Задача

Ідеальний газ, що складається з N_0 молекул, знаходиться в посудині з V_0. Знайти ймовірність того, що в такому об'ємі $V << V_0$ в деякий момент часу знаходиться n молекул.

Розв'язання:

Нехай p - ймовірність знаходження будь-якої молекули в об'ємі V, а $q=1-p$ в решті об'єму $V_0 - V$

Очевидно $p = \frac{V}{V_0}$, $q = \frac{V_0 - V}{V_0}$

тоді $P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N_0 - n}$ (*)

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N_0-n)!} p^n q^{N_0-n} =$$

$$= (p+q)^{N_0} = 1$$

де $N!$ - загальна кількість перестановок

$n!$ - кількість перестановок сприятливих подій

$(N_0 - n)!$ - кількість перестановок несприятливих подій

$$\frac{N_0!}{n!(N_0-n)!} = N_0(N_0-1)(N_0-2)\ldots(N_0-n+1)$$

Вираз (*) - біноміальний розклад і є ймовірністю того, що в об'ємі V знаходиться n молекул.

Задача

Знайти рівняння стану, якщо даний вираз для вільної енергії $F(T,V)$

Розв'язання:

Візьмем наприклад $F = -p_0 T \ln(VT^2)$

Тоді $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = p_0 T \frac{\partial}{\partial V}(\ln|VT^2|) =$

$$= p_0 T \frac{1}{VT^2} T^2 = p_0 \frac{T}{V}$$

$\Rightarrow$ $pV = p_0 T$ - рівняння стану

Задача: Дано $S = S_0 + \rho_0 B \ln(T^3 V)$, $V = const$; $\Delta T - ?$; $\Delta P - ?$

Розв'язання:

Запишемо ΔP в змінних T і V

$$\Delta P(T,V) = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \Delta V}_{=0}$$

Згідно співвідношення Максвела:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

Тоді

$$\Delta P = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta T$$

Знайдемо $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left[S_0 + \rho_0 B \ln(T^3 V)\right]_T = \rho_0 B \frac{1}{\cancel{T^3} V} \cancel{T^3} = \frac{\rho_0 B}{V}$

Отже

$$\Delta P = \frac{\rho_0 B}{V} \Delta T$$

Задача:

Потенціальна енергія електрона всередині метала рівна його енергії поза металом плюс $W = \varphi e$. Визначити густину струму термоелектронної емісії. Концентрація електронів в металі n_0, маса електрона m

Розв'язання:

$$dP(\vartheta) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta$$

$$n\bar{\vartheta}_z = \int \vartheta_z \, dP(\vartheta) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int \vartheta_z \times e^{-\frac{m\vartheta_z^2}{2kT}} d\vartheta_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} n \frac{kT}{m} e^{-\frac{m\vartheta_0^2}{2kT}}$$

де $\frac{m\vartheta_0^2}{2} = e\varphi$, $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$

$$I_z = ln\bar{\vartheta}_z = \left(\frac{2kT}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \ln e^{-\frac{e\varphi}{kT}}$$

Задача:
Знайти енергію ідеального класичного газу

Розв'язання
Запишемо енергію через термодинамічний потенціал Гібса

$$E = F + TS \quad (1)$$

Як ми знаємо $F = -kT\ln Z$

$$E = -kT\ln Z + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V =$$

$$= -kT\ln Z + kT\left[\frac{\partial}{\partial T}(T\ln Z)\right]_V =$$

$$\cancel{= -kT\ln Z + kT\ln Z + kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z =}$$

$$= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z \quad (2)$$

Статистична сума ідеального газу $Z_1 = V\left(\frac{2\pi m k_0 T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ для 1-ї частинки (3)

Підставивши (3) в (2) одержимо

$$E_1 = k_0T^2\frac{\partial}{\partial T}\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m k_0}{h^2}\right)\right] =$$

$$= k_0T^2\frac{3}{2T} = \frac{3}{2}k_0T$$

Для газу можемо записати

$$E = \frac{3}{2}NkT$$

Задача
Знайти S для розподілу
$$\omega(x) = C\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)$$
Розв'язок:
$$S = k_0\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\ln\omega(x)dx =$$
$$= k_0\int_{-\infty}^{\infty} c\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)\ln c\,dx +$$
$$+ k_0\int_{-\infty}^{\infty} c\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)dx =$$
$$= k_0 C\ln c\,\frac{2}{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\frac{1}{2}\delta^2)} - \frac{2kC}{2\delta^2}\,\frac{\pi^{1/2}}{4(\frac{1}{2}\delta^2)}$$
$$= k_0 c\ln c\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k_0 c\sqrt{\pi}\,(2\delta^2)^2}{4\delta^2} =$$
$$\Rightarrow \int\omega\,dx = 1$$
$$\int c\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)dx = c\,\frac{2}{2}\sqrt{2}\,(2\delta^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$c = \frac{1}{(2\delta^2\pi)^{\frac{1}{2}}}$$

Задача: Дано $p(x) = c(x^2 + bx^2)\times$
$$\times\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$
Знайти $\langle\Delta x^2\rangle$ — ?
Розв'язання
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 \Rightarrow C$$
$$\langle\Delta x^2\rangle = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle =$$
$$= \langle(x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x\rangle^2)\rangle =$$
$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$
$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx$$
$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$$

Задача:

Знайти ентропію гармонічного осцилятора з резонансною частотою ω_0 і температурою T

Розв'язання:

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2$$

Запишемо статсуму:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right)}{1-e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}}}$$

$$\bar{E} = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\left[-\frac{\hbar\omega}{2kT} - \ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)\right] = kT^2\left[\frac{\hbar\omega}{2kT^2} + \frac{\hbar\omega/kT^2\, e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right] = \hbar\omega\left[\frac{1}{2}+\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right]$$

$$F = -kT\ln Z = -kT\ln\left(\frac{e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

Задача: Знайти границю чутливості дзеркального гальванометра з модулем пружності кручення нитки ξ. Температура T.

Розв'язання:

Тепловий рух приводить до випадкових поворотів дзеркала на кути, величина яких визначається значенням середнього квадратичного кута повороту $\langle\varphi^2\rangle$

Ймовірність відхилення на кут φ визначається

$$dW = C e^{-\frac{U(\varphi)}{kT}} d\varphi \Rightarrow$$

$$U(\varphi) = \frac{\xi\varphi^2}{2} \Rightarrow C e^{-\frac{\xi\varphi^2}{2kT}} d\varphi$$

$$C = \frac{1}{\int e^{-\frac{\xi\varphi^2}{2kT}} d\varphi}$$

$$\langle\varphi^2\rangle = C\int \varphi^2 e^{-\frac{\xi\varphi^2}{2kT}} d\varphi = \ldots = \frac{kT}{\xi}$$

$$\Delta = \sqrt{\langle\varphi^2\rangle} = \sqrt{\frac{kT}{\xi}}$$

Задача

$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ - ? якщо $P(V-b)=RTe^{-\frac{a}{RTV}}$ (+)

Розв'язання:

Розглянемо залежність ентальпії від температури T і тиску P.

$$dH(T,P)=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT+\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT=-\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

Звідки: $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H=-\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}$

Ентальпія: $dH=TdS+\underbrace{VdP}_{=0}$ оскільки тиск фіксований

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P=C_P \quad (*)$$

Вираз $dH=TdS+VdP$ поділимо на dP при сталому T

$$\left(\frac{dH}{dP}\right)_T=T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T+V\cancel{\frac{dP}{dP}}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Підставимо і одержимо:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T=V-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Враховуючи (*) одержимо:

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_H=\frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P-V}{C_P}$$

Продиференціюємо рівняння (+) по T при сталому P:

$$P\left(\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right)=Re^{-\frac{a}{RTV}}+RTe^{-\frac{a}{RTV}}\cdot\frac{a}{RVT^2}=$$

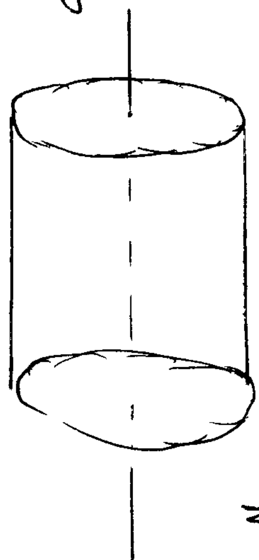
$$=\left(R+\frac{a}{VT}\right)e^{-\frac{a}{VRT}}$$

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_H=\frac{\frac{T}{P}\left[\left(R+\frac{a}{VT}\right)e^{-\frac{a}{VRT}}\right]-V}{C_P}=$$

$$=\frac{T\left(R+\frac{a}{VT}\right)e^{-\frac{a}{VRT}}-VP}{PC_P}$$

Задача

Знайти тиск на стінки циліндра радіуса R висотою h, газу, що міститься у ньому. Циліндр обертається зі швидкістю Ω.



$$U = -\frac{m}{2}(\Omega r)^2$$

$$N = \int C n(\vec{r})\, dV =$$

$$= C n_0 \int e^{-\frac{U(r)}{kT}} dV$$

$$n(r) = n_0 \exp\left\{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}\right\}$$

$$N = R 2\pi h n_0 \int_0^R r\, e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} dr =$$

$$= \pi h n_0 \int_0^R e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} dr^2 =$$

$$= \pi h n_0 \frac{2kT}{m\Omega^2} e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} \Big|_0^R =$$

$$= \pi h n_0 \frac{2kT}{m\Omega^2}\left(e^{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}} - 1\right) = N$$

$$n_0 = \frac{Nm\Omega^2}{2\pi h kT} \frac{1}{e^{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}} - 1};$$

$$n(r) = n_0 e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} \cdot n(R) = \frac{Nm\Omega^2}{2\pi hkT} \frac{1}{e^{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}} - 1} e^{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}}$$

$$P(R) = nkT = \frac{Nm\Omega^2}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{m\Omega^2}{2kT}R^2}}{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}}$$

$$P(R) = \frac{Nm\Omega^2}{2\pi h} \frac{1 + \frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}}{\frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}} =$$

$$= \frac{NkT}{\pi h R^2}\left(1 + \frac{m\Omega^2 R^2}{2kT}\right)$$

Задача

Знайти корелятор $\langle \Delta S \Delta V \rangle$ в змінних V і T

Розв'язання:

$$\left(\Delta P(V,T) = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T\right)$$

$$\Delta S(V,T) = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T$$

$$\langle \Delta S \Delta T \rangle = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \overline{(\Delta V)^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \underbrace{\overline{\Delta T \Delta V}}_{=0} =$$

$$= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \underbrace{\overline{(\Delta V)^2}}_{-kT} = -kT\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \times$$

$$\times \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Задача:
Знайти ентальпію для ідеального газу (класич.

Розв'язання:
Виходячи з першого закону термодинаміки

$$dE = TdS - pdV$$

Ентальпія $H = E + pV$ (*)

$$dH = dE + pdV + Vdp = TdS - \cancel{pdV} + \cancel{pdV} + Vdp = TdS + Vdp$$

$$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z, \quad P = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z$$

Підставивши в (*) одержимо:

$$H = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z + kTV \frac{\partial}{\partial V} \ln Z$$

Статистична сума для ідеального газу має вигляд:

$$Z_1 = V\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Підставимо

$$H_1 = kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\left[\ln\left(NV\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right] + kTV\frac{\partial}{\partial V}\left[\ln V\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= kT^2 \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)} + kTV \times$$

$$\times \frac{1}{V\left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{2mkT}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{kT^2}{T} + kT = \frac{3}{2}kT + kT =$$

$$= \frac{5}{2}kT$$

$$H = \frac{5}{2}kTN$$

Задача

Знайти флуктуації тиску в однорідній системі, яка знаходиться в термостаті і показати, що для стійкості стану системи необхідно, щоб $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S < 0$

Розв'язування:

Заг. відомості

$$\Delta\omega(x,y) = \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{2\langle(\Delta x)^2\rangle} - \frac{(\Delta y)^2}{2\langle(\Delta y)^2\rangle}\right) \quad (1)$$

$$dV(P,S) = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S dP + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P dS$$

$$dT(P,S) = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S dP + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P dS$$

$d = \Delta$

$$\Delta\omega = \exp\left[\frac{\Delta P\Delta V - \Delta T\Delta S}{2kT}\right] \quad (2)$$

Підставляємо в (1) ΔV і ΔT

$$\Delta\omega(P,S) = \exp\left(\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P^2 - \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \Delta S^2}{2kT}\right) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\right] = \exp\left(\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P^2}{2kT} - \frac{1}{2kT}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \Delta S^2\right)$$

Прирівнявши одержаний вираз з виразом (1) одержимо:

$$\frac{\Delta P^2}{2kT}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = -\frac{\Delta P^2}{2\langle\Delta P^2\rangle}$$

Звідси $\langle\Delta P^2\rangle = -\frac{kT}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S} = -kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S$

Покажемо, що $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$

$$dH(S,P) = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P}_{T} dS + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S}_{V} dP$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$$

Задача:
Дано систему з n осциляторів. Знайти C_v, якщо рівні енергії $E_n = b(n+1)$ і ступінь виродження $n+1$.

Розв'язання:
Запишемо велику статистичну суму для системи з n осциляторів

$$Z = Z_1^n \quad Z_1 = \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{kT}} = \sum_n e^{-\frac{b(n+1)}{kT}(n+1)}$$

$$= \left[\frac{b}{kT} = x\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right] = -\left[\frac{1}{1-e^{x}}(-e^{-x}) + \right.$$

$$\left. \cancel{+e^{-x}} \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\right] = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-x} - e^{-2x} + e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} = -\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

$$Z = Z_1^n = \left(\frac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}\right)^n$$

$$Z = \frac{e^{-\frac{Nb}{kT}}}{(e^{-\frac{b}{kT}}-1)^{2N}}$$

Знайдемо: $\langle E \rangle$

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = \frac{kT^2}{Z}\frac{\partial Z}{\partial T}$$

$$\ln Z = -\frac{bN}{kT} - 2N\ln(1-e^{-\frac{b}{kT}})$$

$$\langle E \rangle = bN + \frac{2Nbe^{-\frac{b}{kT}}}{1-e^{-\frac{b}{kT}}}$$

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{2Nbe^{-\frac{b}{kT}}}{1-e^{-\frac{b}{kT}}}\right] = \frac{2Nbe^{-\frac{b}{kT}}\left(-\frac{b}{kT^2}\right)}{1-e^{-\frac{b}{kT}}}$$

$$+ \frac{2Nbe^{-\frac{b}{kT}}}{(1-e^{-\frac{b}{kT}})^2}\left(\frac{b}{kT^2}\right) =$$

$$= 2Nbe^{-\frac{b}{kT}}\left(-\frac{\frac{b}{kT^2}}{(1-e^{-\frac{b}{kT}})} + \frac{\frac{b}{kT^2}}{(1-e^{-\frac{b}{kT^2}})^2}\right)$$

$$= 2Nbe^{-\frac{b}{kT}}\left(\frac{-\frac{b}{kT}(1-e^{-\frac{b}{kT}}+1)}{(1-e^{-\frac{b}{kT}})}\right) =$$

$$= \frac{Nk}{2}\frac{b}{kT^2}\frac{1}{sh^2\frac{b}{kT}}$$

Задача

$\omega(x)$ – ф-ція розподілу. Знайти явний вигляд $\omega(x)$, якщо вона відповідає максимальній ентропії Больцмана

$\langle x_{сер}^2\rangle = a^2$

Розв'язання:

$$\tilde S = -k\int \omega(x)\ln\omega(x)\,dx - \alpha\left(\int x^2\omega(x)\,dx - \langle x^2\rangle\right) - \beta\left(\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\,dx - 1\right)$$

$$\ln\omega = -\frac{k+2\alpha^2+\beta}{k},\quad \omega = e^{-\frac{\beta+k}{k}}e^{-\frac{\alpha x^2}{k}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\omega} = -k\ln\omega - k - \alpha x^2 - \beta = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,dx = 1 = e^{-\frac{(\beta+k)}{k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha x^2}{k}}dx = e^{-\frac{(\beta+k)}{k}}\sqrt{\frac{\pi k}{\alpha}}$$

$$e^{-\frac{(\beta+k)}{k}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi k}}$$

$$\overset{\circ}{\omega}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi k}}\,e^{-\frac{\alpha x^2}{k}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{1} = -\alpha \qquad \alpha = -\frac{1}{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\omega\,dx = \langle x^2\rangle = a^2$$

$$a^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi k}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\frac{\alpha x^2}{k}}dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi k}}\,\frac{1}{\alpha!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{\frac{(2+1)}{2}}} = \frac{k}{2\pi}$$

$$\omega(x) = \sqrt{}\;e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

Знайдем ентропію

$$\tilde S = -k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ln\left(a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)\times$$

$$\times dx - \alpha\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\ln\left(a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)dx - \alpha\left(\int_{-\infty}x^2\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx\right.\right.$$

$$\left.-\langle x^2\rangle\right) - \beta\left(\int_{-\infty}\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx - 1\right)$$