ – заданий вузол, $x_k, k = \overline{1, n}$ – невідомі, $x_{n+1} = b$ – заданий вузол.

Квадратурна формула має вигляд

$$I_n(f) = c_0 f(x_0) + \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) + c_{n+1} f(x_{n+1}) \quad (1)$$

Обчислюємо інтеграл

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \quad (2)$$

Невідомими є коефіцієнти $c_k, k = \overline{0, n+1}$ і вузли $x_k, k = \overline{1, n}$. Їх знаходимо з міркувань

$$I(f) = I_n(f), \quad f \in \pi_m, \quad m \rightarrow \max.$$

З того, що це квадратурні формули інтерполяційного типу отримаємо

$$c_0 = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x) \Omega(x) dx}{(x-x_0) \omega(x_0) \Omega'(x_0)}. \quad \text{Де } \omega(x) = \prod_{k=1}^n (x-x_k), \quad \Omega(x) = (x-x_0)(x-x_{n+1}).$$

$$c_{n+1} = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x) \Omega(x) dx}{(x-x_{n+1}) \omega(x_{n+1}) \Omega'(x_{n+1})}$$

$$c_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)\Omega(x)dx}{(x-x_k)\omega'(x_k)\Omega(x_k)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Система ортогональних багаточленів, що відповідає квадратурним формулам Гауса – Кристофеля – Лабатто має вигляд:

$$\omega(x) = P_n(x).$$

Квадратурна формула буде точною, коли

$$\int_a^b \rho(x)\Omega(x)P_n(x)Q_k(x)dx = 0, \quad k = \overline{1, n-1}$$

Позначимо

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\Omega(x).$$

Наприклад, якщо візьмемо $a = -1, b = 1, \rho(x) = 1$, то $\tilde{\rho}(x) = (x - x_o)(x - x_{n+1}) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ відповідає системі багаточленів Якобі $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, при $\alpha = 1, \beta = 1$.

Задача 11

Побудувати явний вигляд квадратурної формули Гауса – Кристофеля – Лабатто при $a = -1, b = 1, \rho(x) = 1, n = 1, n = 2$.

7) Інтегрування швидко осцилюючих функцій

Розглянемо інтеграл

$$I(f) = \int_a^b f(x)e^{j\alpha x}dx, \quad j^2 = -1.$$

Проблема в його обчисленні за допомогою інших квадратурних формул (напр. Сімпсона) в тому, що не буде задовольняти умови збіжності крок. Розглянемо $e^{j\alpha x}$ як ваговий коефіцієнт, тобто $\rho(x) = e^{j\alpha x}$. Замінімо $[a, b]$ на $[-1, 1]$: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_i$, $d_i \in [-1, 1]$, $i = \overline{1, n}$ (вузли можуть бути не рівновіддалені, якщо рівновіддалені, то $d_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = \overline{1, n}$).

Замінімо $f(x)$ на інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_{n-1}(x)$ з вузлами x_i і отримаємо формулу

$$I_n(f) = \int_a^b L_{n-1}(x)e^{j\alpha x}dx, \quad (2)$$

Яка буде точною для всіх багаточленів не вище $n-1$ ` степеня.

Тобто, якщо в (2) поставити багаточлен Лагранжа, то можна обчислити інтеграл і отримати квадратурну формулу

$$S_n^\omega(f) = \frac{b-a}{2} \exp\left\{j\omega \frac{a+b}{2}\right\} \sum_{i=1}^n D_i\left(\omega \frac{b-a}{2}\right) f(x_i), \quad D_i(p) = \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\xi - d_k}{d_i - d_k} \right) \exp(jp\xi) d\xi. \quad (3)$$

При $n=3, d_1=-1, d_2=0, d_3=1$ – це [формула Філона](#), можна брати і більше точок, наприклад $n=5, d_1=-1, d_2=-\frac{1}{2}, d_3=0, d_4=\frac{1}{2}, d_5=1$.

Задача 12

Побудувати явний вигляд формули Філона при $n=3, \rho(x)=e^{j\alpha x}$.

Зауваження

Не потрібно застосовувати ці формули, коли немає швидко осцилюючого множника.

8.9.Обчислення невластних інтегралів

Обчислення інтегралів з такими особливостями :

а) інтеграли другого роду, тобто

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \vee x \rightarrow b} \infty,$$

б) інтеграли першого роду

$$I = \int_a^\infty F(x) dx,$$

в) сингулярні інтеграли (інтеграли, які не беруться – розбігаються).

а) розглянемо інтеграли другого роду, тобто

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \vee x \rightarrow b} \infty \quad (1)$$

1) Мультиплікативний спосіб

Представимо підінтегральну функцію у вигляді $F(x)=\rho(x)f(x)$, причому $\rho(x)$ –особлива, а $f(x)$ –гладка. Використовуємо один із способів обчислення інтегралів з вагою:

$$I = \tilde{I}(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx.$$

Приклад 1

Потрібно обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$x=1$ – особлива точка.

Представимо підінтегральну функцію у вигляді:

$$F(x) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\rho(x)}} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}_{f(x)}},$$

отримаємо інтеграл вигляду

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

де $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$

Будуємо багаточлени Якобі $P_n^{(0, \frac{1}{2})}(x)$, $x \in [0, 1]$ і обчислюємо інтеграл.

Приклад2

Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^\pi \ln(\sin x) dx.$$

Особливі точки $x=0, x=\pi$.

Зведемо цю особливість до степеневій:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x(\pi-x)}},$$

тоді

$$f(x) = \sqrt{x(\pi-x)} \ln(\sin x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Для знаходження інтегралу з таким $\rho(x)$ застосовуємо квадратурні формули Чебишова.

Неприємності виникають при $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0, \pi} \infty$ (квадратурні формули даватимуть наближене значення).

Тому другий спосіб розв'язання проблеми:

2) Адитивний

Представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$F(x) = f(x) + \psi(x),$$

причому $\psi(x)$ – особлива, $f(x)$ – гладка. Розбиваємо інтеграл на два: $I = I_1 + I_2$.

$I_1 = \int_a^b f(x)dx$ – обчислюють чисельно (наприклад, формули Сімпсона чи трапецій),

$I_2 = \int_a^b \psi(x)dx$ – пробують обчислити аналітично (можливо апроксимувати (наприклад, рядом) функцію $\psi(x)$).

Приклад 3

Обчислити інтеграл з прикладу 2:

$$I = \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx .$$

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx .$$

Розкладемо

$$\ln(\sin x) = \ln \frac{\sin x}{x} + \ln x .$$

Отримаємо інтеграли

$$I_1 = \int_a^b \ln \frac{\sin x}{x} dx \text{ обчислюємо чисельно,}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

б) розглядаємо інтеграли першого роду

$$I = \int_a^{\infty} F(x) dx$$

3) $a > 0$.

Робимо **заміну** $t = \frac{x-a}{x}$, $x = \frac{a}{1-t}$.

Тоді

$$I = a \int_0^1 F\left(\frac{a}{1-t}\right) \frac{dt}{(1-t)^2}$$

– інтеграл другого роду (див. пункт а)

$a=0$ Робимо **заміну** $t = e^{-x}$, $x = -\ln t$, тоді

$$I = \int_0^1 F(-\ln t) \frac{dt}{t}$$

– теж інтеграл другого роду.

$a < 0$ не можна зробити заміну $t = \frac{x-a}{x}$, тому що виникає особливість в точці $x = 0$.

Тому розбиваємо інтеграл на два:

$$I = \int_a^0 F(x) dx + \int_0^\infty F(x) dx$$

і обчислюємо за допомогою попередніх пунктів.

4) мультиплікативний

Аналогічно представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$F(x) = \rho(x)f(x),$$

де, наприклад,

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Такий ваговий коефіцієнт відповідає багаточленам Лагера.

При $x \in (-\infty, \infty)$, $\rho(x) = e^{-x^2}$ – багаточленам Ерміта.

5) обрізання верхньої границі.

Інтеграл запишемо у вигляді

$$I = \int_a^\infty F(x) dx = \int_a^b F(x) dx + \int_b^\infty F(x) dx.$$

b обчислюють з умови збіжності інтегралу

$$\left| \int_b^\infty F(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

де ε – задана точність.

Для обчислення $\int_a^b F(x) dx$ використовують квадратурні формули вкладеного типу.

6) Інтеграли типу Коші.

Ми розглядаємо випадок, коли інтеграл є невластим. Розглянемо розбіжні, сингулярні інтеграли.

$$I(g) = \int_a^b \frac{g(x)}{x-c} dx \quad a < c < b$$

Якщо $g(c) \neq 0 \Rightarrow$ маємо сингулярний інтеграл, він не береться (він розбігається).

Він розуміється, як

$$I(g) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \left(\int_a^{c-\delta} \frac{g(x)}{x-c} dx + \int_{c+\delta}^b \frac{g(x)}{x-c} dx \right)$$

– головне значення

Якщо ця границя існує, то це сингулярний інтеграл типу Коші. (Вузли повинні бути симетричними).

Обчислення цього інтегралу можна звести до обчислення інтегралу виду

$$\bar{I}(\bar{g}) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\bar{g}(\xi) d\xi}{\xi} [=]$$

$$(\xi = x - c \quad I(g) = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b \quad (1 \text{ і } 3 - \text{ власні інтеграли})$$

Треба побудувати сітку, але якщо розбити інтеграл на 2 і ξ замінити на $-\xi$, то)

$$[=] \int_0^{\delta} \frac{\bar{g}(\xi) - \bar{g}(-\xi)}{\xi} d\xi$$

Якщо для \bar{g} задана умова Гьольдера

$$|\bar{g}(\xi) - \bar{g}(-\xi)| \leq A|\xi|^\alpha \quad \alpha > 0$$

то треба застосовувати квадратурну формулу Гаусса.

8.10. Обчислення кратних інтегралів

[Волков, 125-129; Калиткин, 108-113, 121-123]

1) якщо D прямокутник

Розглянемо інтеграл, який зводиться до повторного (в прямокутнику)

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (1)$$

Цей інтеграл зводиться до повторного, якщо ввести

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (2)$$

Тоді

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (3)$$

(можна застосувати квадратурну формулу середніх прямокутників)

$$I \approx I_0 = (b-a)F(\bar{x}) = (b-a) \int_c^d f(\bar{x}, y) dy \approx (b-a)(d-c)f(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \bar{y} = \frac{c+d}{2}$$

Кубаторна формула, якщо формула трапеції:

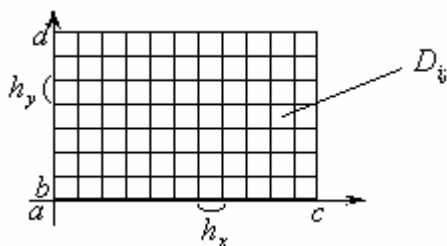
$$I \approx I_1 = \frac{(b-a)(d-c)}{4} [f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)]$$

Точність залежить від поведінки функції, від інтервалу. Немає можливості точно підрахувати точність.

$$D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$$

$$x_i = a + ih_x \quad i = \overline{0, N_x}$$

$$y_j = c + jh_y \quad j = \overline{0, N_y}$$



$$h_x = \frac{b-a}{N_x}, \quad h_y = \frac{d-c}{N_y}$$

Тоді

$$I = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \iint_{D_{ij}} f(x, y) dx dy \approx$$

(для кожного інтегралу по комірці застосовуємо відповідну квадратурну формулу I_0, I)

$$\approx I_{0,h} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_x h_y f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$$

$$\bar{x}_i = x_i - \frac{h_x}{2}, \quad \bar{y}_j = y_j - \frac{h_y}{2}$$

Якщо $f(x, y) \in C^2(\bar{D})$, то $I - I_{0,h} = O(h_x^2 + h_y^2)$

Степінь точності – 2.

Складність методу пропорційна кількості комірок

$$Q = O(N_x, N_y) = O(N^2)$$

$$N \approx N_x \approx N_y$$

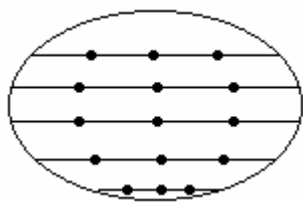
В 3-вимірному просторі

$$f(x, y, z) \quad Q = O(N^3)$$

При зменшенні по кожному інтервалу в 2 рази точність залишається однакою, а складність збільшується в 4 рази.

2) якщо D не прямокутник

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

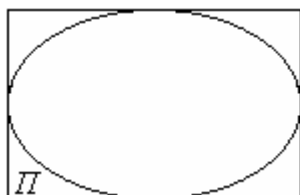


- розбиваємо на однакову кількість проміжків
(але цей прийом вже не використовують)

1) Замість f

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in D \\ 0, & x \in \Pi \setminus D \end{cases}$$

Π – найменший охоплюючий D прямокутник $\Pi \supset D$



$$I = \iint_{\Pi} \bar{f}(x, y) dx dy$$

Недоліки:

- може бути пагана функція, вона може бути розривною
- низька точність

2) Знайти відповідну заміну змінних

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta) \quad D \rightarrow \Pi$$

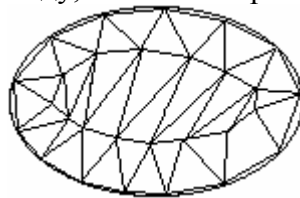
$$I = \iint_{\Pi} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$J(\xi, \eta)$ – Якобіан переходу

Якщо область гладка, то прямокутник буде негладким, якобіан буде мати особливості, що знижує швидкість збіжності.

3) триангулювання області.

Якщо область довільного вигляду, то її можна розбити на трикутники таким чином:



$$D = \bigcup_{k=1}^N D_k$$

$$I = \sum_{k=1}^N I_k \quad I_k = \iint_{D_k} f(x, y) dx dy$$

Застосуємо кубаторні формули до кожного трикутника.

$$f(x, y) \cong L_1(x, y) = A + Bx + Cy$$

Задача 13

Побудувати явний вигляд кубаторної формули, яка дозволяє наближено обчислити I_k по трикутнику D_k , якщо замінити $f(x, y) \cong L(x, y)$ (інтерполяційний многочлен 1-го степеню).

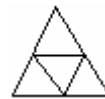
Побудувати по 3-х точках – вершинам трикутника.

Якщо D розбити на трикутники, точність

$$I - I_{1,h} = I - \sum_{k=1}^N I_{1,k} = O(h^2)$$

$$h = \max_k \text{diam} D_k$$

Складність $Q = O(h^{-2})$. Можна згустити, поділивши 1 трикутник на 4



В $R^3 \quad Q = O(h^{-3})$

В $R^p \quad Q = O(h^{-p})$

4) метод статистичних випробувань (Метод Монте-Карло)

Обчислимо інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$I = \iint_{\Pi} \bar{f}(x, y) dx dy \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{f}(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{mes} \Pi$$

ξ_i, η_i - незалежні реалізації випадково розподілених на $[a, b]$ та $[c, d]$ ξ та η

Складність

$$Q = O(N)$$

$$I - I_N = O(N^{-\frac{1}{2}})$$

– оцінка носить ймовірносний характер

Позитивна сторона методу – незалежно від розмірності однакова складність.

Негативна – низька точність.
