и не зависит от значения t. Кроме того, по условию случайная величина $\gamma(\omega)$ распределена равномерно на отрезке $[0,\pi]$, т.е. функция плотности вероятностей f_γ инвариантна относительно сдвига аргумента. Таким образом,

$$f_\xi(y\,|\,t) \equiv f_\xi(y\,|\,t+h).$$

Для $N > 1$ нужно определить *закон распределения* N-мерного *случайного вектора* с компонентами

$$\xi_k(\omega) \triangleq \varphi_k(\alpha(\omega),\beta(\omega),\gamma(\omega)) \equiv \alpha(\omega)\cos\bigl[\beta(\omega)t_k + \gamma(\omega)\bigr]$$

и доказать, что

$$f_\xi(y_1,\ldots,y_N\,|\,t_1,\ldots,t_N) \equiv f_\xi(y_1,\ldots,y_N\,|\,t_1+h,\ldots,t_N+h).$$

Далее принципиальная схема рассуждений аналогична использованной в одномерном случае и потому не приводится.

2.2. Нормальные процессы

Определение 2.3. *Случайный процесс* $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [a, b]$, называют ***нормальным***, или ***гауссовым процессом***, если любые его конечномерные *законы распределения* являются нормальными.

Пусть $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, — n-мерный нормальный процесс с *математическим ожиданием* $m_\xi(t)$ и *ковариационной функцией* $K_\xi(t,\tau)$. В этом случае для любого $N \geqslant 1$ и для любых $t_k \in T$ известны значения его математического ожидания

$$m_\xi(t_k) \equiv \mathbf{M}[\xi(t_k,\omega)], \quad k=\overline{1,N},$$

и ковариационной функции

$$K_\xi(t_k,t_j) = \mathbf{M}\bigl[\bigl(\xi(t_k,\omega)-m_\xi(t_k)\bigr)\bigl(\xi(t_j,\omega)-m_\xi(t_j)\bigr)^{\mathrm{T}}\bigr], \quad k,j=\overline{1,N}.$$

Введем в рассмотрение блочные матрицы-столбцы, которые при дальнейших рассуждениях будем называть ***блочными векторами***:

$$\eta_N(\omega) \triangleq \begin{pmatrix} \xi(t_1,\omega) \\ \xi(t_2,\omega) \\ \vdots \\ \xi(t_N,\omega) \end{pmatrix}, \qquad m_N \triangleq \begin{pmatrix} m_\xi(t_1) \\ m_\xi(t_2) \\ \vdots \\ m_\xi(t_N) \end{pmatrix}$$

и блочную матрицу

$$V_N \triangleq \begin{pmatrix} K_\xi(t_1,t_1) & K_\xi(t_1,t_2) & \dots & K_\xi(t_1,t_N) \\ K_\xi(t_2,t_1) & K_\xi(t_2,t_2) & \dots & K_\xi(t_2,t_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_\xi(t_N,t_1) & K_\xi(t_N,t_2) & \dots & K_\xi(t_N,t_N) \end{pmatrix}.$$

Не останавливаясь на анализе особых случаев, связанных с возможной линейной зависимостью *сечений* рассматриваемого случайного процесса, будем считать, что $|V_N| \neq 0$.

Блочный вектор $\eta_N(\omega)$ является (nN)-мерным *случайным вектором* с математическим ожиданием m_N и *ковариационной матрицей* V_N. А так как $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, — нормальный случайный процесс, то случайный вектор $\eta_N(\omega)$ распределен по нормальному закону и

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nN}|V_N|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - m_N)^{\mathrm{T}} V_N^{-1}(y - m_N)\right]$$

является N-мерной *функцией плотности вероятностей* для *случайного процесса* $\xi(t,\omega)$, $t \in T$.

Таким образом, любой конечномерный закон распределения нормального случайного процесса полностью определяется его математическим ожиданием и ковариационной функцией.

Если $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, — n-мерный *стационарный* нормальный случайный *процесс*, то его математическое ожидание — постоянный n-мерный вектор, а аргументом ковариационной функции является параметр $\tau \triangleq t_2 - t_1$.

В силу центральной предельной теоремы [XVI] нормальные случайные процессы в ряде случаев оказываются предельными для сумм возрастающего числа случайных процессов.

2.3. Процессы с независимыми приращениями

Определение 2.4. *Случайный процесс* $\xi(t,\omega)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, *называют* ***процессом с независимыми приращениями***, *если для любых* $N > 1$ *и* $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, *таких, что* $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, *случайные величины*

$$\xi(t_1,\omega), \quad \xi(t_2,\omega) - \xi(t_1,\omega), \quad \ldots, \quad \xi(t_N,\omega) - \xi(t_{N-1},\omega)$$

являются независимыми.

В практике научных исследований встречаются случайные процессы, родственные (в определенном смысле) случайным процессам с независимыми приращениями. Отметим некоторые из них.

1. Если n-мерные случайные векторы $\xi(t_1,\omega)$, $\xi(t_2,\omega) - \xi(t_1,\omega)$, $\ldots$, $\xi(t_N,\omega) - \xi(t_{N-1},\omega)$ являются, вообще говоря, зависимыми, но некоррелированными, то n-мерный случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, называют ***процессом с некоррелированными (ортогональными) приращениями***.

2. Если для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, *закон распределения* приращения $\xi(t_{k+1},\omega) - \xi(t_k,\omega)$ зависит лишь от $t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, N-1}$, то случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in T$, с независимыми приращениями называют ***процессом со стационарными независимыми приращениями***.

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, с независимыми приращениями полностью определен одномерным *законом распределения* $f_\xi(x\,|\,t)$, характеризующим случайный вектор $\xi(t_1,\omega)$, и двумерным законом распределения $f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)}\,|\,t_1, t_2)$, характеризующим приращения $\xi(t_{k+1,\omega}) - \xi(t_{k,\omega})$, $k = \overline{1, N-1}$.