

Преобразование алгебраических выражений

В Mathcad можно выполнить следующие символьные преобразования алгебраических выражений:

simplify (упростить) — выполнить арифметические операции, привести подобные, сократить дроби, использовать для упрощения основные тождества (формулы сокращенного умножения, тригонометрические тождества и т.п.);

expand (развернуть) — раскрыть скобки, перемножить и привести подобные;

factor (разложить на множители) — представить, если возможно, выражение в виде произведения простых сомножителей;

substitute (подставить) — заменить в алгебраическом выражении букву или выражение другим выражением;

convert to partial fraction — разложить рациональную дробь на простейшие дроби.

Если Mathcad не может выполнить требуемую операцию, то он выводит в качестве результата вычислений исходное выражение.

Все приведенные вычисления выполнены в предположении, что в меню **Math** установлен автоматический режим вычислений и отключен режим оптимизации (см. разд. 1.4).

Следует помнить, что Mathcad далеко не всегда преобразует выражение к самому простейшему виду.

Пример 1*. Упростите выражение

$$\left(1 + \frac{2}{3x-1}\right) \left(1 - \frac{9x-9x^2}{3x+1}\right) + 1.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\left(1 + \frac{2}{3 \cdot x - 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{9 \cdot x - 9 \cdot x^2}{3 \cdot x + 1}\right) + 1 \quad 3 \cdot x$$

У к а з а н и е. Установите режим отображения результатов вычислений по горизонтали. Для этого щелкните по строке **Evaluation Style** в меню **Symbolic** и установите, как показано на рис. 1.45, соответствующие метки в окне диалога. Для того чтобы ввести выражение, щелкните левой клавишей мыши по свободному месту в рабочем документе и введите выражение с клавиатуры. Сначала введите

*Этот пример предлагался на вступительном экзамене одного из московских инженерных вузов.

первый сомножитель — нажмите на клавиатуре клавиши в следующей последовательности:

<1> <+> <2> </> <3> <*> <-> <1>

Прежде чем вводить знак умножения и второй сомножитель, нажмите несколько раз клавишу <Space> (Пробел); нажимайте пробел до тех пор, пока весь первый сомножитель не будет заключен в выделяющую рамку (см. рис. 1.45). Затем введите знак умножения и второй сомножитель — нажмите на клавиатуре клавиши в следующей последовательности:*

<*> <(> <1> <-> <9> <*> <x> <-> <9> <*> <x> <^> <2>
 <Space>...<Space>(выделить $9x - 9x^2$) </> <3> <*> <x> <+> <1>
 <Space>...<Space> (выделить второй сомножитель) <+> <1>.

Для того чтобы упростить введенное выражение, используйте меню символьных операций: щелкните справа внизу у последнего символа выражения и выделите его, нажимая клавишу <Space> (см. рис. 1.45). Затем щелкните в меню **Symbolics** по строке **Simplify**. Результат (преобразованное выражение) будет отображен в рабочем документе справа от исходного выражения.

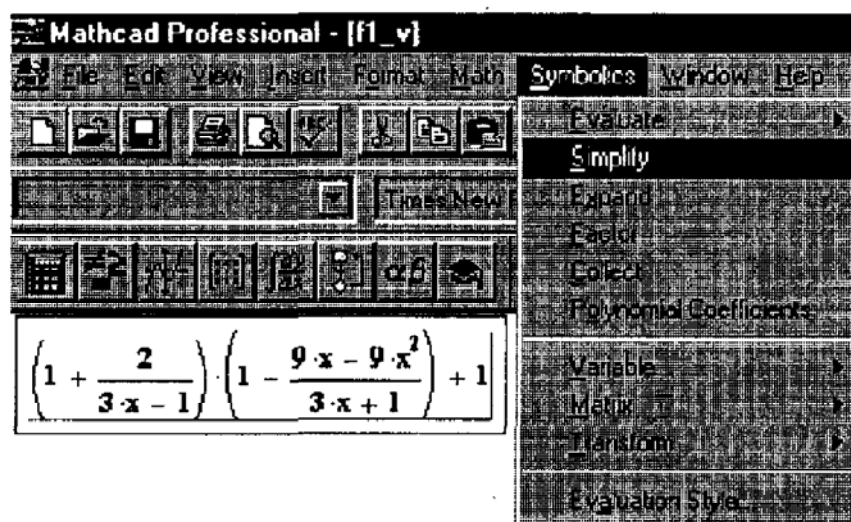


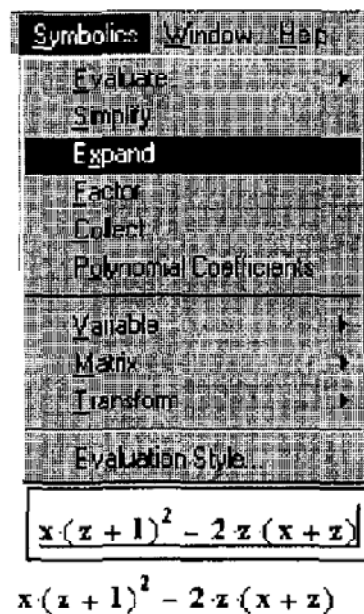
Рис. 1.45. Упрощение алгебраических выражений через меню **Symbolics**

Пример 2. Раскройте скобки и приведите подобные в выражении $x(z+1)^2 - 2z(x+z)$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и изображением использованного меню приведен на рис. 1.46.

Указание. Сначала, как и в предыдущем примере, установите в меню **Symbolics** — режим отображения результатов вычислений по горизонтали (см. рис. 1.45). Затем введите выражение для преобразования, выделите его и щелкните по строке **Expand** в меню **Symbolics** (см. рис. 1.46). Результат (преобразованное выражение) отображается в рабочем документе справа от исходного выражения.

*Запись <Space>...<Space> означает, что пробел нужно нажимать до тех пор, пока соответствующее выражение не будет заключено в выделяющую угловую рамку.

Рис. 1.46. Упрощение выражений с использованием операции **Expand**

Пример 3. Разложите на множители выражение $a^2 + ab^2 + 2abc + b^2c + a^2c + ac^2 + bc^2$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c + a^2 \cdot c + a \cdot c^2 + b \cdot c^2 \quad (a + b) \cdot (c + a) \cdot (c + b)$$

У к а з а н и е. Введите выражение для преобразования, выделите его и щелкните по строке **Factor** в меню **Symbolics**. Результат отображается в рабочем документе справа от исходного выражения. При вводе выражения не забывайте вводить знак умножения ($<*>$), а после ввода показателя степени ($<\wedge>$) нажимать клавишу $<\text{Space}>$.

Пример 4. Разложите на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\frac{x^2 - 3 \cdot x + 7}{(x - 1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} \quad \frac{5}{(3 \cdot (x - 1)^2)} - \frac{2}{(x - 1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(5 + 3 \cdot x)}{(x^2 + x + 1)}$$

У к а з а н и е. Введите описанным выше способом выражение для преобразования, выделите переменную x и щелкните по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**.

Определение, построение таблиц значений и графиков функций




Пример 5. Постройте таблицу значений функции $f(x) = x \sin \sqrt{|x|}$ на отрезке $[0, 4\pi^2]$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$f(x) := x \cdot \sin(\sqrt{|x|}) \quad i := 0..20 \quad x_i := i \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{20} \quad F_i := f(x_i)$$

$F =$

	0
0	0
1	1.947
2	3.611
3	3.852
4	2.571
5	$1.209 \cdot 10^{-15}$

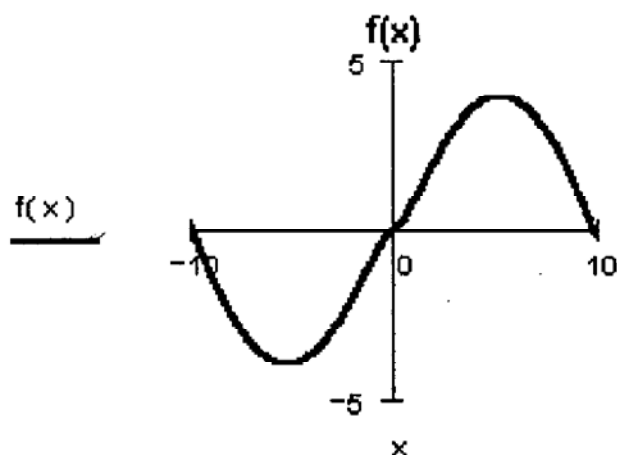
Указание. Определите функцию $f(x) = x \sin \sqrt{|x|}$. Для этого введите с клавиатуры имя функции и имя аргумента, заключенное в круглые скобки, знак присваивания (введите с клавиатуры знак равенства или нажмите на клавиатуре клавиши <Shift>+<:=> и следом — выражение для функции. Чтобы ввести знак квадратного корня, щелкните в панели калькулятора  по кнопке . Подкоренное выражение введите в позиции, указанной меткой. Знак абсолютной величины вводите аналогично, щелчком по кнопке . Определите диапазон изменения индекса i узлов сетки x_i на заданном отрезке. Для этого введите с клавиатуры: $i = 0 ; 20^*$. Определите узлы сетки $x_i = i \frac{4\pi^2}{20}$, для этого введите с клавиатуры: $x[i <Space> = i * 4 * (<Ctrl>+<p>)^2 <Space>...<Space> / 20$. Определите матрицу-столбец F для хранения таблицы значений функции в узлах сетки: $F_i = f(x_i)$. Для этого введите с клавиатуры: $F[i <Space> : f(x[i <Space>)$. Чтобы вывести таблицу значения функции на экран, введите с клавиатуры: $F =$. В рабочем документе появится таблица значений функции. Щелкните по полю таблицы — в рабочем документе откроется окно для просмотра всей таблицы со стрелками прокрутки.



Пример 6. Постройте график функции $f(x) = x \sin \sqrt{|x|}$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими определениями и графиком.

*При вводе с клавиатуры символа <;> в рабочем документе отображается символ, разделяющий границы диапазона <..>.

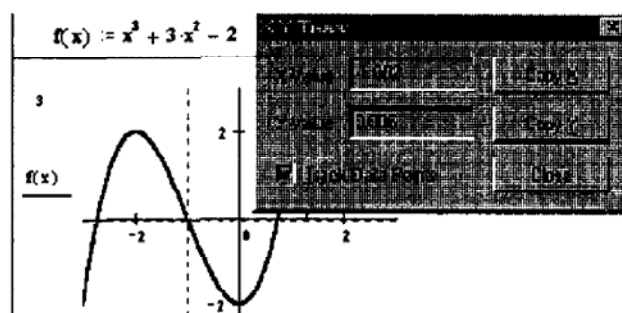
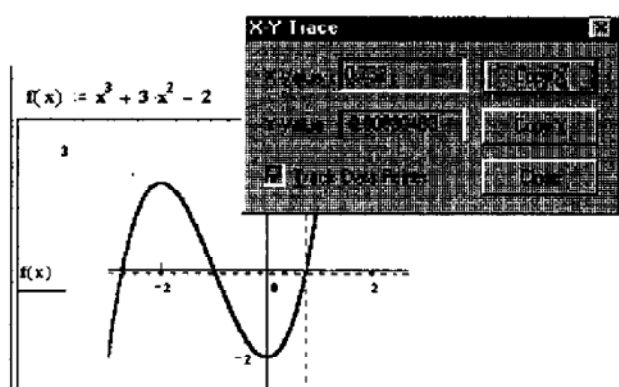
$$f(x) := x \cdot \sin(\sqrt{|x|})$$



У к а з а н и е. Определите функцию $f(x)$, как в предыдущем примере, щелкните по свободному месту в рабочем документе правее и ниже определения функции $f(x)$, затем щелкните по кнопке декартова графика  в панели графиков  и введите в позиции, указанной меткой возле оси абсцисс, имя аргумента x , а возле оси ординат имя функции — $f(x)$. График будет построен после щелчка по рабочему документу вне поля графиков. Параметры изображения можно изменить, щелкнув дважды по полю графиков и определив параметры (вид отображения осей, толщину и цвет линии, надпись на графике). На рис. 1.47 изображены окна диалога с параметрами настройки графика, изображенного выше.

Пример 7. Решите графически уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими определениями, графиками и окнами диалога приведен ниже.



У к а з а н и е. Определите функцию $f(x)$ и постройте ее график, действуя, как в предыдущем примере. Для того чтобы найти корни уравнения — абсциссы точек пересечения графика функции с осью $y = 0$, щелкните по строке **Trace** в пункте **Graph** меню **Format** (см. разд. 1.5). Затем щелкните по полю графиков и установите (стрелками клавиатуры или мышью) маркер (перекрещивающиеся пунктирные линии) в точке пересечения графика функции с осью абсцисс. В окне диалога отображаются координаты маркера: значение координаты x в окне и есть искомое приближенное значение корня.

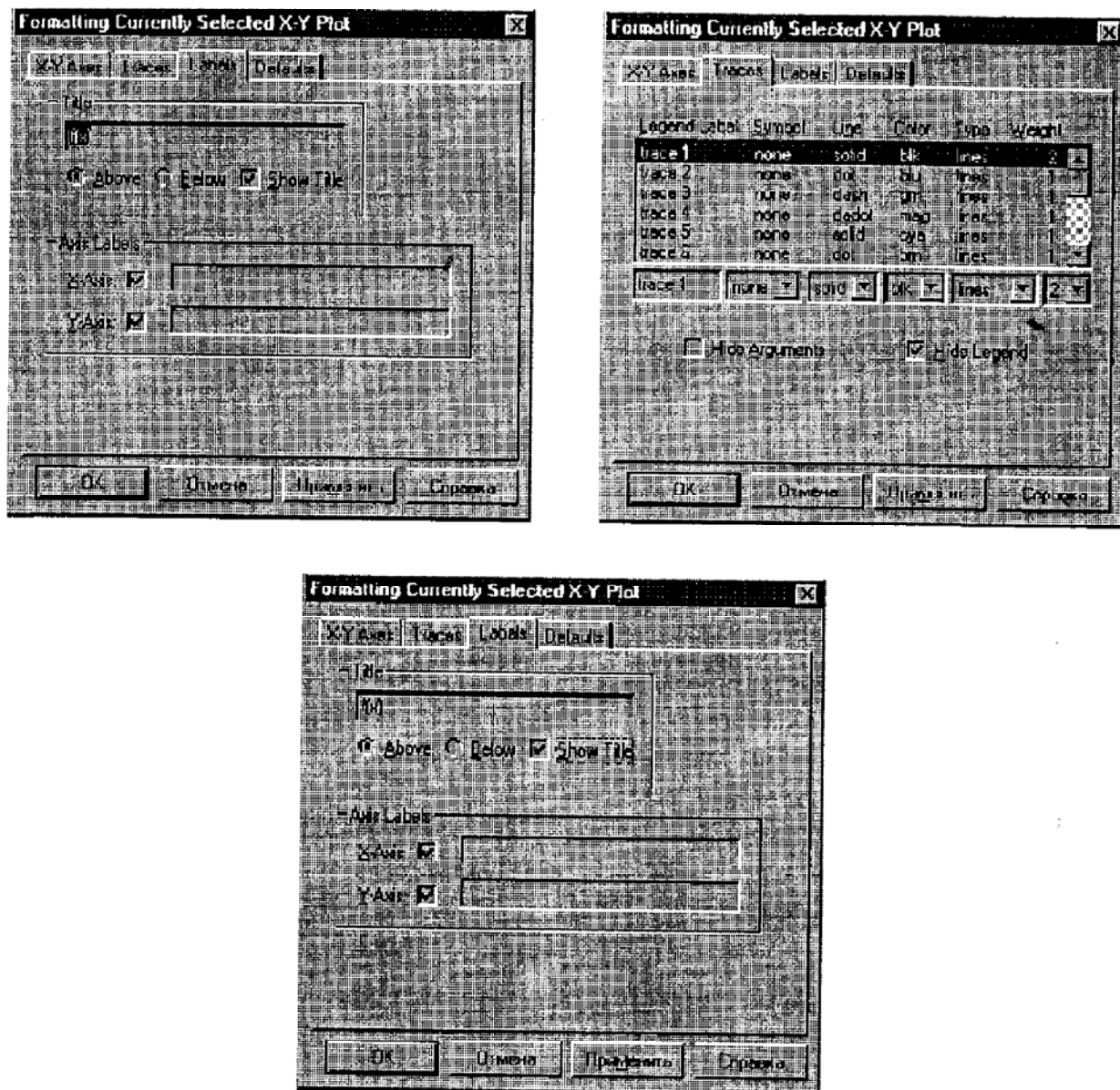


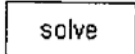

Рис. 1.47. Окна диалога настройки параметров декартова графика

Символьное решение уравнений и систем

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = 0$.

Символьное решение этого уравнения в Mathcad занимает одну строчку.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ solve, } x \rightarrow \frac{5}{2}$$

Указание. Щелкните по кнопке решения уравнений  в панели символьных вычислений . Введите в помеченной позиции слева от ключевого слова solve (решить) выражение для правой части уравнения, а в позиции справа от solve — имя переменной, относительно которой нужно решить уравнение, и щелкните по свободному месту в рабочем документе. Результат — значение корня уравнения — будет отображен в рабочем документе справа от стрелки.

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 2z(x+z) = 0, \\ (1+x^2) \sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0, \\ \sqrt{y-2}(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

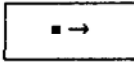

Given

$$x \cdot (z + 1)^2 - 2 \cdot z \cdot (x + z) = 0$$

$$(1 + x^2) \cdot \sqrt[4]{y - 2} - 2 \cdot x^2 = 0$$

$$\sqrt{y - 2} \cdot (z - 2) + z = 0$$

$$\text{Find}(x, y, z) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

У к а з а н и е. Введите с клавиатуры ключевое слово Given (дано), затем правее и ниже ключевого слова — левую часть первого уравнения системы, далее — символический знак равенства (нажмите на клавиатуре клавиши <Ctrl>+<=>) и правую часть уравнения (ноль). Аналогично введите остальные два уравнения системы. Правее и ниже последнего уравнения системы введите имя функции Find (найти), перечислите в скобках имена переменных, значения которых нужно вычислить, выделите Find(x,y,z), щелкните по кнопке  в панели . Вычисленное решение системы будет отображено после щелчка мышью вне выделяющей рамки в рабочем документе справа от стрелки — в виде матрицы, каждый столбец которой содержит одно из решений системы. В приведенном выше фрагменте рабочего документа найдены два решения системы: $x = 0, y = 2, z = 0$ и $x = 1, y = 3, z = 1$.