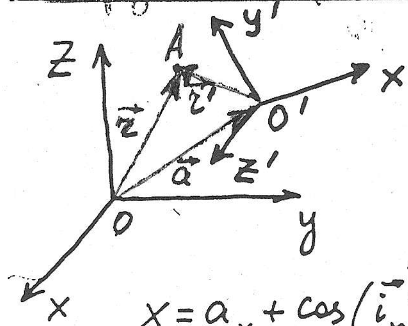
Геометричні перетворення декартових координат (Матвеєв, с. 34, § 6) – СРС



$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}\,'$$

$$x = a_x + \cos(\widehat{\vec{i}_x{}' \cdot \vec{i}_x})\, x' + \cos(\widehat{\vec{i}_y{}' \cdot \vec{i}_x}) \cdot y' + \cos(\widehat{\vec{i}_z{}' \cdot \vec{i}_x}) \cdot z'$$

$$x' = -a_x{}' + \cos(\widehat{\vec{i}_x \cdot \vec{i}_x{}'}) \cdot x + \cos(\widehat{\vec{i}_y \cdot \vec{i}_x{}'})\, y + \cos(\widehat{\vec{i}_z \cdot \vec{i}_x{}'}) \cdot z$$

Якщо $a = 0$, та позначити

1) $x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$
2) $x' = x_1{}'$ $y' = x_2{}'$ $z' = x_3{}'$
3) $\vec{i}_x = \vec{e}_1$ $\vec{i}_y = \vec{e}_2$ $\vec{i}_z = \vec{e}_3$
4) $\vec{i}_x{}' = \vec{e}_1{}'$ $\vec{i}_y{}' = \vec{e}_2{}'$ $\vec{i}_z{}' = \vec{e}_3{}'$
5) $\cos(\widehat{\vec{e}_m \vec{e}_n{}'}) = a_{mn}$ $m, n = 1, 2, 3$, то

Перетворення координат при переході з однієї декартової СК в іншу, які мають спільний початок відліку

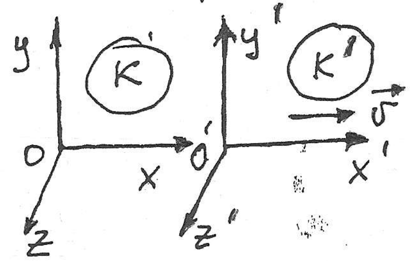
$$\boxed{\begin{cases} x_1 = a_{11} x_1{}' + a_{12} x_2{}' + a_{13} x_3{}' \\ x_2 = a_{21} x_1{}' + a_{22} x_2{}' + a_{23} x_3{}' \\ x_3 = a_{31} x_1{}' + a_{32} x_2{}' + a_{33} x_3{}' \end{cases}}$$

або: $x_i = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik} x_k{}'$

Не плутати з перетвореннями Галілея!

Не має відношення до релятивістської механіки

Перетворення Галілея



Інваріанти – незмінність характеристик при переході між системами

В силу геометр. уявлень отримуємо:

$$\boxed{x' = x - vt;\ y = y';\ z = z';\ t' = t}$$

Якщо „пересісти" в K'-ск, то $\vec{v} \to -\vec{v}$ і

$$\boxed{x = x' + vt';\ y = y';\ z = z',\ t = t'}$$

Інваріанти перетворень Галілея

1. Відстань

(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2)

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2' \cancel{+vt'} - x_1' \cancel{-vt'})^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = l'$$

$$l = l' = inv$$

2. $t = t' = inv$

3. $\Delta t = \Delta t' = inv$

4. Складання швидкостей

$x'(t);\ y'(t);\ z'(t)$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'};\quad v_y' = \frac{dy'}{dt'},\quad v_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

$$(1)\ x(t) = x'(t') + vt';\quad y(t) = y'(t');$$

$$t = t' \qquad z(t) = z'(t')$$

Продиф. (1):

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt} + v \cdot \dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{dx'}{dt'} + v = v_x' + v \neq \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq inv \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{dy'}{dt'} = v_y' = inv \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dz'}{dt'} = v_z' = inv \end{cases}$$

5. Інваріантність прискорення

Диф. (1) та враховуємо, що $dt = dt'$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \Rightarrow a_x = a_x' = inv$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \Rightarrow a_y = a_y' = inv$$

Прискорення є інваріантом відносно перетворень Галілея. Швидкість (v_x) не є інваріант.

Адитивність маси і закон збереж. маси

[2] - с. 97

$m_1, m_2 \Rightarrow m$

К-СВ: $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}$; $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\vec{v}$ (1)

К'-СВ: $\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}' \Rightarrow \vec{v}\,'$ $m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' = m\vec{v}\,'$ (2)

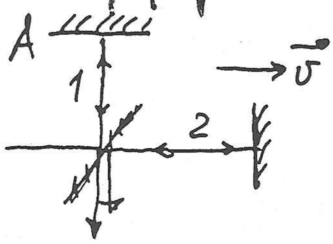
V_0 – шв. руху К'-СВ.

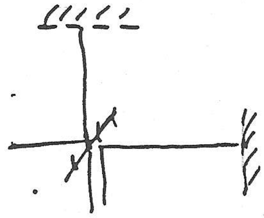
Перетвор. Галілея: $\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{V}_0;\ \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{V}_0 \\ \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}_0\end{array}\right\}$ (3)

(3) → (2) з урахуванням (1): $\boxed{m_1 + m_2 = m}$

Дослід Майкельсона - Морлі 1881 р., 1887 р.

Інтерферометр.





Інтерпретація дослідів Майкельсона

Негативний результат давав декілька способів його пояснення:

1. Балістична гіпотеза? [1] с. 66
2. Невірні рівняння Максвела (1855 р.)?
3. Ефір повністю захоплюється тілами, що рухаються?
4. Ефіру взагалі немає?!
5. А може (хоча б формально?!) припустити, що розміри тіл, що рухаються, не залишаються сталими (Лоренц, Фіцджеральд (1892 р.)?!!

$$l' = l\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Але вважали шв. світла с відносною

Експеримент Майкельсона: с - стала!

$c' = c + V$ – невірно! $c' = c$!

$c = inv.$

Ейнштейн

Перетворення Лоренца

Матвєєв, с. 69

Edited by Foxit Reader
Copyright(C) by Foxit Software Company,2005-2008
For Evaluation Only.

2 постулати!

2. Перетворення x та t:

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) & (1) \\ x = \alpha'(x' + vt') & (2) \end{cases}$$

лінійний коефіцієнт

1) $\alpha = \alpha'$ – принцип відн. Тобто всі ІСВ рівноправні

$x' = ct'$ $\quad$ $x = ct$ $\quad$ (3) 2) $c = inv.$! постулат Ейнштейна

З однорідності простору і часу випливає твердження про те, що перетворення (1), (2) мають бути лінійними.

(1), (2) $\rightarrow$ (3):

$$\left.\begin{aligned} ct' &= \alpha t(c - v) \\ \times \quad ct &= \alpha t'(c + v) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$c^2 \cancel{tt'} = \alpha^2 \cancel{tt'}(c^2 - v^2)$$

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{x}{\alpha'} = x' + vt'$$

$$vt' = \frac{x}{\alpha'} - x' = \frac{x}{\alpha} - \alpha(x - vt) =$$

1) $\alpha = \alpha'$

2) $x' = \alpha(x - vt)$ (1)

$$= \alpha vt - \alpha x + \frac{x}{\alpha} = \alpha vt + x\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \Rightarrow$$

$$t' = \alpha t + \frac{x}{v}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) = \alpha\left\{t + \frac{x}{v}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\right\} =$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\left\{t + \frac{x}{v}\left(\cancel{1} - \frac{v^2}{c^2} - \cancel{1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \boxed{t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

(5) $\rightarrow$ (1):

$$\frac{v}{c} = \beta$$

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z = z'} \quad (6) \quad \text{ПЛ}$$

(6), (7) – перетворення Лоренца

(5) $\rightarrow$ (2) або із (6):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z \\ t &= \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)\cdot x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}} \quad \text{ПЛ} \quad (7)$$

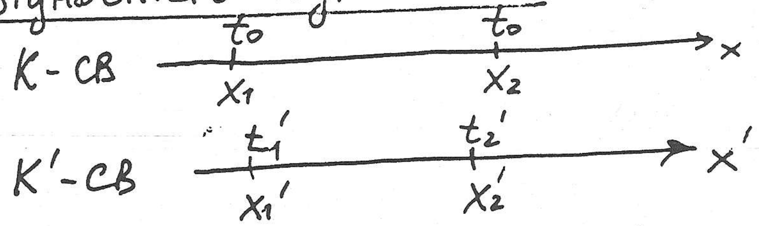
1) $t \neq t'$ $\quad$ 2) $t = f(x')$ зв'язок часу та простору $\quad$ 3) ПЛ – лінійні за x та часом

4) Коли $v \ll c$ ПЛ $\rightarrow$ П Галілея

5) $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \geq 0 \Rightarrow v \leq c$

Наслідки з перетворень Лоренця

1. Відносність одночасності



$t_1' = t_2'$??

$$t_1' = \frac{t_0 - \left(\frac{v}{c^2}\right)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ПЛ

$$t_2' = \frac{t_0 - \left(\frac{v}{c^2}\right)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

СРС:

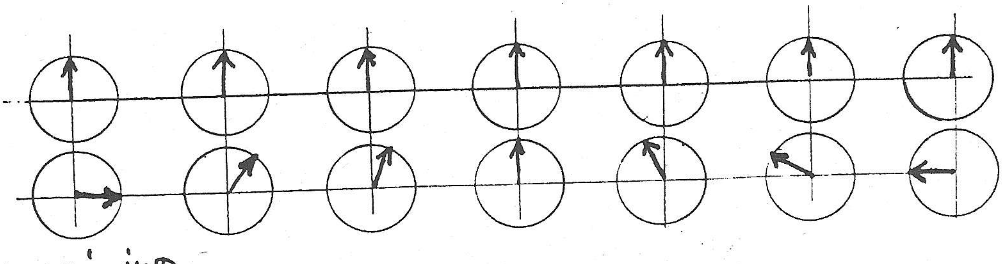
$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 \ !$$

м.б. (може бути) різним і знак! Причинно-наслідковий зв'язок?

1) Події в K'-CB відбуваються не одночасно, а розділені інтервалом часу $\Delta t'$
2) Одночасні події в одній СК м.б. неодночасними в іншій
3) Поняття одночасності не має абс. х-ру, воно залежить від СВ

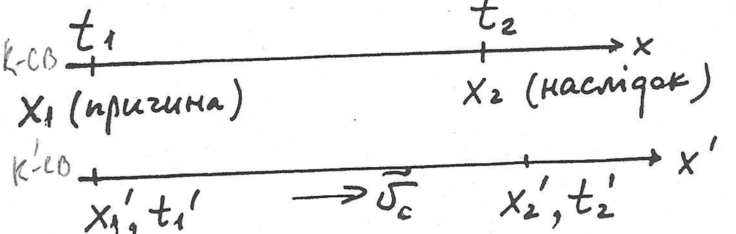
K-CB :

K'-CB :



2. Гранична шв. передачі інф.

$t_2 > t_1$ $\qquad v_c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ (1)



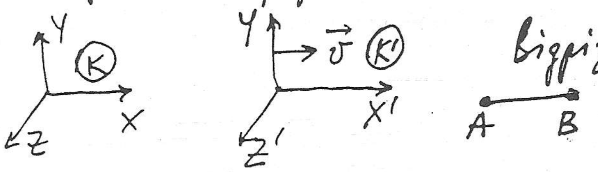
$t_2' \geq t_1'$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{(1)}{=} \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{v}{c^2}v_c\right)$$

$\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot v_c\right) > 0$ Інакше наслідок буде раніше причини

$$v_c < \frac{c}{v}\cdot c \Rightarrow \frac{v}{c} = \beta \leq 1 \Rightarrow v_c \leq c$$

3. Скорочення довжини рухомого тіла.



Відрізок $AB \parallel OX$, рухається разом з K'–CK (покоїться в K'–CK).

$l_0 = x_2' - x_1'$ — довжина („власна") в K'–CB

Для вимірювання довжини AB в K–CB необхідно відмітити коорд. кінців відрізку x_1 та x_2 в один і той же момент часу $t_1 = t_2 = t$

$$l = x_2 - x_1$$

Із перетв. Лоренца $x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

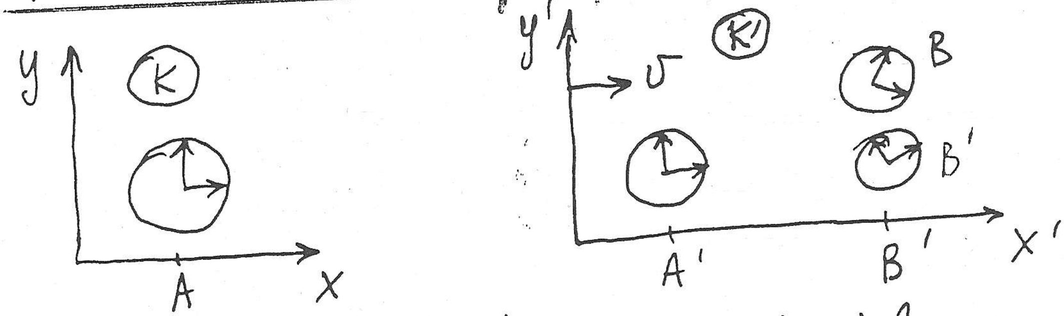
$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

Висновки: 1) $l < l_0$; 2) Вздовж OY та OZ розміри не змінюються; 3) $l = f(v)$. При $v = 0$ $l = l_0$

При $v \to c$ $l \to 0$

4) Скорочення реальне, а не уявне
5) Скорочення кінематичне, а не динамічне (немає напруг, деформацій).
6) При русі тіла його форма $\boxed{?}$ змінюється — СРС.

4. Сповільнення часу в рухомій СК



Годинники A та A', сінхронізовані: в початковий момент часу, знаходяться в одній т. простору і показують час відповідно t_1 та t_1'

Через певний час A' разом із K'–CB переміститься в положення B' і показує час t_2'

Щоб зафіксувати час у K-CB, потрібно скористатись годин. B, і розмістити його поруч з годин. B' у момент часу t_2'

K'–CB: між 2-ма моментами $\Delta t' = t_2' - t_1'$

K–CB: $\Delta t = t_2 - t_1$

Скористаємось перетв. Лоренца $t_1 = \dfrac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$t_2 = \dfrac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, де x' – коорд. точки, в якій знаход B та B' у K'–CB

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{або} \quad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

1) Час у CK, відносно якої годин. нерухомий, наз. „власним" часом
2) $\Delta t > \Delta t'$: У рухомій CB відбувається сповільнення часу, виміряного годин. нерух. CB
3) Ефект сповільнення часу є об'єктивним
4) У кожній ІCB існує власний час протікання фіз. процесів. Не існує <u>єдиного світового часу</u>
5) Ефект сповільнення часу багаторазово спостерігався в експериментах з косм. променями і елемент. част.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

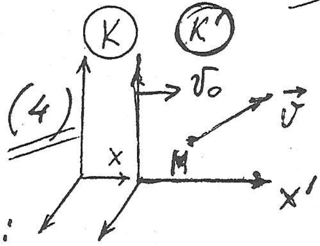
5. Перетворення ~~та додавання~~ швидкостей

(K) $t : x, y, z$; $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$ $v_z = \frac{dz}{dt}$

(K') $t' : x', y', z'$ $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$ $v_y' = \frac{dy'}{dt'}$ $v_z' = \frac{dz'}{dt'}$

$y = y'$; $z = z'$; $x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $dy = dy'$ $dz = dz'$ (3)

$$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow dt = \frac{dt' + \frac{v_0}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4)$$



$\beta = \frac{v}{c}$

Кожне з 3-х рівнянь (3) поділимо на (4):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v_x' + v_0}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}} \quad (A)$$

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \quad v_y' = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} = f(v_x)! \quad v_z' = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} = f(v_x)$$

6. Додавання швидкостей.

Тіло рухається в додатному напрямі OX: $v = v_x$ та $v' = v_x'$. Тоді

$$\boxed{v_{рез} = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}}}$$

Висновки: 1) Коли $v \ll c$, то $v_x' = v_x - v_0$; $v_x = v_x' + v_0$

7. 2) Коли $v_x' = c$, то

$$v_x = \frac{c + v_0}{1 + \frac{v_0 c}{c^2}} = \frac{(c + v_0) \cdot c}{c + v_0} = c$$

– шв. світла однакова у всіх ІСВ
– результ. (сумарна) шв. не може перевищ. c

Фактично доведено (?!), що c – inv.

c = inv – постулат ?! } СРС

---

* Коли $\beta = \frac{v_0}{c} \to 0$, то із (A) отримуємо:

$v_x = v_x' + v_0$; $v_y = v_y'$; $v_z = v_z'$, тобто формули до-
вання швидкостей відносно перетворень Галілея.

8. Перетворення прискорень

Без доведення. (Доведення див. на с. 91-92, Матвєєв):

$$a_x = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\cdot a_x' ;$$

$$a_y = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot a_y' ; \qquad a_z = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot a_z'$$

Проекція прискорення на напрям швидкості $\vec{v}$ K'-СВ зменшується пропорційно $(1-v^2/c^2)^{3/2}$

Поперечна складова прискорення (перпендикулярна до швидкості частинки) менша за складову прискорення у рухомій (K') СВ в $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ разів.