Задача 29 Найти а) $\overline{v^n}$ при $n > -2$!

б) $\bar{v}$, $\overline{v^2}$

в) v_0 — наиболее вероятное значение скорости частиц.

Решение

Формула для $\overline{v^n}$ имеет вид

а) $$\overline{v^n} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^{n+2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)m^{\frac{n+3}{2}}}{(2kT)^{\frac{n+3}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right),$$

б) $$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};$$

$$\overline{v^2} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)\frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \frac{3kT}{m};$$

в) Наиболее вероятная скорость — скорость, при которой на единичный интервал скоростей приходится максимальное количество атомов.

$$\frac{dp(v)}{dv} = 4\pi c\cdot e^{-\frac{mv^2}{2T}}v^2 = \rho(v).$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 4\pi c\left(2v - \frac{mv^2}{2kT}2v\right)e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0$$

$$1 - \frac{mv^2}{2kT} = 0 \Rightarrow$$

$$v_{н.в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

З-ча 49} Визначити діелектричну проникність для ідеального газу, що складається з N дипольних молекул p_0, тоді знаходиться в ел. однорідному полі.

Розв'язування.

Враховуючи співвідношення:

$$\bar{A}_s = kT\left(\frac{\partial \ln z}{\partial a_s}\right) \Rightarrow \text{Середній дип. момент;}$$

$$P = kT\left(\frac{\partial \ln z}{\partial E}\right)_T, \text{ де}$$

$$z = (z_i)^N; \quad z_i = \int e^{-\frac{H_i}{kT}} d\Gamma_i$$

$$H_i = H_{0i} - (p_0 E)$$

H_{i0} – енергія окремої частинки без поля

$p_0 E$ додаток за рахунок взаєм. з зовн. полем.

Маємо

$$z_i = \varphi(T)\int_0^{\pi} e^{\frac{p_0 E\cos\theta}{kT}}\sin\theta\, d\theta = \varphi(T)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\sin\theta\, d\theta = \left| a = \frac{p_0 E}{kT}\right| =$$

$$= \varphi(T)\int_{-1}^{1} e^{at}dt = \varphi(T)\frac{\operatorname{sh} a}{a};$$

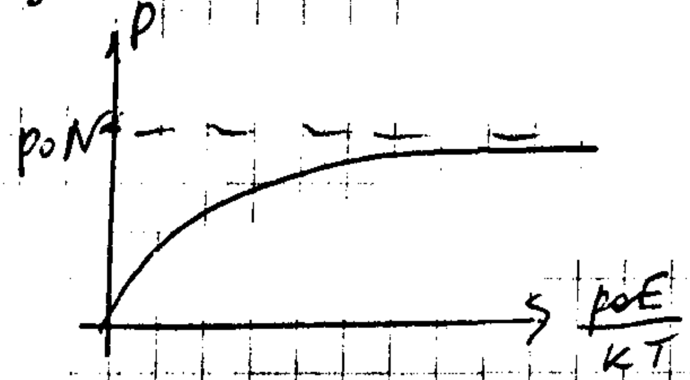
$p = \frac{P}{V}$ – дипольний момент

$$\ln z = N\ln z_i = N\left[\ln\varphi(T) + \ln\frac{\operatorname{sh} a}{a}\right];$$

$$P = kT\left(N\frac{a}{\operatorname{sh} a}\,\frac{a\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a}{a^2}\,\frac{p_0 E}{kT}\right) =$$

$$= Np_0\left[\operatorname{cth}\frac{p_0 E}{kT} - \frac{kT}{p_0 E}\right] = Np_0 L\left(\frac{p_0 E}{kT}\right)$$

де $L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ - ф-я Ланжевена



$L(x) \simeq \frac{x}{3} + O\left(\frac{x}{3}\right)$, $x \ll 1$ при $\boxed{\begin{matrix} T \to \infty \\ E \to 0 \end{matrix}}$

Тоді

$$P = \frac{1}{3} N p_0 \frac{p_0 E}{kT}, \quad \rho = \frac{P}{V} = \frac{N p_0^2}{3kTV} E,$$

$\beta = \frac{N p_0^2}{3kTV}$ - коеф поляризованості.

Діел. проникність:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\beta = 1 + \frac{4}{3}\frac{\pi n p_0^2}{kT}}; \quad n = \frac{N}{V};$$

Задача № 6. Визначити S речовини, що підкоряється рівнянню

$$V = V_0\left(1 + \alpha(T - T_0)\right); \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0; \quad C_p = const$$

Розв'язування.

1) $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$;

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T} \Rightarrow$

$S = C_p \ln T + S_0$;

Знайдемо S_0:

2) $V = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_T$;

$F = V_0\left(1 + \alpha(T - T_0)\right)p + F_0$

3) $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -V_0 \alpha p + S''$

4) Отже, маємо:

$S = C_p \ln T - V_0 \alpha p + S_0$

Задача 87. Знайти рівняння для адіабати, якщо

$p = p_0 \alpha T + p_0 + \beta V p_0$, $C_V = const.$

Розв'язання

$dE = dQ + dA$

$\overset{\shortparallel}{0}$ - адіабатичний процес

$dQ = TdS = 0 \Rightarrow dS = 0.$

З іншого боку

$C_V dT = dE = -pdV$;

$C_V dT = -p_0 \alpha T dV - p_0 dV + \beta V dV$;

$\frac{C_V dT}{T} = -p_0 \alpha dV - \frac{1}{T}(p_0 - \beta V)dV$;

Так як $T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_V$ і $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$,

то $\frac{C_V dT}{T} = -p_0 \alpha dV + \left(\frac{dS}{du}\right)_V^{=0} \Rightarrow$

$\boxed{C_V \ln T + \alpha p_0 V = const}$ - р-ня адіабати

Задача 65. Довести, що якщо кожна з трьох змінних A, B, C є функцією двох інших, що є незалежними, то

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1;$$

Розв'язування

Припустимо, що $f(A,B,C)=0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C} dA + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C} dB + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B} dC = 0;$$

Якщо $A = const$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{AC} \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A = -\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}$$

Тобто

$$\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}}{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C}}$$

Аналогічно $B = const$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{BC}}{\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}},$$

$C = const$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C}}{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C}}$$; Перемноживши:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -\underline{1}$$

Задача №24 Система має невироджений енергетичний спектр

$$\varepsilon_l = l\varepsilon, \quad l = 0, 1, \dots n-1;$$

Знайти середню енергію

Розв'язування.

Одержимо

$$Z = \sum_{l=0}^{n-1} e^{-\frac{l\varepsilon}{kT}} = \sum_{l=0}^{n-1} e^{-\frac{l\varepsilon}{kT}} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon n}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}};$$

Середня енергія:

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z =$$

$$= kT^2 \left[\ln\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon n}{kT}}\right) - \ln\left(1 - {}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)\right]' =$$

$$= \frac{-\varepsilon n\, e^{-\frac{\varepsilon n}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon n}{kT}}} + \frac{\varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT}}{1 - e^{-\varepsilon/kT}} = \frac{-\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} - \frac{\varepsilon n}{e^{\frac{\varepsilon n}{kT}} - 1}$$

Отже,

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} - \frac{\varepsilon n}{e^{\frac{\varepsilon n}{kT}} - 1},$$

Задача 123 Визначити теплоємність системи, що складається з N незалежних двовимірних гармонічних осциляторів, кожний з яких має $(n+1)$-кратно вироджені рівні енергії.

Розв'язування.

$$\mathcal{E}_n = (n + \underbrace{1}_{\text{двовимірність}})\, h\nu \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Запишемо

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}} \underbrace{(n+1)}_{\text{виродження}} = \left| x = \frac{h\nu}{kT} \right| \Rightarrow$$

$$Z = Z_1^N;$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(n+1)}(n+1) = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x}\Big];$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x}\right) = \frac{-e^{-x}(1-e^{-x}) - e^{-x}\cancel{e^{-x}}}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2};$$

Отже, $$Z = \left(\frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^2}\right)^N;$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\ln Z = \left(N\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 2N\ln\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\right) =$$

Задача 5:

При термоелектронній емісії відбувається виліт електронів з поверхні металу або напівпровідника. Припускаючи, що а) вильоти електронів - статистично незалежні події, б) ймовірність вильоту одного електрона за нескінченно малий проміжок часу dt рівна λdt (λ - стала величина), визначить ймовірність вильоту n електронів за час t

Розв'язання:

Нехай $P_n(t)$ - ймовірність вильоту n електронів за час t.

$P_0(t)$ - ймовірність невильоту ні одного електрона за час t

Ймовірність того, що за час $t+dt$ не вилетить жодного електрона

$$P_0(t+dt) = P_0(t)(1-P_1) \qquad (1)$$

де P_1 - ймовірність вильоту одного електрона за час dt, і $P_1 = \lambda dt$

Ймовірність вильоту n електронів за час t

$$P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)P_1 + P_n(t)(1-P_1) \qquad (2)$$

З рівняння (1)

$$P_0(t+dt) = P_0(t) - \lambda P_0(t)dt$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = 0 \quad , \quad \frac{dP_0}{P_0} = -\lambda dt$$

звідки $P_0 = Ce^{-\lambda t}$

$$P_0(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

З рівняння (2) маємо: $P_1(t+dt) = P_0(t)\lambda dt + P_1(t)(1-\lambda dt)$

$$\frac{dP_1}{dt} + \lambda P_1 = P_0\lambda = \lambda e^{-\lambda t}$$

Розв'язком цього рівняння є $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Аналогічно з формули (2) знаходимо $P_2(t), P_3(t), \ldots,$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$P_n(V_0) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \left(1-\frac{V_0}{V}\right)^{N-n} C_N^n ,$$

де $C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

Так само можемо записати:

$$P_n(\bar{n}) = \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

де $\bar{n}$ - середнє значення частинок в об'ємі V_0

Розглянемо випадки:

а.) $V_0 \ll V$, $n \ll N$

$$P_n = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

б.) $n \gg 1$, $\Delta n \ll \bar{n}$, $\Delta n = n - \bar{n}$

Використовуючи формулу Стірлінга

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

знаходимо

$$\ln P_n = n \ln \bar{n} - \bar{n} - \ln n! =$$

$$= n\ln\bar{n} - n\ln n + n - \bar{n} = \Delta n + n \ln\frac{\bar{n}}{n} = \Delta n + (\Delta n + \bar{n}) \cdot$$

$$\cdot \ln\frac{n-\Delta n}{n} = \Delta n + (\Delta n + \bar{n}) \ln\left(1 - \frac{\Delta n}{n}\right) =$$

$$= \left[\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots ,\ \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} \right] =$$

$$= \Delta n + (\Delta n + \bar{n})\left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2\right) = \Delta n + \frac{\Delta n \bar{n}}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 \bar{n} +$$

$$+ \frac{\Delta n^2}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 \Delta n \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 \bar{n} + \Delta n - \Delta n = -\frac{\Delta n^2}{2\bar{n}}$$

Отже $P_n = C e^{-\frac{\Delta n^2}{2\bar{n}}}$

Знайдемо константу C з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n dn = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{\Delta n^2}{2\bar{n}}} dn = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}} dn = C\sqrt{2\pi\bar{n}} = 1$$

Звідки бачимо, що $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}$

Тоді $\boxed{P_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}}$

Задача 6.

Використовуючи результати задачі 5, обчислити $\overline{\Delta n^2}$, припускаючи, що в 1с в середньому вилітає n_0 електронів.

Розв'язання:

Як ми знаємо $\Delta n = n - \bar{n}$

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2 - 2n\bar{n} + \bar{n}^2} = \overline{n^2} - 2\bar{n}^2 + \bar{n}^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad (1)$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1):

$$\overline{\Delta n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} n P_n\right)^2 = \text{використаємо результат попередньої задачі} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right)^2 =$$

$$= \sum_{n} \frac{(n-1+1)(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} - \left(\lambda t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\right)^2 =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n} \left(\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} + \frac{(\lambda t)^n}{(n-2)!}\right) - \left(\lambda t \sum_{n} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\right)^2 =$$

$$= e^{-\lambda t}\left(\lambda t^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}\right) - \lambda t^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\right] =$$

$$= \lambda t = n_0 t$$

Задача 7.

Ідеальний газ, який складається з N молекул, знаходиться в посудині об'ємом V. Визначити ймовірність того, що в заданому об'ємі $V_0 (V_0 \ll V)$ в даний момент буде міститись n молекул. Розглянути крайні випадки: а) $n \ll N$, б) $n \gg 1$; $\Delta n \ll \bar{n}$.

Розв'язання:

Ймовірність того, що в об'ємі V_0 знаходиться одна молекула, рівна $p = \frac{V_0}{V}$

Ймовірність того, що в заданому об'ємі V_0 знаходиться n молекул:

Знайдемо: $\langle\Delta n^2\rangle = \langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle = \langle(n^2 - 2n\langle n\rangle + \langle n\rangle^2)\rangle =$

$= \langle n^2\rangle - 2\langle n\rangle^2 + \langle n\rangle^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$

Для розподілу Фермі $\langle n^2\rangle = \dfrac{1}{1+e^{-\alpha}} = \langle n\rangle = \langle n^3\rangle$

Тоді зробимо підстановку

$$\langle\Delta n^2\rangle = \frac{1}{1+e^{-\alpha}} - \left(\frac{1}{1+e^{-\alpha}}\right)^2 = \frac{1+e^{-\alpha}-1}{(1+e^{-\alpha})^2} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}$$

Знайдемо $\langle\Delta n^3\rangle$:

$$\langle\Delta n^3\rangle = \langle(n-\langle n\rangle)^3\rangle = \langle n^3 - 3n^2\langle n\rangle +$$

$$+ 3n\langle n\rangle^2 + \langle n\rangle^3\rangle = \langle n^3\rangle - 3\langle n^2\rangle\langle n\rangle + 3\langle n\rangle^3 -$$

$$- \langle n\rangle^3 = \langle n^3\rangle - 3\langle n^2\rangle\langle n\rangle + 2\langle n\rangle^3$$

зробимо підстановку:

$$\langle\Delta n^3\rangle = \frac{1}{1+e^{-\alpha}} - 3\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha}}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\alpha}}\left(1 - 3\cdot\frac{1}{1+e^{-\alpha}} + \frac{2}{(1+e^{-\alpha})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\alpha}}\left(\frac{1+2e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}-3-3e^{-\alpha}+2}{(1+e^{-\alpha})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\alpha}}\left(\frac{e^{-2\alpha}-e^{-\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}\right) = e^{-\alpha}\,\frac{e^{-\alpha}-1}{(1+e^{-\alpha})^3}$$

Знайдемо $\langle\Delta n^4\rangle$:

$$\langle\Delta n^4\rangle = \langle(n-\langle n\rangle)^4\rangle = \langle n^4 - 4n^3\langle n\rangle + 6n^2\langle n\rangle^2 -$$

$$- 4\langle n\rangle^3 n + \langle n\rangle^4\rangle = \langle n^4\rangle - 4\langle n^3\rangle\langle n\rangle + 6\langle n^2\rangle\langle n\rangle^2 -$$

$$- 4\langle n\rangle^4 + \langle n\rangle^4 = \left|\begin{array}{l}\text{оскільки для ферміонів}\\ \langle n\rangle = \langle n^2\rangle = \langle n^3\rangle = \ldots \text{ то}\\ \text{можемо записати}\end{array}\right| =$$

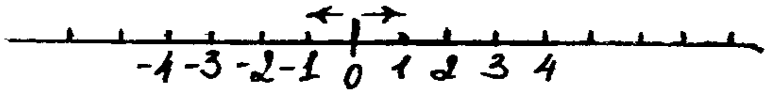
$$= \langle n\rangle - 4\langle n\rangle^2 + 6\langle n\rangle^3 - 3\langle n\rangle^4$$

Зробимо підстановку:

$$\langle\Delta n^4\rangle = \frac{1}{1+e^{-\alpha}}\left(1 - 4\cdot\frac{1}{1+e^{-\alpha}} + \frac{6}{(1+e^{-\alpha})^2} - \frac{3}{(1+e^{-\alpha})^3}\right) =$$

Задача 9.

Частинка, яка знаходиться в початковий момент часу в початку координат, в наступний момент часу робить скачок на один крок або вправо, або вліво з ймовірністю 1/2. Визначити ймовірність $P_t(l)$ того, що після t кроків частинка з'явиться в точці l даної одновимірної решітки.



Розв'язування:

Ймовірність знаходження частинки задається ф-цією $a(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$

$a=\frac{1}{2}$, φ - крок

Через t кроків $[a(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})]^t =$

$$= a^t e^{i\varphi t} + a^{t-1} k e^{ik\varphi} + \ldots + P_l(t) e^{il\varphi} + \ldots a^t e^{-i\varphi l}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi}d\varphi = \frac{1}{ik}\left(e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}\right) = \frac{i}{ik}2\sin(k\pi) = \begin{cases} 0, & k\in Z, k\neq 0 \\ 2\pi, & k=0 \end{cases}$$

Тоді:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi} e^{-i\varphi l}[a(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})]^t d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi l} \times$$

$$\times\{a^t e^{i\varphi t} + \ldots + P_l(t)e^{il\varphi} + \ldots + a^t e^{-i\varphi t}\}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi P_l(t)$$

Отже $P_l(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi l}(\cos\varphi)^t d\varphi$

Задача

Для (розподілу Фермі) ферміонів знайти $\langle\Delta n^3\rangle$, $\langle\Delta n^4\rangle$ ...

Розв'язання:

Розподіл Фермі $\langle n\rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}+1}$

Введемо позначення: $\frac{\mu-E}{kT}=\alpha$

тоді $\langle n\rangle = \frac{1}{1+e^{-\alpha}}$

то диференціювання будемо виконувати по α

$$\langle n^2\rangle = k^2T^2\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln Z = (kT)^2\frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}Z =$$

$$= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}Z = (1-e^{\alpha})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{1-e^{\alpha}}\right) =$$

$$= (1-e^{\alpha})\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})^2}\right) = (1-e^{\alpha})\frac{e^{\alpha}(1-e^{\alpha})^2 + 2e^{\alpha}(1-e^{\alpha})e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3} = \frac{e^{\alpha}-e^{2\alpha}+2e^{2\alpha}}{(1-e^{\alpha})} = \frac{e^{\alpha}+e^{2\alpha}}{(1-e^{\alpha})} =$$

$$= \frac{e^{\alpha}(1+e^{\alpha})}{(1-e^{\alpha})}$$

Отже $\langle\Delta n^2\rangle = \dfrac{e^{\alpha}(1+e^{\alpha})}{(1-e^{\alpha})} - \dfrac{1}{(e^{-\alpha}-1)^2} =$

$$= \frac{(e^{\alpha}+e^{2\alpha})(e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}+1) - 1 + e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})(e^{-\alpha}-1)^2} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}-2+e^{\alpha}+1-2e^{\alpha}+e^{2\alpha}-1+e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})(e^{-\alpha}-1)^2} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}-2}{e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}+1-e^{-\alpha}+2-e^{\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}-2}{e^{-2\alpha}-4e^{-\alpha}+3}$$

Знайдемо $\langle\Delta n^3\rangle$:

$$\langle\Delta n^3\rangle = \langle n^3\rangle - 3\langle n^2\rangle\langle n\rangle + 2\langle n\rangle^3$$

Визначимо $\langle n^3\rangle$:

$$\langle n^3\rangle = (1-e^{\alpha})\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\left(\frac{1}{1-e^{\alpha}}\right) =$$

$$= (1-e^{\alpha})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})^2} = (1-e^{\alpha})\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{e^{\alpha}(1-e^{\alpha})^2+2e^{2\alpha}(1-e^{\alpha})}{(1-e^{\alpha})^4} =$$

$$= (1-e^{\alpha})\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{e^{\alpha}(1-e^{\alpha})+2e^{2\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3} =$$

$$= (1-e^{\alpha})\frac{(e^{\alpha}+2e^{2\alpha})(1-e^{\alpha})^3+(e^{\alpha}+e^{2\alpha})\,3(1-e^{\alpha})^2e^{\alpha}}{(1-e^{\alpha})^6} =$$

$$= \frac{e^{\alpha}(1+2e^{\alpha})(1-e^{\alpha})+3e^{2\alpha}(1+e^{\alpha})}{(1-e^{\alpha})^3} =$$

$$= \frac{e^{\alpha}-e^{2\alpha}+2e^{2\alpha}-2e^{3\alpha}+3e^{2\alpha}+3e^{3\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3} = \frac{e^{\alpha}+4e^{2\alpha}+e^{3\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3}$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\alpha}}\left(\frac{1+3e^{-\alpha}+3e^{-2\alpha}+e^{-3\alpha}-4-8e^{-\alpha}-4e^{-2\alpha}+6+6e^{-\alpha}-3}{(1+e^{-\alpha})^3}\right) = \left(\frac{e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}+e^{-3\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^3}\right)\frac{1}{1+e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha}(1-e^{-\alpha}+e^{-2\alpha})}{(1+e^{-\alpha})^4}$$

→ до ст 3

Задача.
Для бозонів знайти. $\langle \Delta n^2 \rangle$, $\langle \Delta n^3 \rangle$

Розв'язання:
Розподіл Бозе-Ейнштейна:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}-1}$$

позначимо $\frac{\mu-E}{kT} = \alpha$

тоді $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{-\alpha}-1}$

Знайдемо $\langle \Delta n^2 \rangle$.
як було показано в минулій задачі

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

Знайдемо $\langle n^2 \rangle$.
Як відомо статистична сума для бозонів має вигляд:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\frac{\mu-E}{kT}}\right)^n = \frac{1}{1-e^{\frac{\mu-E}{kT}}} = \frac{1}{1-e^{\alpha}}$$

Виведення $\langle n \rangle$:

$$\langle n \rangle = k_0 T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z = kT\frac{\partial}{\partial \mu}\ln\left(\frac{1}{1-e^{\alpha}}\right) =$$

$$= kT\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\ln 1 - \ln(1-e^{\alpha})\right) = -kT\frac{\partial}{\partial \mu}\ln(1-e^{\alpha}) =$$

$$= kT\frac{e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}} = kT\frac{1}{e^{-\alpha}-1}\cdot\frac{1}{kT} = \frac{1}{e^{-\alpha}-1}$$

Аналогічно обчислюється $\langle n^2 \rangle$, оскільки ми використовуємо позначення $\frac{\mu-E}{kT} = \alpha$

Середня енергія однієї частинки:

$$E_1 = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z_i \quad (*)$$

Підставивши z_1 одержимо.

$$E_1 = kT^2 \left(\frac{\ell a^{3/\ell}}{16\pi\, \Gamma\left(\frac{3}{\ell}\right) (kT)^{3/\ell}} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{16\pi}{\ell} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\ell}\right) (kT)^{3/\ell}}{a^{3/\ell}} \right) =$$

$$= \frac{3}{\ell} kT$$

Енергія для N частинок.

$$\underline{E = \frac{3}{\ell} NkT} \quad \Rightarrow T = \frac{\ell E}{3Nk}$$

б) Підставивши у вираз для тиску маємо: $P = \frac{\ell}{3} \frac{E}{V}$

$$z_1 = 4\pi \int_0^\infty e^{-c\sqrt{m^2c^2 + p^2}/(kT)} p^2 dp = \left[\begin{array}{l} p = mc\,\mathrm{sh}\,t \\ dp = mc\,\mathrm{ch}\,t\,dt \end{array} \right] =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty e^{-c\sqrt{m^2c^2 + m^2c^2\mathrm{sh}^2 t}/(kT)} m^3c^3 \mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}\, t\, dt =$$

$$= 4\pi m^3c^3 \int_0^\infty e^{-\frac{mc^2}{kT}\left(\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\right)} \mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}\, t\, dt =$$

$$= 4\pi m^3c^3 \int_0^\infty e^{-\frac{c^2 m}{kT} \mathrm{ch}\, t} \mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}\, t\, dt = \frac{4\pi m^3c^3 kT}{mc^2} \times$$

$$\times \left[K_0\Big(\underbrace{\frac{mc^2}{kT}}_{= z_0}\Big) + \frac{2kT}{mc^2} K_1\Big(\underbrace{\frac{mc^2}{kT}}_{= z_0}\Big) \right]$$

$K_0(z_0)$ і $K_1(z_0)$ - функції Ханкеля уявного аргумента.

Підставивши z_1 у вираз (*) і домноживши на N одержимо середню енергію системи:

$$E = NkT \left[1 + 2 \frac{K_0(z_0) + \left(\frac{z_0}{2} + \frac{2}{z_0}\right) K_1(z_0)}{K_0(z_0) + \frac{2}{z_0} K_1(z_0)} \right] =$$

$$= \left[\text{при } kT \ll mc^2\right] = Nmc^2 + \frac{3}{2} NkT$$

Отже

$$E = Nc^2 m + \frac{3}{2} NkT$$

Отже $\langle \Delta n^3 \rangle = \dfrac{e^{\alpha}+4e^{2\alpha}+e^{3\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3} - 3\,\dfrac{e^{\alpha}+e^{2\alpha}}{(1-e^{\alpha})}\,\dfrac{1}{e^{-\alpha}-1} +$

$$+\,2\,\frac{1}{(e^{-\alpha}-1)^3} = \frac{(e^{\alpha}+4e^{2\alpha}+e^{3\alpha})(e^{-\alpha}-1)-3(e^{\alpha}+e^{2\alpha})\times}{(1-e^{\alpha})^3(e^{-\alpha}-1)^3}$$

$$\frac{\times(1-e^{\alpha})^2(e^{-\alpha}-1)^2+2(1-e^{\alpha})^3}{} = \frac{-e^{\alpha}+1+4e^{\alpha}-4e^{2\alpha}+e^{2\alpha}-}{(1-e^{\alpha})^3\times}$$

$$\frac{-e^{3\alpha}-3e^{-\alpha}+9-6e^{\alpha}-6e^{2\alpha}+9e^{3\alpha}-3e^{4\alpha}+2-6e^{\alpha}+6e^{2\alpha}-2e^{3\alpha}}{\times(e^{-\alpha}-1)^3} =$$

$$= \frac{-9e^{\alpha}+12-3e^{2\alpha}+6e^{3\alpha}-3e^{4\alpha}-3e^{-\alpha}}{(1-e^{\alpha})^3(e^{-\alpha}-1)^3}$$

до - ст 4

Задача

Визначити енергію і тиск для ідеального газу, який складається з N частинок і міститься в посудині об'ємом V, при наступних залежностях енергії окремої частинки від імпульсу p:

а) $H = ap^{l}$, $a>0$, $l>0$

б) $H = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$ (c - швидкість світла)

Розв'язання.

Для ідеального газу статистична сума:

$$Z_1 = V\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ (для одієї частинки)}$$

тоді тиск одієї частинки.

$$P_1 = kT\frac{\partial}{\partial V}\ln Z_1$$

$$P_1 = kT\frac{\partial}{\partial V}\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \frac{3}{2}\left(\frac{2mk}{\pi\hbar^2}\right)\right] = kT\frac{1}{V}$$

Для газу з N частинок маємо:

$$P = \frac{NkT}{V}$$

Розглянемо випадки а) та б)

а)

$$Z_1 = \int e^{-\frac{H}{kT}}d\Gamma = 4\pi\int\limits^{\infty} e^{-\frac{ap^{l}}{kT}}p^2dp =$$

$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^m e^{-\alpha x^n}dx = \frac{2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\alpha^{\frac{m+1}{n}}}\right] = \frac{16\pi}{l}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{l}\right)}{a^{3/l}}(kT)^{3/l}$$

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Розподіл Максвела

$$\overline{v} = 4\pi \int_0^\infty v^3 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \left[\frac{m}{2kT} = \alpha\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty v^3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2} dv = \frac{4\pi}{2} \int_0^\infty v^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^2} d(v^2) =$$

$$= \begin{bmatrix} v^2 = u \\ du = 2v\,dv \end{bmatrix} = 2\pi \int_0^\infty u \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha u} du =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty u\, e^{-\alpha u} du = \frac{2\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty (\alpha u) e^{-(\alpha u)} du =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u = z \\ dz = \alpha\, du \end{bmatrix} = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty z\, e^{-z} dz = \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \Gamma(2) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2kT}}{\sqrt{m\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Тоді $\left[\overline{\varepsilon} = \frac{m}{2}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right) =\right]$ – помилка.

Знайдемо $\overline{v^2} = 4\pi \int_0^\infty v^4 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \left[\frac{m}{2kT} = \alpha\right] =$

$$= 4\pi \int_0^\infty v^4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha v^4} dv = \begin{bmatrix} v^2 = u \\ du = 2v\,dv \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4\pi}{2} \int_0^\infty \frac{u^2}{\sqrt{u}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha u} du = \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty (u\alpha)^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha u} du =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u = z \\ dz = \alpha\, du \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha} \int_0^\infty z^{3/2} e^{-z} dz = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2\alpha} = \frac{3kT}{m}$$

Тоді

$$\overline{\varepsilon} = \frac{m}{2}\left(\frac{3kT}{m}\right) = \frac{3}{2}kT$$

$\varepsilon_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, де v_0 – найбільш імовірне значення швидкості частинок

Задача

Визначити середньоквадратичне від флуктуації енергії H для системи в термостаті.

Розв'язання:

Канонічний розподіл:

$$w = Ce^{-\frac{H}{kT}} = [kT = \theta] = Ce^{-\frac{H}{\theta}}$$

З умови нормування $C = \frac{1}{Z}$, де $Z = \int e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma$ ← стат. інтеграл.

Запишемо вираз для середнього значення енергії.

$$\overline{H} = \frac{\int H e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma}$$

Продиференціюємо його по θ:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \frac{\int H^2 e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\left(\int H e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma\right)^2}{\left(\int e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma\right)^2} =$$

$$= \frac{\overline{H^2} - \overline{H}^2}{\theta^2}$$

Отже $\overline{\Delta H^2} = (\overline{H^2}) - (\overline{H})^2 = \theta^2 \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta} = kT^2 \frac{\partial \overline{H}}{\partial T} = kT^2 C_V$

Таким чином, середньоквадратична флуктуація енергії росте пропорційно розмірам системи.

Відносна флуктуація:

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta H^2}}}{\overline{H}} = \sqrt{\frac{kT}{\overline{H}} \frac{C_V T}{\overline{H}}}$$

Задача

Знайти $\overline{\mathcal{E}}$ і найбільш ймовірне значення кінетичної енергії частинок $\mathcal{E}_0$.

Розв'язання:

Кінетична енергія $\mathcal{E} = \frac{m v^2}{2}$

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{m \overline{v^2}}{2}$$

Знайдемо середнє значення швидкості $\overline{v}$

$$= \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \overline{(\Delta T)^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V = 0$$

4. $$\overline{\Delta V \Delta p} = \overline{(\Delta V)^2}\left[\frac{\partial p}{\partial V}\right]_T = -T$$

5. $$\overline{\Delta S \Delta T} = \overline{(\Delta T)^2}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{T^2}{C_V}\frac{C_V}{T} = T$$

б)

1) флуктуації густини $n = \frac{N}{V}$, енергії і ентальпії

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = \overline{\left(\Delta \frac{N}{V}\right)^2} = \left(\frac{N}{V^2}\right)^2 \overline{(\Delta V)^2} = -\frac{T\rho^2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Цю формулу можна переписати таким чином.

$$-\frac{N^2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} = N\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{N}{V}\right)_{T,N}$$

Кількість частинок з принципу адитивності повинна мати вигляд: $\frac{N}{V} = f(p,T)$

Тому

$$N\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{N}{V}\right)_{T,N} = \frac{N}{V}\left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_{T,V}$$

$$\Phi = E - TS + pV, \quad d\Phi = -SdT + Vdp + \mu dN$$

$$\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial N} = f(p,T) \Rightarrow \Phi = \mu N$$

$$Nd\mu = -SdT + Vdp$$

відповідно, $\frac{N}{V} = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V}$

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = \frac{T}{V^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_{T,V} = \frac{T}{V^2}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} =$$

$$-T\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V}$$

v_0 знаходиться з умови

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, v^2\right)=0$$

$$2v - \frac{mv^3}{kT} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{kT} = 2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Підставивши одержимо:

$$\varepsilon_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right) = kT$$ [illegible]

Задачі

Знайти: а) $\overline{\Delta S^2},\ \overline{\Delta p^2},\ \overline{\Delta S\Delta p},\ \overline{\Delta V\Delta p},\ \overline{\Delta S\Delta T}$

б) флуктуацію густини $n = \frac{N}{V}$

Розв'язання:

а)

1. $$\overline{\Delta S^2} = \overline{\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V\right]^2} = \left(\frac{C_V}{T}\right)^2 \overline{(\Delta T)^2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T}\right)^2 \overline{(\Delta V)^2} = \left(\frac{C_V}{T}\right)^2 \frac{T^2}{C_V} - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2 \Big/ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = C_p$$

2. $$\overline{\Delta p^2} = \overline{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V\right]^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2 \frac{T^2}{C_V} - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{\partial(p,V)}{\partial(T,V)}\frac{\partial(T,V)}{\partial(S,V)} - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T =$$

$$= T\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S - T\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right] =$$

$$= T\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S + T\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S + T\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right] = -T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$$

3. $$\overline{\Delta S \Delta p} = \overline{\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V\right]\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V\right]} =$$

$$= \overline{\left[\frac{C_V}{T}\Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V\right]\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V\right]} =$$

поскільки з збільшенням (підвищенням) температури магнітний момент системи завжди зменшується, при адіабатичному зменшенні поля температура завжди знижується. Якщо додатково допустити, що поле достатньо мале, таке, що магнітний момент пропорційний прикладеному полю, то

$$\Delta T = -\frac{TV}{C_V}\frac{\partial \chi}{\partial T} H \Delta H = -\frac{T}{\overline{C_V}}\frac{\partial \chi}{\partial T}\Delta \frac{H^2}{2} =$$
$$= \frac{TH^2}{2\overline{C_V}}\frac{\partial \chi}{\partial T}$$

де $\overline{C_V}$ - теплоємність одиниці об'єму.

Задача

Довести, що

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Розв'язання

Ентальпія $dH = TdS + VdP$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V \qquad (*)$$

Термодинамічний потенціал Гіббса

$$dG = -SdT + VdP$$

$$dG(T, p) = \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p}_{-S} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T}_{V} dp$$

звідки $-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

Отже вираз (*) набуває вигляду:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\Delta E = T\Delta S - p\Delta V$$

2. $$\overline{\Delta E^2} = T^2\,\overline{\Delta S^2} + p^2\,\overline{\Delta V^2} - 2Tp\,\overline{\Delta S \Delta V} =$$

$$= T^2 C_p - Tp^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - 2Tp\,\overline{\left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V\right)\Delta V} =$$

$$= T^2 C_p - T\left(p^2 - 2Tp\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T =$$

$$= T^2 C_p - T\left(p^2 - 2Tp\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = T^2 C_v -$$

$$- T\left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

3. $$W = E + pV\,, \quad dW = T\,dS + V\,dp$$

$$\overline{dW^2} = T^2\,\overline{dS^2} + V^2\,\overline{dp^2} = T^2 C_p - T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S;$$

Задача

Тіло з теплоємністю $C(T)$ і магнітною сприйнятливістю χ знаходиться в слабкому магнітному полі, яке адіабатично змінюється від значення $H = H_0$ до нуля. Знайти зміну температури ΔT; пояснити знак ефекту.

Розв'язання:

При адіабатичному процесі зміна ентропії рівна нулю:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T \Delta H = 0$$

або
$$\frac{C_V}{T}\Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T \Delta H = 0$$

Оскільки
$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial H \partial T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial H} = \frac{\partial m}{\partial T}$$

(m - магнітний момент)

маємо для зміни температури

$$\Delta T = -\frac{T}{C_V}\frac{\partial m}{\partial T}\Delta H$$

одержимо спираючись на властивості якобіанів

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_N = \frac{\partial(S,N)}{\partial(T,N)} = \frac{\partial(S,N)}{\partial(T,\mu)}\,\frac{\partial(T,\mu)}{\partial(T,N)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial(S,N)}{\partial(T,\mu)}}{\dfrac{\partial(T,N)}{\partial(T,\mu)}} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu & \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_T \\ \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu & \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T \end{vmatrix} : \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T} \quad (2)$$

Введемо термодинамічний потенціал Ω

$$d\Omega = -S\,dT - N\,d\mu \quad (3)$$

Повний диференціал $d\Omega(T,\mu) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_\mu dT + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_T d\mu$ (4)

Прирівнявши вираз (4) з (3) бачимо, що:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_\mu = -S, \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_T = -N \quad (5)$$

а отже $\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_T = \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu$ (6)

тоді одержимо кінцевий вираз:

$$C_v = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu - \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu^2}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T}\right] \quad (7)$$

Задача

Статистична сума деякої системи рівна $Z = \rho_0 V T^4$. Знайти C_p/C_v;

Розв'язання:

Вільна енергія $F = -kT\ln Z = -kT\ln(\rho_0 V T^4)$

Ентропія $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(T\ln(\rho_0 V T^4)\right)\right] =$

Задача

Знайти енергію ідеального класичного газу

Розв'язання

Запишемо енергію через вільну енергію

$$E = F + TS \quad (1)$$

Як ми знаємо $F = -kT\ln Z$

$$E = -kT\ln Z - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -kT\ln Z + kT\left(\frac{\partial}{\partial T}[T\ln Z]\right)_V$$

$$= -kT\ln Z + kT\ln Z + kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z \quad (2)$$

Статистична сума ідеального класичного газу:

$$Z = NV\left(\frac{2mk_0T}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2):

$$E = k_0T^2N\frac{\partial}{\partial T}\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2mk}{\pi\hbar^2}\right)\right] =$$

$$= kT^2N\frac{3}{2T} = \frac{3}{2}kTN$$

Задача

Знайти C_V в змінних T, μ, V.

Рішення:

Теплоємність при сталому об'ємі кількості частинок:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \quad (1)$$

Об'єм V в подальшому будемо вважати весь час сталим і тому не будемо писати індекс.

Розглянемо диференціал

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_N$$

Співвідношення між різними частинними похідними від термодинамічних величин

$$\Delta w = \exp\left[\frac{\Delta p \Delta V - \Delta T \Delta S}{2kT}\right] \qquad (2)$$

Розкладемо величину ΔP по незалежних змінних T та V.

$$\Delta P = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V$$

аналогічно

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V \qquad (3)$$

Підставимо ці величини в формулу (2)

$$\Delta w = \exp\left[\frac{1}{2kT}\left(\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \Delta V + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V (\Delta T)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V \Delta T\right)\right] \qquad (4)$$

Поскільки $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ скоротивши перепишемо

$$\Delta w = \exp\left[\frac{1}{2kT}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V (\Delta T)^2\right\}\right] \qquad (5)$$

Вираз (1) у змінних T і V:

$$\Delta w = \exp\left[-\frac{\Delta V^2}{2\langle(\Delta V)^2\rangle} - \frac{\Delta T^2}{2\langle(\Delta T)^2\rangle}\right] \qquad (6)$$

Порівняємо (6) і (5):

$$\frac{1}{2kT}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{2\langle(\Delta V)^2\rangle}$$

звідки $\langle(\Delta V)^2\rangle = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

$$\frac{1}{2kT}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{2\langle(\Delta T)^2\rangle}$$

звідки $\langle(\Delta T)^2\rangle = \dfrac{kT^2}{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V} = \dfrac{kT^2}{C_V}$

N28

Виходячи з р-ня Гіббса, отримати наступні р-ня

1) імовірність того, що швидкість в частинки лежить в інтервалах $[v_x, v_x+dv_x]$, $[v_y, v_y+dv_y]$, $[v_z, v_z+dv_z]$

2) імовірність того, що модуль швидкості лежить в $[v, v+dv]$

3) імовірність того, що енергія для $\forall$ частинки лежить в інтервалі $[\varepsilon, d\varepsilon+\varepsilon]$

1) $f(p^N,q^N)=\frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{E(p^N,q^N)}{k_0T}\right)$; $\quad Z=\int\ldots\int\exp\left(-\frac{E(p^N,q^N)}{k_0T}\right)dp^N dq^N=$

$$=\int\ldots\int dq^N\left[\int\ldots\int\exp\left(-\frac{p_x^2}{2mk_0T}\right)dp_x\right]^{3N}=V^N\left(\sqrt{2\pi m k_0T}\right)^{3N}=V^N(2\pi mkT)^{3N/2}$$

$$dp(v)=\int f(q^n,p^n)\,dq^N dv_2\ldots dv_N=\frac{V^N}{V^N(2\pi mk_0T)^{3N/2}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv\;*$$

$$*\left[\int\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv\right]^{3N-3}=\frac{1}{(2\pi mk_0T)^{3N/2}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv\left(\frac{2\pi k_0T}{m}\right)^{3N-3}=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv;$$

2) Заміна $dv_x dv_y dv_z=v^2\sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$

$$dp(|\vec{v}|)=\frac{V^N}{V^N(2\pi mk_0T)^{3N/2}}4\pi v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\left[\int\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv\right]^{3N-3}=$$

$$=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv;$$

3) $\frac{mv^2}{2}=\varepsilon \qquad dv=d\varepsilon\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$;

$$dP(\varepsilon)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}\varepsilon\frac{2}{m}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon m}}\,d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi(k_0T)^3}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

N29

Використовуючи р-ї попередньої задачі, знайти наступні величини: а) $\overline{v^n}$; б) $\overline{v}, \overline{v^2}$; в) v_0 -

найбільш ймовірне значення частинки.

а) $\langle v^n\rangle = \int_0^\infty v^n \rho(|v|)dv = \int_0^\infty \frac{4\pi v^2 v^n}{(2\pi k_0T)^{3/2}} m^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv =$

$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^{2+n}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\left(\frac{m}{2k_0T}\right)^{\frac{n+3}{2}}} =$

$= 2\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}\left(\frac{2k_0T}{m}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2k_0T}{m}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right);$

б) $\langle v\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2k_0T}{m}\right)^{1/2}\Gamma(2) = \left(\frac{8k_0T}{\pi m}\right)^{1/2};$

$\langle v^2\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2k_0T}{m}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3kT}{m};$

в) $\frac{d}{dv}\left(v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right)\right) = 0 \qquad 2v\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_0T}\right) - v^2\frac{m}{kT}v\,*$

$*\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0 \qquad v^2 = \frac{2k_0T}{m}; \qquad v = \sqrt{\frac{2k_0T}{m}};$

№30

Знайти $\bar{\varepsilon}$ і найбільш імовірну енергію частинки ε_0

$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\frac{2}{\sqrt{\pi (k_0T)^3}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_0T}\right)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_0T}\right)d\varepsilon =$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{kT}\right)^{5/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}(kT)^{5/2}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2}kT;$

$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\right) = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) - \sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\frac{1}{kT} = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}kT$$

$\boxed{N32}$

Як зміниться р-к Максвела, якщо система буде здійснювати рух як ціле із швидкістю $\vec{u}$. Зсуваємо на величину $\vec{u}$ стане розподіл:

$$dp(\vec{u}, \vec{v}) = dp(\vec{v} - \vec{u}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2\pi kT}\right) d\vec{v}$$

$\boxed{N41}$

Використовуючи р-к Гіббса, знайти для ідеал. газу, поміщеного в зовнішнє потенціальне силове поле $U(x,y,z)$, імовірність того, що коорд. $\forall$ частинки газу будуть лежати в інтервалах $[x, x+dx]$, $[y, y+dy]$, $[z, z+dz]$

$$dp = C \exp(-H(p_i, q_i)/kT)\, dp_i \ldots dq_i$$

$$H(p_i, q_i) = \sum \frac{p_i^2}{2m} + U(x,y,z)$$

З умови нормування $C = const$. Проінтегрувавши такий р-к по імпульсам, отримаємо:

$$dp(x,y,z) = C_1 \exp(-V(x,y,z)/kT)\, dx\, dy\, dz \qquad C_1 = const$$

Отримали р-к Больцмана.

N42

Знайти центр мас стовпа ідеального газу в однорідному полі тяжіння, якщо прискорення вільного падіння g, маса молекули m, температура газу T

р-н Больцмана: $\rho(h)=\rho_0\exp\left(-\frac{U(h)}{kT}\right)$; $dm(h)=\rho(h)dV$

За визначенням центр мас:

$$h_0=\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}=\frac{\int_0^\infty h\rho(h)\,dh}{\int_0^\infty \rho(h)\,dh}=\frac{\int_0^\infty h\rho_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)dh}{\int_0^\infty \rho_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)dh}=$$

$$=\frac{kT}{mg};$$

N 123

Визначити теплоємність системи, що складається із N незалежн. 2-х мірних осциляторів, кожен з яких має $(n+1)$ кратно вироджені рівні енергії:

$\varepsilon_n=(n+1)\hbar\omega$; $n=0,1,\dots$

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\exp\left(-\frac{(n+1)\hbar\omega}{kT}\right)=-\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n+1)\hbar\omega}{kT}\right)=$$

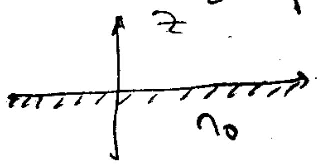
$$=-\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}\frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}=\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(1-e^{\hbar\omega/kT}\right)^2};$$

$$F=-kT\ln z;\qquad S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V;\qquad C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V;$$

$$C_V=T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V=T\left(\frac{\partial^2 kT\ln z}{\partial T^2}\right)_V=\frac{Nk}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)};$$

N39

Потенціальна енергія електрона всередині метала нижче його енергії поза металом на величину $W = e\varphi$. Визначити густину струму термоелектронної емісії. Концентрація електронів в металі n_0, маса електр-м.



$$j = e n \langle v_z \rangle$$

$$dp(\vec{v}) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dV$$

$$\bar{v}_z = \int v_z\, dp(\vec{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v_z \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z = \Bigg(\frac{mv_0^2}{2} = e\varphi,$$

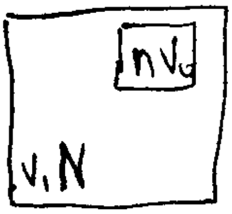
$$v_0 = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}\,;\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\Bigg) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} n \int_0^\infty v_z \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} n \frac{kT}{m} \exp\left(-\frac{mv_0^2}{2kT}\right);$$

$$j_z = en\langle v_z \rangle = \left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{1/2} \frac{en^2}{2} \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right);$$

N7

Идеальный газ состоящий из N молекул находится в сосуде объемом V. Определить вероятность того, что в заданном объеме V_0 ($V_0 \ll V$) в заданный момент будет содержаться n молекул. Рассмотреть предельные случаи: а) $n \ll N$; б) $n \gg 1$ $\Delta n \ll \bar{n}$ $V_0 \ll V$



Імовірність знаходження однієї частинки в об'ємі $P_1 = \frac{V_0}{V}$. Для n частинок

$$P_n(V_0) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \left(1-\frac{V_0}{V}\right)^{N-n} C_N^n, \qquad C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

$\bar{n} = P_1 \cdot N$;

$$P_n(V_0) = \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} \frac{N!}{n!\,(N-n)!};$$

$\bar{n}$ - середня к-ть частинок в V_0

1) $n \ll N$

$$\lim_{N\to\infty} P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^N \Longrightarrow P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

2) $n \gg 1$ $\quad \Delta n \ll \bar{n}$ $\quad \Delta n = n - \bar{n}$

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Ф-ла Стірлінга: $\ln n! = n \ln n - n$

$$\ln_{x\to 0}(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o$$

$$\ln P_n = n\ln\bar{n} - n\ln n + n - \bar{n} = \Delta n + n\ln\frac{\bar{n}}{n} = \Delta n - (\bar{n}+\Delta n) \ast$$

$$\ast \ln\left(\frac{n-\Delta n}{n}\right) = \Delta n - (\bar{n}+\Delta n)\ln\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right) \approx \Delta n - (\bar{n}+\Delta n) \ast$$

$$\ast \left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2\right) = \Delta n - \frac{\bar{n}}{n}\Delta n - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \frac{(\Delta n)^2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 \Delta n =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{(\Delta n)^2}{n} + \Delta n - \Delta n\right) = -\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}};$$

$$\ln P_n = -\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}} \qquad P_n = C e^{-\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}}}$$

C - нормув. множник. Він обумовлюється тим, що описує площу рівну 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n\, dn = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}$$

N21

Определить E, S, P, и C_v для следующих систем, состоящих из N невзаимодействующих частиц, находящихся в объеме V:

1) Одноатомный газ

2) Двухатомный газ при заторможенных колебаниях атомов (жесткий ротор)

3) двухатомный идеальный газ с учетом колебаний атомов в молекуле (рассмотр. случай низких тем-р)

1) Враховуємо, що $H_i = \frac{p_i^2}{2m}$, отримаємо

$$z_i = (2\pi m kT)^{3/2}; \quad P = \frac{NkT}{V};$$

$$S = \frac{3}{2} Nk[\ln(2\pi m kT) + 1] + Nk \ln V;$$

$$E = \frac{3}{2} NkT; \qquad C_v = \frac{3}{2} Nk;$$

2) Енергія системи має вигляд

$$H_i = \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2\mu r_0^2}\left[p_{i\theta}^2 + \frac{p_{i\varphi}^2}{\sin^2\theta}\right]$$

$$z_i = (2\pi M kT)^{3/2} 8\pi^2 r_0^2 \mu kT = A (kT)^{5/2}; \quad \text{де } M = m_1 + m_2;$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}; \qquad A = 8\pi^2 r_0^2 \mu (2\pi M)^{3/2};$$

r_0 – рівноважна відстань між атомами в молекулі

Звідси $P = \frac{NkT}{V}$;

$$S = Nk \ln VA + \frac{5}{2} Nk[\ln(kT) + 1] \qquad C_v = \frac{5}{2} Nk$$

3) В наближенні малих коливань

$$H_i \approx \frac{p_i^2}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\left[p_{ir}^2 + \frac{p_{i\theta}^2}{r^2} + \frac{p_{i\varphi}^2}{r^2 \sin^2\theta}\right] + U(r_0) + \frac{\gamma}{2}(r - r_0)^2;$$ де

потенціальна енергія атомів представлена у вигляді:

$$U(r)=U(r_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}(r-r_0)^2\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}\equiv\gamma$$

При низьких T-рах оцінку інтегралу стану можна легко отримати, враховуючи той факт, що підінтегральна ф-я, має різкий максимум в т. r_0. Відраховуючи енергію від $U(r_0)$ знайдемо, що

$$\varepsilon_i=(2\pi\mu)^{3/2}4\pi(2\pi\mu)^{3/2}(kT)^3 r_0^2\sqrt{2\pi kT/\gamma}=\beta(kT)^{7/2}$$

$$\beta=(2\pi\mu)^{3/2}4\pi(2\pi\mu)^{3/2}r_0^2\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\,, \quad \text{тоді}$$

$$P=\frac{n kT}{\gamma}\,; \qquad S=Nk\ln(V\beta)+\frac{7}{2}Nk(\ln(kT)+1)$$

$$E=\frac{7}{2}nkT\,; \qquad C_V=\frac{7}{2}Nk\,;$$

N100

Определить для равновесного излучения величины C_v, F, S, H, Ф, C_p. Для равновесного излучения с плотностью энергии и давления $p=u/3$. Применяя к равновесному излучению соотношение

$T dS = dE + p dV$, которое легко представить в виде $T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+P$, получаем, что $u=\sigma T^4$, где σ - постоянная величина не определяемая термодинамически

$\sigma=7.56\cdot10^{-16}$ Дж/град^{4}м^3. Все другие термодинам ф-и определяются легко, так как $E=V\sigma T^4$, то $S=\frac{4}{3}\sigma T^3 V$;

$F=-\frac{1}{3}\sigma T^4 V$, $\quad \Phi=F+pV=0 \quad$ и

$H = TS$; $S_V = 4\sigma T^3 V$. Так как для равновесного излучения изобарный процесс есть одновременно и изотермический ($P = \sigma T^{4}/3$), то $C_p = +\infty$, а значит и $\gamma = \infty$.

N 6

Используя результаты зад 5 вычислить $\overline{\Delta n^2}$, предполагая что в 1 в среднем вылетает n_0 електронов.

Знайдемо для даного розподілу $\overline{(\Delta n)^2}$ — середнє значення $\Delta n = n - \bar{n}$ — відхилення к-ті часток, що вилітають за час t від середнього.

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \ ; \quad \overline{\Delta n^2} = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2 - 2n\bar{n} + (\bar{n})^2} = \overline{n^2} - 2(\bar{n})^2 + (\bar{n})^2 = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 ;$$

$$\overline{(\Delta n^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right]^2 = e^{-\lambda t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} -$$

$$- \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right]^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} = e^x\right) = e^{-\lambda t} \left((\lambda t)^2 e^{\lambda t} + (\lambda t) e^{\lambda t}\right) -$$

$$- \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\right]^2 = \lambda t^2 + \lambda t - \left[\lambda t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\right]^2 =$$

$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t ;$$

$$\lambda t = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \bar{n} = n_0 t ; \qquad \overline{\Delta n^2} = n_0 t ;$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$\bar{n} = n_0 t$$

№38

Каждый атом газа излучает монохроматический свет с длиной волны λ_0 и интенсивностью J_0. Найти интенсивности излучения газа, состоящ. из N атомов, как ф-цию λ.

$$\lambda = \lambda_0\left(1 + \frac{V_z}{c}\right);$$

Если интервал волны λ до $\lambda + d\lambda$, $\quad \int d\lambda = \lambda dn(\lambda)$;

$$\int J(\lambda)\,d\lambda = NJ \quad ; \qquad dn(\lambda)\; dn(V_z) =$$

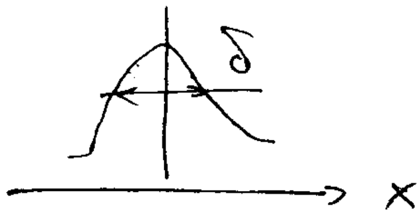
$$= N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mV_z^2}{2kT}} dV_z = N\left(\frac{mc^2}{2\lambda_0^2\, 2kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2}{2kT\lambda_0^2}(\lambda-\lambda_0)^2} d\lambda;$$

Так как

$$V_z = \frac{c}{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) \qquad \text{тогда} \quad j(\lambda)d\lambda = Jn\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\sigma^2}} d\lambda;$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2kT\lambda_0^2}{mc^2}}; \qquad NJ_0 = \frac{JN}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\sigma^2}} d\lambda =$$

$$= \frac{JN}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\sigma^2}} d\lambda \Rightarrow$$



$$j(\lambda) = \frac{J_0 N}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\sigma^2}};$$

№136

Найти положение уровня Ферми в собственном полупроводнике, если ширина запрещенной зоны с изменением тем-ры изменяется по закону

$E_g = E_g^0 - \xi T$, $\xi > 0$. Пусть значение энергии нижнего края зоны проводимости E_c, а верхнего края валентной зоны E_v. Тогда из условия нейтральности п/п ($n = p$) для простейшего закона дисперсии

$$\varepsilon_n = E_c - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}; \qquad \varepsilon_p = \varepsilon_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p};$$

Получим из условия електронейтральности п/п.

$$2\left(\frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{(\mu - E_c)/kT} = 2\left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\frac{E_v - \mu}{kT}};$$ откуда

$$\mu = \frac{E_g^0 - \xi T}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\frac{m_n}{m_p} + E_v;$$

$\boxed{N\,158}$

Определить флуктуацию числа частиц идеальных газов:
а) Больцмана; б) Ферми-Дирака
в) Бозе - Ейнштейна
Проанализировать полученые результаты используя отношение: $\overline{\Delta N^2} = kT\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_T$

получаем а) $\overline{\Delta N^2} = \bar{N}$; $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$;

б) $\overline{\Delta n_j^2} = \bar{n}_i(1 - \bar{n}_c)$ $\qquad \delta = \sqrt{(1-\bar{n}_i)/n_c}$

в) $\overline{\Delta n_j^2} = \bar{n}_i(1 + \bar{n}_c)$ $\qquad \delta = \sqrt{(1+\bar{n}_c)/n_i}$

Как видим, для Ферми-Дирака флуктуация числа частиц обращается в ноль при $\bar{n}_c = 0{,}1$. Хотя в случае $\bar{n}_i = 0$, относительная флуктуация $= \infty$. Для бозе: флуктуация остаётся конечной $(=1)$ и при очень большой $\overline{n}_i$.

N 59

Определить среднюю энергию и молярную теплоемкость C_v идеального газа состоящего из N двухатом. молекул с учетом ангармонизма колебаний атомов в молекуле. Рассмотреть случай низких темп.

$z = (z_i)^N$; $z_i = 4\pi V (4\pi^2 M\mu)^{3/2} (kT)^3 \int_0^\infty r^2 e^{-U/kT} dr$;

$$U(r-r_0) = \frac{1}{2}(r-r_0)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\Big|_{r=r_0}(r-r_0)^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}\Big|_{r=r_0}(r-r_0)^4 + \ldots =$$

$$= \gamma(r-r_0)^2 + \alpha(r-r_0)^3 + \beta(r-r_0)^4 + \ldots;$$

$$z_i = A(kT)^3 r_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma x^2}{kT}}\left[1 - \frac{\alpha x^3}{kT} - \frac{\beta x^4}{kT} + \frac{\alpha^2}{2(kT)^2}x^6 + \ldots\right] =$$

$$= A r_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} (kT)^{7/2} [1 + BkT]; \qquad A = 4\pi V (4\pi^2 \mu M)^{3/2};$$

$$B = \frac{15}{16}\frac{\alpha^2}{\gamma^3} - \frac{3}{4}\frac{\beta}{\gamma^2}; \qquad E = \frac{7}{2}NkT + Nk^2T^2B;$$

$$C_v = \frac{7}{2}Nk + 2Nk^2BT = (C_v)_{\text{гр}} + C_v'; \qquad C_v' = 2Nk^2 T B;$$

N 169

Определить тензор электропроводимости для электронов в металле в однородных электростат. и магнитном полях. Электроны считать вырожден...

Стационарное ур-ние Больцмана при E и H имеет вид.

$$-e\left(H+\left[\frac{v}{c}\times H\right]\right)\frac{\partial f}{\partial p}=-\frac{f-f_0}{\tau};$$

$$-eV\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}-\frac{e}{c}[V_0\times H]\right]\frac{\partial(f-f_0)}{\partial p}=-\frac{f-f_0}{\tau};$$

Ищем решение этого ур-ния в виде $f=f_0-(V_0 1)\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$, где $a(\varepsilon)$ неизвестный вектор. Подставляя предполагаемое f в ур-ие Больцмана, получаем для вектора a ур-ние $-eVE+[V+\omega]a=-\frac{|V_0|}{\tau}$, $\omega=\frac{e\tau}{m_e}$;

$$-eV+[\omega\times a]=\frac{a}{\tau};$$

$$a=-\frac{e\tau}{1+\omega^2\tau^2}(E+\tau^2/\omega E)\omega+\tau[\omega\times E]$$

Откуда $j_z=-e^a\int_0^\infty\left(-\frac{\partial f_0}{\partial a}\right)\frac{\tau v^3}{3(\omega^2\tau^2+1)}\delta_{\alpha\beta}+\tau^2\omega_\alpha\omega_\beta+$
$+(1-\delta_{\alpha\beta})\tau\,\omega_\alpha\,\varsigma\,E_\alpha\,\frac{2dp}{\hbar^3}$; где

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

$\delta_{xx}=\delta_{yy}=\frac{ne^2}{m_n}\frac{\tau(\mu)}{1+\omega^2\tau^2(\mu)}$ $\quad$ $\delta_{yx}=-\delta_{xy}=\frac{ne^2}{m_n}\omega\tau^2(\mu)$

$\delta_{zz}=\frac{ne^2}{m_n}\tau(\mu);$ $\quad$ $\delta_{xz}=\delta_{yz}=\delta_{zy}=\delta_{zx}=0$

(NS

1) При термоелектронній емісії електрони вилітають з поверхні металу чи н/п. Якщо припустити що а) вильоти електронів статистично незалежні події б) ймовірність вильоту одного електрона за малий проміжок часу dt дорівнює λdt ($\lambda=const$). Визначити ймовірність вильоту n електронів за час t

$P_n(t)$ – n за t $\qquad$ $P_0(t)$ – 0 за t

$P_0(t+dt)$ – 0 за $t+dt$

$P_0(t+dt) = P_0(t)\,(1-\lambda dt)$

$P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)\lambda dt + P_n(t)(1-\lambda dt)$

$dP_0 = P_0(t+dt) - P_0(t) = -P_0\lambda dt,$

$\frac{dP}{P} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad P_0 = Ce^{-\lambda t}$

$P_0(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$P_1(t+dt) = P_0(t)\lambda dt + P_1(t)(1-\lambda dt)$

$\frac{dP_1}{dt} + P_1\lambda = \lambda P_0 = \lambda e^{-\lambda t}$

$P_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}, \quad P_2 = \frac{(\lambda t)^2}{2}\exp(-\lambda t)$

$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t)$

? $\boxed{N60}$

Атоми в 2-х атомній молекули взаємодіють по закону
$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - B/r^6 \qquad (B, A > 0)$
Визн. коеф. розширення молекули.

Р-ня

Атоми знах. на середній відстані r_0 коеф. розширення позначимо, як $\alpha = \frac{\bar{x}}{r_0 T}$, де $\bar{x}$ – зміщення атома із положення рівноваги $\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-U/kT} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-U/kT} dx}$

Використовуючи поряд ф-ї $U(r)$ в ряд. та враховування r_0 з умови

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0, \qquad r_0=\sqrt{\frac{2A}{B}};$$

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma x^2}{kT}}\, x\left(1+\frac{\delta x^3}{kT}\right)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma x^2}{kT}}\left(1+\frac{\delta x^3}{kT}\right)dx}=\frac{3}{4}kT\frac{\delta}{\gamma^2},$$

$$\delta=\frac{28}{r_0^3}\left(\frac{13}{r_0^{12}}A-\frac{2B}{r_0^6}\right); \qquad \varkappa=\frac{\bar{x}}{k_0T}=\frac{3}{4}\frac{\delta}{\gamma^2}\frac{k}{r_0};$$

де $\gamma=\frac{3}{r_0^2}\left(\frac{26A}{r_0^{12}}-\frac{7B}{r_0^6}\right)$

$\boxed{N65}$

Довести, що $\forall$ ф-я із трьох змінних A, B, C є диференційовною ф-ю двох інших які розглядають ен. незалежні, то виконуються співвідношення

а) $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B=-1$

б) $\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B=\frac{1}{\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B};$

Припустимо, що функціональна залежність A від B, та C є $f(A,B,C)=0$

тоді повний диференціал:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C}dA+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C}dB+\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}dC=0$$

Якщо $A=const$, тоді $\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C}\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A=-\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}$

Тобто $\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A=\frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}}{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C}};$

По аналогії $\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B=-\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C}\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}$

Тоді $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)=-\frac{(\partial f/\partial B)_{A,C}}{(\partial f/\partial A)_{B,C}}$

а) перемножимо $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1$

б) помінявши місцями A та C в співвідношенні можно $\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B = 1/\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)$

$\boxed{N\,81}$

Використовуючи р-я N78 порахувати P, S та C_V плазми $E = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_V$

Звідки $F = F_{ig} - \frac{2}{3} Ne^2 \sqrt{8\pi Ne^2/VkT}$;

Звідси $P = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi e^2 N}{kTV^3}}$;

$S = S_{ig} - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi e^2 N}{kT^3 V}}$;

$C_V = (C_V)_{ig} + \cancel{\tfrac{1}{2}} Ne^2 \sqrt{\frac{8\pi Ne^2}{3T^3 kV}}$;

$\boxed{N\,122}$

Еле може знаходитись в 2-х квантових станах з енергіями 0 і ε кратності виродження станів g_1 та g_2. Отримують залежність $S = S(E)$ проаналізувати

$z = g_1 e^{-0/kT} + g_2 e^{-\varepsilon/kT}$ — стат сума

$F = -kT \ln z = -kT \ln(g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/kT})$

$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z = \frac{kT^2 g_2 \left(\frac{\varepsilon}{kT^2}\right) \exp(-\varepsilon/kT)}{g_1 + g_2 \exp(-\varepsilon/kT)} =$

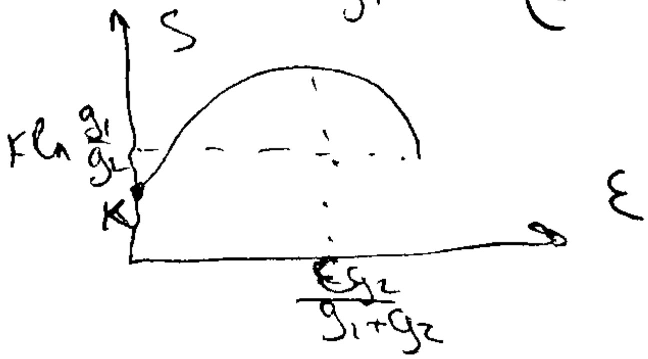
$= \frac{g_2 \varepsilon \exp(-\varepsilon/kT)}{g_1 + g_2 \exp(-\varepsilon/kT)} \Rightarrow e^{-\varepsilon/kT} = \frac{E g_1}{g_2(\varepsilon - E)}$;

$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k \ln(g_1 + g_2 \exp(-\frac{\varepsilon}{kT})) + \frac{kT g_2 \left(\frac{\varepsilon}{k} \frac{1}{T^2} e^{-\varepsilon/kT}\right)}{g_1 + g_2 e^{-\varepsilon/kT}} =$

$$= k \ln\left(g_1 + \frac{E g^2}{g_2(\varepsilon - \bar{E})}\right) - \frac{kT \frac{g^2}{h} \varepsilon \frac{t g_1}{(\varepsilon - \bar{E})} g_2}{\left(g_1 + E g_1 \frac{1}{\varepsilon - \bar{E}}\right)} =$$

$$= k \ln\left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \bar{E}}\right) g_1\right) - \frac{\bar{E} k}{\varepsilon} \ln\left(\frac{g_1}{g_2} \frac{\bar{E}}{\varepsilon - \bar{E}}\right) =$$

$$= k \left(\ln \varepsilon g_1 - \ln(\varepsilon - \bar{E}) - \frac{\bar{E}}{\varepsilon} \ln g_1 \bar{E} + \frac{\bar{E}}{\varepsilon} \ln(g_2(\varepsilon - \bar{E}))\right)$$



86 Определить энтропию вещества, которое подчиняется уравнениям:

$$V = V_0[1+\alpha(T-T_0)] \; ; \; \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0 \; ; \; C_p = const$$

З ф-ли $V = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_T$ визначимо вільну енергію

F наступним чином.

$$F = \int V dp + F_0(T)$$

Підставляючи явний вираз для V, після інтегрування будемо мати:

$$F = V_0[1+\alpha(T-T_0)]p + F_0(T)$$

Тепер ентропія визначається так:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -V_0 \alpha p - \frac{\partial F_0(T)}{\partial T}$$

Визначимо, що являє собою функція $F_0(T)$.

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = const = -T\frac{\partial^2 F_0(T)}{\partial T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F_0(T)}{\partial T^2} = -\frac{C_p}{T} \Rightarrow \frac{\partial F_0(T)}{\partial T} = -C_p \ln T + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_0(T) = \int(-C_p \ln T + B)\,dT = -C_p\left(T(\ln T - 1)\right) + BT + A$$

2

що $F_0(T)$ потрібно визначити.

$$S = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial T}\right)_V = \alpha p_0 V + \frac{\partial F_0(T)}{\partial T}$$

$$C_V = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \underset{\text{за умовою}}{const} = T \cdot \frac{\partial^2 F_0(T)}{\partial T^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 F_0(T)}{\partial T^2} = \frac{C_V}{T}$$

$$F = E - TS$$

$$dF = dE - TdS - SdT$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial T} = C_V \ln T + B ;$$

$$F_0 = C_V\,(T(\ln T - 1)) + BT + A \;; \text{ і тоді} \qquad dE = dQ - pdV$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \alpha p_0 V - C_V \ln T + B$$

Р-ня адіабати $\boxed{\alpha p_0 V - C_V \ln T = const}$

(88) Определить, на сколько отличается тепловой эффект реакции образования одного моля водяного пара при постоянном давлении от теплового эффекта этой же реакции, если она проходит без совершения внешней работы.

З першого начала термодинаміки:

$$\boxed{dQ = dE + \underset{\text{робота}}{pdV}} \qquad (dE - TdS - pdV)$$

В першому випадку (при сталому тиску)

$$dQ_p = d(E + p_0 V)$$

В другому випадку (без виконання зовн. роботи).

$$dQ_V = dE$$

ми знайшли складову F_0 вільної енергії, все те вільна енергія матиме вигляд

$$F = V_0[1+\alpha(T-T_0)]p - C_p(T(\ln T-1)) + BT + A$$

Тепер остаточно виражаємо ентропію:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = C_p \ln T - V_0\alpha p + \underbrace{B}_{=S_0}$$

(87) Найти уравнение адиабаты для вещества, уравнение состояния которого имеет вид

$$p = p_0(1+\alpha T - \beta V), \quad C_V = const.$$

$dE = dQ + dA$,
адіабатним процес буде тоді, коли $dQ = 0$, можна записати так:

$$dQ = TdS = 0 \Rightarrow dS = 0$$

Отже якщо знайти ентропію системи S, то записавши $S = const$ – це і буде р-ня адіабати.

Знаючи р-ня стану, можемо знайти вільну енергію:

$$\partial F = -p\,dV$$

$$F = \int -p\,dV = -\int(p_0 + \alpha p_0 T - \beta p_0 V)\,dV =$$

$$= -p_0 V - \alpha p_0 T V + \beta p_0 \frac{V^2}{2} + F_0(T)$$

Отримаємо, спочатку р-ня адіабати для ідеального газу 3

$$dQ = dE + pdV$$

Для ідеального газу

$dE = \frac{m}{M} C_V dT$, а так як процес адіабатний, то $dQ = 0 \Rightarrow \frac{m}{M} C_V dT + pdV = 0$

Виразимо $p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$ і підставимо, тоді:

$$C_V\, dT + RT\frac{dV}{V} = 0; \Leftrightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\left(\ln T + \frac{R}{C_V}\ln V\right) = 0 \Leftrightarrow \ln T + \frac{R}{C_V}\ln V = const$$

Враховуючи, що $C_p - C_V = R$, $\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$ $\left(\gamma = \frac{C_p}{C_V}\right)$ і пропотенціювавши остаточно отримаємо.

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = const}$$

Зробивши заміну $V = \frac{m}{M}\frac{RT}{p}$, перейдемо до змінних p, T:

$$T\left(\frac{m}{M}\frac{RT}{p}\right)^{\gamma-1} = const$$

$$T\cdot\left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma-1} = C; \quad \frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}} = C; \Leftrightarrow p^{1-\gamma}T^{\gamma} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{1-\gamma}\cdot\gamma\cdot T^{\gamma-1}dT + T^{\gamma}(1-\gamma)p^{-\gamma}dp = 0 \quad \Big|: T^{\gamma}$$

$$p^{1-\gamma}\gamma\frac{dT}{T} + (1-\gamma)p^{-\gamma}dp = 0 \quad \Big|: p^{1-\gamma}$$

$$\gamma\frac{dT}{T} + (1-\gamma)\frac{dp}{p} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T}}$$

Тому. $dQ_p - dQ_V = p_0 \, dV$

Згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона.

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

m - маса речовини,
M - молярна маса речовини } ⇒ звідси видно, що $n = \frac{m}{M}$ ⇒ це кількість молів речовини

Тобто $pV = nRT$, і тому

$$\boxed{Q_p - Q_V = (n_2 - n_1) RT}$$

$n_2RT - n_1RT$

n_1 - до реакції; n_2 - після реакції

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$

$$\underbrace{H_2 + \frac{1}{2} O_2}_{n_1 = 3/2} \to \underbrace{H_2O}_{n_2 = 1}$$

// таким чином для отримання 1 моль води необхідно 1 моль H_2, $1/2$ моль O_2

$$\boxed{Q_p - Q_V = \left(1 - \frac{3}{2}\right) RT = -\frac{1}{2} RT}$$

95) Основной причиной понижения температуры с высотой в атмосфере является адиабатное расширение восходящих потоков воздуха. Найти изменение температуры с высотой, используя при этом у-е адиабаты идеального газа.

Або: $\frac{dE}{dh}+p\frac{dV}{dh}\geq 0$ (*) **4**

З р-ня Менделєєва-Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m}{M}R\,dT = p\,dV + V\,dp$, ми розглядаємо два об'єми з одиничними масами, тому

1 - одинична маса

$\frac{1}{M}R\,dT = p\,dV + V\,dp \quad |:dh \Rightarrow$

$$\Rightarrow p\frac{dV}{dh}=\frac{R}{M}\frac{dT}{dh}-\frac{V\,dp}{dh}$$

вираз $\frac{dp}{dh}$ запишемо як $\frac{dp}{dh}=-\rho g$;

крім того $E=C_V T=\frac{pV}{\gamma-1}$, тому

$$\frac{dE}{dh}=\frac{1}{\gamma-1}\left(V\frac{dp}{dh}+p\frac{dV}{dh}\right)$$

і тепер все це підставимо в умову рівноваги (*):

$$\frac{1}{\gamma-1}\left(\cancel{V\frac{dp}{dh}}+\frac{R}{M}\frac{dT}{dh}-\cancel{V\frac{dp}{dh}}\right)+\frac{R}{M}\frac{dT}{dh}+\underbrace{V\rho}_{\text{"1"}}g\geq 0$$

$$\frac{dT}{dh}\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{R}{M}+\frac{R}{M}\right)\geq -g\cdot 1$$

→ одинична маса, приписана тут для збереження розмірності

$$\frac{dT}{dh}\left(\left(\frac{1}{\gamma-1}+1\right)\frac{R}{M}\right)\geq -g$$

$$\frac{dT}{dh}\geq-\frac{g}{\frac{1+\gamma-1}{\gamma-1}\frac{R}{M}};\quad \frac{dT}{dh}\geq-\frac{gM(\gamma-1)}{\gamma R}$$

Таким чином, умова рівноваги:

$$\boxed{\frac{dT}{dh}\geq-\frac{gM(\gamma-1)}{\gamma R}}$$

Отже, отримали зв'язок різниці тиску і температури

З іншого боку $dp = \rho g\, dh = -\frac{gM}{R}\frac{p}{T}\, dh \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{gM}{R}\frac{1}{T}\, dh$$

Прирівнюємо з отриманим раніше:

$$-\frac{gM}{R}\cancel{\frac{1}{T}}\, dh = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{dT}{\cancel{T}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dh} = -\frac{gM}{R}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right); \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

(96) Показать, что атмосфера с температурным градиентом, меньшим или большим градиента, найденного в предыдущей задаче, будет соответственно устойчивой или неустойчивой относительно конвекции. (Использовать 1-е начало термодинамики)

Рассмотрим два объёма газа единичной массы, находящиеся на высотах h и $h+dh$. Якщо ці два об'єми поміняти місцями і їхня спільна енергія збільшиться, то це означає, що стан буде нестійкий, тому що "все прямує до мінімуму енергії", і об'єми повернуться у початкове положення.

Отже умова стійкості проти конвекції: $\Delta E + p\Delta V > 0$

Але ж $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ 5

Виразимо явно "p" з рівняння В-д-В

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \ ; \ p+\frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b}$$

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$, і тоді

$$v = \sqrt{-\frac{V^2}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S} = \sqrt{-\frac{V^2}{\mu}\cdot\frac{C_p}{C_V}\left(-\frac{RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}\right)} =$$

$$= \sqrt{+\frac{V^2}{\mu}\frac{C_p}{C_V}\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{1}{\mu}\frac{C_p}{C_V}\frac{2a}{V}} =$$

$$= \boxed{V\sqrt{\frac{C_p}{C_V}\cdot\frac{1}{\mu}\left(\frac{RT}{(V-b)^2}-\frac{2a}{V^3}\right)}}$$

71 Определить уравнение адиабаты реального газа.

I начало термодинаміки: $dQ = dU + pdV$

Якщо процес адіабатний, що $dQ=0$

Внутрішня енергія dU для реального газу.

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2}dV$$

З р-ня Ван-дер-Ваальса $\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$,

виразимо явно p

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

(91) Найти изменение энтропии тела в случае его расширения при постоянном давлении.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p - ?$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{dQ}{T\partial V}\right)_p = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_p =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{\left(\partial Q/\partial T\right)_p}{\left(\partial V/\partial T\right)_p} = \frac{1}{T}\frac{C_p}{\left(\partial V/\partial T\right)_p}$$

Тому $\boxed{\Delta S = \frac{1}{T}\frac{C_p}{\left(\partial V/\partial T\right)_p}\Delta V}$

(69) Определить скорость звуковой волны, распространяющейся в реальном газе, который подчиняется у-ю типа Ван-дер-Ваальса.

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\begin{cases} v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} & (1) \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \frac{C_p}{C_v}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T & \text{// соотнош Реша (2)} \\ V\rho = \mu & (3) \end{cases}$$

підставляючи (3) → (1) ⇒

$$\Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\left(\frac{\mu}{V}\right)}\right)_S} = \sqrt{-\frac{V^2}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S}$$

Таким чином, $C_p - C_V = p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$

Запишемо р-не Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT.$$

$$pV+\frac{a}{V}-pb-\frac{ab}{V^2}-RT=0 \quad \Big|\times V^2$$

$$pV^3+aV-pbV^2-ab-RTV^2=0$$

Знайдемо похідну $\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$ як похідну від неявно заданої ф-ї

$$d\left[pV^3+aV-pbV^2-ab-RTV^2\right]=0$$

$$p\cdot 3V^2dV+adV-2pbVdV-2RTVdV-RV^2dT=0$$

$$dV(3pV^2+a-2pbV-2RTV)=RV^2dT$$

$$\frac{dV}{dT}=\frac{RV^2}{3pV^2+a-2pbV-2RTV}=\frac{R}{3p+\frac{a}{V^2}-\frac{2pb}{V}-\frac{2RT}{V}}$$

і тоді $C_p-C_V=p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p=$

$$=\boxed{\frac{R}{3+\frac{a}{pV^2}-\frac{2b}{V}-\frac{2RT}{pV}}=C_p-C_V}$$

Отриманий вираз легко перевірити. Так, для $a=0$, $b=0$, тобто для ідеального газу, матимемо.

$$C_p-C_V=\frac{R}{3-\frac{2RT}{pV}}=\frac{R}{3-2}=R$$

Підставляючи dU та p в I-ше начало термодинаміки при $dQ=0$, отримаємо:

$$C_V dT + \cancel{\frac{a}{V^2} dV} + \frac{RT}{V-b} dV - \cancel{\frac{a}{V^2} dV} = 0$$

$$C_V dT + \frac{RT}{V-b} dV = 0$$

$$\frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V-b} dV = 0$$

$$\int_0^T \frac{C_V}{T} dT + \ln(V-b)^R = const \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exp\left[\int_0^T \frac{C_V}{T} dT + \ln(V-b)^R\right] = const \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp\left[\int_0^T \frac{C_V}{T} dT\right] \cdot (V-b)^R = const$$

Р-ня адіабати реального газу

(83) Найти разность $C_p - C_V$ для газа подчиняющегося уравнению состояния типа Ван-дер-Ваальса

$dQ_p = dU + p\,dV$ розділимо все на $dT \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dQ_p}{dT} = \frac{dU}{dT} + p\left(\frac{dV}{dT}\right)_p .$$

Доданок $\frac{dU}{dT}$ це є теплоємність C_V

А $\frac{dQ_p}{dT} = C_p$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C = \frac{-(\partial f/\partial B)_{A,C}}{(\partial f/\partial A)_{B,C}}$$

а) $$-\cancel{\frac{(\partial f/\partial B)}{(\partial f/\partial A)}} \cdot \cancel{\frac{(\partial f/\partial A)}{(\partial f/\partial C)}} \cdot \cancel{\frac{(\partial f/\partial C)}{(\partial f/\partial B)}} = -1$$

б) $$\frac{\partial C}{\partial A} = -\frac{(\partial f/\partial A)}{(\partial f/\partial C)} \Rightarrow \partial f/\partial A = -\frac{\partial C}{\partial A}\cdot\frac{\partial f}{\partial C}$$

$$\frac{\partial A}{\partial C} = -\frac{(\partial f/\partial C)}{(\partial f/\partial A)} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial C} = \frac{\partial f/\partial C}{\frac{\partial C}{\partial A}\,\frac{\partial f}{\partial C}} = \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial A}}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B = \frac{1}{\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B}$$

2 Математический маятник совершает гармонические колебание по закону $\varphi = \varphi_0 \cos(2\pi t/T)$; $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Найти вероятность того, что при случайном измерении угла отклонение φ маятника его значение будет лежать в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\frac{2\pi}{T}t, \quad dt = \frac{d\varphi}{\dot\varphi},$$

$$\dot\varphi = -\varphi_0\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t = -\varphi_0\frac{2\pi}{T}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}} = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}$$

$$dt = \frac{d\varphi}{\frac{2\pi}{T}\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}} = \frac{T\,d\varphi}{2\pi\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}};$$

$$P = \frac{2\,dt}{T} = \frac{2T\,d\varphi}{2\pi\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}}\cdot\frac{1}{T} = \frac{d\varphi}{\pi\sqrt{\varphi_0^2-\varphi^2}}$$

(65) Доказать, что если каждая из трёх переменных A, B, C является дифференцируемой функцией двух других, рассматриваемых как независимые, то выполняется соотношение:

а) $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1$; б) $\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B = \frac{1}{\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B}$

Нехай функціональна залежність між A, B, C виражається співвідношенням:

$f(A, B, C) = 0$, тоді:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C} dA + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C} dB + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B} dC = 0$$

Якщо $A = const$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C} \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A = -\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A,B}$$, тобто

$$\left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A = -\frac{(\partial f/\partial C)_{A,B}}{(\partial f/\partial B)_{A,C}};$$

Якщо $B = const$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right) dA = -\left(\frac{\partial f}{\partial C}\right) dC$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -\frac{(\partial f/\partial A)_{B,C}}{(\partial f/\partial C)_{A,B}}$$

Якщо $C = const$, то:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{B,C} dA = -\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A,C} dB$$

Враховуючи те, що $\Delta n \ll \bar{n}$, будемо мати:

$$\ln P_n \approx -\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}} \Rightarrow P_n = Ce^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n\, dn = 1 \Rightarrow C^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}$$

$$\boxed{P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp\left(-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}\right)}$$

29 Используя результат предыдущей задачи, найти следующие величины:

а) $\overline{v^n}$ при $n > -2$

б) $\bar{v}$, $\overline{v^2}$

в) v_0 (наиболее вероятное значение скорости)

$$\overline{v^n} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi \int_0^\infty v^2 v^n e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

// До Г ф-ї можна звести наступним чином:

$$// \int_0^\infty v^2 v^n e^{-mv^2/2kT}\, dv = \int_0^\infty \frac{1}{2v} v^{2+n} e^{-mv^2/2kT}\, d(v^2)$$

$$// = \int_0^\infty \frac{1}{2} v^{1+n} e^{-mv^2/2kT}\, d(v^2) =$$

$$// = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(v^{\frac{1+n}{2}}\right)^2 e^{-mv^2/2kT}\, d(v^2)$$

$$// \quad \frac{1+n}{2} = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{n+3}{2}$$

⑦ Идеальный газ, состоящий из N молекул, находится в сосуде объёмом V. Определить вероятность того, что в заданном объёме V_0 ($V_0 \ll V$) в данный момент будет содержаться n молекул. Рассмотреть предельные случаи:

а) $n \ll N$;

б) $n \gg 1$; $\Delta n \ll \bar{n}$

Імовірність того, що в об'ємі V_0 міститься одна молекула, рівна $p = V_0/V$. Імовірність того, що довільні n молекул з загальної кількості N попадуть у V_0:

$$P_n(V_0) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} =$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{V_0}{V}\right)^n\left(1-\frac{V_0}{V}\right)^{N-n} \quad //\ \text{біноміальний розподіл.}$$

Випадок а)

$$\bar{n} = pN, \quad P_n = \lim_{N\to\infty}\frac{(\bar{n})^n}{n!}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Випадок б). Використовуємо ф-лу Стірлінга $\ln n! \simeq n\ln n - n$, тоді отримаємо:

$$\ln P_n = n\ln\bar{n} - \bar{n} - \ln n! = -(\bar{n}-\Delta n)\ln\left(1+\frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)+\Delta n$$

(90) Найти $\bar{\varepsilon}$ и наиболее вероятное значение кинетической энергии частицы ε_0. Объяснить причину их несовпадения.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m}{2}\frac{3kT}{m} = \frac{3}{2}kT$$

$$\varepsilon_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{2kT}{m} = kT$$

$\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_0$ Ці енергії не рівні, тому що середнє та найбільш імовірне значення швидкостей також відрізняються.

(99) Найти энтропию и внутреннюю энергию вещества в электрическом поле если его свободная энергия равна

$$F = F_0 - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} V E^2$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial F_0}{\partial T}\right)_V + \frac{VE^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_V =$$

$$= S_0 + \frac{VE^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_V$$

Але $\varepsilon = 1 + \dfrac{4\pi n p_0^2}{3kT}$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_V = -\frac{4\pi n p_0^2}{3k}\frac{1}{T^2} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{T}$$

$$S = S_0 - \frac{VE^2(\varepsilon - 1)}{8\pi \cdot T}$$

Вн енергія $E = F + TS = F_0 - \dfrac{\varepsilon - 1}{8\pi}VE^2 + TS_0 - \dfrac{VE^2(\varepsilon - 1)}{8\pi} =$

знайдемо $\bar{v}$

Тут $n=1 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) = \Gamma(2) = 1$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \cdot \cancel{2} = 4\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

$$\overline{v^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^1 \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) \ominus$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\ominus\ \frac{\cancel{4}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\left(\frac{2kT}{m}\right)\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cancel{\sqrt{\pi}} = \frac{6kT}{m}$$

v_0 визначаємо з умови $\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-mv^2/2kT}v^2\right)=0$

$$v^2 e^{-mv^2/2kT}\cdot\left(-\frac{2vm}{2kT}\right) +$$

$$+ 2v e^{-mv^2/2kT} = 0$$

$$-v^2 e^{-mv^2/2kT}\cdot\frac{vm}{kT} + 2v e^{-mv^2/2kT} = 0$$

$$-\frac{v^2 m}{kT} + 2 = 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

(24) Система имеет невырожденный энергетический спектр

$\varepsilon_l = l\varepsilon$, $l = 0, 1, 2 \ldots n-1$. Определить среднюю энергию такой системы

$$Z = \sum_{l=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{l\varepsilon}{kT}\right) = \frac{e^{-nE/kT}+1}{e^{-E/kT}-1}$$

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z =$$

$$= kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\left[\ln\left(e^{-nE/kT}+1\right) - \ln\left(e^{-E/kT}-1\right)\right] =$$

$$= \cancel{kT^2} \cdot \left[\frac{1}{e^{-nE/kT}+1} \cdot e^{-nE/kT} \cdot \frac{nE}{\cancel{kT^2}} - \frac{E\, e^{-E/kT}}{\cancel{kT^2}\left(e^{-E/kT}-1\right)}\right] =$$

$$= \frac{nE \cdot e^{-nE/kT}}{e^{-nE/kT}+1} - \frac{E \cdot e^{-E/kT}}{e^{-E/kT}-1} =$$

$$= \frac{nE}{1+e^{nE/kT}} - \frac{E}{1-e^{E/kT}}$$

$$= F_0 + TS_0 - \frac{VE^2(\varepsilon - 1)}{4\pi}$$

(123) Определить теплоёмкость системы состоящей из N независимых двухмерных гармонических осцилляторов, каждый из которых обладает $(n+1)$ кратно вырожденными уровнями энергии

$$\varepsilon_n = (n+1)\hbar\omega \qquad n = 0, 1 \ldots$$

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{N} (n+1) \exp\left(-\frac{(n+1)\hbar\omega}{kT}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} \cdot \sum_{n=0}^{N} \exp\left(-\frac{(n+1)\hbar\omega}{kT}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} \cdot \frac{\exp(-\hbar\omega/kT)}{1 - \exp(-\hbar\omega/kT)} =$$

$$= \frac{\exp(\hbar\omega/kT)}{(1 - \exp(\hbar\omega/kT))^2}$$

$$F = -kT \ln Z, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$$\Rightarrow C_V = T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = T\left(\frac{\partial^2 kT \ln Z}{\partial T^2}\right)_V =$$

$$= \frac{Nk}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}$$