

IV. Розв'язки нелінійних рівнянь і систем.

Рівень 1

1. Скласти таблицю значень функції $y = y(x)$ на відрізку $[0,1]$ з кроком $h = 0,05$ за допомогою методу дотичних з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$, якщо функція задається рівністю $\cos y - y + 0,4x^2 = 0$. Обґрунтувати можливість застосування методу.

2. Розв'язати рівняння $x^4 e^x + \sqrt[3]{x-1} - 2 = 0$ а) за допомогою методу хорд; б) за допомогою методу половинного ділення.

3. Скласти таблицю значень функції $y = y(x)$ на відрізку $[0,1]$ з кроком $h = 0,05$ за допомогою методу простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$, якщо функція задається рівністю $y = \frac{1}{2} \arctg(\sin y - 0,5) + x^2$. Обґрунтувати можливість застосування методу. За початкове наближення взяти $y_0(x) = \sin x$.

4. За допомогою методу хорд з точністю 10^{-12} розв'язати рівняння $4x \ln^2 x - 4\sqrt{1+x} + 5 = 0$.

5. Розв'язати рівняння $x - e^{-x^2} = 1$ на відрізку $[0,2]$ а) методом дотичних; б) методом січних; в) методом половинного ділення. Ітерації проводити доки $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| > \varepsilon = 10^{-4}$. В кожному випадку підрахувати кількість ітерацій і порівняти швидкості збіжності.

6. З точністю 10^{-4} знайти всі корені рівняння $x^3 - 5x^2 + 4x + 0,092 = 0$ методом половинного ділення.

7. Скласти таблицю значень функції $y = y(x)$ на відрізку $[2,4]$ з кроком $h = 0,1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, якщо функція задається рівністю $y = \frac{1}{3} \ln(x + y^2) + 1$. Обґрунтувати можливість застосування методу.

8. Розв'язати рівняння $(x-4)^3 + \ln x = 0$ з точністю 10^{-5} а) методом простої ітерації; б) методом половинного ділення. Порівняти кількість зроблених ітерацій.

9. Розв'язати рівняння $e^{-0,45} - \sqrt{x-3} = 0$ з точністю 10^{-5} а) методом простої ітерації; б) методом хорд. Порівняти кількість зроблених ітерацій.

10. Знайти корені рівняння $2 \sin x = 1,5 - x^2$ з точністю 10^{-5} а) методом простої ітерації; б) методом дотичних. Порівняти кількість зроблених ітерацій.

11. Скласти таблицю значень функції $y = y(x)$ на відрізку $[0,1]$ з кроком $h = 0,1$ за допомогою методу половинного ділення з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$, якщо функція задається рівністю $0,5 - y + 5 \sin xy = 0$. Обґрунтувати можливість застосування методу.

12. Розв'язати рівняння $e^x - 2(1-x)^2 = 0$ з точністю 10^{-5} будь-яким методом, обґрунтувавши можливість його використання.

Рівень 2.

13. За допомогою методу золотого перерізу [Калиткин, с.196] знайти значення мінімуму і максимуму функції $y = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ з точністю 10^{-4} .

14. Знайти методом Ньютона розв'язок системи нелінійних рівнянь в області $0,4 \leq x \leq 0,5; -0,76 \leq y \leq -0,73$.

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

15. За допомогою методу парабол, а також модифікованим методом парабол – замінивши похідні на різницеві похідні [Калиткин, с.198,199] знайти всі екстремуми функції $y = 0,5 - x \sin x - x$ на відрізку $[0,10]$. Проілюструвати графіком в пакеті Mathcad або Mathematica5 (Команда Plot[]).

16. Застосовуючи метод простої ітерації, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} \cos(x^2 + y^3 + 1), \\ y = \frac{1}{4} \sin(x^3 - y^2). \end{cases}$$

Обґрунтувати збіжність методу. Порахувати нев'язку.

17. Розв'язати методом Ньютона систему нелінійних рівнянь.

$$\begin{cases} xy - tg(x - y) = 0; \\ 0,5x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Відп: $x = 0,975247; y = 0,512078$.

18. За допомогою методу парабол [Калиткин, с.146,147] знайти корені рівняння $x^5 - x - 0,2 = 0$. Проілюструвати графіком в пакеті Mathcad або Mathematica5 (Команда Plot[]). Для визначення оптимального числа ітерацій скористатися прийомом Гарвіка [Калиткин, с.146].

19. Розв'язати систему за допомогою методу Ньютона

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

20. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} e^{-(x+y+z)} \\ y = \frac{1}{3} e^{-(x-y+z)} \\ z = \frac{1}{4} e^{-(x+y-z)} \end{cases}$$

методом простої ітерації. Початкове наближення: $x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$.
Обґрунтувати збіжність методу.

21. Розв'язати систему методом градієнтного спуску (Початкове наближення $x_0 = 0,5$; $y_0 = 1$). Перевірити правильність розв'язку засобами пакета Mathcad або Mathematica5.

$$\begin{cases} 0,8x^2 + 2xy + 1,3y^2 + 20x - 15y = 0 \\ e^{0,6y-0,8x} - 1,14x - 1,52y = 0 \end{cases}$$

22. Знайти корені рівняння $x^3 + (2 - 3i)x^2 - (1 - i)x + 4 + 2i = 0$ з точністю 10^{-4} .

23. За допомогою методу простих ітерацій розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x = \lg \frac{y}{z} + 1, \\ y = 0,4 + z^2 - 2x^2, \\ z = 2 + \frac{xy}{20} \end{cases}$$

Початкове наближення: $x_0 = 1, y_0 = 2,2; z_0 = 2$. Обґрунтувати збіжність методу.

24. Знайти методом Ньютона розв'язок системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + \alpha, \\ (x + 0,5)^2 + y^2 = k, \end{cases}$$

в області $x > 0, y > 0$, де параметри α, k задаються формулами $\alpha = 1 + 0,1m; k = 0,6 + 0,1m; m = \overline{0,4}$.

25. За допомогою методу простих ітерацій розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0, \\ x^4 - 9y + 2 = 0. \end{cases}$$

Обґрунтувати збіжність методу.