

3.1

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Приступая к решению в Mathcad задач математического анализа, познакомимся с инструментами, которые предоставляет для этого пакет. Как определить функцию и вычислить ее значение, как построить график функции, решить простейшее уравнение, описано в гл. 1. В этой главе будет показано, как построить графики функций, заданных в полярных координатах и в параметрической форме, как вычислить предел, производную, определенный и неопределенный интеграл, найти разложение функции по формуле Тейлора и вычислить сумму ряда. Заметим, что рассматриваются лишь некоторые функции Mathcad, предназначенные для решения задач анализа, и не обсуждаются возможности программирования в пакете.

Как отмечалось ранее, большинство вычислений в Mathcad можно выполнить тремя способами: используя соответствующее меню, с помощью панелей инструментов или обращением к функции. Предполагается, что предварительно в меню **Math** установлены режимы автоматических вычислений и отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.

Определение функций и построение графиков

Для того чтобы определить функцию одной переменной, введите с клавиатуры имя функции с аргументом в круглых скобках, знак равенства (он будет отображен в рабочем документе как знак присваивания ":=") и справа от него — выражение для вычисления функции. В записи выражения для функции можно использовать знаки (имена) элементарных функций, вводя их с клавиатуры или вставляя в рабочий документ функцию, выбранную из списка **Function** (Функция) в меню **Insert** (Вставка) (рис. 3.1).

При вводе выражения через меню установите курсор в нужной позиции, щелкните по строке **Function** в меню **Insert**, выберите с

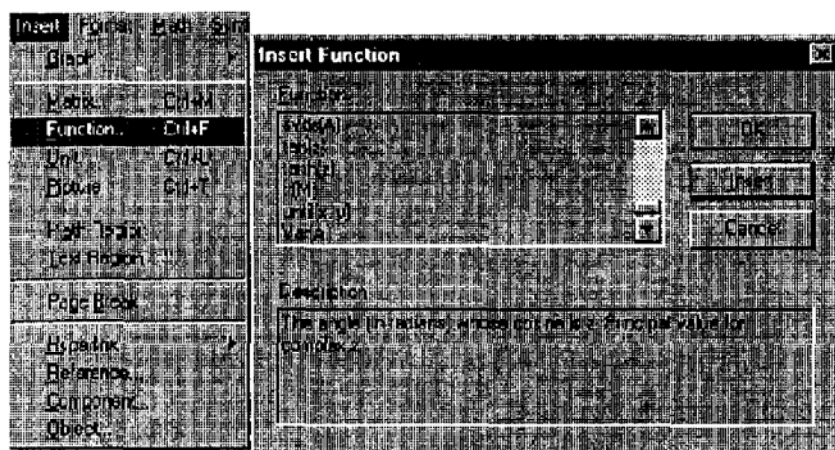
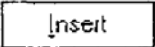



Рис. 3.1. Вид меню Insert и окна диалога со списком встроенных функций

помощью стрелок прокрутки имя нужной функции и щелкните по кнопке .

Выражение можно вводить также с помощью кнопок панели инструментов **Arithmetic** (Калькулятор) (рис. 3.2), которая открывается щелчком по кнопке  в панели математических инструментов.

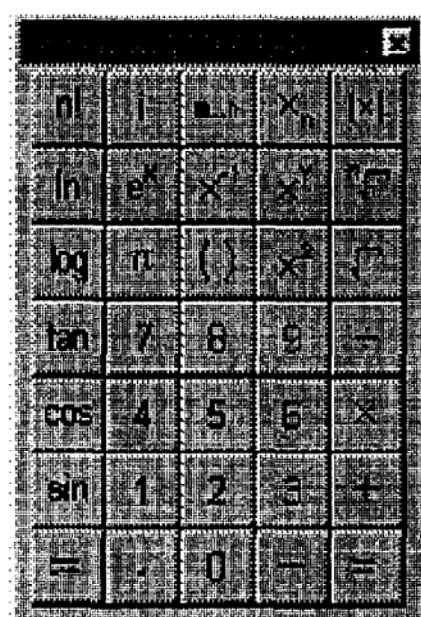



Рис. 3.2. Панель инструментов для ввода простейших выражений


Для того чтобы вставить в выражение имя или символ функции из панели, установите курсор в нужной позиции, щелкните по кнопке в панели и введите в помеченных позициях аргументы и параметры функции. Поскольку в математическом анализе для обозначения переменных часто используются буквы греческого алфавита, в панели математических инструментов есть кнопка , щелчок по которой открывает панель греческого алфавита. Для того чтобы вставить букву в выражение, установите курсор в нужной позиции и щелкните по кнопке с нужной буквой.

Чтобы вычислить значение функции в точке, введите в рабочий документ с клавиатуры имя функции, укажите в скобках значение аргумента, выделите выражение, введите знак равенства* и щелкните по свободному месту в рабочем документе.

Пример 1. Определение функции $f(t) = 2^{t \sin(3t-1)} - \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$. Вычисление значений функции в точках $t = 1$ и $t = 2$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$f(t) := 2^{t \sin(3t-1)} - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{t}\right) \quad f(1) = 1.093 \quad t := 2 \quad f(t) = -0.199$$

Инструменты для построения графиков в Mathcad доступны в панели инструментов **Graph** (Графики), которая открывается щелчком по кнопке  в панели математических инструментов, через меню **Graph** — в меню **Insert** (рис. 3.3).

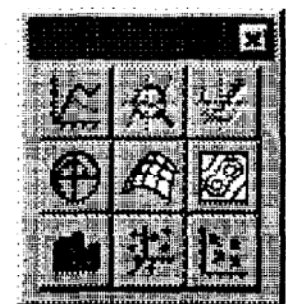
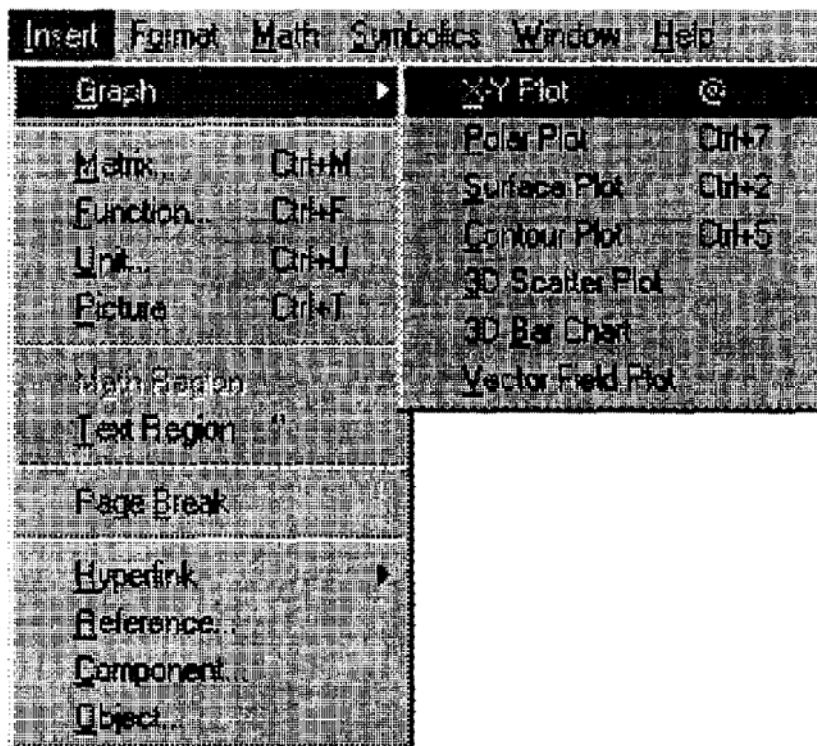





Рис. 3.3. Вид меню и панели инструментов для построения графиков

Правила работы с меню и кнопочной панелью при построении графиков такие же, как и при определении функции, — щелкните по рабочему документу и по соответствующей строке в меню или по кнопке в панели. Можно построить график функции, заданной в декартовых координатах или в параметрической форме (пункт меню

*Из рис. 3.2 видно, что знак равенства и знак присваивания можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели калькулятора.

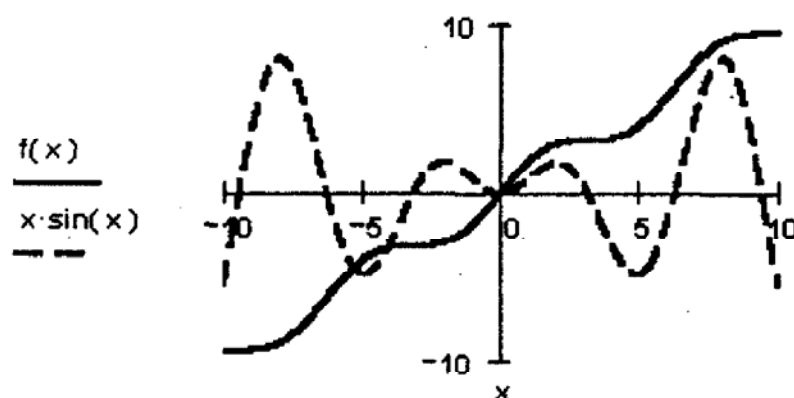
X-Y Plot или кнопка , а также график функции, заданной в полярных координатах (пункт меню **Polar Plot** или кнопка ).

Для построения графиков функции, заданной в декартовых координатах, щелкните по рабочему документу, по пункту меню **X-Y Plot** (или по кнопке ); в рабочем документе откроется окно построения графиков. Введите в помеченной позиции возле оси абсцисс имя аргумента, а в позиции возле оси ординат — имя функции и щелкните по рабочему документу вне окна графиков. Если нужно построить одновременно графики нескольких функций, введите, разделяя запятой, их имена в позиции возле оси абсцисс. Вместо имени функции можно ввести выражение для ее вычисления. Параметры изображения (цвет и толщина линий, координатная сетка, разметка осей, надписи на графиках и др.) проще всего изменить, щелкнув дважды по полю графика и установив настройки в соответствующих окнах диалога.

Пример 2. Построение графиков функций $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = x \sin x$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с определениями функций и их графиками приведен ниже.

$$f(x) := x + \sin(x)$$



Вид окон диалога настройки параметров графиков приведен на рис. 3.4.

Графики функций, заданных в параметрической форме, строятся аналогично. Отличие состоит в том, что в позициях аргумента и функции вводятся выражения или имена соответствующих функций параметра.

Пример 3. Построение кривой, заданной в параметрической форме выражениями:

$$x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с определениями функций и их графиками приведен ниже. Представлена кривая функции $y = y(x)$, координаты каждой точки (x, y) которой вычислены как функции параметра t : $(x, y) = (x(t), y(t))$.

$$x(t) := \frac{t^2}{1 + t^2} \quad y(t) := \frac{t \cdot (1 - t^2)}{1 + t^2}$$

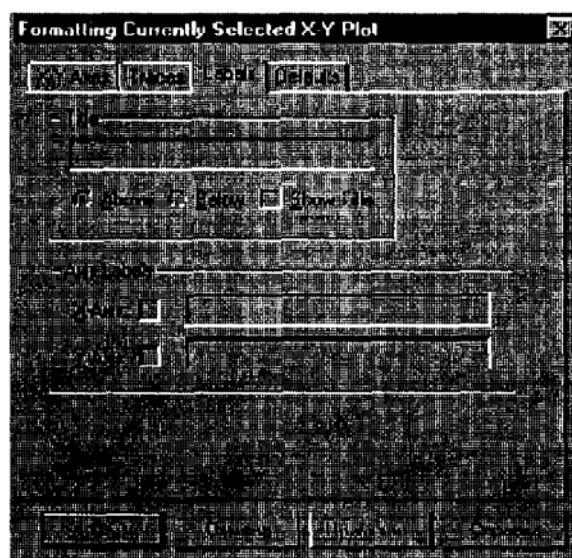
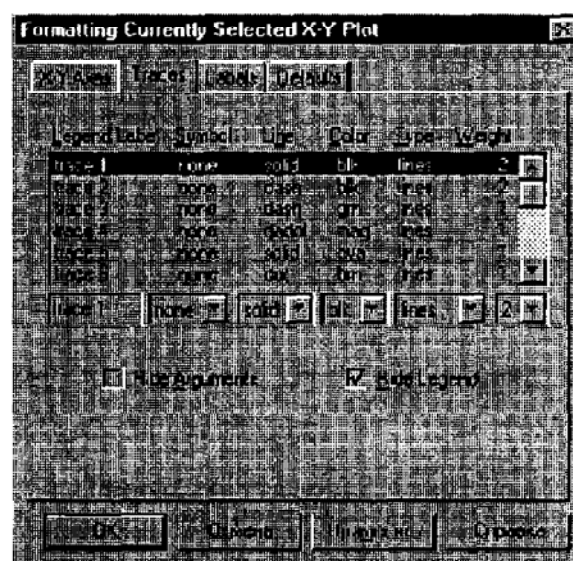
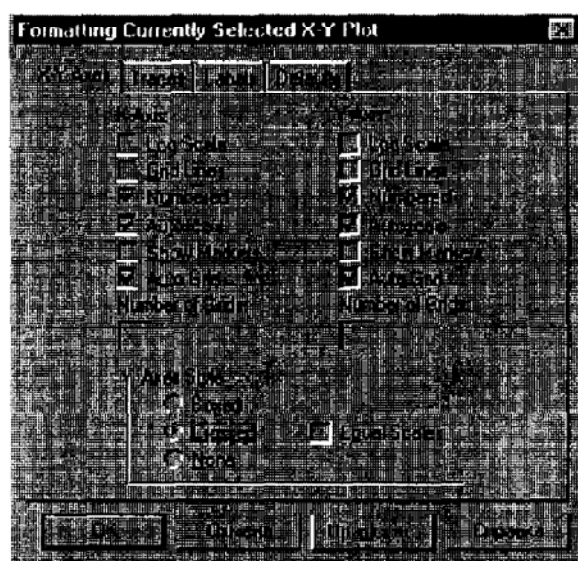
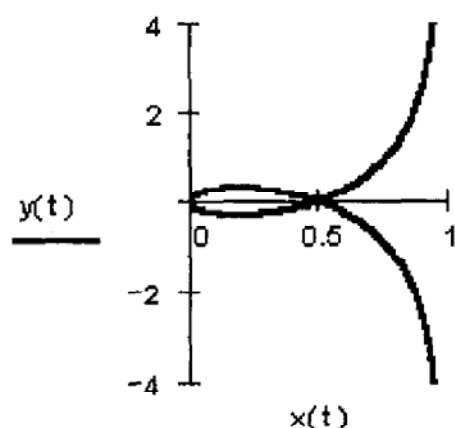
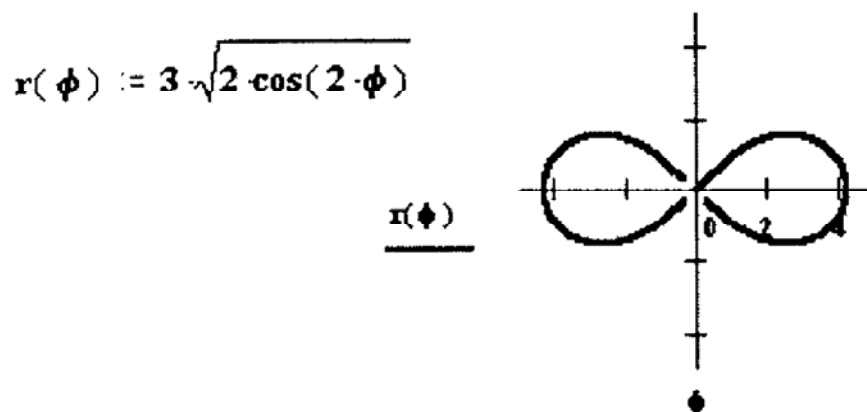




Рис. 3.4. Окна диалога настройки параметров графиков

Пример 4. Построение лемнискаты Бернулли $r = 3\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ниже приведен рабочий документ Mathcad с изображением лемнискаты.



Для построения графика функции, заданной в полярных координатах, щелкните по рабочему документу, по пункту меню **Polar Plot** (или по кнопке ) — в рабочем документе откроется окно построения графиков. Введите в помеченных позициях имя аргумента и имя или выражение для функции, установите в окнах диалога, как и в предыдущих примерах, параметры изображения и щелкните по рабочему документу вне поля графиков.

Вычисление пределов

Большинство инструментов для решения задач математического анализа в Mathcad собрано в панели **Calculus** (Анализ), которая открывается щелчком по кнопке  в панели математических инструментов. Вид панели приведен на рис. 3.5.

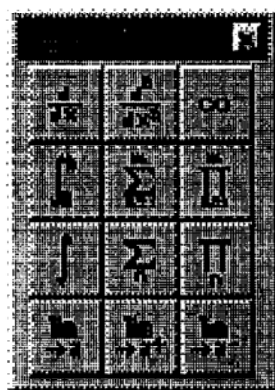





Рис. 3.5. Панель инструментов Calculus

Три нижние кнопки в панели предназначены для вычисления пределов. Кнопкой  в рабочий документ вставляется оператор вычисления предела функции в точке или на бесконечности, кнопками  и  — операторы вычисления односторонних пределов соответственно справа и слева.

Для того чтобы вычислить предел, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем щелкните по нужной кнопке, введите с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение допредельной функции и предельной точки, выделите все выражение и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>).

Пример 5. Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}}.$$

На рис. 3.6 приведен вид окна Mathcad с вычисленными пределами и со всеми использованными в работе меню и панелями.

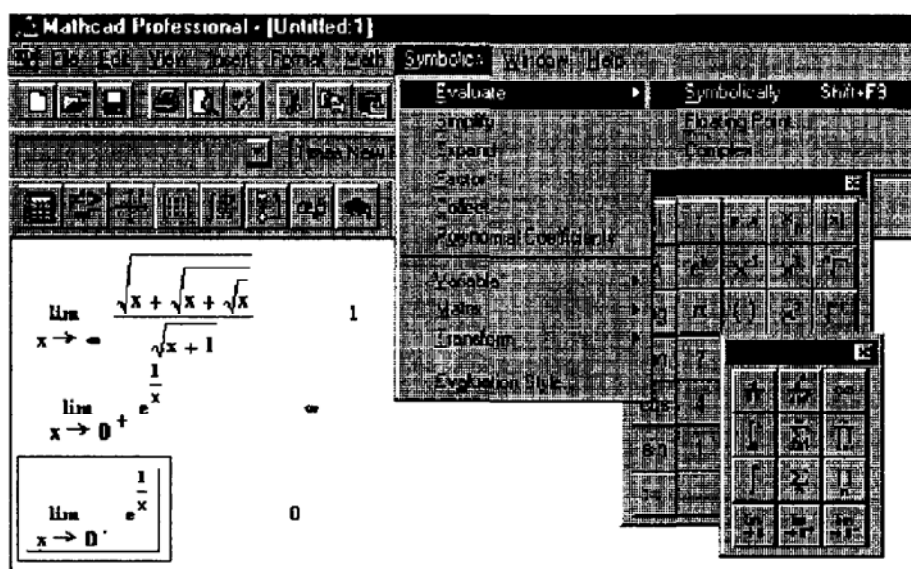



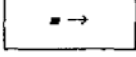

Рис. 3.6. Вычисление пределов

Указание. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали. Для ввода символа квадратного корня и экспоненты используйте панель калькулятора. При вычислении пределов последовательностей определяйте элемент последовательности как функцию номера элемента и вычисляйте предел на бесконечности.

Дифференцирование

Выражение для производной функции в Mathcad можно найти двумя способами: с помощью панели инструментов **Calculus** и через меню символьных операций **Symbolics**.

Чтобы найти производную, щелкните по свободному месту в рабочем документе, щелкните в панели **Calculus** по кнопке $\frac{d}{dx}$, введите с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение функции и

аргумента, заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>). Можно поступить иначе: выделить выражение для производной и щелкнуть в панели  по кнопке . При вычислении производных высших порядков щелкните по кнопке , введите в помеченных позициях выражение для функции, имя аргумента и порядок производной, а дальше действуйте так же, как при вычислении производной первого порядка.

Для того чтобы найти производную с помощью меню, введите в рабочий документ выражение для функции, выделите аргумент и щелкните по строке **Differentiate** в пункте **Variable** меню **Symbolics** (рис. 3.7).

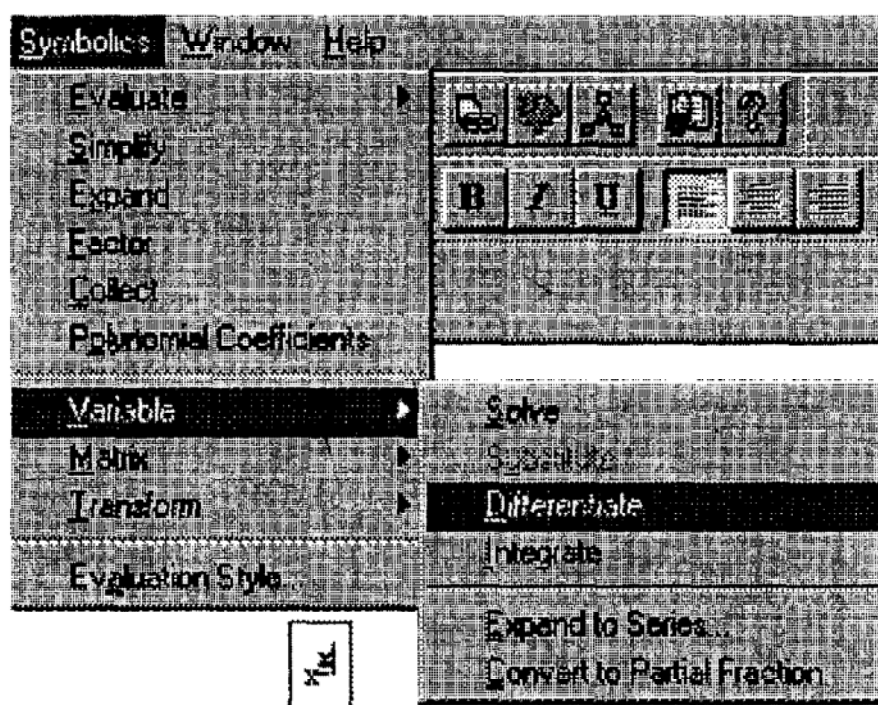


Рис. 3.7. Символьное дифференцирование в меню **Symbolics**

Пример 6. Вычисление производных $(x^x)'$ и $(x^x)''$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением производной.

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x \cdot (\ln(x) + 1) \quad \frac{d^2}{dx^2} x^x = x^x \cdot (\ln(x) + 1)^2 + \frac{x^x}{x}$$

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали и вычислите производную, используя панель **Calculus**.

Интегрирование

Символьное вычисление неопределенного интеграла в Mathcad можно выполнить двумя способами: с помощью панели инструментов **Calculus** и через меню символьных операций **Symbolics**.

Для того чтобы найти неопределенный интеграл, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем в панели **Calculus** — по кнопке \int , введите с клавиатуры в помеченных позициях выражение для функции и имя переменной интегрирования, заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>). Определенный интеграл вычисляется аналогично: щелкните по кнопке \int_a^b , введите в помеченных позициях выражение для функции, имя переменной интегрирования и пределы интегрирования, а дальше действуйте так же, как при вычислении неопределенного интеграла.

Для того чтобы найти неопределенный интеграл с помощью меню, введите в рабочий документ выражение для интегрируемой функции, выделите переменную интегрирования и щелкните по строке **Integrate** в пункте **Variable** меню **Symbolics**.

Пример 7. Вычисление интегралов

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.


$$\frac{1}{1 + \cos(x)} \tan\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \int \frac{1}{1 + \cos(x)} dx \tan\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx \quad 1$$

Указание. Установите режим отображения результатов вычислений по горизонтали, вычислите неопределенный интеграл, используя сначала меню, а затем панель **Calculus**. Вычислите определенный интеграл, используя панель **Calculus**.

Суммирование рядов

Символьное вычисление конечных сумм и сумм сходящихся рядов в Mathcad выполняется с помощью панели инструментов **Calculus**.

Для того чтобы вычислить сумму, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке  в панели **Calculus**, введите с клавиатуры в помеченных позициях выражение для функции, имя индекса суммирования, его первое и последнее значения (для рядов введите в качестве последнего значения символ бесконечности, щелкнув по кнопке с символом ∞ в той же панели), заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш $\langle \text{Shift} \rangle + \langle \text{F9} \rangle$). Для того чтобы получить вычисленное значение в десятичном формате, выделите его, щелкните в том же меню по строке **Floating Point** и введите в окне диалога требуемое число десятичных знаков. Можно сразу получить значение суммы в десятичном формате, если щелкнуть вместо **Symbolically** по строке **Floating Point**.

Пример 8. Вычисление частичных сумм ряда и суммирование рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$


Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением сумм рядов.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\exp(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	$\exp(1)$	$\exp(1) = 2.718$
$\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$	$\frac{163}{60}$	2.717	$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$	2.718

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали, вычислите сумму ряда, значение экспоненты, значение частичной суммы (суммы первых шести членов ряда) и преобразуйте его в десятичный формат; вычислите значение второй частичной суммы сразу в десятичном формате (см. разд. 1.3).

Разложение функций по формуле Тейлора

В Mathcad можно найти разложение функции по формуле Тейлора в окрестности любой точки из области определения функции. Сделать это можно через меню символьных вычислений или с помощью панели

Symbolic Keyword (Ключевые слова символьных операций)*, которая открывается щелчком по кнопке  в панели математических инструментов (рис. 3.8).

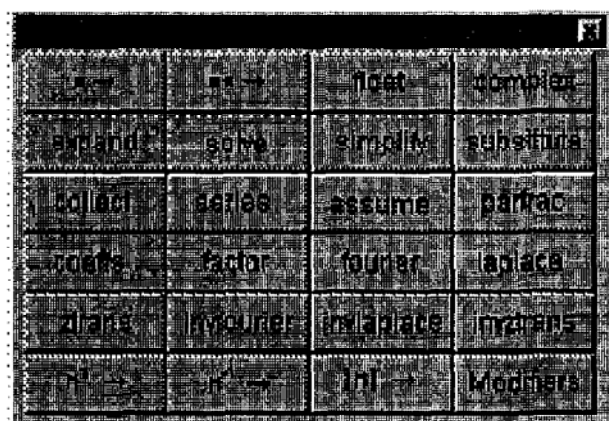



Рис. 3.8. Панель символьных операций

При работе через меню введите функцию, выделите переменную, щелкните по строке **Expand to Series** (Разложение в ряд) в пункте **Variable** (Переменная) меню **Symbolics**, введите в окне диалога (рис. 3.9) степень старшего члена в разложении и щелкните по кнопке .

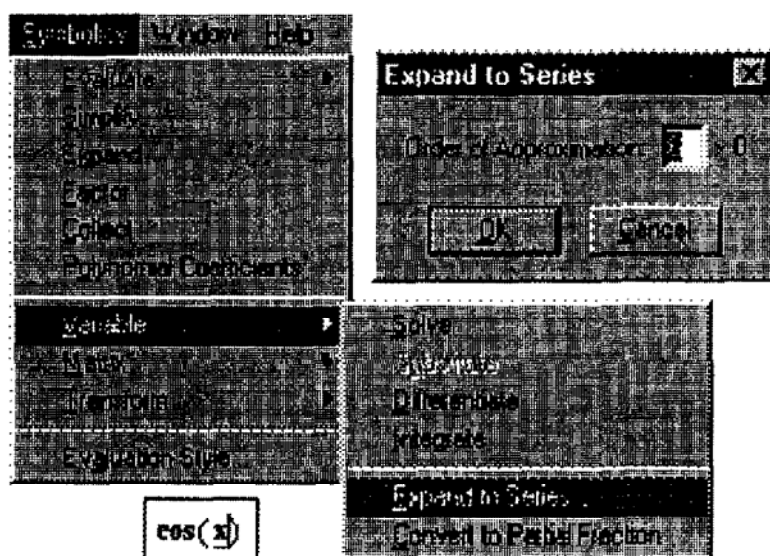
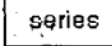


Рис. 3.9. Мёню и окно диалога разложения по формуле Тейлора функции $\cos x$

При работе с панелью символьных операций щелкните сначала по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке , введите перед ключевым словом **series** выражение для функции, а после ключевого слова — имя переменной и точку, в окрестности которой строится разложение, щелкните в рабочем документе вне выделяющей рамки.

*Эту панель будем называть *панелью символьных операций*.

При работе с меню в рабочем документе отображается соответствующее разложение с остаточным членом в форме Пеано, при работе с панелью ключевых слов — только многочлен Тейлора (частичная сумма ряда Тейлора).

Пример 9. Разложение функции $\cos x$ по формуле Тейлора в окрестности нуля и в окрестности точки $x = \pi/2$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\cos(x) \text{ series, } x=0 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4$$

$$\cos(x) \text{ series, } x=\frac{\pi}{2} \rightarrow -x + \frac{1}{2} \cdot \pi + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^3 - \frac{1}{120} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^5$$

$$\cos(x) \quad 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + O(x^6)$$

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали и найдите разложение в окрестности нуля, используя панель символьных операций. Аналогично найдите разложение в окрестности точки $\pi/2$. Используя меню символьных операций, найдите разложение до шестой степени.

3.2

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Последовательность $\{a_n\}$ — это функция, заданная на множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, \dots\}$. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, существует такой номер N , что для всех a_n с номерами $n > N$ справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, эквивалентное неравенству $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ все a_n с номерами $n > N$ расположены между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.

Последовательность, предел которой — число a , называется *сходящейся*, и ее предел обозначают $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Если изобразить элементы последовательности a_n на плоскости точками с координатами (n, a_n) , то неравенства $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ означают, что все точки (n, a_n) с номерами $n > N$ расположены между параллельными оси абсцисс прямыми $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.