

С. А. Ахманов
Ю. Е. Дьяков
А. С. Чиркин

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ РАДИОФИЗИКУ И ОПТИКУ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

АХМАНОВ С. А., ДЬЯКОВ Ю. Е., ЧИРКИН А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981

В книге изложены основы теории статистических явлений в колебательных и волновых процессах. В отличие от традиционных курсов статистической радиофизики, в предлагаемой книге большое внимание уделено задачам статистической оптики. Наряду с такими разделами, как основы теории случайных процессов и полей, шумы в линейных и нелинейных системах с сосредоточенными параметрами и т. п., рассмотрены временная и пространственная когерентность световых полей, статистика фотоотчетов, флуктуации в лазерах, статистические явления в нелинейной оптике. Значительное внимание уделено новым теоретическим методам статистической радиофизики и оптики. Ряд разделов книги иллюстрируется экспериментальными данными.

*Сергей Александрович Ахманов, Юрий Евгеньевич Дьяков,
Анатолий Степанович Чиркин*

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ РАДИОФИЗИКУ И ОПТИКУ

М., 1981 г., 640 стр. с илл.

Редактор *Н. А. Мамонтова*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Л. Н. Боровина, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 2440

Сдано в набор 13.06.80. Подписано к печати 10.02.81. Бумага 60×90¹/₁₆. Тип. № 2
Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 40. Уч.-изд. л. 43,01
раж 12 000 экз. Заказ. № 1382. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано с матриц во 2-й типографии изд-ва «Наука»,
121099, Шубинский пер., 10. Зак. 281.

А 20405—031
053(02)—81 83-81. 1704050000

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение. Статистические явления в радиофизике и оптике. Случайные колебания и случайные волны	13
Глава 1. Методы теории случайных функций в радиофизике и оптике	22
§ 1. Случайные процессы	22
Детерминированное и статистическое описание реальных процессов (22). Реализации случайного процесса; статистический ансамбль (23). Статистическое усреднение (24). Разложение в ряд по моментам (26). Неравенство Чебышева (27) Кумулянты (28).	
§ 2. Многомерные статистические характеристики	30
Многомерные распределения вероятностей (30). Многомерные моменты, кумулянты, характеристические функции (32). Условные распределения вероятностей; статистическая независимость (34). Распределение суммы независимых случайных величин; центральная предельная теорема (35). Многомерное нормальное распределение (37). Стационарные и нестационарные случайные процессы (38). Радиофизический пример: обнаружение сигнала на фоне шума; статистические ошибки (40)	
§ 3. Корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов	42
Корреляционная функция и коэффициент корреляции (42) Спектральное представление случайного процесса; спектральные амплитуды и спектральная плотность; связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией (44). Примеры спектров и корреляционных функций (47).	
§ 4. Статистическое усреднение и усреднение по времени	52
Эргодичность (52). О методах измерения статистических характеристик стационарных случайных процессов (55) Измерение средних (56). Измерение вероятностей (56).	
§ 5. Выбросы случайных процессов	60
Длительность выбросов (61). Число выбросов (62). Энергия выбросов (62). Число пересечений порога (62). Максимумы и минимумы (62). Пересечение случайных кривых (66).	
§ 6. Стохастические дифференциальные уравнения в обыкновенных производных. Анализ случайных колебаний путем усреднения точного решения	68
Переходные процессы со случайными начальными условиями (70). Линейная система под воздействием случайных сил: функция Грина; интеграл Дуамеля (72). Линейные и нелинейные системы со случайно изменяющимися параметрами; двухуровневая квантовая система под действием шума (74).	
§ 7. Стохастические дифференциальные уравнения. Использование стохастических методов при неизвестном точном решении	77
Усреднение системы линейных уравнений со случайными коэффициентами (77). Уравнение Фоккера — Планка для функции распределения вероятностей (83). Линеаризация нелинейного уравнения (91) Статистическая линеаризация (92). Уравнения Дайсона для средних (97).	

§ 8. Случайные поля	99
Однородные и изотропные случайные поля (100). Спектры однородных и стационарных пространственно-временных случайных полей (101). Корреляционные функции трехмерного изотропного случайного поля (102). Двумерное изотропное случайное поле; случайная волна (103). Световые пучки; поперечная и продольная корреляция (106). Структурная функция; локально однородные и локально изотропные случайные поля (107). Когерентность; полностью и частично когерентные поля; коэффициент когерентности пучка (108). Векторные случайные поля; случайная поляризация, поляризационная матрица (110). Полностью и частично поляризованные волны (112). Степень поляризации (113).	
Глава 2. Модели случайных процессов и полей	115
§ 1. Введение. Физика возникновения случайных процессов и полей и их математические модели	115
§ 2. Гауссовский случайный процесс	118
Распределение вероятностей; характеристическая функция; моменты (119). Функции распределения для производных по времени (122). Вычисление некоторых средних (123).	
§ 3. Узкополосный стационарный шум	123
Огибающая, фаза, квадратурные компоненты (123). Корреляционные и спектральные характеристики квадратурных компонент (125). Статистические свойства комплексной амплитуды узкополосного процесса (127).	
§ 4. Узкополосный гауссовский шум	128
Распределения огибающей и фазы (129). Распределение интенсивности (129). Двумерные распределения и корреляционные функции огибающей и фазы (130). Статистические характеристики производных по времени от огибающей и фазы (133). Примеры нестационарных узкополосных процессов (134). Корреляционные свойства комплексной амплитуды (138). Суперпозиция гармонического сигнала и гауссовского шума (139).	
§ 5. Негауссовские квазигармонические стационарные процессы	142
Универсальность равномерного распределения фазы (142). Независимость ρ и φ (143). Связь характеристической функции процесса с распределением его огибающей (144). Распределение интенсивности (146). Двумерные распределения ρ и φ (147). Гауссовский процесс (150). Модель квазипериодического процесса (150).	
§ 6. Диффузионный (винеровский) процесс	151
Диффузия фазы (155). Приведение распределения вероятностей к интервалу периодичности (155).	
§ 7. Колебания, модулированные шумом	158
Амплитудная модуляция (159). Фазовая модуляция (161). Частотная модуляция (164). Статистика уширения спектральных линий в оптике (168).	
§ 8. Импульсные случайные процессы	174
Одиночный случайный импульс (176). Случайная импульсная последовательность (178). Квазипериодический импульсный процесс (184). Дробовой шум (186).	
§ 9. Фотоотсчеты в случайном световом поле	188
Распределение фотоотчетов в случайном поле. Формула Манделя (189). Роль соотношения между временем корреляции поля и временем наблюдения (190). Статистика фотоотчетов в поле теплого и лазерного излучения (192). Обратная задача: нахождение статистики поля из распределения фотоотчетов (195).	

§ 10. Многомодовая модель случайного процесса	199
Статистика многомодового колебания; центральная предельная теорема для случайных колебаний (200). Моменты многомодового колебания (205). Многомодовая модель стационарного гауссовского шума (206). Когда многомодовое колебание можно считать гауссовским шумом? (209). Многомодовое лазерное излучение; частичная и полная синхронизация мод (210).	
Глава 3. Шумовые колебания в линейных системах	215
§ 1. Математическое описание линейных систем. Спектральный и временной подходы	215
Принцип суперпозиции (215). Вынужденные колебания; спектральное описание отклика линейной системы (216). Временной подход (217). Свободные колебания (219). Функция Грина линейных систем с сосредоточенными параметрами (219). Замена начальных условий эквивалентной внешней силой (221).	
§ 2. Отклик линейной системы на шумовое воздействие	223
Преобразование корреляционных функций и спектров (223). Фильтрация шума избирательными системами (224). RC-фильтр (225). Колебательный контур (226). Анализ вынужденных колебаний с помощью укороченных уравнений (228). Установление шумовых колебаний в линейном осцилляторе — пример нестационарного случайного процесса (230). Линейная система как усредняющее устройство (232). Белый шум и «черный ящик» (корреляционная идентификация линейных систем) (232).	
§ 3. Распределение вероятностей на выходе линейной системы	233
Действие на систему гауссовского шума (234). Нормализация флуктуаций в узкополосных системах (234).	
§ 4. Собственные шумы линейных систем. Тепловые шумы диссипативных линейных систем	237
Формула Найквиста в классической области (239). Спектр и корреляционная функция теплового шума (240).	
§ 5. Совместное действие сигнала и шума на линейную систему. Фильтрация	241
Отношение сигнал/шум в переходном режиме (244). Оптимальный линейный фильтр; обнаружение сигналов конечной длительности (245). Выделение сигнала из шума; уравнение Визера—Хопфа (248). Оптимальные фильтры и корреляторы (252).	
Глава 4. Случайные волны в линейных средах	255
§ 1. Введение. Корреляционные функции и спектры	255
§ 2. Пространственная и временная когерентность. Методы измерения. Фурье-спектроскопия	259
Измерение пространственной когерентности; поперечные корреляционные функции; интерферометр Юнга (260). Измерение временной когерентности; интерферометр Майкельсона (263). Схемы интерферометров; деление амплитуды и деление волнового фронта (264). Поляризационный интерферометр (264). Фурье-спектроскопия (266). Поперечная корреляционная функция и угловой спектр частично когерентного ограниченного светового пучка (268).	
§ 3. Метод медленно меняющихся амплитуд в теории распространения волн. Укороченные уравнения	271
Плоские шумовые волны; первое и второе приближения теории дисперсии (273). Волновые пучки; учет дифракции; однородные и неоднородные среды (277). Общее уравнение для случайных волн (278). Пространственно-временная аналогия (279).	
§ 4. Плоские шумовые волны в диспергирующей среде	280
Влияние дисперсии на продольную корреляцию (281). О прямых измерениях групповой скорости (284).	

§ 5. Дифракция случайных волн	286
Дифракционное изменение радиуса корреляции при распространении волны; теорема Ван Циттерта—Цернике (287). Дифракция некогерентной волны на отверстии; звездный интерферометр Майкельсона (290). Дифракция некогерентной волны на решетке (293). Влияние некогерентности волны на пространственную когерентность (294). Дифракция частично когерентной волны на одном и двух отверстиях (297). Дифракция в фокусе линзы (302). Распространение случайных волн в оптических волокнах (308).	
§ 6. Дифракция случайных волн на трехмерных структурах. Динамическое рассеяние частично когерентного рентгеновского излучения в совершенных кристаллах	312
§ 7. Дифракция регулярной волны на случайном экране	320
Случайный фазовый экран (320). Дифрагированное поле во френгоферовой зоне; решение по методу Рэлея (324).	
§ 8. Рассеяние света в статистически неоднородных средах	326
Рэлеевское рассеяние; интенсивность и корреляционная функция рассеянного света (327). Рассеяние света полидисперсными средами; нахождение распределения частиц по размерам (331).	
§ 9. Тепловое излучение	335
Закон Кирхгофа (336). Тепловое излучение абсолютно черного тела (338). Когерентные свойства излучения абсолютно черного тела (340).	
Глава 5. Нелинейные преобразования шума	344
§ 1. Нелинейное безынерционное преобразование	346
Нелинейные характеристики (346). Умножение частоты (347). К. п. д. при гармоническом и шумовом возбуждении (348). Статистический выигрыш (348). Корреляционные функции и спектры на выходе умножителя частоты (350). Преобразование амплитудных и фазовых флуктуаций (356). Преобразование распределения вероятностей (357). Оптический пример безынерционного нелинейного преобразования: нерезонансная многофотонная ионизация атома (357).	
§ 2. Амплитудное детектирование шума	362
Квадратичный детектор (362). Корреляционная функция и спектр на выходе детектора (363). Роль инерционности детектора (365).	
§ 3. Измерение слабых шумов	368
Принцип действия радиометра (368). Компенсационный радиометр (369). Модуляционный радиометр (371). Чувствительность радиометра (373).	
§ 4. Нелинейные преобразования оптического шума	374
Гетеродинирование света; использование в спектроскопии сверхвысокого разрешения (374). Прямое фотодетектирование; влияние пространственной некогерентности сигнала на процесс детектирования (377). Интерферометрия интенсивности; эксперимент Брауна—Твисса (380). Интерферометрия интенсивности в лазерной оптике—регистрация сверхкоротких световых импульсов (383). Измерение высших корреляционных функций (391).	
§ 5. Двухуровневая среда в сильном шумовом поле—пример инерционного нелинейного преобразования в оптике	392
Одnofотонный и многофотонный резонансы (392). Уравнения двухуровневой среды (393). Монохроматическое поле (394). Нутовая (394). Действие на среду узкополосного оптического шума (адиабатическое приближение) (395). Учет инерционности среды для двух моделей оптического шума с конечной шириной спектральной линии (оптический белый шум, поле с диффузией фазы) (398). Шумовые нутовые (402). Резонансная генерация гармоник (403). Стационарная генерация гармоник; динамический выигрыш (403). Генерация гармоник; области статистического выигрыша (409). Оптимальная ширина спектра излучения при генерации гармоник (410). Корреляция флуктуаций в двухуровневой системе; о методах «шумовой» спектроскопии (412).	
Глава 6. Статистические явления в параметрических системах	416
§ 1. Параметрическое усиление и преобразование частоты	416

§ 2. Преобразование сигнала и шума в параметрических усилителях колебаний	419
Одноконтурный параметрический усилитель (419). Двухконтурный параметрический усилитель (422). Статистика амплитуды и фазы на выходе параметрических усилителей (425).	
§ 3. Шумовая накачка в параметрических системах	427
Квазигармоническая накачка (428). Накачка с диффундирующей фазой (431). Широкополосная накачка (432). Низкочастотная шумовая накачка (433). Стохастическая нестабильность и стохастическая стабилизация (433). Простые оценки порога неустойчивости при шумовой накачке (434).	
§ 4. Эффекты насыщения	436
Двухконтурный параметрический генератор (436). Амплитудные уравнения (436). Монохроматическая накачка (437). Шумовая накачка—метод уравнений Дайсона (437). Нелинейный эффект образования провала в спектре накачки (439). Установление колебаний в параметрическом генераторе (441).	
§ 5. Параметрическое усиление волн	441
Механизм параметрического взаимодействия волн (441). Амплитудные уравнения (442). Приближенное заданного поля накачки (444). Вырожденный параметрический усилитель; преобразование статистики амплитуды и фазы (446). Резонансная кривая параметрического усилителя (447).	
§ 6. Параметрическое усиление волн при некогерентной накачке	450
Вырожденный параметрический усилитель с шумовой накачкой, модулированной по амплитуде (450). Вырожденный параметрический усилитель с шумовой накачкой, модулированной по фазе (454). Точное решение амплитудных уравнений при равенстве групповых скоростей накачки и одной из волн (457). Независимость усиления от ширины спектра накачки (460). Эффект повторения спектра и модуляции накачки (460). Взаимодействие встречных волн (461). Фоккер-планковское приближение в теории волновых процессов (462). Уравнения для средних амплитуд и средних интенсивностей (464). Корреляционные функции и спектры (465). Некогерентные многофотонные параметрические процессы (466).	
§ 7. Параметрические генераторы света	467
Взаимодействие волн в резонаторе (467). Преобразование уравнений (467). Двухрезонаторный параметрический генератор света (ПГС) с некогерентной накачкой (468). Нестационарная теория генерации—учет формы импульса многомодовой накачки (473). Одномодовая накачка, согласованная с резонатором (477). Естественная ширина спектральной линии генерации ПГС (481).	
Глава 7. Флуктуации в генераторах радио- и оптического диапазонов	484
§ 1. Введение. Флуктуации амплитуды и фазы автоколебаний. Форма и ширина спектральной линии	484
§ 2. Естественные флуктуации амплитуды и фазы в томсоновском генераторе в режиме развитой генерации	488
Укороченные стохастические уравнения (489). Законы распределения и моменты амплитуды (494). Спектр флуктуаций амплитуды (496). Флуктуации фазы (497). Спектральная плотность частотных флуктуаций (499). Спектр колебания; естественная ширина спектральной линии (499). О корреляции флуктуаций амплитуды и фазы (501). Стационарные колебания вблизи порога самовозбуждения; анализ методом статистической линеаризации (502).	
§ 3. Установление колебаний в генераторе. Нестационарная статистика устанавливающихся колебаний	505
Статистические характеристики амплитуды в отсутствие флуктуационной силы (506). Влияние флуктуационной силы на статистические характеристики амплитуды (510).	
§ 4. О флуктуациях в генераторе с несколькими устойчивыми состояниями. Одноконтурный параметрический генератор. Вероятность возбуждения устойчивых состояний; квантование фазы (512). Флуктуационные переходы из одного устойчивого состояния в другое (514).	511

§ 5.	Временная статистика колебаний одномодового лазера	518
	Спектр случайного источника; укороченные уравнения (520). Естественная ширина линии (523). Статистика фотоотчетов; стационарный режим (524). Статистика фотоотчетов; режим установления колебаний (526).	
§ 6.	Временная статистика излучения многомодового лазера	529
	Временная статистика многомодового излучения с несинхронизованными модами (530). Синхронизованные моды; корреляционные методы определения формы светового импульса (531).	
§ 7.	Пространственная когерентность излучения лазера	533
	Многомодовые лазерные пучки; статистически независимые моды (535). Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера (538).	
§ 8.	Самовозбуждение автоколебательных систем и фазовые переходы	540
	Генерация лазера в терминах теории фазовых переходов; термодинамический потенциал, параметр порядка, критические индексы (542). Пространственная статистика в пороговой области; формирование пространственной когерентности лазерных пучков (545).	
§ 9.	Флуктуации поляризации лазерного излучения. Деполаризация, обусловленная спонтанными переходами	546
Глава 8.	Случайные волны в нелинейной оптике и нелинейной акустике	550
§ 1.	Приближенные уравнения нелинейной оптики. Классификация нелинейных эффектов	551
§ 2.	Преобразование шума в лазерном усилителе	558
	Временная статистика — пространственный аналог задачи о флуктуационном установлении колебаний (559). Пространственная статистика; обобщение теоремы Ван Циттерта — Цернике на усиливающие среды (560). Сужение спектральной линии усиливаемого шума (561).	
§ 3.	Взаимодействие случайных волн в диспергирующей среде. Генерация второй оптической гармоники излучением с неполной временной и пространственной когерентностью	562
	Квазистатистический режим (564). Нестационарный режим генерации; когерентные и некогерентные взаимодействия (569). Некогерентный режим удвоения частоты; уравнения для средних (571). Законы распределения; статистика фотоотчетов (575). Пространственная статистика гармоники; генерация анизотропных оптических полей (577). Дифракционные эффекты и эффекты дисперсионного распыливания (579).	
§ 4.	Вынужденное комбинационное рассеяние в поле шумовой накачки	580
	Основные уравнения и параметры (582). Монохроматическая накачка (585). Немонохроматическая накачка; влияние молекулярной релаксации на вынужденное рассеяние (589). Насыщение ВКР при широкополосной накачке (многомодовая модель) (593). Одновременное проявление молекулярной релаксации и дисперсии среды (595). Уравнения для средних (фоккер-планковское приближение) (596). Общая теория ВКР широкополосной накачки в диспергирующей среде (600).	
§ 5.	Самовоздействие случайных волн. Самофокусировка и самомодуляция частично когерентных волн	606
	Физика самофокусировки регулярных и случайно модулированных пучков; основные параметры (608). Поперечная корреляционная функция самофокусирующихся случайных пучков (610). Неустойчивость плоской волны в фокусирующей среде; рассмотрение методом теории возмущений (613). Самомодуляция плоских шумовых волн (615).	
§ 6.	Статистика акустических волн в нелинейной среде	616
	Случайные простые волны; усреднение риманова решения (619). Функция распределения шумовых волн (626).	
Литература	631	

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс статистической радиофизики в последние годы стал одним из основных в цикле университетских курсов для радиофизических специальностей.

Хотя строгая регламентация этого предмета затруднительна, здесь можно выделить два подхода. Под статистической радиофизикой в узком смысле (статистической радиотехникой) понимают круг вопросов, связанных с флуктуациями и шумами в радиоустройствах и статистическими проблемами передачи и приема информации. Имеется много прекрасных руководств, где дано современное изложение этих вопросов.

В более широком смысле под статистической радиофизикой понимают круг задач, связанных с изучением статистических явлений в колебательных и волновых процессах, причем речь не обязательно идет об электромагнитных колебаниях и волнах.

Читаемый авторами в течение последних пятнадцати лет на физическом факультете Московского университета курс тяготеет скорее к статистической радиофизике в широком смысле.

Такая ориентация представляется совершенно естественной именно сейчас, когда после создания лазеров и быстрого прогресса физики нелинейных волновых процессов облик радиофизики существенно изменился. Прежде всего существенно возрос удельный вес волновых задач; это в первую очередь связано с тем, что практически все устройства лазерной техники являются волновыми системами. Такие разделы линейной и нелинейной статистической оптики, как интерференция и дифракция частично когерентного света, оптическая фильтрация, статистические явления в оптических преобразователях частоты и т. п., имеют для современной радиофизики не меньшее значение, чем традиционные задачи о фильтрации и преобразовании случайных сигналов в линейных и нелинейных системах с сосредоточенными параметрами.

Обращение к новым принципам генерации, усиления и преобразования колебаний привело также и к резкому росту

значения чисто физических задач в современной радиофизике. Достаточно сказать, что сейчас в радиофизике двухуровневая квантовая система заняла такое же важное место, как и классический колебательный контур. В теоретической радиофизике все шире используются методы квантовой теории поля, физической кинетики и т. п.

В предлагаемой книге сделана попытка отразить эти новые тенденции; в частности, мы старались в гораздо большей мере, чем это делалось раньше, учесть интересы радиофизиков, специализирующихся в области лазерной физики и техники. Необходимость ограничиться при этом более или менее стандартным объемом однотомного руководства поставила ряд трудных проблем, связанных с отбором материала.

Мы отчетливо понимаем, что в ряде пунктов наши решения окажутся спорными; естественно, что в определенной мере здесь проявилось и влияние собственных научных интересов авторов.

Положение в значительной мере облегчается, однако, двумя обстоятельствами. Имеющаяся в распоряжении нашего читателя учебная литература по статистической радиофизике весьма разнообразна и обширна; предлагаемый курс не претендует на универсальность, и в библиографии к его главам указаны руководства, в которых можно найти более детальные сведения по вопросам, входящим в традиционный курс статистической радиофизики. Такой подход к учебному пособию по спецкурсу, относящемуся к «горячему» разделу радиофизики, представляется нам наиболее разумным.

С другой стороны, сейчас система и содержание университетских курсов по математике, общей и теоретической физике таковы, что почва для изложения статистической радиофизики оказывается гораздо более подготовленной, чем несколько лет назад. Основы теории случайных функций излагаются в курсе математики; широко применяется этот аппарат в курсе статистической физики. В существенно модернизированном курсе «Физическая оптика», читаемом в рамках курса общей физики, дается достаточно детальное статистическое разъяснение понятий пространственной и временной когерентности. В современном курсе статистической физики все большее место занимают вопросы теории флуктуаций в классических и квантовых системах, теории излучения, физической кинетики.

Наконец, понятие об электрических шумах дается уже и в курсе общей радиофизики.

Главный акцент в предлагаемой книге сделан на рассмотрении случайных колебаний и случайных волн в линейных и нелинейных системах; подавляющее число рассматрива-

емых примеров связано с электромагнитными колебаниями и волнами.

В ряде случаев мы считали важным не ограничиваться схематическим описанием явления; поэтому в книге довольно много экспериментальных графиков и т. п.

Изложение теории случайных функций проведено на «физическом» уровне строгости и, учитывая сделанные выше замечания, довольно конспективно. Мы стремились изложить этот материал таким образом, чтобы, по возможности, облегчить читателю практическое его использование. Вместе с тем в книге значительное внимание уделено изложению теоретических методов, широко используемых в настоящее время, но недостаточно освещенных в учебной литературе, в особенности стохастических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных. Помочь читателю активно овладеть этими методами — одна из важных задач предлагаемого курса. Поэтому в книге детально рассматриваются модельные задачи; в ряде случаев одна и та же задача решается несколькими методами.

Мы надеемся, что детальное ознакомление с этими методами стимулирует читателя и к освоению более сложных стохастических методов (например, методов, основанных на функциональном подходе), интенсивно развиваемых в последние годы и не отраженных за недостатком места в этой книге.

При теоретическом исследовании случайных колебаний и волн в книге широко используется метод медленно меняющихся амплитуд; мы пользуемся им и в линейных задачах даже в тех случаях, когда возможно получение точных результатов. Такое описание имеет, на наш взгляд, серьезные педагогические преимущества, позволяя дать единую картину статистики колебаний и волн. На этапе рассмотрения так называемых укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд удается выявить общность сильно различающихся на первый взгляд радиофизических явлений, проследить весьма наглядные пространственно-временные аналогии между колебательными и волновыми процессами.

Надо сказать, что разработка теории случайных волн в нелинейных средах — в основном дело последних 8—10 лет. Поэтому в разделах книги, относящихся к нелинейной оптике и акустике, особенно много ссылок на оригинальные работы, в том числе на работы, выполненные в Московском университете в Лаборатории нелинейной оптики им. Р. В. Хохлова.

Мы приносим искреннюю признательность нашим товарищам, совместные работы с которыми использованы в этой книге; мы особенно благодарны Г. А. Ляхову, написавшему

по нашей просьбе § 6 главы 4, В. Г. Тункину и О. В. Руденко за сотрудничество и помощь.

Мы считаем своим приятным долгом выразить признательность С. М. Рытову и участникам руководимого им семинара по статистической радиофизике; многолетнее участие в этом семинаре оказало значительное влияние на формирование наших взглядов на статистическую радиофизику и ее преподавание.

Мы приносим благодарность рецензентам Ю. А. Кравцову и А. Н. Малахову, внимательно прочитавшим рукопись и высказавшим ценные замечания, учтенные при окончательной редакции книги.

Мы признательны Н. А. Мамонтовой и С. Ю. Никитину за большой труд по подготовке рукописи к печати.

*С. А. Ахманов,
Ю. Е. Дьяков,
А. С. Чиркин*

Москва, апрель 1980 г.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ. СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ

Во многих практически важных ситуациях наиболее адекватным описанием колебательных и волновых процессов оказывается статистическое описание; так, в радиофизике и оптике, наряду с регулярными, появляются случайные колебания и волны. Статистика в радиофизику и оптику приходит потому, что многие источники радио- и световых колебаний представляют собой, по существу, генераторы шума. Хаотически изменяются параметры систем, свойства сред, в которых распространяются радио- и световые волны. Особое место в радиофизике и оптике занимают задачи, связанные с эффектами электромагнитных флуктуаций материальной среды. «Собственные» электромагнитные флуктуации ставят флуктуационный предел чувствительности приемников, точности измерений, оказываются причиной принципиальной невозможности генерирования строго монохроматических колебаний.

Статистика колебаний и волн в настоящее время представляет широкую и быстро развивающуюся область, включающую в себя как чисто физические проблемы, так и разнообразные прикладные вопросы. Исследования в этой области имеют долгую историю; в различные периоды удельный вес оптических и радиофизических задач здесь был существенно различен.

В конце XIX и в начале XX вв. главным «источником» колебательных и волновых статистических задач, несомненно, была оптика.

В ряду ранних работ по статистической оптике первыми должны быть, безусловно, названы работы по рассеянию света, связанные с именами Рэлея, а в более позднее время — Мандельштама и Бриллюэна; имеются в виду случайные волны, возникающие за счет хаотического изменения параметров среды. Надо сказать, что, несмотря на почти вековую историю, физика рассеяния волн в статистически неоднородной среде и по сей день остается, пожалуй, одним из наиболее бурно развивающихся разделов статистической радиофизики и оптики.

Другой круг статистических задач, сформулированных в оптике в 20-е годы этого столетия, стимулировал разработку теории когерентности оптических полей. То обстоятельство, что обычные тепловые и газоразрядные источники света являются, по существу, генераторами случайных полей, было понято достаточно давно — еще Рэлей в «Теории звука» рассмотрел классическую задачу о сло-

жении колебаний со случайными фазами. Выяснение особенностей протекания таких фундаментальных явлений, как интерференция и дифракция света в поле случайных волн, и является в основном предметом теории когерентности. Ряд фундаментальных результатов в этой области связан с именами Майкельсона, Верде, Лауэ, Цернике и др. (см. [1—4]) *).

В 30-е и особенно 40—50-е годы первенство в постановке и исследовании статистических задач, безусловно, должно быть отдано радиофизике. Разработка методов радиолокации, дальней радиосвязи, радионавигации остро поставила вопросы о шумах радиоприемных устройств, стабильности колебаний автогенераторов, о статистических явлениях при излучении и распространении радиоволн. Именно в эти годы было ясно понято, что фактически на всех основных этапах передачи информации с помощью радиоволн, локации, навигации — в процессах генерации, модуляции излучения, распространения и приема — статистические явления играют чрезвычайно существенную, а зачастую и решающую роль.

Одним из важнейших направлений стало исследование собственных электромагнитных флуктуаций в радиустройствах и поиск путей их уменьшения. Первые работы в этой области относятся еще к 1928—1930 гг., когда Найквист предложил формулу, описывающую спектральную плотность $G(\omega)$ собственных шумов сопротивления R , связанных с тепловым движением электронов: $G(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR$, которая затем была подтверждена экспериментально. В 20-е годы были установлены и закономерности дробового шума электронных ламп, обусловленного статистическим характером электронной эмиссии [6]. Возникающие в радиустройствах за счет теплового и дробового шума случайные э. д. с. невелики (речь идет о среднеквадратичных напряжениях 10^5 — 10^6 В); однако именно они, как выяснилось в дальнейшем, определяют предельные чувствительности приемных устройств. За счет внутренних шумов приемника отношение интенсивностей сигнала и шума на выходе приемника меньше, чем на входе: $(с/ш)_{\text{вых}} < (с/ш)_{\text{вх}}$; поискам путей уменьшения фактора $F = (с/ш)_{\text{вх}} / (с/ш)_{\text{вых}}$, который называют шум-фактором приемного устройства (для идеального, нешумящего приемника $F = 1$), были посвящены многочисленные исследования радиофизиков и радиоинженеров.

Радикальное решение проблемы удалось найти, обратившись к принципиально новым методам усиления радиоволн. Открытие Басовым и Прохоровым в СССР и Таунсом в США принципов усиления и генерации электромагнитных волн в квантовых системах позволило, в частности, создать так называемые квантовые пара-

*) Приводимый во Введении список литературы не претендует на полноту; ряд важных источников указан также в библиографии к отдельным главам.

магнитные усилители [7, 8], величина шум-фактора для которых сейчас составляет $F = 1,01 \div 1,1$ — в парамагнитном усилителе нет электронных ламп, а рабочая температура близка к температуре жидкого гелия. Возможность резкого снижения величины шум-фактора была главным стимулом и при разработке параметрических усилителей диапазона сверхвысоких частот [9], исследовании дробовых шумов в «длинных» электронных потоках ламп бегущей волны [6] и т. п.

В автоколебательных системах (автогенераторах) собственные электромагнитные флуктуации определяют минимальную (предельную) ширину спектральной линии. В установлении этого принципиального обстоятельства решающую роль сыграли выполненная в 1933 г. фундаментальная работа Понтрягина, Андропова и Витта [10], где впервые была решена задача о поведении динамической системы под воздействием случайных толчков, и последовавшие за ней работы Берштейна [11], в которых теоретически и экспериментально были исследованы флуктуации колебаний лампового генератора.

Освоение радиотехникой все более коротковолновых диапазонов поставило новые задачи и перед теорией электрических флуктуаций. Так, возник новый раздел теории тепловых флуктуаций, связанный с изучением флуктуаций в неквазистационарных системах, в резонаторах и волноводах диапазона сверхвысоких частот — см. работы Рытова и Левина [5, 12]. В этих работах была установлена ясная связь между тепловыми шумами в квазистационарных цепях и тепловым излучением в оптической области.

Постановка статистических задач в теории распространения радиоволн в первую очередь была связана с распространением радиоволн в турбулентной атмосфере. Существенно стимулировали эти исследования относящиеся к 1950—1955 гг. эксперименты по сверхдальному распространению ультракоротких волн; оказалось, что за пределами прямой видимости рассеянное атмосферными неоднородностями поле может намного превышать поле, связанное с дифракцией вокруг Земли [13, 14]. С тех пор теоретическая и экспериментальная активность в этой области неизменно возрастала; новый класс статистических задач возник здесь в последние годы в связи с изучением распространения лазерных пучков в турбулентной атмосфере.

Собственные шумы приемных устройств, флуктуации сигналов в процессе распространения, искусственные или естественные помехи, приходящие на вход приемника вместе с полезным сигналом, приводят к тому, что прием сигнала в реальных условиях становится принципиально статистической задачей. При наличии флуктуационных помех решение о наличии или отсутствии сигнала становится фактически статистическим решением; статистической оказывается и задача определения параметров сигнала.

Как оптимальным образом сформулировать процедуру обнаружения сигнала и уменьшить случайные ошибки при оценке его параметров?

Ответ на эти вопросы дает статистическая теория обнаружения сигналов, ряд фундаментальных положений которой был сформулирован в 40—50-е годы. Большую роль в ее формировании сыграли работы Котельникова [15]; в настоящее время детально разработанная теория обнаружения находит многочисленные применения в радиофизике и оптике (см. [16, 17, 30, 39] и библиографию к гл. 3, 5).

Большое разнообразие задач статистической радиофизики стимулировало разработку новых приемов экспериментального исследования статистики радиосигналов (см. библиографию к гл. 1, 3, 5), создание эффективных теоретических методов решения задач линейной и в особенности нелинейной статистической теории колебаний (см. [18—20] и библиографию к гл. 5, 7), статистической теории распространения волн (см. [13, 14] и библиографию к гл. 4, 6, 8). Все эти вопросы и составляют основу современной статистической радиофизики.

На фоне широкого размаха работ по статистической радиофизике достижения статистической оптики в 30—50-е годы выглядят скромнее. Следует подчеркнуть, однако, что и здесь был выполнен ряд важных работ.

В 1947 г. Гореликом был предложен [21], а в 1955 г. Форрестером и соавт. [22] осуществлен эксперимент по смещению световых волн на фотокатоде — так называемое «гетеродинирование» света. Фактически речь идет об эксперименте, в котором впервые наблюдалось нелинейное взаимодействие случайных световых полей.

Сильное влияние на развитие статистической оптики оказали опыты Брауна и Твисса, в которых для световых полей были измерены корреляционные функции интенсивности [23].

В работах, относящихся к 1961—1963 гг., были выполнены эксперименты по статистике фотоотчетов — были разработаны методы измерения одномерных законов распределения световых полей [24, 25]. Большое значение для статистической оптики имела разработка методов фурье-оптики — это позволило, в частности, установить тесные связи между задачами фильтрации и преобразования сигналов в радиофизике и оптике (см. [26] и библиографию к гл. 4).

Наконец, крупные результаты были получены и в общей статистической теории оптических полей; особое значение имели работы, относящиеся к квантовой ее формулировке — квантовой оптике [27]. Надо сказать, что многое здесь было сделано еще в 20-е годы; принципиальное значение имеют, в частности, ранние работы Шредингера, в которых были введены так называемые когерентные состояния. В работах же 1960—1965 гг. была разработана эффективная квантовоэлектродинамическая методика описания когерентности

оптических полей, что позволило придать квантовой оптике завершенность и выявить ее связь со статистической теорией, используя классическое описание поля.

Революция в оптике, связанная с созданием лазеров, коснулась всех ее разделов; в полной мере это относится и к статистической оптике. Создание лазеров повысило прежде всего интерес к изучению статистических явлений в источниках света. Теперь оптика получила в свое распоряжение широкий ассортимент источников с весьма разнообразными, в том числе негауссовскими, статистическими характеристиками.

Важной задачей современной статистической оптики является изучение флуктуационных явлений в лазерах различных типов и разработка методов уменьшения амплитудных и фазовых флуктуаций лазерного излучения. Существенно подчеркнуть, что сказанное относится не только к сравнительно маломощным лазерам непрерывного действия, но также и к мощным и, в особенности, сверхмощным импульсным лазерам [37].

Разумеется, проблемы, связанные с флуктуациями в лазерах, во многом аналогичны соответствующим проблемам, связанным с флуктуациями в автоколебательных системах радиодиапазона [28]; имеются, однако, и существенные особенности, обусловленные квантовым характером флуктуаций, распределенными взаимодействиями, многомодовостью и т. п. Новый класс статистических задач в этой области связан с изучением оптических генераторов со случайной обратной связью, генераторов, принцип действия которых ближе к принципу действия ядерного реактора, чем генератора радиодиапазона [29].

Работы по оптической связи и локации с помощью лазеров стимулировали детальные исследования чувствительности оптических приемников [30, 39] и исследования по распространению световых пучков в статистически неоднородных средах [31—33]. Интересные перспективы открылись и в изучении молекулярного рассеяния света; возможность выйти за пределы регистрации только спектров рассеянного излучения и использовать, в частности, статистику фотоотчетов позволяет получить новую информацию о рассеивающей среде и процессе рассеяния [2].

Новым разделом статистической оптики, возникновение которого целиком обязано лазерам, является статистическая нелинейная оптика [34—36, 52]. Можно указать по меньшей мере два круга статистических задач, являющихся предметом многочисленных теоретических и экспериментальных работ. Прежде всего это задачи, связанные со «статистикой излучения», т. е. с изучением влияния пространственной и временной когерентности излучения на протекание нелинейных оптических эффектов. Другой круг задач связан с изучением нелинейных эффектов в статистически неоднородных средах (нелинейное молекулярное рассеяние, генерация оптиче-

ских гармоник и параметрические явления в неоднородных кристаллах, нелинейная дифракция и т. п.) и с влиянием квантовых шумов на протекание нелинейных эффектов [52].

Таким образом, статистические методы, статистические задачи проникли буквально во все разделы физической и прикладной оптики — ситуация, во многом сходная с процессом, происходившим в радиофизике.

Заканчивая этот краткий вводный очерк, заметим, что с задачами, во многом сходными с задачами статистической радиофизики и оптики, приходится сталкиваться в гидродинамике, акустике и физике плазмы. Речь идет здесь о теории турбулентности (см. [40, 43]), физике линейных и нелинейных (см. [38]) случайных волн в акустике.

Многие важные вопросы нелинейного взаимодействия и самовоздействия случайных волн были разработаны в физике плазмы (см. [41, 42]).

Для статистической радиофизики, как и для физики в целом, чрезвычайно важна интенсивно исследуемая в самое последнее время в связи с изучением механизма турбулентности проблема возникновения статистики в нелинейных динамических системах [44].

О структуре и содержании книги. Предлагаемая книга посвящена в основном случайным колебаниям и случайным волнам в линейных и нелинейных системах, в том числе в системах с переменными и случайными параметрами. Радиофизические, колебательные и оптические волновые задачи в этой книге практически равноправны; такое распределение материала связано с тем, что сейчас лазерная физика и техника для радиофизики не менее важны, чем традиционные «чисто» радиофизические проблемы.

Материал настоящей книги во многом основывается на ряде других университетских курсов: теории вероятностей, статистической физики, теории колебаний, теории волн и квантовой радиофизики. В качестве пособия по теории вероятностей и случайных функций для радиофизиков мы рекомендуем [45]. Кроме основного курса Ландау и Лифшица [46], по статистической физике мы рекомендуем [47]. Читаемый в Московском университете курс теории колебаний базируется на книге [48], теории волн — на [49]. По квантовой радиофизике мы рекомендуем руководства [50, 51].

Мы не будем здесь характеризовать распределение материала книги по главам; читатель познакомится с этим по весьма подробному оглавлению. Разделение материала на основной шрифт и петит не следует рассматривать как классификацию по степени важности. В петит, кроме математических деталей, вынесены и современные задачи; их можно опустить при первом чтении, однако, как мы надеемся, они будут полезны для лиц, собирающихся активно работать в области статистической радиофизики и оптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рэлей (Стретт Дж. В.)*. Теория звука: Пер. с англ. / Под ред. С. М. Рытова. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.
2. *Кросиньяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М.* Статистические свойства рассеянного света: Пер. с англ. / Под ред. И. Л. Фабелинского. — М.: Наука, 1980.
3. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Под ред. С. М. Рытова. — М.: Наука, 1972.
4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1970.
5. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Изд. АН СССР, 1953.
6. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л. Смуллина и Г. Хауса: Пер. с англ. — М. — Л.: Энергия, 1964.
7. *Карлов Н. В., Маненков А. А.* Квантовые усилители / Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Изд. АН СССР, 1966.
8. *Сигмен А.* Мазеры: Пер. с англ. / Под ред. Т. А. Шмаонова. — М.: Мир, 1966.
9. *Блекуэлл Л. А., Коцебу К. Л.* Параметрические усилители на полупроводниковых диодах: Пер. с англ. / Под ред. А. Н. Выставкина. — М.: Мир, 1964.
10. *Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем. — ЖЭТФ, 1933, т. 3, с. 165.
11. *Берштейн И. Л.* Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. — ЖТФ, 1941, т. 11, с. 305.
12. *Рытов С. М., Левин М. Л.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
13. *Чернов Л. А.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: Изд. АН СССР, 1958.
14. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
15. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956.
16. *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. А.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960.
17. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963.
18. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
19. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
20. *Лившиц Н. А., Пугачев В. Н.* Вероятностный анализ систем автоматического регулирования. — М.: Сов. радио, 1963.
21. *Горелик Г. С.* О демодуляционном анализе света. — УФН, 1948, т. 34, с. 321.
22. *Forrester A. T., Gudmundsen R. A., Johnson P. O.* Photoelectric mixing of incoherent light. — Phys. Rev., 1955, v. 99, p. 1691.
23. *Brown R. H., Twiss R. Q.* Correlation between photons in two coherent beams of light. — Nature, 1956, v. 177, p. 27.
24. *Арекси Ф., Скалли М., Хакен Г. и др.* Квантовые флуктуации излучения лазера: Пер. с англ. / Под ред. А. П. Казанцева. — М.: Мир, 1974.
25. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов / Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ. / Под ред. Ф. В. Бункина. — М.: Мир, 1978.
26. *О'Нейл Э.* Введение в статистическую оптику: Пер. с англ. / Под ред. П. Ф. Паршина. — М.: Мир, 1966.

27. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1970.
28. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
29. Басов Н. Г., Летохов В. С. Оптические стандарты частоты, УФН, 1968, т. 98, с. 585.
30. Росс М. Лазерные приемники: Пер. с англ. / Под ред. А. В. Иевского. — М.: Мир, 1969.
31. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С. и др. Распространение лазерного излучения в случайно неоднородных средах. — УФН, 1974, т. 114, с. 415.
32. Зуев В. Е. Прозрачность атмосферы для видимых и инфракрасных лучей. — М.: Сов. радио, 1966.
33. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. И. и др. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
34. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд. АН СССР, 1964.
35. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: изд. МГУ, 1971.
36. Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1979.
37. Сверхкороткие световые импульсы / Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
38. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
39. Kingston R. H. Detection of Optical and Infrared Radiation. — Berlin — Heidelberg — N. Y.: Springer-Verlag, 1978.
40. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965, чч. 1, 2.
41. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. — В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1963, вып. 3; 1964, вып. 4; 1973, вып. 7.
42. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
43. Нелинейные системы гидродинамического типа / Под ред. А. М. Обухова. — М.: Наука, 1974.
44. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Манделъштам и современная теория колебаний и волн: К 100-летию со дня рождения Л. И. Манделъштама. — УФН, 1979, т. 128, с. 579.
45. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.
46. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976, ч. 1.
47. Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы: Пер. с англ. / Под ред. Д. Н. Зубарева. — М.: Мир, 1976.
48. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
49. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
50. Пантел Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники: Пер. с англ. / Под ред. Ю. А. Ильинского. — М.: Мир, 1972.
51. Ярис А. Квантовая электроника: Пер. с англ. / Под ред. Я. И. Ханнина. — М.: Сов. радио, 1980.
52. Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ

Математической основой статистической радиофизики и оптики является теория случайных функций.

Скалярная или векторная функция одной или нескольких независимых переменных называется случайной, если значения ее при произвольной последовательности выбора значений независимых переменных оказываются набором случайных величин.

Ниже, наряду с общим математическим понятием случайной функции, используются понятия: случайный (или стохастический) процесс (так называют случайные функции времени) и случайное поле (случайные функции точки в пространстве и, вообще говоря, времени).

Статистическая радиофизика занимается изучением стохастических явлений в колебательных и волновых процессах. В математическом плане дело сводится к решению линейных или нелинейных дифференциальных уравнений со случайными начальными (или краевыми) условиями, случайными параметрами (коэффициентами), случайными внешними силами — так называемых стохастических дифференциальных уравнений. К счастью, во многих случаях перечисленные источники стохастичности можно рассматривать по отдельности. Таким образом, возникают три класса математических задач:

- задачи со случайными начальными (или граничными) условиями;
- задачи со случайно изменяющимися параметрами;
- задачи со случайными внешними силами

Решение стохастических дифференциальных уравнений — это нахождение средних и корреляционных функций для неизвестного случайного процесса или поля. Указанные величины относительно просто определить, если решение уравнения известно.

Чрезвычайно примечательным оказывается, однако, то обстоятельство, что в аналитическом решении стохастических дифференциальных уравнений часто удается продвинуться гораздо дальше, чем в решении их динамических аналогов. С помощью так называемых стохастических методов вычислить средние удается и в том случае, когда сами решения неизвестны!

§ 1. Случайные процессы

Детерминированное и статистическое описание реальных процессов. Рассматривая какой-либо физический процесс, мы стремимся описать этот процесс математически. Математическое описание может быть детерминированным или статистическим (вероятностным).

При детерминированном описании предполагается, по существу, что имеются все данные, чтобы точно предсказать временной ход процесса x , т. е. решение задачи ищется в виде некоторой конкретной математической функции

$$x = f(t). \quad (1.1.1)$$

В основе детерминированного описания фактически лежит предположение, что при повторном воспроизведении процесса мы опять получили бы зависимость величины x от времени вида (1) *).

Примером процесса, детерминированное описание которого невозможно, является броуновское движение. Измеряя траекторию частицы вдоль оси x , мы получим некоторую кривую $x_{(1)}(t)$. Если повторить наблюдение, поместив частицу в исходную точку, то траектория $x_{(2)}(t)$ будет совершенно иной. Разброс траекторий связан с хаотическим тепловым движением очень большого числа молекул, и его непредсказуемый характер является очевидным.

В этом и других аналогичных случаях, когда процесс x является случайным, вместо детерминированного описания (1) используется статистическое описание. Величина $x(t)$ в момент t характеризуется при этом функцией распределения вероятностей $w(x, t)$, которая определяет относительную вероятность различных значений x в этот момент времени. Вероятность для x принять значение, лежащее в некотором интервале, запишется через $w(x, t)$ как

$$P(x_1 \leq x \leq x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t) dx. \quad (1.1.2)$$

Функции распределения вероятностей вводятся для вещественных случайных функций x , т. е. с вероятностью, равной единице, $-\infty < x < \infty$. Поэтому согласно (2) функция $w(x, t)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1. \quad (1.1.2a)$$

*) В книге принята тройная нумерация формул: глава, параграф, формула. При ссылках внутри данного параграфа указывается только номер формулы.

В радиофизике и оптике очень часто рассматриваются и комплексные случайные процессы вида

$$z(t) = x(t) + iy(t); \quad (1.1.3)$$

вероятностные свойства z определяются совместным распределением вещественной и мнимой компонент $w(x, y, t)$.

Реализации случайного процесса; статистический ансамбль. Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, предположим, что одновременно и при идентичных условиях наблюдается движение большого числа N броуновских частиц. В результате мы будем

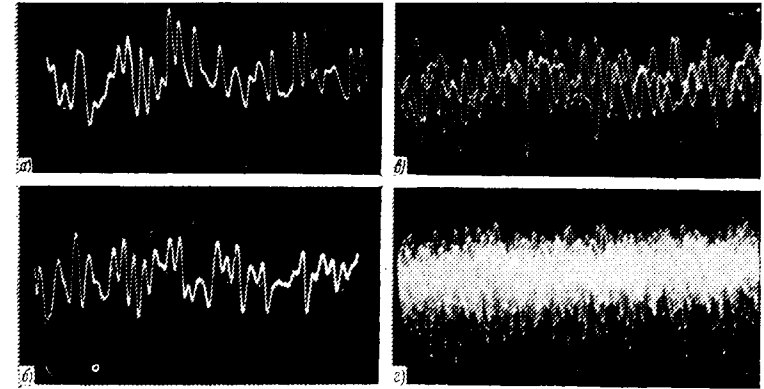


Рис. 1.1. Осциллограммы шума, спектр которого лежит в полосе частот от 100 Гц до 20 кГц:

а), б) одна реализация; в) наложение трех реализаций; г) наложение около 100 реализаций; время развертки 0,5 мс.

иметь N различных кривых $x_{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, \dots, N$), которые называются реализациями случайного процесса $x(t)$. Совокупность всех возможных реализаций называют статистическим ансамблем или набором реализаций (см. рис. 1.1, где отдельные реализации и набор многих реализаций приведены для радиофизического случайного процесса — электрического шума на сопротивлении).

Располагая достаточно обширной совокупностью реализаций, можно оценить вероятность (2) как

$$P_1 = P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x, t) \approx N_1/N, \quad (1.1.4)$$

где N_1 — число реализаций, значения которых в момент t оказались лежащими в интервале $x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x$. Статистическое описание возможно лишь при условии, что отношение N_1/N устойчиво, т. е. при $N \rightarrow \infty$ оно стремится к определенному пределу, равному P_1 .

При достаточно малом Δx соотношение (4) позволяет произвести переход к плотности распределения вероятностей. Учитывая (2), можно написать

$$\omega(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x} \frac{N_1(t)}{N(t)}. \quad (1.1.5)$$

Функцию $\omega(x, t)$ можно определить из массового опыта, пользуясь формулами (4), (5)*. Во многих случаях в этом довольно громоздком методе нет нужды, так как функцию $\omega(x, t)$ удастся найти теоретическим путем на основании модельных представлений о случайном процессе.

Функцию $\omega(x, t)$ называют также одномерным распределением вероятностей.

Статистическое усреднение. Используя распределения вероятностей, можно вычислить различные статистические средние, т. е. средние по ансамблю реализаций. Например, среднее значение случайного процесса $x(t)$, равное

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^N x_{(m)}(t)}{N}, \quad (1.1.6)$$

находится как

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega(x, t) dx. \quad (1.1.7)$$

Действительно, группируя реализации $x_{(m)}(t)$ в (6) по интервалам $x_n \leq x \leq x_n + \Delta x$, получим

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum x_n N_n}{N},$$

где N_n — число реализаций в n -м интервале. Умножив и разделив на Δx и учитывая (5), найдем

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \frac{x_n}{\Delta x} \frac{N_n}{N} \Delta x \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n x_n \omega(x_n, t) \Delta x,$$

и в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ получим для $\langle x \rangle$ выражение (7). Кроме угловых скобок, статистическое усреднение далее обозначается также чертой сверху:

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x}.$$

В зависимости от удобства записи формул в этой книге используются оба символа статистического усреднения.

* См. также § 4, где для так называемых стационарных процессов указан метод отыскания распределений по одной реализации.

Среднее \bar{x} имеет смысл регулярной, т. е. вполне предсказуемой, характеристики случайного процесса, который часто бывает удобно записывать в виде суммы регулярной составляющей $\bar{x}(t)$ и флуктуационной компоненты (или просто флуктуации) $\tilde{x}(t)$:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t). \quad (1.1.8)$$

Из (8) непосредственно следует, что среднее значение флуктуации равно нулю: $\langle \tilde{x}(t) \rangle = 0$.

Согласно (8) различные реализации случайного процесса различаются лишь флуктуациями, регулярные же компоненты для всех реализаций совпадают:

$$x_{(m)}(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}_{(m)}(t). \quad (1.1.9)$$

Эту запись можно еще несколько уточнить, выделив постоянную и переменную составляющие флуктуации:

$$\tilde{x}_{(m)}(t) = \xi_{0(m)} + \xi_{(m)}(t). \quad (1.1.10)$$

Здесь $\xi_{0(m)}$ — постоянный параметр, случайным образом меняющийся от реализации к реализации и равный в среднем нулю.

В соответствии с (9) и (10) вместо (8) можно написать

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi_0 + \xi(t). \quad (1.1.11)$$

Среднее значение какой-либо функции $F(x)$ случайного процесса определяется, аналогично (7), как

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t) F(x) dx. \quad (1.1.12)$$

Статистические средние случайного процесса в общем случае зависят от времени t . В дальнейшем эта зависимость выделяется в формулах лишь в тех случаях, когда она имеет существенное значение для рассматриваемой задачи.

Пользуясь (12), можно записать выражения для различных средних: моментов

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \omega(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.1.13)$$

центральных моментов

$$\mu_n = \langle (x - \bar{x})^n \rangle = \langle \tilde{x}^n \rangle, \quad (1.1.14)$$

характеристической функции

$$\theta(u) = \langle e^{iux} \rangle. \quad (1.1.15)$$

Последнюю можно также интерпретировать как фурье-образ распределения вероятностей:

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \omega(x) dx. \quad (1.1.16)$$

Соответственно, зная характеристическую функцию, можно найти распределение вероятностей, выполнив обратное преобразование Фурье:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) e^{-iux} du. \quad (1.1.17)$$

В отличие от распределения вероятностей $\omega(x)$, характеристическая функция, вообще говоря, комплексна. Она также ограничена по модулю:

$$|\theta(u)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) |e^{iux}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1.$$

Среднее значение (12) произвольной функции $F(x)$ можно выразить через $\theta(u)$ и фурье-образ функции $F(x)$, а именно:

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \varphi(u) du, \quad (1.1.18)$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-iux} dx. \quad (1.1.19)$$

Как видно из определения (12) оператора статистического усреднения, этот оператор — линейный, коммутирующий с произвольным линейным оператором \hat{L} , не зависящим от x , т. е.

$$\langle \hat{L}F \rangle = \hat{L} \langle F \rangle.$$

В частности, среднее значение интеграла равно интегралу от среднего значения, а среднее производной — производной от среднего.

Разложение в ряд по моментам. Характеристическая функция $\theta(u)$, распределение вероятностей $\omega(x)$ и статистическое среднее общего вида (12) могут быть представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяются моментами (13).

Разлагая экспоненту в ряд по x , из (15) непосредственно находим

$$\theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n. \quad (1.1.20)$$

Отсюда видно, что моменты могут быть найдены дифференцированием характеристической функции:

$$m_n = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{du} \right)^n \theta(u) \Big|_{u=0}. \quad (1.1.21)$$

Подставив разложение (20) в выражение (17) для функции распределения вероятностей, получим

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x), \quad (1.1.22)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Соотношение (22) можно доказать, интегрируя по частям выражение для δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du.$$

Таким образом, представление $\omega(x)$ в виде ряда по моментам будет иметь вид

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m_n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x). \quad (1.1.23)$$

Подставляя (23) в (12) и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x') \left(\frac{d}{dx'} \right)^n \delta(x' - x) dx' = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n F(x), \quad (1.1.24)$$

находим также

$$\langle F(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n F(x) \Big|_{x=0}. \quad (1.1.25)$$

Последнее соотношение представляет собой просто результат усреднения ряда Тейлора для функции $F(x)$. При $F(x) = e^{iux}$ (25) переходит в (20).

Неравенство Чебышева. Момент второго порядка $m_2 = \bar{x}^2$ определяет среднюю интенсивность случайного процесса. Особую роль при статистических оценках играет центральный момент второго порядка, или дисперсия (см. (14)),

$$\sigma^2 = \mu_2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \omega(x) dx. \quad (1.1.26)$$

Этот параметр характеризует среднюю интенсивность флуктуаций. Под среднеквадратичным отклонением случайной величины (от среднего) понимают корень квадратный из дисперсии, т. е. величину σ .

Нетрудно получить неравенство, связывающее величину σ с вероятностью того, что флуктуация \bar{x} будет больше, чем $n\sigma$ (n — некоторое положительное число). Подынтегральное выражение в (26) неотрицательно, и можно написать

$$\sigma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}-n\sigma}^{\bar{x}+n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 w(x) dx \geq \\ \geq \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 w(x) dx.$$

В последних интегралах $(x - \bar{x})^2 \geq n^2\sigma^2$, и, следовательно,

$$\sigma^2 \geq n^2\sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) w(x) dx. \quad (1.1.27)$$

Но согласно (2)

$$\left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) w(x) dx = P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma). \quad (1.1.28)$$

Подставив (28) в (27), получим искомое неравенство в виде

$$P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma) = P(|\bar{x}| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2} \quad (1.1.29)$$

или

$$P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.1.30)$$

Более точная оценка для вероятности отклонения от среднего может быть получена, если известен центральный момент более высокого порядка. Выкладки, аналогичные приведенным выше, приводят к следующему результату:

$$P(|x - \bar{x}| \geq n \sqrt{\frac{2m}{\mu_{2m}}}) \leq \frac{1}{n^{2m}}. \quad (1.1.31)$$

При $m=1$ (31) совпадает с (30).

Кумулянты. Используя разложение логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

и полагая $1+x = \theta(u)$, получим

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\theta-1)^n}{n}.$$

Подставив сюда из (20)

$$\theta - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n$$

и собирая в показателе экспоненты члены одного порядка по u , получим для характеристической функции следующее выражение:

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.32)$$

или

$$\ln \theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n. \quad (1.1.33)$$

Коэффициенты k_n называются кумулянтами. Между моментами и кумулянтами имеется однозначная связь, причем k_n выражается через моменты до n -го порядка включительно [2—4]. Например,

$$\begin{aligned} k_1 = m_1, \quad k_2 = \mu_2 = \sigma^2, \quad k_3 = \mu_3, \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \\ k_5 = \mu_5 - 10\mu_2\mu_3, \quad k_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 - 30\mu_2^3. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Если ввести безразмерные нормированные кумулянты

$$\kappa_n = k_n / \sigma^n, \quad (1.1.35)$$

то (33) примет вид

$$\ln \theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^n \kappa_n}{n!}.$$

С помощью конечного числа моментов нельзя получить удобную аппроксимацию для распределения вероятностей: согласно (23) функция $w(x)$ определяется при этом как сумма δ -функций и ее производных. Напротив, конечное число кумулянтов определяет $w(x)$ без каких-либо подобных особенностей. Например, зная первые два момента m_1 и m_2 , предполагая, что остальные моменты равны нулю, и используя (23), мы получим для распределения вероятностей выражение

$$w(x) = \delta(x) - m_1 \delta'(x) + \frac{1}{2} m_2 \delta''(x).$$

Если же предположить, что отличны от нуля только два первых кумулянта, $k_1 = m_1$ и $k_2 = \sigma^2$, то согласно (32) характеристическая функция будет

$$\theta(u) = \exp \left(ium_1 - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \right). \quad (1.1.36)$$

Подставив (36) в (17), получим

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (1.1.37)$$

Распределение (37) имеет вид плавной колоколообразной кривой с максимумом в точке $x = m_1$. Это распределение называется гауссовским или нормальным.

Интересно, что случаи (36) исчерпываются все возможности представления $\theta(u)$ с помощью конечного числа кумулянтов: согласно теореме, доказанной Марцинкевичем [9], преобразуя по Фурье функцию

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^N \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.38)$$

мы можем получить неотрицательное распределение $w(x) \geq 0$ лишь при $N = 1, 2$ или $N = \infty$ (подробнее см. [6], с. 90).

Старшие кумулянты κ_n ($n = 3, 4, \dots$) дают количественную оценку отклонения произвольной функции распределения от симметричной гауссовской кривой (37); величину

$$\kappa_3 = \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

называют коэффициентом асимметрии, а

$$\kappa_4 = \frac{k_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

— коэффициентом эксцесса. При $\kappa_4 > 0$ распределение $w(x)$ в окрестности $x = \bar{x}$ является более острым и узким, а при $\kappa_4 < 0$, наоборот, более плоским, чем гауссовское. Интересно ([6], с. 41), что величины κ_3 и κ_4 не вполне независимы, так как должно выполняться неравенство $\kappa_4 - \kappa_3^2 + 2 \geq 0$ и, в частности, $\kappa_4 \geq -2$. Аналогичные соотношения могут быть получены и для других кумулянтов.

§ 2. Многомерные статистические характеристики

Многомерные распределения вероятностей. Для описания совокупности нескольких случайных величин x, y, z (в частности, для выяснения связи между этими величинами) кроме одномерных распределений

$$w(x), \quad w(y), \quad w(z), \quad \dots \quad (1.2.1)$$

нужно знать также двумерные распределения вероятностей

$$w(x, y), \quad w(x, z), \quad w(y, z), \quad \dots, \quad (1.2.2)$$

трехмерные

$$w(x, y, z), \quad \dots \quad (1.2.3)$$

и т. д. Многомерные распределения удовлетворяют условиям нормировки, аналогичным (1.1.2а), например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dx dy dz = 1. \quad (1.2.4)$$

Кроме того, должны выполняться условия соответствия типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy = w(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(x, z) dx = w(z), \quad (1.2.5)$$

т. е., проинтегрировав многомерное распределение по одной или нескольким случайным переменным, мы должны получить распределение вероятностей для остальных случайных переменных.

Если x, y, z являются случайными процессами:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то время t войдет, вообще говоря, в распределения (1) — (3) как параметр. Если значения случайных переменных относятся к разным моментам времени:

$$x = x(t_1), \quad y = y(t_2), \quad \dots, \quad (1.2.6)$$

то в многомерные распределения может войти зависимость от всех этих моментов, например:

$$w(x, y) = w(x, y; t_1, t_2). \quad (1.2.7)$$

Очень часто нас интересует связь между значениями одного и того же процесса в разные моменты времени:

$$x = x(t_1) = x_1, \quad y = x(t_2) = x_2, \quad z = x(t_3) = x_3.$$

Статистическая связь этих величин описывается многомерными распределениями вида

$$w(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad w(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3), \quad (1.2.8)$$

причем

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, t_1) \delta(x_2 - x_1).$$

Предположим, что между величинами x и y имеется функциональная связь:

$$y = F(x), \quad x = \varphi(y),$$

и распределение вероятностей $w_1(x)$ известно; найдем распределение $w_2(y)$. Если в интеграле

$$P = \int_{x_1}^{x_2} w_1(x) dx \quad (x_2 > x_1) \quad (1.2.9)$$

перейти к новой переменной интегрирования $y = F(x)$, то мы получим

$$P = \int_{y_1}^{y_2} w_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| dy \quad (y_2 > y_1). \quad (1.2.10)$$

Отсюда следует, что

$$w_2(y) = w_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|. \quad (1.2.11)$$

Эта формула справедлива, если зависимость x от y является однозначной. Если $\varphi(y)$ многозначна и имеет несколько ветвей $\varphi_n(y)$, то

$$w_2(y) = \sum_n w_1(x = \varphi_n(y)) \left| \frac{d\varphi_n(y)}{dy} \right|. \quad (1.2.12)$$

Особым является случай, когда кривая $y = F(x)$ содержит отрезки, параллельные оси x :

$$y = y_k, \quad a_k \leq x \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Вероятность для y принять значение y_k в этом случае конечна и равна вероятности пребывания x в интервале (a_k, b_k) , т. е.

$$P(y = y_k) = \int_{a_k}^{b_k} w_1(x) dx.$$

Плотность вероятности выразится через δ -функции; к общему выражению (12) в этом случае следует добавить сумму вида

$$\sum_k \delta(y - y_k) \int_{a_k}^{b_k} w_1(x) dx. \quad (1.2.13)$$

Полученные соотношения можно обобщить на случай двух и более случайных переменных. Например, если

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2), & y_2 &= F_2(x_1, x_2), \\ x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2), & x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2), \end{aligned}$$

то вместо (11) будем иметь

$$w_2(y_1, y_2) = w_1(x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|, \quad (1.2.14)$$

где $\partial(\varphi_1, \varphi_2)/\partial(y_1, y_2)$ — якобиан преобразования от старых случайных переменных к новым.

Многомерные моменты, кумулянты, характеристические функции. Рассмотрим совокупность нескольких случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (1.2.15)$$

которая полностью описывается многомерным распределением вероятностей

$$w(x_1, \dots, x_n). \quad (1.2.16)$$

Как и в одномерном случае, можно определить характеристическую функцию совокупности:

$$\begin{aligned} \theta(u_1, \dots, u_n) &= \langle e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Распределение вероятностей связано с θ обратным многомерным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} w(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u_1, \dots, u_n) \times \\ &\times e^{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Из (17) вытекает разложение характеристической функции по многомерным моментам

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \langle x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \rangle, \quad (1.2.19)$$

а именно:

$$\begin{aligned} \theta(u_1, \dots, u_n) &= 1 + \frac{i}{1!} \sum_{p=1}^n u_p \langle x_p \rangle + \frac{i^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q \langle x_p x_q \rangle + \\ &+ \frac{i^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^n u_p u_q u_r \langle x_p x_q x_r \rangle + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \langle S^p \rangle, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

где $S = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$.

Выражение (1.1.32) следующим образом обобщается на многомерный случай:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ \frac{i}{1!} \sum_{p=1}^n u_p K_p + \frac{i^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q K_{pq} + \dots \right\}. \quad (1.2.21)$$

Здесь K_p — многомерные кумулянты:

$$\begin{aligned} K_p &= \bar{x}_p, & K_{12} &= B_{12}, & K_{123} &= B_{123}, \\ K_{1234} &= B_{1234} - B_{12}B_{34} - B_{13}B_{24} - B_{14}B_{23}, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

и

$$B_{p \dots s} = \langle (x_p - \bar{x}_p) \dots (x_s - \bar{x}_s) \rangle \quad (1.2.23)$$

— многомерные центральные моменты.

При $p = q = \dots = s$ функции $B_{p \dots s}$ и $K_{p \dots s}$ совпадают с введенными ранее одномерными центральными моментами и кумулянтами

случайной величины x_p :

$$B_{\underbrace{p \dots p}_{n \text{ раз}}} = \mu_n = \langle (x_p - \bar{x}_p)^n \rangle, \quad K_{\underbrace{p \dots p}_{n \text{ раз}}} = k_n$$

(см. (1.1.14) и (1.1.34)).

Условные распределения вероятностей; статистическая независимость. Рассмотрим две случайные величины x и y . Будем говорить о событии A , если $a \leq x \leq a + \Delta x$, и о событии B , если $b \leq y \leq b + \Delta y$. Пусть при N испытаниях событие A произошло N_A раз, событие B — N_B раз, а в N_{AB} случаях из N имели место сразу оба события A и B . Тогда при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ можно написать выражения для вероятностей:

$$P(A) = N_A/N, \quad P(B) = N_B/N, \quad P(A, B) = N_{AB}/N;$$

последнее выражение определяет вероятность совместной реализации событий A и B .

Отношение N_{AB}/N_A также можно трактовать как вероятность, а именно как условную вероятность осуществления события B при условии, что событие A обязательно имеет место:

$$N_{AB}/N_A = P(B|A).$$

Аналогичную условную вероятность можно написать и для A :

$$N_{AB}/N_B = P(A|B).$$

Поскольку

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то между условными и обычными (или безусловными) вероятностями имеет место следующее соотношение:

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \quad (1.2.23a)$$

Если перейти к плотностям распределения вероятностей, то получим

$$w(x, y) = w(x|y)w(y) = w(y|x)w(x). \quad (1.2.24)$$

Таким образом, совместное распределение двух случайных величин (т. е. двумерное распределение) может быть найдено, если известно одномерное распределение для одной из этих величин и соответствующее условное распределение.

Следует иметь в виду, что, например, в условном распределении $w(x|y)$ величина y играет роль параметра и нормировка для $w(x|y)$ имеет обычный вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx = 1,$$

Фиксируя то или иное значение y , мы получим, вообще говоря, различные распределения вероятностей для x :

$$w(x|y_1) \neq w(x|y_2) \neq w(x),$$

что и отражает статистическую связь, существующую между x и y .

Если значение одной из случайных величин никак не влияет на распределение вероятностей для другой, то эти величины называют статистически независимыми. В этом случае

$$w(x|y) = w(x), \quad w(y|x) = w(y). \quad (1.2.25)$$

Подставив (25) в (24), получим

$$w(x, y) = w(x)w(y). \quad (1.2.26)$$

Вообще, если имеется n независимых случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (1.2.27)$$

то многомерное распределение равно произведению одномерных:

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1) \dots w(x_n). \quad (1.2.28)$$

Подставив (28) в (17), получим, что многомерная характеристическая функция совокупности (27) независимых случайных величин равна произведению одномерных характеристических функций:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \theta(u_1) \dots \theta(u_n). \quad (1.2.29)$$

Распределение суммы независимых случайных величин; центральная предельная теорема. Применим полученные результаты к анализу статистических свойств суммы

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1.2.30)$$

независимых случайных величин с различными распределениями вероятностей $w_\alpha(x_\alpha)$ и характеристическими функциями $\theta_\alpha(u_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Последние можно записать через кумулянты (см. (1.1.32)):

$$\theta_\alpha(u_\alpha) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu_\alpha)^m}{m!} k_{\alpha, m}. \quad (1.2.31)$$

Характеристическую функцию для y получим, полагая в (17) $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$. Учитывая также (29) и (31), имеем

$$\theta(u) = \langle \exp \{iu(x_1 + \dots + x_n)\} \rangle = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} k_m, \quad (1.2.32)$$

где

$$k_m = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha, m}. \quad (1.2.33)$$

Формула (33) выражает свойство аддитивности кумулянтов: кумулянт суммы (независимых случайных величин) равен сумме кумулянтов (одинакового порядка). Заметим, что моменты суммы независимых случайных величин свойством аддитивности отнюдь не обладают (исключение составляют моменты первого и центральные моменты второго и третьего порядка, совпадающие по величине с кумулянтами, — см. (1.1.34)). Действительно, например, для независимых ξ_1 и ξ_2

$$\overline{(\xi_1 + \xi_2)^4} = \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4} + 6\overline{\xi_1^3\xi_2} \neq \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4}.$$

Пронормируем кумулянты на дисперсию (см. (1.1.35)):

$$k_{\alpha, m} = \sigma_{\alpha}^m \kappa_{\alpha, m}; \quad (1.2.34)$$

(31) теперь можно переписать как

$$\theta_{\alpha}(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma_{\alpha})^m}{m!} \kappa_{\alpha, m}. \quad (1.2.35)$$

Такие же коэффициенты можно ввести и для кумулянтов суммы:

$$k_m = \sigma^m \kappa_m, \quad \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^2. \quad (1.2.36)$$

В результате характеристическая функция (32) примет вид

$$\theta(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^m}{m!} \kappa_m. \quad (1.2.37)$$

Из (33), (34) и (36) следует, что

$$\kappa_m = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^m \kappa_{\alpha, m}}{\left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^2 \right)^{m/2}}. \quad (1.2.38)$$

С ростом n числитель в (38) растет $\sim n$, а знаменатель $\sim n^{m/2}$, т. е.

$$\kappa_m \sim \frac{1}{n^{m/2-1}} \quad (n \gg 1).$$

Таким образом, при увеличении числа слагаемых в сумме (30) относительная роль кумулянтов старших порядков ($m \geq 3$) падает. В предельном случае $n \rightarrow \infty$ остаются лишь кумулянты первого и второго порядков, а выражение (32) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \langle \exp(iu(x_1 + \dots + x_n)) \rangle = \\ &= \exp\left(iuk_1 - \frac{1}{2}u^2k_2\right) = \exp\left(iug - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right), \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

так как (см. (33))

$$k_1 = \sum_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} = \bar{y}, \quad k_2 = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 = \bar{y}^2 - \bar{y}^2 = \sigma^2.$$

Характеристической функции (39) соответствует гауссовское распределение вероятностей (см. (1.1.37)).

Мы приходим, таким образом, к выводу, что сумма большого числа статистически независимых слагаемых, каждое из которых имеет произвольное распределение вероятностей, распределена по нормальному, или гауссовскому, закону (1.1.37). Это утверждение носит название центральной предельной теоремы (ЦПТ). ЦПТ имеет фундаментальное значение для физики; в силу ЦПТ подавляющее большинство реальных случайных процессов оказывается гауссовским.

Многомерное нормальное распределение. Разделим сумму (30) на две части:

$$y = y_1 + y_2,$$

$$y_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} x_{\alpha}, \quad y_2 = \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} x_{\alpha} \quad (a_{\alpha} + b_{\alpha} = 1).$$

Случайные величины y_1 и y_2 , вообще говоря, статистически зависимы. Каждая из них является суммой независимых случайных величин и, следовательно, в пределе $n \rightarrow \infty$ является нормальной (т. е. имеет гауссовское распределение вероятностей), как и $y = y_1 + y_2$. Отсюда видно, что сумма не только двух, но и произвольного числа нормальных случайных величин (зависимых или независимых, безразлично)

$$S = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m \quad (1.2.40)$$

(c_i — неслучайные коэффициенты) также нормальна, и согласно (39)

$$\langle e^{iS} \rangle = \exp\{i\bar{S} - (\bar{S}^2 - \bar{S}^2)/2\}. \quad (1.2.41)$$

Полагая в (40) $c_i = u_i$ и используя (41), находим многомерную характеристическую функцию для совокупности нормальных случайных величин u_1, \dots, u_m :

$$\begin{aligned} \theta(u_1, \dots, u_m) &= \langle \exp\{i(u_1 y_1 + \dots + u_m y_m)\} \rangle = \\ &= \exp\left\{i \sum_{p=1}^m u_p \bar{y}_p - \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^m u_p u_q B_{pq}\right\}, \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

где

$$B_{pq} = \langle (y_p - \bar{y}_p)(y_q - \bar{y}_q) \rangle \quad (1.2.43)$$

— двумерный центральный момент, или функция корреляции флуктуаций гауссовских случайных величин y_p и y_q .

Подставив (42) в (18) и выполнив интегрирование, найдем многомерное гауссовское распределение:

$$w(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} D^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^m A_{pq} (y_p - \bar{y}_p)(y_q - \bar{y}_q)\right], \quad (1.2.44)$$

где D — детерминант корреляционной матрицы B_{pq} , A_{pq} — элементы матрицы, обратной корреляционной. В частном случае $m=1$ выражение (44) переходит в (1.1.37).

Из сравнения (42) и (21) следует, что для совокупности гауссовских случайных величин многомерные кумулянты выше второго порядка равны нулю (как и одномерные). Согласно (22) отсюда вытекает простое правило вычисления многомерных центральных моментов: при гауссовском распределении (44) все моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка — сумме всех возможных комбинаций из моментов второго порядка. Например,

$$B_{1234} = B_{12}B_{34} + B_{13}B_{24} + B_{14}B_{23}, \quad (1.2.45)$$

$$B_{123456} = B_{12}(B_{34}B_{56} + B_{35}B_{46} + B_{36}B_{54}) + B_{13}(B_{24}B_{56} + B_{25}B_{46} + B_{26}B_{54}) + \\ + B_{14}(B_{32}B_{56} + B_{35}B_{26} + B_{36}B_{52}) + B_{15}(B_{34}B_{26} + B_{32}B_{46} + B_{36}B_{52}) + \\ + B_{16}(B_{34}B_{52} + B_{32}B_{54} + B_{35}B_{42}). \quad (1.2.46)$$

Число слагаемых в выражении для центрального момента $2n$ -го порядка равно $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

Стационарные и нестационарные случайные процессы. Пользуясь многомерными распределениями, можно определить и исчерпывающий способ задания случайного процесса $x(t)$. Случайный процесс задан, если для любого числа n произвольно выбранных моментов времени известна n -мерная функция распределения

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (1.2.47)$$

С помощью указанной функции можно определить и вероятность того, что реализация процесса достаточно близка к заданной траектории:

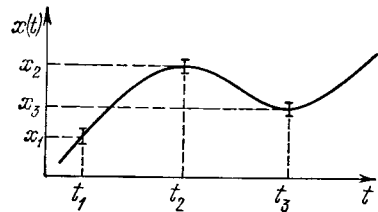


Рис. 1.2. Предполагаемая форма реализации и оценка ее вероятностей с помощью n -мерного распределения случайного процесса.

Вероятность последовательного попадания в три заданных интервала определяется трехмерным распределением $\omega(x_1, x_2, x_3)$.

$$dP = \omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.2.48)$$

Формулу (48) можно рассматривать как «статистический аналог» записи (1.1.1) регулярной функции времени. Для случайного процесса (случайной функции) реализации испытывают флуктуационный разброс, однако, зная $\omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, можно рассчитать вероятность осуществления данной реализации (рис. 1.2).

Обобщая (5), можно записать, очевидно,

$$\omega(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = \\ = \int \omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n \quad (m < n) \quad (1.2.49)$$

— младшие функции распределения могут быть определены из старших. Таким образом, старшие функции распределения содержат в себе всю информацию о процессе, заключенную в распределениях более низкого порядка, плюс некоторая дополнительная информация. К счастью, для большинства практически важных задач ценность этой дополнительной информации быстро уменьшается с ростом n ; поэтому ниже мы не будем, как правило, иметь дело с $n \geq 5$, а в очень многих случаях вообще будем ограничиваться рассмотрением только одномерных и двумерных функций распределения. Выбор необходимого описания существенно зависит от типа случайного процесса, т. е. фактически от условий в физической системе, в которой рассматриваемый случайный процесс возникает. Далее особое значение будут иметь так называемые стационарные случайные процессы, для которых статистика определяется только разностью времен $t_i - t_j$ и не зависит от начала отсчета времени t_0 . Стационарным случайным процессом являются флуктуации некоторой физической величины, возникающие в системе, находящейся в равновесных условиях.

Сформулируем теперь и математическое определение стационарного процесса. Стационарным случайным процессом называется процесс, произвольная n -мерная функция распределения которого не изменяется при одновременном сдвиге всех точек t_1, \dots, t_n на оси времени на одну и ту же величину, иначе говоря — функция распределения не меняется со временем:

$$\omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \omega(x_1, \dots, x_n; t_1 + t, \dots, t_n + t). \quad (1.2.50)$$

В соответствии с (50) одномерное распределение вероятностей стационарного процесса не зависит от времени вообще:

$$\omega(x, t) = \omega(x), \quad (1.2.51)$$

а двумерное — зависит только от интервала $\tau = t_1 - t_2$:

$$\omega[x(t), x(t+\tau); t, t+\tau] = \omega[x, x, \tau], \quad (1.2.51a)$$

где $x_\tau = x(t+\tau)$. Процессы, для которых выполняются соотношения (51) и (51a), иногда называют стационарными в широком смысле.

В статистической радиофизике и оптике стационарные процессы занимают особенно важное место; условия их реализации осуществляются во многих экспериментальных ситуациях. Вместе с тем подчеркнем, что и нестационарные процессы, для которых (50) несправедливо, также играют важную роль: например, все переходные процессы, протекающие в присутствии флуктуаций, оказываются фактически нестационарными случайными процессами.

Радиофизический пример: обнаружение сигнала на фоне шума; статистические ошибки. В этой главе мы ограничимся лишь немногими примерами практического использования одномерных и многомерных законов распределения. Следующий ниже простой пример позволяет сформулировать некоторые важные понятия статистической теории обнаружения сигналов на фоне шумов.

Если отношение сигнал/шум невелико (интенсивность сигнала порядка или меньше интенсивности шума), то в распоряжении наблюдателя имеется фактически реализация некоторого случайного процесса $x(t)$, представляющего собой либо а) шум, либо б) смесь сигнала $S(t)$ и шума. Вынесение решения о наличии или отсутствии сигнала представляет собой в этом случае, очевидно, статистическую задачу (на основании измерения наблюдатель должен выбрать одну из гипотез (а) или (б)), а само решение неизбежно будет связано с ошибками. Рассмотрим одну из простейших задач обнаружения. Вероятность случая (а) обозначим через q . Число q можно интерпретировать как априорную, т. е. известную заранее, вероятность отсутствия сигнала. Соответственно априорная вероятность наличия сигнала, или вероятность случая (б), равна $p = 1 - q$.

Задача обнаружения ставится так: сделано измерение процесса x , и получено, что $x(t_1) = x_1$. Требуется сказать, с какой из гипотез, (а) или (б), лучше согласуется этот результат измерения.

Распределение вероятностей для x в случае, например, гауссовской помехи имеет вид:

(а) только шум

$$\omega_{\text{ш}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right];$$

(б) сигнал + шум

$$\omega_{\text{с+ш}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - S_1)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (S_1 = S(t_1)). \quad (1.2.52)$$

Вывод о наличии или отсутствии сигнала в момент времени t_1 можно сделать просто исходя из того, какое из распределений (52) дает для x_1 большую вероятность, т. е. при $\omega_{\text{ш}}(x_1) > \omega_{\text{с+ш}}(x_1)$ считать, что сигнала нет, а при $\omega_{\text{ш}}(x_1) < \omega_{\text{с+ш}}(x_1)$ — сигнал обнаружен. Процедура обнаружения сводится здесь к тому, что x_1 сравнивается с некоторым порогом обнаружения x_n , величина которого находится из уравнения

$$\omega_{\text{ш}}(x_n) = \omega_{\text{с+ш}}(x_n). \quad (1.2.53)$$

Подставив (52) в (53), получим

$$x_n = S_1/2. \quad (1.2.54)$$

Порог (54) оказался, однако, не зависящим от p или q , и это позволяет предположить, что он выбран не лучшим образом, так как не использована вся априорная информация о сигнале.

Рассмотрим теперь более оптимальный выбор порога, который приводил бы к наименьшей вероятности ошибок (критерий идеального наблюдателя). Таких ошибок может быть две. Первая состоит в том, что $x_1 > x_n$ и мы делаем вывод о наличии сигнала, хотя на самом деле сигнала нет (ложная тревога).

Условная вероятность такой ошибки будет

$$P_1(x_1 > x_n | S=0) = \int_{x_n}^{\infty} \omega_{\text{ш}}(x) dx,$$

а полная вероятность согласно (23а) равна

$$P_1 = q \int_{x_n}^{\infty} \omega_{\text{ш}}(x) dx. \quad (1.2.55)$$

Другая ошибка возникает, если сигнал есть, но $x_1 < x_n$ и мы делаем вывод об его отсутствии (пропуск сигнала). Аналогично (55) находим, что эта ошибка имеет вероятность

$$P_2 = p \int_{-\infty}^{x_n} \omega_{\text{с+ш}}(x) dx.$$

Суммарная вероятность ошибки будет, следовательно,

$$P = P_1 + P_2 = q \int_{x_n}^{\infty} \omega_{\text{ш}}(x) dx + p \int_{-\infty}^{x_n} \omega_{\text{с+ш}}(x) dx. \quad (1.2.56)$$

Приравняв нулю производную $\partial P / \partial x_n$, получим, что вероятность ошибки (56) будет наименьшей, если величина x_n определяется соотношением

$$q\omega_{\text{ш}}(x_n) = p\omega_{\text{с+ш}}(x_n), \quad (1.2.57)$$

которое совпадает с (53) лишь в частном случае $p = q = 1/2$. Подстановка (52) в (57) дает

$$x_n = \frac{S_1}{2} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{S_1^2} \ln \frac{p}{q}\right). \quad (1.2.58)$$

Согласно (58) критерий обнаружения сигнала $x_1 > x_n$ можно представить в форме

$$x_1 S_1 > \frac{S_1^2}{2} - \sigma^2 \ln \frac{p}{q}. \quad (1.2.59)$$

Разумеется, процедура вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала по результатам одного измерения весьма груба. Точность можно повысить, переходя к серии измерений, проводимых в нескольких точках временной шкалы t_i ; для выбора оптимальной процедуры обнаружения в этом случае следует, очевидно, воспользоваться многомерными распределениями

$$\omega(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n).$$

Обратимся для простоты к случаю независимых измерений, когда многомерные распределения, в силу (28), можно заменить произведениями одномерных. Считая случайные величины $x_i = x(t_i)$ статистически независимыми (физически это условие означает, что интервал времени между последовательными замерами намного превосходит так называемое время корреляции, см. § 3

этой главы), вместо (57) и (59) получим, соответственно,

$$q \prod_i \omega_{ш}(x_n) = p \prod_i \omega_{с+ш}(x_n), \quad (1.2.60)$$

$$\sum_i x_i S_i > \frac{1}{2} \sum S_i^2 - \sigma^2 \ln \frac{p}{q} = U_0.$$

Схемная реализация условия обнаружения (60) показана на рис. 1.3 (так называемый корреляционный приемник). Порог U_0 с увеличением числа замеров стремится к некоторому постоянному значению, равному средней интенсивности сигнала $1/2 \sum_i S_i^2$, уменьшенной на величину $\sigma^2 \ln(p/q)$.

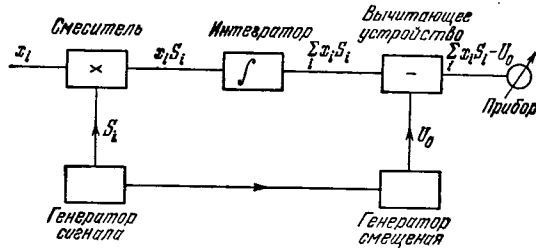


Рис. 1.3. Схема корреляционного приемника.

Рассмотренная задача является одним из простейших примеров статистической процедуры обнаружения сигналов. В настоящее время статистическая теория обнаружения сигналов представляет собой хорошо разработанную дисциплину; мы отсылаем интересующегося читателя к многочисленным руководствам в этой области — см., например, [2, 4, 5]; см. также § 5 гл. 3.

§ 3. Корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов

Корреляционная функция и коэффициент корреляции. Статистическую связь между случайными величинами y_p и y_q характеризует корреляционная матрица (1.2.43):

$$B_{pq} = \overline{y_p y_q} - \bar{y}_p \bar{y}_q. \quad (1.3.1)$$

Значения B_{pq} полностью определяют, как мы видели, многомерное распределение вероятностей для нормальных случайных величин (1.2.44). Нормируя B_{pq} , получим матрицу коэффициентов корреляции

$$R_{pq} = \frac{B_{pq}}{\sigma_p \sigma_q} = \frac{\overline{y_p y_q} - \bar{y}_p \bar{y}_q}{\sqrt{(\overline{y_p^2} - \bar{y}_p^2)(\overline{y_q^2} - \bar{y}_q^2)}}, \quad (1.3.2)$$

которая может служить мерой статистической зависимости, существующей между y_p и y_q .

Как следует из (2), коэффициент корреляции ограничен по абсолютной величине:

$$-1 \leq R_{pq} \leq +1, \quad (1.3.3)$$

причем $R_{pq} = 0$ для статистически независимых y_p и y_q . Согласно (3) B_{pq} также может иметь как положительные, так и отрицательные значения:

$$-\sigma_{y_p} \sigma_{y_q} \leq B_{pq} \leq \sigma_{y_p} \sigma_{y_q}. \quad (1.3.4)$$

Если y_p и y_q — значения одного и того же случайного процесса в разные моменты времени:

$$y_p = x(t), \quad y_q = x(t + \tau) = x_\tau,$$

то элементы B_{pq} корреляционной матрицы являются частными значениями корреляционной функции

$$B(t, \tau) = \overline{x x_\tau} - \bar{x} \bar{x}_\tau, \quad (1.3.5)$$

а именно:

$$B_{pq} = B(t = t_p, \tau = t_p - t_q).$$

Аналогично, элементы матрицы R_{pq} выражаются через коэффициент корреляции

$$R(t, \tau) = B(t, \tau) / \sigma \sigma_\tau. \quad (1.3.6)$$

Если процесс $x(t)$ стационарен, то в (5) и (6) остается лишь зависимость от τ :

$$B(\tau) = \overline{x x_\tau} - \bar{x}^2 = \sigma^2 R(\tau), \quad R(\tau) = (\overline{x x_\tau} - \bar{x}^2) / \sigma^2, \quad (1.3.7)$$

причем $B(\tau)$ и $R(\tau)$ — четные функции τ :

$$B(-\tau) = B(\tau), \quad R(-\tau) = R(\tau),$$

так как согласно (1) $B_{pq} = B_{qp}$.

Максимальное значение функции корреляции соответствует $\tau = 0$:

$$B(\tau)_{\max} = B(0) = \sigma^2.$$

При увеличении τ статистическая зависимость между x и x_τ становится все более слабой, $\overline{x x_\tau} \rightarrow \bar{x} \bar{x}_\tau = \bar{x}^2$, так что

$$B(\infty) = 0, \quad R(\infty) = 0.$$

Уменьшение функции $B(\tau)$ с ростом τ может быть монотонным или иметь осциллирующий характер (это зависит от вида частотного спектра случайного процесса, см. далее рис. 1.4). Аналогичным образом меняется и коэффициент корреляции.

Характерный интервал времени, на котором происходит заметный спад (в несколько раз) функций корреляции, называется временем корреляции τ_k .

Статистическую связь между значениями случайной функции в различные моменты времени характеризует и корреляционная функция

$$\psi(t, \tau) = \overline{x x_\tau} = B(t, \tau) + \bar{x} \bar{x}_\tau. \quad (1.3.8)$$

Однако, в дальнейшем мы обычно будем пользоваться корреляционной функцией $B(t, \tau)$. Кроме парных корреляционных функций случайного процесса $B(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$, можно ввести в рассмотрение тройные $\langle x(t) x(t + \tau_1) x(t + \tau_2) \rangle$, четверные и т. п. корреляционные функции; они дают все более детальную информацию о случайном процессе.

В радиофизике и особенно в оптике большое значение имеют корреляционные функции высших порядков, записываемые для различных степеней рассматриваемого случайного процесса $\langle x^n(t) x^n(t + \tau) \rangle$, и, в частности, корреляционная функция интенсивности

$$\langle II_\tau \rangle = \langle x^2 x_\tau^2 \rangle. \quad (1.3.9)$$

Если случайный процесс нормальный, то корреляционные функции высших порядков всегда можно выразить через $B(\tau)$.

Используя (1.2.45), нетрудно убедиться, что

$$\langle II_\tau \rangle = \sigma^2 \sigma_\tau^2 + 2B^2(t, \tau) + \bar{x}^2 \bar{x}_\tau^2 + \bar{x}_\tau^2 \sigma^2 + \bar{x}^2 \sigma_\tau^2 + 4\bar{x} \bar{x}_\tau B(t, \tau). \quad (1.3.10)$$

Для гауссовского стационарного процесса x с нулевым средним это выражение упрощается:

$$\langle II_\tau \rangle = \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)]. \quad (1.3.11)$$

Спектральное представление случайного процесса; спектральные амплитуды и спектральная плотность; связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией. Для статистической радиофизики и оптики особое значение имеют спектральные представления случайных процессов. Речь идет об обобщении спектральных представлений, развитых в теории регулярных сигналов и полей (и их прохождения через линейные системы), на случайные сигналы и поля.

Запишем флуктуационную компоненту стационарного случайного процесса

$$\xi = x(t) - \bar{x} \quad (1.3.12)$$

в виде интеграла Фурье *):

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.3.13)$$

*) Мы не касаемся здесь математических вопросов существования и сходимости, связанных с записью (13). Читатель, интересующийся этим аспектом, может обратиться к руководствам [1, 2].

Спектральные амплитуды ξ_ω будут по-разному зависеть от ω в различных реализациях случайного процесса, т. е. ξ_ω — случайные функции ω . В соответствии с (13) для вещественных функций времени $\xi(t)$ спектральные амплитуды комплексны, причем

$$\xi_{-\omega} = \xi_\omega^*.$$

Введем понятие спектральной плотности *) случайного процесса $G(\omega)$, описывающей распределение средней интенсивности процесса по частотам:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (1.3.14)$$

Сама по себе формула (14) не определяет вид функции $G(\omega)$, для однозначного ее нахождения нужны дополнительные данные (см. далее (18)).

Замечательным свойством стационарных случайных процессов является то обстоятельство, что спектральная плотность $G(\omega)$ оказывается фурье-трансформантой другой фундаментальной статистической характеристики процесса — его корреляционной функции (теорема Винера — Хинчина). Чтобы убедиться в этом, запишем выражение для корреляционной функции $B(\tau)$, пользуясь (13). Имеем

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \xi_\omega \xi_{\omega'} \rangle e^{i\omega t + i\omega'(t+\tau)}. \quad (1.3.15)$$

Зависимость от t в (15) для стационарного процесса должна отсутствовать; это возможно лишь при условии, что спектральные амплитуды ξ_ω δ -коррелированы, т. е.

$$\langle \xi_\omega \xi_{\omega'} \rangle = A(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (1.3.16)$$

Подставляя (16) в (15), нетрудно убедиться, что $A(\omega) \equiv G(\omega)$ (поскольку $B(0) = \langle \xi^2 \rangle$), а для $G(\omega)$ и $B(\tau)$ мы получаем пару преобразований Фурье:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad (1.3.17)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (1.3.18)$$

*) Если величина $|\xi^2|$ имеет энергетический смысл (x представляет собой случайный ток, случайное напряжение или случайную напряженность поля), $G(\omega)$ можно назвать также «спектром мощности» процесса, «энергетическим спектром». Мы будем пользоваться термином «спектральная плотность» или просто «спектр» случайного процесса.

Пользуясь (18) и учитывая четность корреляционной функции $B(\tau)$, нетрудно убедиться, что $G(\omega)$ также является четной функцией:

$$G(-\omega) = G(\omega). \quad (1.3.19)$$

Функция $G(\omega)$ связана с измеряемым экспериментально энергетическим спектром $G^+(\omega)$ (спектром, взятым по положительным частотам) соотношением:

$$G^+(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (1.3.19a)$$

Вследствие четности функций $B(\tau)$ и $G(\omega)$ соотношения (17) и (18) могут быть переписаны в виде

$$B(\tau) = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^{\infty} G^+(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.3.20)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.3.21)$$

Формулы вида (17) можно записать, очевидно, и для полной корреляционной функции $\psi(\tau)$. Фурье-преобразование от $\psi(\tau)$ будет содержать при этом как спектр флуктуационной компоненты, так и спектр среднего значения; в соответствии с (8) и (18)

$$G_{\psi}(\omega) = G(\omega) + |\bar{x}|^2 \delta(\omega).$$

Таким образом, в полном спектре $G_{\psi}(\omega)$, в отличие от спектра флуктуаций $G(\omega)$, имеется дискретная линия при $\omega = 0$; так на спектральном языке представляется среднее значение — регулярная постоянная составляющая процесса.

Соотношения (17), (18) (или (20), (21)) будут играть исключительно важную роль во всех последующих разделах этой книги. Здесь же мы ограничимся кратким обсуждением некоторых общих следствий этих соотношений и рассмотрением ряда конкретных примеров наиболее часто встречающихся случайных процессов. Если ширину спектра случайного процесса $G(\omega)$ обозначить через $\Delta\omega$, то в силу общих свойств преобразования Фурье

$$\Delta\omega = \text{const}/\tau_k \quad (1.3.22)$$

(величина постоянной в (22) зависит от конкретного определения $\Delta\omega$ и τ_k , а также от формы спектра) Таким образом, время корреляции τ_k , характеризующее временной интервал, на котором

«распадается» статистическая связь *) между значениями случайного процесса, характеризует «скорость» изменения случайной функции и распределение энергии процесса по спектру (ср. со спектральной теорией регулярных процессов, где соотношение типа (22) связывает характерную длительность процесса и ширину амплитудного спектра). Чтобы уточнить (22), приведем некоторые определения для величин $\Delta\omega$ и τ_k .

Часто пользуются понятием так называемой эффективной шумовой ширины спектра, определяемой как

$$\Delta\omega' = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega / G_{\max} = \sigma^2 / 2G_{\max}, \quad (1.3.23)$$

которая соответствует аппроксимации спектра $G(\omega)$ в области $\omega > 0$ эквивалентным прямоугольником. Возможны и другие оценки ширины спектра, например:

$$\Delta\omega'' = \frac{\left(\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \right)^2}{\int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega} = \frac{\sigma^4}{4 \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega}. \quad (1.3.24)$$

Выражения (23) и (24) удобны в том отношении, что $\Delta\omega'$ и $\Delta\omega''$ можно выразить через корреляционную функцию. Если спектр интенсивности случайного процесса расположен в области низких частот и $G_{\max} = G(0)$, то, введя время корреляции

$$\tau_k' = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad (1.3.25)$$

будем иметь

$$\Delta\omega' \tau_k' = 2\pi. \quad (1.3.26)$$

В этом нетрудно убедиться, если использовать (17) и (18). В общем случае произвольного спектра, определяя время корреляции как

$$\tau_k'' = 2 \int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau, \quad (1.3.27)$$

получим также

$$\Delta\omega'' \tau_k'' = 2\pi. \quad (1.3.28)$$

Примеры спектров и корреляционных функций. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся аппроксимации спектров и соответствующие им корреляционные функции (рис. 1.4).

*) Точнее — корреляционная связь; можно построить (правда, довольно экзотические) примеры, когда значения $x(t)$ и $x(t+\tau)$ некоррелированы, но зависимы (см. [6]).

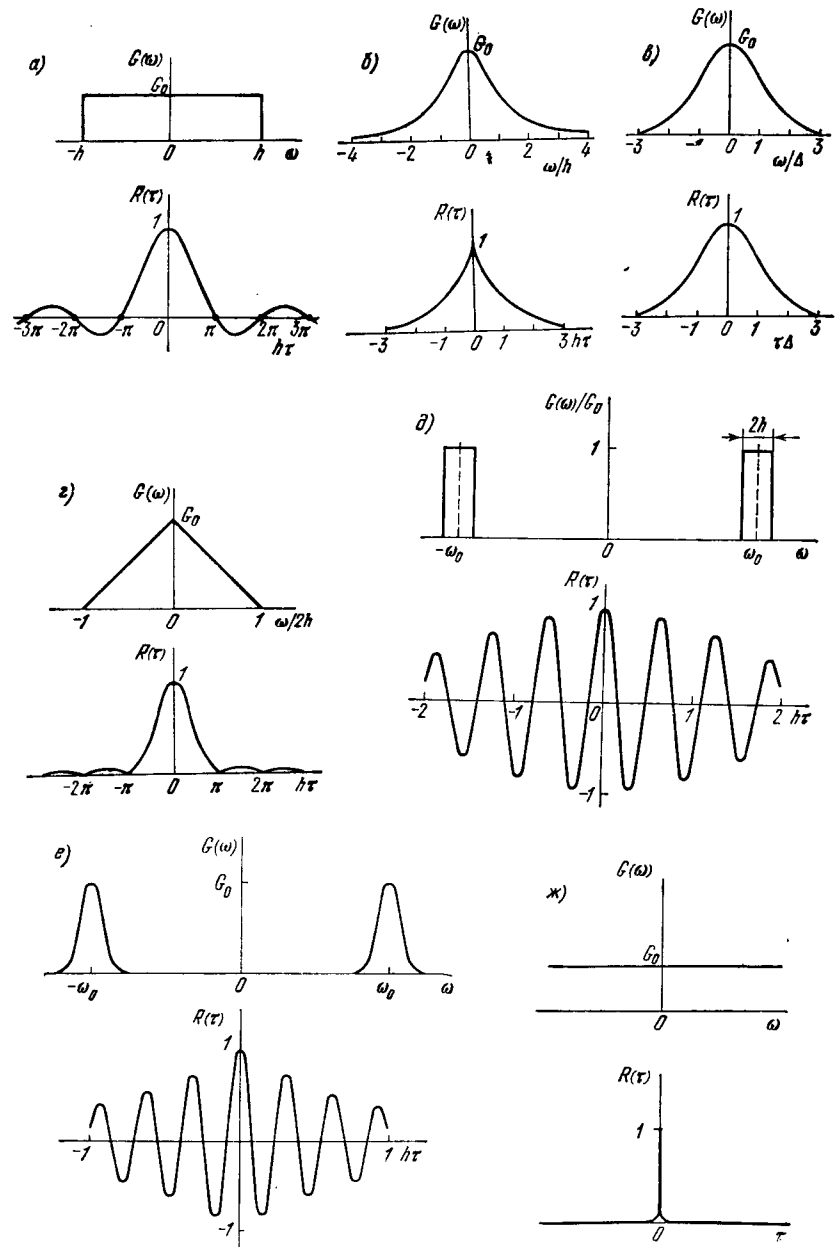


Рис. 1.4. Некоторые часто встречающиеся спектральные плотности $G(\omega)$ и соответствующие им коэффициенты корреляции $R(\tau)$.

1) Прямоугольный низкочастотный спектр (рис. 1.4, а):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega| \leq h, \\ 0, & |\omega| > h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 2G_0h, \quad (1.3.29)$$

$$R(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau}. \quad (1.3.30)$$

2) «Лоренцевский» спектр (рис. 1.4, б):

$$G(\omega) = \frac{G_0 h^2}{h^2 + \omega^2}, \quad \sigma^2 = \pi h G_0, \quad R(\tau) = e^{-h|\tau|}. \quad (1.3.31)$$

3) Гауссовский спектр (рис. 1.4, в):

$$G(\omega) = G_0 e^{-\omega^2/2\Delta^2}, \quad \sigma^2 = G_0 \Delta \sqrt{2\pi}, \quad R(\tau) = e^{-\tau^2 \Delta^2/2}. \quad (1.3.32)$$

4) Треугольный спектр (рис. 1.4, з):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0(1 - |\omega|/2h), & |\omega| < 2h, \\ 0, & |\omega| > 2h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 2G_0h, \quad (1.3.33)$$

$$R(\tau) = \left(\frac{\sin h\tau}{h\tau}\right)^2. \quad (1.3.34)$$

5) «Полосовой» шум с прямоугольным спектром (рис. 1.4, д):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0, & \omega_0 - h \leq |\omega| \leq \omega_0 + h, \\ 0, & \omega_0 - h > |\omega| > \omega_0 + h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 4G_0h, \quad (1.3.35)$$

$$R(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau} \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.36)$$

6) «Полосовой» шум с гауссовским спектром (рис. 1.4, е):

$$G(\omega) = \frac{G_0}{1+\varepsilon} [e^{-(\omega-\omega_0)^2/4h^2} + e^{-(\omega+\omega_0)^2/4h^2}], \quad (1.3.37)$$

$$G_0 = G(\omega_0), \quad \varepsilon = e^{-\omega_0^2/h^2}, \quad \sigma^2 = \frac{4\sqrt{\pi} h G_0}{1+\varepsilon},$$

$$R(\tau) = e^{-h^2\tau^2} \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.38)$$

7) Гармонический сигнал.

Устремляя в (36) или (38) ширину спектра h к нулю ($h \rightarrow 0$), мы приходим к модели случайного гармонического сигнала с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.39)$$

Такой функции соответствует спектр

$$G(\omega) = G_0 \delta(\omega - \omega_0), \quad (1.3.40)$$

а сам процесс описывается гармонической функцией

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.3.41)$$

с постоянной (и неслучайной) амплитудой a и случайно распределенной фазой φ : $\omega(\varphi) = 1/2\pi$. Следует заметить, что такой процесс является существенно негауссовским.

8) «Белый» шум (гладкий спектр) (рис. 1.4, ж):

$$G(\omega) = G_0 \quad (-\infty < \omega < \infty), \quad (1.3.42)$$

$$B(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau), \quad \sigma^2 = \infty, \quad R(\tau) = 1 \quad (\tau = 0), \quad 0 \quad (\tau \neq 0). \quad (1.3.43)$$

Приведенные примеры соответствуют наиболее часто встречающимся в приложениях случайным процессам. Поскольку примеры проиллюстрированы графически, здесь мы ограничимся лишь кратким комментарием.

1. Гауссовский спектр (рис. 1.4, в) обладает следующим свойством: его корреляционная функция тоже оказывается гауссовской кривой.

2. Корреляционная функция «полосового» шума, спектр которого группируется вблизи некоторой частоты ω_0 (рис. 1.4, д, е), осциллирует со средней частотой случайного процесса ω_0 .

Это свойство «полосового» шума не является следствием конкретного выбора формы спектра. Нетрудно убедиться, что и в общем случае произвольного полосового спектра (не обязательно симметричного относительно «средней» частоты ω_0)

$$R(\tau) = r(\tau) \cos \omega_0 \tau + s(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (1.3.44)$$

Действительно, полагая

$$G(\omega) = g(\omega - \omega_0),$$

можно записать для коэффициента корреляции

$$R(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} g(\omega - \omega_0) \cos \omega \tau d\omega = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \cos(\nu + \omega_0) \tau d\nu. \quad (1.3.45)$$

Из (45) непосредственно следует (44), где

$$r(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \cos \nu \tau d\nu, \quad s(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \sin \nu \tau d\nu. \quad (1.3.46)$$

Из (46) (как и из (36), (38)) видно, что, если относительная полоса спектра шума мала ($h/\omega_0 \ll 1$ — узкополосный процесс), функции $r(\tau)$ и $s(\tau)$ в (44) медленно изменяются по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$ и $\sin \omega_0 \tau$. Общая формула (44) согласуется с (36), (38) для $g(\nu) = g(-\nu)$, $s(\tau) = 0$.

3. Процесс с $G(\omega) = G_0 = \text{const}$ (рис. 1.4, ж) принято называть «белым» шумом. Хотя это название логически противоречиво («белый» свет, как известно, не обладает гладким спектром),

а сам такой процесс физически нереализуем, поскольку для него

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \rightarrow \infty, \quad (1.3.47)$$

мы довольно широко будем пользоваться этой весьма удобной математической моделью (разумеется, надо помнить о (47)!).

4. Выбирая ту или иную аппроксимацию для $B(\tau)$, нужно помнить, что ее фурье-образ (т. е. спектр $G(\omega)$) не должен принимать отрицательных значений. Поэтому нельзя, например, представить $B(\tau)$ в виде прямоугольника

$$B(\tau) = \begin{cases} B_0, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

Функции типа $\exp \sum_{n=1}^N \alpha_n \tau^n$, например $e^{-\alpha \tau^2}$, также непригодны для аппроксимаций $B(\tau)$, за исключением гауссовской кривой $B(\tau) = e^{-\alpha \tau^2}$ (см. обсуждение формулы (1.1.38)).

Для комплексного случайного процесса вида (1.1.3)

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (1.3.48)$$

в отличие от действительного процесса, можно составить две парные корреляционные функции $\langle zz_{\tau} \rangle$ и $\langle zz_{\tau}^* \rangle$. Для радиопизики и оптики особое значение имеют функции

$$\psi(t, \tau) = \langle zz_{\tau}^* \rangle, \quad B(t, \tau) = \langle zz_{\tau}^* \rangle - \bar{z}z_{\tau}^*, \quad (1.3.49)$$

приводящие к вещественным среднеквадратурным значениям при $\tau = 0$.

Корреляционная функция комплексного процесса в общем случае оказывается комплексной:

$$B(t, \tau) = |B(t, \tau)| \exp i\varphi(t, \tau). \quad (1.3.50)$$

Для комплексной корреляционной функции могут быть получены соотношения типа теоремы Винера — Хинчина, определяющие комплексную спектральную плотность, действительная и мнимая части которой являются преобразованием Фурье от действительной и мнимой частей корреляционной функции.

Комплексный случайный процесс, наиболее часто используемый в радиопизике и оптике, — это комплексная амплитуда квазигармонических колебаний или волн. Для стационарного колебания в этом случае x и y в (48) некоррелированы, комплексная корреляционная функция $\langle zz_{\tau} \rangle = 0$, а функция $\langle zz_{\tau}^* \rangle$ выражается через спектр $G^+(\omega)$ самого колебания (см. (2.3.19) — (2.3.21)).

§ 4. Статистическое усреднение и усреднение по времени

Эргодичность. Рассмотрим результат усреднения по интервалу T некоторой функции времени $f(t)$. Если до усреднения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.4.1)$$

то усредненную функцию можно записать как

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} e^{i\omega T/2} e^{i\omega t} d\omega \quad (1.4.2)$$

(временное усреднение мы будем обозначать волнистой линией). Из (2) следует, что при усреднении сильнее подавляется высоко-частотная часть спектра, связанная с относительно быстрыми изменениями функции f . Иначе говоря, усреднение по времени сглаживает $f(t)$.

Предположим теперь, что по времени усредняется стационарная случайная функция $x(t)$, которую согласно (1.1.11) можно представить в виде суммы трех компонент:

$$x(t) = \bar{x} + \xi_0 + \xi(t). \quad (1.4.3)$$

Усреднение будет влиять только на величину переменной компоненты $\xi(t)$; ее дисперсия с ростом времени усреднения T будет стремиться к нулю:

$$\sigma_T^2 = \langle (\bar{\xi})^2 \rangle \rightarrow 0. \quad (1.4.4)$$

В пределе $T \rightarrow \infty$ получим

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \xi_0 \quad (1.4.5)$$

или, если $\xi_0 = 0$,

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}. \quad (1.4.6)$$

Процессы, для которых выполняется (6), называют *эргодическими*. Таким образом, эргодический процесс при временном усреднении теряет случайный характер и стремится к некоторой постоянной величине, равной его среднему статистическому значению. Это обстоятельство, разумеется, значительно упрощает измерение статистических средних: вместо громоздкого массового опыта, состоящего в усреднении по большому количеству реализаций случайного процесса, в случае его эргодичности оказывается достаточным усреднение одной (но достаточно длинной) реализации.

Можно сказать, что в случае эргодического процесса ценность отдельной реализации резко возрастает, так как путем ее усреднения по времени можно находить всевозможные статистические

характеристики случайного процесса, не обращаясь к усреднению по ансамблю.

Закон, по которому происходит уменьшение дисперсии (4) с ростом T , зависит от вида спектра $G(\omega)$ или корреляционной функции $B(\tau)$ флуктуаций $\xi(t)$. Полагая в (2) $f(t) = \xi(t)$, возведя в квадрат и статистически усреднив, получим

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 d\omega = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) B(\tau) d\tau \quad (1.4.7)$$

Согласно (7), если спектр в нуле конечен ($0 < G(0) < \infty$), то асимптотически при больших T

$$\sigma_T^2 \approx G(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 d\omega = \frac{2\pi G(0)}{T} \sim \frac{1}{T}. \quad (1.4.8)$$

В том случае, когда при $\omega = 0$ спектр также обращается в нуль, уменьшение будет происходить быстрее. Полагая, например, в (7) $G(\omega) = G_0 \omega^2 (\omega^2 + h^2)^{-1}$, найдем

$$\sigma_T^2 = \frac{2\pi G_0}{hT^2} (1 - e^{-hT}) \sim \frac{1}{T^2}. \quad (1.4.9)$$

Наименее благоприятным для усреднения является случай, когда в области малых ω спектральная плотность флуктуаций неограниченно возрастает, т. е. $G(0) \rightarrow \infty$. Полагая, например,

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 |\omega_0/\omega|^\mu, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad 0 < \mu < 1$$

(спектр фликкер-шума — см. [7]), получим

$$\sigma_T^2 \sim \frac{1}{T^{1-\mu}}.$$

Усреднение по времени вообще неэффективно и σ_T^2 не зависит от T , если вся мощность флуктуаций сосредоточена в точке $\omega = 0$, т. е. если

$$G(\omega) = C\delta(\omega). \quad (1.4.10)$$

Подстановка (10) в формулу (7) дает

$$\sigma_T^2 = C = \text{const.}$$

Спектр вида (10) как раз соответствует наличию в выражении (3) компоненты $\xi_0 \neq 0$ с дисперсией $\langle \xi_0^2 \rangle = C$.

Заметим, что случайный процесс может быть эргодическим, но нестационарным, например:

$$x(t) = \bar{x} + a \cos \Omega t, \quad (1.4.10a)$$

где a — случайная постоянная ($\bar{a}=0$). В нестационарности легко убедиться, найдя дисперсию этого процесса

$$\langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \bar{a}^2 \cos^2 \Omega t,$$

которая оказывается зависящей от времени. Тем не менее соотношение (8) для процесса (10а) выполняется, и, усредняя, мы получим в пределе

$$\bar{\tilde{x}} = \bar{x}.$$

Это свойство эргодичности может оказаться, однако, потерянным для функции процесса (10а). Взяв, например, $y = x^2$, получим

$$y = \bar{x}^2 + 2\bar{x}a \cos \Omega t + a^2 \cos^2 \Omega t,$$

$$\bar{\tilde{y}} \rightarrow \bar{x}^2 + a^2/2, \quad \bar{y} = \bar{x}^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \Omega t \neq \bar{\tilde{y}}.$$

Более точно соотношение (8) записывается как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\tilde{x}}_P = \bar{x}, \quad (1.4.11)$$

где символ P означает, что имеет место сходимость \tilde{x} к \bar{x} по вероятности. Смысл этого термина иллюстрируется на рис. 1.5.

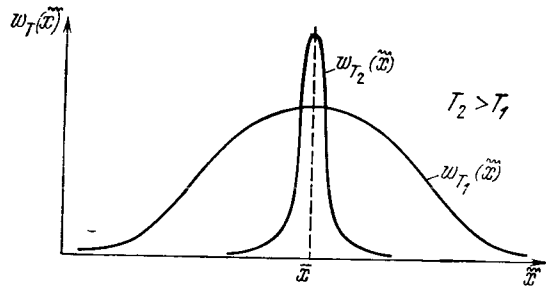


Рис. 1.5. Сходимость по вероятности.

Распределение $w_T(\tilde{x})$ для случайного процесса $\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt$ при различных временах усреднения T ($T_1 < T_2$).

Временное среднее, взятое за конечное время усреднения, — величина случайная и характеризуется одномерным законом распределения $w_T(\tilde{x})$. Однако вид этого закона, очевидно, зависит от величины времени усреднения T . При $T \rightarrow \infty$ вероятность сколько-нибудь заметных отклонений \tilde{x} от \bar{x} стремится к нулю и $w(\tilde{x}) \rightarrow \delta(\tilde{x} - \bar{x})$. Заметим, что, независимо от вида $w(x)$, распределение $w(\tilde{x})$ при достаточно больших T становится гауссовским.

Точность определения средних при временном усреднении; оценка необходимого времени усреднения. В реальных условиях время

усреднения T конечно, и представляет интерес оценить, каким должен быть интервал T , чтобы соотношения (8) или (9) выполнялись с достаточной точностью. Полагая

$$\frac{\sigma_T}{\bar{x}} \leq \varepsilon, \quad (1.4.12)$$

находим, учитывая (4) и (7):

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{\bar{x}^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 d\omega = \frac{2}{T^2 \bar{x}^2} \int_0^T (T - \tau) B(\tau) d\tau. \quad (1.4.13)$$

Таким образом, при усреднении процесса $x(t) = \bar{x} + \xi(t)$ необходимое для выполнения (12) время усреднения T зависит от \bar{x} , спектра (или корреляционной функции) флуктуаций $\xi(t)$, а также от величины ε допустимого отклонения \tilde{x} от \bar{x} . Например, если спектр флуктуаций лоренцевский (см. (1.3.31)), то неравенство (13) принимает вид

$$\varepsilon^2 \geq \frac{2\sigma^2}{\bar{x}^2} \frac{e^{-Th} - 1 + Th}{T^2 h^2}, \quad \sigma^2 = \pi Gh. \quad (1.4.14)$$

Из (14) видно, что необходимым условием малости ε является достаточно большая величина произведения времени T усреднения на ширину спектра флуктуаций:

$$Th \gg 1. \quad (1.4.15)$$

Если условие (15) выполняется, то вытекающая из (14) оценка для T будет следующей:

$$T \geq \frac{2\pi G}{\varepsilon^2 \bar{x}^2}. \quad (1.4.16)$$

В случае гауссовского спектра (1.3.32) из (13) находим

$$\varepsilon^2 \geq \frac{2\sigma^2}{\Delta^2 \bar{x}^2 T^2} \left[\frac{\Delta}{\sqrt{2}} T \sqrt{\pi} \Phi \left(\frac{T\Delta}{\sqrt{2}} \right) - 1 + e^{-T^2 \Delta^2 / 2} \right], \quad (1.4.17)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\Phi(\infty) = 1)$$

— интеграл вероятности, $\sigma^2 = G\Delta\sqrt{2\pi}$. При выполнении условия $\Delta T \gg 1$, имеющего тот же смысл, что и (15), неравенство (17) принимает вид, в точности совпадающий с (16).

О методах измерения статистических характеристик стационарных случайных процессов. Возможность извлечения статистических характеристик стационарного случайного процесса из одной его реализации представляет большой интерес для экспериментальной радиофизики и оптики. Ниже мы обсудим кратко бази-

рующиеся на этом свойстве методы измерения моментов, корреляционных функций и законов распределения. В перечисленных задачах использование операции временного усреднения дает существенные преимущества.

Измерение средних. На рис. 1.6 показана простая схема измерения среднего значения стационарного электрического шума $x(t)$. После усилителя Y , воспроизводящего $x(t)$ без искажений, стоит простейший интегратор в виде RC -фильтра ($T_0 = RC$) и прибор, измеряющий напряжение y . Показаны прибор

$$y(t) = \frac{k}{T_0} \int_0^t e^{-\theta/T_0} x(t - \theta) d\theta.$$

При выполнении (15) и (16) величина $y \approx k\bar{x}$. Таким образом, измерения средних осуществляются с помощью простого вольтметра

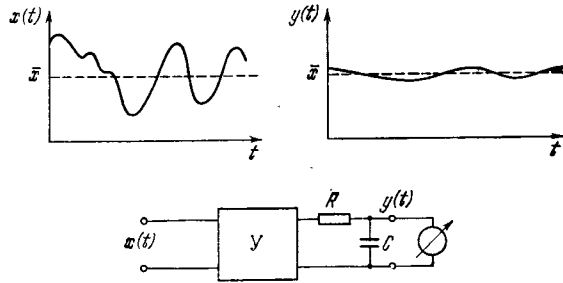


Рис. 1.6. Схема измерения среднего значения стационарного электрического шума, использующая операцию временного усреднения.

постоянного тока. Аналогичная схема может быть использована и для измерения x^2 и т. п.: в этом случае между усилителем и интегратором ставится соответствующий детектор; если детектор безынерционен, то оценки точности измерений можно провести по формулам (12) — (16).

Измерение вероятностей. Одномерные и многомерные распределения стационарных процессов могут быть определены также по одной реализации, путем операции усреднения по времени. В этом случае вероятность некоторого состояния определяется по относительному времени пребывания процесса в заданном состоянии. Такое определение вероятности представляется вполне естественным; для стационарного процесса оно может быть строго обосновано с помощью доказанной выше эргодической теоремы.

*) Можно показать, что эффективное время усреднения интегратора с RC -фильтром равно $2T_0$ (см. § 2 гл. 3).

Пусть для стационарного случайного процесса нас интересует вероятность $P(x_1 < x < x_2)$ события, заключающегося в том, что реализация $x(t)$ проходит в интервале $[x_1, x_2]$. Тогда указанную вероятность можно определить по относительному времени пребывания реализации в указанном интервале с помощью соотношения

$$P(x_1 < x < x_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_{x_1, x_2}}{T}, \quad (1.4.18)$$

где $T_{x_1, x_2} = \sum \Delta t_i$, а Δt_i — времена пребывания (рис. 1.7). Соотношение (18) непосредственно следует из (11). Действительно, если

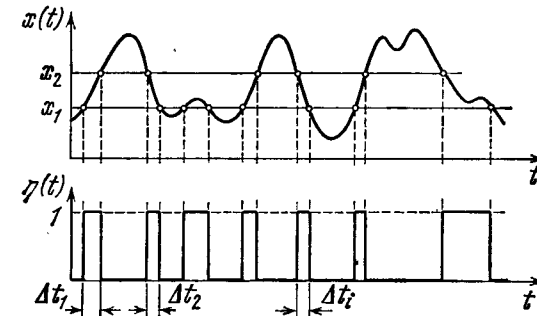


Рис. 1.7. Реализация стационарного случайного процесса $x(t)$ и построенная на ее основе реализация импульсного процесса $\eta(t)$.

Площадь под кривой $\eta(t)$ равна времени пребывания процесса x в интервале $x_1 < x < x_2$.

$\eta(x)$ является некоторой функцией рассматриваемой случайной величины x , то η также представляет собой стационарный случайный процесс. В силу эргодичности $\eta(t)$

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) w(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{t+T} \eta[x(t)] dt \equiv \tilde{\eta}. \quad (1.4.19)$$

Рассмотрим стационарный процесс $\eta(t)$ специального вида:

$$\eta(t) = F[x(t)] = \begin{cases} 1, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x \text{ вне интервала } [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Для такого процесса (см. рис. 1.7)

$$\bar{\eta} = P(x_1 < x < x_2), \quad \tilde{\eta} = T_{x_1, x_2}/T \quad (1.4.20)$$

Таким образом, соотношение (18) доказано.

Для оценки точности, с которой выполняется равенство $P = T_{x_1, x_2}/T$, можно использовать соотношения (12) — (17). Для

электрических шумов измерение относительных времен пребывания не трудно выполнить с помощью электронного осциллографа. Необходимое время усреднения T может быть получено либо за

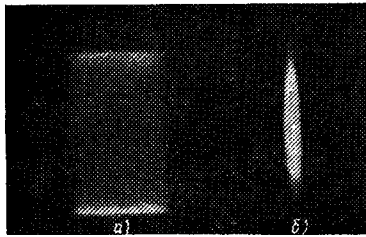


Рис. 1.8. Фотографии одномерных случайных разверток на экране электронного осциллографа [8]:
а) процесс $x(t) = \cos \varphi(t)$ ($\omega(\varphi) = 1/2\pi$);
б) гауссовский случайный процесс.

$x(t) = \cos \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — случайная фаза. Если $\omega(\varphi) = 1/2\pi$, согласно формулам (1.2.10), (1.2.11)

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < -1, \end{cases} \quad (1.4.21)$$

— распределение яркости на фотографии соответствует (21). На рис. 1.8, б приведена случайная развертка для гауссовского процесса.

Для экспериментального определения двумерных распределений стационарных процессов с помощью электронного осциллографа следует получить двумерную случайную развертку; кривые равной яркости на экране осциллографа соответствуют, очевидно, условию

$$\omega(x, x_\tau, \tau) = \text{const} \quad (1.4.22)$$

(рис. 1.9).

На рис. 1.10 приведены фотографии, полученные описанным методом для стационарного гауссовского случайного процесса. При изменении времени задержки τ между напряжениями, поступающими на горизонтальные и вертикальные пластины, может быть определен, очевидно, набор двумерных распределений $\omega(x, x_\tau, \tau)$. В соответствии с (1.2.43), (1.2.44)

$$\omega(x, x_\tau, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\right\}, \quad (1.4.23)$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции (см. (1.3.2)).

Пользуясь (23), нетрудно найти формы кривых равной яркости на экране электроннолучевой трубки. Они описываются уравнением

$$x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2 = \text{const}. \quad (1.4.24)$$

При $\tau \ll \tau_k$ $R(\tau) \approx 1$ и мы имеем уравнение прямой:

$$(x - x_\tau)^2 = \text{const}.$$

Напротив, при $\tau \gg \tau_k$ $R(\tau) = 0$ и (24) сводится к уравнению окружности:

$$x^2 + x_\tau^2 = \text{const}.$$

Для промежуточных значений τ (24) является уравнением эллипса. Все эти случаи хорошо иллюстрируются осциллограммами* на рис. 1.10; для гауссовского процесса описываемая схема может быть использована, таким образом, для быстрых оценок времени корреляции.

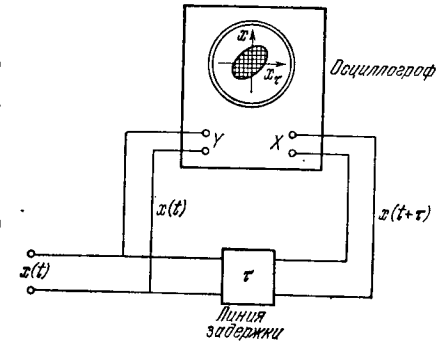


Рис. 1.9. Схема измерения двумерного распределения стационарного случайного процесса $\omega(x, x_\tau, \tau)$ с помощью электронного осциллографа (X и Y — входы вертикальной и горизонтальной разверток).

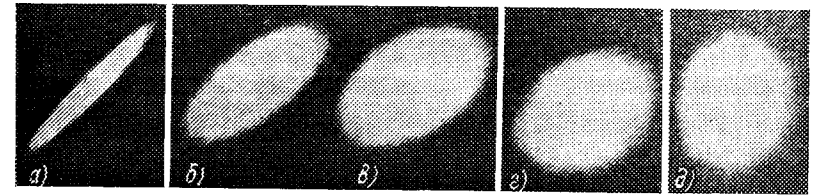


Рис. 1.10. Изображение двумерного закона распределения стационарного гауссовского процесса, измеренного с помощью схемы, приведенной на рис. 1.9. Различные фотографии соответствуют разным τ . Величина задержки увеличивается от (а) к (д); для (д) $\tau > \tau_k$.

Пользуясь операцией временного усреднения, можно определить и корреляционную функцию $B(\tau)$ стационарного процесса $x(t)$. Вместо статистического усреднения

$$B(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} xx_\tau \omega(x, x_\tau, \tau) dx dx_\tau \quad (1.4.25)$$

* Они заимствованы из [8].

в рассматриваемом случае можно написать

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{t+T} x(t) x(t+\tau) dt, \quad (1.4.26)$$

и это означает, что для экспериментального определения $B(\tau)$ надо располагать линией задержки, перемножителем и интегратором.

Перечисленные методы измерения и анализа стационарных случайных процессов принято называть аналоговыми методами. Эти методы нашли достаточно широкое распространение. Вместе с тем широкие возможности цифровых ЭВМ делают во многих случаях более предпочтительной цифровую обработку реализаций случайных процессов *).

§ 5. Выбросы случайных процессов

Рассмотрим так называемые выбросы случайного процесса $x(t)$, т. е. превышение этим процессом некоторого уровня C (рис. 1.11, а). Математически выбросы определяются выражением

$$x_+(t) = (x-C) I(x-C), \quad (1.5.1)$$

где $I(x)$ — функция, описывающая единичную ступеньку:

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dx} I(x) = \delta(x), \quad \frac{d}{dt} I(x) = \delta(x) \dot{x}. \quad (1.5.3)$$

Преобразование $x \rightarrow x_+$ может осуществляться в нелинейном устройстве типа детектора, характеристики которого показаны на рис. 1.12, а. Нелинейное преобразование $x \rightarrow I(x-C)$ реализует идеальный ограничитель (рис. 1.12, б).

Как функция времени процесс $I(x-C)$ представляет собой случайную последовательность прямоугольных импульсов единичной амплитуды (рис. 1.11, в). Они синхронны с переходами функции x через уровень C , т. е. имеют ту же длительность, что и импульсы неправильной формы на рис. 1.11, б, из которых состоит процесс $x_+(t)$.

*) Для подробного ознакомления с современной техникой измерения и анализа случайных процессов мы отсылаем читателя к книге [11].

Напишем выражения для некоторых характеристик выбросов на интервале времени $(0, T)$.

Длительность выбросов. Под длительностью i -го выброса понимается величина интервала $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ между последовательными пересечениями кривой

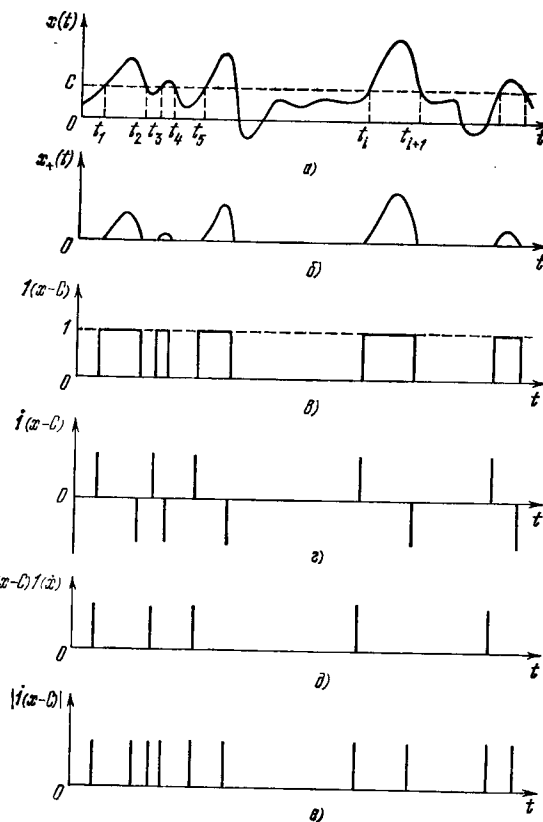


Рис. 1.11. Выбросы случайного процесса $x(t)$ над уровнем C :

а) реализация процесса $x(t)$, пересекающая уровень C ; б) участки реализации $x(t)$, лежащие выше уровня C ; в) прямоугольные импульсы той же длительности, что и выбросы; г) импульсы, отмечающие переход через уровень C с положительной или отрицательной производной; д) импульсы, соответствующие переходу через уровень C с положительной производной; е) импульсы, соответствующие пересечению уровня C с производной любого знака.

$x(t)$ уровня C с положительной и отрицательной производной. Суммарная длительность всех выбросов на интервале $(0, T)$, равная $\theta = \sum \Delta t_i$, совпадает с временем пребывания процесса $x(t)$ в области $x > C$. Ту же суммарную длительность θ имеют, очевидно, и импульсы $I(x-C)$ (рис. 1.11, в), причем она равна просто их площади, поскольку эти импульсы неотрицательны и

имеют единичные амплитуды. Таким образом, длительность выбросов определяется выражением

$$\theta = \int_0^T I(x-C) dt. \quad (1.5.4)$$

Число выбросов. Дифференцирование по времени функции $I(x-C)$ дает ряд δ -импульсов, положительных при $\dot{x} > 0$ и отрицательных при $\dot{x} < 0$ (рис. 1.11, е). Введя фактор $I(\dot{x})$, отсекающий отрицательные δ -импульсы, получим функцию $\dot{I}(x-C) I(\dot{x})$, которая представляет собой последовательность положительных δ -импульсов, число которых совпадает с числом выбросов (рис. 1.11, д). Полное число выбросов за время T равно, таким образом,

$$n = \int_0^T \dot{I}(x-C) I(\dot{x}) dt = \int_0^T \delta(x-C) \dot{x} I(\dot{x}) dt. \quad (1.5.5)$$

Энергия выбросов. При наблюдении выбросов могут использоваться приборы типа калориметров, регистрирующие энергию. Энергия Q выбросов определяется интегралом

$$Q = \int_0^T [x_+(t)]^2 dt = \int_0^T (x-C)^2 I^2(x-C) dt. \quad (1.5.6)$$

Число пересечений порога. Функция

$$|\dot{I}(x-C)| = |\delta(x-C) \dot{x}| = \delta(x-C) |\dot{x}|$$

представляет собой временную последовательность положительных δ -импульсов, каждый из которых совпадает по времени с пересечением уровня C (рис. 1.11, е) т. е. интеграл

$$N = \int_0^T \delta(x-C) |\dot{x}| dt \quad (1.5.7)$$

определяет полное число пересечений как с положительной, так и с отрицательной производной. Это выражение очевидным образом обобщается на случай переменного порога $C(t)$:

$$N = \int_0^T \delta(x-C) |\dot{x} - \dot{C}| dt. \quad (1.5.8)$$

Формула (8) определяет, таким образом, число пересечений двух произвольных функций времени $x(t)$ и $C(t)$ за время T .

Максимумы и минимумы. Минимумы функции $x(t)$ соответствуют тем моментам времени, когда $\dot{x} = 0$ и $\ddot{x} > 0$. Следовательно, число минимумов равно числу выбросов производной \dot{x} относительно нулевого уровня,

Заменяя в формуле (5) x на \dot{x} и полагая $C=0$, получим выражение

$$n_{\min} = \int_0^T \delta(\dot{x}) \dot{x} I(\dot{x}) dt, \quad (1.5.9)$$

определяющее суммарное число минимумов функции x на интервале $(0, T)$. Аналогичное выражение можно написать и для максимумов:

$$n_{\max} = - \int_0^T \delta(\dot{x}) \dot{x} I(-\dot{x}) dt.$$

Общее число экстремальных точек равно

$$n_{\text{ext}} = n_{\min} + n_{\max} = \int_0^T \delta(\dot{x}) [\dot{x} I(\dot{x}) - \dot{x} I(-\dot{x})] dt = \int_0^T \delta(x) |\dot{x}| dt \quad (1.5.10)$$

в соответствии с (7).

Полученные выражения в равной степени применимы как для случайных, так и для регулярных функций. Если $x(t)$ — случайный процесс, то эти характеристики будут случайными величинами. Из приведенных формул видно, какая статистическая информация необходима для вычисления тех или иных статистических средних, характеризующих выбросы.

Рассмотрим, например, среднее значение суммарной длительности выбросов. Согласно (4)

$$\bar{\theta} = \left\langle \int_0^T I(x-C) dt \right\rangle = \int_0^T \langle I(x-C) \rangle dt. \quad (1.5.11)$$

Чтобы найти $\langle I(x-C) \rangle$, достаточно знать одномерное распределение вероятностей $\omega(x, t)$. В результате получим

$$\langle I(x-C) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I(x-C) \omega(x, t) dx = \int_C^{\infty} \omega(x, t) dx = P(x > C, t), \quad (1.5.12)$$

где $P(x > C, t)$ — вероятность пребывания x над уровнем C в момент времени t . Подставив (12) в (11), найдем

$$\bar{\theta} = \int_0^T P(x > C, t) dt. \quad (1.5.13)$$

В случае стационарного процесса x вероятность P от времени зависит не будет и согласно (13)

$$\bar{\theta} = TP(x \geq C),$$

или

$$\frac{\bar{\theta}}{T} = P(x \geq C). \quad (1.5.14)$$

т. е., как уже было показано выше, для стационарного случайного процесса относительное время пребывания в некотором состоянии ($x > C$) равно — в среднем — вероятности этого состояния.

Чтобы оценить отклонение $\bar{\theta}$ от $\bar{\theta}$, можно вычислить момент второго порядка

$$\bar{\theta}^2 = \int_0^T dt_1 dt_2 \langle I(x_1 - C) I(x_2 - C) \rangle \quad (1.5.15)$$

и найти дисперсию $\bar{\theta}^2 - \bar{\theta}^2$, причем для усреднения в (15) понадобится двумерное распределение вероятностей $\omega(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Однако, даже не конкретизируя вида функции $\omega(x_1, x_2)$, нетрудно показать, что дисперсия случайной величины θ/T с ростом T стремится к нулю, а это значит, что сама величина θ/T при достаточно больших T очень мало отличается от своего среднего значения,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\theta}{T} = \frac{\bar{\theta}}{T} = P(x > C). \quad (1.5.16)$$

Действительно,

$$\frac{\theta}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T I(x - C) dt,$$

т. е. случайная величина θ/T является средним по времени значением процесса $I(x - C)$, который эргодичен, если эргодичен x , т. е. согласно (1.4.6) величина θ/T с ростом T асимптотически приближается к своему среднему значению.

Аналогично, предполагая эргодичность x , можно утверждать, что такие величины, как мощность выбросов (т. е. энергия в единицу времени)

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T (x - C)^2 I(x - C) dt, \quad (1.5.17)$$

средняя частота пересечения порога C

$$\Omega_C = \frac{2\pi N_C}{T} = \frac{2\pi}{T} \int_0^T \delta(x - C) | \dot{x} | dt \quad (1.5.18)$$

или средняя частота появления экстремальных точек

$$\Omega_{\text{ext}} = \frac{2\pi n_{\text{ext}}}{T} = \frac{2\pi}{T} \int_0^T \delta(\dot{x}) | \ddot{x} | dt, \quad (1.5.19)$$

при увеличении T сколь угодно мало отклоняются от своих средних статистических значений, определение которых приобретает в связи с этим особый интерес.

Статистическое усреднение полученных выражений дает

$$\bar{P} = \int_C^\infty (x - C)^2 \omega(x) dx, \quad (1.5.20)$$

$$\bar{\Omega}_C = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \omega(x = C, \dot{x}) | \dot{x} | d\dot{x}, \quad (1.5.21)$$

$$\bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \omega(\dot{x} = 0, \ddot{x}) | \ddot{x} | d\ddot{x}. \quad (1.5.22)$$

В этих средних, кроме одномерного распределения $\omega(x)$, фигурируют двумерные распределения $\omega(x, \dot{x})$ и $\omega(\dot{x}, \ddot{x})$.

Средняя частота пересечений двух случайных стационарных и, вообще говоря, статистически зависимых функций $x(t)$ и $C(t)$, равная согласно (8)

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{T} \left\langle \int_0^T \delta(x - C) | \dot{x} - \dot{C} | dt \right\rangle = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega(x = C, \dot{x}, C, \dot{C}) | \dot{x} - \dot{C} | d\dot{x} d\dot{C} dC, \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

выражается через четырехмерное распределение $\omega(x, \dot{x}, C, \dot{C})$. При определенных условиях эти формулы упрощаются. Например, если процесс x стационарный, то \bar{x} и $\bar{\dot{x}^2}$ — константы и из соотношений

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0, \quad \langle x\ddot{x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle = 0$$

следует, что отсутствует корреляция между x и \dot{x} и между \dot{x} и \ddot{x} в один и тот же момент времени. Если x — гауссовский процесс, то отсутствие корреляции будет означать также и статистическую независимость. При этом

$$\omega(x, \dot{x}) = \omega(x) \omega_1(\dot{x}), \quad \omega(\dot{x}, \ddot{x}) = \omega_1(\dot{x}) \omega_2(\ddot{x}) \quad (1.5.24)$$

и согласно (21) и (22)

$$\bar{\Omega}_C = 2\pi\omega(C) \int_{-\infty}^\infty \omega_1(\dot{x}) | \dot{x} | d\dot{x} = 2\pi\omega(C) | \bar{\dot{x}} |, \quad (1.5.25)$$

$$\bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2\pi\omega_1(0) | \bar{\ddot{x}} |. \quad (1.5.26)$$

Для гауссовского процесса

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1.5.27)$$

$$\omega_1(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_1^2}\right], \quad (1.5.28)$$

$$\omega_2(\ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

Подставив эти выражения в (25) и (26), находим

$$\bar{\Omega}_C = 2 \frac{\sigma_1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(C - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad \bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (1.5.29)$$

Дисперсии флуктуаций случайной функции x и ее производных можно выразить через спектр интенсивности $G(\omega)$ или корреляционную функцию $B(\tau)$ процесса x :

$$\sigma^2 = \bar{x^2} = \int_{-\infty}^\infty G(\omega) d\omega = B(0),$$

$$\sigma_1^2 = \bar{\dot{x}^2} = \int_{-\infty}^\infty \omega^2 G(\omega) d\omega = -\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 R(\tau) \Big|_{\tau=0} = \omega_1^2 \sigma^2, \quad (1.5.30)$$

$$\sigma_2^2 = \bar{\ddot{x}^2} = \int_{-\infty}^\infty \omega^4 G(\omega) d\omega = -\left(\frac{d}{d\tau}\right)^4 R(\tau) \Big|_{\tau=0} = \omega_1^4 \sigma^2. \quad (1.5.31)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, нетрудно показать, что

$$\sigma_1^2 \leq \sigma \sigma_2, \quad \omega_{11} \geq \omega_1. \quad (1.5.32)$$

Из (29) и (32) следует, что среднее число экстремумов не меньше среднего числа пересечений любого уровня:

$$\bar{\Omega}_{\text{ext}} \geq \bar{\Omega}_C, \quad \bar{N}_{\text{ext}} \geq \bar{N}_C. \quad (1.5.33)$$

Если спектр интенсивности имеет прямоугольную форму:

$$G(\omega) = \begin{cases} G, & \omega_0 - h \leq |\omega| \leq \omega_0 + h, \\ 0, & \omega_0 - h \geq |\omega| \geq \omega_0 + h, \end{cases} \quad (1.5.34)$$

то

$$\sigma^2 = 4Gh, \quad \sigma_1^2 = \sigma^2 (\omega_0^2 + h^2/3), \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 (\omega_0^4 + 2\omega_0^2 h^2 + h^4/5)$$

и согласно (29)

$$\bar{\Omega}_C = 2 \sqrt{\omega_0^2 + h^2/3} \exp \left[-\frac{(C - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right], \quad \bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2 \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 2\omega_0^2 h^2 + h^4/5}{\omega_0^2 + h^2/3}}.$$

Если порог равен среднему значению ($C = \bar{x}$), то в предельном случае очень узкого спектра ($\omega_0 \gg h$)

$$\bar{\Omega}_N \approx \bar{\Omega}_{\text{ext}} \approx 2\omega_0.$$

В обратном предельном случае, когда средняя частота спектра равна нулю ($\omega_0 = 0$),

$$\bar{\Omega}_N = 2h/\sqrt{3}, \quad \bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2h\sqrt{3/5} \approx 1,5\bar{\Omega}_N,$$

т. е. частота появления экстремальных точек почти в полтора раза превышает частоту пересечения уровня $C = \bar{x}$.

Пересечение случайных кривых. Рассмотрим два примера по оценке N —числа точек, в которых пересекаются две случайные кривые $x(t)$ и $C(t)$ за время T .

1. Пусть x и C —гауссовские случайные стационарные функции с нулевым средним, коррелированные, вообще говоря, между собой. Их разность $y = x - C$ будет также гауссовской функцией. Двумерное распределение вероятностей для y и \dot{y} имеет вид

$$\omega(y, \dot{y}) = \omega(y) \omega_1(\dot{y}), \quad (1.5.35)$$

где ω и ω_1 определяются выражениями (27), (28), причем

$$\sigma^2 = \overline{y^2} = \bar{x}^2 + C^2 - 2\bar{x}C. \quad (1.5.36)$$

Очевидно, что число пересечений x и C равно числу пересечений кривой y нулевого уровня, т. е. согласно (29)

$$\bar{\Omega}_0 = 2\sigma_1/\sigma, \quad \bar{N} = T\sigma_1/\pi\sigma. \quad (1.5.37)$$

Если x и C статистически независимы, то в (27), (28)

$$\sigma^2 = \bar{x}^2 + \bar{C}^2, \quad \sigma_1^2 = \omega_{1x}^2 \bar{x}^2 + \omega_{1C}^2 \bar{C}^2,$$

где ω_{1x} и ω_{1C} —средние частоты спектров, определенные формулой (30). Согласно (37) в этом случае

$$\bar{N} = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{x^2 \omega_{1x}^2 + \bar{C}^2 \omega_{1C}^2}{x^2 + \bar{C}^2}},$$

т. е. число пересечений определяется как частотами ω_{1C} и ω_{1x} , так и интенсивностями случайных процессов, причем средняя частота пересечений

$$\bar{\Omega} = \frac{2\sigma_1}{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{\omega_{1x}^2 + \alpha \omega_{1C}^2}{1 + \alpha}} \quad (1.5.38)$$

меняется в пределах от $2\omega_{1x}$ до $2\omega_{1C}$ в зависимости от отношения интенсивностей $\alpha = \bar{C}^2/x^2$.

2. Рассмотрим пересечение огибающих $A(t)$ и $\rho(t)$ двух независимых нормальных квазигармонических процессов *

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)], \quad C(t) = \rho(t) \cos[\omega_2 t + \psi(t)].$$

В этом случае

$$\omega(\rho, \dot{\rho}, A, \dot{A}) = v(\rho) v_1(\dot{\rho}) \omega(A) \omega_1(\dot{A}),$$

причем распределения вероятностей для огибающих и их производных имеют вид

$$\begin{aligned} \omega(A) &= \frac{A}{\sigma_{11}^2} \exp \left[-\frac{A^2}{2\sigma_{11}^2} \right], \quad \omega_1(\dot{A}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{12}} \exp \left[-\frac{\dot{A}^2}{2\sigma_{12}^2} \right] \\ &(\sigma_{11}^2 = \bar{x}^2, \quad \sigma_{12}^2 = \langle A^2 \rangle), \\ v(\rho) &= \frac{\rho}{\sigma_{21}^2} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_{21}^2} \right], \quad v_1(\dot{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{22}} \exp \left[-\frac{\dot{\rho}^2}{2\sigma_{22}^2} \right] \\ &(\sigma_{21}^2 = C^2, \quad \sigma_{22}^2 = \langle \dot{\rho}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (1.5.39)$$

Усреднение выражения (8) для числа пересечений дает

$$\bar{N} = T \int_0^\infty \omega(\rho) v(\rho) d\rho \int_{-\infty}^\infty d\dot{A} d\dot{\rho} | \dot{A} - \dot{\rho} | \omega_1(\dot{A}) v_1(\dot{\rho}). \quad (1.5.40)$$

Согласно (39)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega(\rho) v(\rho) d\rho &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_{11} \sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)^{3/2}}, \\ \int_{-\infty}^\infty d\dot{A} d\dot{\rho} | \dot{A} - \dot{\rho} | \omega_1(\dot{A}) v_1(\dot{\rho}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2}. \end{aligned}$$

Итак, за время T огибающие двух гауссовских процессов пересекутся в среднем

$$\bar{N} = T \frac{\sigma_{11} \sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)^{3/2}} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2} \quad (1.5.41)$$

* Здесь мы пользуемся моделями случайных процессов, которые будут рассмотрены в § 4 гл. 2.

раз. Если предположить, что корреляционные функции процессов имеют вид

$$\overline{xx}_\tau = \overline{x^2} a(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \overline{CC}_\tau = \overline{C^2} b(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

(это значит, что их спектральные плотности симметричны относительно ω_0), то в (39)

$$\sigma_{11}^2 = \overline{x^2}, \quad \sigma_{12}^2 = \overline{x^2} \Omega_{1x}^2, \quad \sigma_{21}^2 = \overline{C^2}, \quad \sigma_{22}^2 = \overline{C^2} \Omega_{1C}^2,$$

где

$$\Omega_{1x}^2 = -\ddot{a}(0), \quad \Omega_{1C}^2 = -\ddot{b}(0).$$

В случае узкополосных процессов величина ω_1 определяется средней частотой спектра и частота Ω_1 — шириной спектра. Например, для прямоугольного спектра (34) имеем

$$a(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau},$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + h^2/3, \quad \Omega_1^2 = h^2/3. \quad (1.5.42)$$

Согласно (41) средняя частота пересечения огибающих равна

$$\Omega = \frac{2\pi N}{T} = 2\pi \left[\frac{\alpha (\Omega_{1x}^2 + \alpha \Omega_{1C}^2)}{(1 + \alpha)^3} \right]^{1/2}, \quad (1.5.43)$$

Рис. 1.13. Средняя частота пересечения огибающих двух независимых гауссовских процессов как функция отношения их дисперсий $\alpha = \overline{C^2}/\overline{x^2}$ при отношении полюс $z=3$.

как при $\alpha \rightarrow 0$, так и при $\alpha \rightarrow \infty$ (рис. 1.13). Из (43) нетрудно получить, что частота Ω максимальна при

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - z^2 + z^4} - 1 + z^2}{z^2}, \quad z = \frac{\Omega_{1C}}{\Omega_{1x}}.$$

Систематическое изложение теории выбросов случайных процессов и ее применения можно найти в монографиях [3, 10].

§ 6. Стохастические дифференциальные уравнения в обыкновенных производных. Анализ случайных колебаний путем усреднения точного решения

Математический анализ задач статистической радиофизики и оптики обычно сводится к решению линейных или нелинейных дифференциальных уравнений со случайными начальными (или краевыми) условиями, случайными параметрами, коэффициентами, случайными внешними силами, — так называемых стохастических дифференциальных уравнений.

В этом и последующем параграфах на примере линейных и нелинейных уравнений в обыкновенных производных мы проил-

люстрируем основные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Ниже мы убедимся, что решение наиболее интересных задач требует применения специфических, так называемых стохастических, методов решения. В известном смысле эти методы оказываются более мощными, нежели методы решения регулярных уравнений; найти средние для величин, описываемых стохастическими уравнениями, удается и в том случае, когда точные решения неизвестны.

Чтобы познакомиться с трудностями, которые могут возникнуть при анализе случайной функции, описываемой дифференциальным уравнением, рассмотрим простейший случай линейной системы первого порядка, когда уравнение для x имеет вид

$$\dot{x} + a(t)x = f(t). \quad (1.6.1)$$

Здесь $f(t)$ — внешняя сила, $a(t)$ — изменяющийся во времени параметр системы. Для этого уравнения известно точное решение: если $x(t=0) = x_0$, то

$$x(t) = x_0 e^{-b(t)} + \int_0^t e^{-b(t)+b(\theta)} f(\theta) d\theta, \quad b(t) = \int_0^t a(\theta) d\theta. \quad (1.6.2)$$

Вид решения (2) показывает, что если случайными являются начальное значение x_0 или внешняя сила $f(t)$, от которых x зависит линейно, то усреднение x не вызывает особых трудностей. Например,

$$\bar{x} = \bar{x}_0 e^{-b(t)} + \int_0^t e^{-b(t)+b(\theta)} \langle f(\theta) \rangle d\theta,$$

т. е. для определения \bar{x} достаточно знать \bar{x}_0 и $\langle f \rangle$. Такой статистической информации заведомо недостаточно, если случайным является коэффициент уравнения $a(t)$. В этом случае для определения \bar{x} нужно уметь вычислять средние

$$\langle \exp [b(t) - b(\theta)] \rangle = \left\langle \exp \int_\theta^t a(\theta') d\theta' \right\rangle.$$

Это нетрудно сделать лишь при условии, что случайный процесс $a(t)$ (а следовательно, и процесс $b(t) - b(\theta)$) можно рассматривать как гауссовский; при этом согласно (1.1.16) и (1.1.36)

$$\langle \exp y \rangle = \exp \left[\bar{y} + \frac{1}{2} (\bar{y}^2 - \bar{y}^2) \right].$$

Решение в аналитической форме может быть записано и для некоторых нелинейных уравнений. Так, если

$$\dot{x} + a(t)x = f(t)x^n, \quad (1.6.3)$$

то подстановка $x = z^{1/(1-n)}$ приводит (3) к уравнению

$$\frac{1}{1-n} \dot{z} + a(t)z = f(t)$$

вида (1). Усреднение точного решения здесь, очевидно, еще более затруднительно, чем в случае (2).

Таким образом, если случайная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, для которого известно точное решение, то статистические характеристики можно, в принципе, найти путем статистического усреднения точного решения с учетом конкретной статистики начальных условий, внешнего воздействия или изменения параметров системы.

Наиболее прост учет статистики начальных условий. Усреднение по ансамблю реализаций внешней силы также не вызывает принципиальных трудностей, если дифференциальное уравнение линейно, но трудности резко возрастают для нелинейных уравнений. Наряду с нелинейностью, сложным является и учет случайно изменяющихся параметров системы.

Поэтому для наиболее интересных задач теории колебаний и теории волн решающую роль приобретает разработка методов вычисления средних (в ряде случаев — и распределения вероятностей) в условиях, когда точные решения неизвестны.

Ниже дана сводка наиболее употребительных методов; все они иллюстрируются в этой главе на примере решения уравнения первого порядка. В последующих главах мы применим их для решения более сложных задач.

Мы начнем с наиболее простых примеров, в которых вся необходимая статистическая информация может быть получена путем усреднения точного решения.

Переходные процессы со случайными начальными условиями. Следующий ниже пример иллюстрирует методику вычисления статистических характеристик существенно нестационарного случайного колебания, описываемого уравнением, допускающим точное решение. Речь будет идти об установлении колебаний в генераторе, в котором начальная амплитуда колебаний в контуре определяется собственным шумом. Такая постановка задачи весьма близка к реальной, особенно для генераторов СВЧ и оптического диапазона, в которых регенерация включается импульсно; в этих условиях случайной становится такая важная характеристика, как время установления автоколебаний (см. гл. 7).

Рассмотрение простейшего варианта указанной задачи в этой главе диктуется, однако, скорее методическими соображениями. Мы сталкиваемся здесь с примером существенно нестационарного радиофизического случайного процесса, для которого статистическая информация может быть получена только из ансамбля

реализаций (рис. 1.14), а средние и распределения вероятностей существенно зависят от начала отсчета времени.

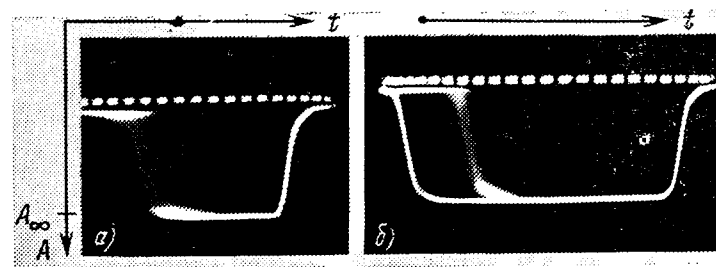


Рис. 1.14. Осциллограммы набора реализаций процесса установления амплитуды автоколебаний в отражательном клистроне [19]. а) Запуск от шумов автономного клистрона (из-за шумов размыт передний фронт импульса генерации). б) Одновременно с реализациями процесса установления в автономном клистроне показаны реализации процесса установления для клистрона, возбуждаемого регулярной внешней силой (флуктуации отсутствуют). Во всех случаях в соответствии с формулой (6) нет заметных флуктуаций установившегося значения $|A_{\infty}|$ и заднего фронта импульса генерации.

Нарастание амплитуды колебаний в нелинейном осцилляторе (томсоновский генератор, одномодовый лазер) описывается уравнением с кубической нелинейностью (см. гл. 7)

$$A - \alpha A + \beta A^3 = 0. \quad (1.6.4)$$

Его решение имеет вид

$$A(t) = \frac{A_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_{\infty}^2} (e^{2\alpha t} - 1)}}, \quad (1.6.5)$$

где A_0 — начальное значение амплитуды, а A_{∞} — установившееся значение, соответствующее $t \rightarrow \infty$. Величину A_{∞} можно найти, полагая в (4) $\dot{A} = 0$:

$$I_{\infty} = A_{\infty}^2 = \alpha/\beta, \quad A_{\infty} = \pm \sqrt{\alpha/\beta}. \quad (1.6.6)$$

Переходя к интенсивностям, получим из (5)

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\alpha \tau}}{1 + \frac{I_0}{I_{\infty}} (e^{\alpha \tau} - 1)} \quad (I = A^2, I_0 = A_0^2, \tau = 2\alpha t), \quad (1.6.7)$$

или

$$I(t) = \frac{a I_0}{1 + b I_0}, \quad a = e^{\alpha \tau}, \quad b = \frac{1}{I_{\infty}} (e^{\alpha \tau} - 1). \quad (1.6.8)$$

Предположим, что начальная интенсивность I_0 — случайная величина, имеющая распределение вероятностей $\omega_0(I_0)$. Значения

интенсивности I при этом также случайны. Используя формулу (1.2.11), можно найти распределение вероятностей для интенсивности в произвольный момент времени:

$$\omega(I, \tau) = \omega_0 \left(\frac{I}{a-bI} \right) \frac{a}{(a-bI)^2}, \quad 0 \leq I \leq I_{\max} = \frac{a}{b} = \frac{I_{\infty}}{1-e^{-\tau}}. \quad (1.6.9)$$

На рис. 1.15 приведены графики нестационарных одномерных распределений (9) интенсивности автоколебаний; они построены для $\omega_0(I_0) = \exp[-I_0/I_0]/I_0^*$.

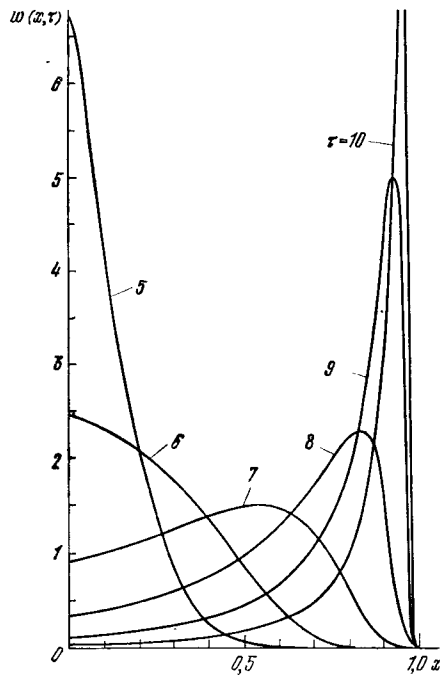


Рис. 1.15. Изменение со временем функции распределения (9) нормированной интенсивности $x = I/I_{\infty}$.

Параметром кривых является безразмерное время τ (см. (7)), отсчитываемое от момента запуска автогенератора; $I_0/I_{\infty} = 10^{-3}$.

Решение уравнения (10), соответствующее нулевым начальным условиям, может быть записано в виде так называемого интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \theta) \varphi(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t-\theta) \varphi(t-\theta) d\theta, \quad (1.6.12)$$

*) Именно таков закон распределения интенсивности для гауссовского шума; см. (2.4.8).

Пользуясь полученным распределением $\omega(I, \tau)$ (9), можно рассчитать поведение нестационарной дисперсии $\sigma(\tau)$, а также распределение времени достижения определенного уровня интенсивности $\omega_I(\tau)$ (см. §§ 3, 5 гл. 7).

Линейная система под воздействием случайных сил; функция Грина; интеграл Дюамеля. Процессы в линейной системе, находящейся под действием силы f , описываются уравнениями вида

$$\hat{L}(t)x = \hat{M}(t)f, \quad (1.6.10)$$

где $\hat{L}(t)$ и $\hat{M}(t)$ — некоторые линейные операторы (дифференциальные, интегральные, разностные или смешанного типа). Введем обозначение

$$\varphi(t) = \hat{M}(t)f. \quad (1.6.11)$$

Решение уравнения (10), соответствующее нулевым начальным условиям, может быть записано в виде так называемого интеграла Дюамеля:

где функция $H(t, \theta)$, называемая функцией Грина, зависит от вида оператора \hat{L} и не зависит от φ .

Если начальные условия отличны от нуля, т. е. в момент начала действия силы f на систему эта система не находилась в состоянии покоя, то к выражению (12) следует добавить соответствующее решение y однородного уравнения

$$\hat{L}(t)y = 0. \quad (1.6.13)$$

Это решение всегда можно представить как линейную комбинацию линейно независимых функций $y_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$), описывающих свободные колебания рассматриваемой системы:

$$y(t) = \sum_n c_n y_n(t), \quad c_n = \text{const}, \quad \hat{L}(t)y_n(t) = 0. \quad (1.6.14)$$

Физический смысл функции $H(t, t')$ состоит в том, что она описывает отклик системы в момент t на δ -импульс обобщенной силы φ , который подействовал на систему в момент t' . Действительно, подставив в (12)

$$\varphi(t) = \delta(t-t'), \quad (1.6.15)$$

получим

$$x(t) = H(t, t'). \quad (1.6.16)$$

Если φ в (12) является случайной функцией, то, используя представление решения в виде интеграла Дюамеля, нетрудно получить связь между средними, характеризующими процесс x , и аналогичными средними, характеризующими силу φ :

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \theta) \langle \varphi(\theta) \rangle d\theta, \quad (1.6.17)$$

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 H(t_1, \theta_1) H(t_2, \theta_2) \langle \varphi(\theta_1) \varphi(\theta_2) \rangle, \quad (1.6.18)$$

$$\langle x(t_1) x(t_2) x(t_3) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \times \\ \times H(t_1, \theta_1) H(t_2, \theta_2) H(t_3, \theta_3) \langle \varphi(\theta_1) \varphi(\theta_2) \varphi(\theta_3) \rangle \quad (1.6.19)$$

и т. д.

В случае гауссовости процесса φ процесс x также будет гауссовским, так как связь между x и φ , определяемая интегралом Дюамеля, линейна (см. § 2). При этом любое многомерное распределение вероятностей для x может быть выражено через среднее значение x и корреляционную функцию $\langle x(t_1) x(t_2) \rangle$ (см. (1.2.44)), т. е. выражениями (17) и (18) определяется, в принципе, самое полное статистическое описание процесса $x(t)$.

Линейные и нелинейные системы со случайно изменяющимися параметрами; двухуровневая квантовая система под действием шума. Едва ли не важнейшей радиофизической системой является осциллятор; поэтому свободные колебания осциллятора со случайными начальными условиями, вынужденные колебания осциллятора, находящегося под воздействием случайной силы, относятся к числу основных «эталонных» процессов, изучаемых в статистической радиофизике. Мы неоднократно будем обращаться к примеру линейного классического осциллятора (колебательного контура) и нелинейного классического осциллятора (томсоновского генератора) и обсуждать различные аспекты поведения этих систем.

В квантовой электронике в качестве аналога классического осциллятора можно рассматривать двухуровневую систему. Поведение двухуровневой системы, находящейся под воздействием электромагнитного поля E , описывается системой двух дифференциальных уравнений для поляризации P и разности населенностей N (см. [12], с. 58):

$$\dot{P} + \frac{2}{T_2} \dot{P} + \omega_0^2 P = + \frac{2\omega_0 |\mu_{12}|^2}{\hbar} NE, \quad (1.6.20)$$

$$\dot{N} + \frac{N - N_0}{T_1} = - \frac{2}{\hbar\omega_0} \dot{P}E. \quad (1.6.21)$$

Здесь ω_0 — частота перехода между двумя уровнями, μ_{12} — матричный элемент перехода, T_1, T_2 — времена продольной и поперечной релаксаций, N_0 — равновесное значение разности населенностей ($N = N_0$ при $E = 0$).

Отклик двухуровневой системы на световое поле аналогичен отклику линейного осциллятора лишь для слабых полей, когда изменением разности населенностей можно пренебречь ($N \approx N_0$); в этом случае можно ограничиться рассмотрением уравнения (20), которое аналогично уравнению линейного колебательного контура.

В относительно сильных световых полях отклик двухуровневой системы, описываемой уравнениями (20), (21), на световое поле становится существенно нелинейным, что приводит к разнообразным эффектам, таким, как эффект насыщения, генерация гармоник, смещение резонансной частоты под действием светового поля (оптический эффект Штарка). Особенно интересно поведение двухуровневой системы в модулированном поле; здесь возникают такие явления, как оптические нутации, самоиндуцированная прозрачность, световое эхо и т. п.

Естественно, возникает вопрос об особенностях поведения двухуровневой системы в случайном поле; детальному обсуждению возникающих здесь явлений посвящен § 5 гл. 5. Здесь же мы рассмотрим один частный пример поведения двухуровневой системы в световом поле — задачу о воздействии коротких шумовых импульсов с длительностью $\tau_{\text{имп}} \ll T_1, T_2$ на двухуровневую систему. Здесь эта проблема будет интересовать нас как пример системы уравнений со случайно меняющимися параметрами, допускающей точное решение.

Записывая световое поле и поляризацию через комплексные амплитуды и учитывая в N только медленно меняющуюся компоненту:

$$\begin{aligned} E(t) &= -iA(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, & P(t) &= p_1(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \\ N(t) &= n(t) + \dots, & N_0 &= n_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

получим, подставив (22) в (21), следующие приближенные («укороченные») уравнения:

$$T_1 \dot{n} + n - n_0 = \frac{2T_1}{\hbar} (p_1 A^* + \text{к. с.}), \quad T_2 \dot{p}_1 + p_1 = - \frac{T_2 |\mu_{12}|^2}{3\hbar} nA. \quad (1.6.23)$$

Перейдя к безразмерным полю a и поляризации p :

$$A(t) = \alpha a(t), \quad p_1(t) = \beta p(t), \quad \alpha = \frac{\hbar}{2|\mu_{12}|} \sqrt{\frac{3}{T_1 T_2}}, \quad \beta = \frac{|\mu_{12}|}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

будем иметь

$$T_1 \dot{n} + n - n_0 = p^* a(t) + \text{к. с.}, \quad T_2 \dot{p} + p = - \frac{1}{2} na(t). \quad (1.6.24)$$

Считая для простоты функцию $a(t)$ вещественной (амплитудно-модулированное поле) и учитывая условие $\tau_{\text{имп}} \ll T_1, T_2$ малой длительности светового импульса, уравнения (24) можно переписать как

$$\dot{n} = \frac{2a(t)}{T_1} p, \quad \dot{p} = - \frac{a(t)}{2T_2} n \quad (0 < t < \tau_{\text{имп}}). \quad (1.6.25)$$

До включения поля разность населенностей равна своему равновесному значению n_0 , а поляризация отсутствует, т. е. уравнения (25) должны решаться при следующих начальных условиях:

$$n = n_0, \quad p = 0 \quad (t = 0).$$

Если включается монохроматическое излучение (рис. 1.16, а), то $a = a_0 = \text{const}$ и решение (25) дает

$$n(t) = n_0 \cos \Omega_H t, \quad p(t) = - \frac{1}{2} n_0 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \sin \Omega_H t. \quad (1.6.26)$$

Изменение n имеет периодический характер с частотой $\Omega_H = \sqrt{a_0^2 / T_1 T_2}$ (так называемые нутации разности населенностей, см. рис. 1.16, б).

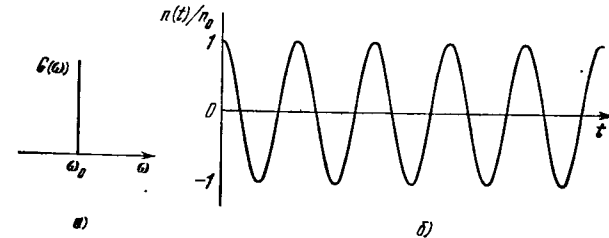


Рис. 1.16. Спектр монохроматического излучения (а) и обусловленные им нутации (б).

В общем случае переменной амплитуды поля, введя в уравнениях (25) новую переменную $\theta(t) = \int_0^t a(t) dt$, получим

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{2}{T_1} p, \quad \frac{dp}{d\theta} = - \frac{1}{2T_2} n,$$

откуда

$$n(t) = n_0 \cos \frac{\theta(t)}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (1.6.27)$$

Нас будет интересовать случай, когда модуляция поля имеет нерегулярный, флуктуационный характер. Случайными становятся при этом функции

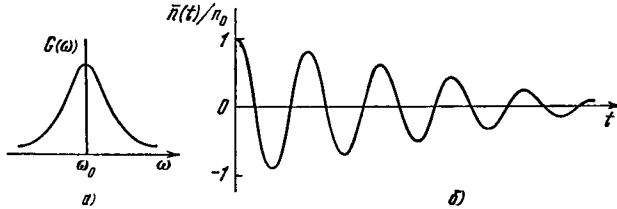


Рис. 1.17. Спектр монохроматического излучения (а) и затухающие нутации (б). Затухание нутаций обусловлено шумовой компонентой поля, имеющей сплошной спектр.

$n(t)$ и $\theta(t)$. Предположим, что $a(t)$ — гауссовский стационарный случайный процесс следующего вида:

$$a(t) = a_0 + \xi(t), \quad \bar{a} = a_0, \quad \overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau) = \sigma^2 R(\tau),$$

т. е. спектр излучения состоит из дискретной линии и непрерывного спектра $G(\omega)$, как показано на рис. 1.17, а.

Обозначая

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\xi(t) dt}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad \Omega_H = \frac{|a_0|}{\sqrt{T_1 T_2}},$$

получим из (27)

$$\bar{n}(t) = \frac{n_0}{2} e^{i\Omega_H t} \langle e^{i\varphi} \rangle + \text{к. с.} = n_0 e^{-\frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle} \cos \Omega_H t, \quad (1.6.28)$$

где учтено, что

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle},$$

так как процесс $\varphi(t)$, линейно связанный с $\xi(t)$, также будет гауссовским. Величина $\langle \varphi^2 \rangle$ выражается через функцию корреляции $B(\tau)$ флуктуаций $\xi(t)$ амплитуды поля:

$$\overline{\varphi^2} = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 B(t_1 - t_2) = 2 \int_0^t (t - \tau) B(\tau) d\tau. \quad (1.6.29)$$

Если, например, сплошной спектр на рис. 1.17, а имеет лоренцевскую форму:

$$G(\omega) = \frac{\sigma^2 D / \pi}{(\omega - \omega_0)^2 + D^2},$$

то $B(\tau) = \sigma^2 e^{-D\tau}$ и

$$\overline{\varphi^2} = \frac{2\sigma^2}{D^2} (Dt - 1 + e^{-Dt}). \quad (1.6.30)$$

В этом случае фактор $\exp \left[-\frac{1}{2} \langle \varphi^2(t) \rangle \right]$ в (28) убывает со временем сначала медленно:

$$e^{-\frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle} = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 t^2} \quad (Dt \ll 1),$$

а затем более быстро:

$$e^{-\frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle} = e^{-\frac{\sigma^2}{D} t} = e^{-\pi G(\omega_0) t} \quad (Dt \gg 1). \quad (1.6.31)$$

В результате формула (28) для $\bar{n}(t)$ принимает вид

$$\bar{n}(t) = n_0 e^{-\pi G(\omega_0) t} \cos \Omega_H(t) \quad (Dt \gg 1). \quad (1.6.32)$$

Статистический расчет показал, таким образом, что наличие у поля шумовой компоненты эквивалентно некоторым потерям и приводит к затуханию величины \bar{n} (рис. 1.17, б). Из (28) и (30) следует также, что ширина D спектра флуктуаций $\xi(t)$ поля при $t \gg D^{-1}$ перестает влиять на затухание, а существенное значение имеет лишь величина спектральной плотности $G(\omega_0)$ на частоте перехода. Это, естественно, наводит на мысль, что, интересуясь временими t , большими по сравнению с обратной полушириной спектра флуктуаций поля $\Delta\omega$,

$$t \gg 2/\Delta\omega,$$

можно при расчете заменять реальные флуктуации поля со спектром $G(\omega)$ белым шумом, т. е. полагать

$$\overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau) = 2\pi G\delta(\tau), \quad (1.6.33)$$

выбирая постоянную G равной $G(\omega_0)$. Действительно, подстановка (33) в (29) дает

$$\overline{\varphi^2} = 2\pi G t, \quad e^{-\frac{1}{2} \langle \varphi^2 \rangle} = e^{-\pi G t}$$

в соответствии с (31).

§ 7. Стохастические дифференциальные уравнения.

Использование стохастических методов при неизвестном точном решении

Усреднение системы линейных уравнений со случайными δ -коррелированными коэффициентами. Во многих задачах, особенно нелинейных или связанных с системами с переменными параметрами, вид точного решения для дифференциального уравнения, определяющего случайный процесс, бывает неизвестен.

В теории случайных процессов разработан ряд специальных методов, которые позволяют отыскивать статистические характеристики, в принципе, и в этом случае. Эти методы называют иногда стохастическими, чтобы подчеркнуть, что в них с самого начала используется случайность (стохастичность) исследуемого процесса.

Используя стохастические методы, можно, исходя из дифференциального уравнения для x и минуя его аналитическое решение, получать уравнения (тоже дифференциальные) непосредственно для статистических характеристик — моментов x^n , распределения вероятностей $\omega(x, t)$ и т. п.

Рассмотрим переход к уравнению для средних, если исследуемый случайный процесс описывается линейными дифференциальными уравнениями с δ -коррелированными случайными коэффициентами.

Чтобы пояснить сущность метода, возьмем простой случай одного уравнения первого порядка

$$\dot{x} + [h + \xi(t)]x = \varphi(t), \quad (1.7.1)$$

$$\xi = 0, \quad \overline{\xi\xi\tau} = 2D\delta(\tau), \quad (1.7.2)$$

с гауссовским случайным δ -коррелированным коэффициентом $\xi(t)$. Уравнение (1) допускает аналитическое решение; поэтому статистические характеристики x можно, в принципе, найти путем усреднения этого решения. Мы, однако, воспользуемся (1), чтобы проиллюстрировать метод вывода уравнений непосредственно для средних.

Усреднив (1) по ансамблю ξ , получим

$$\dot{\bar{x}} + h\bar{x} + \overline{\xi x} = \varphi(t). \quad (1.7.2a)$$

Если бы удалось выразить среднее $\overline{\xi x}$ через \bar{x} , мы имели бы замкнутое дифференциальное уравнение для \bar{x} . Покажем, что в рассматриваемом случае это нетрудно сделать. Интегрируя (1) методом возмущений, получим решение в виде ряда

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots,$$

члены которого пропорциональны возрастающим степеням ξ :

$$x_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta} \varphi(t-\theta) d\theta,$$

$$x_1(t) = - \int_0^{\infty} e^{-h\theta_1} \xi(t-\theta_1) x_0(t-\theta_1) d\theta_1, \quad (1.7.3)$$

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta_2} \xi(t-\theta_2) x_1(t-\theta_2) d\theta_2 = \\ = \iint_0^{\infty} e^{-h(\theta_1+\theta_2)} \xi(t-\theta_2) \xi(t-\theta_2-\theta_1) x_0(t-\theta_2-\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \quad (1.7.4)$$

и т. д.

Заметим, что члены нечетного порядка являются чисто флуктуационными, а члены четного порядка имеют как случайную,

так и регулярную компоненты:

$$x_{2n+1} = \bar{x}_{2n+1}, \quad x_{2n} = \bar{x}_{2n} + \bar{x}_{2n} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

В частности,

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t), \quad \bar{x}_2(t) = \iint_0^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 e^{-h(\theta_1+\theta_2)} [\overline{\xi(t-\theta_2) \xi(t-\theta_2-\theta_1)} - \\ - \xi(t-\theta_2) \xi(t-\theta_2-\theta_1)] x_0(t-\theta_2-\theta_1). \quad (1.7.5)$$

Используя корреляционную функцию (2), находим, что

$$\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}_1(\theta) d\theta \rangle = \\ = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t+\varepsilon} d\theta \int_0^{\infty} d\theta_1 e^{-h\theta_1} \langle \xi(t) \xi(\theta-\theta_1) \rangle x_0(\theta-\theta_1) = \\ = -2D \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t+\varepsilon} d\theta \int_0^{\infty} d\theta_1 e^{-h\theta_1} x_0(\theta-\theta_1) \delta(t-\theta+\theta_1). \quad (1.7.6)$$

В (6) $\theta_1 \geq 0$, а значит, обращение δ -функции в нуль может произойти только на интервале $t \leq \theta \leq t + \varepsilon$. Интегрируя в (6) сначала по θ_1 , а затем по θ , получим

$$\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}_1(\theta) d\theta \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2D x_0(t) \int_t^{t+\varepsilon} d\theta e^{-h(\theta-t)} = \\ = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2D x_0(t) \frac{e^{-h\varepsilon} - 1}{h} = 0.$$

Далее, используя (4), можно показать, что $\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}_2(\theta) d\theta \rangle = 0$

и вообще $\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}_n(\theta) d\theta \rangle = 0$. Это значит, что

$$\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}(\theta) d\theta \rangle = 0, \quad (1.7.7)$$

но поскольку $\langle \xi(t) \int_0^t \bar{x}(\theta) d\theta \rangle \equiv 0$ и $x = \bar{x} + \bar{x}$, то соотношение (7) можно переписать как

$$\langle \xi(t) \int_0^t x(\theta) d\theta \rangle = 0. \quad (1.7.8)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\langle \xi(t) \int_0^t \xi(\theta) \bar{x}(\theta) d\theta \rangle = 0.$$

т. е.

$$\langle \xi(t) \int_0^t \xi(\theta) x(\theta) d\theta \rangle = D\bar{x}(t). \quad (1.7.9)$$

Вернемся к усредненному уравнению (1):

$$\dot{\bar{x}} + h\bar{x} + \bar{\xi}x = \varphi(t), \quad (1.7.10)$$

в котором, напомним, нужно выразить $\bar{\xi}x$ через \bar{x} , чтобы получить замкнутое уравнение, содержащее только \bar{x} . Такое представление для $\bar{\xi}x$ можно найти, если воспользоваться соотношениями (8) и (9). Действительно, поскольку (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = \int_0^t [-hx(\theta) - \xi(\theta)x(\theta) + \varphi(\theta)] d\theta,$$

то

$$\bar{\xi}x = -h \langle \xi(t) \int_0^t x(\theta) d\theta \rangle - \langle \xi(t) \int_0^t \xi(\theta) x(\theta) d\theta \rangle,$$

или с учетом (8) и (9)

$$\bar{\xi}x = -D\bar{x}. \quad (1.7.11)$$

Подставив (11) в (10), получим искомое уравнение для \bar{x} :

$$\dot{\bar{x}} + (h - D)\bar{x} = \varphi(t), \quad (1.7.12)$$

из которого следует, что

$$\bar{x}(t) = \int_0^\infty e^{-(h-D)\theta} \varphi(t-\theta) d\theta = \frac{\varphi}{h-D} \quad (\varphi = \text{const}). \quad (1.7.13a)$$

Этот результат можно проверить, прямо усредняя решение уравнения (1), вид которого известен:

$$x(t) = \int_0^\infty e^{-h\theta - \chi} \varphi(t-\theta) d\theta, \quad \chi = \int_{t-\theta}^t \xi(t') dt'.$$

Считая $\varphi = \text{const}$, находим

$$\bar{x} = \varphi \int_0^\infty e^{-h\theta} \langle e^{-\chi} \rangle d\theta. \quad (1.7.13b)$$

Учитывая (2), нетрудно убедиться, что $\langle \chi^2 \rangle = 2D\theta$, причем процесс χ , линейно зависящий от гауссовского шума ξ , тоже является гауссовским. Следовательно,

$$\langle e^{-\chi} \rangle = e^{\frac{1}{2} \langle \chi^2 \rangle} = e^{D\theta}.$$

Подставив это среднее в (13б) и интегрируя, получим выражение, совпадающее с (13а).

В заключение подчеркнем, что замкнутое уравнение для \bar{x} (уравнение (12)) мы получили, воспользовавшись предположением о δ -коррелированности флуктуаций параметров. Выше указывалось, что δ -коррелированный процесс физически нереализуем. Тем не менее этой моделью можно пользоваться, если ширина спектра флуктуаций существенно превышает характерную полосу пропускания системы; более подробно этот вопрос рассмотрен в § 3 гл. 6 (см. также обсуждение после формул (31), (32)).

Соотношения типа (8) и (9) справедливы и в общем случае системы произвольного числа уравнений первого порядка со случайными δ -коррелированными коэффициентами

$$\dot{x}_m = \sum_{n=1}^N [a_{mn}(t) + \xi_{mn}(t)] x_n + a_{m0}(t) + \xi_{m0}(t) \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad (1.7.14)$$

определяющими случайные функции x_1, x_2, \dots, x_N . А именно, если $\xi_{mn}(t)$ — случайные, взаимно δ -коррелированные и, вообще говоря, нестационарные гауссовские функции времени:

$$\langle \xi_{mn} \rangle = 0, \quad \langle \xi_{mn}(t) \xi_{pq}(t') \rangle = 2D_{mnpq}(t) \delta(t-t'), \quad (1.7.15)$$

то, аналогично (8) и (9),

$$\langle \xi_{mn}(t) \int_0^t x_q(\theta) d\theta \rangle = 0, \quad (1.7.16)$$

$$\langle \xi_{mn}(t) \int_0^t \xi_{pq}(\theta) x_q(\theta) d\theta \rangle = D_{mnpq}(t) \bar{x}_q(t), \quad (1.7.17)$$

так что, усредняя (14) и используя последние соотношения, нетрудно получить систему дифференциальных уравнений для средних $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$.

Процедура вывода этих уравнений очень проста. Усредняя (14), имеем

$$\dot{\bar{x}}_m = \sum_n a_{mn} \bar{x}_n + \sum_n \langle \xi_{mn} x_n \rangle + a_{m0}, \quad (1.7.18)$$

где, очевидно,

$$\langle \xi_{mn} x_n \rangle = \langle \xi_{mn} \bar{x}_n \rangle.$$

Однако, чтобы найти $\langle \xi_{mn} \bar{x}_n \rangle$, нам нужно знать не всю флуктуацию \bar{x}_n , а лишь ее компоненту, которая коррелирует с ξ_{mn} . Обозначим эту компоненту посредством $x_n^{(k)}$:

$$\langle \xi_{mn} \bar{x}_n \rangle = \langle \xi_{mn} x_n^{(k)} \rangle. \quad (1.7.19)$$

Как следует из (16), (17), уравнения для $x_n^{(k)}$ получим, оставив в правой части (14) только члены, пропорциональные ξ_{mn} , заменяя при этом коэффициенты при ξ_{mn} их средними значениями:

$$\frac{d}{dt} x_n^{(k)} = \sum_k \bar{\xi}_{nk}(t) \bar{x}_k + \xi_{n0}(t).$$

Отсюда

$$x_n^{(k)}(t) = \sum_k \bar{x}_k(t) \int_{t_0 < t}^t \xi_{nk}(\theta) d\theta + \int_{t_0 < t}^t \xi_{n0}(\theta) d\theta, \quad (1.7.20)$$

где с учетом δ -корреляции ξ_{nk} функция \bar{x}_k вынесена из-под знака интеграла. Подставив (20) в (19), получим

$$\langle \xi_{mn} x_n \rangle = \sum_k \bar{x}_k D_{mnnk} + D_{mnn0}. \quad (1.7.21)$$

Подстановка (21) в (18) дает искомые уравнения для средних \bar{x}_m .

Соотношения вида (20) и (21) могут быть доказаны и для нелинейных стохастических уравнений. Например, если

$$\dot{x} = a(x) + b(x) \xi(t), \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau)$$

(a, b — произвольные функции x), то

$$x^{(k)} = \langle b(x) \rangle \xi, \quad \xi \equiv \int_{t_0 < t}^t \xi(\theta) d\theta$$

и

$$\langle x \xi \rangle = \langle x^{(k)} \xi \rangle = \langle b(x) \rangle D.$$

Эти соотношения следующим образом обобщаются на случай некоторой функции $f(x)$ процесса x :

$$f^{(k)} = \langle f'(x) b(x) \rangle \xi \quad (f' \equiv df/dx), \quad (1.7.21a)$$

$$\langle f(x) \xi \rangle = \langle f'(x) b(x) \rangle D. \quad (1.7.21b)$$

Приведенные соотношения строго доказываются с помощью уравнения Фоккера — Планка (см. следующий раздел), и метод расчета, основанный на модели δ -коррелированных коэффициентов, иногда называют фоккер-планковским приближением.

Описанный подход применим для определения моментов произвольного (а не только первого) порядка по x_1, \dots, x_N , так как, домножая (14) на функции x_1, \dots, x_N и комбинируя, всегда можно получить замкнутую систему линейных уравнений для величин $y_{pq} \dots r = x_p x_q \dots x_r$. Усредняя эти уравнения, приходим к уравнениям для моментов произвольного порядка $\langle y_{pq} \dots r \rangle$. Например, умножив (1) на x , получим уравнение

$$\left[\frac{d}{dt} + 2h + 2\xi(t) \right] x^2 = 2\varphi(t) x, \quad (1.7.22)$$

которое вместе с (1) образует для x и x^2 систему уравнений вида (14). Усредняя с учетом (16) и (17), находим

$$\dot{\bar{x}}^2 + (2h - 4D) \bar{x}^2 = 2\varphi(t) \bar{x}, \quad (1.7.23)$$

откуда

$$\bar{x}^2 = 2 \int_0^\infty e^{-(2h-4D)\theta} \varphi(t-\theta) \bar{x}(t-\theta) d\theta,$$

или, принимая во внимание (13а),

$$\langle x^2 \rangle_\xi = 2 \int_0^\infty d\theta d\theta_1 e^{-(2h-4D)\theta - (h-D)\theta_1} \varphi(t-\theta) \varphi(t-\theta-\theta_1), \quad (1.7.24)$$

где индекс ξ при угловых скобках напоминает, что усреднение произведено по ансамблю ξ , т. е. на функцию φ оно не распространяется. Это означает, что $\varphi(t)$ является либо регулярной (неслучайной) функцией времени, либо $\varphi(t)$ случайна, но статистически независима от $\xi(t)$.

Предположим, что имеет место последний случай, причем

$$\bar{\varphi} = 0, \quad \overline{\varphi \varphi_\tau} = B_\varphi(\tau). \quad (1.7.25)$$

Усредняя (13) и (24) дополнительно по ансамблю φ и учитывая (25), получим

$$\langle x \rangle_{\xi, \varphi} = 0, \quad \langle x^2 \rangle_{\xi, \varphi} = \frac{1}{h-2D} \int_0^\infty e^{-(h-D)\tau} B_\varphi(\tau) d\tau. \quad (1.7.26)$$

В частности, если $B_\varphi(\tau) = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|}$, то средний квадрат x будет равен

$$\langle x^2 \rangle_{\xi, \varphi} = \frac{\sigma^2}{(h-2D)(h+\gamma-D)}. \quad (1.7.27)$$

Как известно, δ -корреляции соответствует неограниченный по ширине частотный спектр: если $B(\tau) = 2D\delta(\tau)$, то

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{D}{\pi} = \text{const}$$

при любом значении ω . Поэтому рассмотренную модель уравнений с дельта-коррелированными коэффициентами можно применять лишь в том случае, если случайные коэффициенты уравнений изменяются во времени достаточно быстро, т. е. их спектр значительно перекрывает спектр свободных колебаний, как усредненных, так и соответствующих «выключенным» флуктуациям параметров.

Отметим, что имеются случаи, когда на ширину спектра случайных коэффициентов не накладывается никаких ограничений и вместе с тем могут быть получены точные уравнения для средних (см. (5.5.44) — (5.5.49)).

Уравнение Фоккера — Планка для функции распределения вероятностей. Продолжим обсуждение вопроса об определении статистических характеристик процесса $x(t)$, заданного обыкновенным (т. е. содержащим только производные по времени) дифференциальным уравнением, линейным или нелинейным, аналитический вид решения которого, вообще говоря, неизвестен. Случайность $x(t)$ обусловлена тем, что коэффициенты уравнения или его правая часть заданы как некоторые случайные функции времени.

Если эти функции времени являются δ -коррелированными шумами, то, как будет показано ниже, можно получить дифференциальное уравнение, решением которого будет распределение вероятностей $\omega(x, t)$ процесса x . Это уравнение известно как уравнение Фоккера — Планка. При известном решении $\omega(x, t)$

уравнения Фоккера — Планка определение одномерных статистических характеристик процесса x сводится к квадратурам. Перед тем, как приступить к выводу уравнения Фоккера — Планка, отметим некоторые свойства условных средних, которые непосредственно вытекают из уравнения для x и δ -корреляции его коэффициентов.

Чтобы сделать математические выкладки по возможности менее громоздкими, рассмотрим пока частный случай, когда x удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\dot{x} = a(x) + b(x)\xi(t) \quad (1.7.28)$$

с одним случайным коэффициентом $\xi(t)$,

$$\xi = 0, \quad \xi\xi_\tau = 2D\delta(\tau). \quad (1.7.29)$$

В (28) $a(x)$ и $b(x)$ — произвольные функции x . Рассмотрим статистические характеристики разности

$$\Delta x = x_\tau - x, \quad x = x(t), \quad x_\tau = x(t + \tau) \quad (\tau \geq 0). \quad (1.7.30)$$

Кроме обычных — безусловных — статистических моментов

$$\langle \Delta x^n \rangle = \langle (x_\tau - x)^n \rangle = m_n,$$

при усреднении которых учитывается случайность как x_τ , так и x , можно рассматривать условные моменты

$$\langle \Delta x^n \rangle^{усл} = m_n^{усл}(x),$$

соответствующие фиксированному значению x . Эти условные моменты являются функциями x . Для дальнейшего нам понадобятся условные моменты приращения (30).

Перепишав уравнение (28) в виде

$$\Delta x(\tau) = \int_0^\tau \{a[x(t+\theta)] + b[x(t+\theta)]\xi(t+\theta)\} d\theta,$$

будем искать Δx методом последовательных приближений, полагая

$$x(t+\theta) = x + \Delta x(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \tau), \quad \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_n,$$

т. е.

$$\Delta x_1(\tau) = \int_0^\tau [a + b\xi(t+\theta_1)] d\theta_1, \quad (1.7.31)$$

$$\Delta x_2(\tau) = \int_0^\tau \{a + a' \Delta x_1(\theta_2) + [b + b' \Delta x_1(\theta_2)]\xi(t+\theta_2)\} d\theta_2, \quad (1.7.32)$$

$$\Delta x_3(\tau) = \int_0^\tau \left\{ a + a' \Delta x_2(\theta_3) + \frac{1}{2} a'' \Delta x_2^2(\theta_3) + [b + b' \Delta x_2(\theta_3) + \frac{1}{2} b'' \Delta x_2^2(\theta_3)] \xi(t+\theta_3) \right\} d\theta_3, \quad (1.7.33)$$

и т. д.; штрихами обозначены производные функций a и b по x . Учитывая δ -корреляцию функции $\xi(t)$, находим, используя выражение (31),

$$\langle \Delta x_1 \rangle^{усл} = a\tau + \dots, \quad \langle \Delta x_1^2 \rangle^{усл} = b^2 D\tau + \dots, \quad \langle \Delta x_1^3 \rangle^{усл} = \dots,$$

где многоточия означают члены второго и более высокого порядка по τ . В следующем приближении согласно (32)

$$\langle \Delta x_2 \rangle^{усл} = (a + bb'D)\tau + \dots, \quad \langle \Delta x_2^2 \rangle^{усл} = 2b^2 D\tau + \dots, \quad \langle \Delta x_2^3 \rangle^{усл} = \dots$$

Третье приближение (33) и все приближения более высокого порядка не вносят изменений в члены порядка τ , так что с этой точностью условные моменты приращения Δx равны

$$\begin{aligned} m_1^{усл} &= \langle \Delta x \rangle^{усл} = [a(x) + b(x)b'(x)D]\tau, \\ m_2^{усл} &= \langle \Delta x^2 \rangle^{усл} = 2b^2(x)D\tau, \\ m_n^{усл} &= \langle \Delta x^n \rangle^{усл} = 0 \quad (n = 3, 4, \dots). \end{aligned} \quad (1.7.34)$$

Обратимся теперь к общим соотношениям, связывающим двумерную, одномерную и условную вероятности (см. (1.2.24)):

$$\begin{aligned} w(x, t; x_\tau, t + \tau) &= w(x_\tau, t + \tau | x, t) w(x, t), \\ w(x_\tau, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x_\tau, t + \tau | x, t) w(x, t) dx. \end{aligned} \quad (1.7.35)$$

Относительно аргумента x_τ условное распределение $w(x_\tau | x)$ обладает всеми свойствами обычного распределения вероятностей. Можно ввести, в частности, условную характеристическую функцию [3]

$$\theta^{усл}(u, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_\tau, t + \tau | x, t) e^{iu(x_\tau - x)} dx_\tau, \quad (1.7.36)$$

соответствующую случайному x_τ и фиксированному x . Разлагая в (36) экспоненту в ряд по степеням $\Delta x = x_\tau - x$, получим представление для $\theta^{усл}$ в виде ряда по условным моментам:

$$\theta^{усл}(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} m_k^{усл}(x). \quad (1.7.37)$$

Поскольку $\theta^{усл}$ и $w(x_\tau | x)$ связаны преобразованием Фурье (36), то

$$w(x_\tau, t + \tau | x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{усл}(u, x) e^{-iu(x_\tau - x)} du. \quad (1.7.38)$$

Подставив сюда ряд (37) и учитывая (1.1.23), получим [3]

$$\begin{aligned} \omega(x_\tau, t + \tau | x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^{y_{cл}}(x)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^k e^{-iu(x_\tau - x)} du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^{y_{cл}}(x)}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^k \delta(x_\tau - x). \end{aligned} \quad (1.7.39)$$

Подставив (39) в (35) и интегрируя по x , придем к соотношению

$$\begin{aligned} \omega(x_\tau, t + \tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} m_k^{y_{cл}}(x) \omega(x, t) \delta(x_\tau - x) dx = \\ &= \omega(x_\tau, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^k m_k^{y_{cл}}(x_\tau) \omega(x_\tau, t), \end{aligned}$$

которое можно переписать как

$$\frac{\omega(x_\tau, t + \tau) - \omega(x_\tau, t)}{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^k \frac{m_k^{y_{cл}}(x_\tau)}{\tau} \omega(x_\tau, t). \quad (1.7.40)$$

Устремим теперь τ к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(x_\tau, t + \tau) - \omega(x_\tau, t)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t),$$

и согласно (34)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_1^{y_{cл}}}{\tau} \equiv K_1(x) = a(x) + b(x) b'(x) D, \quad (1.7.41)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_2^{y_{cл}}}{\tau} \equiv K_2(x) = 2D b^2(x), \quad (1.7.42)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_n^{y_{cл}}}{\tau} \equiv K_n(x) = 0 \quad (n = 3, 4, \dots). \quad (1.7.43)$$

Таким образом, в пределе $\tau \rightarrow 0$ (40) принимает вид следующего линейного относительно ω уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} K_1 \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_2 \omega, \quad (1.7.44)$$

известного как уравнение Фоккера—Планка. Оно определяет зависимость одномерного распределения вероятностей $\omega(x, t)$ как от x , так и от t . Решение должно удовлетворять начальному условию

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad (1.7.45)$$

где $\omega_0(x)$ — некоторое заданное распределение вероятностей в момент $t=0$.

Заметим, что уравнение (44) справедливо и в том случае, когда коэффициенты уравнения (28) $a(x)$ и $b(x)$, а также корреляционный фактор D в (29) являются функциями времени (регулярными). Коэффициенты интенсивности K_1 и K_2 , определенные соотношениями (41) и (42), при этом будут зависеть не только от x , но и от t :

$$K_1 = K_1(x, t) = a(x, t) + b(x, t) b'(x, t) D(t), \quad (1.7.46)$$

$$K_2 = K_2(x, t) = 2D(t) b^2(x, t) \quad (1.7.47)$$

(импульс шума, модулированный шум, система с изменяющимися во времени параметрами).

Если коэффициенты интенсивности от t не зависят, то из уравнения Фоккера—Планка всегда можно найти стационарное распределение $\omega(x)$, соответствующее $t \rightarrow \infty$. Начальное условие (45) при этом несущественно, и в (44) можно положить $\partial \omega / \partial t = 0$. В результате получим

$$-\frac{\partial}{\partial x} K_1 \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_2 \omega = 0,$$

откуда

$$-K_1 \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K_2 \omega = \text{const}. \quad (1.7.48)$$

Из предположения, что $\omega(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x = \pm \infty$, следует, что $\text{const} = 0$. Переписав (48) в форме

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_2 \omega) - 2 \frac{K_1}{K_2} (K_2 \omega) = 0$$

и интегрируя, находим

$$K_2 \omega = C \exp \left[2 \int^x \frac{K_1}{K_2} dx \right];$$

C — произвольная постоянная. Окончательное выражение для стационарного распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$\omega(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp \left[2 \int^x \frac{K_1(x)}{K_2(x)} dx \right], \quad (1.7.49)$$

причем постоянная C определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1.$$

Учитывая выражения (41) и (42) для K_1 и K_2 , можно переписать (49), выразив $\omega(x)$ непосредственно через коэффициенты

динамического уравнения (28):

$$\omega(x) = \frac{C}{b(x)} \exp \left[\frac{1}{D} \int^x \frac{a(x)}{b^2(x)} dx \right]. \quad (1.7.50)$$

Марковские процессы. Рассмотрим теперь многомерное распределение вероятностей $\omega(x_1 \dots x_n)$ для процесса x , удовлетворяющего уравнению (28). Используя условные распределения (см. (1.2.24)), функцию $\omega(x_1 \dots x_n)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega(x_1 \dots x_n) &= \omega(x_n | x_1 \dots x_{n-1}) \omega(x_1 \dots x_{n-1}) = \\ &= \omega(x_n | x_1 \dots x_{n-1}) \omega(x_{n-1} | x_1 \dots x_{n-2}) \omega(x_1 \dots x_{n-2}) = \\ &= \omega(x_n | x_1 \dots x_{n-1}) \omega(x_{n-1} | x_1 \dots x_{n-2}) \dots \omega(x_2 | x_1) \omega(x_1). \end{aligned} \quad (1.7.50a)$$

Будучи решением уравнения первого порядка, функция x определяется начальным значением при $t = t_0$ и значениями процесса ξ на интервале между t и t_0 :

$$x(t) = F[x_0; \xi(\theta), t_0 \leq \theta \leq t].$$

В частности,

$$x_m = F[x_{m-1}; \xi(\theta), t_{m-1} \leq \theta \leq t_m].$$

При произвольном виде корреляционной функции шума ξ величина x_m будет зависеть не только от x_{m-1} , но и от x_{m-2} , x_{m-3} и т. д., поскольку значения ξ на интервале $t_{m-1} < \theta < t_m$ будут как-то связаны со значениями ξ на других интервалах. Однако, при δ -корреляции такая связь отсутствует и, следовательно, величина x_m от значений x , предшествующих x_{m-1} , не зависит. Это значит, что

$$\omega(x_m | x_{m-1}, x_{m-2}, \dots) = \omega(x_m | x_{m-1}). \quad (1.7.50b)$$

Процессы, для которых выполняется условие (50b), называются марковскими. Мы видим, что свойством марковости обладают все процессы, определяющиеся линейными или нелинейными уравнениями (или системами уравнений) первого порядка со случайными δ -коррелированными коэффициентами.

Подставив (50b) в (50a), получим

$$\omega(x_1 \dots x_n) = \omega(x_n | x_{n-1}) \omega(x_{n-1} | x_{n-2}) \dots \omega(x_2 | x_1) \omega(x_1),$$

т. е. многомерное стационарное распределение марковского процесса определяется стационарным *одномерным* распределением $\omega(x_1)$ вида (50) и так называемой вероятностью перехода

$$p_{nm} = \omega(x_n | x_m),$$

которая может быть найдена как *нестационарное* решение уравнения Фоккера—Планка (44), соответствующее начальному распределению (45) вида δ -функции: $p_{nm} = \omega(x, t)$ при $x_n = x$, $x_m = x_0$ и $\omega_0(x) = \delta(x - x_0)$ (см. [1—4, 29, 30]).

Пример. Поясним использование уравнения Фоккера—Планка, обратившись опять к уравнению первого порядка, описывающему параметрическую систему со случайными параметрами (уравнение (1)):

$$\dot{x} + [h + \xi(t)]x = \varphi(t), \quad \overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau). \quad (1.7.51)$$

Ранее мы решили задачу отыскания \bar{x} для этого уравнения (см. (12) и (13a)). Теперь, используя уравнение Фоккера—Планка, можно рассмотреть гораздо более общую задачу нахождения одномерной функции распределения $\omega(x)$. Согласно (28) в этом случае

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \varphi(t) - hx, \\ b(x) &= -x, \end{aligned} \quad (1.7.52)$$

так что одномерное распределение $\omega(x, t)$ будет решением уравнения Фоккера—Планка (44) с коэффициентами интенсивности, равными

$$\begin{aligned} K_1 &= \varphi(t) - 2hx + Dx, \\ K_2 &= 2Dx^2. \end{aligned} \quad (1.7.53)$$

Чтобы воспользоваться стационарным решением (50), предположим, что правая часть (51) постоянна: $\varphi = \text{const} > 0$. При этом, как следует из (51), $x \geq 0$.

Подставив (52) в (50) и учитывая условие нормировки, имеющее в рассматриваемом случае вид $\int_0^\infty \omega(x) dx = 1$, получим

$$\omega(x) = \frac{\mu^\nu e^{-\mu/x}}{\Gamma(\nu) x^{1+\nu}} \quad (x \geq 0), \quad (1.7.54)$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция. Распределение (54) зависит от двух параметров: $\mu = \varphi/D$ и $\nu = h/D$. Нормируя x на μ , получим для случайной величины $y = x/\mu$ распределение вероятностей

$$\omega(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{e^{-1/y}}{y^{1+\nu}} \quad (y \geq 0), \quad (1.7.54a)$$

зависящее только от одного параметра ν ; вид функции $\omega(y)$ показан на рис. 1.18. Нетрудно определить наиболее вероятное, т. е. соответствующее максимуму $\omega(y)$, значение y :

$$y_{\max} = \frac{1}{1+\nu},$$

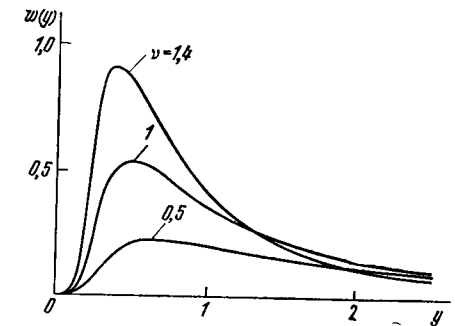


Рис. 1.18. Распределение вероятностей (54a) для удовлетворяющих уравнению (51) колебаний x в параметрической системе со случайной накачкой $\xi(t)$.

$$y = x/\mu, \quad \mu = \varphi/D, \quad \nu = h/D.$$

а также вычислить моменты

$$\langle y^n \rangle = \frac{\Gamma(v-n)}{\Gamma(v)} = \frac{1}{(v-1)(v-2)\dots(v-n)}. \quad (1.7.55)$$

В этом примере распределение вероятностей имеет такой вид, что стационарное конечное значение имеют лишь моменты, порядок которых меньше v . При $n > v$ формула (55) теряет смысл, а величина момента с $n > v$ неограниченно возрастает и стремится к ∞ . Согласно (55)

$$\bar{x} = \frac{\varphi}{h-D}, \quad \bar{x}^2 = \frac{\varphi^2}{(h-D)(h-2D)}, \quad (1.7.56)$$

что совпадает с \bar{x} и \bar{x}^2 , найденными ранее из уравнений для средних (см. (13а) и (27) при $\gamma = 0$).

Нетрудно показать также, что и сами уравнения для средних могут быть получены непосредственно из уравнения Фоккера — Планка. Чтобы в этом убедиться, умножим (44) на произвольную функцию $F(x)$ и проинтегрируем по x . Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F \frac{\partial \omega}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} F \omega dx = \dot{F}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (K_1 \omega)' F dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (FK_1 \omega)' dx - \int_{-\infty}^{\infty} K_1 F' \omega dx = \\ &= FK_1 \omega \Big|_{-\infty}^{\infty} - \overline{K_1 F'} = -\overline{K_1 F'}, \end{aligned}$$

если считать, что интеграл от полной производной по x дает нуль из-за достаточно быстрого убывания функции распределения вероятностей при $x = \pm \infty$. Аналогично найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K_2 \omega)'' F dx = \overline{K_2 F''}.$$

Таким образом, из уравнения Фоккера — Планка следует уравнение для средних

$$\dot{F} = \overline{K_1 F'} + \frac{1}{2} \overline{K_2 F''}. \quad (1.7.57)$$

Полагая, например, в (57) $F = x$ и $F = x^2$, получим

$$\dot{\bar{x}} = K_1, \quad (1.7.58)$$

$$\dot{\bar{x}^2} = 2\overline{K_1 x} + K_2. \quad (1.7.59)$$

В частном случае уравнения (51), когда K_1 и K_2 даются выражениями (53), эти уравнения принимают вид

$$\dot{\bar{x}} = \varphi(t) - (h-D)\bar{x}, \quad \dot{\bar{x}^2} = 2\varphi\bar{x} - 2(h-2D)\bar{x}^2,$$

в точности совпадая с уравнениями для средних (12) и (23), полученными другим методом.

Уравнения Фоккера — Планка для динамических уравнений, имеющих более сложный вид, чем (28), рассматриваются в [3, 4].

Несмотря на очевидные возможности метода анализа случайных процессов с помощью уравнения Фоккера — Планка, практически далеко не всегда удается им воспользоваться из-за ряда трудностей:

1) Часто задача описывается не одним, а несколькими связанными уравнениями типа (28) относительно неизвестных функций x_1, x_2, \dots, x_n . В этом случае всегда можно написать уравнение Фоккера — Планка для многомерной функции распределения $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, однако его интегрирование сразу резко усложняется. Для многомерного случая неизвестен, например, аналог стационарного решения (50).

2) Коэффициенты уравнения, которому удовлетворяет x , иногда нельзя считать δ -коррелированными. Уравнение Фоккера — Планка при этом также может быть получено, но даже первоначально одномерная задача (т. е. описывающаяся одним уравнением первого порядка) становится при этом многомерной.

3) Нам обыкновенно интересуют не только моменты случайного процесса, но и его корреляционная функция и спектр. Существует, правда, принципиальная возможность определения двумерного распределения $\omega(x, x_\tau)$, а следовательно, и корреляционной функции из уравнения Фоккера — Планка (44), но для этого необходимо получить его нестационарное решение, учитывающее производную $\partial \omega / \partial t$. Это удается сделать, однако, лишь в отдельных частных случаях.

4) Наконец, стационарное одномерное распределение (50) и тем более двумерное распределение $\omega(x, x_\tau)$ могут оказаться просто очень неудобными для вычисления статистических характеристик, приводя к очень громоздким или вообще неберущимся интегралам.

Поэтому в статистических задачах часто используются различные приближенные, не всегда достаточно обоснованные, но зато сравнительно простые методы вычисления статистических характеристик. Некоторые из этих методов рассматриваются в следующих разделах.

Линеаризация нелинейного уравнения. Из приближенных методов прежде всего следует отметить метод линеаризации. Рассмотрим его на примере нелинейного уравнения

$$\dot{x} + f(x) = \xi(t). \quad (1.7.60)$$

В области малых x можно аппроксимировать $f(x)$ первыми двумя членами степенного ряда, что приводит к линейному уравнению

$$\dot{x} + f_0 + f_0'x = \xi(t) \quad (f_0 \ll f_0'x), \quad (1.7.61)$$

из которого легко найти x и его статистические характеристики. Если предварительный анализ (60) показывает, что значение x близко к некоторой величине x_0 , то функцию $f(x)$ в (60) целесообразно разлагать не по степеням x , а по степеням разности $x - x_0$. Линеаризованное уравнение для x будет при этом выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \xi(t) \quad (|x - x_0| \ll x_0). \quad (1.7.62)$$

Иногда можно предположить, что малы флуктуации \tilde{x} величины $x = \bar{x} + \tilde{x}$. Тогда нелинейное уравнение линеаризуется по флуктуациям, и из (60) мы получаем два уравнения:

$$\dot{\tilde{x}} + f(\bar{x}) = 0, \quad (1.7.63)$$

$$\dot{\tilde{x}} + f'(\bar{x})\tilde{x} = \xi(t) \quad (|\tilde{x}| \ll |\bar{x}|), \quad (1.7.64)$$

первое из которых — существенно нелинейное — не содержит случайных функций и определяет среднее значение \bar{x} , а второе — линейное — флуктуации $\tilde{x}(t)$.

Статистическая линеаризация. К разумным результатам может привести следующий способ упрощения нелинейного уравнения: все нечетные функции x заменяются простейшей нечетной функцией вида Ax , а все четные — простейшей четной, т. е. некоторой постоянной B . Параметры линеаризации A и B подбираются при этом таким образом, чтобы при замене соблюдалась определенная статистическая эквивалентность.

Рассмотрим некоторые рецепты выбора параметра A при аппроксимации нелинейной нечетной функции $F(x) = -F(-x)$ с помощью линейной функции Ax , считая, что x — гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением ($\bar{x} = 0$) и дисперсией σ^2 .

а) Равенство дисперсий $F(x)$ и Ax :

$$\langle F^2(x) \rangle = A^2\sigma^2. \quad (1.7.65)$$

При этом

$$A = A_1 = \langle F^2 \rangle^{1/2} / \sigma. \quad (1.7.66)$$

б) Минимум отклонения Ax от $F(x)$ (в среднеквадратичном):

$$\langle [Ax - F(x)]^2 \rangle = \min. \quad (1.7.67)$$

Приравняв нулю производную от (67) по A , получим

$$A = A_2 = \langle F(x)x \rangle / \sigma^2. \quad (1.7.68)$$

в) Определение A как среднего значения производной нелинейной функции:

$$A = \langle F'(x) \rangle. \quad (1.7.69)$$

Учитывая, что распределение вероятностей $w(x)$ гауссовского процесса удовлетворяет соотношению

$$w'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} w(x), \quad (1.7.70)$$

находим

$$\begin{aligned} A = A_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) w(x) dx = w(x) F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Fw' dx = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} Fxw dx = \frac{1}{\sigma^2} \langle Fx \rangle = A_2, \end{aligned}$$

т. е. этот критерий совпадает с предыдущим.

Разумеется, можно предложить и другие варианты выбора A , например:

$$A = A_4 = (A_1 + A_2)/2 \quad (1.7.71)$$

или

$$A = A_5 = \langle F(x)/x \rangle. \quad (1.7.72)$$

При линейной аппроксимации кубической параболы $F(x) = x^3$ получим, используя приведенные выше формулы:

$$A_1 = \sqrt{15} \sigma^3 \approx 3,88\sigma^2, \quad A_2 = A_3 = 3\sigma^2, \quad A_5 = \sigma^2 < A_1, A_2. \quad (1.7.73)$$

При статистической линеаризации синусоиды $F(x) = \sin x$ имеем $\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma^2})$, $\langle \cos x \rangle = e^{-\sigma^2/2}$,

$$\left\langle \frac{\sin x}{x} \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\sigma^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} > e^{-\sigma^2/2},$$

так что

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{1 - e^{-2\sigma^2}}, \quad A_2 = A_3 = e^{-\sigma^2/2}, \quad A_5 > A_2, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.7.74)$$

Следует отметить, что в области малых значений x статистическая линеаризация эквивалентна обычной: как видно из (74), при $\sigma^2 \ll 1$ все коэффици-

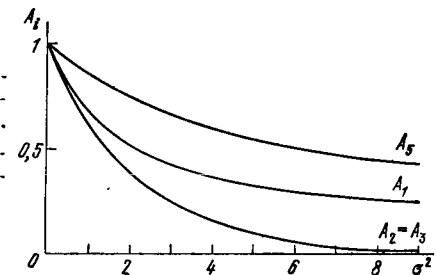


Рис. 1.19. Статистическая линеаризация гармонической функции гауссовского случайного процесса: $\sin x \rightarrow Ax$. Кривые показывают зависимость коэффициентов A_i от дисперсии $\sigma^2 = x^2$ при различных критериях выбора A_i .

енты A_i стремятся к 1, т. е. $\sin x$ заменяется просто на x . В области больших σ^2 параметры A_i могут значительно между собой различаться (рис. 1.19).

Приложение метода статистической линеаризации к анализу шумовых колебаний в нелинейной системе мы рассмотрим на примере уравнения

$$\dot{x} + x^3 = \xi(t) \quad (\bar{\xi} = 0, \xi\xi_{\tau} = 2D\delta(\tau)), \quad (1.7.75)$$

в котором шум ξ предполагается гауссовским и «белым», т. е. δ -коррелированным. В этом случае моменты $\langle x^n \rangle$ могут быть найдены из уравнения Фоккера—Планка, т. е. можно сравнить точные значения моментов с их приближенными значениями, получающимися при различных вариантах статистической линеаризации.

Согласно (73) в случае кубической нелинейности нужно положить $A = -\beta\sigma^2$, где β — численный коэффициент. Сделав в (75) замену $x^3 \rightarrow \beta\sigma^2 x$, получим линейное уравнение

$$\dot{x} + \beta\sigma^2 x = \xi(t), \quad (1.7.76)$$

из которого следует, что

$$\bar{x} = 0, \quad \overline{xx_{\tau}} = \sigma^2 e^{-\beta\sigma^2|\tau|}, \quad (1.7.77)$$

причем $\bar{x}^2 = D/\beta\sigma^2$, т. е. дисперсия и время корреляции процесса x следующим образом выражаются через D и β :

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{D}{\beta}}, \quad \tau_k = \frac{1}{\beta\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta D}}. \quad (1.7.78)$$

Таким образом, в зависимости от выбора параметра линеаризации

$$\tau_k \sqrt{D} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \begin{cases} \frac{1}{(15)^{1/4}} \approx 0,508 & (A = A_1), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,575 & (A = A_2), \\ 1 & (A = A_6). \end{cases} \quad (1.7.79)$$

С другой стороны, учитывая, что уравнение (75) принадлежит к типу уравнений (28) с $a(x) = -x^3$ и $b(x) = 1$, по формуле (50) находим для x точное стационарное распределение вероятностей:

$$\omega(x) = \frac{2\mu^{1/4}}{\Gamma(1/4)} e^{-\mu x^4}, \quad \mu = \frac{1}{4D} \quad (-\infty \leq x \leq +\infty). \quad (1.7.80)$$

Согласно (80)

$$\langle x^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle x^{2n} \rangle = \frac{\Gamma(1/4 + n/2)}{\Gamma(1/4) \mu^{n/2}} = \frac{2^n \Gamma(1/4 + n/2)}{\Gamma(1/4)} D^{n/2}. \quad (1.7.81)$$

В частности,

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 = \sqrt{D} \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad \langle x^4 \rangle = D, \quad \langle x^6 \rangle = 3\sigma^2 D, \quad (1.7.82)$$

откуда

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{D}} = \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = 0,675. \quad (1.7.83)$$

Таким образом, при статистической линеаризации уравнения (75) возникают следующие ошибки при определении σ^2 : 25% ($A = A_1$), 15% ($A = A_2$) и 48%

($A = A_6$). Вычисление моментов четвертого и шестого порядков приводит к следующим результатам:

$$\frac{\langle x^4 \rangle}{D} = \begin{cases} 1 & \text{(точно),} \\ 0,78 & (A = A_1), \\ 0,994 & (A = A_2), \\ 3 & (A = A_4), \end{cases} \quad \frac{\langle x^6 \rangle}{D^{3/2}} = \begin{cases} 2,02 & \text{(точно),} \\ 1,95 & (A = A_1), \\ 2,84 & (A = A_2), \\ 15 & (A = A_4). \end{cases} \quad (1.7.84)$$

Заметим, что выражения (82) для $\langle x^4 \rangle$ и $\langle x^6 \rangle$ можно получить сразу из (57).

Стоит обратить внимание еще на одно обстоятельство. Упрощенное уравнение (76) определяет x как гауссовский случайный процесс (ввиду линейности (76) и гауссовости ξ), хотя в действительности распределение вероятностей $\omega(x)$ (80) гауссовским не является. Между тем x действительно обладает некоторыми свойствами гауссовского процесса, в чем можно убедиться следующим образом.

Для произвольных гауссовских переменных x и ξ , пользуясь общими формулами (1.2.45), (1.2.46) для моментов, можно получить такие соотношения:

$$\bar{\xi x^3} = 3\bar{\xi x} \bar{x}^2, \quad \bar{\xi x^5} = 5\bar{\xi x} \bar{x}^4, \quad \bar{\xi x^7} = 7\bar{\xi x} \bar{x}^6$$

и т. д., иначе говоря,

$$\langle \xi x^{2n-1} \rangle = (2n-1) \bar{\xi x} \langle x^{2n-2} \rangle. \quad (1.7.85)$$

С другой стороны, полагая в уравнениях для средних (57) $F(x) = x^{2n}$, получим

$$\frac{d}{dt} \langle x^{2n} \rangle = -2n \langle x^{2n+2} \rangle + D 2n (2n-1) \langle x^{2n-2} \rangle$$

или в стационарном режиме

$$\langle x^{2n+2} \rangle = D (2n-1) \langle \xi x^{2n-1} \rangle. \quad (1.7.86)$$

Умножив уравнение (75) на x^{2n-1} и усреднив, получим

$$\langle x^{2n+2} \rangle = \langle \xi x^{2n-1} \rangle. \quad (1.7.87)$$

Сравнение (86) и (87) показывает, что

$$\langle \xi x^{2n-1} \rangle = D (2n-1) \langle x^{2n-2} \rangle. \quad (1.7.88)$$

Это совпадает с выражением (85), полученным только из гауссовости x и ξ , если учесть, что согласно (88) $\bar{\xi x} = D$.

Рассмотрим еще один подход к выбору параметра линеаризации β ($A = -\beta\sigma^2 = A_6$) опять на примере уравнения (75). Прибавив к обеим частям уравнения $\beta\sigma^2 x$, перепишем его в виде

$$\dot{x} + \beta\sigma^2 x = \xi(t) + \mu(t), \quad (1.7.89)$$

где

$$\mu(t) = \beta\sigma^2 x - x^3. \quad (1.7.90)$$

Считая функцию $\mu(t)$ малой, будем искать решение (89) в виде ряда по степеням μ , полагая

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$$

где

$$\dot{x}_0 + \beta \sigma^2 x_0 = \xi(t), \quad (1.7.91)$$

$$\dot{x}_1 + \beta \sigma^2 x_1 = \mu_0(t) = \beta \sigma x_0^2(t) - x_0^3(t), \quad (1.7.92)$$

$$\dot{x}_2 + \beta \sigma^2 x_2 = \mu_1(t) = \beta \sigma^2 x_1(t) - x_1^3(t)$$

и т. д. При этом параметр β подберем так, чтобы поправка к нулевому приближению x_0 была наименьшей. Если ограничиться вычислением только поправки x_1 , то

$$\overline{x^2} = \overline{x_0^2} + \overline{2x_0x_1} + \overline{x_1^2} = \overline{x_0^2} \left[1 + \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} \right] \quad (1.7.93)$$

и для определения β получаем условие

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} \right| = \min. \quad (1.7.94)$$

Учитывая δ -корреляцию ξ ($\overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau)$) и гауссовость x_0 , находим из (91)

$$\overline{x_0^2} = \sigma^2 = \frac{D}{\beta\sigma^2}, \quad B(\tau) = \overline{x_0x_{0\tau}} = \sigma^2 e^{-\beta\sigma^2|\tau|}, \quad (1.7.95)$$

$$\langle x_{0\tau}x_0^3 \rangle = 3\sigma^2 B(\tau), \quad \overline{x_0^3x_0^3\tau} = 9B(\tau)\sigma^4 + 6B^3(\tau),$$

$$\overline{\mu_0\mu_{0\tau}} = \sigma^4(\beta^2 - 6\beta + 9)B(\tau) + 6B^3(\tau), \quad (1.7.96)$$

$$\overline{\mu_0x_0} = \sigma^4(\beta - 3). \quad (1.7.97)$$

Согласно (92)

$$\overline{\xi x_1} = 0, \quad (1.7.98)$$

$$\overline{\mu_0x_1} = \int_0^\infty e^{-\beta\sigma^2\tau} \overline{\mu_0\mu_{0\tau}} d\tau = \frac{\sigma^4}{2\beta}(\beta^2 - 6\beta + 12). \quad (1.7.99)$$

Комбинируя (91) и (92), можно получить следующие уравнения для средних:

$$\frac{d}{dt} \langle x_0x_1 \rangle + 2\beta\sigma^2 \langle x_0x_1 \rangle = \langle x_1\xi \rangle + \langle \mu_0x_0 \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle x_1^2 \rangle + 2\beta\sigma^2 \langle x_1^2 \rangle = 2 \langle \mu_0x_1 \rangle.$$

Из них, принимая во внимание (97)–(99), находим, что в стационарном режиме

$$\frac{2\overline{x_0x_1}}{\overline{x_0^2}} = \frac{\beta - 3}{\beta}, \quad (1.7.100)$$

$$\frac{\overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} = \frac{\beta^2 - 6\beta + 12}{2\beta^2}. \quad (1.7.101)$$

Если пренебречь в (94) величиной $\overline{x_1^2}$, то согласно (100) получим

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1}}{\overline{x_0^2}} \right| = \left| \frac{\beta - 3}{\beta} \right| = \min, \quad (1.7.102)$$

откуда $\beta = 3$ и $A_6 = A_2$ (см. (73)), т. е. условие (102) совпадает с критерием (67) минимума среднеквадратичного отклонения. Учитывая в (94) сразу оба слагаемых, получим согласно (100) и (101)

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} \right| = \frac{3}{2\beta^2} |\beta^2 - 4\beta + 4| = \min,$$

откуда $\beta = 2$, что дает следующую величину дисперсии:

$$\frac{\sigma^2}{V_D} = \frac{1}{V_2} \approx 0,706. \quad (1.7.103)$$

Сравнение (103) с точным значением (83) показывает, что ошибка в оценке σ^2 теперь составляет всего 5%.

Метод статистической линеаризации нашел применение при расчете систем автоматического регулирования (см., например, [13, 14]). К нему близок так называемый кумулянтный метод, развитый в [6]. Метод статистической линеаризации нами будет использован для анализа флуктуаций в нелинейном колебательном контуре (§ 3 гл. 7).

Уравнения Дайсона для средних. Познакомимся с еще одним методом приближенного определения статистических средних (см. [1], ч. 2, а также [16, 17]), частично использующим идею линеаризации и не связанным с предположением о δ -коррелированности шума.

Рассмотрим колебания x некоторой, вообще говоря, нелинейной системы, описывающейся уравнением

$$\hat{L}x = \hat{N}(x, \xi) + f(t), \quad (1.7.104)$$

где \hat{L} — линейный регулярный (т. е. не зависящий от случайных параметров) оператор, \hat{N} — линейный или нелинейный оператор, $\xi = \xi(t)$ и f — заданные случайные функции. Полагая

$$x = \bar{x} + \tilde{x}, \quad (1.7.105)$$

перепишем (104) в виде двух (точных) уравнений: уравнения для средних

$$\hat{L}\bar{x} = \langle \hat{N}(x, \xi) \rangle + \langle f \rangle, \quad (1.7.106)$$

уравнения для флуктуаций

$$\hat{L}\tilde{x} = \hat{N} - \langle \hat{N} \rangle + f - \langle f \rangle. \quad (1.7.107)$$

Флуктуационное уравнение (107), вообще говоря, нелинейное относительно флуктуаций \tilde{x} и ξ , существенно упростится, если его по этим флуктуациям линеаризовать. В полученное таким образом линейное относительно \tilde{x} уравнение величина \bar{x} будет входить в качестве параметра (вообще говоря, перемещенного). Решение линеаризованного уравнения (107) обозначим через $\tilde{x}^{(1)}$.

Заменяя теперь точное значение $x = \bar{x} + \bar{x}$ приближенным $x = \bar{x} + \bar{x}^{(1)}$, найдем явную зависимость $\langle \hat{N} \rangle$ от \bar{x} и статистических характеристик флуктуаций ξ и $\bar{f} = f - \bar{f}$:

$$\langle \hat{N}(\xi, x) \rangle = F(\bar{x}). \quad (1.7.108)$$

В результате после подстановки (108) в (106) получим приближенное уравнение для \bar{x} вида

$$\hat{L}\bar{x} = F(\bar{x}) + \bar{f}. \quad (1.7.109)$$

Уравнение (109) аналогично уравнению Дайсона, записанному в приближении Бурре (см. [16, 17, 23]).

Описанный метод называют иногда «улучшенным» методом возмущений, и нетрудно убедиться (см. ниже), что уравнение (109) действительно дает гораздо более полное описание \bar{x} , чем то, которое можно получить, используя обычный метод возмущений.

В качестве примера рассмотрим опять уравнение (1):

$$\dot{x} + [h + \xi(t)]x = \varphi, \quad \xi = 0, \quad \overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau). \quad (1.7.110)$$

Сначала будем вычислять \bar{x} , используя обычный метод возмущений. Полагая $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \sim \xi^n$, получим цепочку уравнений

$$\dot{x}_0 + hx_0 = \varphi, \quad \dot{x}_1 + hx_1 = -\xi(t)x_0, \quad \dot{x}_2 + hx_2 = -\xi(t)x_1$$

и т. д. Отсюда находим (при $\varphi = 1$)

$$x_0 = \frac{1}{h}, \quad x_1 = -\frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\theta_1} \xi(t - \theta_1) d\theta_1, \quad \bar{x}_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} d\theta_1 \int_0^{\infty} d\theta_2 e^{-h(\theta_1 + \theta_2)} \xi(t - \theta_2) \xi(t - \theta_1 - \theta_2),$$

так что

$$\bar{x} \approx \bar{x}_0 + \bar{x}_2 = \frac{1}{h} \left[1 + \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau \right]. \quad (1.7.111)$$

Теперь определим \bar{x} , исходя из уравнения (109). В рассматриваемом случае

$$\hat{L} = \frac{d}{dt} + h, \quad \hat{N} = -\xi x, \quad f = 1$$

и флуктуационное уравнение (107) после линеаризации по ξ и \bar{x} принимает вид

$$\left(\frac{d}{dt} + h \right) \hat{x} = -\bar{x} \xi.$$

Отсюда находим

$$\bar{x} = \bar{x}^{(1)} = -\bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\theta} \xi(t - \theta) d\theta,$$

$$\langle \hat{N} \rangle = -\langle \xi \bar{x}^{(1)} \rangle = \bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau = F(\bar{x}). \quad (1.7.112)$$

Подстановка (112) в (106) дает

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + h\bar{x} = \bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau + 1. \quad (1.7.113)$$

В стационарном режиме ($\dot{\bar{x}} = 0$) из (113) находим

$$\bar{x} = \frac{1}{h(1-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau. \quad (1.7.114)$$

Сравнение (111) и (114) показывает, что эти выражения совпадают лишь в предельном случае малой интенсивности параметрического шума ($\alpha \ll 1$), причем формула (111) не описывает параметрической нестабильности (т. е. обращения \bar{x} в ∞), возникающей согласно (114) при $\alpha = 1$. Заметим, что при δ -коррелированном шуме ($\overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau)$) формула (114), следующая из уравнения Дайсона (113) для \bar{x} , дает результат

$$\bar{x} = \frac{1}{h-D},$$

совпадающий с точным (см. (13а)).

Для усиления метода уравнений Дайсона можно использовать его совместно с методом статистической линеаризации, применяя последний к флуктуационному уравнению (107)*.

§ 8. Случайные поля

Обратимся теперь к случайным функциям нескольких независимых переменных — случайным полям.

Радиофизические и оптические примеры случайных полей многообразны. Случайным (гауссовским) является электромагнитное поле, излучаемое нелазерным источником света. Из-за внутренних флуктуаций в генераторе, флуктуаций параметров антенной системы как случайное во многих ситуациях следует рассматривать и поле излучения радиопередатчика. Модель случайного

*) Более подробное изложение теории стохастических уравнений можно найти в [1], ч. 2 и [15, 23—27].

поля оказывается часто наиболее адекватной при описании излучения многомодового лазера.

Примерами случайных полей могут служить поле температуры, влажности, диэлектрической проницаемости в реальной турбулентной атмосфере; случайным становится и электромагнитное излучение, распространяющееся в такой флуктуирующей среде.

Рис. 1.20 иллюстрирует один из таких примеров; здесь показано, как трансформируется распределение интенсивности $I = EE^*$ первоначально регулярного светового пучка после прохождения через турбулентную среду. Флуктуации диэлектрической проницаемости турбулентной среды приводят к тому, что однородное на входе распределение интенсивности по поперечному сечению

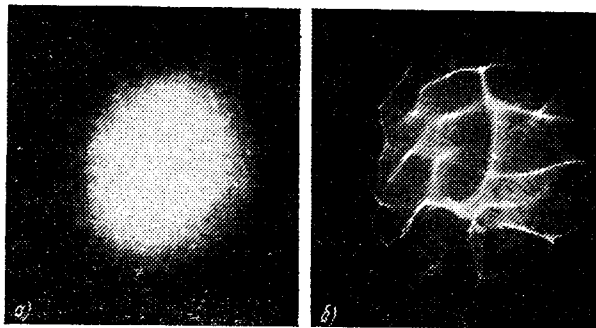


Рис. 1.20. Мгновенные распределения интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка до (а) и после (б) прохождения его через турбулентную среду. Видно, что после прохождения пучка через турбулентную среду распределение интенсивности приобретает случайный характер [31].

пучка превращается в нерегулярное, случайное. Поэтому на выходе турбулентной среды интенсивность I и само электромагнитное поле E становятся случайными функциями координат и времени: $I(\mathbf{r}, t)$, $E(\mathbf{r}, t)$. Естественно, подобно тому как мы делали для функции одной переменной, для случайных полей можно ввести законы распределения, средние, корреляционные функции.

Ниже статистические свойства случайных полей мы рассмотрим на примере напряженности переменного электромагнитного поля. Речь будет идти о пространственно-временном случайном поле E , зависящем от \mathbf{r} и t . Сначала мы ограничимся одной из компонент поля (фактически рассмотрим скалярное поле), а затем обратимся к векторным случайным полям.

Однородные и изотропные случайные поля. Введем средние значения и корреляционные функции для скалярного комплексного случайного поля $E(\mathbf{r}, t)$. Как правило, в радиофизике и

оптике среднее значение поля $\langle E \rangle = 0$ и корреляционная функция поля $E(\mathbf{r}, t)$, являющаяся аналогом введенной в § 3 функции $B(t_1, t_2)$, имеет вид (см. (1.3.49))

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (1.8.1)$$

Для стационарных во времени полей

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1).$$

Точно так же, как среди случайных процессов можно выделить класс стационарных процессов, для которых статистические характеристики не зависят от начала отсчета времени, среди случайных полей можно выделить класс однородных полей, для которых корреляционная функция зависит лишь от разности $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_1, t_2) \quad (1.8.2)$$

(стационарности при этом может и не быть). Однородное случайное поле называется *изотропным*, если корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения расстояния между двумя точками $s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Для стационарных во времени и однородных в пространстве случайных полей корреляционная функция

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_2 - t_1) \equiv B(s, \tau). \quad (1.8.3)$$

Спектры однородных и стационарных пространственно-временных случайных полей. Обратимся теперь к спектральным представлениям для стационарных и однородных случайных полей. Аналогом разложения (1.3.13) здесь будет разложение по плоским волнам:

$$E(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d\omega d^3k, \quad (1.8.4)$$

где $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, \mathbf{k} — волновой вектор. Величины $\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k})$ мы будем называть спектральными амплитудами пространственно-временного случайного поля. Амплитуды $\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k})$ по-разному зависят от ω и \mathbf{k} в разных реализациях случайного поля, т. е. $\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k})$ — случайные функции ω и \mathbf{k} .

Пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным в § 3, введем понятие спектральной плотности пространственно-временного случайного поля и установим связь ее с корреляционной функцией. Записывая выражение для корреляционной функции $B(s, \tau)$ с помощью (4), из требования однородности и стационарности случайного поля получим

$$\langle \mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) \mathcal{E}^*(\omega', \mathbf{k}') \rangle = G(\omega, \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.8.5)$$

где $G(\omega, \mathbf{k})$ имеет смысл спектральной плотности пространственно-временного случайного поля; $G(\omega, \mathbf{k}) \geq 0$. Отсюда непосредственно

следуют соотношения, являющиеся обобщением формул (1.3.17), (1.3.18):

$$B(s, \tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\omega, k) e^{i(\omega\tau - ks)} d\omega d^3k, \quad (1.8.6)$$

$$G(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} B(\tau, s) e^{-i(\omega\tau - ks)} d\tau d^3s. \quad (1.8.7)$$

В выражениях (6) и (7) пространственно-временная корреляционная функция и спектр случайного поля записаны в общем виде. При этом временной ход корреляционной функции зависит от пространственной координаты s и, наоборот, пространственные корреляции изменяются со временем τ . Вместе с тем имеется класс задач статистической оптики, когда временную зависимость поля во всех точках пространства можно считать практически одинаковой. Тогда можно записать

$$E(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}) f(t). \quad (1.8.8)$$

Из соотношения (8) непосредственно следует, что корреляционная функция (3) принимает вид

$$B(s, \tau) = B_F(s) B_f(\tau). \quad (1.8.9)$$

Случайные поля, удовлетворяющие условию (9), иногда называют спектрально «чистыми» полями [18]. Вообще говоря, условие (9) слабее, чем (8).

Кроме того, существует специальный вид полей с так называемыми «замороженными» неоднородностями, когда напряженность электрического поля $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где \mathbf{v} — скорость перемещения неоднородностей (см. § 7 гл. 4, а также [15]). В этом случае корреляционная функция поля, очевидно, равна

$$B(s, \tau) = B(s - \mathbf{v}\tau), \quad (1.8.10)$$

т. е. пространственные и временные корреляции поля полностью взаимосвязаны между собой.

Корреляционные функции трехмерного изотропного случайного поля. Далее в этом параграфе мы будем рассматривать только пространственные флуктуации случайного поля. Предположим, что случайное поле изотропно; его корреляционная функция $B(s)$ зависит от модуля вектора $|s|$. Введем в представление $B(s)$ через волновой спектр $G(k)$ сферические координаты s, θ, φ , отсчитывая угол θ от направления вектора k :

$$\begin{aligned} G(k) &= (2\pi)^{-3} \int B(s) e^{iks} d^3s = \\ &= (2\pi)^{-3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty B(s) e^{iks \cos \theta} \sin \theta s^2 ds = \\ &= (2\pi^2 k)^{-1} \int_0^\infty s B(s) \sin ks ds = G(k). \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

Обращение формулы (11) дает соотношение

$$B(s) = \frac{4\pi}{s} \int_0^\infty G(k) k \sin ks dk. \quad (1.8.12)$$

Функция $B(s)$ является убывающей (рис. 1.21). Интервал s , на котором происходит значительное уменьшение $B(s)$, называется радиусом корреляции r_k^* .

Рассчитаем корреляционные функции $B(s)$ (12) для некоторых видов спектра $G(k)$. Если волновой спектр равномерен в интервале $[0, k_0]$:

$$G(k) = \begin{cases} G_0, & k \leq k_0, \\ 0, & k \geq k_0, \end{cases} \quad (1.8.13)$$

то

$$B(s) = \frac{4\pi}{s} G_0 \int_0^{k_0} k \sin ks dk = 4\pi s^{-3} (\sin k_0 s - k_0 s \cos k_0 s). \quad (1.8.14)$$

В случае гауссовского спектра

$$G(k) = G_0 \exp\{-(k/k_0)^2\} \quad (1.8.15)$$

для пространственной корреляционной функции получаем

$$B(s) = \pi^{1/2} k_0^3 G_0 \exp\{-(2k_0 s)^2\}. \quad (1.8.16)$$

Графики спектров (13), (15) и соответствующие им корреляционные функции (14), (16) изображены на рис. 1.21.

Двумерное изотропное случайное поле; случайная волна. Для радиоптики и оптики первоочередной интерес представляет специальный вид случайных полей — случайные волны.

Общие формулы, записанные выше для случайных полей, мы конкретизируем для случайных волн. Рассмотрение начнем с волны, близкой к регулярной плоской монохроматической волне.

Рассмотрим случайную волну вида

$$E(\mathbf{r}, z, t) = A(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - k_0 z)}. \quad (1.8.17)$$

Речь пойдет, таким образом, о волне, распространяющейся вдоль оси z ; будем считать, что комплексная амплитуда волны $A(\mathbf{r})$ случайным образом зависит только от радиуса-вектора \mathbf{r} , лежащего в плоскости, перпендикулярной оси z . Волну типа (17) можно рассматривать как «искаженную» плоскую волну. Поле вида (17), очевидно, возникает, если идеальную плоскую монохроматическую волну пропустить через безграничный плоский экран, прозрач-

* Этот параметр аналогичен времени корреляции τ_k .

ность и фазовый набег в котором случайным образом изменяются от точки к точке.

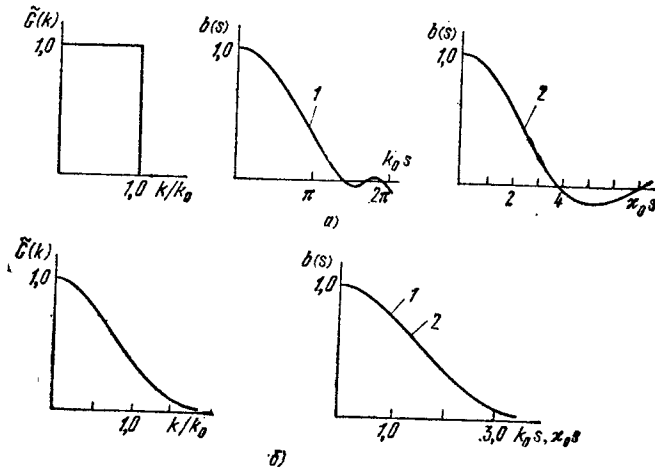


Рис. 1.21. Равномерное (а) и гауссовское (б) спектральные распределения $\tilde{G}(k)$ и соответствующие им корреляционные функции $b(s)$ для трехмерного (1) и двумерного (2) случаев. $\tilde{G}(k) = G(k)/G_0$, $b(s) = B(s)/B(0)$.

Волну (17) можно характеризовать поперечной пространственной корреляционной функцией

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle A(\mathbf{r}_1) A^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (1.8.18)$$

Для статистически однородного и изотропного поля $A(\mathbf{r})$ корреляционная функция (18) разлагается в двумерный интеграл Фурье:

$$B_{\perp}(s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}s} d^2\mathbf{x}. \quad (1.8.19)$$

Здесь \mathbf{x} — поперечная компонента волнового вектора \mathbf{k} , $k = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{x}^2}$.

Ввиду изотропности поля в (19) $G(\mathbf{x}) = G(x)$ (см. (11)); переходя к полярным координатам, выражение (19) можно представить в виде

$$B_{\perp}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(sx) G(x) x dx; \quad (1.8.20)$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя от действительного аргумента. Формула обращения (20) имеет вид

$$G(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} J_0(xs) B(s) s ds. \quad (1.8.21)$$

Вычисляя поперечные корреляционные функции (20), получим: 1) в случае равномерного спектрального распределения (13)

$$B_{\perp}(s) = 2\pi G_0 \int_0^{x_0} J_0(sx) x dx = 2\pi G_0 x_0^2 \frac{J_1(x_0 s)}{x_0 s}; \quad (1.8.22)$$

2) в случае гауссовского спектра (15)

$$B_{\perp}(s) = 2\pi G_0 \int_0^{\infty} J_0(xs) x e^{-(x/x_0)^2} dx = \pi G_0 x_0^2 e^{-(sx_0)^2/2}. \quad (1.8.23)$$

Для расчета интеграла (23) использована формула 6.631 (ГР, с. 730)*. Графики корреляционных функций (22) и (23) показаны на рис. 1.21.

Введем угол θ между направлениями векторов $\mathbf{k}_z = \mathbf{k}_0$ и \mathbf{k} ; тогда $x = k \sin \theta$ и формула (20) принимает вид

$$B_{\perp}(s) = \pi k^2 \int_0^{\pi/2} J_0(ks \sin \theta) G(k \sin \theta) \sin 2\theta d\theta. \quad (1.8.24)$$

Волновой спектр $G(x) = G(k \sin \theta)$ можно здесь интерпретировать как *угловой* спектр, определяющий среднюю интенсивность излучения под углом θ к оси z (подробнее об этом см. § 1 гл. 4).

Учитывая соотношения между функциями Бесселя и гармоническими функциями

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(x) &= (2/\pi x)^{1/2} \cos x, \\ J_{1/2}(x) &= (2/\pi x)^{1/2} \sin x, \end{aligned}$$

формулы (11), (12) и (20), (21) можно представить в единой записи:

$$\begin{aligned} B(s) &= 2\pi s^{-(n-2)/2} \int_0^{\infty} k^{n/2} J_{(n-2)/2}(ks) G(k) dk, \\ G(k) &= 2\pi k^{-(n-2)/2} \int_0^{\infty} s^{n/2} J_{(n-2)/2}(ks) B(s) ds. \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

Здесь индекс n означает размерность пространства, и, наряду со значениями $n=3$ и 2 , можно полагать $n=1$. В зависимости от значения n параметр k имеет смысл полного волнового числа или его поперечной проекции x . Нетрудно убедиться, что при $n=1$ формулы (25) аналогичны формулам (1.3.17), (1.3.18), выведенным в § 3 для случайного процесса.

* В таком виде даются далее ссылки на справочник: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.

Соотношения (25) позволяют установить связь между характерным масштабом изменения пространственной корреляционной функции — радиусом корреляции r_k (при $s=r_k$ функция $B(s)$ спадает, например, вдвое) и эффективной шириной Δk волнового (углового) спектра изотропного случайного поля:

$$\Delta k \cdot r_k \sim 1 \quad (1.8.26)$$

(ср. с (1.3.32)). Заметим, что для анизотропных полей, для которых радиусы корреляции по разным направлениям различны (с примерами таких полей мы столкнемся в гл. 8; см. рис. 8.10), вместо (26) следует писать:

$$\Delta k_x \cdot r_{kx} \sim 1, \quad \Delta k_y \cdot r_{ky} \sim 1, \quad \Delta k_z \cdot r_{kz} \sim 1.$$

Световые пучки; поперечная и продольная корреляция. Волна вида (17) со статистически изотропной комплексной амплитудой

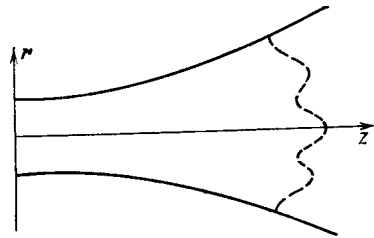


Рис. 1.22. Случайно модулированный в пространстве световой пучок.

Пунктирная линия — фазовый фронт пучка. Пример распределения интенсивности такого пучка показан на рис. 1.20, б.

является идеализированной моделью. Поэтому обратимся к более реальной модели ограниченного в пространстве светового пучка (рис. 1.22)

$$E(\mathbf{r}, z, t) = A(\mathbf{r}, z, t) e^{i[\omega t - k_0 z]} = \rho(\mathbf{r}, z, t) e^{i[\omega t - k_0 z + \varphi(\mathbf{r}, z, t)]} \quad (1.8.27)$$

Координата z направлена вдоль оси пучка; вектор \mathbf{r} , как и ранее, расположен в плоскости, перпендикулярной оси z . Изменения комплексной амплитуды A (или действительной амплитуды ρ и фазы

φ) вдоль оси пучка предполагаются гораздо более медленными, нежели поперек пучка (см. гл. 4).

Наиболее существенные черты пространственной статистики поля типа (27) описываются поперечной корреляционной функцией (18) для некоторого сечения пучка z :

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle E(\mathbf{r}_1, z, t) E^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle = \langle A(\mathbf{r}_1, z, t) A^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle \quad (1.8.28)$$

Помимо функции (28), пространственную статистику световых пучков можно характеризовать продольной корреляционной функцией

$$B(z_1, z_2; \mathbf{r}) = \langle E(\mathbf{r}, z_1) E^*(\mathbf{r}, z_2) \rangle = \langle A(\mathbf{r}, z_1) A^*(\mathbf{r}, z_2) e^{ik_0(z_2 - z_1)} \rangle \quad (1.8.29)$$

При описании процесса распространения случайно модулированных световых пучков удобным оказывается введение новых координат:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1). \quad (1.8.30)$$

При этом поперечная корреляционная функция (28) записывается в виде

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = B_{\perp}(\mathbf{s}, \mathbf{R}; z). \quad (1.8.31)$$

Зависимость от координаты R является здесь следствием пространственной ограниченности светового пучка, распределение интенсивности которого в поперечном сечении дается функцией

$$I(\mathbf{R}, z) = B_{\perp}(0, \mathbf{R}; z) = |E(\mathbf{r}_1, z, t)|^2. \quad (1.8.32)$$

Корреляционная функция B_{\perp} , вообще говоря, комплексна и от R зависит как модуль, так и аргумент B_{\perp} . Предположение о независимости B_{\perp} от R означает также ее независимость от z (см. уравнение (4.5.4)); т. е. приводит к идеализированной модели поля (17).

Из сказанного следует, что поле реальных случайно модулированных световых пучков не подчиняется условиям статистической однородности и изотропности. Другими словами, поля световых пучков являются существенно неоднородными.

Соотношение между масштабами a и r_k изменения корреляционной функции B_{\perp} соответственно вдоль радиусов-векторов \mathbf{R} и \mathbf{s} может быть, вообще говоря, произвольным. При $r_k \rightarrow \infty$ приходим к пучку с регулярной пространственной модуляцией. Для исключения из рассмотрения регулярных или крупномасштабных неоднородностей полей можно использовать так называемую структурную функцию.

Структурная функция; локально однородные и локально изотропные случайные поля. Структурная функция случайного поля $E(\mathbf{r}, t)$ определяется следующим образом:

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \langle | [E(\mathbf{r}_2, t_2) - \bar{E}(\mathbf{r}_2, t_2)] - [E(\mathbf{r}_1, t_1) - \bar{E}(\mathbf{r}_1, t_1)] |^2 \rangle \quad (1.8.33)$$

Предположим, что $t_1 = t_2 = t$ (структурная функция при наличии временного сдвига ($t_1 \neq t_2$) рассмотрена, например, в [1, ч. I]). Считая также для простоты, что $E = 0$, для функции (33) имеем

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \langle | E(\mathbf{r}_2, t) - E(\mathbf{r}_1, t) |^2 \rangle \quad (1.8.34)$$

Случайное поле называется локально однородным, если

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = D(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = D(\mathbf{s}). \quad (1.8.35)$$

В случае

$$D(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = D(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = D(s) \quad (1.8.36)$$

поле называется *локально изотропным*. Из сравнения (2) и (3) с (35) и (36) видно, что понятия локальной однородности и локальной изотропности поля для структурной функции аналогичны понятиям однородности и изотропности поля для корреляционной функции.

Когерентность; полностью и частично когерентные поля, коэффициент когерентности пучка. В оптике с коррелированностью случайных полей связывают понятие *когерентности* (см. также гл. 4). Определим нормированную корреляционную функцию следующим образом (ср. с (1.3.2)):

$$\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t_2, t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t_2, t_1)}{[I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2)]^{1/2}}. \quad (1.8.37)$$

Для стационарных полей

$$\gamma = \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau = t_2 - t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)}{[I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}}. \quad (1.8.38)$$

Величина γ называется *комплексной степенью когерентности*, поскольку корреляционная функция (1) в общем случае комплексна. Абсолютную величину γ называют модулем степени когерентности или просто *степенью когерентности*. Нетрудно убедиться, что, как и коэффициент корреляции (§ 3), степень когерентности удовлетворяет неравенству

$$|\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)| \leq 1. \quad (1.8.39)$$

Модуль величины $|\gamma|$ (38) при $\tau = 0$ дает значение степени пространственной когерентности, а при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ — значение степени временной когерентности.

Заметим, что в (37) и (38) нормировка корреляционной функции производится не на значение интенсивности в какой-либо одной пространственной точке, а на среднее геометрическое значение интенсивностей в исследуемых точках поля. Такая нормировка позволяет в большинстве случаев исключить из γ вклад регулярных изменений поля.

Для подтверждения сказанного обратимся к волновому пучку (27). Степень пространственной когерентности между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в поперечном сечении пучка равна ($\tau = 0$)

$$|\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z)| = \frac{|B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z)|}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, z)I(\mathbf{r}_2, z)}}. \quad (1.8.40)$$

Из (40) и (28) следует, что в случае $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j; z) = I(\mathbf{r}_j, z) \quad (j = 1, 2).$$

В координатах (30) степень когерентности $|\gamma|$ (40) записывается в виде

$$|\gamma(\mathbf{s}; \mathbf{R}, z)| = |B_{\perp}(\mathbf{s}, \mathbf{R}; z)| \left\{ I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) \right\}^{1/2}. \quad (1.8.41)$$

Предположим, что случайное поле $E(\mathbf{r}, z, t)$ — *квазиоднородное*

$$|B_{\perp}(\mathbf{s}, \mathbf{R}, z)| = \tilde{B}(\mathbf{s}, z) I(\mathbf{R}, z).$$

Тогда (41) принимает вид

$$|\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{R}, z)| = \tilde{B}(\mathbf{s}, z) I(\mathbf{R}, z) \left\{ I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}, z\right) \right\}^{-1/2}. \quad (1.8.41a)$$

Регулярные изменения интенсивности поля не дают вклада в значение степени когерентности (41a), если

$$I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}\right) I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right) = I^2(\mathbf{R}). \quad (1.8.41b)$$

При этом

$$|\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{R}; z)| = \tilde{B}(\mathbf{s}; z). \quad (1.8.42)$$

Нетрудно убедиться, что соотношение (41b) выполняется, если функция $I(\mathbf{R})$ имеет вид $I(\mathbf{R}) = I_0 \exp\{\beta_1 \mathbf{R} - \beta_2 \mathbf{R}^2\}$, а радиус корреляции r_k поля значительно меньше радиуса пучка $a = \beta_2^{-1/2}$. Таким образом, в случае гауссовского профиля пучка при $a \gg r_k$ степень когерентности не зависит от значения средней интенсивности.

Другим примером, дающим результат (42), является, очевидно, случай, когда поле $E(\mathbf{r}, z, t)$ (27) можно представить как

$$E(\mathbf{r}, z, t) = E_p(\mathbf{r}, z, t) \mathcal{E}_{\text{Фл}}(\mathbf{r}, z, t),$$

где E_p — действительная регулярная функция, $\mathcal{E}_{\text{Фл}}$ — случайное однородное поле; $\mathcal{E}_{\text{Фл}} \mathcal{E}_{\text{Фл}}^* = 1$, $E_p^2(\mathbf{r}, t, z) = I(\mathbf{r}, z)$.

Определенное значение степени когерентности $|\gamma|$ (40) является локальной характеристикой поля для заданных точек пространства с координатами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Поля с

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; z)| = 1$$

для любых значений $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и τ называются полностью когерентными. Если при $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ и (или) $\tau \neq 0$

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; z)| = 0,$$

то значения полей в разных пространственно-временных точках становятся статистически независимыми; такие поля называются некогерентными. Промежуточные значения $0 < |\gamma| < 1$ соответствуют частично (или не полностью) когерентным полям.

В дальнейшем (§ 4 гл. 4) мы увидим, что хотя размеры (например, эффективный радиус пучка a), степень когерентности и радиус корреляции из-за дифракционных явлений меняются при распространении пучка,

$$a = a(z), \quad \gamma = \gamma(z), \quad r_k = r_k(z),$$

но инвариантным относительно z при определенных условиях является параметр

$$C = r_k(z) / a(z) = \text{const}$$

(см. (4.5.566)), который можно назвать *коэффициентом когерентности*. Полностью когерентному пучку соответствует $C \rightarrow \infty$.

Векторные случайные поля; случайная поляризация, поляризационная матрица. Для векторного случайного поля случайными являются не только амплитуда и фаза, но и состояние поляризации. Рассмотрим один из способов задания статистики поляризации электромагнитной волны. Пусть плоская случайная волна распространяется в направлении оси z . Обозначим через E_x и E_y две вещественные ортогональные компоненты вектора $\mathbf{E}(z, t)$ в плоскости $z = \text{const}$ ($E_z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \rho_x(t) \cos(\omega t + \varphi_x(t)), \\ E_y(t) &= \rho_y(t) \cos(\omega t + \varphi_y(t)). \end{aligned} \quad (1.8.43)$$

Исключая из (43) ωt , нетрудно получить соотношение

$$\left(\frac{E_x}{\rho_x(t)}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{\rho_y(t)}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{\rho_x(t)\rho_y(t)} \cos \vartheta(t) = \sin^2 \vartheta(t), \quad (1.8.43a)$$

где $\vartheta(t) = \varphi_y(t) - \varphi_x(t)$.

Уравнение (43a) является уравнением эллипса. Таким образом, в общем случае электрический вектор \mathbf{E} электромагнитного поля описывает в пространстве эллипс. Такая волна называется эллиптически поляризованной.

Эллипс может вырождаться в окружность либо в прямую линию. Волне с круговой поляризацией соответствуют $\rho_x = \rho_y$ и $\vartheta = (2m+1)\pi/2$, линейно поляризованной волне — $\vartheta = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \dots$). Направление вращения вектора \mathbf{E} определяется знаком $\sin \vartheta$; при $\sin \vartheta > 0$ имеет место правовращающаяся поляризация, а при $\sin \vartheta < 0$ — левовращающаяся поляризация.

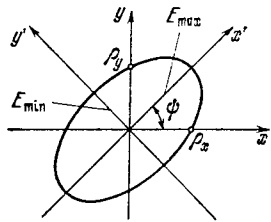


Рис. 1.23. Эллипс поляризации.

Для случайной волны ($\rho_j(t)$ и $\varphi_j(t)$ — случайные функции) определенный вид поляризации и ее параметры сохраняются в течение интервала времени, малого по сравнению с временем корреляции волны ($\tau < \tau_k$). В противоположном случае ($t \gg \tau_k$) параметры поляризации и ее вид меняются случайным образом.

Основными параметрами эллиптически поляризованной волны являются: угол ориентации ψ эллипса (угол наклона большой полуоси к оси x ; см. рис. 1.23):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\rho_x \rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 - \rho_y^2}, \quad (1.8.44)$$

и коэффициент эллиптичности, равный отношению длин малой полуоси к большой:

$$K = \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \operatorname{tg} \chi, \quad (1.8.45a)$$

где χ — вспомогательный угол,

$$\sin 2\chi = \frac{2\rho_x \rho_y \sin(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 + \rho_y^2}. \quad (1.8.45b)$$

Как уже отмечалось, для случайной волны величины ψ и χ флуктуируют во времени. Очевидно, что в случае пространственно-модулированных волн ($\rho_j = \rho_j(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_j = \varphi_j(\mathbf{r}, t)$) параметры ψ и χ изменяются и в пространстве. Формулами (44) и (45) мы воспользуемся в § 9 гл. 7 для анализа деполяризации лазерного излучения. А сейчас перейдем к описанию поляризационных свойств волны с помощью величин, имеющих размерность интенсивности, которые можно непосредственно измерить в эксперименте.

Предположим, что ортогональные компоненты E_x и E_y волны представляют собой стационарные случайные процессы. Рассматриваемую волну можно охарактеризовать набором корреляционных функций

$$B_{ij}(\tau) = \langle E_i(t) E_j^*(t + \tau) \rangle.$$

Здесь E_j — уже комплексные функции; $i, j = x, y$. образуем из $B_{ij}(\tau)$ матрицу

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} B_{xx}(0) & B_{xy}(0) \\ B_{yx}(0) & B_{yy}(0) \end{pmatrix}. \quad (1.8.46)$$

Диагональные элементы матрицы (46) суть средние интенсивности I_x и I_y ($I_j = B_{jj}(0)$) ортогональных компонент. Недиagonальные элементы зависят как от амплитуд, так и от разности фаз компонент волны. Матрица (46) определяет, таким образом, интенсивность волны и ее поляризацию и поэтому называется поляризационной *).

образуем из элементов поляризационной матрицы так называемые параметры Стокса

$$\begin{aligned} S_0 &= B_{xx}(0) + B_{yy}(0), & S_1 &= B_{xx}(0) - B_{yy}(0), \\ S_2 &= B_{xy}(0) + B_{yx}(0), & S_3 &= -i(B_{xy}(0) - B_{yx}(0)). \end{aligned} \quad (1.8.47)$$

Они имеют следующий физический смысл. Параметр S_0 равен интенсивности эллиптически поляризованной волны. Параметр S_1 есть разность интенсивностей ортогональных компонент, он характеризует преимущественную горизонтальную ($S_1 > 0$) или вертикальную ($S_1 < 0$) поляризацию волны. Остальные параметры S_2 и S_3 зависят от корреляции между ортогональными компонентами. Можно показать [20], что S_2 равно разности интенсивностей волн в системе координат, повернутой относительно исходной на $\pi/4$, а параметр S_3 — разность интенсивностей волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения. Рас-

*) Другие методы описания случайной поляризации см. в [20, 21, 28].

смотренное физическое содержание параметров Стокса показывает также способ их измерения.

Полностью и частично поляризованные волны. С помощью параметров Стокса (47) поляризационная матрица (46) записывается в виде

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}. \quad (1.8.48)$$

Инвариантами матриц (46) и (48) являются определитель

$$\det \hat{J} = \{B_{xx}B_{yy} - |B_{xy}|^2\} = \frac{1}{4} \{S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2\} \geq 0 \quad (1.8.49)$$

и след матрицы

$$\text{Sp } \hat{J} = B_{xx} + B_{yy} = S_0 > 0. \quad (1.8.50)$$

В случае полностью поляризованной волны коэффициент взаимной корреляции

$$\gamma_{xy} = B_{xy}(0) / \sqrt{B_{xx}(0)B_{yy}(0)} = e^{i\psi}, \quad (1.8.51)$$

так что $\det \hat{J} = 0$. Для неполяризованной волны все направления вектора E в плоскости фазового фронта равновероятны (коэффициент взаимной корреляции $\gamma_{xy} = 0$, $B_{xx} = B_{yy} = I$). Поляризационная матрица при этом имеет вид

$$\hat{J} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8.52)$$

В промежуточном случае частично поляризованной волны $0 < |\gamma_{xy}| < 1$.

Частично поляризованную волну можно разложить на полностью поляризованную и полностью неполяризованную волны, т. е. матрицу (46) можно записать в виде

$$\hat{J} = \hat{J}_{\text{пол}} + \hat{J}_{\text{непол}}, \quad (1.8.53)$$

где $\hat{J}_{\text{пол}}$ и $\hat{J}_{\text{непол}}$ — матрицы полностью поляризованной и неполяризованной волн соответственно:

$$\hat{J}_{\text{пол}} = \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_{\text{непол}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Из сравнения (53) с (46) следует, что

$$B_{xx} = A + B, \quad B_{yy} = A + C, \quad B_{xy} = D, \quad B_{yx} = D^*.$$

Кроме того, $\det \hat{J}_{\text{пол}} = 0$, т. е.

$$BC - DD^* = A^2 - (B_{xx} + B_{yy})A + \det \hat{J} = 0. \quad (1.8.54)$$

Решение уравнения (54) дает

$$A = \frac{1}{2} \{B_{xx} + B_{yy} \mp \sqrt{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}}\}.$$

Значение A со знаком плюс перед корнем дает отрицательные значения величин B и C , поэтому его следует отбросить. Сумма величин $B + C$ представляет собой интенсивность поляризованной волны:

$$I_{\text{пол}} = B + C = \{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}\}^{1/2}.$$

Степень поляризации. Эта величина определяется как отношение интенсивности $I_{\text{пол}}$ к полной интенсивности волны $I_0 = B_{xx} + B_{yy}$ и обозначается через P :

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_0} = \left\{1 - \frac{4 \det \hat{J}}{(\text{Sp } \hat{J})^2}\right\}^{1/2}. \quad (1.8.55)$$

Легко убедиться, что для полностью поляризованной волны $P = 1$, для неполяризованной волны $P = 0$. Частично поляризованная волна имеет значение $0 < P < 1$.

Соотношения (50) и (49) позволяют представить степень поляризации через параметры Стокса:

$$P = [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2]^{1/2} S_0^{-1}. \quad (1.8.56)$$

В соответствии с физическим смыслом параметров S_j (см. выше) величину P можно записать как

$$P = \sqrt{P_{\text{л}}^2 + P_{\text{кр}}^2}, \quad P_{\text{л}} = (S_1^2 + S_2^2)^{1/2} S_0^{-1}, \\ P_{\text{кр}} = S_3 / S_0. \quad (1.8.57)$$

Здесь $P_{\text{л}}$ и $P_{\text{кр}}$ — соответственно степени линейной и круговой поляризации.

Покажем теперь, что коэффициент взаимной корреляции γ_{xy} не может превышать степень поляризации P . Воспользовавшись (55), (50), (49), получим

$$1 - P^2 = \left(\frac{2\sqrt{B_{xx}B_{yy}}}{B_{xx} + B_{yy}}\right)^2 [1 - |\gamma_{xy}|^2]. \quad (1.8.58)$$

Поскольку $(B_{xx}^{1/2} - B_{yy}^{1/2})^2 > 0$, то из (58) следует

$$P \geq |\gamma_{xy}|. \quad (1.8.59)$$

Величина P (55) выражается через инварианты $\det \hat{J}$ и $\text{Sp } \hat{J}$ и, следовательно, не зависит от выбора осей x и y . Коэффициент же γ_{xy} зависит от выбора осей координат, он имеет максимальное значение при $B_{xx} = B_{yy}$. Нетрудно показать, что всегда можно выбрать новые координаты x' и y' , повернутые на угол θ

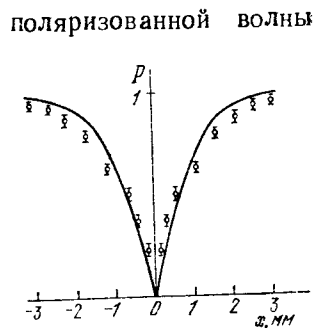


Рис. 1.24. Степень поляризации в лазерном пучке со случайной фазовой модуляцией, прошедшем через канал с оптически активным элементом [22].

x — расстояние от центра пучка.

относительно осей x и y , таким образом, чтобы

$$B_{x'x'} = B_{y'y'}. \quad (1.8.60)$$

В новой системе координат компоненты электрического поля:

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \quad E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Вычислим величины $B_{j'j'} = \langle E_{j'} E_{j'}^* \rangle$ и потребуем выполнения условия (60). При этом найдем, что угол θ определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B_{yy} - B_{xx}}{B_{xy} + B_{yx}}.$$

Поскольку $B_{yx} = B_{xy}^*$, значение θ действительное. В системе координат x' и y' степень поляризации P волны равна коэффициенту взаимной корреляции $|\gamma_{x'y'}|$. Это обстоятельство используется для измерения P .

Проведенное выше рассмотрение ограничено случаем плоской случайной волны. Для случайно модулированных световых пучков степень поляризации может быть, вообще говоря, различна для различных точек пучка (рис. 1.24).

МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

§ 1. Введение. Физика возникновения случайных процессов и полей и их математические модели

Появление статистических задач в радиофизике и оптике связано с рядом обстоятельств.

Классические и квантовые флуктуации электромагнитного поля, электрические шумы приводят к тому, что реальные радиотехнические и оптические устройства постоянно испытывают воздействие случайных сил. Неконтролируемым, случайным образом изменяются и параметры этих устройств, комплексный показатель преломления сред, в которых распространяются радио- и световые волны.

Каковы статистические свойства этих случайных процессов? Это, несомненно, один из главных вопросов статистической радиофизики и оптики. Ответ на него позволяет предсказать статистическое поведение радиофизических и оптических систем, статистические свойства распространяющихся волн, — задаваясь статистическими свойствами случайных сил, флуктуационных изменений параметров, можно найти статистические характеристики «отклика» системы, распространяющегося в флуктуирующей среде излучения, и т. п.

Несмотря на огромное разнообразие физических систем, в которых генерируются те или иные случайные процессы, подавляющее большинство последних удается описать сравнительно небольшим числом математических моделей.

В этой главе рассматриваются некоторые модели, представляющие особый интерес для радиофизики и оптики; отметим сразу же, что избранный далее порядок изложения не основан на строгой классификации и в ряде случаев выделенные модели соответствуют классификации по разным признакам (по виду распределения, спектра, характеру изменения во времени); наряду с моделями стационарных процессов, приведены и примеры моделей, описывающих нестационарность. Какие же данные использованы ниже для построения математических моделей?

Прежде всего это общие представления, фактически не требующие детального знания физического механизма (например, микроскопической картины) процесса. Наиболее яркий пример такого положения вещей — это ситуация, когда выполнены условия

применимости центральной предельной теоремы теории вероятностей (см. § 2 гл. 1). В этом случае процесс является гауссовским и можно сразу указать многие свойства многомерных распределений, моментов случайной функции и ее производных и т. п.

В силу центральной предельной теоремы гауссовские процессы занимают совершенно исключительное место в физике. Это, однако, не означает, что в статистической радиофизике приходится иметь дело только с ними. Дело в том, что гауссовское распределение устойчиво только в линейных системах с постоянными или регулярным образом изменяющимися параметрами (см. § 4 гл. 3).

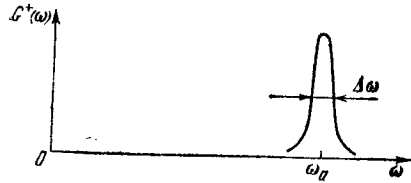


Рис. 2.1. Спектральная плотность узкополосного случайного процесса.

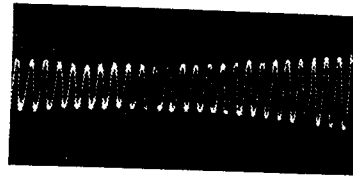


Рис. 2.2. Реализация узкополосного случайного процесса.

В нелинейных же системах или линейных системах со случайными параметрами статистика процесса существенно трансформируется; поэтому, несмотря на гауссовский характер флуктуационных сил и случайных изменений параметров, очень многие радиотехнические процессы оказываются существенно негауссовскими (см. также гл. 5, 7).

Чрезвычайно полезной оказывается также модель случайного процесса, базирующаяся на представлении реализации как колебания, близкого к синусоиде, со случайными амплитудой и фазой. Такое представление физически очень наглядно для так называемых узкополосных, или квазимонохроматических, процессов.

Действительно, пусть речь идет о случайном процессе, относительная ширина спектра которого мала: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ (рис. 2.1). Естественно ожидать, что по мере сужения полосы $\Delta\omega$ каждая отдельная реализация такого процесса будет все больше приближаться по виду к гармоническому колебанию частоты ω_0 . Отличие же реализации от точной синусоиды следует приписать наличию амплитудной и фазовой модуляции, тем более медленных — в масштабе средней частоты ω_0 , — чем уже ширина спектра $\Delta\omega$. Таким образом, возникает представление реализации случайного процесса в виде

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.1.1)$$

На рис. 2.2 приведена осциллограмма, иллюстрирующая высказанные соображения. В § 4 этой главы статистические характеристики ρ и φ определены для гауссовского процесса $\xi(t)$. В § 5 эти результаты обобщаются на случай негауссовских процессов.

Тесно связана с указанной моделью и модель колебания, модулированного шумом (см. § 7 этой главы). Постановка задачи здесь, однако, обратная. Если в (1) по заданной статистике $\xi(t)$ следует определить статистические характеристики ρ и φ , то для колебания, модулированного шумом, исходными являются функции ρ и φ , а по ним находятся характеристики ξ (в первую очередь спектр такого колебания).

Модель колебания, модулированного шумом, имеет много приложений в радиофизике и оптике. Такая модель дает адекватное описание автоколебаний в реальном автогенераторе радиодиапазона и лазере; много применений она находит в задачах распространения волн через статистически неоднородную среду.

Картина случайной амплитудной и фазовой модуляции теории ширины спектральных линий в оптике; материал, относящийся к этой теме, читатель найдет в конце § 7. Здесь, однако, центр тяжести переносится уже на микроскопическую картину возникновения случайной модуляции, а общие формулы, связывающие статистику модуляции ρ , φ и вид спектра, используются для расчета уширения спектральных линий, классификации физических механизмов.

С определенной конкретизацией физического механизма генерации случайного процесса связана и рассмотренная в § 8 модель импульсного случайного процесса. Речь идет о случайных функциях, представляющих собой суперпозицию импульсов, часто — импульсов регулярного вида. В последнем случае статистика связана со случайностью появления таких импульсов. Ярким физическим примером импульсного случайного процесса может служить дробовой шум электронной лампы. При этом случайные изменения анодного тока есть результат случайного (за счет статистики электронной эмиссии) наложения идентичных по форме регулярных импульсов. С картиной хаотически появляющихся импульсов непосредственно связана и имеющая большое значение для оптики статистика фотоэлектронного тока, или, как ее принято называть, «статистика фотоотсчетов». Естественно, что, как и ток в анодной цепи электронной лампы с подогревным катодом, фототок содержит флуктуационную составляющую; в фотоэлектродных приборах возникает дробовой шум.

Однако в задаче о статистике фототока есть и другой интересный аспект: статистика фотоотсчетов может быть использована для получения информации о статистических свойствах излучения,

освещающего фотокатод. Прямые и обратные задачи, связанные с указанным обстоятельством, обсуждаются в § 9.

Весьма наглядная физическая модель случайного процесса рассмотрена в § 10; в нем речь идет о статистике процесса, представляющего собой суперпозицию гармонических колебаний со случайными фазами (а в общем случае — и амплитудами). Исследование этой модели восходит еще к классическим работам Рэлея; в его «Теории звука» (см. [13]) дано полное решение задачи о суперпозиции гармонических мод одинаковой частоты, но со случайными фазами.

Для современной оптики большое значение имеет модель оптического шума, представляющего собой суперпозицию эквидистантных по частоте гармонических колебаний со случайными фазами; такая модель хорошо описывает излучение многомодового лазера с несинхронизованными модами.

Говоря о формулировках математических моделей реальных случайных процессов, следует иметь в виду также и чисто вычислительные аспекты, связанные с решением конкретных задач.

Как мы убедимся в дальнейшем, лишь немногие статистические задачи радиоп физики и оптики (сказанное в особенности относится к представляющим наибольший интерес *нелинейным* задачам) удастся решить в общем виде; в связи с этим выбор модели процесса во многом определяет и успех математического решения задачи. Поэтому, наряду с необходимостью адекватного описания физики процесса, возникает и проблема удачного выбора модели, правильно учитывающей основные физические характеристики процесса и вместе с тем, по возможности, упрощающей математическую сторону дела. Основные параметры модели — среднее значение, средняя интенсивность, ширина спектра — должны, разумеется, соответствовать физическим представлениям о процессе.

Вместе с тем при выборе более детальных характеристик допустим известный произвол, второстепенные параметры могут подбираться из соображений удобства решения данной задачи. Например, без ущерба для смысла получаемых результатов процесс со сплошным спектром иногда можно заменить на процесс с эквивалентным по ширине и форме дискретным спектром (см. § 10); часто используется и модель процесса с диффундирующей фазой и т. п. На перечисленных моделях случайных процессов базируется и ряд моделей случайных полей, используемых в книге; с некоторыми мы уже познакомились в § 8 гл. 1.

§ 2. Гауссовский случайный процесс

Мы начнем со сводки данных, относящихся к гауссовским случайным процессам; в значительной мере она носит справочный характер. К гауссовскому нормальному шуму приводят многие

физические механизмы, рассматриваемые ниже. Поэтому приведенные в этом параграфе соотношения используются очень широко.

Распределение вероятностей; характеристическая функция; моменты. Гауссовский, или нормальный, случайный процесс может принимать любые положительные и отрицательные значения.

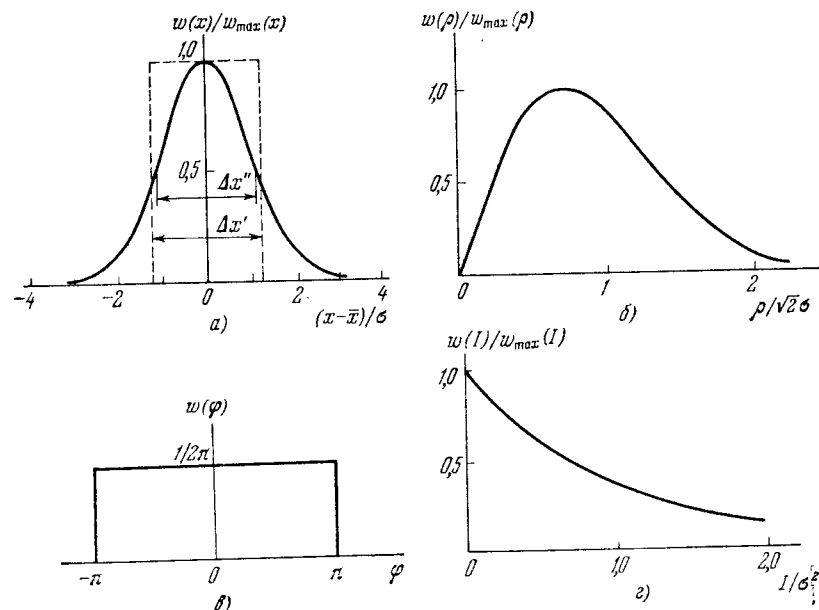


Рис. 2.3. Функции распределения:

а) гауссовского процесса (1); б) его огибающей (распределение Рэлея (2.4.6)); в) фазы (2.4.5); г) интенсивности (2.4.8).

Одномерное распределение вероятностей (функция распределения)

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \quad (-\infty \leq x \leq +\infty) \quad (2.2.1)$$

имеет один максимум при $x = \bar{x}$; $\sigma^2 = x^2 - \bar{x}^2$ (рис. 2.3). Согласно (1) отличны от нуля лишь четные центральные моменты:

$$\langle (x - \bar{x})^n \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \sigma^n = (n-1)!! \sigma^n & (n - \text{четное}), \\ 0 & (n - \text{нечетное}). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Вероятность того, что значение x лежит в некотором интервале, равна

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right], \quad (2.2.3)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt$$

— табулированная функция, называемая интегралом вероятности, или функцией ошибок, изменяющаяся в пределах от $\Phi(-\infty) = -1$ до $\Phi(\infty) = 1$. В частности,

$$P(|x - \bar{x}| \leq n\sqrt{2}\sigma) = \Phi(n) = \begin{cases} 0,9 & (n = 1,17), \\ 0,99 & (n = 1,83), \\ 0,999 & (n = 2,33). \end{cases}$$

Ширина эквивалентного прямоугольного распределения (см. рис. 2.3) равна

$$\Delta x' = \sqrt{2\pi}\sigma \approx 2,51\sigma,$$

причем

$$\omega(x = \bar{x} \pm 1/2\Delta x') = \omega_{\max} e^{-\pi/4} \approx \omega_{\max} \cdot 0,455,$$

$$P(|x - \bar{x}| \leq 1/2\Delta x') \approx 0,79.$$

За оценку ширины пика гауссовской кривой иногда принимают мало отличающуюся от $\Delta x'$ величину

$$\Delta x'' = 2\sqrt{2 \ln 2}\sigma \approx 2,37\sigma, \quad (2.2.4)$$

которая соответствует уменьшению $\omega(x)$ в два раза относительно ω_{\max} .

Если имеется несколько гауссовских случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то их совместное распределение вероятностей имеет вид (1.2.44)

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n A_{pq} (x_p - \bar{x}_p)(x_q - \bar{x}_q) \right\}; \quad (2.2.5)$$

|| A_{pq} || — матрица, обратная корреляционной матрице

$$B_{pq} = \langle (x_p - \bar{x}_p)(x_q - \bar{x}_q) \rangle = \overline{x_p x_q} - \bar{x}_p \bar{x}_q;$$

D — определитель $n \times n$ элементов матрицы B_{pq} . Иногда удобно выражать B_{pq} и A_{pq} через коэффициенты корреляции R_{pq} и дисперсии σ_p^2 :

$$\sigma_p^2 = B_{pp} = \overline{x_p^2} - \bar{x}_p^2, \quad B_{pq} = \sigma_p \sigma_q R_{pq}, \quad |R_{pq}| \leq 1, \quad R_{pp} = 1,$$

Многомерному распределению (5) соответствует характеристическая функция

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \langle \exp i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n) \rangle = \exp \left\{ i \sum_{p=1}^n u_p \bar{x}_p - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q B_{pq} \right\}. \quad (2.2.6)$$

Если величины x_1, x_2, \dots, x_n некоррелированы, то

$$B_{pq} = \begin{cases} \sigma_p^2 & (p=q), \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$$

и согласно (6)

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \theta(u_1) \dots \theta(u_n).$$

Соответственно многомерное распределение (5) распадается на произведение одномерных:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \omega(x_1) \dots \omega(x_n),$$

т. е. некоррелированность гауссовских случайных величин эквивалентна их статистической независимости.

При $n=1$ распределение (5) совпадает с (1). При $n=2$

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R_{12}^2)} \left[\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} - 2R_{12} \frac{\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (2.2.7)$$

$$(\xi_i = x_i - \bar{x}_i, \quad \sigma_i^2 = \langle \xi_i^2 \rangle, \quad -\infty \leq \xi_i \leq +\infty).$$

В случае стационарного гауссовского процесса

$$\sigma_i^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2, \quad \bar{x}_i = \bar{x}, \quad R_{12} = R(\tau) = R(-\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2)$$

и выражение (7) несколько упрощается (см. (1.4.23)).

Как следует из (5), все статистические характеристики гауссовских флуктуаций $\xi_i = x_i - \bar{x}_i$ должны выражаться через A_{pq} или B_{pq} , т. е. через элементы корреляционной матрицы. В частности, многомерные корреляции

$$B_{p \dots s} = \langle \xi_p \dots \xi_s \rangle \quad (2.2.8)$$

могут быть выражены через парные корреляции:

$$B_{p \dots s} = 0, \quad B_{p \dots s} = \sum B_{pq} \dots B_{rs}. \quad (2.2.9)$$

Сумма в (9) охватывает все варианты парных сочетаний индексов.

Из общих соотношений (1.2.45), (1.2.46), в частности, следует, что

$$B_{1122} = \langle x^2 x_t^2 \rangle = \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)], \quad (2.2.10a)$$

$$B_{111222} = \langle x^3 x_t^3 \rangle = 9\sigma^4 B(\tau) + 6B^3(\tau) = \sigma^6 [9R(\tau) + 6R^3(\tau)]. \quad (2.2.10b)$$

Спектральные амплитуды (см. § 3 гл. 1) гауссовского процесса

$$x_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\bar{x}_\omega = 0),$$

лиейно связанные с x , также будут при этом гауссовскими случайными величинами. Для них справедливы соотношения, аналогичные (8) — (10):

$$\langle x_{\omega_1} x_{\omega_2} x_{\omega_3} x_{\omega_4} \rangle = \langle x_{\omega_1} x_{\omega_2} \rangle \langle x_{\omega_3} x_{\omega_4} \rangle + \langle x_{\omega_1} x_{\omega_3} \rangle \langle x_{\omega_2} x_{\omega_4} \rangle + \langle x_{\omega_1} x_{\omega_4} \rangle \langle x_{\omega_2} x_{\omega_3} \rangle. \quad (2.2.11)$$

Если процесс $x(t)$ стационарен, то в (11)

$$\langle x_{\omega_i} x_{\omega_j} \rangle = G(\omega) \delta(\omega_i - \omega_j), \quad (2.2.12)$$

где $G(\omega)$ — спектральная плотность процесса $x(t)$.

Функции распределения для производных по времени. Если $x(t)$ — стационарный шум, то средние $\langle x^2 \rangle$ и $\langle \dot{x}^2 \rangle$ — постоянные величины я

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle x \dot{x} \rangle = 0, \quad \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle = 2 \langle \dot{x} \ddot{x} \rangle = 0,$$

т. е. \dot{x} не коррелирует как с x , так и с \ddot{x} (если все три величины берутся в один и тот же момент времени). Для гауссовских x , \dot{x} и \ddot{x} отсюда следует статистическая независимость \dot{x} от x и \ddot{x} :

$$\omega(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \omega(\dot{x}) \omega(x, \ddot{x}). \quad (2.2.13)$$

Дисперсия случайной функция x и ее производных равны:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \sigma^2, \\ \sigma_1^2 &= \langle \dot{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega = -\sigma^2 R^{(2)}(0) \equiv \sigma^2 \omega_1^2, \\ \sigma_2^2 &= \langle \ddot{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 G(\omega) d\omega = \sigma^2 R^{(4)}(0) \equiv \sigma^2 \omega_2^2, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где $R^{(n)}(0) = [(d/d\tau)^n R(\tau)]_{\tau=0}$. Учитывая стационарность x , находим

$$\langle x \ddot{x} \rangle = -\langle \dot{x}^2 \rangle = -\frac{d}{dt} \langle x \dot{x} \rangle = -\sigma_1^2,$$

т. е. коэффициент корреляции между x и \ddot{x} равен

$$R_{12} = \frac{\langle x \ddot{x} \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle \ddot{x}^2 \rangle}} = -\frac{\sigma_1^2}{\sigma \sigma_2} = -\gamma.$$

Поскольку всегда $|R_{12}| \leq 1$ (см. (1.3.3)), то

$$0 \leq \gamma \leq 1, \quad \gamma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma \sigma_2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}} \right)^2. \quad (2.2.15)$$

Иначе говоря, в (14)

$$\omega_1 \leq \omega_{11}. \quad (2.2.16)$$

Таким образом, согласно (1) и (7) в (13)

$$\omega(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad (2.2.17)$$

$$\omega(x, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi \sigma \sigma_2 \sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{2\gamma \xi \ddot{x}}{\sigma \sigma_2} + \frac{\ddot{x}^2}{\sigma_2^2} \right]\right\} \quad (2.2.18)$$

($\xi = x - \bar{x}$).

Вычисление некоторых средних. Средние вида

$$A = \langle x_1 e^{x_2} \rangle, \quad (2.2.19)$$

где x_1 и x_2 — гауссовские случайные величины, можно найти не обращаясь к двумерному распределению (7). Действительно, A можно записать как

$$A = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle e^y \rangle_{\alpha=0}, \quad (2.2.20)$$

где $y = \alpha x_1 + x_2$. Величина y , будучи линейной комбинацией x_1 и x_2 , распределена по нормальному закону, т. е.

$$\langle e^y \rangle = \exp\left\{\bar{y} + \frac{1}{2} [\langle y^2 \rangle - \bar{y}^2]\right\}. \quad (2.2.21)$$

Но

$$\bar{y} = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \bar{y}^2 = \alpha^2 \bar{x}_1^2 + 2\alpha \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2. \quad (2.2.22)$$

Подставив (21), (22) в (20), получим

$$\langle x_1 e^{x_2} \rangle = (\bar{x}_1 + \overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \bar{x}_2) \exp\left\{\bar{x}_2 + \frac{1}{2} (\bar{x}_2^2 - \bar{x}_2^2)\right\}. \quad (2.2.23)$$

Например, для стационарного процесса с нулевым средним значением я функцией корреляции $B(\tau)$ находим, используя (23),

$$\begin{aligned} \langle x_\tau e^{x\tau} \rangle &= \langle x e^{x\tau} \rangle = B(\tau) e^{\sigma^2 \tau^2 / 2}, \\ \langle \dot{x}_\tau e^{x\tau} \rangle &= -\langle \dot{x} e^{x\tau} \rangle = \dot{B}(\tau) e^{\sigma^2 \tau^2 / 2}. \end{aligned}$$

Этот простой прием очевидным образом обобщается на вычисление средних более сложного вида:

$$\langle (\hat{L}_1 x_1)^{m_1} \dots (\hat{L}_n x_n)^{m_n} e^{\hat{L}_{n+1} x_{n+1}} \rangle; \quad (2.2.24)$$

при этом, как и в рассмотренном выше примере (23), интегрирование многомерного распределения заменяется дифференцированием некоторой вспомогательной функции. В (24) m_i — целые положительные степени, \hat{L}_i — произвольные линейные операторы.

§ 3. Узкополосный стационарный шум

Огибающая, фаза, квадратурные компоненты. В этом разделе, а также в §§ 4 и 5 мы займемся моделью узкополосного стационарного шума (2.1.1), детальным анализом статистических характеристик его огибающей и фазы.

Физически представление случайного процесса (2.1.1), спектр которого $G^+(\omega)$ сосредоточен в малой области $\Delta\omega$ вблизи некоторой частоты ω_0 ,

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

(см. рис. 2.1), в виде колебания, близкого к гармоническому, совершенно естественно. Ниже мы сосредоточимся на математических

аспектах задачи и покажем, как, зная статистику $\xi(t)$, найти статистические характеристики ρ и φ .

Особое внимание в §§ 3, 4 уделено случаям, когда $\xi(t)$ является стационарным гауссовским шумом или суперпозицией гармонического сигнала и стационарного гауссовского шума. Эти примеры в равной мере важны и для радиопизики, и для оптики. Для этих случаев удается получить практически исчерпывающую информацию о корреляционных функциях и законах распределения случайных огибающей, фазы и частоты. Учитывая важность для приложений, мы приводим здесь и значительный справочный материал; наряду с действительной, мы широко будем пользоваться и комплексной записью.

Более специальный характер носит материал § 5; здесь рассмотрены *негауссовские* квазигармонические процессы.

Вводя огибающую (амплитуду) $\rho(t)$ и фазу $\varphi(t)$, запишем

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad (2.3.1)$$

вместо ρ и φ можно ввести так называемые квадратурные компоненты $a(t)$ и $b(t)$, тогда

$$\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.3.2)$$

Для узкополосного процесса ($\Delta\omega \ll \omega_0$) записи (1) и (2) соответствуют выделению быстрых ($\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$) и медленных (ρ , φ , a , b) функций времени. Заметим, что выражениями (1), (2) вместо одной случайной функции $\xi(t)$ вводится пара случайных функций: $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ или $a(t)$ и $b(t)$. Естественно, что при этом возникает некоторая степень неопределенности в нахождении указанных функций. Весьма нагляден и физичен способ устранения этого «произвола» для дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$, т. е. для процесса, у которого существует производная $\dot{\xi} = d\xi/dt$. Тогда для однозначного определения огибающей узкополосного стационарного шума можно воспользоваться формулой

$$\rho(t) = [\xi(t) + \omega_0^{-2} \dot{\xi}^2(t)]^{1/2}, \quad (2.3.2a)$$

где надо полагать $\dot{\xi} = -\omega_0 \rho \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$; при вычислении производной узкополосного процесса производными огибающей и фазы пренебрегаем. Если записано выражение (2a), то однозначно определена и фаза $\varphi(t)$.

Всюду далее при физической интерпретации результатов следует иметь в виду приведенные соотношения. Отметим вместе с тем, что при вычислении спектров и законов распределения функций ρ , φ , a , b необходимости в использовании соотношения (2a) не возникает. Огибающая, фаза и квадратурные компоненты имеют простой геометрический смысл (рис. 2.4) и связаны между

собой соотношениями

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

В дальнейшем как сам шум ξ , так и его амплитуда, фаза и квадратурные компоненты считаются *стационарными* случайными функциями времени. Можно показать (см. § 5), что при этом условии представление в виде квазисинусоид (1) или (2) становится возможным лишь для определенного класса процессов ξ , а именно для процессов с симметричным распределением вероятностей:

$$\omega(\xi) = \omega(-\xi).$$

Очевидно, что чем уже спектр процесса $\xi(t)$, тем медленнее движется изображающая точка A по плоскости xy (см. рис. 2.4); при этом изменение во времени случайных функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ также будет медленным*).

Корреляционные и спектральные характеристики квадратурных компонент. Статистические свойства функций a , b , ρ , φ и ξ между собой определенным образом связаны. В этом разделе мы рассмотрим, какие выводы могут быть сделаны только из того факта, что эти функции стационарны.

Рассмотрим стационарный шум (2) с $\bar{\xi} = 0$. В этом случае

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0. \quad (2.3.3)$$

Используя (2), составим выражение для корреляционной функции $B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle$:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} (\overline{aa_\tau} + \overline{bb_\tau}) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} - \overline{ab_\tau}) \sin \omega_0 \tau + \frac{1}{2} (\overline{aa_\tau} - \overline{bb_\tau}) \cos (2\omega_0 \tau + \omega_0 \tau) - \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} + \overline{ab_\tau}) \sin (2\omega_0 \tau + \omega_0 \tau).$$

* Подчеркнем еще раз, что представления (1), (2) физически оправданы и имеют конкретный смысл только для узкополосных процессов, поскольку только для них изменение (во времени) функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $a(t)$, $b(t)$ можно рассматривать как *модуляцию* в обычном радиопизическом смысле.

Вместе с тем следует иметь в виду, что математические результаты §§ 3—5 справедливы в общем случае процесса с произвольным спектром. Заметим, что фаза $\varphi(t)$ иногда перестает быть медленным процессом. Действительно, если точка A на рис. 2.4 переходит из второго квадранта в четвертый или из первого в третий и ее траектория проходит через начало координат, то в момент обращения в нуль огибающей величина фазы скачком меняется на π , как и бы медленным ни было движение A .

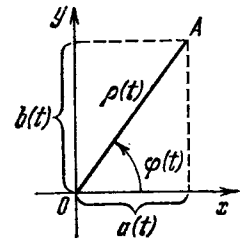


Рис. 2.4. Геометрический смысл огибающей $\rho(t)$, фазы $\varphi(t)$ и квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$ узкополосного случайного процесса.

Из-за стационарности зависимость от времени здесь должна исчезать; следовательно,

$$\langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle = \sigma^2 p(\tau), \quad (2.3.4)$$

$$\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle, \quad \langle ab_\tau \rangle = -\langle a_\tau b \rangle = \sigma^2 q(\tau). \quad (2.3.5)$$

При этом

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau - \sigma^2 q(\tau) \sin \omega_0 \tau = \sigma^2 R(\tau), \quad (2.3.6)$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции:

$$R(\tau) = p(\tau) \cos \omega_0 \tau - q(\tau) \sin \omega_0 \tau = r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)], \quad (2.3.7)$$

$$r(\tau) = \sqrt{p^2(\tau) + q^2(\tau)}, \quad \psi(\tau) = \operatorname{arctg} \frac{q(\tau)}{p(\tau)}. \quad (2.3.8)$$

Корреляционную функцию $B(\tau)$ можно также обычным образом выразить через спектр $G^+(\omega)$ (см. (1.3.19а)):

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} G^+(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (2.3.9)$$

или, если ввести новую переменную $\Omega = \omega - \omega_0$,

$$B(\tau) = \cos \omega_0 \tau \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega\tau d\Omega - \sin \omega_0 \tau \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega\tau d\Omega. \quad (2.3.10)$$

Сравнивая (6) и (10), находим, что

$$\sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega\tau d\Omega, \quad (2.3.11)$$

$$\sigma^2 q(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega\tau d\Omega. \quad (2.3.12)$$

Из этих формул видно, что функция $q(\tau)$ является нечетной функцией τ :

$$q(-\tau) = -q(\tau),$$

в частности, $q(0) = 0$, т. е. в совпадающие моменты времени квадратурные компоненты некоррелированы:

$$\langle ab \rangle = \sigma^2 q(0) = 0 \quad (2.3.13)$$

(см. (5)). Из (12) также видно, что если спектр $G^+(\omega)$ симметричен относительно частоты ω_0 :

$$G^+(\omega_0 - \Omega) = G^+(\omega_0 + \Omega),$$

то $q(\tau) = 0$ при любых τ и согласно (6)

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (2.3.14)$$

Функция $p(\tau)$ обладает всеми свойствами коэффициента корреляции стационарного процесса:

$$p(0) = 1, \quad p(-\tau) = p(\tau).$$

Преобразуя по Фурье корреляционную функцию:

$$\langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle = \sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega\tau d\Omega,$$

легко убедиться, что спектр интенсивности квадратурных компонент равен симметричной относительно ω_0 части спектра $G^+(\omega)$ процесса ξ :

$$G_a(\omega) = G_b(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} [G^+(\omega_0 - \omega) + G^+(\omega_0 + \omega)]. \quad (2.3.15)$$

При этом вид спектра квадратурных компонент существенно зависит от выбора частоты ω_0 (рис. 2.5).

Статистические свойства комплексной амплитуды узкополосного процесса. Часто вместо вещественной записи (1), (2) через огибающую и фазу или квадратурные компоненты мы будем использовать и комплексное представление случайного колебания:

$$\xi(t) = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (2.3.16)$$

Вычислим статистические характеристики комплексной амплитуды $A(t)$. Из сравнения (16) и (1), (2) следует, что

$$A(t) = \frac{a(t) + ib(t)}{2} = \frac{1}{2} p(t) e^{i\varphi(t)}, \quad (2.3.17)$$

$$a(t) = A(t) + A^*(t), \quad b(t) = i(A^*(t) - A(t)). \quad (2.3.18)$$

Пользуясь формулами для корреляционных функций квадратурных компонент (4) и (5), нетрудно получить для комплексной амплитуды стационарного шума следующие соотношения:

$$\langle A \rangle = 0, \quad \langle A^2 \rangle = \langle AA_\tau \rangle = 0, \quad \langle AA^* \rangle = \sigma^2/2, \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} \langle AA_\tau^* \rangle &= \frac{\sigma^2}{2} [p(\tau) - iq(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) e^{-i\Omega\tau} d\Omega = \\ &= e^{i\omega_0\tau} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = e^{i\omega_0\tau} \int_0^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

где $G(\omega)$ — спектральная интенсивность шума ξ ,

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

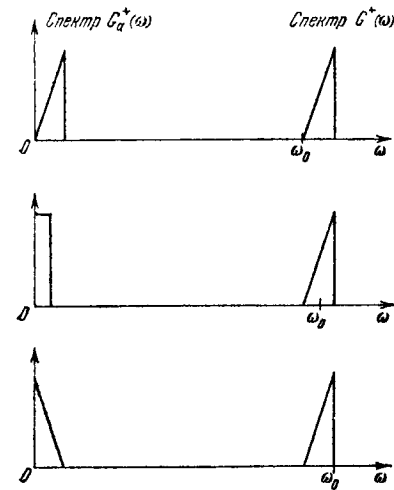


Рис. 2.5. Зависимость формы спектра квадратурных компонент от выбора частоты ω_0 .

Спектр узкополосного случайного процесса $G^+(\omega)$ во всех случаях один и тот же.

спектр $G^+(\omega)$ симметричен относительно ω_0 , то $q(\tau) = 0$ и функция $\langle AA_\tau^* \rangle$ будет чисто вещественной:

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \langle AA_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2 p(\tau). \quad (2.3.23)$$

§ 4. Узкополосный гауссовский шум

Анализ статистических свойств огибающей и фазы случайного процесса с наибольшей полнотой может быть выполнен в том случае, когда a и b являются гауссовскими случайными функциями. Процесс ξ , зависящий от a и b линейно, также будет при этом гауссовским. Ограничимся здесь рассмотрением случая, когда a , b и ξ стационарны.

Согласно (2.3.3) процессы a , b и ξ имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии:

$$a = \bar{b} = \bar{\xi} = 0, \quad a^2 = \bar{b}^2 = \bar{\xi}^2 = \sigma^2, \quad (2.4.1)$$

т. е. их одномерные распределения идентичны:

$$\omega(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-a^2/2\sigma^2}, \quad \omega(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-b^2/2\sigma^2}, \quad (2.4.2)$$

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2}.$$

При $\omega < 0$ функция $G^+(\omega) \equiv 0$, т. е. $G^+(\omega_0 + \Omega) \equiv 0$ при $\Omega < -\omega_0$. Поэтому выражение (20) можно переписать как

$$\langle AA_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) e^{-i\Omega\tau} d\Omega, \quad (2.3.21)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} G^+(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle AA_\tau^* \rangle e^{i\Omega\tau} d\tau, \quad (2.3.22)$$

т. е. корреляционная функция $\langle AA_\tau^* \rangle$ комплексной амплитуды и смещенный на ω_0 спектр по положительным частотам связаны преобразованием Фурье.

Как видно из (20), $\langle AA_\tau^* \rangle$ имеет, вообще говоря, как вещественную (четную по τ), так и мнимую (нечетную по τ) компоненты. Если

Распределения огибающей и фазы. Из гауссовости a и b и отсутствия корреляции между ними (см. (2.3.13)) следует, что в совпадающие моменты времени a и b статистически независимы, т. е. их совместное распределение вероятностей имеет вид

$$\omega(a, b) = \omega(a) \omega(b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.4.3)$$

Переходя в (3) к переменным ρ и φ :

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

найдем совместное распределение огибающей и фазы квазигармонического гауссовского процесса:

$$\omega(\rho, \varphi) = \omega(a = \rho \cos \varphi, b = \rho \sin \varphi) \left| \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \quad (2.4.4)$$

Функцию (4) можно представить как $\omega(\rho, \varphi) = \omega(\rho) \omega(\varphi)$, где $\omega(\varphi) = \text{const}$. Следовательно, подобно a и b , случайные величины ρ и φ в совпадающие моменты времени также статистически независимы. Проинтегрировав (4) по ρ ($0 < \rho < \infty$), получим

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\varphi) d\varphi = 1. \quad (2.4.5)$$

Таким образом, фаза φ имеет равномерное распределение и все ее значения в интервале $(-\pi, \pi)$ равновероятны (рис. 2.3, в). В § 5 будет показано, что распределение (5) является универсальным, т. е. равномерным распределением обладает фаза любого (не только гауссовского) квазигармонического стационарного процесса.

Разделив (4) на $\omega(\varphi) = 1/2\pi$, найдем распределение огибающей гауссовского процесса:

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0). \quad (2.4.6)$$

Это так называемое распределение Рэлея (рис. 2.3, б). Моменты ρ равны:

$$\langle \rho^{2n} \rangle = 2^n n! \sigma^{2n}, \quad \langle \rho^{2n+1} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1)!! \sigma^{2n+1}, \quad (2.4.7)$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sigma}, \quad \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma}, \quad \langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \pi/2. \quad (2.4.7a)$$

Распределение интенсивности. Интенсивность I узкополосного процесса связана с его огибающей соотношением $I = \rho^2/2$, причем

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho^2 \rangle = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle.$$

Переходя в (6) к переменной I , нетрудно убедиться, что для гауссовского узкополосного процесса распределение интенсивности является экспоненциальным:

$$\omega(I) = \omega(\rho = \sqrt{2I}) \left| \frac{d\rho}{dI} \right| = \frac{1}{\sigma^2} e^{-I/\sigma^2} = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (2.4.8)$$

рис. 2.3, з). Моменты интенсивности равны согласно (7):

$$\langle I^n \rangle = \frac{1}{2^n} \langle \rho^{2n} \rangle = n! \sigma^{2n} = n! \langle I \rangle^n. \quad (2.4.9)$$

Двумерные распределения и корреляционные функции огибающей и фазы. Ранее были найдены средние значения квадратурных компонент (они равны нулю — см. (2.3.3)) и парные корреляции между ними для двух моментов времени (см. (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.11), (2.3.12)). Поэтому, учитывая гауссовость a и b , по общей формуле (2.2.5) можно получить распределение $\omega(a, a_\tau, b, b_\tau)$, а затем, произведя замену переменных, найти четырехмерное распределение огибающей и фазы:

$$\begin{aligned} \omega(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau) &= \omega(\rho, \rho_\tau, \varphi - \varphi_\tau) = \\ &= \frac{\rho \rho_\tau}{4\pi^2 \sigma^4 (1-r^2)} \exp\left\{-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2 - 2\rho \rho_\tau \beta}{2\sigma^2 (1-r^2)}\right\}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где $r^2 = \rho^2(\tau) + q^2(\tau)$, $\beta = \rho(\tau) \cos(\varphi - \varphi_\tau) - q(\tau) \sin(\varphi - \varphi_\tau)$, $|\beta| \leq 1$.

Проинтегрировав (10) по φ и φ_τ , получим двумерное распределение для огибающей:

$$\omega(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho \rho_\tau}{\sigma^4 (1-r^2)} I_0\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho \rho_\tau}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2 (1-r^2)}\right]. \quad (2.4.11)$$

Аналогично находится двумерное распределение для фазы:

$$\omega(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1-r^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{1-\beta^2} + \beta \frac{\pi/2 + \arcsin \beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \right], \quad (2.4.12)$$

а также условные распределения:

$$\omega(\rho | \rho_\tau) = \frac{\omega(\rho \rho_\tau)}{\omega(\rho_\tau)} = \frac{\rho}{\sigma^2 (1-r^2)} I_0\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho \rho_\tau}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + r^2 \rho_\tau^2}{2\sigma^2 (1-r^2)}\right], \quad (2.4.13)$$

$$\omega(\varphi | \varphi_\tau) = \frac{\omega(\varphi - \varphi_\tau)}{\omega(\varphi_\tau)} = 2\pi \omega(\varphi, \varphi_\tau). \quad (2.4.14)$$

Заметим, что распределения (10), (11) и (14) зависят только от разности фаз,

Из (11) можно найти функцию и коэффициент корреляции огибающей (см. [1], с. 561):

$$\begin{aligned} \langle \rho \rho_\tau \rangle &= \sigma^2 [2E(1) - (1-r^2)K(r)] = \sigma^2 (1+r^2) E\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right) = \\ &= \frac{\pi \sigma^2}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 r^4 + \dots + \left(\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\right)^2 r^{2n} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

а также

$$\left\langle \frac{1}{\rho \rho_\tau} \right\rangle = \frac{K(r)}{2\sigma^2}. \quad (2.4.15a)$$

Согласно (15) коэффициент корреляции равен

$$\begin{aligned} R_\rho(\tau) &= \frac{\langle \rho \rho_\tau \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle^2} = \frac{\pi}{4-\pi} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 r^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 r^6 + \dots \right] = \\ &= 0,921r^2 + 0,058r^4 + 0,014r^6 + \dots; \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

E и K — полные эллиптические интегралы. Ряды в (15), (16) быстро сходятся, и при учете членов порядка r^4 ошибка не превышает 2%.

Таким образом, с достаточно высокой степенью точности можно написать

$$R_\rho(\tau) \approx r^2(\tau),$$

время корреляции τ_ρ огибающей меньше времени корреляции τ_ξ самого процесса; например, для процесса с экспоненциальной корреляционной функцией $\tau_\rho = \tau_\xi/2$ (ширина спектра огибающей соответственно вдвое больше ширины спектра процесса). Вместе с тем время корреляции фазы $\tau_\varphi \approx \tau_\xi$, как следует из приводимой ниже формулы (19a).

Не обращаясь к распределению (11), а используя просто правила представления высших корреляций через парные для гауссовских процессов, можно найти корреляционные функции четных степеней огибающей:

$$\langle \rho^{2n} \rho_\tau^{2m} \rangle = \langle (a^2 + b^2)^n (a_\tau^2 + b_\tau^2)^m \rangle.$$

В частности,

$$\langle \rho^2 \rho_\tau^2 \rangle = 4\sigma^4 [1 + r^2(\tau)]. \quad (2.4.17)$$

Для сравнения укажем, что

$$\langle \xi^2 \xi_\tau^2 \rangle = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)],$$

где

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau - q(\tau) \sin \omega_0 \tau = \frac{\langle \xi \xi_\tau \rangle}{\langle \xi^2 \rangle}$$

— коэффициент корреляции процесса ξ . В общем случае ([1], с. 560)

$$\langle \rho^\nu \rho_\tau^\mu \rangle = (2\sigma^2)^{(\nu+\mu)/2} \Gamma^\alpha\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\mu}{2}, 1, r^2(\tau)\right), \quad (2.4.18)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция. Так как ряд, которым выражается гипергеометрическая функция, обрывается при целых отрицательных α или β , то

$$\langle \rho^{2n} \rho_\tau^{2m} \rangle = \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{[(k+1)!]^2} r^{2(k+1)}(\tau) \right\} (2\sigma^2)^{n+m} n! m! \quad (n \leq m). \quad (2.4.19)$$

Приведем некоторые корреляционные характеристики фазы, которые могут быть найдены из распределения (12) ([1], с. 567, 570):

$$\langle \varphi \varphi_\tau \rangle = \pi^2 \left(1 + 2\gamma - 4\gamma^2 + \frac{\Omega}{12} \right), \quad \overline{\varphi^2} = \frac{\pi^2}{3}, \quad (2.4.19a)$$

$$K_\varphi(\tau) = \frac{\overline{\varphi \varphi_\tau}}{\overline{\varphi^2}} = 3 \left(2\gamma - 4\gamma^2 + \frac{\Omega}{12} \right),$$

$$\langle |\varphi - \varphi_\tau| \rangle = \pi(1 - 4\gamma), \quad \langle |\varphi - \varphi_\tau|^2 \rangle = \pi^2 \left(8\gamma^2 - 4\gamma + \frac{4 - \Omega}{6} \right),$$

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle &= \langle \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos(\omega_0 \tau + \varphi_\tau - \varphi) \rangle = \frac{R(\tau) E(r) - (1 - r^2) K(r)}{2r^2}, \end{aligned}$$

$$\langle \cos \varphi \cos \varphi_\tau \rangle = \langle \sin \varphi \sin \varphi_\tau \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(\varphi - \varphi_\tau) \rangle = \frac{p(\tau) E(r) - (1 - r^2) K(r)}{2r^2}.$$

В этих выражениях

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \arcsin r(\tau), \quad \Omega = \Omega(r) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^2}, \quad \Omega(1) = 1,$$

E и K — эллиптические интегралы, причем

$$\frac{E(r) - (1 - r^2) K(r)}{r^2} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right]^2 \frac{r^{2n}}{n+1} = \frac{\pi}{4} (1 + 0,125r^2 + 0,047r^4 + \dots). \quad (2.4.20)$$

Согласно (2.3.11), (2.3.12) и (10) при малых τ

$$p(\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} \tau^2 \Omega_2^2, \quad q(\tau) \approx \tau \Omega_1, \quad r(\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} \tau^2 \Omega_3^2, \quad (2.4.21)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) (\omega - \omega_0) d\omega, \quad \Omega_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) (\omega - \omega_0)^2 d\omega, \quad (2.4.22)$$

$$\Omega_3^2 = \Omega_2^2 - \Omega_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) (\omega - \omega_0 - \Omega_1)^2 d\omega \geq 0.$$

Параметры $\Omega_{1,2,3}$, имеющие размерность частоты, характеризуют ширину спектра квазигармонического процесса и то, как этот спектр расположен относительно частоты ω_0 . Если выбрать

$$\omega_0 = \omega'_0 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) \omega d\omega, \quad (2.4.23)$$

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2^2 = \Omega_3^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) \omega^2 d\omega - \omega_0^2. \quad (2.4.24)$$

Статистические характеристики производных по времени от огибающей и фазы. Если в (11) перейти к пределу $\tau \rightarrow 0$, то, полагая $\rho_\tau = \rho + \tau \dot{\rho}$ и используя (21), получим, домножив на якобиан $\left| \frac{\partial(\rho, \rho_\tau)}{\partial(\rho, \dot{\rho})} \right| = \tau$, совместную функцию распределения огибающей и ее производной:

$$w(\rho, \dot{\rho}) = \frac{\rho e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \frac{e^{-\dot{\rho}^2/2\sigma^2\Omega_3^2}}{\sqrt{2\pi\sigma\Omega_3}}. \quad (2.4.25)$$

Из (25) следует, что ρ и $\dot{\rho}$ статистически независимы (в совпадающие моменты времени), причем одномерная функция распределения вероятностей для $\dot{\rho}$ имеет вид гауссовской кривой

$$w(\dot{\rho}) = \frac{e^{-\dot{\rho}^2/2\sigma^2\Omega_3^2}}{\sqrt{2\pi\sigma\Omega_3}} \quad (-\infty < \dot{\rho} < \infty) \quad (2.4.26)$$

с дисперсией

$$\langle \dot{\rho}^2 \rangle = \sigma^2 \Omega_3^2 = \langle \rho^2 \rangle \Omega_3^2 / 2.$$

Тем же способом из (12) находится совместное распределение для фазы и ее производной:

$$w(\varphi, \dot{\varphi}) = w(\varphi) w(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} w(\dot{\varphi}),$$

$$w(\dot{\varphi}) = \frac{\Omega_3^2}{2 [(\dot{\varphi} - \Omega_1)^2 + \Omega_3^2]^{3/2}} \quad (\infty > \dot{\varphi} > -\infty)$$

или просто

$$w(\dot{\varphi}) = \frac{\Omega_3^2}{2(\dot{\varphi}^2 + \Omega_3^2)^{3/2}} \quad (\omega_0 = \omega'_0), \quad (2.4.27)$$

если считать, что средняя частота ω_0 выбрана в соответствии с (23).

Распределение (27) представлено на рис. 2.6. Характерная область наиболее вероятных значений $\dot{\varphi}$ определяется параметром Ω_2 . В частности, $|\dot{\varphi}| \leq 2\Omega_2$ с вероятностью 0,9 и $|\dot{\varphi}| \leq 7\Omega_2$ с вероятностью 0,99. Тем не менее дисперсия $\dot{\varphi}$ не имеет конечного значения:

$$\langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(\dot{\varphi}) \dot{\varphi}^2 d\dot{\varphi} = \infty.$$

Этот результат показывает, что, говоря о фазе узкополосного случайного процесса как о медленно меняющейся величине (по сравнению, например, с $\cos \omega_0 t$), следует соблюдать некоторую осторожность, так как при определенных условиях (вероятность их

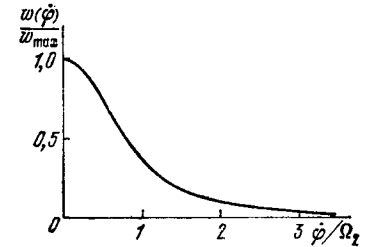


Рис. 2.6. Распределение вероятностей (27) для мгновенного значения частоты $\dot{\varphi}$.

осуществления уменьшается с уменьшением Ω_2 , но остается конечной) фаза сколь угодно узкополосного квазигармонического процесса $\xi(t)$ может меняться быстро*). Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно, используя найденные распределения вероятностей [2].

Предположим, что частота ω_0 выбрана равной ω'_0 (23), так что $\Omega_1 = 0$. Из распределения (10) можно получить распределения для огибающей, фазы и их производных

$$w(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}) = w(\varphi) w(\dot{\rho}) w(\rho, \dot{\varphi}),$$

где $w(\varphi) = 1/2\pi$, $w(\dot{\rho})$ имеет вид (26), а

$$w(\rho, \dot{\varphi}) = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi} \sigma^2 \Omega_2} \exp \left[-\frac{\rho^2 (\Omega_2^2 + \dot{\varphi}^2)}{2\sigma^2 \Omega_2^2} \right]. \quad (2.4.28)$$

Из этого выражения видно, что значения ρ и $\dot{\varphi}$ сильно коррелированы. Условное распределение для $\dot{\varphi}$, соответствующее заданному значению огибающей ρ , будет

$$w(\dot{\varphi} | \rho) = \frac{w(\rho, \dot{\varphi})}{w(\rho)} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi} \Omega_2 \sigma} \exp \left[-\frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{2\sigma^2 \Omega_2^2} \right]. \quad (2.4.29)$$

В отличие от безусловного распределения (27) оно имеет вид гауссовской кривой и характеризуется теперь уже конечной дисперсией

$$\langle \dot{\varphi}^2 \rangle_{\rho}^{y_{01}} = \frac{\Omega_2^2 \sigma^2}{\rho^2}. \quad (2.4.30)$$

Из (30) видно, что скорость изменения фазы становится особенно большой при «замираниях» шума $\xi(t)$, когда его огибающая $\rho(t)$, флуктуируя, падает до уровня, много меньшего, чем среднее значение $\bar{\rho} = \sqrt{\pi/2} \sigma$.

Примеры нестационарных узкополосных процессов. В радиофизике и оптике квазигармонические процессы формируются чаще всего при фильтрации шумов узкополосными системами; в этом случае ω_0 представляет собой среднюю частоту, а $\Delta\omega$ — характерную полосу пропускания фильтра. Рядом специфических особенностей обладают параметрические фильтры — параметрические усилители и преобразователи различных типов (см. гл. 6); узкополосные шумы, возникающие на их выходе, оказываются нестационарными**). Ниже рассмотрены примеры нестационарных квазигармонических процессов; для этих процессов среднеквадратичные значения квадратурных компонент не равны друг другу.

*) См. сноску на с. 125.

**) Встречаются и другие модели нестационарных процессов: периодически нестационарные процессы (§ 5), диффузионный (винеровский) процесс (§ 6), процессы со стационарным приращением [3, ч. 1] и т. д.

Обратимся прежде всего к анализу случая, когда одна из квадратурных компонент в (2.3.2) (например, $b(t)$) равна нулю:

$$\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t. \quad (2.4.31)$$

Выражая (31) через огибающую, фазу и комплексную амплитуду, получим

$$\xi(t) = \rho(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad (2.4.32)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} a(t),$$

$$\rho(t) = |a(t)|, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & a(t) > 0, \\ \pm \pi, & a(t) < 0. \end{cases} \quad (2.4.33)$$

Модель (31) хорошо передает свойства реального шума на выходе параметрических усилителей оптического и СВЧ диапазонов при вырожденном режиме работы и больших коэффициентах усиления (см. §§ 2, 5 гл. 6).

При гауссовости $a(t)$ процесс (31) также будет гауссовским, но нестационарным: дисперсия $\langle \xi^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \cos^2 \omega_0 t$ и распределение вероятностей

$$w(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle a^2 \rangle |\cos \omega_0 t|} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2 \langle a^2 \rangle \cos^2 \omega_0 t} \right] \quad (2.4.34)$$

в этом случае периодически меняются во времени (периодическая нестационарность).

Практический интерес представляют, разумеется, не мгновенные значения моментов, а величины, усредненные по периоду $T = 2\pi/\omega_0$. Именно такие величины регистрируются в эксперименте. Операцию усреднения по времени некоторой функции $f(t)$ обозначаем волнистой чертой (см. (1.4.2)).

Для (31) имеем: усредненная по времени дисперсия $\langle \xi^2 \rangle = 1/2 \langle a^2 \rangle$, усредненная по времени корреляционная функция

$$\langle \xi \xi \tau \rangle = \frac{1}{2} \langle a a \tau \rangle \cos \omega_0 \tau, \quad (2.4.35)$$

усредненный по времени спектр

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi \tau \rangle e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (2.4.36)$$

Отсутствие в (35) члена, пропорционального $\sin \omega_0 \tau$, означает, что соответствующий (36) спектр по положительным частотам

$$\widetilde{G}^+(\omega) = \begin{cases} 2 \widetilde{G}(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (2.4.37)$$

в рассматриваемом случае симметричен относительно ω_0 :

$$\widetilde{G}^+(\omega) = \widetilde{G}^+(\omega_0 + \Omega) = \widetilde{G}^+(\omega_0 - \Omega). \quad (2.4.38)$$

Как следует из (31), (32), распределение огибающей имеет вид гауссовской кривой:

$$w(\rho) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\rho^2/2\sigma^2}, \quad \rho > 0 \quad (2.4.39)$$

$$(\sigma^2 = \langle \rho^2 \rangle = \langle a^2 \rangle),$$

а распределение фазы выражается через δ -функции:

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2} \delta(\varphi - \pi) + \frac{1}{2} \delta(\varphi + \pi) + \delta(\varphi) \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (2.4.40)$$

Рассмотрим теперь общий случай — квазигармонический гауссовский процесс

$$\xi(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - b(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.4.41)$$

для которого не выполнены условия стационарности (2.3.4), (2.3.5), т. е.

$$\langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle, \quad \langle ab \rangle \neq 0. \quad (2.4.42)$$

Второе из этих условий несущественно, так как подбором фазы φ_0 всегда можно добиться обращения в нуль $\langle ab \rangle$. Будем считать, что это сделано, и рассмотрим (41), предполагая, что

$$\begin{aligned} \langle a \rangle = \langle b \rangle = 0, \quad \langle ab \rangle = 0, \\ \langle a^2 \rangle = \sigma_0^2 (1 + \beta), \quad \langle b^2 \rangle = \sigma_0^2 (1 - \beta) \\ (-1 < \beta < 1, \quad \langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle), \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

где σ_0^2 и β — постоянные параметры.

Случайными функциями вида (41) описываются, например, шумы в параметрических усилителях, работающих в вырожденном режиме, причем величина β связана с коэффициентом усиления: при малом усилении $\beta \approx 0$, при большом — $|\beta| \approx 1$ (см. гл. 6). Усредняя ξ и учитывая (43), находим

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle = \sigma^2(t) = \sigma_0^2 [1 + \beta \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \quad (2.4.44)$$

При гауссовских и стационарных $a(t)$ и $b(t)$ распределение вероятностей для $\xi(t)$ тоже будет гауссовским, но зависящим от времени, т. е. в рассматриваемом случае процесс $\xi(t)$ является нестационарным:

$$\omega(\xi, t) = \frac{e^{-\xi^2/2\sigma^2(t)}}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}}. \quad (2.4.45)$$

При $\beta=0$ процесс (41) совпадает со стационарным шумом (2.3.1), а при $\beta=1$ — с процессом, описываемым (31).

Из совместного распределения для a и b

$$\begin{aligned} \omega(a, b) = \omega(a) \omega(b) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sqrt{1+\beta}} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_0^2(1+\beta)}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sqrt{1-\beta}} \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma_0^2(1-\beta)}\right] \end{aligned}$$

можно получить совместное распределение для огибающей и фазы процесса (41):

$$\omega(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma_0^2\sqrt{1-\beta^2}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2} \frac{1-\beta\cos 2\varphi}{1-\beta^2}\right]. \quad (2.4.46)$$

Функция (46) не распадается на произведение функций ρ и φ , т. е. в этом случае огибающая и фаза оказываются статистически связанными. Интегрируя (46) по φ , найдем распределение огибающей:

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_0^2\sqrt{1-\beta^2}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2(1-\beta^2)}\right] I_0\left(\frac{\beta\rho^2}{2\sigma_0^2(1-\beta^2)}\right), \quad (2.4.47)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \varphi} d\varphi.$$

Это распределение при различных значениях параметра β показано на рис. 2.7. В предельных случаях оно переходит в распределение Рэлея ($\beta=0$) или гауссовское распределение (39) ($\beta=1$).

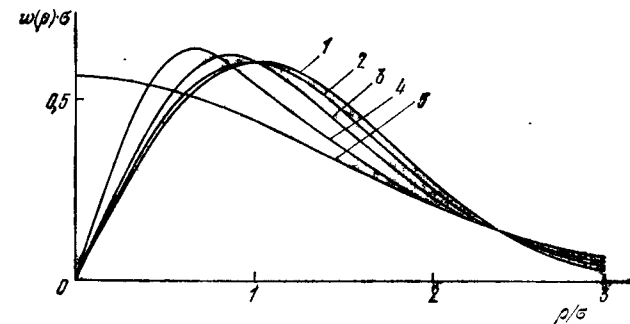


Рис. 2.7. Распределение (47) огибающей периодически нестационарного гауссовского процесса (41) при различных значениях параметра β (43).

Предельными являются рэлеевское распределение ($\beta_1=0$) и одностороннее экспоненциальное распределение ($\beta_2=1$); $0 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5 < 1$.

Интенсивность процесса (41) равна

$$I = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \rho^2; \quad (2.4.48)$$

переходя в (47) к переменной I , можно определить распределение вероятностей для I :

$$\omega(I) = \frac{1}{\sigma_0^2\sqrt{1-\beta^2}} \exp\left[-\frac{I}{\sigma_0^2(1-\beta^2)}\right] I_0\left(\frac{\beta I}{\sigma_0^2(1-\beta^2)}\right). \quad (2.4.49)$$

Из (49) находим

$$\langle I \rangle = \sigma_0^2, \quad \langle I^2 \rangle = \sigma_0^2(2 + \beta^2), \quad \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \sigma_0^2(1 + \beta^2).$$

Отсюда следует, что нестационарность приводит к заметному увеличению относительной дисперсии интенсивности:

$$\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = 1 + \beta^2. \quad (2.4.50)$$

Согласно (50) в предельном случае $\beta=1$ относительные флуктуации интенсивности возрастают в два раза.

Пронтегрировав (46) по ρ , найдем распределение для фазы

$$\omega(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi} \frac{1}{1-\beta\cos 2\varphi} \quad (-\pi < \varphi < \pi). \quad (2.4.51)$$

Оно имеет три максимума (при $\varphi = 0, \pm \pi$; см. рис. 2.8) и в предельном случае $\beta = 1$ принимает вид (40); с уменьшением β распределение $w(\varphi)$ стремится к равномерному: $w(\varphi) = 1/2\pi$.

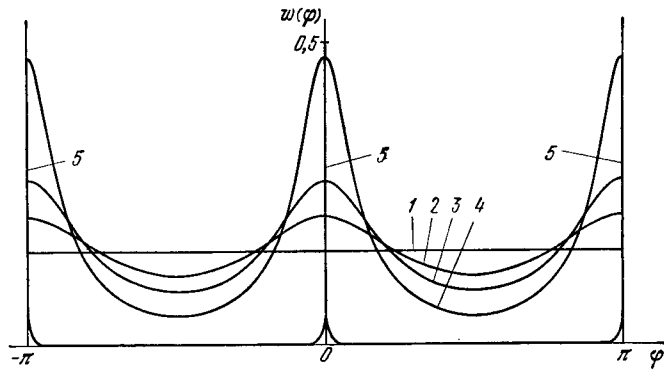


Рис. 2.8. Распределение вероятностей (51) фазы периодически нестационарного гауссовского процесса (41) при различных значениях параметра β (43).

Предельными являются распределение типа δ -функции ($\beta_2 = 1$) и равномерное распределение ($\beta_1 = 0$): $0 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < 1$.

Корреляционные свойства комплексной амплитуды. Сделаем некоторые замечания относительно статистических характеристик введенной в § 3 комплексной амплитуды узкополосного процесса применительно к рассматриваемым в этом параграфе гауссовским процессам. Представление (2.3.16) квазигармонического гауссовского процесса через комплексную амплитуду:

$$\xi(t) = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (2.4.52)$$

(а не через огибающую и фазу), имеет определенные преимущества. В частности, из (2.3.17) следует, что статистика A в этом случае будет гауссовской, так что высшие корреляции A могут быть выражены через парные. Например, если процесс (52) стационарный, то в силу (2.3.19), (2.3.20)

$$\langle AA_\tau \rangle = 0, \quad \langle AA_\tau^* \rangle = \frac{\sigma^2}{2} [p(\tau) - iq(\tau)] \equiv \Gamma(\tau). \quad (2.4.53)$$

Тогда, используя (2.2.9), можно показать, что

$$\langle A^n A_\tau^n \rangle = 0, \quad \langle A^n A_\tau^{*n} \rangle = n! \Gamma^n(\tau) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.4.54)$$

При решении стохастических дифференциальных уравнений иногда бывает удобно заменить достаточно быстро меняющуюся случайную функцию $A^n(t)$ эквивалентным белым шумом $\eta(t)$:

$$A^n(t) \rightarrow \eta(t), \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = 0, \quad \langle \eta \eta_\tau^* \rangle = 2D \delta(\tau). \quad (2.4.55)$$

Корреляционную постоянную D в (55) определяем, приравняв интегралы по τ от $\langle A^n A_\tau^{*n} \rangle$ и $\langle \eta \eta_\tau^* \rangle$:

$$n! \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^n(\tau) d\tau = 2D. \quad (2.4.56)$$

Напомним, что если спектр $G^+(\omega)$ процесса (52) симметричен относительно частоты ω_0 , то $\langle \xi \xi_\tau \rangle = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau$, $q(\tau) = 0$ и $\Gamma(\tau) = \sigma^2 p(\tau)/2$ — вещественная функция τ .

Суперпозиция гармонического сигнала и гауссовского шума. Полученные в предыдущих разделах результаты позволяют рассмотреть чрезвычайно важную для приложений модель случайного процесса, представляющего собой суперпозицию статистически независимых сигнала и шума. Такая модель описывает процессы на выходе реальных приемных устройств, куда принимаемый сигнал неизбежно приходит вместе с шумами, генерируемыми в самом приемном устройстве; в ряде случаев аддитивный шум накладывается на сигнал и в процессе распространения сигнала от передатчика к приемнику. Иногда модель сигнала с аддитивным шумом неплохо описывает и излучение на выходе некоторых генераторов радио- и оптического диапазона, хотя в общем случае здесь ситуация сложнее: в автоколебательной системе из-за нелинейности шум модулирует сигнал по амплитуде и фазе.

Использование представлений об огибающей и фазе узкополосных процессов позволяет дать весьма наглядную картину искажений сигнала, обусловленных аддитивным шумом. Если в отсутствие шума мы имеем дело, например, с идеальным монохроматическим сигналом, функции распределения амплитуды и фазы которого представляют собой δ -функции:

$$w(a) \sim \delta(a - a_0), \quad w(\varphi) \sim \delta(\varphi - \varphi_0),$$

то шум приводит к флуктуационному размытию этих распределений.

Удобным математическим выражением этих интуитивных представлений является представление случайно модулированного колебания в виде суперпозиции сигнала и шума. Однако теперь, в отличие от стационарного шума, огибающая и фаза будут, очевидно, статистически связанными; в зависимости от соотношения интенсивностей сигнала и шума мы должны в предельных случаях получить формулы, описывающие только сигнал или только шум.

Итак, рассмотрим случайный процесс типа сигнал + шум:

$$x(t) = S(t) + \xi(t). \quad (2.4.57)$$

Здесь $S(t)$ — некоторая регулярная функция времени (сигнал), а $\xi(t)$ — рассмотренный выше чисто флуктуационный ($\xi = 0$) ста-

ционарный гауссовский случайный процесс (52) (шум). Записывая $S(t)$ как

$$S(t) = a_S(t) \cos \omega_0 t - b_S(t) \sin \omega_0 t = \rho_S(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_S(t)], \quad (2.4.58)$$

$$\rho_S = \sqrt{a_S^2 + b_S^2}, \quad \varphi_S = \arctg \frac{a_S}{b_S}, \quad (2.4.59)$$

$$a_S = \rho_S \cos \varphi_S, \quad b_S = \rho_S \sin \varphi_S,$$

и используя (2.3.2), перепишем (57) в виде

$$x(t) = [a(t) + a_S(t)] \cos \omega_0 t - [b(t) + b_S(t)] \sin \omega_0 t = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (2.4.60)$$

где теперь

$$\rho = \sqrt{(a + a_S)^2 + (b + b_S)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{a + a_S}{b + b_S}, \quad (2.4.61)$$

$$a = \rho \cos \varphi - a_S, \quad b = \rho \sin \varphi - b_S. \quad (2.4.62)$$

Рассмотрим вероятностные характеристики огибающей ρ и фазы φ процесса $x(t)$. Как и выше, будем исходить из совместного распределения вероятностей для квадратурных компонент

$$w(a + a_S, b + b_S) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(a^2 + b^2)/2\sigma^2}. \quad (2.4.63)$$

Переходя в (63) к переменным ρ и φ и учитывая, что

$$\left| \frac{\partial(a + a_S, b + b_S)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \rho,$$

получим

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 - 2\rho\rho_S \cos(\varphi - \varphi_S) + \rho_S^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.4.64)$$

$$(\rho > 0, -\pi < \varphi < \pi).$$

Проинтегрировав (64) по φ , получим распределение огибающей

$$w(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} w(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_S^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.4.65)$$

иногда называемое обобщенным распределением Рэлея. В (65) $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Вид распределения (65) зависит от величины параметра

$$\mu^2 = \rho_S^2(t)/2\sigma^2 \quad (2.4.66)$$

(рис. 2.9). Если $S(t)$ и $\xi(t)$ — узкополосные процессы, то μ^2 характеризует так называемое отношение сигнал/шум, т. е. отношение

усредненной (по периоду высокой частоты ω_0) интенсивности сигнала $\rho_S^2(t)/2$ к средней интенсивности (или дисперсии) шума

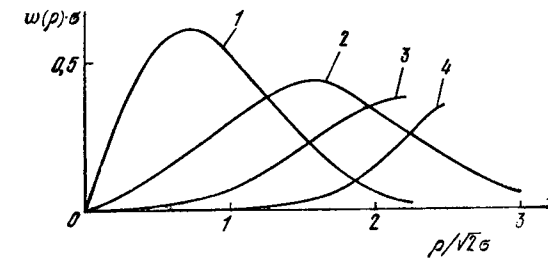


Рис. 2.9. Распределение вероятностей (65) для огибающей суммы сигнала и гауссовского шума. Параметром распределения является отношение сигнал/шум $=\mu^2$; $\mu_1=0$ (распределение Рэлея, $0 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$).

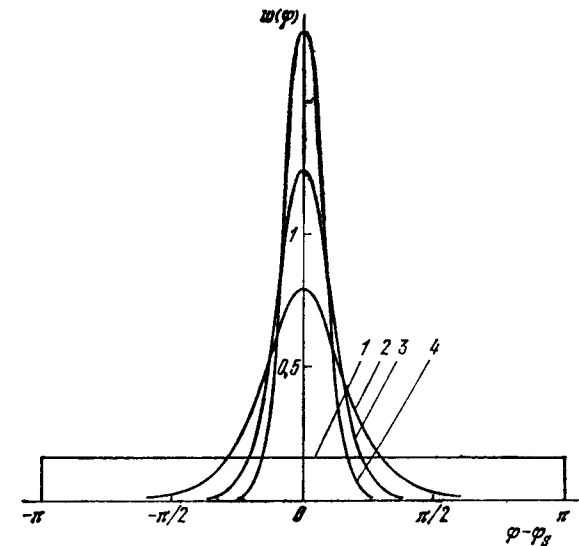


Рис. 2.10. Распределение вероятностей (67) для фазы суммы сигнала и гауссовского шума при различных отношениях сигнал/шум $=\mu^2$; $0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$.

$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle$. Проинтегрировав (64) по ρ , получим распределение фазы процесса (60):

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\mu^2} \{1 + \sqrt{\pi} z e^{z^2} [1 + \Phi(z)]\} \quad (2.4.67)$$

$$(z = \mu \cos(\varphi - \varphi_S))$$

(рис. 2.10).

Нетрудно найти предельный вид распределений (65) и (67); при малом отношении сигнал/шум ($\mu^2 \ll 1$)

$$\omega(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \left(1 - \mu^2 + \mu^2 \frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.4.68)$$

$$\omega(\varphi) \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \cos(\varphi - \varphi_S) + \frac{\mu^2}{2\pi} \cos 2(\varphi - \varphi_S); \quad (2.4.69)$$

при большом отношении сигнал/шум ($\mu^2 \gg 1$)

$$\omega(\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_S)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.4.70)$$

$$\omega(\varphi) \approx \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \exp[-\mu^2(\varphi - \varphi_S)^2]. \quad (2.4.71)$$

Гауссовские распределения (70), (71) нетрудно получить и непосредственно из (61): если $a \ll a_S$ и $b \ll b_S$, то в выражениях для ρ и φ достаточно учесть члены, линейные по a и b :

$$\rho \approx \rho_S + \frac{a_S a + b_S b}{\rho_S}, \quad \varphi \approx \varphi_S + \left(\frac{a}{a_S} - \frac{b}{b_S}\right) \sin \varphi_S \cos \varphi_S.$$

В этом приближении разности $\rho - \rho_S$ и $\varphi - \varphi_S$ линейно зависят от гауссовских случайных функций $a(t)$ и $b(t)$ и, следовательно, сами тоже обладают свойством гауссовости, причем их дисперсии равны

$$\langle(\rho - \rho_S)^2\rangle = \sigma^2, \quad \langle(\varphi - \varphi_S)^2\rangle = \sigma^2/\rho_S^2 = 2/\mu^2$$

в соответствии с (70), (71).

§ 5. Негауссовские квазигармонические стационарные процессы

В предыдущем параграфе для огибающей и фазы узкополосного гауссовского процесса мы получили ряд физически наглядных результатов. Возникает естественный вопрос: как изменится статистика огибающей и фазы, если процесс негауссовский? Этот вопрос имеет не только методический интерес; с негауссовскими процессами в нелинейных системах приходится встречаться часто. Математические результаты, приведенные ниже, позволяют глубже понять статистику узкополосных процессов.

Универсальность равномерного распределения фазы. Рассмотрим опять процесс вида (2.3.1):

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (2.5.1)$$

но теперь с произвольным (не обязательно гауссовским) распределением вероятностей $\omega(\xi)$ ([3], ч. 1, с 310; [4, 5]). Случайные функции ξ , ρ и φ в дальнейшем считаются *стационарными*. Это условие стационарности позволяет

сделать ряд общих выводов о статистических свойствах ρ и φ . Покажем, что независимо от вида $\omega(\xi)$ распределение $\omega(\varphi)$ является равномерным:

$$\omega(\varphi) = 1/2\pi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (2.5.2)$$

как это было установлено раньше для частного случая гауссовского распределения $\omega(\xi)$ (см. (2.4.5)). Будем исходить из общего выражения для характеристической функции процесса (1):

$$\theta(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{iu\rho \cos(\omega_0 t + \varphi)} \omega(\rho, \varphi). \quad (2.5.3)$$

Здесь $\omega(\rho, \varphi)$ — пока неизвестное совместное распределение ρ и φ , соответствующее некоторому заданному распределению $\omega(\xi)$ квазигармонического процесса $\xi(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Учитывая, что рассматриваются значения фазы, принадлежащие интервалу $-\pi < \varphi < \pi$, это распределение можно написать в виде ряда Фурье:

$$\omega(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(\rho) e^{in\varphi}. \quad (2.5.4)$$

В аналогичном виде представим также второй множитель в (3):

$$e^{iu\rho \cos \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(u\rho) e^{im\psi}, \quad (2.5.5)$$

$$\psi = \omega_0 t + \varphi, \quad U_m(u\rho) = i^m J_m(u\rho),$$

J_m — функция Бесселя; заметим, что

$$J_{-m}(z) = J_m(-z) = (-1)^m J_m(z). \quad (2.5.6)$$

Подставив (4) и (5) в (3) и интегрируя по φ , получим

$$\theta(u) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\omega_0 t} \int_0^\infty V_n(\rho) J_n(u\rho) d\rho. \quad (2.5.7)$$

Однако $\theta(u)$ не должна зависеть от t , поскольку процесс $\xi(t)$ предполагается стационарным. Это значит, что все $V_n(\rho)$ в (4) равны нулю, кроме $V_0(\rho)$, т. е.

$$\omega(\rho, \varphi) = V_0(\rho). \quad (2.5.8)$$

Независимость совместного распределения (8) от φ означает, что $\omega(\varphi) = \text{const}$;

учитывая нормировку $\int_{-\pi}^\pi \omega(\varphi) d\varphi = 1$, приходим к (2).

Независимость ρ и φ . Выражения (7), (8) можно теперь переписать как

$$\theta(u) = \int_0^\infty \omega(\rho) J_0(u\rho) d\rho, \quad (2.5.9)$$

$$\omega(\rho, \varphi) = \omega(\rho) \omega(\varphi) = \omega(\rho) \frac{1}{2\pi}, \quad (2.5.10)$$

где $\omega(\rho)$ — распределение для огибающей. Согласно (10) значения ρ и φ статистически независимы (в совпадающие моменты времени). Из (2) также следует,

что

$$\langle \cos^{2n+1}\varphi \rangle = \langle \sin^{2n+1}\varphi \rangle = 0, \quad (2.5.11)$$

$$\langle \cos^{2n}\varphi \rangle = \langle \sin^{2n}\varphi \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (2.5.12)$$

$$\langle |\cos^{2n+1}\varphi| \rangle = \langle |\sin^{2n+1}\varphi| \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (2.5.13)$$

Учитывая статистическую независимость ρ и φ и (11)–(13), имеем следующие соотношения между моментами ξ , $|\xi|$ и ρ :

$$\langle \xi^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle \xi^{2n} \rangle = \langle \rho^{2n} \rangle \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (2.5.14)$$

$$\langle |\xi|^{2n+1} \rangle = \langle \rho^{2n+1} \rangle \frac{2}{\pi} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (2.5.15)$$

Равенство нулю нечетных моментов ξ означает, что кривая распределения $w(\xi)$ симметрична, а $\theta(u)$ — вещественная четная функция u :

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \theta(u) \cos u\xi \, du = w(-\xi), \quad (2.5.16)$$

$$\theta(u) = 2 \int_0^{\infty} w(\xi) \cos u\xi \, d\xi = \theta(-u) = \theta^*(u). \quad (2.5.17)$$

Связь характеристической функции процесса с распределением его огибающей. Так как распределение $w(\varphi)$ для всех квазигармонических стационарных процессов имеет один и тот же вид (2), то статистические свойства процесса ξ и его огибающей ρ оказываются однозначно связанными между собой. Например, преобразуя по обычным правилам совместное распределение (10) к новым переменным $\xi = \rho \cos \psi$ и $\eta = \rho \sin \psi$ ($\psi = \omega t + \varphi$), а затем исключив η интегрированием, получим

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \frac{w(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{w(\rho) \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}. \quad (2.5.18)$$

Выражением (9) непосредственно через $w(\rho)$ определяется характеристическая функция квазигармонического процесса. Заметим, что (9) является преобразованием Ганкеля. Используя обратное преобразование, придем к соотношению

$$w(\rho) = \rho \int_0^{\infty} J_0(u\rho) \theta(u) u \, du, \quad (2.5.19)$$

позволяющему найти распределение огибающей $w(\rho)$, если известна характеристическая функция $\theta(u)$. Рассмотрим несколько примеров.

1. Гауссовскому распределению

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

соответствует характеристическая функция $\theta(u) = e^{-u^2\sigma^2/2}$. Условия четности (16), (17) при этом, очевидно, выполняются. Используя (19), получим для

огнивающей распределение Рэлея (2.4.6):

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho > 0).$$

2. Для квазигармонического стационарного процесса с постоянной случайной амплитудой ρ_0 находим, полагая в (18), (19) $w(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$,

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 - \xi^2}} & (|\xi| < \rho_0), \\ 0 & (|\xi| > \rho_0), \end{cases} \quad \theta(u) = J_0(u\rho_0). \quad (2.5.20)$$

Распределение (20) было получено нами раньше другим способом в предположении $\varphi = \text{const}$ (см. (1.4.21)).

3. В случае равномерного распределения

$$w(\xi) = 1/2\xi_0 \quad (-\xi_0 < \xi < \xi_0)$$

согласно (9) и (19)

$$\theta(u) = \frac{\sin u\xi_0}{u\xi_0}, \quad w(\rho) = \frac{\rho}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \rho^2}} \quad (0 < \rho < \xi_0). \quad (2.5.21)$$

4. Квазигармонический процесс, все значения огибающей и фазы которого равновероятны:

$$w(\rho) = 1/\rho_0 \quad (0 < \rho < \rho_0), \quad w(\varphi) = 1/2\pi, \quad (2.5.22)$$

имеет согласно (18) следующее распределение:

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi\rho_0} \ln(\rho_0^2 - \xi^2 + \sqrt{\rho_0^2 - \xi^2 + 1}) \quad (|\xi| \leq \rho_0).$$

5. Если распределение ξ экспоненциальное:

$$w(\xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\xi|}, \quad \langle \xi^2 \rangle = \frac{2}{\alpha^2},$$

то характеристическая функция равна $\theta(u) = \alpha^2/(\alpha^2 + u^2)$, а распределение огибающей выражается через функцию Макдональда:

$$w(\rho) = \alpha^2 \rho K_0(\alpha\rho), \quad \langle \rho \rangle = \pi/2\alpha, \quad \langle \rho^2 \rangle = 4/\alpha^2. \quad (2.5.23)$$

6. Если огибающая распределена по гауссовскому (одностороннему) закону

$$w(\rho) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0), \quad (2.5.24)$$

то $\theta(u) = e^{-u^2\sigma^2/4} I_0(u^2\sigma^2/4)$ и

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/4\sigma^2} K_0\left(\frac{|\xi|}{4\sigma^2}\right) \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

7. Для квазигармонического процесса с распределением

$$w(\xi) = \frac{\alpha/\pi}{\xi^2 + \alpha^2}, \quad \langle |\xi|^n \rangle = \infty,$$

характеристическая функция имеет вид экспоненты $\theta(u) = e^{-\alpha|u|}$; подставив это в (19), найдем распределение огибающей

$$w(\rho) = \frac{\alpha\rho}{(\alpha^2 + \rho^2)^{3/2}}, \quad \langle \rho^n \rangle = \infty. \quad (2.5.25)$$

Распределение интенсивности. Общие соотношения, связывающие распределения интенсивности $I = \rho^2/2$ и огибающей ρ , имеют вид

$$\omega(I) = \frac{\omega(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho = \sqrt{2I}}, \quad \omega(\rho) = \rho \omega(I) \Big|_{I = \rho^2/2}. \quad (2.5.26)$$

Как следует из (14), моменты интенсивности выражаются через четные моменты процесса (1):

$$\langle \xi^{2n} \rangle = \frac{2^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \langle I^n \rangle. \quad (2.5.27)$$

Используя (19) и (26), $\omega(I)$ можно выразить непосредственно через характеристическую функцию квазигармонического процесса (1):

$$\omega(I) = \int_0^{\infty} J_0(u\sqrt{2I}) \theta(u) u du. \quad (2.5.28)$$

Аналогично, по заданному распределению интенсивности $\omega(I)$ однозначно определяется характеристическая функция процесса (1)

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} \omega(I) J_0(u\sqrt{2I}) dI \quad (2.5.29)$$

и его распределение вероятностей

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \omega(I) \Big|_{I = (\xi^2 + \eta^2)/2} = \frac{1}{\pi} \int_{\xi^2/2}^{\infty} \frac{\omega(I) dI}{\sqrt{2I - \xi^2}} \quad (2.5.30)$$

— это непосредственно следует из (9), (18) и (26).

Используя (30), определим, например, статистику колебаний в автоколебательных системах (томсоновский генератор, лазер), находящихся под действием внутренних шумов. Распределение огибающей в этом случае имеет вид

$$\omega(\rho) = C \rho \exp(-a\rho^2 - b\rho^4)$$

(a , b и C — постоянные параметры), так что согласно (26)

$$\omega(I) = C \exp(-2aI - 4bI^2)$$

(см. далее (7.2.31) и (7.5.29)). Подставив последнее выражение в (30), получим

$$\omega(\xi) = \frac{C}{\sqrt{\mu}} e^{-\mu y/\xi^2} Z_1(y), \quad (2.5.30a)$$

где

$$\mu = 4\sqrt{b}, \quad y = \frac{a + 2b\xi^2}{\mu}, \quad Z_1(y) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^4 - 4yt^2} dt.$$

Функция $Z_1(y)$ выражается через цилиндрические функции $K_{1/4}$ и $I_{1/4}$ (см. формулы (14.18) и таблицу значений Z_1 в [26]).

В качестве еще одного примера решения обратной задачи (т. е. восстановления статистики процесса по распределению его интенсивности) рассмотрим модель процесса, для которого все значения интенсивности принимаются

в некотором интервале равновероятными:

$$\omega(I) = \begin{cases} 1/2\sigma^2, & 0 < I < 2\sigma^2, \\ 0, & I > 2\sigma^2; \end{cases} \quad (2.5.31)$$

здесь $\sigma^2 = \langle I \rangle$ (рис. 2.11, а). Согласно (26) и (29) распределение огибающей имеет при этом форму треугольника:

$$\omega(\rho) = \begin{cases} \rho/2\sigma^2, & 0 < \rho < 2\sigma, \\ 0, & \rho > 2\sigma \end{cases} \quad (2.5.32)$$

(рис. 2.11, б), а характеристическая функция равна

$$\theta(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{2\sigma} J_0(u\rho) \rho d\rho = \frac{J_1(2\sigma u)}{\sigma u}. \quad (2.5.33)$$

Подставив (31) в (30) (или (32) в (18), или преобразуя (33) по Фурье), получим, что в случае (31) функция распределения вероятностей квазигармонического процесса имеет вид полуэллипса:

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{2\sigma}\right)^2}, & |\xi| < 2\sigma, \\ 0, & |\xi| > 2\sigma \end{cases} \quad (2.5.34)$$

(рис. 2.11, в).

Двумерные распределения ρ и φ . Рассмотрим теперь двумерный случай [5]. Покажем вначале, что распределение вероятностей $\omega(\xi, \xi_\tau)$ и соответствующая

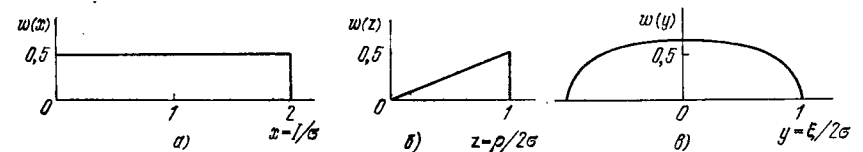


Рис. 2.11. Восстановление статистики негауссовского процесса ξ по распределению его интенсивности.

Равномерному распределению для интенсивности (а) соответствует треугольное распределение для огибающей (б) и эллипсoidalное распределение (в) для самого процесса ξ (см. (31)–(34)).

характеристическая функция $\theta(u, v) = \langle \exp i(u\xi + v\xi_\tau) \rangle$ для процесса (1) являются периодическими функциями «быстрого» времени $\omega_0\tau$:

$$\omega(\xi, \xi_\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\xi, \xi_\tau) e^{im\omega_0\tau}, \quad (2.5.35)$$

$$\theta(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{im\omega_0\tau}, \quad (2.5.36)$$

причем коэффициенты A_m и B_m в этих разложениях связаны преобразованием Фурье:

$$B_m(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\xi_{\tau} A_m(\xi, \xi_{\tau}) e^{iu\xi + iv\xi_{\tau}}, \quad (2.5.37)$$

$$A_m(\xi, \xi_{\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{-iu\xi - iv\xi_{\tau}} du dv. \quad (2.5.38)$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} \theta(u, v) &= \langle \exp [i u \rho \cos(\omega_0 t + \varphi) + i v \rho_{\tau} \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_{\tau})] \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho d\rho_{\tau} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi d\varphi_{\tau} \exp [i u \rho \cos(\omega_0 t + \varphi) + \\ &\quad + i v \rho_{\tau} \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_{\tau})] \omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau}). \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

Аналогично (4), совместное распределение $\omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau})$ всегда можно записать как двойной ряд Фурье:

$$\omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_{kl}(\rho, \rho_{\tau}) e^{-ik\varphi - il\varphi_{\tau}}. \quad (2.5.40)$$

Подставив (40) в (39) и интегрируя по φ и φ_{τ} , получим

$$\theta(u, v) = \sum_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(k+l)\omega_0 t} e^{il\omega_0 \tau} \int_0^{\infty} d\rho d\rho_{\tau} V_{kl}(\rho, \rho_{\tau}) J_k(u\rho) J_l(v\rho_{\tau}). \quad (2.5.41)$$

В силу стационарности характеристическая функция (41) не должна зависеть от t , а это значит, что отличными от нуля могут быть лишь функции V_{kl} с $k+l=0$:

$$\begin{aligned} V_{kl}(\rho, \rho_{\tau}) &= V_{-m, m}(\rho, \rho_{\tau}) \equiv C_m(\rho, \rho_{\tau}) \quad (k = -l = -m), \\ V_{kl}(\rho, \rho_{\tau}) &= 0 \quad (k \neq -l). \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

Подставив (42) в (41), мы и получим (36). Отметим, что согласно (6)

$$B_m(u, v) = (-1)^m \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_m(\rho, \rho_{\tau}) J_m(u\rho) J_m(v\rho_{\tau}) d\rho d\rho_{\tau}. \quad (2.5.43)$$

Так как $J_m(-x) J_m(-y) = J_m(x) J_m(y)$ (см. (6)), то согласно (43) $B_m(-u, -v) = B_m(u, v)$, откуда следует четность и вещественность характеристической функции (36)

$$\theta(-u, -v) = \theta(u, v) = \theta^*(u, v) \quad (2.5.44)$$

и распределения (35)

$$\omega(\xi, \xi_{\tau}) = \omega(-\xi, -\xi_{\tau}). \quad (2.5.45)$$

Из (40) и (42) имеем

$$\omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho, \rho_{\tau}) e^{im(\varphi - \varphi_{\tau})}, \quad (2.5.46)$$

где коэффициенты C_m однозначно определяются коэффициентами B_m в (36)

с помощью преобразования Ганкеля, обратного (43):

$$C_m(\rho, \rho_{\tau}) = (-1)^m \rho \rho_{\tau} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_m(u, v) J_m(u\rho) J_m(v\rho_{\tau}) uv du dv. \quad (2.5.47)$$

Выражения (46), (47) вместе с (35), (36) дают общее решение задачи об определении двумерных распределений ρ и φ процесса (1), если известны характеристическая функция $\theta(u, v)$ или распределение вероятностей $\omega(\xi, \xi_{\tau})$ этого процесса. Ясно также, как получить решение обратной задачи: зная $\omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau})$, найти $\theta(u, v)$ или $\omega(\xi, \xi_{\tau})$. Для этого нужно подставить C_m в (43) и найти B_m , а затем, используя (38), и A_m . Подставив результаты в (35) и (36), мы получим $\theta(u, v)$ и $\omega(\xi, \xi_{\tau})$ в виде разложений по гармоникам «быстрого» времени $\omega_0 t$.

После интегрирования (46) по φ и φ_{τ} остается только нулевой член этого ряда, который и определяет двумерное распределение огибающей:

$$\omega(\rho, \rho_{\tau}) = C_0(\rho, \rho_{\tau}) = \rho \rho_{\tau} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B_0(u, v) J_0(u\rho) J_0(v\rho_{\tau}) uv du dv. \quad (2.5.48)$$

Пронтегрировав (46) по ρ и ρ_{τ} , получим, соответственно, двумерное распределение фазы

$$\omega(\varphi, \varphi_{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m(\tau) e^{im(\varphi - \varphi_{\tau})}, \quad (2.5.49)$$

где

$$D_m(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_m(\rho, \rho_{\tau}) d\rho d\rho_{\tau} = \langle e^{-im(\varphi - \varphi_{\tau})} \rangle, \quad D_0 = 1. \quad (2.5.50)$$

Распределение разности фаз отличается от (49) множителем 2π :

$$\omega(\varphi - \varphi_{\tau}) = 2\pi \omega(\varphi, \varphi_{\tau}) \quad (-\pi < \varphi - \varphi_{\tau} < \pi). \quad (2.5.51)$$

Из приведенных выражений можно сделать ряд общих выводов, справедливых при любой статистике процесса (1). Согласно (46)

$$\begin{aligned} \omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi) &= \omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi_{\tau}) = \omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi + \varphi_{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \omega(\rho, \rho_{\tau}), \\ \omega(\varphi + \varphi_{\tau}) &= 1/2\pi, \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

т. е. φ, φ_{τ} , а также суммарная фаза $\varphi + \varphi_{\tau}$ статистически независимы относительно ρ и ρ_{τ} . В частности, статистически независимы значения ρ и φ , причем как в совпадающие, так и в различные моменты времени:

$$\omega(\rho, \varphi) = \omega(\rho, \varphi_{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \omega(\rho). \quad (2.5.53)$$

Однако разность фаз $\varphi - \varphi_{\tau}$ коррелирует, вообще говоря, как с ρ , так и с ρ_{τ} — это непосредственно видно из (46). Полученные результаты могут быть обобщены на случай многомерных распределений, дающих описание процесса (1) в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n .

Гауссовский процесс. Для гауссовского процесса (1) с нулевым средним

$$\omega(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2 - 2R\xi\xi_\tau + \xi_\tau^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}, \quad (2.5.54)$$

$$\theta(u, v) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(u^2 + v^2 - 2uvR)\right] \quad (2.5.55)$$

и условия четности и вещественности (44), (45), очевидно, выполнены. В этих выражениях

$$R = R(\tau) = r(\tau) \cos[\omega_0\tau + \psi(\tau)] \quad (2.5.56)$$

— коэффициент корреляции квазигармонического процесса (см. (2.3.7)). Из (54)—(56) и разложения

$$e^{\pm a \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m I_m(a) e^{im\varphi} \quad (2.5.57)$$

следует, что в (36)

$$B_m(u, v) = (-1)^m e^{-\sigma(u^2 + v^2)/2} I_m(\sigma^2 r uv) e^{im\psi} \quad (r = r(\tau), \psi = \psi(\tau)), \quad (2.5.58)$$

а в (46), согласно (47),

$$C_m(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2(1-r^2)} I_m\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2}\right) e^{im\psi} \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right].$$

Используя (48), откуда находим двумерное распределение огибающей

$$\omega(\rho, \rho_\tau) = C_0(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2(1-r^2)} I_0\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right],$$

полученное ранее другим методом (см. (2.4.11)).

Модель квазипериодического процесса [5]. Развитый выше подход может быть использован для описания случайных процессов более общего вида, чем (1), а именно квазипериодических стационарных процессов

$$\xi(t) = \rho(t) F[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad F_{\max} = 1, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad \rho > 0, \quad (2.5.59)$$

со стационарными «огибающей» ρ и «фазой» φ и периодической зависимостью функции F от своего аргумента:

$$F(\psi + 2\pi) = F(\psi), \quad \psi = \omega_0 t + \varphi(t).$$

Выражение (59) переходит в (1) при $F(\psi) = \cos \psi$.

В форме (59) можно представить, например, случайную последовательность импульсов. При этом функция F будет описывать форму импульса, не искаженного флуктуациями, ρ — случайные вариации импульсов по высоте, а φ — случайную модуляцию по длительности и времени появления. Статистические характеристики ξ , ρ и φ будут при этом связаны соотношениями, подобными полученным выше для квазигармонического процесса (1).

Ограничимся здесь анализом одномерных характеристик. Используя стационарность ξ и разложение

$$e^{iu\rho F(\psi)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(u\rho) e^{im\psi}, \quad (2.5.60)$$

нетрудно получить связь между характеристической функцией $\theta(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle$ и распределением огибающей $\omega(\rho)$:

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} \omega(\rho) U_0(u\rho) d\rho, \quad (2.5.61)$$

$$U_0(u\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iu\rho F(\psi)} d\psi. \quad (2.5.62)$$

Исходя из (60), легко также доказать зависимость ρ и φ и получить закон равномерного распределения для фазы:

$$\omega(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \omega(\rho),$$

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.5.63)$$

Отсюда следует, что соотношение между моментами ρ , ξ и $|\xi|$ будет определяться формой отдельного импульса, т. е. видом функции F :

$$\langle \rho^n \rangle = \frac{\langle \xi^n \rangle}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^n(\psi) d\psi} = \frac{\langle |\xi|^n \rangle}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\psi)|^n d\psi}. \quad (2.5.64)$$

В многомерных характеристиках вместо функций Бесселя (см. (41)) будут фигурировать функции U_n из (60).

Примеры импульсных последовательностей вида (59) рассматриваются в § 8.

§ 6. Диффузионный (винеровский) процесс

В этом параграфе мы рассмотрим важную модель существенно нестационарного случайного процесса, которая будет использована в дальнейшем, — случайный процесс, являющийся интегралом по времени от некоторой случайной функции.

Итак, рассмотрим процесс, описываемый выражением

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta. \quad (2.6.1)$$

Функция (1) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\xi} = \eta(t). \quad (2.6.1a)$$

Важным радиофизическим примером стохастического уравнения типа (1a) является уравнение, описывающее флуктуации фазы в автономном генераторе радиодиапазона или лазере, возникающие под действием собственного теплового, дробового или квантового шума (см. гл. 7).

В теории брауновского движения уравнение (1а) появляется в предельном случае «безынерционного» поведения брауновской частицы. Если

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta^2 \rangle = \sigma_0^2, \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.6.2)$$

то согласно (1)

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad (2.6.3)$$

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = 2 \int_0^t (t-\tau) B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} G_0(\omega) \left(\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega t/2} \right)^2 d\omega. \quad (2.6.4)$$

Отсюда видно, что дисперсия σ^2 зависит от времени:

$$\dot{\sigma}^2 = 2 \int_0^t B_0(\tau) d\tau, \quad \ddot{\sigma}^2 = 2B_0(t),$$

т. е. процесс $\xi(t)$ нестационарен.

Нетрудно выяснить зависимость σ^2 от времени при малых и больших t . Для малых интервалов времени, на которых корреляционная функция $B_0(\tau)$ практически постоянна, находим

$$B_0(\tau) \approx \sigma_0^2, \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 t^2 \quad (t \ll \tau_0). \quad (2.6.5)$$

Характерное время τ_0 в (5) (см. далее (7)) может быть порядка времени корреляции τ_k или периода осцилляций $T_0 \ll \tau_k$ функции $B_0(\tau)$, соответствующих эффективной ширине $\Delta\omega \sim 1/\tau_k$ спектра $G_0(\omega)$ или частоте $\omega \sim 1/T_0$, на которую приходится максимум спектральной интенсивности.

При больших $t \gg \tau_k$, для которых функцию $B_0(t)$ можно считать равной нулю, полагая $t = \infty$ в верхнем пределе интеграла (4), получим

$$\sigma^2 = 2D(t - \tau_0) \quad (t \gg \tau_k), \quad (2.6.6)$$

где

$$D = \pi G_0(0) = \int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau, \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} \tau B_0(\tau) d\tau / D. \quad (2.6.7)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $\eta(t)$ — белый шум. При этом $G_0(\omega) = G$, $\sigma_0^2 = \langle \eta^2 \rangle = \infty$,

$$B_0(\tau) = 2D\delta(\tau), \quad D = \pi G. \quad (2.6.8)$$

Подставив (8) в (3), получим

$$\sigma^2 = 2Dt, \quad (2.6.8a)$$

т. е. дисперсия ξ линейно растет со временем.

Интеграл от белого шума называют иногда винеровским случайным процессом. Нетрудно найти его корреляционную функцию

$$B(t, \tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = \begin{cases} 2Dt & (\tau \geq 0), \\ 2D(t - |\tau|) & (-t < \tau \leq 0), \\ 0 & (\tau < -t) \end{cases} \quad (2.6.8b)$$

и коэффициент корреляции

$$R(t, \tau) = \frac{B(\tau)}{\sigma(t)\sigma(t+\tau)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\tau/t}} & (\tau \geq 0), \\ \sqrt{1+\tau/t} & (-t < \tau \leq 0), \\ 0 & (\tau < -t) \end{cases} \quad (2.6.9)$$

(рис. 2.12). Из этих выражений видно, что корреляция между двумя значениями $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ винеровского случайного процесса всегда увеличивается со временем: при любом $\tau \geq 0$ коэффициент корреляции R становится сколь угодно близким к единице при достаточно больших t . На рис. 2.12 точка, соответствующая некоторому фиксированному значению τ , с ростом t перемещается к вершине кривой.

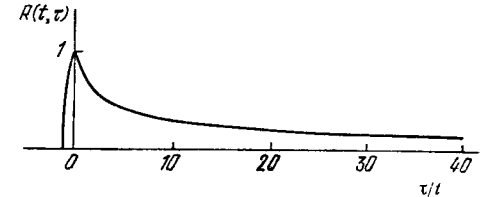


Рис. 2.12. Коэффициент корреляции $R(t, \tau)$ (9) винеровского процесса в зависимости от τ/t .

Заметим, что выражение (8б) находится в согласии с (6), так как в случае белого шума для всех t выполнено условие $t \gg \tau_k = 0$ и согласно (7) $\tau_0 = 0$.

2. Спектр $\eta(t)$ — лоренцевский, $G_0(\omega) = \frac{Dh^2/\tau}{h^2 + \omega^2}$. При этом

$$B_0(\tau) = \sigma_0^2 e^{-h|\tau|}, \quad \sigma_0^2 = Dh = \pi h G_0(0)$$

и согласно (3) и (7)

$$\sigma^2 = \frac{2D}{h} (ht - 1 + e^{-ht}), \quad \tau_0 = \frac{1}{h}, \quad (2.6.9a)$$

или

$$\frac{\sigma^2}{2D\tau_0} = x - 1 + e^{-x}, \quad x = \frac{t}{\tau_0}$$

(рис. 2.13, кривая 1).

3. При гауссовском спектре $G_0(\omega) = G_0(0) e^{-\omega^2/2h^2}$ имеем

$$B_0(\tau) = \sigma_0^2 e^{-h^2\tau^2/2}, \quad \sigma_0^2 = G_0(0) \sqrt{2\pi} h = Dh \sqrt{2/\pi},$$

$$\sigma^2 = \frac{2\sigma_0^2}{h^2} \left[\frac{ht}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{ht}{\sqrt{2}}\right) - 1 + e^{-h^2 t^2/2} \right], \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h}, \quad (2.6.9b)$$

или

$$\frac{\sigma^2}{2D\tau_0} = x\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) - 1 + e^{-x^2/\pi}, \quad x = \frac{t}{\tau_0}$$

(рис. 2.13, кривая 2). Кривые 1 и 2 на рис. 2.13 иллюстрируют переход от квадратичного закона нарастания дисперсии (5) к линейному (6).

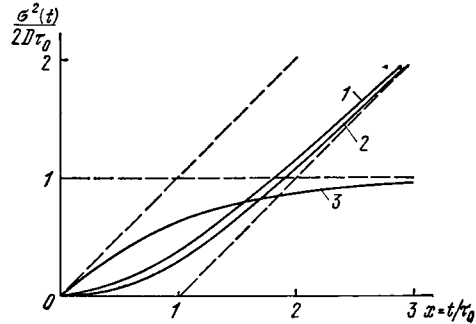


Рис. 2.13. Рост дисперсии диффузионного процесса (1) со временем.

Кривые 1—3 построены для различных спектральных плотностей процесса $\eta(t)$: 1—лоренцевский спектр, 2—гауссовский спектр, 3—спектр с отфильтрованными низкими частотами (10). Пунктирные кривые—асимптоты.

Рассмотренные особенности характерны для тех случаев, когда спектральная интенсивность силы $\eta(t)$ на нулевой частоте $G_0(0)$ имеет некоторое конечное значение. Если $G_0(0) = 0$ или $G_0(0) = \infty$, то изменение дисперсии σ^2 со временем имеет другой вид.

4. $G_0(0) = 0$. Величина σ^2 стремится к конечному пределу. Предположим, например, что $\eta(t)$ — это белый шум с отфильтрованными низкими частотами:

$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 + h^2} = \frac{D}{\pi} \left[1 - \frac{h^2}{h^2 + \omega^2} \right], \quad (2.6.10)$$

$$B_0(\tau) = 2D\delta(\tau) - Dhe^{-h|\tau|}.$$

Подставив (10) в (3), получим

$$\sigma^2 = \frac{2D}{h} (1 - e^{-h\tau}). \quad (2.6.11)$$

В этом случае линейным является начальный участок кривой $\frac{\sigma^2(t)}{2D\tau_0} = \sigma^2(t)$ (рис. 2.13, кривая 3).

5. $G_0(0) = \infty$. Пусть, например,

$$G_0(\omega) = \frac{D}{\pi} \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right|^v \quad (0 \leq v < 1), \quad (2.6.12)$$

$$B_0(\tau) = \frac{D\omega_0}{\Gamma(v) \cos \pi v/2} \frac{1}{(\omega_0\tau)^{1-v}} *).$$

Подстановка (12) в (4) дает

$$\sigma^2 = \frac{2D}{\omega_0 \cos \pi v/2} (\omega_0 t)^{1+v}. \quad (2.6.13)$$

*) Спектр вида (12) отвечает реальному процессу — так называемому фликкер-шуму (см. [20]).

В этом примере закон изменения дисперсии со временем может меняться от линейного ($v=0$) до почти квадратичного ($v \approx 1$). Случай $v=0$ соответствует тому, что $\eta(t)$ — белый шум (ср. (13) и (9)).

Согласно (13) зависимость $\ln \sigma^2$ от $\ln t$ является линейной:

$$\ln \sigma^2 = \text{const} + (1+v) \ln t, \quad (2.6.14)$$

причем наклон прямой (14) определяется только степенью v в спектре (12)*.

Диффузия фазы. В §§ 3—5 мы рассматривали фазу как случайную величину, изменяющуюся в ограниченных пределах:

$$-\pi < \varphi(t) < \pi. \quad (2.6.15)$$

Это было связано с тем, что фактически мы интересовались не самой фазой, а периодическими функциями $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$.

Однако при решении стохастических дифференциальных уравнений фаза обычно определяется как случайный процесс, меняющийся в бесконечных пределах:

$$-\infty < \varphi(t) < \infty. \quad (2.6.16)$$

Например, при анализе действия шума на линейные или автоколебательные системы для фазы может быть получено уравнение вида (1а), что соответствует (16), а не (15). Между распределениями вероятностей фазы в обоих случаях имеется однозначная связь. Рассмотрим этот вопрос в общей постановке.

Приведение распределения вероятностей к интервалу периодичности. При усреднении периодических функций

$$y = F(x) = F(x + nL) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.6.17)$$

от некоторого случайного процесса $x(t)$ вместо распределения вероятностей для x обычного вида

$$\omega(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.6.18)$$

заданных на бесконечном интервале, иногда удобно пользоваться распределением

$$\omega_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(x + nL) \quad (x_0 - L/2 < x < x_0 + L/2), \quad (2.6.19)$$

«свернутым» к интервалу периодичности L . Так как согласно (17) все значения x , отличающиеся на целое число L , для y полностью эквивалентны, то их вероятности, определяемые (18), в (19) суммируются. Величина x_0 в (19) произвольна. Типичным примером является случай, когда $x = \varphi(t)$ — фаза квазигармонического процесса

*) Это обстоятельство может быть использовано для экспериментального определения величины v .

Распределение $\omega_L(x)$ нормировано к L :

$$\frac{1}{L} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} \omega_L(x) dx = 1. \quad (2.6.20)$$

Функция $\omega_L(x)$ обладает свойством периодичности:

$$\omega_L(x+mL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(x+mL+nL) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \omega(x+n'L), \quad (2.6.21)$$

и, следовательно, ее можно представить в виде ряда Фурье

$$\omega_L(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-i\kappa m x}, \quad \kappa = \frac{2\pi}{L}, \quad (2.6.22)$$

с коэффициентами

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} \omega_L(x) e^{i\kappa m x} dx = \frac{1}{L} \langle e^{i\kappa m x} \rangle_L. \quad (2.6.23)$$

Подстановка (19) в (23) дает

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) e^{i\kappa m x} dx = \frac{1}{L} \langle e^{i\kappa m x} \rangle, \quad (2.6.24)$$

т. е. коэффициенты ряда Фурье (22) можно найти также преобразованием Фурье «развернутого» распределения (18). Согласно (24) формально можно записать решение обратной задачи:

$$\omega(x) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_m e^{-i\kappa m x} dm. \quad (2.6.25)$$

Отметим два предельных случая, когда в рядах (19) и (22) остается по одному члену:

$$\omega_L(x) \approx \omega(x) \quad (L \gg \Delta x), \quad (2.6.26)$$

$$\omega_L(x) \approx 1/L \quad (L \ll \Delta x). \quad (2.6.27)$$

Здесь параметр $\Delta x \sim \sigma$ по порядку величины равен корню из дисперсии и характеризует область наиболее вероятных значений x в соответствии с распределением (18). Таким образом, с уменьшением интервала L или с увеличением дисперсии σ^2 распределение $\omega_L(x)$ стремится к равномерному (27).

Условие $\Delta x \sim \sigma \gg L$ реализуется, например, если $x(t)$ — диффузионный процесс винеровского типа, поскольку согласно (6) дисперсия процесса в этом случае неограниченно возрастает со временем. Подчеркнем, что при этом несвернутое распределение $\omega(x)$ соответствует нестационарному процессу, а свернутое (27) $\omega_L(x) \approx 1/L$ — стационарному. Отсюда, в частности, следует, что процесс с диффузионной фазы можно рассматривать как процесс с равномерным распределением фазы (см. также § 2 гл. 7) $\omega_{2\pi}(\varphi) = 1/2\pi$.

Рассмотрим два примера.

1. Если распределение (18) гауссовское:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}, \quad (2.6.28)$$

то согласно (24) и (22)

$$a_m = \frac{1}{L} \exp\left(i\kappa m \bar{x} - \frac{1}{2} \kappa^2 m^2 \sigma^2\right),$$

$$\omega_L(x) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mv \right] = \frac{1}{L} \vartheta_3(v, q), \quad (2.6.29)$$

$$q = e^{-2\pi^2 \sigma^2 / L^2}, \quad v = \pi(x - \bar{x}) / L,$$

где $\vartheta_3(v, q)$ — тэта-функция. Заметим, что непосредственная подстановка (28) в (19) дает

$$\omega_L(x) = \frac{e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n^2} \cos v_1 n \right] = \omega(x) \vartheta_3(q_1, v_1), \quad (2.6.30)$$

$$q_1 = e^{-L^2/2\sigma^2}, \quad v_1 = i \frac{L}{\sigma^2} (x - \bar{x}).$$

Выражение (30) можно получить и непосредственно из (29), проведя преобразование тэта-функции к новым аргументам. При $L \gg \sigma$ $\omega_L(x) \approx 1/L$, так как в этом случае $q \gg 1$ и в сумме (29) существенным будет лишь первый член. Обратный предельный случай, $L \ll \sigma$, легче проанализировать с помощью (30). При этом $q_1 \ll 1$ и $\omega_L(x) \approx \omega(x)$. Оба эти результата находятся в согласии с соотношениями (26), (27).

2. Если (18) — распределение Коши:

$$\omega(x) = \frac{\beta/\pi}{\beta^2 + x^2} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.6.31)$$

то согласно (24)

$$a_m = \frac{1}{L} e^{-\beta\kappa|m|}. \quad (2.6.32)$$

Сумма (22) вычисляется в этом случае как геометрическая прогрессия:

$$\begin{aligned} \omega_L(x) &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\beta\kappa|m| - i\kappa m x} = \\ &= \frac{1}{L} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta\kappa m - i\kappa m x} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta\kappa m + i\kappa m x} \right] = \\ &= \frac{1}{L} \frac{\text{th } \beta\kappa}{1 - \frac{\cos \kappa x}{\text{ch } \kappa\beta}} = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{L} \frac{1}{1 - \beta_0 \cos \kappa x} \quad \left(\beta_0 = \frac{1}{\text{ch } \kappa\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

Моменты

$$\langle x^n \rangle_L = \int_{-L/2}^{+L/2} \omega_L(x) x^n dx,$$

соответствующие распределению (33), имеют конечное значение, хотя для исходного распределения (31) они расходятся. Отметим сходство распределения (33) и распределения (2.4.51) фазы нестационарного процесса на выходе параметрического усилителя; полагая в (33) $L=2\pi$ ($\kappa=1$) и $x=\varphi$, получим

$$\omega_{2\pi}(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{2\pi} \frac{1}{1-\beta_0 \cos \varphi} \quad (-\pi < \varphi < \pi). \quad (2.6.34)$$

В отличие от (2.4.51) распределение (34) имеет один максимум (при $\varphi=0$, если $\beta_0 > 0$). Как (2.4.51), так и (34) относятся к распределениям вероятностей типа

$$\omega_{2\pi}(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{2\pi} \frac{1}{1-\beta_0 \cos n\varphi} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (2.6.35)$$

нормировочная постоянная которых не зависит от n .

§ 7. Колебания, модулированные шумом

Модель случайного процесса, обсуждаемая в этом параграфе, имеет большое значение для радиопизики и оптики. Мы рассмотрим случайный процесс, возникающий за счет случайной модуляции гармонического сигнала по амплитуде, фазе или частоте.

Математическая запись такого процесса аналогична (2.3.1), однако постановка задачи теперь обратная. Если в §§ 3—5 мы отыскивали статистические характеристики случайной амплитуды и фазы по заданной статистике $\xi(t)$, то здесь речь будет идти об отыскании статистических характеристик функции $\xi(t)$ (и в первую очередь мы будем интересоваться ее корреляционной функцией и спектром) по заданным характеристикам случайных огибающей и фазы.

Реальные ситуации, соответствующие такой постановке задачи, разнообразны. Один из наиболее важных примеров — воздействие шума на радиогенератор или лазер; за счет нелинейности воздействие шума приводит к стохастической модуляции колебания генератора. Другой пример — уширение спектральных линий излучения и поглощения атомов или молекул. Частоты, амплитуды и фазы колебаний случайным образом изменяются при взаимодействиях — в этом фактически и заключается физика уширения спектральных линий.

Раздельное рассмотрение случайных амплитудной и фазовой (частотной) модуляций, проведенное ниже, позволяет выявить вклад каждой из них в спектр модулированного колебания.

Особое место занимают задачи о случайной частотной модуляции; такая модель описывает основные черты уширения спек-

ральных линий в радиопизике и оптике, поэтому ей уделено наибольшее внимание.

Обратимся теперь к рассмотрению различных видов модуляции.

Амплитудная модуляция. Амплитудно-модулированное (АМ) колебание описывается выражением

$$\xi(t) = a_0 [1 + \eta(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi_0]. \quad (2.7.1)$$

Рассмотрим его статистические характеристики, считая амплитудную модуляцию $\eta(t)$ стационарным случайным процессом (при этом огибающая $\rho(t) = 1 + \eta(t) \geq 0$), а фазу φ_0 — случайной постоянной величиной с равномерным распределением

$$\omega(\varphi_0) = 1/2\pi \quad (-\pi < \varphi_0 < \pi). \quad (2.7.2)$$

Процесс (1) в целом будет при этом также стационарным (см. § 5).

Предполагая, что

$$\bar{\eta} = 0, \quad \overline{\eta\eta_\tau} = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (2.7.3)$$

находим

$$\bar{\xi} = 0, \quad B(\tau) = \overline{\xi\xi_\tau} = \frac{a_0^2}{2} [1 + B_0(\tau)] \cos \omega_0 \tau, \quad (2.7.4)$$

а спектр процесса (1) имеет вид

$$G(\omega) = \frac{a_0^2}{4} [\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) + G_0(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 + \omega)]. \quad (2.7.5)$$

Если спектр модуляции уже ω_0 ($G_0(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$), то соответствующий (5) спектр по положительным частотам АМ-колебания будет

$$G^+(\omega) = \frac{a_0^2}{2} [\delta(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 - \omega)].$$

Этот спектр симметричен относительно несущей частоты ω_0 :

$$G^+(\omega_0 + \Omega) = G^+(\omega_0 - \Omega) = \frac{a_0^2}{2} [\delta(\Omega) + G_0(\Omega)], \quad (2.7.6)$$

и имеет две компоненты — дискретную и непрерывную (рис. 2.14). Дискретная компонента $(a_0^2/2) \delta(\omega_0 - \omega)$ расположена на несущей частоте, а непрерывная компонента $(a_0^2/2) G_0(\omega_0 - \omega)$ повторяет по форме спектр модулирующего шума $G_0(\omega)$.

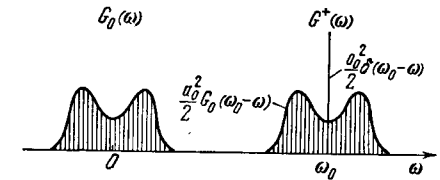


Рис. 2.14. При амплитудной модуляции спектр процесса (непрерывная часть спектра) повторяет по форме спектр $G_0(\omega)$ модулирующей функции (см. (5)).

Одномерное распределение и характеристическая функция АМ-процесса определяются формулами (2.5.18) и (2.5.9):

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \frac{\omega(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\omega(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}},$$

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} J_0(u\rho) \omega(\rho) d\rho,$$

где $\omega(\rho)$ — распределение огибающей, определяющееся статистикой амплитудной модуляции в (1).

Рассмотрим двумерную статистику АМ-процесса. Так как при постоянной фазе φ_0

$$\omega(\varphi_0, \varphi_{0\tau}) = \omega(\varphi_0) \omega(\varphi_{0\tau} | \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_0 - \varphi_{0\tau}),$$

то в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi_0, \varphi_{0\tau}) &= \omega(\rho, \rho_{\tau}) \omega(\varphi_0, \varphi_{0\tau}) = \\ &= \omega(\rho, \rho_{\tau}) \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_0 - \varphi_{0\tau}). \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

С другой стороны, согласно (2.5.46)

$$\omega(\rho, \rho_{\tau}, \varphi_0, \varphi_{0\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho, \rho_{\tau}) e^{im(\varphi_0 - \varphi_{0\tau})}. \quad (2.7.8)$$

Учитывая разложение для δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx},$$

находим из (7), (8), что в рассматриваемом случае все функции C_m одинаковы и равны двумерному распределению огибающей:

$$C_m(\rho, \rho_{\tau}) = \omega(\rho, \rho_{\tau}) \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.7.9)$$

Из (9), (2.5.43) и (2.5.36) находим, что двумерная характеристическая функция АМ-колебания имеет следующий вид:

$$\theta(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{im\omega_0\tau}, \quad (2.7.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_m(u, v) &= (-1)^m \iint_0^{\infty} d\rho d\rho_{\tau} \omega(\rho, \rho_{\tau}) J_m(u\rho) J_m(v\rho_{\tau}) = \\ &= \langle J_m(u\rho) J_{-m}(v\rho_{\tau}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

Фазовая модуляция. Рассмотрим теперь квазигармоническое колебание с постоянной амплитудой и случайной флуктуирующей фазой

$$x(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (2.7.12)$$

или, в комплексной форме,

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \exp i[\omega_0 t + \varphi(t)] + \text{к. с.} \quad (2.7.12a)$$

В этом разделе мы считаем $a_0 = \text{const}$ и вычисление среднего значения \bar{x} и корреляционной функции $\langle x x_{\tau} \rangle$ фазово-модулированного колебания сводится к вычислению средних вида

$$\langle e^{i\varphi} \rangle, \quad \langle e^{i(\varphi \pm \varphi_{\tau})} \rangle.$$

Например,

$$\bar{x} = \frac{1}{2} a_0 e^{i\omega_0 t} \langle e^{i\varphi} \rangle + \text{к. с.}$$

Фазовая модуляция гауссовским шумом. Предположим, что $\varphi(t)$ — стационарный гауссовский процесс:

$$\bar{\varphi} = 0, \quad \overline{\varphi\varphi_{\tau}} = B_0(\tau) \equiv \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (2.7.13)$$

В этом случае

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = e^{-\sigma_0^2/2}, \quad \langle e^{i(\varphi \pm \varphi_{\tau})} \rangle = e^{-\sigma_0^2 [1 \pm R_0(\tau)]},$$

так что, усредняя (12), получим

$$\bar{x} = a_0 e^{-\sigma_0^2/2} \cos \omega_0 t, \quad (2.7.14)$$

$$\sigma^2 = x^2 = \frac{a_0^2}{2} [1 + e^{-2\sigma_0^2} \cos 2\omega_0 t]. \quad (2.7.15)$$

Для флуктуационной компоненты $\xi(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ фазово-модулированного (ФМ) колебания находим

$$B(t, \tau) = \overline{\xi\xi_{\tau}} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)]. \quad (2.7.16)$$

Как видно из (14) — (16), в рассматриваемом случае ФМ-колебание не будет стационарным случайным процессом, поскольку его статистические характеристики являются функциями времени (периодическими). Обычно представляют интерес средние по времени спектральные и корреляционные характеристики, так как именно они регистрируются приборами. Обозначая волнистой чертой усреднение по времени, имеем согласно (16)

$$\widetilde{B}(\tau) = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] \cos \omega_0 \tau. \quad (2.7.17)$$

Таким образом, спектр ФМ-колебания, модулированного стационарным шумом, состоит из дискретной линии на несущей частоте ω_0 с интенсивностью

$$\tilde{I}_{\text{дискр}} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2}, \quad (2.7.18)$$

соответствующей (14), и непрерывного (при непрерывном спектре модуляции) спектра флуктуаций

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a_0^2}{4 \cdot 2\pi} e^{-\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{B_0(\tau)} - 1] [e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{-i(\omega_0 + \omega)\tau}] d\tau. \quad (2.7.19)$$

Непрерывному спектру соответствует интегральная интенсивность

$$\tilde{I}_{\text{непр}} = \langle \tilde{\xi}^2 \rangle = \frac{a_0^2}{2} [1 - e^{-\sigma_0^2}]. \quad (2.7.20)$$

Заметим, что имеет место следующий «закон сохранения интенсивности»: при фазовой модуляции сумма интенсивностей дискретной и непрерывной компонент постоянна и равна интенсивности немодулированного колебания:

$$I_{\text{дискр}} + I_{\text{непр}} = a_0^2/2.$$

Иначе говоря, модулируя фазу, можно изменять частотный спектр колебания, но не его среднюю интенсивность. Это обстоятельство

не связано, разумеется, с гауссовостью модуляции; при любой статистике $\varphi(t)$ непосредственно из (11) находим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= a_0^2 \overline{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{a_0^2}{2} \overline{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)} = \\ &= \frac{a_0^2}{2} \overline{1 + \cos 2\omega_0 t \cos 2\varphi - \sin 2\omega_0 t \sin 2\varphi} = \frac{a_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Ввиду существенно нелинейной зависимости x от φ в (12) спектр ФМ-колебания имеет, вообще говоря, совершенно другую форму, чем спектр модулирующего шума (рис. 2.15). Исключением является лишь случай очень слабой модуляции ($|B_0(\tau)| \leq \sigma_0^2 \ll 1$), когда выражение (19) можно переписать в виде

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{a_0^2}{4} [G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0)].$$

При этом флуктуации малы ($I_{\text{непр}} \ll a_0^2/2$) и их спектр повторяет по форме спектр фазовой модуляции.

В противоположном предельном случае глубокой фазовой модуляции ($\sigma_0^2 \gg 1$) функция $\exp B_0(\tau)$ будет быстро убывать при отклонении τ от нуля. Считая, что $R_0(\tau) \approx 1 - \alpha^2 \tau^2/2$, и полагая в (19)

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{+\sigma_0^2[1 - \alpha^2 \tau^2/2]}, \quad \alpha^2 = |\ddot{R}_0(0)|, \quad (2.7.21)$$

получим

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a_0^2}{4\alpha\sqrt{2\pi}} [e^{-(\omega_0 - \omega)^2/2\alpha^2\sigma_0^2} + e^{-(\omega_0 + \omega)^2/2\alpha^2\sigma_0^2}] \quad (2.7.22)$$

($\sigma_0^2 \gg 1$), т. е. ФМ-колебание имеет гауссовский спектр независимо от формы спектра самой фазовой модуляции.

Нетрудно убедиться, что спектр $\tilde{G}(\omega)$ намного шире спектра $G_0(\omega)$. Действительно, согласно (21) можно написать следующие оценки:

$$\Delta\omega_0 \sim \alpha, \quad \Delta\omega \sim \alpha\sigma_0, \quad \Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma_0 \gg 1.$$

Заметим, что в том же предельном случае $\sigma_0^2 \gg 1$ для коэффициентов корреляции $R_0(\tau)$ вида $R_0(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \approx 1 - \alpha|\tau| + \dots$ вместо (21), (22) получим

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{\sigma_0^2(1 - \alpha|\tau|)},$$

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a_0^2}{4} \frac{\alpha\sigma_0^2}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2\sigma_0^4 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2\sigma_0^4 + (\omega_0 + \omega)^2} \right] \quad (2.7.23)$$

($\sigma_0^2 \gg 1$). В этом случае ФМ-колебание имеет спектр лоренцевской формы, причем расширение спектра еще более значительно, поскольку отношение полос пропорционально не σ_0 , а σ_0^2 :

$$\Delta\omega_0 \sim \alpha, \quad \Delta\omega \sim \alpha\sigma_0^2, \quad \Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma_0^2 \gg 1.$$

Фазовая модуляция негауссовским шумом. Будем предполагать стационарность как флуктуации фазы $\varphi(t)$, так и всего ФМ-колебания (12) в целом. При этом $\bar{x} = 0$, т. е. величина x является чисто флуктуационной ($x = \xi$), и в спектре ФМ-колебания (12) нет дискретной составляющей.

Как было показано в § 5, одномерные и двумерные распределения фазы, приведенные к интервалу 2π , имеют следующий вид:

$$\omega(\varphi) = 1/2\pi,$$

$$\omega(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m(\tau) e^{im(\varphi - \varphi_\tau)}, \quad (2.7.24)$$

т. е. одномерное распределение фазы является равномерным, а конкретная форма двумерного распределения определяется коэффициентами $D_m(\tau)$. Двумерную характеристическую функцию и двумерное распределение вероятностей ФМ-колебания (12) можно найти, используя общие соотношения, приведенные в § 5.

Пусть, например, $D_m = e^{-h \cdot m\tau}$. Вычислив сумму в (24), получим

$$\omega(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha \cos(\varphi-\varphi_\tau)}, \quad \alpha = \frac{1}{\text{ch } h\tau}. \quad (2.7.25)$$

Если интервал τ увеличивается, то $\text{ch } h\tau \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и, как и следовало ожидать, двумерное распределение (25) распадается на произведение одномерных:

$$\lim_{h\tau \rightarrow \infty} \omega(\varphi, \varphi_\tau) = 1/4\pi^2 = \omega(\varphi) \omega(\varphi_\tau).$$

При этом время корреляции флуктуаций $\varphi(t)$ можно приближенно оценить как $1/h$, т. е. в рассматриваемом примере ширина спектра фазовой модуляции примерно равна $\Delta\omega_0 \sim h$.

Чтобы оценить ширину спектра ФМ-колебания (12), напомним выражение для его корреляционной функции:

$$B(\tau) = a_0^2 \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle = \\ = \frac{a_0^2}{2} [\langle \cos(\omega_0 \tau + \varphi_\tau - \varphi) \rangle + \langle \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi + \varphi_\tau) \rangle]. \quad (2.7.26)$$

Но $\omega(\varphi + \varphi_\tau) = 1/2\pi$ (см. (2.5.52)), так что второе слагаемое в (26) обращается в нуль и

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} [\langle \cos \omega_0 \tau \overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} \rangle + \langle \sin \omega_0 \tau \overline{\sin(\varphi_\tau - \varphi)} \rangle]. \quad (2.7.27)$$

Согласно (24) при $D_m = e^{-h \cdot m\tau}$

$$\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} = e^{-h|\tau|}, \quad \overline{\sin(\varphi_\tau - \varphi)} = 0.$$

В результате выражение (27) принимает следующий вид:

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} e^{-h \cdot |\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.7.28)$$

Оценивая отсюда ширину спектра ФМ-колебания, находим, что для распределения (25) она имеет тот же порядок, что и ширина спектра фазовой модуляции:

$$\Delta\omega \sim \Delta\omega_0 \sim 2h.$$

Частотная модуляция. Рассмотрим квазигармоническое колебание

$$\xi(t) = a_0 \cos \left[\omega_0 t + \int_0^t \eta(\theta) d\theta \right] \equiv a_0 \cos \Phi(t). \quad (2.7.29)$$

Оно отличается от (12) тем, что случайный процесс $\eta(t)$ с заданными характеристиками

$$\bar{\eta} = 0, \quad \eta^2 = \sigma_0^2, \quad \overline{\eta\eta_\tau} = B_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

входит теперь под знаком интеграла.

Мгновенная частота колебания (29) по определению равна $\omega(t) = \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \eta(t)$, так что функция $\eta(t)$ в (29) описывает

модуляцию частоты по некоторому случайному закону. Фаза

$\varphi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta$ является диффузионным случайным процессом.

Ее дисперсия равна (2.6.4):

$$\overline{\varphi^2} = 2t \int_0^t B_0(\tau) d\tau - 2 \int_0^t \tau B_0(\tau) d\tau = \sigma^2(t). \quad (2.7.30)$$

В установившемся режиме частотной модуляции ($t \rightarrow \infty$) дисперсия фазовых флуктуаций растет со временем по линейному закону (2.6.6):

$$\sigma^2(t) \approx 2Dt, \quad D = \pi G_0(0). \quad (2.7.31)$$

Из факта неограниченного роста дисперсии σ^2 следует, что, независимо от вида статистики частотной модуляции, распределение $\omega(\varphi)$, приведенное к интервалу 2π , с течением времени стремится к равномерному:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\varphi) = 1/2\pi \quad (-\pi < \varphi < \pi) \quad (2.7.32)$$

(см. (2.6.27)). Таким образом, частотно-модулированное (ЧМ) колебание (29) в установившемся режиме является стационарным процессом, а его одномерное распределение имеет вид (2.5.20):

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}, & |\xi| \leq a_0, \\ 0, & |\xi| > a_0. \end{cases}$$

Как следует из (32), $\bar{\xi} = 0$, т. е. в спектре ЧМ-колебания нет дискретной составляющей на несущей частоте ω_0 .

Эти результаты справедливы при любой статистике частотной модуляции, но при условии, что спектр модуляции отличен от нуля на нулевой частоте, $G_0(0) \neq 0$. (Это условие обеспечивает неограниченный рост дисперсии со временем, см. § 6.)

Модуляция частоты гауссовским шумом. Предположим, что процесс $\eta(t)$ является гауссовским. Гауссовскими будут при этом и фазовые флуктуации $\varphi(t)$, так что при $t \rightarrow \infty$

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = \langle e^{i(\varphi + \varphi_\tau)} \rangle = 0, \quad (2.7.33)$$

$$\langle e^{i(\varphi - \varphi_\tau)} \rangle = \left\langle \exp \left\{ -i \int_0^\tau \eta(\theta + t) d\theta \right\} \right\rangle = e^{\sigma^2(\tau)/2}, \quad (2.7.34)$$

где $\sigma^2(\tau)$ — функция (30) при $t = |\tau|$. Для дальнейшего удобно обозначить

$$\frac{1}{2} \sigma^2(|\tau|) = \sigma_0^2 \psi(\tau),$$

где

$$\psi(\tau) = \tau \left| \int_0^\tau R_0(\theta) d\theta - \int_0^{|\tau|} \theta R_0(\theta) d\theta \right| \quad (2.7.35)$$

Здесь $R_0(\tau)$ — коэффициент корреляции, характеризующий форму спектра частотной модуляции, а σ_0^2 — дисперсия модуляции, характеризующая ее размах.

Учитывая (33) — (35), корреляционную функцию ЧМ-колебания (29) можно записать как

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} e^{-\psi(\tau)} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.7.36)$$

Как следует из (36), спектр ЧМ-колебания симметричен относительно ω_0 (в общем случае негауссовской модуляции в спектре может появиться и асимметрия). Частотная модуляция, как и фазовая, не меняет интенсивности колебания: $\langle \xi^2 \rangle = a_0^2/2$. Общее представление об изменении величины $\psi(\tau)$ дают кривые ($\sigma^2(t) \sim \psi(t)$) на рис. 2.13.

Функция $\psi(\tau)$ при малых τ меняется по квадратичному закону, а при больших — по линейному:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \tau^2/2, & \tau \ll \tau_0, \\ \frac{D}{\sigma_0^2} (\tau - \tau_0), & \tau \gg \tau_0 \end{cases} \quad (2.7.37)$$

$$(2.7.38)$$

(см. (2.6.5), (2.6.6)). Соответственно можно рассмотреть два предельных случая.

1) Если интенсивность модуляции достаточно велика:

$$\tau_0^2 \sigma_0^2 \gg 1, \quad (2.7.39)$$

то функция корреляции (36) успеет уменьшиться почти до нуля на квадратичном участке (37). В этом случае можно приближенно написать

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2 \tau^2/2} \cos \omega_0 \tau, \quad (2.7.40)$$

т. е. спектр ЧМ-колебания имеет вид гауссовской кривой:

$$G(\omega) = \frac{a_0^2}{4\sqrt{2\pi}\sigma_0} \left[e^{-(\omega - \omega_0)^2/2\sigma_0^2} + e^{-(\omega + \omega_0)^2/2\sigma_0^2} \right]. \quad (2.7.41)$$

Ширину этого спектра можно оценить как

$$\Delta\omega_0 \sim \sigma_0. \quad (2.7.42)$$

Считая $\tau_0 \sim \tau_k \sim 1/\Delta\omega_0$, сравним $\Delta\omega$ и ширину спектра частотных флуктуаций $\Delta\omega_0$. Из (42) и (39) находим

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \sim \frac{\sigma_0}{\Delta\omega_0} \sim \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\Delta\omega_0^2}} \sim \sqrt{\tau_0^2 \sigma_0^2} \gg 1. \quad (2.7.43)$$

Следовательно, в этом случае ЧМ-колебание имеет более широкий спектр, нежели шум, модулирующий его частоту. Неравенство (39) можно при этом переписать как

$$G_0(0) \gg \Delta\omega_0, \quad (2.7.44)$$

т. е. спектр модуляций высокий и узкий (рис. 2.16, а).

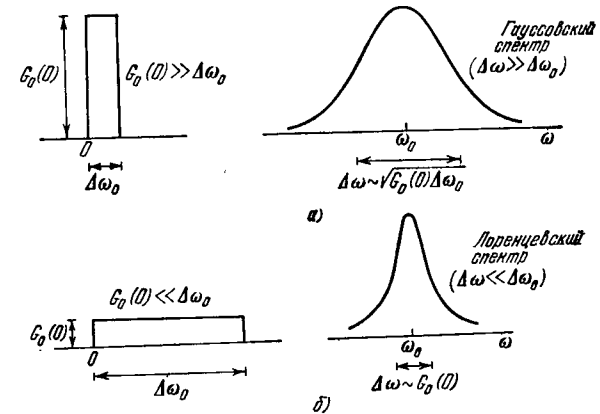


Рис. 2.16. Форма спектральной линии частотно-модулированного колебания при различных спектрах $G_0(\omega)$ модулирующей функции.

2) При не слишком интенсивной (или достаточно быстрой) модуляции частоты, когда выполняется неравенство

$$D\tau_k \ll 1, \quad (2.7.45)$$

заметное уменьшение корреляционной функции (36) происходит на линейном участке (38) и можно принять

$$\overline{\xi\xi\tau} = \frac{a_0^2}{2} e^{-D|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (2.7.46)$$

В этом случае спектральная интенсивность ЧМ-колебания имеет вид лоренцевской кривой:

$$G(\omega) = \frac{a_0^2 D}{4\pi} \left[\frac{1}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{D^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], \quad (2.7.47)$$

а ширина спектра равна

$$\Delta\omega \sim D = \pi G_0(0). \quad (2.7.48)$$

В отличие от (43) отношение полос в этом случае меньше единицы: согласно (45) и (48)

$$\Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim D\tau_k \ll 1. \quad (2.7.49)$$

Условие (45) эквивалентно неравенству

$$G_0(0) \ll \Delta\omega_0, \quad (2.7.50)$$

которое означает, что спектр модуляции широкий и низкий (рис. 2.16, б).

Интерполируя полученные результаты, можно представить общий характер изменения ширины и формы спектра ЧМ-коле-

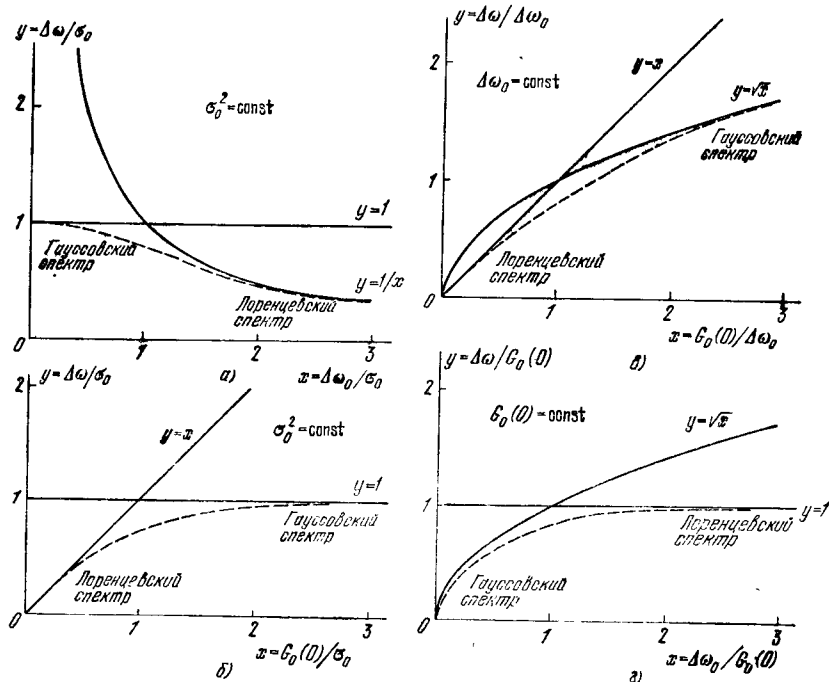


Рис. 2.17. Зависимость параметров ЧМ-колебания (ширины спектральной линии $\Delta\omega$ и формы спектра) от параметров модулирующей случайной функции (ширины спектра $\Delta\omega_0$, спектральной плотности $G_0(0)$ и дисперсии $\sigma_0^2 \approx G_0(0)\Delta\omega_0$).

бания при различных вариантах изменения параметров частотной модуляции $\Delta\omega_0$, $G_0(0)$ и σ_0^2 (пунктирные кривые на рис. 2.17).

Статистика уширения спектральных линий в оптике. Вопрос о ширине спектральных линий — одна из фундаментальных проблем физической оптики. Результаты измерений формы и ширины спектров излучения, поглощения и рассеяния света оказываются одним из важнейших источников информации о веществе. Исследуя оптические спектры атомов или молекул, мы имеем дело с ансамблем частиц, поведение которых описывается законами ста-

статической физики; естественно, что эти статистические закономерности должны отражаться и в спектрах.

В классической оптике отклик атомов и молекул на световое поле описывается с помощью модели гармонического осциллятора. Дипольный момент, связанный с колебаниями одного осциллятора x_i ,

$$p_i(t) = ex_i(t), \quad (2.7.51)$$

где e — элементарный заряд, а поведение x_i описывается уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{x}_i + 2\alpha_i \dot{x}_i + \omega_{0i}^2 x_i = f(t), \quad (2.7.52)$$

$f(t)$ — внешняя сила. В общем случае $f(t)$ определяется внешним световым полем, носящим случайный характер, взаимодействиями и т. п.

Дипольный момент (поляризация) $P(t)$ единицы объема среды, содержащей N атомов (осцилляторов),

$$P(t) = \sum_{i=1}^N ex_i(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t). \quad (2.7.53)$$

Естественная ширина спектральной линии. Рассчитаем прежде всего ширину спектральной линии излучения в ансамбле идентичных гармонических осцилляторов; будем считать, что все $\omega_{0i} = \omega_0$, $\alpha_i = \alpha$. Классическую картину спонтанного излучения света ансамблем атомов или молекул можно рассматривать как суперпозицию «вспышек» свободных колебаний случайным образом возбужденных гармонических осцилляторов.

Свободные колебания i -го осциллятора, возбужденного в момент времени t_i , описываются формулой

$$x_i(t) = x_{0i} \exp\{-\alpha(t-t_i)\} \cos[\omega_0(t-t_i) + \varphi_{0i}], \quad (2.7.54)$$

где x_{0i} и φ_{0i} — начальные амплитуда и фаза. Соответственно и дипольный момент, связанный с колебанием i -го осциллятора,

$$p_i(t) = p_{0i} \exp\{-\alpha(t-t_i)\} \cos[\omega_0(t-t_i) + \varphi_{0i}]. \quad (2.7.55)$$

В силу (55), (53) излучаемое ансамблем таких осцилляторов световое поле $E(t)$ будет иметь вид

$$E(t) = \sum_{i=1}^N a_{0i} \exp\{-\alpha(t-t_i)\} \cos[\omega_0(t-t_i) + \varphi_{0i}] = \sum_{i=1}^N E_i. \quad (2.7.56)$$

Если возбуждение осцилляторов носит стохастический характер, то моменты вспышек t_i , начальные амплитуды a_{0i} и фазы φ_{0i} — случайные числа. Поэтому суммарное поле излучения представляет собой случайный процесс. Если осцилляторы идентичны, для выявления основных его статистических характеристик достаточно

учесть случайность моментов времени t_i . В этом случае (56) представляет собой случайную импульсную последовательность — стохастический процесс, являющийся случайным наложением регулярных импульсов известной формы.

Подробному рассмотрению таких процессов посвящен следующий § 8. Если случайные импульсы — «вспышки» свободных колебаний — статистически независимы, то для спектральной плотности суммарного процесса $G(\omega)$ имеет место весьма наглядный результат (см. формулу (2.8.44)):

$$G(\omega) = 2\pi\Omega |E_\omega|^2. \quad (2.7.57)$$

В (57) Ω — средняя частота следования импульсов, а E_ω — фурье-образ функции $E_i(t)$, описывающей одиночный импульс рассматриваемой последовательности.

Таким образом, спектр всего процесса имеет тот же вид, что и спектр одиночного импульса, — происходит некогерентное наложение спектров импульсов. Записывая фурье-преобразование импульса вида (54), для $G_e(\omega)$ получаем*) (см. формулу (3.2.26))

$$G_e(\omega) = \frac{G_{e0}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (2.7.58)$$

Лоренцевская спектральная линия (58) имеет ширину

$$\Delta\omega_e = 2\alpha. \quad (2.7.59)$$

Величину $\Delta\omega_e$ принято называть естественной шириной спектральной линии; она определяется скоростью затухания амплитуды (энергии) отдельного осциллятора. Ширины линий колебаний отдельного осциллятора и ансамбля осцилляторов здесь одинаковы. Принято говорить, что в этом случае ширина спектральной линии определяется процессами релаксации энергии. Однако ширина спектральной линии в ансамбле осцилляторов не обязательно связана только с процессами релаксации энергии. Ширины линий отдельного осциллятора и ансамбля осцилляторов могут, разумеется, существенно различаться.

Действительно, величина дипольного момента единицы объема $P(t)$ (53) представляет собой фактически усредненное по единице объема колебательное возбуждение. Поэтому, даже если амплитуды колебаний всех элементарных осцилляторов практически постоянны, а их фазы быстро изменяются во времени (за счет движения осцилляторов и их взаимодействия меняются собственные частоты), величина $\langle P(t) \rangle$ может обратиться в нуль за вре-

*) Рассматривая вынужденные колебания, т. е. учитывая в (52) внешнюю силу $f(t)$, нетрудно убедиться, что такой же вид для рассматриваемой модели будет иметь и линия поглощения.

мена

$$\tau_\phi \ll 1/\alpha. \quad (2.7.60)$$

Естественно, это будет приводить к уширению спектральной линии, гораздо более значительному, нежели описываемое формулой (58). В этом случае принято говорить об уширении спектральной линии, обусловленном процессами дефазировки колебаний. Различие в физике релаксации энергии и дефазировки колебаний наиболее последовательно учитывается при квантовомеханическом описании. Времена релаксации T_1 и T_2 , входящие в уравнения двухуровневой системы (1.6.20), (1.6.21), характеризуют скорости затухания энергии и дефазировки.

В очень многих практически интересных случаях

$$T_2 \approx \tau_\phi \ll T_1 \quad (2.7.61)$$

и при расчете ширины спектральной линии процессы релаксации энергии можно вообще не учитывать*).

Далее, в пренебрежении процессами релаксации энергии, обсуждаются простейшие задачи об уширении спектральных линий за счет процессов дефазировки. В основу расчета в этом случае можно, очевидно, положить формулы, выведенные в трех предыдущих пунктах этого параграфа. Порядок же конкретного расчета следующий. Сначала на основе микроскопической модели движения и взаимодействия осцилляторов находят статистические свойства частоты (или фазы), а затем, пользуясь приведенными выше формулами, можно вычислить и контур спектральной линии.

Ниже приведены простые примеры; за подробностями мы отсылаем читателя к [21, 22], где изложена статистическая теория уширения спектров излучения и поглощения, и к [23], где можно найти данные и библиографию об уширении спектров рассеяния света.

Уширение спектральных линий в газе; доплеровская ширина. Простым и чрезвычайно важным механизмом уширения спектральной линии в ансамбле осцилляторов является эффект Доплера. Если осциллятор, собственная частота которого ω_0 , движется относительно наблюдателя со скоростью v , то наблюдатель регистрирует колебания на частоте

$$\omega = \omega_0 + kv. \quad (2.7.62)$$

*) При этих условиях разность населенностей в (1.6.21) можно считать постоянной и описывать взаимодействие света с двухуровневой системой с помощью только одного уравнения для поляризации; оно имеет тот же вид, что и (52). Однако уравнение (1.6.20) описывает уже не поведение отдельного осциллятора, а поведение средней поляризации единицы объема $P(t)$. Это обстоятельство надо иметь в виду, сравнивая классическое и квантовое описание.

В ансамбле осцилляторов (например, в газе атомов или молекул) скорости v случайны; в силу (62) случайно распределены и частоты излучения отдельных осцилляторов. Естественно, что это приводит к дополнительному к (59) уширению спектральной линии. На практике это уширение, так называемое доплеровское уширение спектральной линии, $\Delta\omega_D$, часто оказывается очень большим, так что $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$ (см. рис. 2.18, где для случая $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$ построены спектры отдельных осцилляторов и суммарный доплеровский контур спектральной линии).

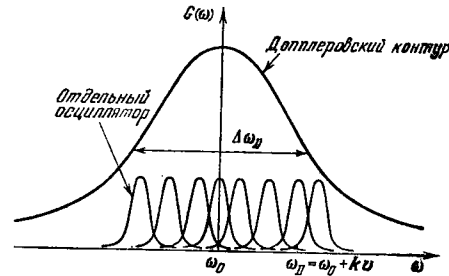


Рис. 2.18. Картина доплеровского уширения спектральной линии в газе независимых осцилляторов.

Рассчитаем ширину доплеровского контура $\Delta\omega_D$ для случая $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$. Световое поле представим в виде

$$E(t) = a_0 \exp i[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (2.7.63a)$$

где в рассматриваемом случае

$$\varphi(t) = kr(t), \quad r(t) = \int_0^t v(t') dt' \quad (2.7.63b)$$

(мгновенная частота описывается (62)). Переходя к проекции скорости на направление наблюдения v , формулам (63) можно придать вид (29), где $\eta(t) = kr(t)$. Таким образом, речь идет о случайной частотной модуляции; статистика случайной скорости определяется столкновениями молекул.

Если $v(t)$ — гауссовский процесс, корреляционная функция колебания (63a) определяется коррелятором (см. (34))

$$\langle e^{i(\varphi - \varphi\tau)} \rangle = \langle e^{ikr(t)} \rangle, \quad r(t) = \int_0^{t+\tau} v(t') dt'. \quad (2.7.64)$$

Рассмотрим сначала разреженный газ, в котором столкновением молекул можно пренебречь. Тогда $r(t) = v\tau$ и, используя для v максвелловское (гауссовское) распределение по скоростям, получим

$$\omega(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u} e^{-v^2/u^2}, \quad u = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \quad (2.7.65)$$

Для корреляционной функции колебания $E(t)$ получим (см. формулы предыдущего раздела)

$$B(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4} (k\tau)^2 \right\} \cos \omega_0 \tau, \quad (2.7.66)$$

откуда для спектра (ср. (40), (41)) получаем

$$G_D^\pm(\omega) = \frac{G_{D_0}}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega_D^2} \right\} \quad (2.7.67)$$

(ср. формулу (41)); в (67)

$$\Delta\omega_D = ku = \frac{\omega_0}{c} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}, \quad (2.7.68)$$

— доплеровская ширина спектральной линии.

Согласно (66), (68) время корреляции светового поля в рассматриваемом случае

$$\tau_k \approx 1/ku \quad (2.7.69)$$

определяется средним временем смещения осциллятора на расстояние порядка длины световой волны. Если давление газа повышается, в игру включаются столкновения, ограничивающие свободные перемещения осцилляторов. В результате время τ_k увеличивается, а ширина доплеровского контура сужается. Происходит *столкновительное сужение* доплеровского контура.

Обзор статистических моделей столкновительного сужения можно найти в [22]. Можно показать (см. [22]), что в случае достаточно частых столкновений

$$B(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \exp \left\{ -\frac{\Delta\omega_D^2}{2\nu_{ст}} \tau \right\} \cos \omega_0 \tau, \quad (2.7.70)$$

где $\nu_{ст}$ — средняя частота столкновений. Корреляционная функция (70) соответствует (см. формулы (46), (47)) лоренцевскому контуру линии. Таким образом, в условиях частых столкновений первоначально гауссовский контур доплеровской линии переходит в лоренцевский*).

В проведенных расчетах эффекты, связанные с релаксацией энергии, не учитывались; их учет не представляет, однако, труда, поскольку процессы, связанные с релаксацией энергии и хаотическим движением осцилляторов, можно считать статистически независимыми. Полный спектр тогда определяется сверткой спектров G_e и G_D .

Уширение спектральных линий молекул в жидкости. В жидкости доплеровское уширение, разумеется, полностью подавлено. Процессы дефазировки обусловлены флуктуациями нормальных частот (собственных частот осцилляторов) при межмолекулярных взаимодействиях (см. рис. 2.19, который иллюстрирует сдвиги собственных частот при бинарных взаимодействиях двухатомных молекул).

* Формула (70) была впервые получена Дики; поэтому столкновительное сужение часто называют также эффектом Дики; более подробно см. [22].

Теперь для того чтобы определить статистику случайной частотной модуляции, надо задаваться конкретным видом потенциала межмолекулярного взаимодействия (это позволяет рассчитать дисперсию флуктуаций частоты при межмолекулярных взаимодействиях), физическими представлениями о времени корреляции частоты. Поскольку флуктуации частоты в этой задаче гауссовские, для расчета контура линии можно пользоваться формулой (36).

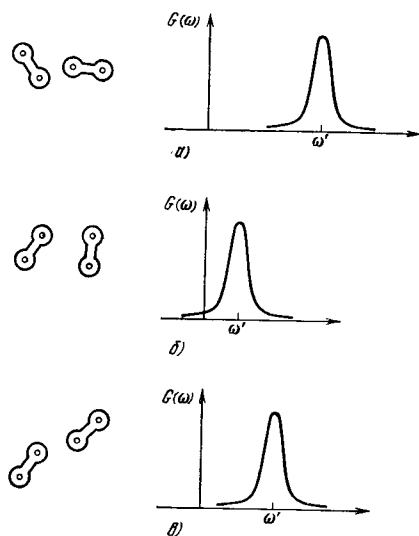


Рис. 2.19. Качественная картина, характеризующая флуктуации частоты колебаний при взаимодействии двух атомных молекул в жидкости.

логичная картина доплеровского уширения. Напротив, если флуктуации частоты быстрые (см. (45)), все молекулы находятся в практически идентичных условиях и форма спектральной линии — лоренцевская (ср. с эффектом столкновительного сужения доплеровской линии).

Соответственно в указанных случаях говорят о *неоднородном* ($\sigma_0 \tau_k \gg 1$) и *однородном* ($D \tau_k \ll 1$) уширении спектральной линии.

В качестве примера (более подробно см. [23]) укажем, что для молекулярных колебаний в жидкостях $\tau_k \approx 10^{-12}$ с (оно порядка времени между столкновениями) и имеет место однородное уширение.

§ 8. Импульсные случайные процессы

Рассмотрим несколько моделей импульсных случайных процессов.

Одиночный случайный импульс. Представим себе импульс, форма которого известна и задана функцией $F(t)$, а момент появления t_0 случаен и меняется от реализации к реализации:

$$x(t) = F(t - t_0) \quad (2.8.1)$$

Предельные случаи (39) и (45) соответствуют двум существенно различным физическим ситуациям. Если флуктуации частоты медленные (см. (39)), окружение молекулы практически можно рассматривать как статистическое. Процесс дефазировки определяется фактически различием собственных частот; форма спектральной линии гауссовская, и наблюдается картина уширения, аналогичная картине доплеровского уширения.

Напротив, если флуктуации частоты быстрые (см. (45)), все молекулы находятся в практически идентичных условиях и форма спектральной линии — лоренцевская (ср. с эффектом столкновительного сужения доплеровской линии).

(рис. 2.20, а). Другой полезной моделью является импульс со случайной субструктурой (рис. 2.20, б):

$$x(t) = F(t) \xi(t). \quad (2.8.2)$$

Здесь $F(t)$ — заданная регулярная функция времени (плавная огибающая импульса), а $\xi(t)$ *) — случайный процесс. В оптических задачах в качестве процесса $\xi(t)$ в (2) часто рассматривается узкополосный оптический шум или его комплексная амплитуда (в так называемых укороченных уравнениях, см. гл. 4). Таким образом, наглядной моделью импульсного процесса рассматриваемого типа могут быть «вспышки» оптического шума.

Случайная импульсная последовательность. Этот процесс состоит из совокупности импульсов (1):

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t - t_p), \quad (2.8.3)$$

Здесь $F(t)$ — регулярная функция времени, описывающая форму одиночного импульса, причем случайными могут быть как время появления t_p каждого импульса, так и полное число импульсов n (рис. 2.21).

Квазипериодический импульсный процесс. В этом случае

$$x(t) = \rho(t) F(\psi), \quad (2.8.4)$$

где $F(\psi)$ — периодическая функция:

$$F(\psi + 2\pi n) = F(\psi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.8.5)$$

аргумент которой следующим образом зависит от времени:

$$\psi = \omega_0 t + \varphi(t). \quad (2.8.6)$$

В частном случае постоянных $\rho = \rho_0$ и $\varphi = \varphi_0$ выражение (4) определяет регулярную периодическую последовательность импульсов произвольной формы F (рис. 2.22, а). При флуктуирующих $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ эти импульсы будут случайным образом искажены как по высоте, так и по длительности (рис. 2.22, б).

Рассмотрим статистические характеристики перечисленных процессов.

*) Функция $\xi(t)$ может быть комплексной.

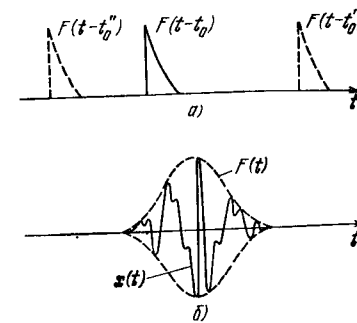


Рис. 2.20. Случайные импульсы:

а) одиночный импульс со случайным временем появления; б) импульс заданной формы со случайной субструктурой

и полное число импульсов n

Одиночный случайный импульс. Процесс (1) характеризуется средним значением и корреляционной функцией:

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_0) \omega(t_0) dt_0, \quad (2.8.7)$$

$$\overline{xx_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_0) F(t+\tau-t_0) \omega(t_0) dt_0. \quad (2.8.8)$$

В этих выражениях $\omega(t_0)$ — распределение вероятностей случайного момента t_0 появления импульса

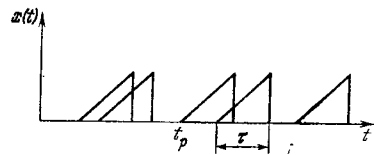


Рис. 2.21. Случайная импульсная последовательность $x(t)$.

Импульсы имеют одинаковую форму, но возникают в случайные моменты времени. В задаче о дробовом шуме диода (§ 8) такие импульсы тока $x(t) = i(t)$ возникают при пролете электрона от катода к аноду; моменты их появления случайны в силу случайности процесса термозлектронной и также фотоэлектронной, см. § 9) эмиссии.

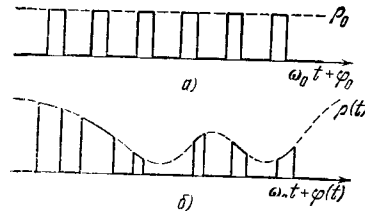


Рис. 2.22. Квазипериодический импульсный процесс:

а) неискаженная последовательность прямоугольных импульсов; б) те же импульсы, искаженные «амплитудными» и «фазовыми» флуктуациями.

Предположим, что импульс $F(t)$ имеет максимум при t' и характеризуется длительностью $\tau_{\text{имп}}$, а «импульс» распределения $\omega(t_0)$ имеет длительность τ_0 , причем максимум $\omega(t_0)$ приходится на t'_0 . Как видно из (7), в предельных случаях а) $\tau_{\text{имп}} \ll \tau_0$ и б) $\tau_{\text{имп}} \gg \tau_0$ выражение для \bar{x} будет следующим:

$$\text{а) } \bar{x} \approx \omega(t-t') \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.8.9)$$

$$\text{б) } \bar{x} \approx F(t-t'_0). \quad (2.8.10)$$

Аналогичным образом упрощается и выражение (8):

$$\text{а) } \overline{xx_\tau} \approx \omega(t-t'') \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta+\tau) d\theta, \quad (2.8.11)$$

$$\text{б) } \overline{xx_\tau} \approx F(t-t'_0) F(t+\tau-t'_0). \quad (2.8.12)$$

Момент t'' в (11) определяется из условия, что при $t=t''$ произведение $F(t)F(t+\tau)$ принимает максимальное значение.

Таким образом, рассматриваемый одиночный импульс $x(t) = F(t-t_0)$ является, вообще говоря, нестационарным случайным процессом (\bar{x} и $\overline{xx_\tau}$ зависят от времени). В частности, для импульса гауссовской формы и при гауссовском распределении t_0 , т. е. при

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha^2 t^2} \quad (t_{\text{имп}} \sim 1/\alpha), \quad (2.8.13)$$

$$\omega(t_0) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 t_0^2}, \quad (2.8.14)$$

из (7), (8) находим

$$x = \frac{F_0 \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} t^2 \right\}, \quad (2.8.15)$$

$$\overline{xx_\tau} = \frac{F_0^2 \beta}{\sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + \beta^2} [2t^2 \beta^2 + 2t\beta^2 \tau + \tau^2 (\alpha^2 + \beta^2)] \right\}. \quad (2.8.16)$$

Однако если появление импульса равновероятно для любого момента на достаточно большом интервале

$$\omega(t_0) = 1/T, \quad T \gg t_{\text{имп}}, \quad (2.8.17)$$

то среднее значение и корреляционная функция перестают зависеть от времени:

$$x = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.8.18)$$

$$\overline{xx_\tau} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta+\tau) d\theta. \quad (2.8.19)$$

Процесс $x = F(t-t_0)$ в этом случае в пределах интервала T может считаться стационарным.

Представим импульс $F(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \varphi(-\omega) = \varphi^*(\omega); \quad (2.8.20)$$

подставив (20) в (19), получим после интегрирования по θ (это дает δ -функцию)

$$\overline{xx_\tau} = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

т. е. спектральная плотность стационарного случайного процесса типа одиночного случайного импульса равна

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{T} |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.8.21)$$

Другим видом случайного процесса типа одиночного импульса является импульс вида (2):

$$A(t) = F(t) \xi(t), \quad (2.8.22)$$

где $F(t)$ описывает огибающую импульса и является регулярной функцией времени, $\xi(t)$ — модулирующий случайный стационарный процесс. Процесс (22) при этом нестационарен; например, его дисперсия и корреляционная функция со временем меняются:

$$\sigma_A^2(t) = F^2(t) \bar{\xi}^2, \quad \overline{A(t)A(t+\tau)} = F(t)F(t+\tau) \overline{\xi\xi_\tau}.$$

Однако коэффициент корреляции процесса A не зависит от формы импульса $F(t)$ и совпадает с коэффициентом корреляции процесса ξ :

$$R_A(\tau) = \frac{\overline{A(t)A(t+\tau)}}{\sigma_A(t)\sigma_A(t+\tau)} = \frac{\overline{\xi\xi_\tau}}{\bar{\xi}^2} = R_\xi(\tau).$$

Таким образом, по виду $R_A(\tau)$ можно определить форму спектра $G_\xi(\omega)$ случайной модуляции.

Аналогичный результат может быть получен и для пространственного импульса:

$$A(x, y) = F(x, y) \xi(x, y)$$

(например, для распределения поля в поперечном сечении лазерного луча); пространственные коэффициенты корреляции для A и ξ совпадают: $R_A = R_\xi$.

Случайная импульсная последовательность. Для простоты будем считать, что каждый импульс в сумме (3)

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t-t_p) \quad (2.8.23)$$

возникает независимо от остальных. При этом времена появления t_p ($p=1, 2, \dots, n$) и число импульсов n являются статистически независимыми случайными величинами:

$$\omega(n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \omega(n) \omega(t_1) \dots \omega(t_n), \quad (2.8.24)$$

где все распределения $\omega(t_p)$ одинаковы, и средние

$$\begin{aligned} \langle F(t-t_p) \rangle &= \bar{F}, & \langle F(t+\tau-t_p) \rangle &= F_\tau, \\ \langle F(t-t_p)F(t+\tau-t_p) \rangle &= \overline{FF_\tau} \end{aligned} \quad (2.8.25)$$

не зависят от индекса p . Усредняя (23) сначала по t_p , а затем по n , находим

$$x = \left\langle \sum_{p=1}^n F \right\rangle = \bar{n} \bar{F}, \quad (2.8.26)$$

$$\bar{x}_\tau = \left\langle \sum_{p=1}^n F_\tau \right\rangle = \bar{n} \bar{F}_\tau, \quad (2.8.27)$$

$$\begin{aligned} \overline{xx_\tau} &= \left\langle \sum_p \sum_{p'} F(t-t_p)F(t+\tau-t_{p'}) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{p=p'} \overline{FF_\tau} + \sum_{p \neq p'} \overline{FF_\tau} \right\rangle = n \overline{FF_\tau} + (\bar{n}^2 - \bar{n}) \bar{F} \bar{F}_\tau, \end{aligned} \quad (2.8.28)$$

$$B(\tau) = \overline{xx_\tau} - \bar{x} \bar{x}_\tau = \bar{n} \overline{FF_\tau} + (\bar{n}^2 - \bar{n} - \bar{n}^2) \bar{F} \bar{F}_\tau. \quad (2.8.29)$$

Чтобы конкретизировать эти выражения, рассмотрим следующую модель.

Пусть $\tau_{\text{имп}}$ характеризует длительность каждого импульса, а T — достаточно большой интервал времени, в течение которого импульсы появляются ($T \gg \tau_{\text{имп}}$). Будем считать, что появление каждого импульса в любой момент времени равновероятно:

$$\omega(t_p) = 1/T. \quad (2.8.30)$$

Поскольку $T \gg \tau_{\text{имп}}$, то в этом случае средние \bar{F} и $\overline{FF_\tau}$ от времени зависят практически не будут:

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta = \bar{F}_\tau, \quad \overline{FF_\tau} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta+\tau) d\theta. \quad (2.8.31)$$

Найдем теперь статистику n , соответствующую этой модели. Как бы часто ни следовали друг за другом импульсы, всегда можно представить себе, что ось времени разбита на столь малые интервалы Δt , что в каждом интервале либо появится всего один новый импульс (с вероятностью p), либо не появится ни одного (с вероятностью $q=1-p$). Вероятность того, что за N интервалов появится n импульсов, дается в этом случае формулой Бернулли

$$P(n) = p^n q^{N-n} C_N^n \quad (n=0, 1, \dots, N), \quad (2.8.32)$$

где

$$C_N^n = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} \geq 1 \quad (2.8.33)$$

— биномиальные коэффициенты:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N a^n b^{N-n} C_N^n. \quad (2.8.34)$$

Так как $N \Delta t = T$, то в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ в полученных соотношениях можно принять $N \rightarrow \infty$, т. е. $n \ll N$. При этом согласно (32), (33) $C_N^n \approx N^n/n!$ и

$$P(n) \approx p^n q^N N^n/n!,$$

или с точностью до нормировочной постоянной

$$P(n) \sim \alpha^n/n! \quad (\alpha = pN). \quad (2.8.35)$$

Подставляя (35) в условие нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$, находим окончательно

$$P(n) = e^{-\alpha} \alpha^n/n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.8.36)$$

Распределение (36) называют распределением Пуассона. Для этого распределения $\bar{n} = \alpha$. В самом деле, дифференцируя по α ряд

$$e^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!},$$

получим

$$e^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \alpha^{n-1}}{n!} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \alpha^n}{n!},$$

так что

$$\alpha = e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \alpha^n}{n!} = \bar{n}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены и моменты n более высокого порядка. В частности, $\overline{n^2} = \alpha(1 + \alpha)$, так что дисперсия и среднее значение пуассоновской случайной величины n совпадают:

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \alpha = \langle n \rangle. \quad (2.8.37)$$

Согласно (36)

$$P(n+1) = P(n) \frac{\alpha}{n+1}.$$

Отсюда следует, что при целочисленных значениях $\alpha = m+1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) наибольшими являются вероятности двух значений n :

$$n_1 = m, \quad n_2 = m+1, \quad P(n_1) = P(n_2).$$

При нецелых $\alpha = m+1 + \varepsilon$ ($m = 0, 1, 2, \dots; 0 < \varepsilon < 1$) максимальная вероятность соответствует значению $n = m+1$. Таким образом, при $\alpha = \bar{n} > 1$ зависимость $P(n)$ от n не является монотонной: вероятности сначала растут, а затем убывают (рис. 2.23, а). Если $\alpha < 1$, то картина будет другой: вероятности уменьшаются с ростом n (рис. 2.23, б).

С увеличением α величина $\sigma_n/\bar{n} = 1/\sqrt{\alpha} = 1/\sqrt{\bar{n}}$ стремится к нулю, распределение Пуассона становится относительно более

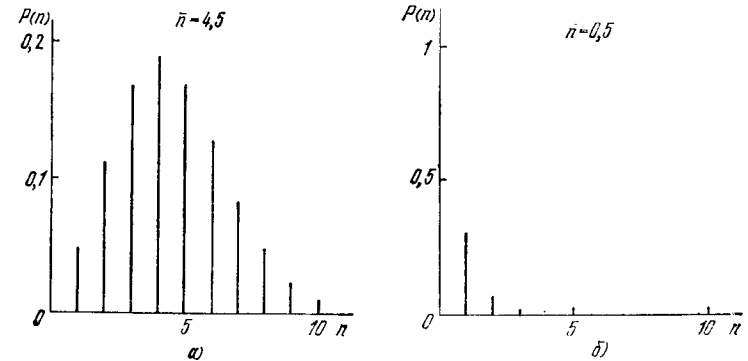


Рис. 2.23. Дискретное распределение Пуассона при $\bar{n} > 1$ (а) и $\bar{n} < 1$ (б).

узким и переходит в гауссовское. Действительно, используя формулу Стирлинга

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

и разложение логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m},$$

распределение Пуассона (36) можно переписать как

$$P(n) \approx \frac{\exp\{n - \alpha - n \ln(n/\alpha)\}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{\exp\{\alpha [x - (1+x) \ln(1+x)]\}}{\sqrt{2\pi \alpha (1+x)}} = \frac{\exp\left\{-\alpha \left[\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \dots\right]\right\}}{\sqrt{2\pi \alpha (1+x)}}, \quad (2.8.38)$$

где $x = (n - \alpha)/\alpha = (n - \bar{n})/\bar{n}$ — относительное отклонение n от среднего значения. Согласно (38)

$$P_{\max} = P(n = \alpha) = 1/\sqrt{2\pi \alpha}.$$

Если $\sqrt{\alpha} \gg 1$, то существенным в (38) является лишь квадратичный по x член в экспоненте:

$$P(n) \approx \frac{e^{-\alpha x^2/2}}{\sqrt{2\pi \alpha}} = \frac{e^{-(n-\alpha)^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi \alpha}} = w(n). \quad (2.8.39)$$

Мы приходим, таким образом, к гауссовскому распределению для n , причем n в (39) можно считать непрерывной переменной

(так как максимум гауссовского распределения (39) характеризуется шириной $\sigma_n = \sqrt{\alpha} \gg 1$ и в него попадает много линий дискретного распределения $P(n)$).

Распределению Пуассона соответствует характеристическая функция

$$\begin{aligned} \theta(u) = \langle e^{iun} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} P(n) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{iu})^n}{n!} = \\ &= \exp(\alpha e^{iu} - 1) = \exp \left\{ \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \right\}, \end{aligned} \quad (2.8.40)$$

и, как видно из (40), все кумулянты имеют одну и ту же величину

$$k_m = \alpha \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.8.41)$$

Величина относительных кумулянтов будет, однако, зависеть от α и m :

$$\kappa_m = k_m / k_2^{m/2} = 1 / \alpha^{m/2 - 1}.$$

В частности, если $\sqrt{\alpha} \gg 1$, то $\kappa_m \ll 1$ ($m = 3, 4, \dots$) и (40) переходит в характеристическую функцию

$$\theta(u) = e^{-\alpha(iu - u^2/2)},$$

соответствующую гауссовскому распределению (39). Подставив (31) и (37) в (26) и (29), получим выражения для среднего значения и корреляционной функции пуассоновской импульсной последовательности:

$$\bar{x} = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.8.42)$$

$$B(\tau) = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta \quad (2.8.43)$$

(формулы Кэмпбелла — ср. с (18), (19)). Здесь введена средняя частота следования импульсов $\Omega = \alpha/T = \bar{n}/T$. Корреляционной функции (43) соответствует спектральная плотность

$$G(\omega) = 2\pi\Omega |\varphi(\omega)|^2, \quad (2.8.44)$$

где $\varphi(\omega)$ — фурье-образ функции $F(t)$, описывающей одиночный импульс рассматриваемой последовательности (ср. с (18) — (20)).

Характеристическая функция импульсного процесса (23) равна

$$\theta(u) = \left\langle \exp \left\{ iu \sum_{p=1}^n F(t - t_p) \right\} \right\rangle,$$

или, с учетом выражения (30),

$$\theta(u) = \langle \beta^n \rangle, \quad (2.8.45)$$

где усреднение производится по ансамблю значений n , а

$$\beta = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-t')} dt'. \quad (2.8.46)$$

В случае пуассоновской статистики n имеем

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!} = e^{\alpha(\beta-1)} = \\ &= \exp \left\{ \Omega \int_{-T/2}^{T/2} [e^{iuF(t-t')} - 1] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (2.8.47)$$

Если длительность отдельного импульса мала (по сравнению с T), то формулу (47) можно переписать как

$$\theta(u) = \exp \left\{ \Omega \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iuF(\theta)} - 1) d\theta \right\}. \quad (2.8.48)$$

Разлагая показатель экспоненты в ряд Тейлора по u , получим

$$\theta(u) = \exp \left\{ \Omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta \right\},$$

т. е. кумулянты импульсного пуассоновского процесса равны

$$k_m = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta. \quad (2.8.49)$$

Величину кумулянтов (49) можно оценить как

$$k_m \approx \Omega F_{\max}^m \tau_{\text{имп}},$$

где $\tau_{\text{имп}}$ — длительность импульса, F_{\max} — его пиковое значение. Отсюда находим оценку для относительных кумулянтов:

$$\kappa_m = \frac{k_m}{k_2^{m/2}} \approx \frac{1}{(\Omega \tau_{\text{имп}})^{m/2 - 1}}. \quad (2.8.50)$$

Итак, вид характеристической функции (48) импульсного процесса и, следовательно, распределение вероятностей определяются частотой следования импульсов и их формой. Оценка (50) показывает, что, если в течение времени, пока длится один импульс, появляется достаточно много новых импульсов, т. е. в предельном случае

$$(\Omega \tau_{\text{имп}})^{1/2} \gg 1, \quad (2.8.51)$$

основную роль играют лишь два первых кумулянта и распределение вероятностей приближенно будет гауссовским. В общем случае $w(x)$ имеет вид фурье-образа характеристической функции (48):

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \Omega \int_{-\infty}^{\infty} [e^{iuF(\theta)} - 1] d\theta - iux \right\} du. \quad (2.8.52)$$

Квазипериодический импульсный процесс [5]. Стационарную квазипериодическую последовательность импульсов можно представить как

$$\xi(t) = \rho(t) F(\psi), \quad (2.8.53)$$

$$\psi = \psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t), \quad -\pi < \varphi(t) < \pi,$$

где $F(\psi) = F(\psi + 2\pi)$ — регулярная периодическая функция ψ , а ρ и φ — случайные стационарные функции, которые, по аналогии с (2.3.1), можно назвать «огibaющей» и «фазой». В случае фиксированных ρ и φ процесс ξ имеет тот же вид, что и периодическая функция F (см. рис. 2.22, а). Если же ρ и φ флуктуируют, то эта картина будет случайным образом искажаться (см. рис. 2.22, б).

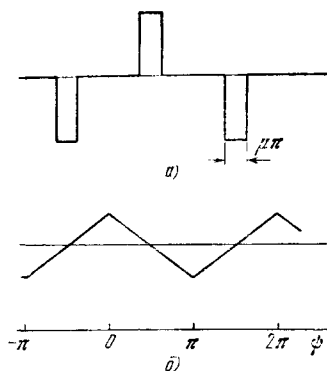


Рис. 2.24 Импульсы $F(\psi)$ различной формы.

Представлены без искажений, вносимых флуктуациями.

и, как следует из (2.5.71) и (54), одномерные функции распределения ξ и ρ связаны соотношением

$$w(\xi) = w(-\xi) = (1 - \mu) \delta(\xi) + \frac{\mu}{2} w(\rho) \Big|_{\rho=\xi}. \quad (2.8.55)$$

Согласно (55) при отсутствии пауз между импульсами ($\mu=1$) распределение огibaющей совпадает с распределением самого процесса (в области положительных значений); в этом случае в (2.5.70)

$$U_0(u\rho) = \cos u\rho, \quad (2.8.56)$$

$$U_m(u\rho) = -i \sin u\rho \frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi/2} \quad (m \neq 0).$$

2. $F(\psi)$ — последовательность импульсов треугольной формы (рис. 2.24, б). При этом

$$U_m(u\rho) = u\rho \frac{\sin u\rho}{(u\rho)^2 - (m\pi/2)^2} \quad (\pm m = 0, 2, 4, \dots), \quad (2.8.57)$$

$$U_m(u\rho) = \frac{u\rho}{i} \frac{\cos u\rho}{(u\rho)^2 - (m\pi/2)^2} \quad (\pm m = 1, 3, \dots),$$

и (2.5.71) принимает вид синус-преобразования Фурье:

$$\theta(u) u = \int_0^{\infty} \frac{w(\rho)}{\rho} \sin u\rho d\rho. \quad (2.8.58)$$

Обратное преобразование дает

$$\frac{w(\rho)}{\rho} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta(u) u \sin u\rho du \quad (2.8.59)$$

(ср. с (2.5.19)). Как следует из (59), для гауссовского импульсного процесса распределение огibaющей не будет рэлеевским: подставив в (59) $\theta(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right)$, получим

$$w(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma^3} \rho^2 e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \quad (2.8.60)$$

Характеристической функции (58) соответствует четная функция распределения вероятностей $w(\xi) = w(-\xi)$, причем

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos u\xi \theta(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w(\rho)}{\rho} d\rho \int_0^{\infty} \frac{\cos u\xi \sin u\rho}{u} du. \quad (2.8.61)$$

Но

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u\xi \sin u\rho}{u} du = \begin{cases} \pi/2 & (\rho > \xi), \\ 0 & (\rho < \xi) \end{cases} \quad (\rho, \xi > 0). \quad (2.8.62)$$

Подставив (62) в (61), получим, что для треугольных импульсов соотношение между распределениями самого процесса и его огibaющей будет следующим:

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{w(\rho)}{\rho} d\rho \quad (2.8.63)$$

(ср. с (2.5.18) и (55)). Нетрудно убедиться, что в случае $w(\rho)$ вида (60) распределение (63) будет гауссовским. При распределении высот импульсов по закону Рэлея $w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp(-\rho^2/2\sigma^2)$ из (63) находим распределение импульсного процесса, выражающееся через интеграл вероятности:

$$w(\xi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\rho^2/2\sigma^2} d\rho \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]. \quad (2.8.64)$$

Дробовой шум. Важным примером импульсного случайного процесса является дробовой шум электронных ламп. Анодный ток электронной лампы представляет собой случайную последовательность импульсов, обусловленную статистическим характером электронной эмиссии. Расчет характеристик возникающего импульсного случайного процесса представляет собой, вообще говоря, весьма сложную задачу; в общем случае существенным оказывается взаимодействие между электронами. Имеется, однако, важный случай, для которого расчет статистики дробового шума не представляет труда, — задача о дробовом шуме диода, работающего в режиме насыщения. Здесь взаимодействиями электронов в меж-

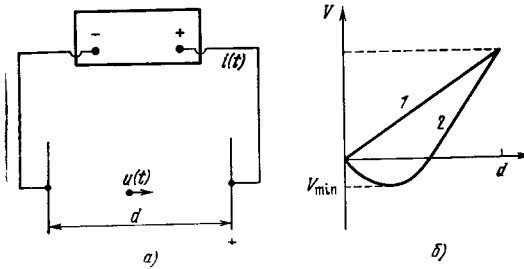


Рис. 2.25. Схема диода (а) и распределение потенциала в диоде (б): 1 — в насыщенном диоде, 2 — при ограничении тока пространственным зарядом.

электродном промежутке можно пренебречь; статистика импульсов анодного тока полностью аналогична статистике термоэлектронной эмиссии. Поскольку последняя является пуассоновской (различные термоэлектроны эмитируются независимо), определение статистики анодного тока сводится к расчету характеристик пуассоновских импульсов.

Рассмотрим плоский диод, разность потенциалов между электродами которого равна V ; межэлектродное расстояние обозначим через d (рис. 2.25). Вероятность вылета одного термоэлектрона в интервале времени dt равна

$$dP = p dt, \quad (2.8.65)$$

где p — вероятность вылета в единицу времени. Тогда вероятность вылета n электронов за время T описывается распределением Пуассона с $\bar{n} = \Omega T$, где $\Omega = I_0/e$ — среднее число электронов, эмитируемых катодом в единицу времени, I_0 — средний ток и e — заряд электрона. Соотношение (44) сразу же дает нам выражение для спектра дробового шума:

$$G(\omega) = 2\pi\Omega |i(\omega)|^2, \quad (2.8.66)$$

и вычисление спектра сводится, таким образом, к определению фурье-образа $i(\omega)$ импульса тока $i(t)$, возбуждаемого в анодной

цепи отдельным электроном. Для расчета формы импульса тока можно воспользоваться следующими простыми соображениями.

При движении электрона от катода к аноду на отрезке пути ds внешнее поле E совершает работу $dW = eE ds$. В силу закона сохранения энергии можно записать

$$i(t) V dt = eE ds = eE dz$$

(учтено, что диод является плоским), откуда

$$i(t) = \frac{e}{V} E \frac{dz}{dt} = \frac{e}{d} u(t), \quad (2.8.67)$$

где $u(t)$ — мгновенное значение скорости, $V = Ed$. Величину $u(t)$ можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{z} = eE.$$

При достаточно высоком напряжении V тепловой скоростью электрона можно пренебречь: полагая, что при $t=0$ $z=0$ и $\dot{z}=0$, для $i(t)$ получаем

$$i(t) = 2et \tau_{np}^2, \quad \tau_{np} = 2md/eE, \quad 0 < t < \tau_{np}, \quad (2.8.68)$$

где τ_{np} — время пролета электрона от катода к аноду.

Таким образом, анодный ток насыщенного диода представляет собой случайную последовательность импульсов треугольной формы вида (67) (см. рис. 2.21):

$$I(t) = \sum_n i(t - t_n) = \sum_n \frac{2e}{\tau_{np}^2} (t - t_n), \quad 0 < t - t_n < \tau_{np},$$

где t_n — моменты вылета электронов.

Фурье-образ импульса тока имеет вид

$$i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\tau_{np}}{\pi\tau_{np}^2} \int_0^{\tau_{np}} te^{-i\omega t} dt, \quad (2.8.69)$$

$$|i(\omega)|^2 = \left(\frac{e}{\pi\theta^2}\right)^2 [2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta] = \left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \mathcal{F}(\theta),$$

где $\theta = \omega\tau_{np}$ — величина, которую в электронике принято называть пролетным углом.

Пользуясь (69), для спектральной плотности дробового шума насыщенного диода получим

$$G^+(\omega) = \mathcal{F}(\theta) \frac{e}{\pi} I_0. \quad (2.8.70)$$

Важно отметить, что частота входит в спектральную плотность в комбинации со временем пролета. Согласно (70) спектральная плотность дробового шума максимальна при $\theta \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$). Раз-

лагая $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в ряд, нетрудно убедиться, что

$$G^+(0) = \frac{e}{\pi} I_0. \quad (2.8.71)$$

Эта формула носит название формулы Шоттки; ею пользуются обычно при расчете дробовых шумов низкочастотных электронных ламп. При $\theta \rightarrow \infty$ $G(\omega) \rightarrow 0$, т. е. при больших пролетных углах дробовой шум исчезает.

Отмеченное обстоятельство не следует рассматривать, однако, как рецепт повышения чувствительности усилителей на электронных лампах; при $\theta \rightarrow \infty$ резко уменьшается и коэффициент усиления.

Добиться уменьшения уровня дробового шума можно, переходя от режима насыщения к режиму ограничения тока пространственным зарядом. В этом случае вблизи катода (см. рис. 2.25, б) формируется минимум потенциала V_{\min} , глубина которого зависит от тока эмиссии, что приводит к уменьшению флуктуаций анодного тока. Этот эффект называется депрессией дробовых шумов.

С учетом эффекта депрессии формулу (71) следует записать в виде

$$G^+(\omega) = \Gamma \frac{e}{\pi} I_0, \quad (2.8.72)$$

где Γ — так называемый коэффициент депрессии. Результаты расчета коэффициента депрессии (в этом случае принципиальным становится учет распределения электронов по скоростям) можно найти в [25]. На низких частотах величина $\Gamma \approx 0,01$, так что депрессия дробового шума оказывается достаточно сильной.

Учет взаимодействий между электронами на высоких частотах представляет собой трудную задачу; с проблемами теории высокочастотных дробовых шумов в электронных лампах можно ознакомиться по монографии [25].

§ 9. Фотоотсчеты в случайном световом поле

В этом параграфе мы обратимся к еще одному примеру импульсного случайного процесса — займемся исследованием статистики фототока, возбуждаемого световым излучением на фотокатоде (упрощенная схема фотоэлектрического детектора изображена на рис. 2.26). Эта задача аналогична, разумеется, задаче о дробовом эффекте, рассмотренной в предыдущем параграфе: элементарный акт фотоэмиссии является случайным, подобно элементарному акту термоэлектронной эмиссии (см. рис. 2.21).

Однако здесь мы рассмотрим новый аспект этой задачи, имеющий особое значение для статистики фотоэмиссии, а именно, рассмотрим статистику фотоэлектронного тока в условиях, когда катод

освещается источником света с флуктуирующей интенсивностью (в задаче о термоэлектронной эмиссии такой постановке соответствуют флуктуационные изменения температуры катода). Будем искать закон распределения $P(n)$ числа n фотоэлектронов, эмитированных фотокатодом в течение заданного интервала времени T (числа фотоотсчетов).

Мы убедимся, что в общем случае источника с флуктуирующей интенсивностью распределение $P(n)$, вообще говоря, отличается от пуассоновского и зависит от статистики интенсивности света. Таким образом, процесс фотодетектирования случайного света приводит к непуассоновским импульсным последовательностям. Измерение распределений $P(n)$ может быть использовано для определения одномерной статистики интенсивности светового пучка. Этот факт широко применяется в современной статистической оптике.

Распределение фотоотсчетов в случайном поле. Формула Манделя. Выведем распределение числа фотоотсчетов $P(n)$ в поле светового источника с флуктуирующей интенсивностью. Согласно полуклассической теории фотоэффекта дифференциальная вероятность dP появления одного фотоэлектрона (фотоотсчета) в интервале времени dt определяется выражением (ср. с (2.8.65))

$$dP(t) = p dt, \quad p = \beta I(t), \quad (2.9.1)$$

где β — коэффициент, характеризующий чувствительность фотодетектора, а $I(t)$ — интенсивность света [8].

Если источник света имеет постоянную интенсивность (на практике такой источник является хорошей моделью стабилизированного одномодового лазера непрерывного действия), то в силу (1) вероятность вылета фотоэлектрона прямо пропорциональна интервалу времени T , и, следовательно, статистика фотоэлектронов является пуассоновской (см. § 8), при этом вероятность появления n импульсов фототока за время T дается формулой (2.8.36):

$$P(n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.9.2)$$

Среднее число фотоэлектронов за время T равно

$$\alpha = \langle n \rangle = \beta T I. \quad (2.9.3)$$

Если интенсивность изменяется, то вместо (3) следует писать

$$\alpha = \langle n \rangle = \beta \int_0^T I(t) dt = \beta U, \quad (2.9.4)$$

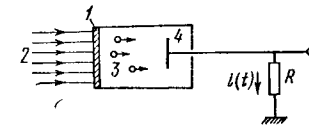


Рис. 2.26. Модель фотодетектора:

1 — катод (фоточувствительная поверхность); 2 — падающее световое излучение; 3 — эмиттированные фотоэлектроны; 4 — коллекторный анод, $i(t)$ — выходной ток, R — нагрузочное сопротивление.

где $U = \int_0^T I(t) dt$ — энергия светового потока, прошедшего через поверхность детектора за время T . Для случайного светового поля

$$E(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (2.9.5)$$

функция $I(t) = \rho^2(t)/2$ также имеет случайный характер, а энергия U случайно меняется от измерения к измерению. Вероятность (2) в этой ситуации следует, очевидно, интерпретировать как условную вероятность, соответствующую данному значению U :

$$P(n|U) = e^{-\beta U} \frac{(\beta U)^n}{n!}, \quad \langle n \rangle|U = \alpha = \beta U.$$

Полную вероятность найдем, усреднив $P(n|U)$ при помощи функции распределения энергии $w(U)$:

$$P(n) = \int_0^\infty P(n|U) w(U) dU = \int_0^\infty \frac{(\beta U)^n}{n!} e^{-\beta U} w(U) dU, \quad (2.9.6)$$

$$\langle n \rangle = \beta \langle U \rangle = \beta \langle I \rangle T.$$

Выражение (6) называют *формулой Манделя*. В результате усреднения по U распределение вероятностей числа фотоотсчетов, даваемое формулой Манделя (6), может существенно отличаться от первоначального пуассоновского. Это отличие проявляется, в частности, в величине дисперсии фотоотсчетов. При распределении n по Пуассону $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$ (см. (2.8.37)), в то время как согласно (6)

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle + \beta^2 (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2) = \langle n \rangle + \beta^2 \sigma_U^2, \quad (2.9.7)$$

т. е. дисперсия числа фотоотсчетов в случайном поле всегда больше $\langle n \rangle$. Поэтому случайные поля можно различать по превышению σ^2 над $\langle n \rangle$.

Роль соотношения между временем корреляции поля и временем наблюдения. Величина σ_U^2 (7) существенно зависит от соотношения между временем корреляции поля τ_k и временем наблюдения T . Действительно, в предельном случае $\tau_k \ll T$ статистика фотоотсчетов вообще не чувствительна к статистике светового поля. Согласно (4) при $\tau_k \ll T$ в силу эргодической теоремы $\alpha \approx \beta T \langle I \rangle$ и статистика фотоотсчетов будет пуассоновской независимо от распределения интенсивности света.

Для рассмотрения промежуточных случаев и получения количественных оценок обратимся к случайному процессу (5). Корреляционная функция для стационарного поля (5) может быть записана как $\langle EE_\tau \rangle = \sigma^2 r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]$ (см. (2.3.7)), причем

$\langle E^2 \rangle = \langle I \rangle = \sigma^2$ и $\langle n \rangle = \beta \sigma^2 T$. Если поле гауссовское, то согласно (2.4.17)

$$\langle II_\tau \rangle = \frac{1}{4} \langle \rho^2 \rho_\tau^2 \rangle = \sigma^4 [1 + r^2(\tau)].$$

Отсюда находим

$$\sigma_U^2 = \sigma^4 \int_0^T dt_1 dt_2 r^2(t_1 - t_2) = 2\sigma^4 \int_0^T (T - \tau) r^2(\tau) d\tau,$$

или

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau) r^2(\tau) d\tau. \quad (2.9.8)$$

Возьмем $r(\tau)$ в виде

$$r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_k}.$$

В этом случае согласно (8) дисперсия фотоотсчетов определяется выражением

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \frac{1}{2} q^{-2} (e^{-2q} - 1 + 2q),$$

$$q = \frac{T}{\tau_k}. \quad (2.9.9)$$

Из (9) следует монотонное уменьшение дисперсии с ростом времени измерения T (рис. 2.27). В пределе $\tau_k \gg T$ ($q \ll 1$)

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2.$$

В другом крайнем случае, $\tau_k \ll T$, из (9) получаем

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \tau_k/T \approx \langle n \rangle, \quad (2.9.9a)$$

т. е. при $\tau_k \ll T$ случайность поля не проявляется (величина дисперсии совпадает со значением дисперсии для нефлуктуирующего поля). На рис. 2.28 показана эволюция распределения $P(n)$ с ростом T/τ_k и видно, что при $\tau_k \ll T$ ($q \gg 1$) распределение приближается к пуассоновскому.

Выражение (9) можно переписать как

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle (1 + \delta), \quad \delta = \frac{\langle n \rangle}{2q^2} (e^{-2q} - 1 + 2q). \quad (2.9.9b)$$

Параметр δ , называемый параметром вырождения (название заимствовано из статистической механики), характеризует увеличение дисперсии числа фотоотсчетов из-за флуктуаций поля (при отсут-

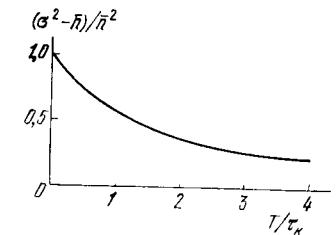


Рис. 2.27. Приведенное отклонение дисперсии фотоотсчетов от среднего числа фотоотсчетов $(\sigma_n^2 - \bar{n})/\bar{n}^2$ для излучения с гауссовской статистикой в зависимости от времени измерения T .

τ_k — время корреляции излучения.

ствии флуктуаций $\delta = 0$). Согласно (96) величина δ зависит как от соотношения между временем наблюдения и временем корреляции ($q = T/\tau_k$), так и от интенсивности поля ($\langle n \rangle \sim \langle I \rangle$).

Для лазерного излучения $\delta \approx 10^{-4}$, в то время как для тепловых источников света $\delta \leq 10^{-3}$. Эти оценки объясняют, почему экспериментальное изучение статистики фотоотсчетов было начато только после создания лазеров.

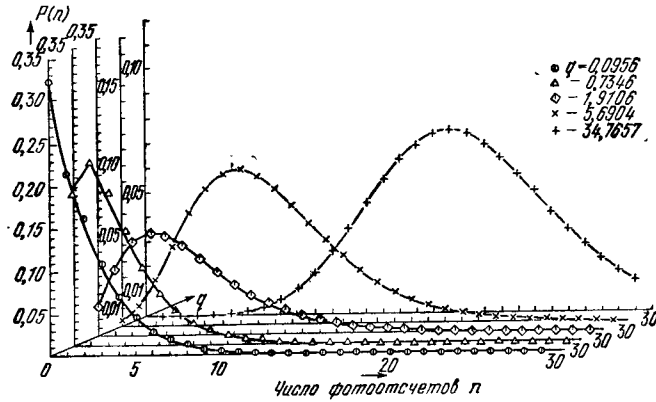


Рис. 2.28. Распределение фотоотсчетов лазерного излучения, рассеянного вращающимся матовым диском, при различных отношениях $T/\tau_k = q$ [10].

Статистика фотоотсчетов в поле теплового и лазерного излучений. Предыдущее рассмотрение показало, что для сохранения в статистике фотоотсчетов сведений о флуктуациях светового поля необходимо, чтобы время корреляции τ_k излучения превышало время измерения T . Мы будем считать это условие ($\tau_k \gg T$) выполненным. Тогда $U = IT$, а формулу Манделя (6) можно записать в виде

$$P(n) = \int_0^{\infty} \frac{(\beta IT)^n}{n!} e^{-\beta IT} w(I) dI. \quad (2.9.10)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Возьмем прежде всего случай, когда распределение $w(I)$ имеет вид δ -функции:

$$w(I) = \delta(I - I_0). \quad (2.9.11)$$

Соответствующее распределение фотоотсчетов является пуассоновским:

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (2.9.12)$$

где

$$\bar{n} = \beta T I_0, \quad \sigma_n^2 = \bar{n}. \quad (2.9.13)$$

Распределения (11) и (12) относятся к идеальной модели лазера, работающего в надпороговом режиме. Статистика фотоотсчетов, соответствующая реальной модели лазера, в которой учитываются слабые амплитудные флуктуации, рассматривается в § 5 гл. 7.

2. Обратимся теперь к рассмотрению поля с гауссовской статистикой (тепловое излучение, лазерное излучение, рассеянное в неоднородных средах, и т. п.), имеющего (см. (2.4.8)) экспоненциальное распределение интенсивности:

$$w(I) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-I/\sigma^2}, \quad \sigma^2 = \langle I \rangle, \quad (2.9.14)$$

где σ^2 — средняя интенсивность.

Подставив (14) в (10), получим

$$P(n) = \bar{n}^n / (1 + \bar{n})^{1+n}, \quad (2.9.15)$$

причем

$$\bar{n} = \beta T \sigma^2, \quad \sigma_n^2 = \bar{n} (1 + \bar{n}). \quad (2.9.16)$$

Распределение (15) отличается от пуассоновского (12) прежде всего тем, что с ростом n вероятности $P(n)$ всегда убывают, как видно из (16); дисперсия фотоотсчетов в этом случае может значительно отличаться от их среднего числа.

Распределения (12) и (15) измерялись экспериментально, и было получено удовлетворительное согласие с теорией (рис. 2.29).

3. В случае суперпозиции гармонического сигнала и гауссовского стационарного шума (см. (2.4.57) и (2.4.60))

$$E = S(t) + \xi_s(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Функция $w(\rho)$ для такого поля имеет вид (2.4.65), так что

$$w(I) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-a^2/2\sigma^2} e^{-I/\sigma^2} I_0 \left(\frac{a}{\sigma^2} \sqrt{2I} \right). \quad (2.9.17)$$

Задаваясь различными значениями отношения сигнал/шум $z = a^2/\sigma^2$, можно проследить непрерывный переход (10) в распределение Пуассона (12) или в распределение (15), так как

$$w(I) = \begin{cases} \delta(I - I_0), & z \rightarrow \infty \quad (I_0 = a^2/2), \\ e^{-I/\sigma^2/\sigma^2}, & z \rightarrow 0. \end{cases}$$

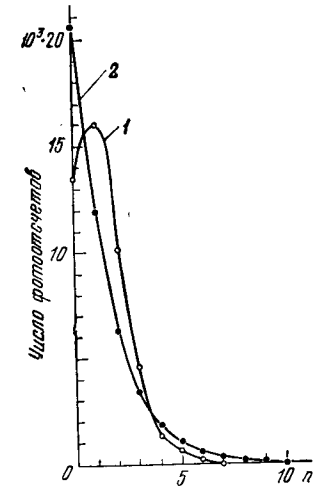


Рис. 2.29. Распределение фотоотсчетов лазерного излучения (1) и излучения с гауссовской статистикой (2) [9].

Точки — экспериментальные значения, кривые — теоретические.

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} J_0(2x\sqrt{y}) dx = \frac{n!}{2} e^{-y} L_n(y) \quad (2.9.18)$$

(см. ГР, с. 732), при помощи распределения (17) найдем моменты интенсивности

$$\bar{I}^n = \sigma^{2n} n! L_n(-z) \quad (z = -d^2/2\sigma^2), \quad (2.9.19)$$

где L_n — полиномы Лагерра:

$$L_n(y) = \frac{1}{n!} e^y \left(\frac{d}{dn}\right)^n e^{-y} y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-y)^k}{k!},$$

$$L_1(y) = 1 - y, \quad L_2(y) = 1 - 2y + y^2/2. \quad (2.9.20)$$

Как следует из (19), (20) и (7),

$$I = \sigma^2(1+z), \quad \bar{I}^2 = \sigma^4 2(1+2z+z^2/2) = I^2 2 \frac{1+2z+z^2/2}{(1+z)^2},$$

$$\sigma_n^2 = n \left[1 + n \frac{1+2z}{(1+z)^2} \right], \quad \bar{n} = \beta T I \quad (2.9.21)$$

Формулы (21) обобщают полученные ранее выражения (16) и (13), с которыми они совпадают в предельных случаях $z \ll 1$ или $z \gg 1$.

Подставив (17) в (10) и используя опять интеграл (18), получим следующее выражение для вероятности n фотоотсчетов:

$$P(n) = \frac{b^n}{(1+b)^{n+1}} \exp\left(-z \frac{b}{1+b}\right) L_n\left(-\frac{z}{1+b}\right), \quad (2.9.22)$$

где $b = \gamma T \sigma^2$

4. Поле (5) — стационарный квазигармонический процесс (не обязательно гауссовский) с симметричным распределением вероятностей $\omega(E) = \omega(-E)$ и характеристической функцией $\theta(u) = \theta(-u) = \theta^*(u)$. Распределение интенсивности в этом случае дается формулой (2.5.28), подставив которую в (10) получим, меняя порядок интегрирования,

$$P(n) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\beta T I} (\beta T I)^n dI \int_0^{\infty} J_0(u\sqrt{2I}) \theta(u) u du =$$

$$= \frac{2}{n! \beta T} \int_0^{\infty} \theta(u) u du \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} J_0(2x\sqrt{y}) dx, \quad (2.9.23)$$

где $\sqrt{y} = u/\sqrt{2\beta T}$. Интеграл по x в (23) совпадает с (18). Следовательно, (23) можно переписать в виде

$$P(n) = \frac{1}{\beta T} \int_0^{\infty} e^{-u^2/2\beta T} L_n\left(\frac{u^2}{2\beta T}\right) \theta(u) u du = \int_0^{\infty} e^{-y} L_n(y) \theta(\sqrt{2\beta T y}) dy, \quad (2.9.24)$$

выразив, таким образом, $P(n)$ непосредственно через характеристическую функцию поля. В частности, если поле имеет гауссовскую статистику, то $\theta(u) =$

$= \exp(-\sigma^2 u^2/2)$ и согласно (24)

$$P(n) = \int_0^{\infty} e^{-by} L_n(y) dy = (b-1)^n b^{-n-1} \quad (b = 1 + \beta T \sigma^2)$$

(см. ГР, с. 858) Легко убедиться, что полученное выражение совпадает с (15).

Обратная задача: нахождение статистики поля из распределения фотоотсчетов. До сих пор мы решали прямую задачу — определение статистики фотоотсчетов по заданному распределению интенсивности. Обратимся теперь к обратной задаче: определим, какую информацию о статистике регистрируемого поля можно извлечь, обладая сведениями о статистике фотоотсчетов. С математической точки зрения эта задача решается обращением формулы Манделя (6) или (10). Можно показать [11, 12], что распределение интенсивности однозначно определяется распределением фотоотсчетов.

Познакомимся с некоторыми методами решения обратной задачи.

1. Рассмотрим функцию

$$Q(s) = \int_0^{\infty} e^{isU} \omega(U) e^{-\beta U} dU; \quad (2.9.25)$$

ее фурье-преобразование дает

$$\omega(U) = \frac{e^{\beta U}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(s) e^{-isU} ds. \quad (2.9.26)$$

Если разложить в (25) экспоненту e^{isU} в ряд и использовать формулу Манделя (6), то получим

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{is}{\beta}\right)^n P(n). \quad (2.9.27)$$

Это соотношение позволяет по распределению фотоотсчетов $P(n)$ найти функцию $Q(s)$, фурье-преобразование которой (26) дает распределение $\omega(U)$.

2. Запишем распределение $\omega(U)$ в виде

$$\omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m l_m(2\pi x), \quad x = U/U, \quad (2.9.28)$$

т. е. как разложение по функциям Лагерра $l_m(x)$, которые связаны с полиномом Лагерра (20) соотношением

$$l_m(x) = e^{-x/2} L_m(x) = e^{-x/2} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(-x)^n}{n!}. \quad (2.9.29)$$

Функции Лагерра ортогональны и нормированы:

$$\int_0^{\infty} l_m(x) l_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (2.9.30)$$

Поэтому, умножая (28) на $l_m(2\bar{n}x)$ и интегрируя с учетом (30), получим, что коэффициенты разложения в (28) равны

$$\lambda_m = 2\bar{n} \int_0^{\infty} \omega(x) l_m(2\bar{n}x) dx, \quad (2.9.31)$$

или с учетом (30) и (6)

$$\begin{aligned} \lambda_m &= 2\bar{n} \int_0^{\infty} \omega(x) e^{-\bar{n}x} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(-2\bar{n}x)^n}{n!} dx = \\ &= 2\bar{n} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-2)^n P(n, \bar{n}). \end{aligned} \quad (2.9.32)$$

Подставив (32) в (28) и меняя порядок суммирования, получим решение обратной задачи в виде

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) P(n, \bar{n}), \quad (2.9.33)$$

где

$$\begin{aligned} a_n(x) &= 2\bar{n} (-2)^n \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} l_m(2\bar{n}x) = \\ &= 2\bar{n} (-2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} l_{n+k}(2\bar{n}x). \end{aligned} \quad (2.9.34)$$

3. Чтобы воспользоваться приведенными выше методами, нужно иметь аналитическую запись распределения $P(n)$. В некоторых случаях интерес может представлять более узкая постановка обратной задачи, а именно нахождение связи между кумулянтами (а следовательно и моментами) интенсивности и числа фотоотсчетов [12].

Логарифм характеристической функции распределения фотоотсчетов

$$\theta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} P(n) \quad (2.9.35)$$

выражается через кумулянты k_m этого распределения:

$$\ln \theta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \frac{(is)^m}{m!}. \quad (2.9.36)$$

Подстановка (6) в (36) дает

$$\begin{aligned} \ln \theta(s) &= \ln \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta e^{is} U)^n}{n!} e^{-\beta U} \omega(U) dU \right\} = \\ &= \ln \{ \langle \exp [\beta (e^{is} - 1) U] \rangle \}, \end{aligned} \quad (2.9.37)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению $\omega(U)$.

В (37) в последнем равенстве под знаком логарифма стоит характеристическая функция распределения интенсивности от аргумента $\beta (e^{is} - 1)$. Обозначая кумулянты распределения интенсивности через k_m , I , имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(is)^m}{m!} k_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\beta (e^{is} - 1)]^m}{m!} k_{mI}. \quad (2.9.38)$$

Сравнивая в разложении (38) коэффициенты при одинаковых степенях s , получаем связь между кумулянтами k_m и k_{mI} :

$$k_1 = \beta k_{1I}, \quad k_2 = \beta k_{1I} + \beta^2 k_{2I}, \quad k_3 = \beta k_{1I} + 3\beta^2 k_{2I} + \beta^3 k_{3I}, \dots \quad (2.9.39)$$

4. Согласно формуле Манделя (10) вероятность того, что за время T не произойдет ни одного фотоотсчета (при заданном среднем числе фотоотсчетов $\bar{n} = \beta T I$), равна

$$P(0, \bar{n}) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{n}x} \omega(x) dx, \quad x = I/I, \quad (2.9.40)$$

где $\omega(x)$ — распределение вероятностей для относительной интенсивности $x = I/I$.

Таким образом, величина $P(0, \bar{n})$ может рассматриваться как преобразование Лапласа функции $\omega(x)$, и если зависимость $P(0, \bar{n})$ от \bar{n} известна (например, из эксперимента), то соответствующее распределение интенсивности поля $\omega(x)$ найдется, если применить к функции $P(0, \bar{n})$ обратное преобразование Лапласа.

Исходя из определенной таким образом функции $\omega(x)$ или, что то же самое, $\omega(I)$, можно, считая поле $E(t)$ стационарным квазимонохроматическим процессом, найти распределение вероятностей для огибающей поля (см. (2.5.26)):

$$\omega(\rho) = \rho \omega(I) |_{I=\rho^{1/2}}; \quad (2.9.41)$$

при этом $\omega(\rho)$ однозначно определяет характеристическую функцию поля (см. (2.5.9))

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} J_0(u\rho) \omega(\rho) d\rho \quad (2.9.42)$$

и, следовательно, распределение вероятностей $\omega(E)$.

Таким образом, зная $P(0, \bar{n})$ как функцию \bar{n} , можно, в принципе, решить обратную задачу и найти все статистические характеристики поля, обуславливающего фотоэффект*).

Рассмотрим пример решения обратной задачи. В случае гауссовской статистики поля имеем

$$w(x) = e^{-x}$$

и, согласно (40),

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1}{1 + \bar{n}}.$$

Теперь предположим, что убывание $P(0, \bar{n})$ с ростом \bar{n} является более быстрым и

$$P(0, \bar{n}) = \frac{a}{(b + \bar{n})^2}. \quad (2.9.43)$$

Аналитическая аппроксимация функции $P(0, \bar{n})$ не может выбираться совершенно произвольно, так как из (40) видно, что эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$P(0, \bar{n} = 0) = \int_0^{\infty} w(x) dx = 1, \quad (2.9.44)$$

$$-\frac{\partial P(0, \bar{n})}{\partial \bar{n}} \Big|_{\bar{n}=0} = \int_0^{\infty} x w(x) dx = \langle x \rangle = \left\langle \frac{I}{I} \right\rangle = 1. \quad (2.9.45)$$

Подставив (43) в (44), (45), получим: $a = 4$, $b = 2$, т. е. (43) мы должны переписать как

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1}{(1 + \bar{n}/2)^2}. \quad (2.9.46)$$

По таблице обратных преобразований Лапласа находим, что в этом случае

$$w(x) = 4xe^{-2x}$$

(рис. 2.30, а), т. е. распределение интенсивности имеет вид

$$w(I) = \frac{4I}{\sigma^4} e^{-2I/\sigma^2} \quad (I = \sigma^2). \quad (2.9.47)$$

* Можно было бы, очевидно, исходить из вероятности некоторого ненулевого числа фотоотчетов $P(n, \bar{n})$, но соответствующие формулы более громоздки.

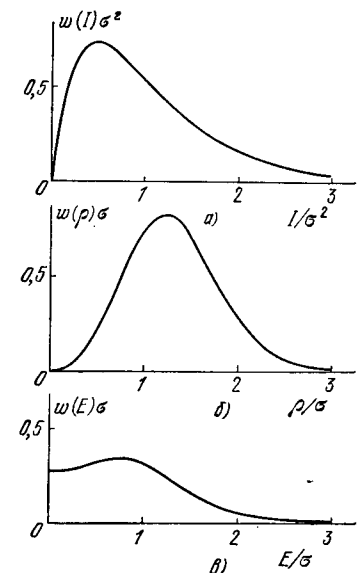


Рис. 2.30. Распределения интенсивности (а), огибающей (б) и поля (в), соответствующие распределению фотоотчетов (43).

Подстановка (47) в (41) дает следующий закон распределения для огибающей:

$$w(\rho) = \frac{2\rho^3}{\sigma^4} e^{-\rho^2/\sigma^2} \quad (2.9.48)$$

(рис. 2.30, б).

Распределение вероятностей для самого поля можно получить непосредственно из (48), используя соотношение (2.5.18):

$$w(E) = \frac{e^{-E^2/\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}\sigma} \left(1 + \frac{2E^2}{\sigma^2}\right) = w(-E). \quad (2.9.49)$$

Распределение (49) существенно отличается от гауссовского, оно имеет два максимума при $E = \pm \sigma\sqrt{2}$ и провал при $E = 0$ (рис. 2.30, в).

Еще один пример: пусть

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1 - e^{-a\bar{n}}}{b\bar{n}}.$$

Учитывая условия (44), (45), находим $a = b = 2$, т. е.

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1 - e^{-2\bar{n}}}{2\bar{n}}. \quad (2.9.50)$$

Распределению (50) соответствует равномерное в некоторой области распределение интенсивности

$$w(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 2, \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

(см. рис. 2.11), или

$$w(I) = \begin{cases} 1/2\sigma^2, & 0 < I < 2\sigma^2, \\ 0, & I > 2\sigma^2, \end{cases} \quad (2.9.51)$$

где $\sigma^2 = I$. Распределения огибающей и поля, соответствующие равномерному распределению интенсивности (51), были найдены раньше (см. (2.5.32) и (2.5.34)); они представлены на рис. 2.11.

§ 10. Многомодовая модель случайного процесса

В этом параграфе мы рассмотрим случайный процесс, являющийся суперпозицией гармонических колебаний (мод), амплитуда и фаза которых случайны. Фактически такую модель впервые рассматривал Рэлей; именно применительно к этой задаче (рассматривалась суперпозиция колебаний одинаковой частоты, но со случайными амплитудами и фазами) Рэлей получил распределение, носящее его имя (см. формулу (2.4.6)). Ниже мы обратимся к более общему случаю, когда частоты мод различны.

Можно указать много физических примеров, приводящих к такой модели. В современной радиофизике и оптике одним из важнейших примеров такого процесса является излучение многомодового лазера; поскольку в общем случае фазы мод случайны, случайным процессом (в общем случае — нестационарным) оказывается и лазерное излучение.

Надо сказать, что этот источник статистики чрезвычайно важен в экспериментах с мощным лазерным излучением. Мощные лазеры

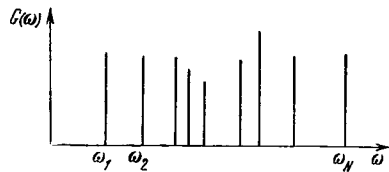


Рис. 2.31. Спектр многомодового колебания.

обычно излучают много статистически независимых мод, поэтому многомодовая модель оказывается одной из весьма распространенных моделей мощного лазерного излучения. Вместе с тем во многих случаях многомодовая модель оказывается весьма удобной и при рассмотрении случайных процессов со сплошным спектром; в этом случае речь идет о замене реального процесса со сплошным спектром некоторым эквивалентным случайным процессом с дискретным спектром. Оба эти аспекта рассматриваются ниже.

Статистика многомодового колебания; центральная предельная теорема для случайных колебаний. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, представляющий собой суперпозицию N мод:

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n, \quad (2.10.1)$$

спектр которого показан на рис. 2.31.

Будем считать, что амплитуды мод a_n постоянны, а фазы распределены равномерно:

$$\omega(\varphi_n) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_n \leq \pi, \quad (2.10.2a)$$

и статистически независимы:

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = \prod_{n=1}^N \omega(\varphi_n). \quad (2.10.2b)$$

Обратимся сначала к случаю равных частот мод ($\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega_0$). В дальнейшем в этом разделе мы следуем классической работе Рэлея [13]. Полагая для простоты также амплитуды мод одинаковыми ($a_n = a$), соотношение (1) запишем в виде

$$\xi(t) = a \sum_{n=1}^N \cos \Phi_n = \rho \cos(\omega_0 t + \varphi) = \rho \cos \Phi. \quad (2.10.3)$$

В декартовой системе координат колебание с заданными амплитудой ρ и фазой Φ изображается точкой (x, y) (рис. 2.32):

$$x = \rho \cos \Phi, \quad y = \rho \sin \Phi.$$

Вся совокупность возможных значений $\xi(t)$ определяется некоторым распределением точек в плоскости x, y . Заметим, что величины x и y аналогичны квадратурным компонентам случайного колебания (см. § 3).

Введем функцию распределения $w(N; x, y)$ для результирующего колебания с амплитудой ρ и фазой Φ при наличии N мод. По определению $w(N; x, y) dx dy$ есть вероятность того, что точка будет найдена в пределах бесконечно малой площадки $dx dy$. Добавим к N модам еще одну моду с фазой ψ . Колебание, которое представляется точкой (x, y) , до прибавления моды должно, очевидно, изображаться точкой

$$x' = x - a \cos \psi, \quad y' = y - a \sin \psi.$$

В силу случайности фазы ψ полная вероятность найти точку на площадке $dx dy$ равна

$$dx dy \int_0^{2\pi} w(N; x', y') \frac{d\psi}{2\pi}.$$

Полученное выражение следует приравнять $w(N+1; x, y) dx dy$, так что

$$w(N+1; x, y) = \int_0^{2\pi} w(N; x', y') d\psi / 2\pi. \quad (2.10.4)$$

Разложим $w(N; x', y')$ в ряд Тейлора:

$$w(N; x - a \cos \psi, y - a \sin \psi) = w(x, y) - a \frac{\partial w}{\partial x} \cos \psi - a \frac{\partial w}{\partial y} \sin \psi + \\ + \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \psi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \psi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \psi \cos \psi \right] + \dots$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} w(N; x', y') \frac{d\psi}{2\pi} = w(N; x, y) + \frac{1}{4} a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

При большом числе N мод можно также использовать разложение

$$w(N+1; x, y) = w(N; x, y) + \frac{\partial w(N; x, y)}{\partial N}.$$

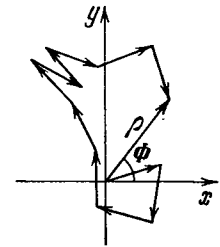


Рис. 2.32. Диаграмма суммирования мод с одинаковыми амплитудами и случайными фазами.

Результирующее колебание имеет амплитуду $\rho(t)$ и фазу $\Phi(t)$.

Таким образом, вместо интегрального уравнения (4) мы получаем дифференциальное

$$\frac{\partial w}{\partial N} = \frac{a^2}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (2.10.5)$$

Очевидно, что при $N=0$ $w(0; x, y) = 0$, за исключением точки $(x=0, y=0)$. Решением уравнения (5), удовлетворяющим этому условию и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(N; x, y) dx dy = 1,$$

является двумерное гауссовское распределение

$$w(N; x, y) = (\pi N a^2)^{-1} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{N a^2} \right\} \quad (2.10.6)$$

с дисперсией $\sigma^2 = N a^2 / 2$. Уравнение (5) аналогично уравнению Фоккера—Планка (1.7.44), причем число мод N эквивалентно времени t . Результат (6) не является неожиданным, поскольку процесс $\xi(t)$ рассматривался нами как совокупность статистически несвязанных и, следовательно, некоррелированных между собой колебаний (т. е. были выполнены условия ЦПТ — см. § 2 гл. 1).

Напомним, что для функции распределения (6) и записи колебания в виде (3) огибающая ρ подчиняется распределению Рэлея (2.4.6):

$$w(\rho) = (\rho/\sigma^2) e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0).$$

Выражение (6) представляет собой асимптотическое распределение суперпозиции N мод с одинаковыми частотами при $N \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что и в общем случае разных частот мод функция распределения колебания (1) при $N \rightarrow \infty$ сходится к гауссовской. Удобный способ нахождения функции распределения $w(\xi)$ случайного процесса (1) основан на расчете его характеристической функции

$$\theta(v) = \langle e^{i\xi v} \rangle.$$

Подстановка в это соотношение выражения (1) дает

$$\theta(v) = \left\langle \exp \left\{ i v \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n \right\} \right\rangle = \prod_{n=1}^N \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \prod_{n=1}^N \theta(v a_n).$$

Здесь $\theta(v a_n)$ — характеристическая функция одной моды:

$$\begin{aligned} \theta(v a_n) &= \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{ i v a_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) \} d\Phi_n = J_0(v a_n); \end{aligned}$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от действительного аргумента.

Таким образом, характеристическая функция случайного процесса $\xi(t)$ в целом равна

$$\theta(v) = \prod_{n=1}^N J_0(v a_n). \quad (2.10.7)$$

Функция распределения $w(\xi)$ находится из (7) с помощью фурье-преобразования:

$$w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(v) e^{-i v \xi} dv.$$

Для вычисления $w(\xi)$ воспользуемся следующим приемом. Из (1) следует, что значения ξ лежат в интервале

$$-A \leq \xi \leq A, \quad A = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Поэтому $w(\xi)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$w(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left(-i \frac{\pi k}{A} \xi \right),$$

где коэффициент

$$c_k = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A w(\xi) \exp \left(i \frac{\pi k}{A} \xi \right) d\xi = \frac{1}{2A} \left\langle \exp \left(i \frac{\pi k}{A} \xi \right) \right\rangle.$$

Отсюда следует, что коэффициент c_k с точностью до множителя $(2A)^{-1}$ представляет собой значение характеристической функции процесса ξ для величины $\pi k/A$.

Для распределения $w(\xi)$ в результате получаем

$$w(\xi) = \frac{1}{2A} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi k \xi}{A} \prod_{n=1}^N J_0 \left(\frac{\pi k a_n}{A} \right) \right]. \quad (2.10.8)$$

Изменение распределения $w(\xi)$ с изменением числа мод N показано на рис. 2.33. Из рисунка видно, что распределение суперпозиции двух мод существенно отличается от распределения для одной моды. С ростом числа мод N распределение $w(\xi)$ стремится к гауссовскому.

Чтобы убедиться в этом, найдем сначала закон распределения функции

$$\eta(t) = N^{-1/2} \xi(t). \quad (2.10.9)$$

Для простоты опять считаем амплитуды мод одинаковыми, $a_n = a$. Характеристическая функция случайного процесса $\eta(t)$ при этом равна

$$\theta_\eta(v) = J_0^N(av/\sqrt{N}). \quad (2.10.10)$$

Преобразуем функцию $\theta_\eta(v)$, используя разложение функции Бесселя:

$$J_0(av/\sqrt{N}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(av)^{2k}}{2^{2k} N^k (k!)^2} = 1 - \frac{(av)^2}{4N} + \frac{(av)^4}{64N^2} - \dots \quad (2.10.11)$$

Переходя к пределу $N \gg 1$, получаем

$$\ln \theta_\eta(v) \approx -\frac{(av)^2}{4} + \frac{(av)^4}{64N},$$

или

$$\theta_\eta(v) \approx \exp \left\{ -\frac{(av)^2}{4} \left[1 - \frac{(av)^2}{16N} \right] \right\}.$$

Отсюда следует, что функция распределения процесса (9) имеет вид

$$\omega(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp \left\{ -\left(\frac{\eta}{a}\right)^2 \right\} \left[1 - \frac{1}{64N} H_4 \left(\frac{\eta}{a}\right) \right],$$

где $H_4(x)$ — полином Эрмита.

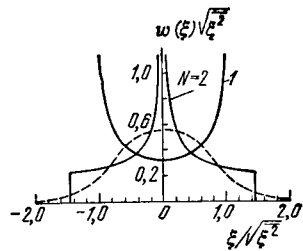


Рис. 2.33. Функции распределения для одномодового поля и двухмодового поля со статистически независимыми модами [14].

Пунктирной кривой изображено гауссовское распределение.

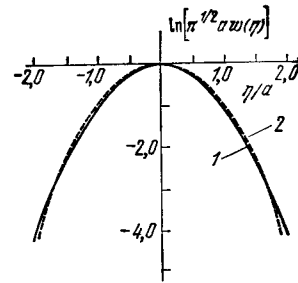


Рис. 2.34. Функция распределения случайного процесса $\eta(t) = N^{-1/2} \xi(t)$ для $N \rightarrow \infty$ (1) и $N=5$ (2).

Распределение $w(\eta)$ симметрично. Однако при конечном числе N оно более плоское, чем гауссовское распределение (рис. 2.34). В пределе при $N \rightarrow \infty$ распределения $w(\eta)$ и $w(\xi)$ — гауссовские

(ср. с (6)):

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad \sigma^2 = N\sigma_\eta^2 = \frac{Na^2}{2}. \quad (2.10.12)$$

Этот результат, как и ранее полученная формула (6), является следствием центральной предельной теоремы, рассмотренной в гл. 1. Следует подчеркнуть, что функция распределения (12) получена без каких-либо ограничений на соотношение между частотами мод и, следовательно, применима как для узкополосного, так и для широкополосного спектра колебания (1).

Моменты многомодового колебания. Рассмотрим моменты случайного процесса (1). Для предельного случая $N \rightarrow \infty$, т. е. для гауссовского распределения, расчет моментов дан в § 2 настоящей главы. Для конечного числа мод N моменты распределения (8) можно вычислить с помощью характеристической функции (7), при этом моменты процесса (1)

$$\langle \xi^m \rangle = i^{-m} \frac{d^m \theta(v)}{dv^m} \Big|_{v=0}, \quad m=1, 2, \dots \quad (2.10.13)$$

Вследствие симметрии функции распределения $w(\xi)$ (8) нечетные моменты процесса $\xi(t)$ равны нулю. Для расчета четных моментов воспользуемся характеристической функцией (7) в случае равных амплитуд мод и введем для нее обозначение

$$\theta_N(v) = J_0^N(av). \quad (2.10.14)$$

В соответствии с (13) и (14) моменты $\langle \xi^m \rangle$ выражаются через производные от функции Бесселя $J_0^N(av)$. Пользуясь разложением (11), находим

$$J_0^{(2m)}(0) = \frac{d^{2m} J_0(av)}{dv^{2m}} \Big|_{v=0} = (-1)^m \frac{a^{2m} (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad J_0^{(2m+1)}(0) = 0, \quad (2.10.15)$$

где $m=1, 2, \dots$

Первая производная от функции (14) равна

$$\frac{d\theta_N(v)}{dv} = \frac{d\theta_N}{dJ_0} \frac{dJ_0(av)}{dv} = N\theta_{N-1}(v) \frac{dJ_0(av)}{dv}.$$

Для четной производной на основании формулы Лейбница получаем

$$\frac{d^{2m}\theta_N(v)}{dv^{2m}} = N \sum_{p=0}^{2m-1} C_{2m-1}^{2p} \frac{d^{2p}\theta_{N-1}(v)}{dv^{2p}} \frac{d^{2m-p}J_0(av)}{dv^{2m-p}},$$

где C означает сочетания. Из последнего соотношения в силу (15) имеем

$$\frac{d^{2m}\theta_N(v)}{dv^{2m}} \Big|_{v=0} = N \sum_{q=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2q} \frac{d^{2q}\theta_{N-1}}{dv^{2q}} \Big|_{v=0} \frac{d^{2(m-q)}J_0(av)}{dv^{2(m-q)}} \Big|_{v=0}. \quad (2.10.16)$$

Таким образом, согласно (16), (15) и (13) моменты случайного процесса (1) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\langle \xi^{2m}(N; t) \rangle = N \sum_{q=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2q} \langle \xi^{2q}(N-1; t) \rangle \frac{a^{2(m-q)} [2(m-q)!]}{2^{2(m-q)} [(m-q)!]^2}. \quad (2.10.17)$$

Число N в аргументе случайной функции $\xi(N; t)$ указывает на число мод, из которых образуется рассматриваемый процесс.

Из соотношения (17) следует, что высшие моменты случайного процесса определяются через моменты более низкого порядка для процесса с меньшим числом мод. Выпишем несколько моментов процесса (1):

$$\begin{aligned} \langle \xi^2(N; t) \rangle &= \frac{1}{2} N a^2 = I, & \langle \xi^4(N; t) \rangle &= 3 \left(1 - \frac{1}{2N}\right) I^2, \\ \langle \xi^6 \rangle &= 3 \cdot 5 \left(1 - \frac{3}{2N} + \frac{2}{3N^2}\right) I^3, & (2.10.18) \\ \langle \xi^8 \rangle &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(1 - \frac{9}{8N} + \frac{41}{12N^2} - \frac{11}{8N^3}\right) I^4. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, значения моментов (18) при $N \rightarrow \infty$ совпадают со значениями моментов для гауссовского случайного процесса (2.2.2). Однако при конечном числе мод N различие значений высших моментов и соответствующих моментов гауссовского процесса растет с увеличением номера момента. Так, десятипроцентное отклонение моментов $\langle \xi^4 \rangle$ и $\langle \xi^6 \rangle$ (18) от значений для гауссовского процесса достигается соответственно при $N=5$ и $N \approx 20$. Сказанное означает, что интерпретация многочастотного колебания (1) с постоянными амплитудами и статистически независимыми фазами (2) как гауссовского случайного процесса зависит от числа мод колебания и номера момента. К этому вопросу мы еще вернемся. Сейчас обратимся непосредственно к гауссовскому процессу.

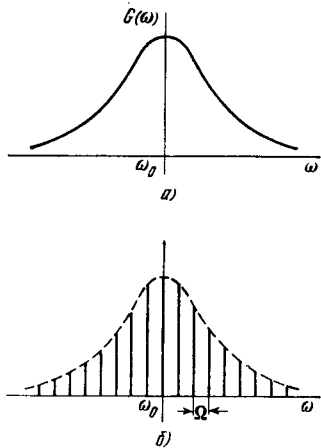


Рис. 2.35. Спектры стационарного шума (а) и многократно повторенной реализации длительности T этого же шума (б). Интервал между частотами $\Omega = 2\pi/T$.

повторим его много раз. Таким способом мы получаем периодический случайный процесс. Физический смысл проделанной операции состоит в том, что реальный непрерывный спектр процесса мы представляем в виде «гребенки» мод (дискретного спектра), которая тем чаще, чем больше период T (рис. 2.35, б).

Многомодовая модель стационарного гауссовского шума. Пусть $\xi(t)$ — узкополосный стационарный гауссовский процесс:

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.10.19)$$

Частотный спектр этого процесса изображен на рис. 2.35, а.

Выделим из реализации рассматриваемого процесса отрезок, длительность которого T значительно превосходит время корреляции τ_k , и

Действительно, периодическую функцию $\xi(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\Omega t}, \quad \xi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) e^{-in\Omega t} dt, \quad (2.10.20)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — частота межмодовых биений, и в силу вещественности $\xi(t)$

$$\xi_n^* = \xi_{-n}. \quad (2.10.20a)$$

Определим статистические свойства комплексных амплитуд ξ_n . Среднее значение $\xi_n = 0$, поскольку $\xi = 0$. В соответствии с (20) величины ξ_n линейно зависят от ξ и, следовательно, также подчиняются гауссовской статистике.

Рассчитаем значение корреляции между ξ_n и ξ_m^* :

$$\begin{aligned} \langle \xi_n \xi_m^* \rangle &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \langle \xi(u) \xi(v) \rangle e^{-in\Omega u + im\Omega v} du dv = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(v-u) \exp i \{m\Omega(v-u) - n\Omega u + m\Omega u\} dv du = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} \int_{-u}^{T-u} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta du \approx \\ &\approx \frac{1}{T^2} \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} \int_{-\infty}^{\infty} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta du = \\ &= \frac{2\pi}{T^2} G(m\Omega) \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} du, \quad (2.10.21) \end{aligned}$$

где $G(m\Omega)$ — спектральная плотность на частоте $m\Omega$:

$$G(m\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta.$$

В (21) при расширении пределов интегрирования учтено, что корреляционная функция $B(\theta)$ заметно отличается от нуля только на конечном временном интервале порядка $\tau_k \ll T$. Если $m=n$, то, очевидно,

$$\langle \xi_n \xi_n^* \rangle = \frac{2\pi}{T} G(n\Omega) = \Omega G(n\Omega). \quad (2.10.22a)$$

В случае $m \neq n$

$$\langle \xi_n \xi_m^* \rangle = 0, \quad (2.10.22b)$$

т. е. комплексные величины ξ_n не коррелированы между собой.

Запишем ξ_n через вещественные величины:

$$\xi_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

Согласно (20)—(22)

$$\langle |\xi_n|^2 \rangle = \overline{\alpha_n^2} + \overline{\beta_n^2}, \quad \langle \xi_n^2 \rangle = \overline{\alpha_n^2} - \overline{\beta_n^2} + i2\overline{\alpha_n\beta_n} = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{\alpha_n\beta_n} = 0$ и

$$\overline{\alpha_n^2} = \overline{\beta_n^2} = \frac{1}{2} \Omega G(n\Omega) = \sigma_n^2.$$

Таким образом, распределение для гауссовских случайных величин α_n, β_n имеет вид

$$\omega(\alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left\{-\frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2\sigma_n^2}\right\}. \quad (2.10.23)$$

Если ξ_n представить в виде

$$\xi_n = |\xi_n| e^{i\varphi_n} = a_n e^{i\varphi_n},$$

то согласно выводам § 4 амплитуда a_n распределена по рэлеевскому закону

$$\omega(a_n) = \frac{a_n}{\sigma_n^2} \exp\left\{-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2}\right\}, \quad (2.10.24)$$

а распределение фазы φ_n равномерное:

$$\omega(\varphi_n) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_n \leq \pi.$$

Из изложенного, таким образом, следует, что если случайный процесс гауссовский, то его спектральные компоненты некоррелированы и распределены также по гауссовскому закону. Верно и обратное утверждение. Если моды колебания (1) обладают гауссовским распределением, т. е. амплитуды мод отвечают распределению (24), то колебание (1) подчиняется, очевидно, гауссовской статистике независимо от числа N мод. Действительно, усредняя характеристическую функцию (7) процесса (1) по распределению (24), получаем характеристическую функцию гауссовского процесса:

$$\bar{\theta}(v) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^\infty J_0(va_n) a_n e^{-a_n^2/2\sigma_n^2} da_n \right] = \exp\left\{-\frac{1}{2} v^2 \sum_{n=1}^N \sigma_n^2\right\}. \quad (2.10.25)$$

При вычислении (25) мы использовали формулу

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right).$$

Таким образом, статистика сложного колебания типа (1) является гауссовской при произвольном числе мод, если сами моды подчиняются гауссовской статистике. В случае нефлуктуирующих амплитуд мод гауссовская статистика колебания (1), как показано выше, имеет место только при бесконечном числе мод ($N \rightarrow \infty$).

Для большого, но конечного значения N с гауссовскими значениями моментов совпадают только низшие моменты процесса (4).

Когда многомодовое колебание можно считать гауссовским шумом? Ответ на вопрос, поставленный в заголовке, в значительной мере связан с тем преобразованием, которому подвергается многомодовое колебание (1). Рассмотрение моментов многомодового колебания, например, показало (см. (18)), что если колебание (1) возводится в n -ю степень, то близость значения средней интенсивности нелинейного процесса к значению n -го момента гауссовского шума зависит как от числа исходных мод N , так и от степени нелинейности процесса.

Чтобы проиллюстрировать еще раз, что замену многомодового колебания гауссовским процессом следует проводить с большой осторожностью, рассмотрим задачу об экспоненциальном преобразовании многомодового колебания

$$y(t) = e^{\beta \xi(t)}, \quad (2.10.26)$$

где $\xi(t)$ — многомодовое колебание. Сравним среднее значение такого процесса со средним значением экспоненциально преобразованного гауссовского шума с непрерывным спектром и найдем условие, когда указанные средние значения можно с хорошей степенью точности считать равными.

Вычислим сначала среднее значение процесса (26) \bar{y} для шума с гауссовским распределением ξ

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\xi - a_0)^2}{2\sigma^2}\right\};$$

имеем

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta \xi} \omega(\xi) d\xi = \exp\left\{\beta a_0 + \frac{1}{2}(\beta\sigma)^2\right\}. \quad (2.10.27)$$

Для многомодового колебания вида (1) вычисление среднего значения функции, определяемой формулой (26), представляет значительные трудности. Рассмотрим многомодовое колебание вида:

$$\xi(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\Omega t + \varphi_n(t)), \quad (2.10.28)$$

в котором моды попарно связаны. В (28) Ω — частота межмодовых биений, статистика фаз φ_n определяется выражением (2).

Число мод процесса (28) равно $N_0 = 2N + 1$. Средняя интенсивность колебания $I = \langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{2} a_0^2 + \sigma^2$, где $\sigma^2 = 2 \sum_{n=1}^N a_n^2$.

Подставляя (28) в (26), имеем

$$y = \exp \left\{ \beta a_0 + 2\beta \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\Omega t + \varphi_n(t)) \right\} = \\ = e^{\beta a_0} \prod_{n=1}^N \left\{ I_0(2\beta a_n) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m(2\beta a_n) \cos m(n\Omega t + \varphi_n) \right\}$$

($I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя). Отсюда, учитывая (2), получаем

$$\bar{y} = e^{\beta a_0} \prod_{n=1}^N I_0(2\beta a_n), \quad \text{или} \quad \bar{y} = e^{\beta a_0} I_0^N(2\beta a) \quad (2.10.29)$$

для равных амплитуд мод ($a_n = a_0 = a$; $n = 1, 2, \dots, N$). При этом средняя интенсивность $I = (1 + 2N) a^2 \approx \sigma^2$.

В случае $2\beta a \ll 1$ или $(\beta\sigma)^2 \ll N$ (усиление для одной моды малое*), пользуясь разложением функции Бесселя $I_0(x)$, находим

$$\bar{y} \approx e^{\beta a_0} \left[1 + (\beta a)^2 + \frac{(\beta a)^4}{4} \right]^N \approx \exp \left\{ \beta a_0 + \frac{1}{2} (\beta\sigma)^2 - \frac{(\beta\sigma)^4}{16N} \right\}. \quad (2.10.30)$$

При $2\beta a \gg 1$ (большое усиление «на моду»), используя асимптотику функции $I_0(x)$, получим

$$\bar{y} = (4\pi\beta a)^{-N/2} \exp \{ (2N + 1) \beta a \}.$$

Из сравнения выражений (27) и (30) следует: многомодовое колебание вида (28) дает тот же результат, что и гауссовский шум, при условии

$$N \gg (\beta\sigma)^4/16. \quad (2.10.31)$$

Таким образом, неравенство (31) является условием эквивалентности многомодового колебания и гауссовского шума при экспоненциальном преобразовании. Этими результатами мы будем пользоваться при обсуждении процессов усиления в радиофизике и оптике.

Многомодовое лазерное излучение; частичная и полная синхронизация мод. Важный пример многомодового колебания представляет собой излучение лазера. Многомодовый характер излучения лазера связан с многомодовостью спектра собственных колебаний

*) Мы говорим здесь об усилении, поскольку преобразование (26) описывает параметрическое усиление при случайной накачке (см. § 4 гл. 6).

оптического резонатора. Оптический резонатор, например резонатор Фабри — Перо, обладает набором собственных частот

$$\omega_n = 2\pi q (c/2L), \quad q = L/(\lambda/2),$$

где L — длина резонатора, c — скорость света, λ — длина волны, q — целое положительное число. Типичные значения: $L \approx 100$ см и $q \sim 10^6$. Расстояние между соседними модами $\Delta\omega_q = \omega_{q+1} - \omega_q = \pi c/L = \Omega$, т. е. моды рассматриваемого резонатора эквидистантны. Практически эквидистантными являются и частоты, на которых происходит лазерная генерация в многомодовом резонаторе.

Напряженность электрического поля лазера можно записать в виде (1):

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + \text{к. с.} \quad (2.10.32)$$

Здесь частоты ω_n удобно представить как

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{1}{2} (2n + 1 - N) \Omega.$$

Поскольку средняя частота излучения ω_0 гораздо больше ширины спектра $(N - 1) \Omega$, поле (32) можно представить в виде квази-монокроматической волны:

$$E(t) = \sqrt{2I(t)} e^{i(\omega_0 t + \varphi(t))} + \text{к. с.}, \quad (2.10.33a)$$

где $I(t)$ — мгновенная интенсивность излучения:

$$I(t) = I_a + I_\varphi(t),$$

$$I_a = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2, \quad (2.10.33b)$$

$$I_\varphi(t) = \frac{1}{2} \sum_{n, l=1 (n \neq l)}^N a_n a_l \cos [(n - l) \Omega t + \varphi_n(t) - \varphi_l(t)].$$

Если фазы φ_n мод излучения статистически независимы и распределены равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, то такие моды принято называть несинхронизованными. Реализации интенсивности $I(t)$ и фазы $\varphi(t)$ излучения для этого случая показаны на рис. 2.36.

Определим моменты интенсивности $I(t)$ для несинхронизованных мод с равными амплитудами ($a_1 = \dots = a_N = a$). Воспользуемся соотношением (2.5.27) для квазигармонических колебаний

$$\langle I^m \rangle = \frac{m!}{(2m-1)!!} \langle \xi^{2m} \rangle \quad (2.10.34)$$

и полученным выше результатом (17) для моментов $\langle \xi^{2m} \rangle$. Значения моментов $\langle I^m \rangle$ сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Моменты интенсивности $\langle I^m \rangle$ многомодового излучения с несинхронизованными модами [18]

m	$\langle I^m \rangle / \langle I \rangle^m$
2	$2 - 1/N$
3	$6 - 9/N + 4/N^2$
4	$24 - 27/N + 82/N^2 - 33/N^3$
5	$120 - 600N^{-1} + 1250N^{-2} - 1225N^{-3} + 456N^{-4}$
6	$720 - 5400N^{-1} + 17700N^{-2} - 30600N^{-3} + 27031N^{-4} - 9450N^{-5}$

Если фазы мод излучения связаны, например одинаковы, $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \varphi_0$, (2.10.35)

то моды называются синхронизованными. Для синхронизованных мод поле излучения (33а) представляет собой регулярную функ-

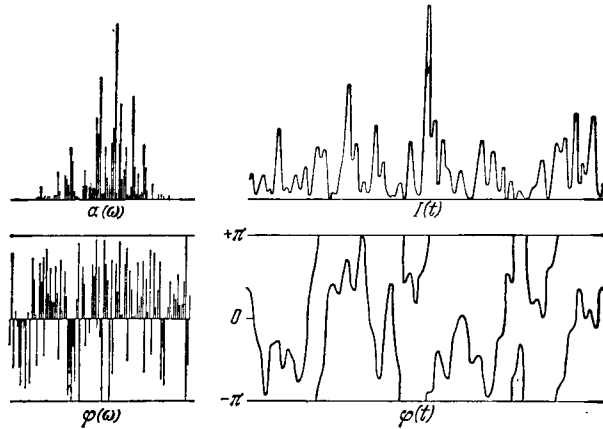


Рис. 2.36. Временная зависимость интенсивности $I(t)$ и фазы $\varphi(t)$ излучения с несинхронизованными модами ($N=101$) [17].

Амплитуды мод $a(\omega) = a_n$ имеют рэлеевское распределение, фазы $\varphi(\omega) = \varphi_n$ распределены равномерно.

цию. В самом деле, в этом случае выражение (32) легко преобразовать, полагая $a_1 = a_2 = \dots = a_N = a$:

$$E(t) = \frac{1}{2} a e^{i\varphi_0} \exp\left\{i\left[\omega_0 + \frac{1-N}{2}\Omega\right]t\right\} \sum_{n=1}^N e^{in\Omega t} + \text{к. с.} = a \frac{\sin(N\Omega t/2)}{\sin(\Omega t/2)} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.10.36)$$

Из (36) следует, что интенсивность

$$I(t) = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin^2(N\Omega t/2)}{\sin^2(\Omega t/2)} \quad (2.10.37)$$

представляет собой периодическую функцию, т. е. последовательность импульсов с периодом $T = 2\pi/\Omega$ межмодовых биений (рис. 2.37). Максимальная интенсивность импульсов в N раз больше средней интенсивности, $I_{\max} = N I_a$; длительность импульсов $\tau_{\text{имп}} \approx \pi/N\Omega$.

Если фазовые соотношения отличны от (2) и (35), то говорят о частичной синхронизации мод. Возможна, например, такая модель частичной синхронизации мод: часть мод, занимающая центральную область спектра излу-

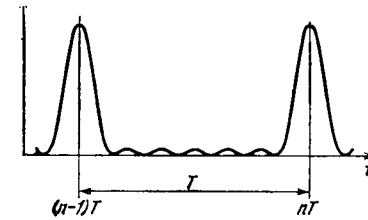


Рис. 2.37. Временная зависимость интенсивности излучения для синхронизованных мод.

$T = 2\pi/\Omega$, Ω — частота межмодовых биений.

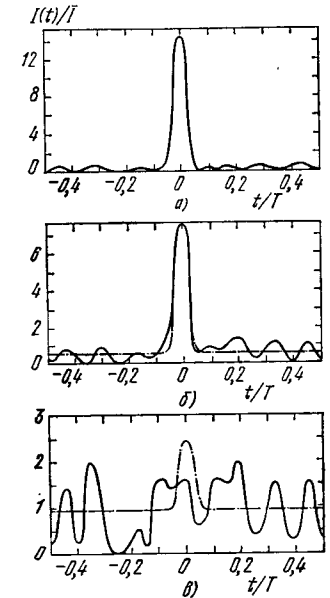


Рис. 2.38. Временная зависимость интенсивности для частично синхронизованных мод [19].

Фазы всех мод равномерно распределены в интервале $(-\varphi_0, \varphi_0)$: а) $\varphi_0 = \pi/4$; б) $\pi/2$; в) $3\pi/4$ ($N=31$). Штрих-пунктиром изображена средняя интенсивность.

чения, полностью синхронизована, а моды в «крыльях» спектра несинхронизованы. Другая возможная модель: случайные фазы φ_n флуктуируют на интервале меньшем, чем 2π :

$$\omega(\varphi_n) = 1/2\varphi_0, \quad -\varphi_0 \leq \varphi_n \leq \varphi_0, \quad \varphi_0 < \pi. \quad (2.10.38)$$

Для последней модели частичной синхронизации мод реализации интенсивности показаны на рис. 2.38. Пользуясь (33), нетрудно найти, что средняя интенсивность излучения в рассматриваемом случае определяется выражением

$$\langle I(t) \rangle = I_a + \langle I_\varphi(t) \rangle, \quad (2.10.39)$$

где

$$\langle I_{\phi}(t) \rangle = 2 (a \sin \varphi_0)^2 \sum_{n=1}^{N-1} C_{N-1}^n \cos n\Omega t,$$

т. е. средняя интенсивность является периодической функцией времени. Таким образом, в случае частичной синхронизации мод (38) многомодовый процесс является периодически нестационарным*).

Проведенное выше рассмотрение относится к непрерывному излучению лазера. При работе лазера в режиме периодической модуляции добротности***) процесс является почти периодически нестационарным. Действительно, в этом случае интенсивность лазерного излучения равна

$$I(t) = F(t) \left| \sum_{n=1}^N a_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} \right|^2, \quad (2.10.40)$$

где $F(t)$ — почти периодическая функция. $F(t)$ мало меняется за время $T = 2\pi/\Omega$, но она изменяется, вообще говоря, от импульса к импульсу лазерного излучения.

*) Нестационарность появляется в результате отличия $\omega(\varphi_n)$ от $1/2\pi$ — в соответствии с общими выводами, приведенными в § 5.

**) Т. е. в режиме повторения импульсов генерации.

ШУМОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Нахождение отклика линейной колебательной системы (колебательного контура, линейного усилителя) на случайное воздействие представляет собой сравнительно простую задачу. Выполнение для линейных систем принципа суперпозиции позволяет широко использовать спектральные представления. Поэтому корреляционно-спектральная теория случайных процессов играет исключительно важную роль при исследовании шумовых колебаний в линейных системах. Зная передаточную функцию (или функцию Грина) исследуемой линейной системы, можно записать универсальные соотношения, характеризующие преобразование спектров или корреляционных функций.

Вопрос о преобразовании законов распределения является более сложным. Однако во многих практически важных случаях распределение шума на выходе линейной системы с большой точностью оказывается гауссовским, независимо от закона распределения шума на входе; происходит, как говорят, нормализация случайного процесса. Фактически речь идет еще об одном важном следствии центральной предельной теоремы.

Разумеется, кроме определения закона преобразования шума в линейных системах возникают и другие важные вопросы, например, выбор фильтра или усилителя, имеющий целью оптимальным образом обнаружить или выделить сигнал, скрытый в шумах. Линейные системы предоставляют широкие возможности для осуществления указанных операций.

Превосходное изложение динамической теории колебаний в линейных системах можно найти в [1].

§ 1. Математическое описание линейных систем. Спектральный и временной подходы

Принцип суперпозиции. Линейными называются системы или устройства, процессы в которых можно описать при помощи линейных уравнений. Линейные уравнения могут быть любыми: алгебраическими, дифференциальными (обыкновенными или в частных производных, с постоянными или переменными параметрами), интегральными, разностными и т. п.

Все линейные системы обладают следующим свойством: если на систему одновременно действует несколько внешних сил, то

на каждую она откликается независимо. Иначе говоря, если $x_m(t)$ — отклик системы на силу $f_m(t)$, то при воздействии

$$f(t) = \sum_m f_m(t) \quad (3.1.1)$$

отклик будет

$$x(t) = \sum_m x_m(t). \quad (3.1.2)$$

Аналогично

$$x(t) = \sum_m a_m x_m(t), \quad (3.1.3)$$

если

$$f(t) = \sum_m a_m f_m(t), \quad (3.1.4)$$

где a_m — постоянные. В этом состоит принцип суперпозиции.

Вынужденные колебания; спектральное описание отклика линейной системы. Рассмотрим случай, когда разложение (1) производится по гармоническим колебаниям. Предположим, что под действием силы

$$f_m(t) = e^{i\omega_m t} \quad (3.1.5)$$

система совершает колебание

$$x_m(t) = K(\omega_m, t) e^{i\omega_m t}. \quad (3.1.6)$$

Переходя в (3), (4) от суммы к интегралу, получим, что при действии силы произвольного вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.1.7)$$

отклик системы будет

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} K(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.1.8)$$

Функция $K(\omega, t)$, полностью характеризующая линейную систему, называется *коэффициентом передачи* или *частотной передаточной функцией*. Зависимость функции $K(\omega, t)$ от времени связана с возможным изменением во времени самой системы (например, при модуляции ее параметров). При этом, очевидно, в спектре колебаний могут появиться такие частоты, которых нет в спектре внешней силы.

В случае систем с постоянными параметрами появление новых частот невозможно и коэффициент передачи от времени не зависит:

$$K(\omega, t) = K(\omega). \quad (3.1.9)$$

Заметим, что в случае (9) выражение (8) может рассматриваться

как спектральное разложение вынужденных колебаний, совершаемых системой:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} K(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.1.10)$$

Временной подход. Рассмотрим теперь силу типа δ -импульса:

$$f_m(t) = \delta(t - t_m). \quad (3.1.11)$$

Отклик линейной системы на такую силу представим в виде

$$x_m(t) = H(t, t_m). \quad (3.1.12)$$

Произвольную силу можно представить в виде разложения по δ -функциям:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \delta(t - \theta) d\theta. \quad (3.1.13)$$

Отсюда на основании (3), (4) заключаем, что отклик линейной системы на воздействие $f(t)$ может быть записан как

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) H(t, \theta) d\theta. \quad (3.1.14)$$

Выражение (14) носит название интеграла Дюамеля, а $H(t, \theta)$ — функции Грина.

Отметим следующие свойства функции Грина:

1. Поскольку отклик на δ -импульс не может возникнуть во времени раньше самого импульса (иначе был бы нарушен принцип причинности), то

$$H(t, \theta) = 0, \quad \text{если } t < \theta,$$

или

$$H(t, \theta) = I(t - \theta) h(t, \theta), \quad (3.1.15)$$

где $I(t - \theta)$ — функция единичного скачка (см. (1.5.2)), а $h(t, \theta)$ — непрерывная функция, которую также называют функцией Грина.

2. Если система не меняется (т. е. параметры ее постоянны), то все моменты времени эквивалентны, и отклик системы в момент t_2 на δ -импульс, действовавший в момент t_1 , должен быть одним и тем же для всех t_1 и t_2 , соответствующих фиксированной величине интервала $t_2 - t_1$. Иначе говоря, для систем с постоянными параметрами функция Грина зависит только от разности аргументов:

$$H(t, \theta) = H(t - \theta), \quad h(t, \theta) = h(t - \theta). \quad (3.1.16)$$

3. Принимая во внимание (15), интеграл Дюамеля (14) можно переписать так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\theta) h(t, \theta) d\theta = \int_0^{\infty} h(t, t - \theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (3.1.17)$$

В случае систем с постоянными параметрами, учитывая (16), имеем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} h(\theta) f(t-\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) f(t-\theta) d\theta. \quad (3.1.18)$$

Таким образом, если внешняя сила $F(t)$ задана, то вынужденные колебания линейной системы определяются выражениями (18) или (14). Частотное и временное представления полностью эквивалентны (рис. 3.1), однако частотное представление (8) иногда удобнее для описания колебаний в установившемся режиме, а временное (14) — при рассмотрении переходных процессов.



Рис. 3.1. Линейная система.

Функция Грина $H(t, \theta)$ и коэффициент передачи $K(\omega, t)$ определяют колебания $x(t)$, возникающие в линейной системе под действием внешней силы $F(t)$.

Грина $H(t, \theta)$ имеется однозначная связь. Чтобы ее установить, перепишем (14) в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t-\theta) f(t-\theta) d\theta$$

и подставим сюда спектральное разложение (7) для $f(t)$. В результате получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t-\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (3.1.19)$$

Сравнивая (8) и (19), находим, что $K(\omega, t)$ и $H(t, \theta)$ связаны преобразованием Фурье:

$$K(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t-\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (3.1.20)$$

$$H(t, t-\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, t) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (3.1.21)$$

Согласно (16), (20) и (21) и в случае систем с постоянными параметрами

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} h(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (3.1.22)$$

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (3.1.23)$$

Свободные колебания. Свободные колебания не связаны с внешними силами и определяются начальными условиями. Как будет показано далее, математически начальные условия всегда можно представить в виде эквивалентной силы (см., например, (45), (46)). В некоторых задачах такой подход имеет свои преимущества, давая возможность учитывать начальные (а также граничные) условия и внешнее воздействие в рамках единого описания.

Функция Грина линейных систем с сосредоточенными параметрами. Колебания в линейных системах с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, например:

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^n x = f(t), \quad (3.1.24)$$

а функция Грина может быть выражена через свободные колебания

$$y_1(t), \dots, y_N(t), \quad (3.1.25)$$

являющиеся линейно независимыми решениями соответствующего (24) однородного уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^n y = 0. \quad (3.1.26)$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала уравнение первого порядка

$$a_1(t) \dot{x} + a_0(t) x = f(t) \quad (3.1.27)$$

и будем искать его решение в виде

$$x(t) = C_1(t) y_1(t), \quad (3.1.28)$$

где $C_1(t)$ — неизвестная пока функция, а $y_1(t)$ — решение однородного уравнения

$$a_1(t) \dot{y}_1 + a_0(t) y_1 = 0. \quad (3.1.29)$$

Подставив (28) в (27), получим

$$a_1 \dot{C}_1 y_1 + C_1 (a_1 \dot{y}_1 + a_0 y_1) = f(t),$$

или, если учесть (29), $a_1 \dot{C}_1 y_1 = f$, откуда имеем

$$C_1(t) = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta) d\theta}{a_1(\theta) y_1(\theta)}. \quad (3.1.30)$$

В результате получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\theta) \frac{y_1(t) d\theta}{a_1(\theta) y_1(\theta)}. \quad (3.1.31)$$

Из сравнения (17) и (31) следует, что для систем первого порядка функция Грина следующим образом выражается через функцию y_1 , описывающую свободные колебания:

$$h(t, \theta) = \frac{y_1(t)}{a_1(\theta) y_1(\theta)}. \quad (3.1.32)$$

Для уравнения второго порядка

$$a_2(t) \ddot{x} + a_1(t) \dot{x} + a_0(t) x = f(t) \quad (3.1.33)$$

решение ищем в виде

$$x = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t). \quad (3.1.34)$$

Дифференцируя (34), имеем

$$\dot{x} = \dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2 + C_1 \dot{y}_1 + C_2 \dot{y}_2. \quad (3.1.35)$$

Выразив в (34) неизвестную функцию x через две новых (C_1 и C_2), мы можем задаться одним произвольным соотношением между C_1 и C_2 . Пусть

$$\dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2 = 0. \quad (3.1.36)$$

Тогда

$$\dot{x} = C_1 \dot{y}_1 + C_2 \dot{y}_2, \quad \ddot{x} = \dot{C}_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2 + C_1 \ddot{y}_1 + C_2 \ddot{y}_2. \quad (3.1.37)$$

Подставляя (34), (37) в исходное уравнение (33), получим

$$C_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2 = f/a_2. \quad (3.1.38)$$

Из (36), (38) следует, что

$$\dot{C}_1 = -\frac{\dot{f} y_2 / a_2}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2}, \quad \dot{C}_2 = \frac{\dot{f} y_1 / a_2}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2},$$

т. е.

$$C_1(t) = -\int_{-\infty}^t \frac{\dot{f} y_2}{a_2} \frac{d\theta}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2}, \quad C_2(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{f} y_1}{a_2} \frac{d\theta}{y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2},$$

и согласно (34) искомое решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta)}{a_2(\theta)} \frac{y_1(\theta) y_2(t) - y_2(\theta) y_1(t)}{y_1(\theta) \dot{y}_2(\theta) - \dot{y}_1(\theta) y_2(\theta)} d\theta. \quad (3.1.39)$$

Сравнивая (17) и (39), находим функцию Грина для уравнения второго порядка:

$$h(t, \theta) = \frac{1}{a_2(\theta)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) \end{vmatrix}}. \quad (3.1.40)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно рассмотреть общий случай и показать, что функция Грина, соответствующая уравнению N -го порядка (24), следующим образом выражается через решения однородного уравнения (26) и их производные:

$$h(t, \theta) = \frac{1}{a_N(\theta)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_N(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-2)}(\theta) \dots y_N^{(N-2)}(\theta) \\ y_1(t) & \dots & y_N(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_N(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)}(\theta) \dots y_N^{(N-1)}(\theta) \end{vmatrix}}. \quad (3.1.41)$$

При этом

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m h(t, \theta) \Big|_{t=\theta} = \begin{cases} 0, & m=0, 1, 2, \dots, N-2, \\ \frac{1}{a_N(\theta)}, & m=N-1. \end{cases} \quad (3.1.42)$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, изменение во времени вронскиана, стоящего в знаменателе выражения (41), определяется коэффициентами при двух старших производных уравнения (26):

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_N \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)} & \dots & y_N^{(N-1)} \end{vmatrix} = \Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \left\{ -\int_{t_0}^t \frac{a_{N-1}(\theta)}{a_N(\theta)} d\theta \right\}. \quad (3.1.43)$$

При $N=1$ и $N=2$ выражение (42) совпадает, соответственно, с (32) и (40).

Замена начальных условий эквивалентной внешней силой. Свободные колебания определяются как частное решение уравнения (26), соответствующее определенному начальному состоянию системы (начальным условиям). Обычно поступают так: находят общее решение для (26), содержащее N произвольных постоянных (N — порядок дифференциального уравнения), а затем подбирают эти постоянные так, чтобы заданные начальные условия были удовлетворены.

Познакомимся с другим подходом к решению этой задачи, который иногда более удобен, чем традиционный. Он основан на том, что граничные условия вводятся в само дифференциальное уравнение как некоторая эквивалентная внешняя сила [2].

Пусть, например, нас интересуют свободные колебания, описываемые уравнением

$$a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0 \quad (3.1.44)$$

с начальным условием $y(t=0) = y_0$. Поскольку речь идет лишь о поведении y в области $t > 0$, то вместо y достаточно рассмотреть функцию

$$y^+(t) = I(t) y(t), \quad (3.1.45)$$

совпадающую с y при $t > 0$ и равную нулю при $t < 0$. В (45) $I(t)$ — функция единичного скачка (1.5.2). Дифференцируя (45) и учитывая, что $\dot{I}(t) = \delta(t)$, получим

$$\dot{y}^+ = \delta(t) y(t) + I(t) \dot{y}(t) = \delta(t) y_0 + I(t) \dot{y}. \quad (3.1.46)$$

Если умножить (44) на $I(t)$, то с учетом (46) для заменяющей $y(t)$ функции y^+ получим неоднородное уравнение

$$a_1(t) \dot{y}^+ + a_0(t) y^+ = y_0 a(t) \delta(t) = a(0) y_0 \delta(t), \quad (3.1.47)$$

правая часть которого учитывает начальное значение y_0 . Если исходное уравнение — второго или более высокого порядка, то его удобно заменить предварительно на систему уравнений первого порядка. Пусть, к примеру,

$$a_2(t) \ddot{y} + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = 0, \quad y(t=0) = y_0, \quad \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0. \quad (3.1.48)$$

Полагая $\omega = \dot{y}$, получим вместо (48)

$$\dot{\omega} = \omega, \quad a_2(t) \dot{\omega} + a_1(t) \omega + a_0(t) y = 0. \quad (3.1.49)$$

Домножая (49) на $I(t)$, для «односторонних» функций $y^+ = I(t) y$, $\omega^+ = I(t) \omega$ получим систему уравнений первого порядка

$$a_2(t) \dot{\omega}^+ + a_1(t) \omega^+ + a_0(t) y^+ = a_2(0) \dot{y}_0 \delta(t),$$

$$\dot{y}^+ - \omega^+ = y_0 \delta(t),$$

$$a_2(t) \ddot{y}^+ + a_1(t) \dot{y}^+ + a_0(t) y^+ = y_0 \delta(t) + [a_1(0) y_0 + a_2(0) \dot{y}_0] \delta(t). \quad (3.1.50)$$

Преимущество уравнений (47) и (50) по сравнению с (44) и (48) состоит в том, что для их решения можно использовать интеграл Дюамеля или другие методы, развитые для анализа вынужденных колебаний.

Переход к односторонним функциям вида (45) может быть эффективно использован и в волновых задачах (см. § 6 гл. 6).

§ 2. Отклик линейной системы на шумовое воздействие

Преобразование корреляционных функций и спектров. Из результатов § 1 следует, что колебания $x(t)$, совершаемые линейной системой под действием некоторой случайной силы

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.2.1)$$

можно непосредственно выразить через силу или ее амплитудный спектр:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t, \theta) d\theta = \quad (3.2.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} K(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.2.3)$$

Статистические характеристики процесса x на «выходе» системы (см. рис. 3.1) можно получить, усредняя (2) или (3). Для простоты предположим, что рассматривается система с постоянными и вещественными параметрами*), когда

$$H(t, \theta) = H^*(t, \theta) = H(t - \theta), \quad K(\omega, t) = K(\omega) = K^*(-\omega), \quad (3.2.4)$$

а внешняя сила $\xi(t)$ на «входе» системы — стационарный шум, так что

$$\bar{\xi} = 0, \quad \overline{\xi \xi_{\tau}} = B_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega, \quad (3.2.5)$$

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = \langle \xi_{\omega} \xi_{-\omega'}^* \rangle = G_{\text{вх}}(\omega) \delta(\omega + \omega'), \quad \langle \xi_{\omega} \rangle = 0. \quad (3.2.6)$$

В этом случае процесс $x(t)$ также стационарен и для него, по аналогии с (5), можно написать

$$\overline{xx_{\tau}} = B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вых}}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega. \quad (3.2.7)$$

С другой стороны, усредняя x и xx_{τ} с учетом (4), (6), получим

$$\bar{x} = 0, \quad B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 e^{-i\omega \tau} d\omega. \quad (3.2.8)$$

Сравнение (7) и (8) показывает, что спектральные плотности на входе и выходе линейной системы с постоянными параметрами связаны через коэффициент передачи:

$$G_{\text{вых}}(\omega) = G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2. \quad (3.2.9)$$

*) То есть постоянны и вещественны коэффициенты a_n в (3.1.24).

Полная интенсивность, или дисперсия, флуктуаций на выходе системы равна

$$\overline{x^2} = \sigma^2_{\text{в}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вых}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (3.2.10)$$

В общем случае линейной системы с переменными параметрами эта дисперсия будет зависеть от времени:

$$\sigma^2_{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega, t)|^2 G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (3.2.11)$$

Согласно (8) входному белому шуму со спектральной интенсивностью $1/2\pi$ соответствует на выходе корреляционная функция

$$B_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.2.11a)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$|K(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2.12)$$

Подставляя (12) и

$$G_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{вх}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\tau$$

в (8) и интегрируя по ω , находим, что связь между корреляционными функциями шумов на входе и выходе линейной системы имеет интегральный вид:

$$\begin{aligned} B_{\text{вых}}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau - \tau') B_{\text{вх}}(\tau') d\tau' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau') B_{\text{вх}}(\tau + \tau') d\tau', \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

т. е. она сложнее, чем чисто алгебраическое соотношение (9) между спектрами.

Фильтрация шума избирательными системами. Согласно (9) при прохождении шума через линейную систему подчеркиваются те части спектра $G_{\text{вх}}(\omega)$, которым отвечают наибольшие значения функции $|K(\omega)|^2$ (*). В этом состоит эффект фильтрации. Об устройствах, изменяющих форму спектра шума, говорят как о фильтрах или избирательных системах.

*) Функция $|K(\omega)|^2$ описывает резонансную кривую линейной системы, и ее максимумы приходятся на резонансные частоты линейной системы.

Рис. 3.2 иллюстрирует два предельных случая. Если спектр $G_{\text{вх}}(\omega)$ мало меняется в области максимума резонансной кривой $|K(\omega)|^2$, то

$$G_{\text{вых}}(\omega) \sim |K(\omega)|^2 \quad (3.2.14)$$

и эффект фильтрации выражен наиболее сильно (рис. 3.2, а).

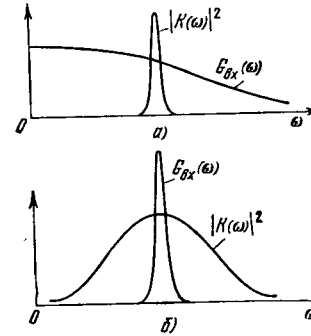


Рис. 3.2. Два предельных случая:

резонансная кривая $|K(\omega)|^2$ является более узкой (а) или более широкой (б), чем спектр $G_{\text{вх}}(\omega)$ входного шума. Фильтрующие свойства линейной системы проявляются только в случае (а).

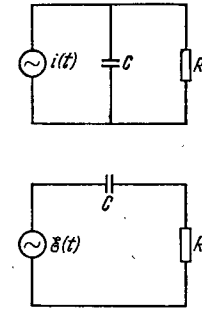


Рис. 3.3. Схемы RC-фильтров.

Наоборот, если функция $|K(\omega)|^2$ почти не меняет своей величины в пределах основной части спектра $G_{\text{вх}}(\omega)$, то фильтрующее действие системы практически не проявляется; при этом

$$G_{\text{вых}}(\omega) \sim G_{\text{вх}}(\omega) \quad (3.2.15)$$

(рис. 3.2, б).

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся линейные фильтры.

RC-фильтр. Схемы таких фильтров, состоящих из последовательно или параллельно соединенных емкости и сопротивления, показаны на рис. 3.3. Используя закон Кирхгофа, получим для параллельной схемы

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = i(t), \quad (3.2.16)$$

где q — заряд на обкладках конденсатора, i — заданный ток. Последовательная схема описывается таким же уравнением с $i = \mathcal{E}/R$.

Соответствующее (16) уравнение свободных колебаний

$$\dot{y} + \alpha y = 0, \quad \alpha = 1/RC,$$

имеет решение

$$y(t) = e^{-\alpha(t-\theta)}, \quad (3.2.17)$$

где $1/\alpha = T = RC$ — время релаксации.

Считая i «входом», а q «выходом» системы и подставляя (17) в (3.1.32), найдем функцию Грина:

$$h(t - \theta) = e^{-\alpha(t-\theta)}. \quad (3.2.18)$$

Интеграл Дюамеля (3.1.18) при этом запишется как

$$q(t) = \int_0^t e^{-\alpha\theta} i(t - \theta) d\theta. \quad (3.2.18a)$$

Чтобы найти коэффициент передачи $K(\omega)$, нужно положить в (16) $i(t) = e^{i\omega t}$ и $q(t) = K(\omega) e^{i\omega t}$, что дает

$$K(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}, \quad |K(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (3.2.19)$$

Мы видим, что величина $|K(\omega)|^2$ максимальна при $\omega = 0$, а с увеличением ω функция $|K(\omega)|^2$ плавно уменьшается. Таким образом, RC -фильтр обладает способностью выделять низкие частоты. Подставив (19) в (11a), найдем

$$B_0(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}/2\alpha.$$

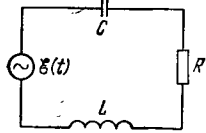


Рис. 3.4. Последовательная схема колебательного контура.

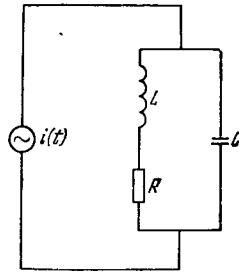


Рис. 3.5. Параллельная схема колебательного контура.

Колебательный контур. Колебательный контур состоит из емкости C , индуктивности L и сопротивления R (рис. 3.4). Напряжение x на обкладках конденсатора описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \epsilon(t) = f(t), \quad (3.2.20)$$

где $2\alpha = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$. В параллельной схеме (рис. 3.5) заданным является сторонний ток $i(t)$. Динамическое уравнение, описывающее изменение тока $i_L = x$ через индуктивность, аналогично (20):

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 i(t) = f(t). \quad (3.2.21)$$

Найдем функцию Грина колебательного контура. Из уравнения свободных колебаний

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

следует, что

$$y_{1,2} = e^{-\alpha t \pm i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (3.2.22)$$

Подставив (22) в (3.1.40), получим

$$h(t, \theta) = h(t - \theta) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha(t-\theta)} \sin \omega_1(t - \theta). \quad (3.2.23)$$

Запись решения уравнений (20), (21) в виде интеграла Дюамеля (3.1.18) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty e^{-\alpha\theta} \sin \omega_1\theta \cdot f(t - \theta) d\theta. \quad (3.2.24)$$

Полагая в (20), (21) $f(t) = e^{i\omega t}$, $x(t) = e^{i\omega t} K(\omega)$, найдем частотную передаточную функцию контура

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \quad (3.2.25)$$

и резонансную кривую

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (3.2.26)$$

(рис. 3.6).

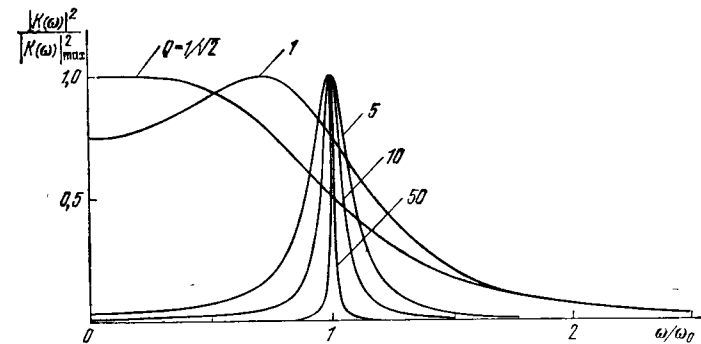


Рис. 3.6. Вид резонансных кривых колебательного контура при различных значениях добротности $Q = \omega_0/2\alpha$.

Анализ выражения (26) показывает, что наиболее сильный отклик контура соответствует резонансной частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} < \omega_1 < \omega_0.$$

При этом

$$|K(\omega_{\text{рез}})|^2 = |K(\omega)|_{\text{max}}^2 = \frac{1}{4\alpha^2\omega_1^2}. \quad (3.2.27)$$

Уменьшение резонансной кривой в два раза по сравнению с максимальным значением приходится на частоты

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 \mp 2\alpha\omega_1}, \quad (3.2.28)$$

а площадь под кривой равна

$$\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{4\alpha\omega_0^2}. \quad (3.2.29)$$

Корреляционная функция (11а), соответствующая действию на контур белого шума, имеет вид

$$B_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{4\alpha\omega_0^2} \left(\cos \omega_1\tau + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1\tau \right). \quad (3.2.30)$$

С уменьшением параметра α , связанного с активными потерями в контуре, резонансная кривая делается более высокой и узкой. Из приведенных выше выражений с точностью до величин первого порядка по $\alpha/\omega_0 \ll 1$ и при $\omega \approx \omega_{\text{рез}}$ находим

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0, \quad \omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0,$$

$$|K(\omega)|_{\text{max}} = \frac{1}{4\alpha^2\omega_0^2}, \quad \omega_{2,3} = \omega_0 \mp \alpha,$$

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{4\omega_0^2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} \right]. \quad (3.2.31)$$

Высокочастотный *) ($Q \gg 1$) резонансный контур будет выделять из спектра входного шума ту область, которая расположена около резонансной частоты $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ в пределах относительно узкой полосы, приблизительно равной

$$\Delta\omega_{\text{рез}} = \omega_3 - \omega_2 = 2\alpha \ll \omega_0. \quad (3.2.32)$$

Анализ вынужденных колебаний с помощью укороченных уравнений. Если узкополосный процесс $x(t)$ на выходе контура записать через комплексную амплитуду $A(t)$ или квадратурные компоненты $a(t)$ и $b(t)$, то A , a и b будут медленными функциями времени:

$$x(t) = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t,$$

$$\frac{A}{A} \sim \frac{\dot{a}}{a} \sim \frac{\dot{b}}{b} \sim \frac{\Delta\omega_{\text{рез}}}{\omega_0} \ll 1. \quad (3.2.33)$$

Представление узкополосного процесса в виде (33) широко используется в радиофизике и оптике, так как это обычно существенно упрощает математическое решение задачи. Дело в том, что для функций A , a и b могут быть получены приближенные (так

*) Добротностью контура называется безразмерный параметр $Q = \omega_0/2\alpha$.

называемые укороченные) дифференциальные уравнения, более простые, чем уравнение для x , что связано с медленностью этих функций.

Иногда укороченные уравнения выписываются не для одной комплексной функции A , а для однозначно связанных с ней двух вещественных функций: огибающей ρ и фазы φ или квадратурных компонент a и b :

$$A = \rho e^{i\varphi} = a + ib.$$

Рассмотрим методику вывода укороченных уравнений на примере колебательного контура. Дифференцируя (33), находим

$$\dot{x} = (\dot{A} + i\omega_0 A) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad \dot{x} = (\dot{A} + 2i\omega_0 A - \omega_0^2 A) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.},$$

так что

$$\dot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = [\dot{A} + 2\alpha\dot{A} + 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A)] e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (3.2.34)$$

Записав правую часть уравнений (20), (21) в виде, аналогичном (33):

$$f(t) = F(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad (3.2.35)$$

подставив (34), (35) в (20), (21), получим точное уравнение для A :

$$\dot{A} + 2\alpha\dot{A} + 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A) = F(t). \quad (3.2.36)$$

Оно не проще, чем уравнения (20), (21), однако мы еще не воспользовались предполагаемой медленностью $A(t)$. Учитывая это, приходим к следующим оценкам:

$$\dot{A} \sim \alpha A, \quad \ddot{A} \sim \alpha^2 A, \quad \dot{A} + 2\alpha\dot{A} \sim \alpha^2 A, \quad 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A) \sim \omega_0\alpha A.$$

Следовательно, первые два члена в (36) в $\omega_0/\alpha \gg 1$ раз меньше остальных и ими можно пренебречь. В результате получаем укороченное уравнение

$$\dot{A} + \alpha A = \frac{F(t)}{2\alpha i\omega_0}, \quad (3.2.37)$$

порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения, которому удовлетворяет функция x .

Корреляционные характеристики комплексной амплитуды $F(t)$ в (37) связаны с характеристиками силы $f(t)$ (35): если $f(t)$ — вещественный стационарный квазигармонический случайный процесс, причем

$$\langle f \rangle = 0, \quad \langle f^2 \rangle = \sigma^2, \\ \langle ff_\tau \rangle = \langle ff_\tau^* \rangle = \sigma^2 [\rho(\tau) \cos \omega_0\tau + q(\tau) \sin \omega_0\tau],$$

то

$$\langle F \rangle = 0, \quad \langle FF_\tau \rangle = 0, \quad \langle FF^* \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (3.2.38)$$

$$\langle FF_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2 [\rho(\tau) - iq(\tau)] \quad (3.2.39)$$

(см. (2.3.20)). Аналогичное соответствие существует между спектральными характеристиками F и f : если

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \langle ff_{\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (3.2.40)$$

$$\langle f_{\omega} f_{\omega'} \rangle = G(\omega) \delta(\omega + \omega'), \quad \langle f_{\omega} f_{\omega'}^* \rangle = G(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

то

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \langle FF_{\tau}^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_F(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (3.2.41)$$

$$\langle F_{\omega} F_{\omega'}^* \rangle = G_F(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad \langle F_{\omega} F_{\omega'} \rangle = 0, \quad (3.2.42)$$

где $G_F(\omega) = 1/2 G^+(\omega_0 + \omega)$ — смещенный на ω_0 спектр по положительным частотам силы f (см. (2.3.21)). Подобными же соотношениями связаны процесс $x(t)$ и его комплексная амплитуда A .

Используем теперь эти соотношения при решении уравнения (37). Если представить A и F в виде интегралов Фурье (41), то получим

$$A_{\omega} = \frac{F_{\omega}}{2\alpha i \omega_0 (i\omega + \alpha)}.$$

Отсюда согласно (42) следует соотношение между спектральными плотностями на входе и выходе контура

$$G_A(\omega) = \frac{G_F(\omega)}{4\alpha\omega_0^2 (\omega^2 + \alpha^2)}. \quad (3.2.43)$$

В общем случае

$$G_A(\omega) = |K(\omega)|^2 G_F(\omega), \quad (3.2.44)$$

где $K(\omega)$ — частотная передаточная функция, соответствующая укороченному уравнению.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Если $G_F(\omega)$ как функция ω меняется медленнее, чем $|K(\omega)|^2$, то без большой погрешности можно заменить в (44) $G_F(\omega)$ на $G_F(0)$, что эквивалентно замене $F(t)$ в укороченном уравнении на δ -коррелированный случайный процесс — белый шум. В частном случае (43) для такой замены необходимо, чтобы спектр $G_F(\omega)$ мало менялся при изменении ω на величину порядка α (т. е. в пределах резонансной кривой контура). Это же условие можно, очевидно, сформулировать иначе: время корреляции комплексной амплитуды входного шума должно быть достаточно малым по сравнению со временем релаксации свободных колебаний в контуре.

Установление шумовых колебаний в линейном осцилляторе — пример нестационарного случайного процесса. Для описания нестационарных эффектов, например случайных переходных процессов, удобно использовать временной подход и исходить

из (3.1.18):

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (3.2.45)$$

Предположим, что стационарный шум $\xi(t)$ ($\bar{\xi} = 0$, $\overline{\xi\xi_{\tau}} = B_{\text{вх}}(\tau)$) начал действовать на систему в момент $t=0$. Полагая в (45) $f(t) = 1(t)\xi(t)$, получим

$$x(t) = \int_0^t h(\theta) \xi(t - \theta) d\theta. \quad (3.2.46)$$

Дисперсия шумовых колебаний на выходе системы в этом случае будет зависеть от времени: возводя (46) в квадрат и усредняя, найдем

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \overline{x^2} = \int_0^t d\theta d\theta' h(\theta) h(\theta') B_{\text{вх}}(\theta - \theta'). \quad (3.2.47)$$

Если линейная система устойчива, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} h(\theta) = 0$, то с течением времени дисперсия (47) будет приближаться к своему установившемуся значению:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\theta d\theta' h(\theta) h(\theta') B_{\text{вх}}(\theta - \theta') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Как пример рассмотрим эволюцию во времени дисперсии шума на выходе колебательного контура, на который при $t=0$ начал действовать белый шум. Полагая в (47) $B_{\text{вх}}(\tau) = 2\pi G_{\text{вх}} \delta(\tau)$ и $h(\theta) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha\theta} \sin \omega_1 \theta$ (см. (23)), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \frac{\pi G_{\text{вх}}}{2\alpha\omega_0^2} - \frac{\pi G_{\text{вх}}}{2\omega_1^2} e^{-2\alpha t} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\omega_1 \sin 2\omega_1 t - \alpha \cos 2\omega_1 t}{\omega_1^2} \right]. \quad (3.2.49)$$

В случае контура с малыми потерями можно пренебречь малыми осциллирующими членами порядка $\alpha/\omega_0 \ll 1$; при этом

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{вых}}^2 (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (3.2.50)$$

где $\sigma_{\text{вых}}^2$ — стационарное значение дисперсии (48):

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\pi G_{\text{вх}}}{2\alpha\omega_0^2}. \quad (3.2.51)$$

Выражение (50) показывает, что время «установления стационарности» выходного шума — порядка времени затухания свободных колебаний (α^{-1}).

Линейная система как усредняющее устройство. Рассмотренную в § 4 гл. 1 операцию временного усреднения можно интерпретировать как прохождение случайного процесса через линейный фильтр (идеальный интегратор) с частотной характеристикой

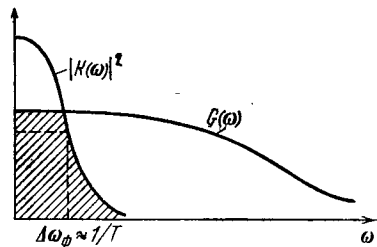


Рис. 3.7. Иллюстрация условий эффективного сглаживания стационарного шума на спектральном языке.

$|K(\omega)|^2$ — частотная характеристика интегратора, $G(\omega)$ — спектр шума. Флуктуации на выходе интегратора обусловлены спектральными компонентами шума, попадающими в заштрихованную область.

На спектральном языке условие $T \gg \tau_k$ означает, что полоса пропускания интегратора гораздо уже, чем ширина спектра шума (рис. 3.7).

В общем случае, когда в качестве интегратора используется произвольный линейный фильтр с коэффициентом передачи $K(\omega)$, дисперсия на выходе интегратора равна

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.2.53)$$

Сравнивая (52) и (53), можно оценить эффективное время усреднения фильтра:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{2\pi G(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.2.54)$$

Как следует из (54), величина $T_{\text{эфф}}$ зависит как от вида фильтра, так и от формы спектра шума. В частности, если входной шум можно считать белым и в качестве усредняющего устройства взять RC-фильтр, то получим

$$T_{\text{эфф}} = 2T,$$

где $T = RC$ — постоянная времени RC-фильтра (см. (17)).

Белый шум и «черный ящик» (корреляционная идентификация линейных систем). Структура линейной системы полностью определяется коэффициентом передачи $K(\omega)$ или функцией Грина $h(\theta)$.

Каждая из этих характеристик описывает реакцию системы на регулярное (неслучайное) воздействие определенного типа — гармоническое или δ -импульс. Для измерения этих характеристик могут быть использованы также чисто «шумовые» методы.

Рассмотрим линейную систему неизвестного вида («черный ящик»). Предположим, что на вход системы подан белый шум $\xi(t)$, возбуждающий в системе вынужденные колебания $x(t)$. Предположим сначала, что в этих условиях измерена корреляционная функция шума на выходе системы, т. е. $\langle xx_\tau \rangle = B(\tau)$. Применив к $B(\tau)$ преобразование Фурье, мы найдем спектральную интенсивность $G(\omega)$, которая согласно (9) при δ -коррелированном шуме ξ с точностью до постоянной совпадает с квадратом модуля коэффициента передачи:

$$G(\omega) \sim |K(\omega)|^2. \quad (3.2.55)$$

Таким образом, измеряя $\langle xx_\tau \rangle$ или непосредственно спектральную плотность шума на выходе системы $G(\omega)$, мы можем найти модуль комплексной функции $K(\omega)$, но фаза $K(\omega)$ остается неопределенной.

Значительно более полную информацию о системе можно получить, если измерять корреляционную функцию $\langle \xi x_\tau \rangle$. Чтобы в этом убедиться, запишем x в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^\infty h(\theta) \xi(t - \theta) d\theta.$$

Учитывая, что $\langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau)$, находим отсюда

$$\langle \xi x_\tau \rangle = \begin{cases} 2Dh(\tau), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \quad (3.2.56)$$

т. е. корреляционная функция $\langle \xi x_\tau \rangle$ с точностью до постоянной совпадает с функцией Грина рассматриваемой линейной системы. Измерение $\langle \xi x_\tau \rangle$ полностью решает задачу идентификации системы. В частности, преобразуя функцию $\langle \xi x_\tau \rangle$ по Фурье, можно найти как модуль, так и фазу коэффициента передачи $K(\omega)$.

Этот метод представляет также большой интерес и в оптике, в задачах оптической спектроскопии (см. § 5 гл. 5).

§ 3. Распределение вероятностей на выходе линейной системы

Обратимся теперь к анализу факторов, определяющих распределение вероятностей на выходе линейной системы. Задача теперь ставится следующим образом: по заданному распределению вероятностей на входе мы должны определить распределение вероятностей на выходе системы.

Действие на систему гауссовского шума. Эта задача проще всего решается в том случае, когда шум на входе $\eta(t) = \bar{\eta}(t) + \tilde{\eta}(t)$ является гауссовским. Вследствие линейности системы шум на выходе также будет гауссовским в любой момент времени. Поэтому, определив (например, используя интеграл Дюамеля) два параметра: среднее значение процесса на выходе

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\theta) H(t, \theta) d\theta$$

и его корреляционную функцию флуктуаций

$$\langle \tilde{x}\tilde{x}_\tau \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} d\theta d\theta' \langle \tilde{\eta}(\theta) \tilde{\eta}(\theta') \rangle H(t, \theta) H(t + \tau, \theta'),$$

мы можем по формуле (1.2.44) построить, в принципе, любое многомерное распределение для процесса x на выходе линейной системы.

Нормализация флуктуаций в узкополосных системах. Рассмотрим теперь случай, когда входной шум не является гауссовским. Чрезвычайно существенно, что во многих практически важных случаях распределение выходного шума оказывается очень близким к нормальному — независимо от закона распределения шума на входе.

Предположим, что спектр входного шума намного шире резонансной кривой линейной системы:

$$\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} \gg \Delta\omega_{\text{рез}} \quad (3.3.1)$$

(см. рис. 3.2, а). В этом случае входной шум допустимо рассматривать как белый, т. е. δ -коррелированный. Это дает возможность применить для определения $\psi(x)$ аппарат уравнения Фоккера — Планка. В частности, если линейная система описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то, подставив в общее выражение для $\psi(x)$ (1.7.50)

$$a(x) = -\alpha x, \quad b(x) = 1,$$

получим гауссовскую функцию распределения

$$\psi(x) \sim \exp(-\alpha x^2/2D).$$

Этот результат может быть обобщен на случай нескольких связанных линейных уравнений с δ -коррелированными правыми частями (см. [7], с. 100), иначе говоря, гауссовское распределение вероятностей (1.2.44) описывает шумовые колебания в любой линейной системе с сосредоточенными параметрами, находящейся под действием δ -коррелированных сил.

Условие (1) относится к режиму стационарных шумовых колебаний. Однако замена реального шума на δ -коррелированный возможна и при наличии переходных процессов, если кроме (1) выполняется условие

$$\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} > 1/t, \quad (3.3.2)$$

где t — полное время действия внешнего шума на систему. Рассмотрим, например, действие на RC -фильтр шума с характеристиками

$$B_{\text{вх}}(\tau) = \sigma_{\text{вх}}^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad G_{\text{вх}}(\omega) = \frac{G_0 \beta^2}{\beta^2 + \omega^2},$$

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \pi \beta G_0, \quad \Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} \approx \beta. \quad (3.3.3)$$

Дисперсия шумовых колебаний на выходе этого фильтра с учетом переходных процессов будет равна согласно (3.2.18) и (3)

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{вх}}^2 \int_0^t \int_0^t d\theta_1 d\theta_2 e^{-\alpha(\theta_1 + \theta_2) - \beta|\theta_1 - \theta_2|} =$$

$$= \pi \beta G_0 \left[\frac{1}{\alpha(\alpha + \beta)} - \frac{e^{-2\alpha t}}{\alpha(\beta - \alpha)} + \frac{2e^{-(\alpha + \beta)t}}{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)} \right]. \quad (3.3.4)$$

С другой стороны, при действии на RC -фильтр белого шума с корреляционной функцией $B_{\text{вх}}(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau)$

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \frac{\pi G_0}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (3.3.5)$$

Нетрудно видеть, что для совпадения (4) и (5) кроме неравенства $\beta \gg \alpha$, эквивалентного (1), необходимо выполнение неравенства $\beta t \gg 1$, соответствующего (2).

Эффект нормализации шумовых колебаний в линейной системе можно также наглядно пояснить, используя центральную предельную теорему. Запишем опять шумовые колебания в линейной системе в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^\infty h(\theta) \eta(t - \theta) d\theta \approx \int_0^{\tau_{\text{ред}}} h(\theta) \eta(t - \theta) d\theta, \quad (3.3.6)$$

где

$$\tau_{\text{ред}} \sim 1/\Delta\omega_{\text{рез}}$$

— характерное время релаксации системы (т. е. время затухания свободных колебаний). Введя время корреляции входного шума

$$\tau_{\text{к}} \sim 1/\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}},$$

соотношение (1) можно переписать как

$$\tau_{\text{к}} \ll 1/\Delta\omega_{\text{рез}}. \quad (3.3.7)$$

Будем считать, что условие (7) выполняется с большим запасом, и выберем интервал времени τ такой, что

$$\tau_k \ll \tau \ll \tau_{\text{рел.}} \quad (3.3.8)$$

Представим теперь интеграл в (6) в виде суммы интегралов, в каждом из которых время интегрирования равно τ . Имеем

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t), \quad (3.3.9)$$

где

$$x_n(t) \approx \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} h(\theta) \eta(t-\theta) d\theta \approx h(n\tau) \int_0^\tau \eta(t-\theta) d\theta \quad (3.3.10)$$

и согласно (8)

$$N = \tau_{\text{рел.}}/\tau \gg 1. \quad (3.3.11)$$

Можно показать, что при условии $\tau_k \ll \tau$ корреляция случайных величин x_m и x_n ($n \neq m$) очень мала (см. ниже), так что все x_n можно приближенно считать статистически независимыми. Задача о распределении суммы N таких величин рассматривалась в гл. 1, где было показано, что распределение $w(x)$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к гауссовскому.

При больших, но конечных значениях N распределение шума на выходе линейной системы будет тем ближе к гауссовскому, чем меньше (по сравнению с единицей) величина относительных кумулянтов κ_n распределения $w(x)$. В частности, согласно (1.2.38) для коэффициентов асимметрии и эксцесса можно написать

$$\kappa_3 = \kappa_{\text{ас}} \sim 1/\sqrt{N}, \quad \kappa_4 = \kappa_{\text{экс}} \sim 1/N. \quad (3.3.12)$$

Оценивая корреляционную связь между различными x_n , заметим, что она будет наибольшей для ближайших членов суммы (9), т. е. для x_n и x_{n+1} . Если считать действующий на линейную систему шум чисто флуктуационным ($\bar{\eta} = 0$), то $\bar{x}_n = 0$ и коэффициент корреляции между x_n и x_{n+1} будет равен

$$R_{n, n+1} = \frac{\langle x_n x_{n+1} \rangle}{\sqrt{\langle x_n^2 \rangle \langle x_{n+1}^2 \rangle}} = \frac{\int_0^\tau \int_0^\tau d\theta_1 d\theta_2 B_{\text{вх}}(\tau + \theta_2 - \theta_1)}{\int_0^\tau \int_0^\tau d\theta_1 d\theta_2 B_{\text{вх}}(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (3.3.13)$$

Это выражение не зависит от n , и его нетрудно преобразовать к виду

$$R_{n, n+1} \equiv R = \frac{\int_0^\tau B_{\text{вх}}(2\tau - \theta) \theta d\theta + \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta) \theta d\theta}{2 \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta) (\tau - \theta) d\theta}. \quad (3.3.14)$$

При большой величине параметра τ/τ_k (см. (8)) имеем

$$\int_0^\tau B_{\text{вх}}(2\tau - \theta) \theta d\theta \ll \pi \tau_0 G_{\text{вх}}(0),$$

$$\int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta) \theta d\theta \approx \int_0^\infty B_{\text{вх}}(\theta) \theta d\theta = \pi \tau_0 G_{\text{вх}}(0),$$

$$2 \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta) (\tau - \theta) d\theta \approx 2\pi (\tau - \tau_0) G_{\text{вх}}(0),$$

так что

$$R \approx \tau_0/2 (\tau - \tau_0), \quad (3.3.15)$$

где τ_0 — характерное время запаздывания (2.6.7) диффузионного процесса $\int_t^{t+\tau} \eta(\theta) d\theta$.

В интересующем нас случае $\tau_0 \approx \tau_k \approx 1/\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}}$ (см. (2.6.9а) и (2.6.9б)). Учитывая (8), мы получаем из (15), что $R = \tau_0/2\tau \approx \tau_k/2\tau \ll 1$.

§ 4. Собственные шумы линейных систем. Тепловые шумы диссипативных линейных систем

Случайные вынужденные колебания в реальных линейных системах возникают и в отсутствие внешних сил; они связаны с наличием принципиально неустранимых источников собственных шумов. Тепловое движение свободных электронов в проводниках приводит к тому, что даже в отсутствие внешней э. д. с. в системе течет «тепловой» ток $i_T(t)$, носящий случайный характер.

Флуктуации электронной плотности, связанные с флуктуационными токами, приводят к появлению случайной разности потенциалов на концах проводника. Таким образом, любой двухполюсник Z , содержащий сопротивление и находящийся при температуре T , можно рассматривать как генератор случайной э. д. с. $\mathcal{E}_T(t)$ (рис. 3.8, а).

Собственные тепловые шумы создают принципиально неустранимые флуктуационные помехи в любой радиотехнической системе;

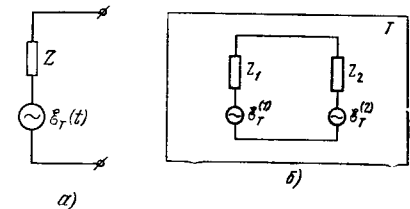


Рис. 3.8. К выводу теоремы Найквиста:

а) эквивалентная схема проводника с комплексным сопротивлением Z учитывает флуктуационную э. д. с. $\mathcal{E}_T(t)$, обусловленную тепловым движением электронов при температуре T ; б) схема двухполюсника в термостате.

поэтому первоочередной интерес представляют данные о статистических характеристиках случайного напряжения $\mathcal{E}_T(t)$ и случайного тока $i_T(t)$.

Рассчитать спектр (и корреляционную функцию) случайной э. д. с. можно на основе весьма общих положений термодинамики и статистики — речь идет о флуктуациях в системе, находящейся в равновесном состоянии.

Действительно, выясним прежде всего, какие заключения относительно свойств $\mathcal{E}_T(t)$ и $i_T(t)$ можно сделать из термодинамических соображений. Рассмотрим для этого замкнутую цепь, состоящую из двух двухполосников с комплексными сопротивлениями (импедансами) $Z_{1,2} = R_{1,2} + iX_{1,2}$, изображенных на рис. 3.8, б. Пусть эта цепь помещена в термостат, находящийся при температуре T .

Каждый из источников $\mathcal{E}_T^{(1)}$, $\mathcal{E}_T^{(2)}$ вызывает ток в цепи; обозначим через P_{12} мощность, отдаваемую источником $\mathcal{E}_T^{(1)}$ в двухполосник Z_2 , и соответственно через P_{21} — мощность, отдаваемую источником $\mathcal{E}_T^{(2)}$ в двухполосник Z_1 . Введя спектральную плотность напряжения теплового шума $G_T(\omega)$, запишем

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 \frac{G_T^{(1)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega, \quad P_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_1 \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega, \quad (3.4.1)$$

где $Z = Z_1 + Z_2$. В силу второго начала термодинамики $P_{12} = P_{21}$ и, следовательно *),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_2 \frac{G_T^{(1)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} R_1 \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega. \quad (3.4.2)$$

Из (2) следует важное утверждение: если $R_n(\omega) \equiv 0$ ($n = 1, 2$), то и $G_T^{(n)}(\omega) = 0$, т. е. если двухполосник не поглощает (не содержит активного сопротивления), спектральная плотность э. д. с. теплового шума на нем тождественно равна нулю.

Фактически в (2) можно приравнять и подынтегральные выражения. Действительно, представим себе, что между двухполосниками включен чисто реактивный фильтр (не обладающий омическим сопротивлением) с сопротивлением $Z_3 = iX_3$. Тогда соотношение (2) сохранит свой вид, однако в знаменателе надо записать вместо $|Z|^2$ величину $|Z'|^2 = |Z + Z_3|^2$. Поскольку (2) должно быть выполнено при этом для любой характеристики фильтра $X_3(\omega)$, в (2) должны быть равны и подынтегральные выражения.

*) Следующие ниже рассуждения принадлежат Горелику [8]; см. также [9—11].

Поскольку выбор двухполосников на схеме рис. 3.8 совершенно произволен, сказанное означает, что для любого двухполосника

$$\frac{G_T^{(1)}(\omega)}{R_1(\omega)} = \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{R_2(\omega)} = \dots = \frac{G_T^{(n)}(\omega)}{R_n(\omega)}. \quad (3.4.3)$$

В силу (3) отношение спектральной плотности теплового шума к действительной части сопротивления, в котором он генерируется (отношение «излучательной» и поглощательной способностей двухполосника), оказывается универсальной константой, зависящей от частоты и температуры, $u(\omega, T)$, т. е.

$$G_T(\omega) = R(\omega) u(\omega, T) \equiv \text{Re } Z(\omega) u(\omega, T). \quad (3.4.4)$$

Как же определить функцию $u(\omega, T)$?

Универсальность $u(\omega, T)$ позволяет для ее нахождения рассмотреть какую-нибудь простую «пробную» систему; полученный результат будет, очевидно, иметь общий характер.

Формула Найквиста в классической области. При $kT \gg \hbar\omega$ (в классической области, здесь k — постоянная Больцмана, \hbar — постоянная Планка), в соответствии с принципом равнораспределения энергии по степеням свободы, средняя энергия флуктуационных колебаний, обусловленных $\mathcal{E}_T(t)$, в системе с $N/2$ степенями свободы *)

$$\langle W \rangle = kTN/2 \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.4.5)$$

В качестве пробной системы рассмотрим высокочастотный колебательный контур RLC , настроенный на частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Рассчитаем $G_T(\omega_0)$, а следовательно, и $u(\omega_0, T)$. Итак, предположим, что полоса пропускания контура $\Delta\omega = 2\alpha = R/L$ является достаточно узкой, так что в ее пределах функцию G_T можно рассматривать как постоянную: $G_T(\omega) \approx G_T(\omega_0)$. Если q — заряд на емкости, то

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2C} \langle q^2 \rangle + \frac{L}{2} \langle \dot{q}^2 \rangle. \quad (3.4.6)$$

Исходя из уравнения для q

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_T(t),$$

получим

$$\langle q^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |K(\omega)|^2 G_T(\omega) d\omega, \quad \text{где} \quad K(\omega) = L^{-1}(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega)^{-1}.$$

*) Число N равно порядку дифференциального уравнения, описывающего систему.

Учитывая, что полоса контура предполагается узкой, а также соотношение (3.2.29), находим

$$\langle q^2 \rangle \approx 2G_T(\omega_0) \int_0^\infty |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2\alpha\omega_0^2 L^2}, \quad (3.4.7)$$

$$\langle \dot{q}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |K(\omega)|^2 G_T(\omega) d\omega = \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2\alpha L^2}. \quad (3.4.8)$$

Как следует из (7) и (8),

$$\frac{1}{2C} \langle q^2 \rangle = \frac{L}{2} \langle \dot{q}^2 \rangle = \frac{\pi G_T(\omega)}{2RL^2}, \quad (3.4.9)$$

где мы теперь пишем $\omega_0 = \omega$, так как частота ω_0 выбиралась произвольной.

Подставив (6), (9) и $N=2$ в (5), получим формулу Найквиста для $G_T(\omega)$:

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T R(\omega). \quad (3.4.10)$$

Формула (10) описывает спектральную плотность напряжения теплового шума на чисто омическом сопротивлении $\text{Re } Z = R_0$. В соответствии с (4) и (10)

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi} \kappa T,$$

и, следовательно, для спектральной плотности теплового шума на произвольном двухполюснике

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T \text{Re } Z$$

и для спектральной плотности, определенной только в области положительных частот,

$$G_T^\dagger(\omega) = \frac{2}{\pi} \kappa T \text{Re } Z. \quad (3.4.11)$$

Формула (11) была впервые получена Найквистом (1928 г.), который рассматривал, однако, в качестве пробной системы не колебательный контур, а двухпроводную линию.

Спектр и корреляционная функция теплового шума. Согласно (10), (11) в классической области форма спектра теплового шума определяется частотной зависимостью действительной части полного сопротивления. Речь фактически идет обо всем радиодиапазоне, поскольку при комнатной температуре ($T = 300$ К) $\hbar\omega \approx \kappa T$ при $\nu = \omega/2\pi \approx 10^{13}$ Гц. Поэтому тепловой шум, генерируемый омическим сопротивлением, в радиодиапазоне можно считать белым; приближение δ -коррелированного процесса с высокой степенью

точности выполняется практически для всех задач, связанных с изучением воздействия теплового шума на реальные радиотехнические системы.

Для конкретной оценки времени корреляции теплового шума на омическом сопротивлении можно пользоваться следующими соображениями.

В реальном сопротивлении всегда присутствует «паразитная» шунтирующая емкость. Поэтому наиболее реальной моделью сопротивления является параллельная RC -цепочка, где $C = C_n$ — «паразитная» емкость. Действительная часть комплексного сопротивления такой цепочки

$$\text{Re } Z = \frac{R}{1 + (\omega C_n R)^2}. \quad (3.4.12)$$

Поэтому вместо (10) правильнее писать

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T \frac{R}{1 + (\omega C_n R)^2}, \quad (3.4.13a)$$

$$G_T^\dagger(\omega) = \frac{2}{\pi} \kappa T \frac{R}{1 + (\omega C_n R)^2}, \quad (3.4.13b)$$

и время корреляции теплового шума, генерируемого реальным сопротивлением,

$$\tau_\kappa = RC_n. \quad (3.4.14)$$

Обычно эта величина не превышает $\tau_\kappa \approx 10^{-8} - 10^{-9}$ с. В оптическом диапазоне ($\omega \gtrsim 10^{14}$ Гц) для описания теплового шума вместо (5) следует использовать распределение Планка. Однако в этом диапазоне частот тепловой шум носит уже характер *теплового излучения*. Последнее описывается, однако, не в терминах квазистационарных токов и напряжений, а в терминах напряженностей E и H случайных электромагнитных полей *) (см. гл. 4).

§ 5. Совместное действие сигнала и шума на линейную систему. Фильтрация

В этом параграфе, пользуясь аппаратом теории флуктуаций в линейных системах, мы рассмотрим две простейшие задачи, связанные с приемом сигнала в присутствии шумов. Если интенсивность сигнала сравнима или меньше интенсивности шума

*) Имеется и промежуточная область сантиметровых и миллиметровых волн, где описание тепловых шумов также следует проводить в терминах полей. В данной книге эти вопросы практически не затрагиваются (ср. § 8 гл. 4). Мы отсылаем читателя к монографиям [10, 11], где дано исчерпывающее рассмотрение вопроса.

(речь может идти как о шуме, приходящем вместе с сигналом, так и о собственном шуме приемной системы), прием сигнала становится, по существу, сугубо статистической задачей.

В статистической теории приема сигналов на фоне шумов выделяют две группы задач — задачи обнаружения сигналов на фоне шумов и задачи выделения сигнала из шума. В первом случае наблюдатель не интересуется точным воспроизведением сигнала, а должен с максимальной надежностью вынести решение (статистическое решение) о наличии или отсутствии сигнала. Во втором речь идет о наилучшем (в смысле некоторого статистического критерия) воспроизведении сигнала, скрытого в шумах.

Если формы спектров сигнала и шума различаются, то для решения этих задач естественно обратиться к использованию линейных избирательных систем — линейных фильтров. В рассматриваемом случае можно, например, стремиться подобрать частотную характеристику фильтра таким образом, что он будет подавлять спектральные компоненты шума и одновременно «подчеркивать» спектральные компоненты сигнала.

Каков рецепт процедуры выбора такого, оптимального, фильтра? Как рассчитать частотную характеристику $K(\omega)$ оптимального фильтра?

Для ответа на эти вопросы обратимся сначала к задаче обнаружения сигнала на фоне шума. В этом случае естественно стремиться к тому, чтобы фильтр, через который проходит смесь сигнала и шума, максимизировал отношение сигнал/шум.

Итак, пусть на вход линейной системы поступает случайное колебание $\eta(t)$, представляющее собой смесь сигнала $S(t)$ и шума $\xi(t)$:

$$\eta(t) = S(t) + \xi(t). \quad (3.5.1)$$

Чтобы пояснить основные понятия, рассмотрим сначала самый простой случай, когда входной сигнал гармонический:

$$S_{\text{вх}} = a \cos(\omega_c t + \varphi_c) = \frac{a}{2} e^{i(\omega_c t + \varphi_c)} + \text{к. с.}, \quad I_{\text{вх}} = \frac{a^2}{2}.$$

Для выходного сигнала имеем

$$S_{\text{вых}} = \frac{a}{2} K(\omega_c) e^{i(\omega_c t + \varphi_c)} + \text{к. с.}, \quad I_{\text{вых}} = \frac{a^2}{2} |K(\omega_c)|^2.$$

Если $G(\omega)$ — спектральная плотность входного шума $\xi(t)$, то интенсивности шума на входе и выходе будут

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad \sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega.$$

Под отношением сигнал/шум понимают отношение соответствующих интенсивностей. Таким образом,

$$(c/\text{ш})_{\text{вх}} = \frac{a^2/2}{\sigma_{\text{вх}}^2} = \frac{a^2}{4 \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}, \quad (3.5.2)$$

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{a^2 |K(\omega_c)|^2}{4 \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega}, \quad (3.5.3)$$

$$\frac{(c/\text{ш})_{\text{вых}}}{(c/\text{ш})_{\text{вх}}} = \frac{|K(\omega_c)|^2 \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega}. \quad (3.5.4)$$

Выражение (3) показывает, каким требованиям должен удовлетворять фильтр, чтобы выполнялось условие $(c/\text{ш})_{\text{вых}} \gg 1$. Во-первых, частота сигнала должна совпадать с резонансной частотой фильтра ω_0 :

$$\omega_c = \omega_0; \quad (3.5.5)$$

при этом числитель в (3) имеет максимальное значение. Во-вторых, резонансная кривая $|K(\omega)|^2$ должна быть значительно уже спектра шума $G(\omega)$: чем с большим запасом будет выполнено условие

$$\Delta\omega_{\text{вх}} \gg \Delta\omega, \quad (3.5.6)$$

тем меньше будет знаменатель в (3). В (6) $\Delta\omega_{\text{вх}}$ — эффективная ширина спектра входного шума, $\Delta\omega$ — ширина резонансной кривой фильтра.

Условие (6) обычно означает также, что спектральная плотность шума приблизительно постоянна в пределах резонансной кривой, так что в (3) функцию $G(\omega)$ можно вынести за знак интеграла:

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{a^2 |K(\omega)|_{\text{max}}^2}{4G(\omega_0) \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.5.7)$$

Здесь учтено, что согласно (5) $|K(\omega_c)| = |K(\omega)|_{\text{max}}$. Заметим, что отношение

$$\frac{\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega}{|K(\omega)|_{\text{max}}^2} = \Delta\omega_{\text{ф}} \quad (3.5.8)$$

определяет так называемую шумовую полосу пропускания фильтра; $\Delta\omega_\Phi$ близка по величине или несколько превосходит $\Delta\omega$. Интенсивность входного шума, приходящаяся на полосу частот $\Delta\omega_\Phi$, равна

$$\sigma^2 = G(\omega_0) 2 \Delta\omega_\Phi. \quad (3.5.9)$$

Используя (8) и (9), выражению (7) можно придать вид (2):

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = a^2/2\sigma^2. \quad (3.5.10)$$

Таким образом, пересчет отношения сигнал/шум с входа на выход системы сводится просто к замене полной интенсивности шума интенсивностью (9). Если, по аналогии с (8), ввести эффективную ширину спектра входного шума

$$\Delta\omega_\text{ш} = \frac{\int_0^\infty G(\omega) d\omega}{G(\omega_0)}, \quad (3.5.11)$$

то (10) переписывается как

$$\Delta\omega_\Phi = \frac{(c/\text{ш})_{\text{вх}}}{(c/\text{ш})_{\text{вых}}} \Delta\omega_\text{ш}. \quad (3.5.12)$$

Формула (12) дает возможность выбрать полосу фильтра $\Delta\omega_\Phi$ по заданному значению $(c/\text{ш})_{\text{вх}}$, требуемой величине $(c/\text{ш})_{\text{вых}}$ и известной полосе входного шума $\Delta\omega_\text{ш}$.

Отношение сигнал/шум в переходном режиме. Рассмотрим кратко, как влияют переходные процессы на эффект фильтрации. Предположим, что на колебательный контур в момент $t=0$ начинают действовать белый шум и гармонический сигнал. Полагая в (3.2.24)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ a \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & t > 0, \end{cases}$$

найдем, что интенсивности сигнала и шума на выходе контура, усредненные по периоду высокой частоты ω_0 , равны

$$I_{\text{вых}}(t) = I_{\text{вых}}(1 - e^{-\alpha t})^2, \quad \sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{вых}}^2(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (3.5.13)$$

Как следует из (13), в начале переходного процесса ($\alpha t \ll 1$)

$$I_{\text{вых}}(t) \sim t^2, \quad \sigma_{\text{вых}}^2(t) \sim t.$$

Это значит, что независимо от того, какова величина отношения сигнал/шум в установившемся режиме, в начале процесса установления шум по интенсивности всегда превосходит сигнал. Из (13) также видно, что стационарный режим для шума устанавливается примерно в два раза быстрее, чем для сигнала:

$$t_{\text{ш}}^{\text{уст}} \sim 1/2\alpha, \quad t_{\text{с}}^{\text{уст}} \sim 1/\alpha.$$

Оптимальный линейный фильтр; обнаружение сигналов конечной длительности. Рассмотрим теперь более реальный случай, когда вместо гармонического сигнала (1) на линейную систему действует регулярный сигнал

$$S_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.5.14)$$

с произвольным спектром $s_0(\omega)$, мгновенной интенсивностью

$$I_0(t) = S_0^2(t) \quad (3.5.15)$$

и энергией

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5.16)$$

Пусть вместе с сигналом $S_0(t)$ на вход фильтра поступает стационарный шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью $G_0(\omega)$. Поставим задачу найти передаточную функцию $K(\omega)$ так называемого *оптимального фильтра*, отношение сигнал/шум на выходе которого будет наибольшим из всех возможных.

Согласно (14) сигнал на выходе фильтра имеет вид

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) K(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.5.16a)$$

и его интенсивность и энергия равны

$$I(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) K(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)^2, \quad (3.5.17)$$

$$Q = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega) K(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5.18)$$

Отсюда находим, что

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{I(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.5.19)$$

Предположим сначала, что $G_0(\omega) = \text{const}$, т. е. входной шум — белый. При этом G_0 выходит за знак интеграла в (19). Используя неравенство Коши — Буняковского, интенсивность (17) можно оценить как

$$I(t) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega \right). \quad (3.5.20)$$

Подстановка (20) в (19) дает

$$(с/ш)_{\text{вых}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega}{G_0} = \frac{Q_0}{2\pi G_0}. \quad (3.5.21)$$

Равенство в (20), (21) достигается при

$$K(\omega) = K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha s_0^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = \alpha s_0(-\omega) e^{-i\omega t_0}, \quad (3.5.22)$$

где α и t_0 — произвольные постоянные. Частотная характеристика оптимального фильтра определяется, таким образом, выражением (22).

Формула (22) описывает частотную характеристику оптимального фильтра $K(\omega)$, обеспечивающего максимальное значение отношения сигнал/шум. Как и следовало ожидать, частотная характеристика (22) близка к спектру сигнала (поэтому оптимальный фильтр называют также *согласованным* фильтром); заметим, что в (22) входит не спектральная амплитуда сигнала, а ее комплексно сопряженное значение. Именно такой фильтр и позволяет получить максимальное значение отношения сигнал/шум, хотя и не воспроизводит форму сигнала.

Подставив (17) и (22) в (19), получаем

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \right)^2}{G_0 Q_0}, \quad (3.5.23)$$

откуда видно, что величина $(с/ш)_{\text{вых}}$ принимает наибольшее значение (21) только в момент $t = t_0$. Согласно (16) и (22) сигнал на выходе оптимального фильтра

$$S(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (3.5.24)$$

$$S_{\text{max}} = S(t = t_0) = \alpha Q_0 / 2\pi,$$

представляет собой импульс, симметричный относительно $t = t_0$, хотя форма импульса входного сигнала (14) может быть любой. Таким образом, при прохождении сигнала через согласованный с ним фильтр (22) его форма меняется. Это хорошо видно на примере прямоугольного входного импульса

$$S_0(t) = \begin{cases} S_0, & |t| < \tau_0/2, \\ 0, & |t| > \tau_0/2, \end{cases}$$

с энергией $Q_0 = S_0^2 \tau_0$ и спектром

$$s_0(\omega) = \frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2}. \quad (3.5.25)$$

Подставив (25) в (24), получим импульс треугольной формы:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} Q_0 \left[1 - \frac{|t-t_0|}{\tau_0} \right], & |t-t_0| < \tau_0, \\ 0, & |t-t_0| > \tau_0. \end{cases}$$

Преобразуя заданный сигнал (14) в некоторый новый сигнал (24), оптимальный фильтр делает это таким образом, что новый сиг-

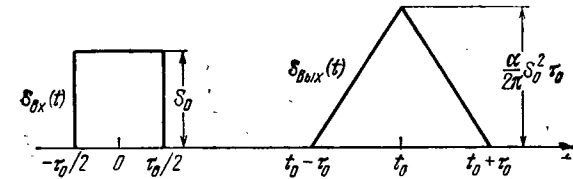


Рис. 3.9. Преобразование в согласованном линейном фильтре прямоугольного входного импульса $S_{\text{вх}}(t)$ в треугольный выходной импульс $S_{\text{вых}}(t)$.

нал принимает при $t = t_0$ значение, наибольшее из всех возможных, и тем самым наилучшим образом выделяется на фоне шума (рис. 3.9).

Рассмотрим теперь общий случай не δ -коррелированного входного шума: $G_0(\omega) \neq \text{const}$. Представим оптимальный фильтр состоящим из двух последовательно соединенных фильтров:

$$K(\omega) = K_1(\omega) K_2(\omega), \quad (3.5.26)$$

выберем первый фильтр таким образом, чтобы шум на его выходе был белым (δ -коррелированным):

$$K_1(\omega) = \frac{C}{\sqrt{G_0(\omega)}} e^{i\varphi(\omega)}, \quad (3.5.27)$$

где C — произвольная постоянная, $\varphi(\omega)$ — произвольная действительная функция частоты. При этом на вход второго фильтра будет подаваться сигнал

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) K_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

и белый шум со спектральной плотностью

$$G_1(\omega) = |K_1(\omega)|^2 G_0(\omega) = |C|^2.$$

Эта задача уже рассматривалась, и на основании (22) можно сразу написать выражение для оптимальной частотной характеристики второго фильтра:

$$K_2(\omega) = \alpha_1 K_1^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = \frac{\alpha_1 C^*}{\sqrt{G_0(\omega)}} s_0^*(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (3.5.28)$$

Подставив (27) и (28) в (26), найдем

$$K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha_2 \frac{s_0^*(\omega)}{G_0(\omega)} e^{-i\omega t_0}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 |C|^2. \quad (3.5.29)$$

Согласно (29) на форму частотной характеристики в общем случае влияет как спектр сигнала, так и спектральная интенсивность шума. Выражение (29) имеет простой смысл: фильтр подчеркивает участки спектра, где преобладает спектр сигнала, и подавляет те участки, где увеличивается спектр шума ($s_0^*(\omega)$ входит в (29) в числителе, а $G_0(\omega)$ — в знаменателе). При $G_0(\omega) = \text{const}$ (29) переходит в (22).

Выделение сигнала из шума; уравнение Винера — Хопфа. Обратимся теперь к примеру задачи о выделении сигнала из шума.

Во многих случаях реальный, несущий информацию, сигнал (например, радиосигнал, промодулированный человеческой речью) естественно рассматривать как стационарный шум $\xi_1(t)$. Будем считать, что и искажающая сигнал флуктуационная помеха также представляет собой стационарный шум $\xi_2(t)$. Наша задача — указать рецепт построения линейного фильтра, наилучшим образом воспроизводящего сигнал. Естественно, что для корректности постановки задачи надо сформулировать критерий качества воспроизведения. Ниже в качестве такого критерия мы используем критерий минимума среднеквадратичной ошибки воспроизведения.

Итак, предположим, что имеются две стационарные, случайные, статистически взаимно независимые функции времени, одну из которых

$$\xi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{1\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \xi_1 = 0,$$

мы считаем сигналом, а вторую

$$\xi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{2\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \xi_2 = 0,$$

— помехой. Известны корреляционные функции $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ этих процессов и соответствующие спектральные плотности $G_1(\omega)$, $G_2(\omega)$, причем для спектральных амплитуд имеем (см. (1.3.16))

$$\langle \xi_{n\omega} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2),$$

$$\langle \xi_{n\omega} \xi_{m\omega'} \rangle = \begin{cases} G_n(\omega) \delta(\omega + \omega'), & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (3.5.30)$$

Требуется определить частотную функцию $K(\omega) = K_\omega$ фильтра, суммарный процесс на выходе которого

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\omega (\xi_{1\omega} + \xi_{2\omega}) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.5.31)$$

с некоторой задержкой t_0 наилучшим образом воспроизводит входной сигнал $\xi_1(t)$. Согласно этому критерию среднеквадра-

точное значение $\bar{\mu}^2$ ошибки воспроизведения сигнала

$$\mu(t) = \xi(t + t_0) - \xi_1(t) \quad (3.5.32)$$

должно быть минимальным. Учитывая (30), найдем

$$\bar{\mu} = 0, \quad \bar{\mu}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{|K'_\omega - 1|^2 G_1(\omega) + |K'_\omega|^2 G_2(\omega)\} d\omega,$$

где $K'_\omega = K_\omega e^{i\omega t_0}$. Варьируя $\bar{\mu}^2$ по K'_ω , получим

$$\delta \bar{\mu}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [(K'_\omega - 1) G_1(\omega) + K'_\omega G_2(\omega)] \delta K'_\omega d\omega + \text{к. с.} \quad (3.5.33)$$

В случае оптимального фильтра, когда $\bar{\mu}^2$ имеет минимальное значение, величина $\delta \bar{\mu}^2$ должна обращаться в нуль при любой $\delta K'_\omega$. Как следует из (33), это означает, что

$$(K'_\omega - 1) G_1(\omega) + K'_\omega G_2(\omega) = 0,$$

т. е. искомая частотная функция оптимального фильтра равна

$$K(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (3.5.34)$$

Приведем теперь решение этой же задачи во временном представлении. Вместо (31) можно написать (см. (3.1.18))

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)] d\theta,$$

где $H(\theta)$ — функция Грина оптимального фильтра. Вычисляя дисперсию ошибки воспроизведения (32), теперь получим

$$\bar{\mu}^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} H(\theta) H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta d\theta' -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) B_1(\theta - t_0) d\theta + B_1(0),$$

откуда

$$\delta \bar{\mu}^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta H(\theta) \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta' - B_1(\theta - t_0) \right\} d\theta.$$

Из последнего выражения видно, что для обращения в нуль вариаций $\delta \bar{\mu}^2$ функция $H(\theta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [B_1(\tau - \theta) + B_2(\tau - \theta)] d\theta = B_1(\tau - t_0), \quad (3.5.35)$$

называемому уравнением Винера — Хопфа [4]. Учитывая, что $H(\theta)$ и K_ω , а также $B_n(\tau)$ и $G_n(\omega)$ связаны преобразованием Фурье, можно убедиться, что (34) формально определяет решение уравнения Винера — Хопфа (35).

Согласно (3.1.16) и (3.1.21)

$$H(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (3.5.36)$$

Подставляя (34) в (36) и учитывая четность функций $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$, получим

$$\begin{aligned} H(\theta) = H(t_0 + \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

Функция Грина оптимального фильтра (37) симметрична относительно момента времени t_0 :

$$H(t_0 + \tau) = H(t_0 - \tau). \quad (3.5.38)$$

С другой стороны, для любого физически осуществимого фильтра достаточно выполнения условия временной отсечки (3.1.14), которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$H(t_0 + \tau) = 0, \quad |\tau| > t_0. \quad (3.5.39)$$

Выражения (38) и (39) определяют функцию Грина как симметричный относительно $\theta = t_0$ импульс произвольной формы с длительностью, не превышающей $2t_0$ (см. рис. 3.10).

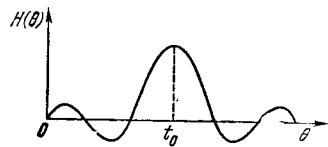


Рис. 3.10. Качественный вид зависимости функции Грина оптимального фильтра от времени θ (см. (38), (39)).

Обратим внимание на то, что функция Грина (37) формально имеет форму корреляционной функции, соответствующей спектральной плотности $G_1(\omega) [G_1(\omega) + G_2(\omega)]^{-1} (2\pi)^{-1}$, т. е. она уменьшается и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, причем можно ввести аналогичный времени корреляции параметр τ_0 , характеризующий

темп этого убывания. Таким образом, хотя, как правило, функция Грина (37) свойством (39) в чистом виде не обладает, всегда можно обеспечить выполнение (39) с любой наперед заданной точностью, выбрав время задержки достаточно большим ($t_0 \gg \tau_0$).

Согласно полученным результатам

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \leq 1, \\ \bar{\mu}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\omega) G_2(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) d\omega = \sigma_n^2 \quad (n = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.5.40)$$

Таким образом, минимальная ошибка воспроизведения (40) не зависит от времени запаздывания t_0 , а также от того, какой из двух шумов ξ_1 и ξ_2 мы считаем сигналом, а какой — помехой.

Интенсивность сигнала, помехи и отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \int G_1(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad \sigma_n^2 = \int G_2(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \\ (с/ш)_{\text{вых}} &= \sigma_c^2 / \sigma_n^2, \end{aligned}$$

где согласно (34)

$$|K(\omega)|^2 = \left[\frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \right]^2.$$

На входе фильтра

$$(с/ш)_{\text{вх}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\int G_1(\omega) d\omega}{\int G_2(\omega) d\omega}.$$

Рассмотрим характерные режимы фильтрации.

1. Сигнал большой, причем спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ сильно перекрываются. При этом $G_1 \gg G_2$ и $|K(\omega)|^2 \approx 1$, так что

$$(с/ш)_{\text{вых}} \approx (с/ш)_{\text{вх}} \gg 1.$$

Оптимальный фильтр в этом режиме практически ничего нового не вносит.

2. Отношение $(с/ш)_{\text{вх}}$ имеет произвольную величину, но спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ не перекрываются. Теперь

$$|K(\omega)|^2 \approx \begin{cases} 1, & G_1(\omega) \neq 0, \\ 0, & G_2(\omega) \neq 0, \end{cases}$$

так что $\sigma_c^2 \approx \sigma_1^2$, $\sigma_n^2 \approx 0$ и

$$(с/ш)_{\text{вых}} \gg 1.$$

Оптимальный фильтр в этом режиме работает наиболее эффективно, обеспечивая почти полное подавление помехи, не искажая в то же время сигнала.

3. Сигнал относительно мал, причем спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ сильно перекрываются. Полагая $G_1 \ll G_2$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &\approx \int G_2(\omega) [G_1(\omega)/G_2(\omega)]^2 d\omega, \\ \sigma_c^2 &\approx \int G_1(\omega) [G_1(\omega)/G_2(\omega)]^2 d\omega \ll \sigma_n^2, \\ (с/ш)_{\text{вых}} &\approx G_1/G_2 \approx (с/ш)_{\text{вх}} \ll 1. \end{aligned}$$

В этом наименее благоприятном случае (как и в наиболее благоприятном случае (1)) любой линейный фильтр бесполезен, поскольку частотная селекция не в состоянии заметно повлиять на отношение сигнал/шум. Выход из этого положения может быть найден, если закодировать сигнал (промодулировав его по известному закону) (см. § 3 гл. 5).

Оптимальные фильтры и корреляторы. Рассмотренные выше методы обнаружения и выделения сигналов особенно эффективны, когда спектры сигнала и шума существенно различаются; именно в этой ситуации оптимальные фильтры обеспечивают минимальные ошибки при обнаружении и выделении сигналов.

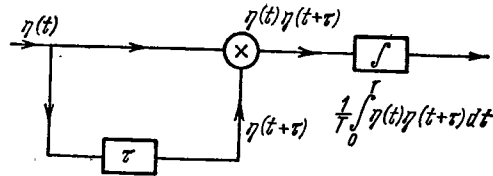


Рис. 3.11. Схема коррелятора.

Однако если различаются спектры, то различаются и корреляционные функции сигнала и шума. Поэтому для обнаружения и выделения сигналов, наряду с оптимальными фильтрами, могут быть предложены и «сопряженные по Фурье» методы — методы, основанные на измерении автокорреляционных и взаимно-корреляционных функций.

Поясним сказанное на двух примерах. Пусть речь идет о рассмотренном на «спектральном» языке в начале этого параграфа обнаружении гармонического сигнала

$$S(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega(\varphi) = 1/2\pi,$$

на фоне стационарного шума; сигнал и шум будем считать независимыми. Пусть суперпозиция сигнала и шума

$$\eta(t) = S(t) + \xi(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \xi(t)$$

подается на коррелятор (рис. 3.11). На выходе коррелятора имеем

$$B_\eta(\tau) = \langle \eta \eta_\tau \rangle = \langle SS_\tau \rangle + \langle S\xi_\tau \rangle + \langle S_\tau \xi \rangle + \langle \xi \xi_\tau \rangle. \quad (3.5.41)$$

При $\langle S \rangle = \langle \xi \rangle = 0$

$$\langle S\xi_\tau \rangle = \langle S_\tau \xi \rangle = 0. \quad (3.5.42)$$

Согласно (1.3.39) $\langle SS_\tau \rangle = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ и

$$B_\eta(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau + B_\xi(\tau). \quad (3.5.43)$$

Если шум ξ стационарен, то $B_\xi(\tau) \approx 0$ при $\tau \gg \tau_k$.

Таким образом, на выходе прибора, измеряющего корреляционную функцию $B_\eta(\tau)$, при $\tau \gg \tau_k$ $B_\eta(\tau) \approx \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ независимо от отношения сигнал/шум на входе. Это значит, что при больших задержках появляется возможность обнаружения сколь угодно слабого гармонического сигнала на фоне шума (рис. 3.12).

Аналогично (2) — (4), для корреляционного приема можно ввести и формулы, описывающие выигрыш в величине отношения сигнал/шум.

Записывая корреляционную функцию шума в виде $B_\eta(\tau) = \sigma^2 r(\tau) \cos \omega_0 \tau$ (шум с симметричным спектром, расположенным вблизи частоты ω_0), имеем

$$(с/ш)_{\text{вх}} = \frac{a^2}{2\sigma^2}, \quad (с/ш)_{\text{вых}} = \frac{\langle SS_\tau \rangle}{\langle \xi \xi_\tau \rangle} = (с/ш)_{\text{вх}} \frac{1}{r(\tau)}. \quad (3.5.44)$$

Согласно (44) $(с/ш)_{\text{вых}} \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Этот результат, разумеется, совершенно аналогичен следующему из (12) выводу об обращении отношения $(с/ш)_{\text{вых}}$ в бесконечность при $\Delta\omega_\Phi \rightarrow 0$.

Таким образом, с принципиальной точки зрения методы обнаружения гармонического сигнала на фоне шума с помощью узкополосного фильтра или коррелятора совершенно эквивалентны; выигрыш в отношении сигнал/шум получается за счет увеличения времени измерения; напомним, что постоянная времени фильтра $T_\Phi \sim 1/\Delta\omega_\Phi$.

Практически же создание коррелятора с большими временами задержки часто оказывается более простым делом, нежели создание очень узкополосного фильтра. Корреляционным приемником можно заменить, разумеется, и оптимальный (согласованный) фильтр, предназначенный для оптимального обнаружения импульсного немонахроматического сигнала.

Решение задачи обнаружения сигнала на фоне шума на «временном» языке фактически содержится в конце § 2 гл. 1 (см. формулу (1.2.60) и рис. 1.3). Переходя в формуле (1.2.60) от суммы к интегралу, заключаем, что вынести решение о наличии или отсутствии сигнала можно, сравнивая значение величины

$$\sum x_i S_i \rightarrow \int_0^T x(\theta) S(\theta) d\theta = B_{xS}(T) \quad (3.5.45)$$

с некоторым порогом.

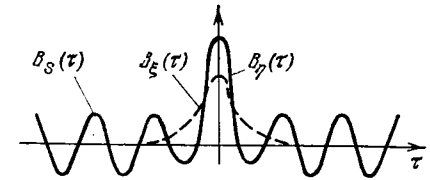


Рис. 3.12. Корреляционные функции гармонического сигнала $B_S(\tau)$, суперпозиции сигнала и шума $B_\eta(\tau)$ и шума $B_\xi(\tau)$.

Величина $B_{xS}(T)$ представляет собой функцию взаимной корреляции сигнала и суммы сигнал+шум. При $t=T$ с B_{xS} совпадает интеграл Дюамеля (3.1.18) вида

$$y(t) = \int_0^t h(t-\theta) x(\theta) d\theta, \quad (3.5.46)$$

описывающий выход фильтра с функцией Грина, равной

$$h(\theta) = S(T-\theta). \quad (3.5.47)$$

Действительно, поскольку

$$h(t-\theta) = S(T-t+\theta),$$

то

$$y(t) = \int_0^t S(T-t+\theta) x(\theta) d\theta$$

и $y(T) = B_{xS}$. Функции Грина (47) соответствует коэффициент передачи фильтра

$$K(\omega) = 2\pi s^*(\omega) e^{-i\omega T}, \quad (3.5.48)$$

где

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} d\omega = s^*(-\omega).$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой (48) в (3.1.23):

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(\omega) e^{i\omega(\theta-T)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(-\omega) e^{-i\omega(\theta-T)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega(T-\theta)} d\omega = S(T-\theta). \end{aligned}$$

Выражение (48) совпадает с частотной характеристикой оптимального (согласованного) фильтра (22), если в (22) положить $\alpha = 2\pi$ и $t_0 = T$. Можно сказать, что корреляционный приемник (см. рис. 1.3), построенный по критерию минимума вероятности ошибки, представляет собой согласованный с сигналом фильтр (22), дополненный порогом обнаружения U_0 . Наличие порога позволяет однозначно выносить решение о наличии или отсутствии сигнала.

Таким образом, в рассмотренных задачах обнаружения и выделения слабых сигналов на фоне шумов методы, основанные на фильтрации по спектру, и корреляционные методы эквивалентны.

Следует иметь в виду вместе с тем, что мы рассмотрели здесь лишь простейшие постановки вопроса в статистической теории обнаружения и выделения сигналов на фоне шумов. Читателя, желающего более детально ознакомиться с вопросом, мы отсылаем к руководствам [3—5, 12—15].

СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

§ 1. Введение. Корреляционные функции и спектры

В протяженной среде случайные источники возбуждают волны, амплитуды, частоты, фазы и волновые векторы которых случайны, — случайные волны. Случайные волны возникают и в результате рассеяния регулярных волн в средах с хаотически изменяющимися параметрами.

Каковы свойства случайных волн*), каковы закономерности их распространения, интерференции, дифракции? Эти вопросы важны для радиофизики и в особенности для оптики. Поэтому в настоящей главе большое внимание уделено рассмотрению оптических интерференционных и дифракционных задач, много специальной оптической терминологии. Так, пространственные и временные корреляции случайных волн описываются в терминах давно сложившихся в оптике понятий пространственной и временной когерентности, степени когерентности. В терминах оптики предметом настоящей главы в значительной мере является «линейная оптика частично когерентных волн». Вместе с тем ниже рассматриваются и проблемы, выходящие за пределы традиционной статистической оптики.

Широкий класс статистических задач возникает, в частности, в рентгеновской оптике; используемые в настоящее время источники рентгеновского излучения являются, по существу, источниками широкополосного «рентгеновского шума».

Ниже проанализирована одна из основных для рассматриваемого круга задач — задача о дифракции частично когерентной волны на идеальной трехмерной решетке.

Ряд задач, обсуждаемых в этой главе, можно рассматривать как аналоги задач, изложенных в гл. 3. Поэтому большое место, как и в гл. 3, занимает корреляционно-спектральная теория, однако здесь это корреляционно-спектральная теория случайных полей. Вместе с тем задачи о случайных волнах в распределенных линейных средах оказываются гораздо более сложными, нежели задачи о шумовых колебаниях в линейных системах с сосредоточенными параметрами.

*) В тех случаях, когда существенна лишь временная статистика волны, мы будем называть такие волны также шумовыми волнами.

Поэтому, если в гл. 3 приближенные методы, основанные на упрощении исходных уравнений (на использовании так называемых укороченных уравнений, см. § 2 гл. 3), вводились нами скорее из педагогических соображений, то в настоящей главе практически все основные результаты базируются на результатах анализа укороченных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд распространяющихся волн. Следует подчеркнуть, что переход к укороченным уравнениям связан не только с чисто вычислительными преимуществами, но имеет и несомненную эвристическую ценность. Оказывается, что ряд на первый взгляд принципиально различных нестационарных задач теории систем с сосредоточенными параметрами и задач о распространении волн описывается, по существу, одними и теми же укороченными уравнениями для комплексных амплитуд; переход от «временной» задачи к «пространственной» связан лишь с заменой независимой переменной. Последнее позволяет установить пространственно-временные аналогии в теории колебательных и волновых систем (см. также гл. 7 и 8).

Интересные пространственно-временные аналогии удается установить и в самой физике волновых явлений; здесь речь идет об аналогии явлений, наблюдающихся в поле волн, модулированных только во времени, с одной стороны, и только в пространстве, с другой (см. § 3 и гл. 8). Общность этих задач, на первый взгляд сильно различающихся, обнаруживается на этапе исследования укороченных уравнений.

Мы не занимаемся в этой главе анализом свойств случайных источников, возбуждающих стохастические волновые процессы; данные на этот счет содержатся в гл. 2 и 7. В оптике источниками гауссовского шума являются, по существу, все нелазерные источники света; часто такие источники оказываются хорошей моделью и для описания излучения многомодовых лазеров с несинхронизованными модами (см. § 10 гл. 2).

Источник широкополосного гауссовского шума представляет собой, разумеется, и нагретое тело. Следует, однако, иметь в виду, что тепловое излучение нагретых тел имеет ту же природу, что и тепловой шум сопротивлений, рассмотренный в § 4 гл. 3. Тепловое излучение представляет собой электромагнитное поле, создаваемое теми же флуктуациями зарядов и токов, которые ответственны за возникновение теплового найквистовского шума. Поэтому тепловое излучение можно рассматривать и как принципиально неустранимый внутренний шум линейных сред, так же как тепловой шум сопротивлений в гл. 3 рассматривался в качестве внутреннего шума систем с сосредоточенными параметрами.

Именно под таким углом зрения включен в эту главу материал, посвященный тепловому излучению.

Основное внимание в этой главе мы уделим случайным полям специального вида — так называемым квазиплоским, квазигармоническим случайным волнам вида

$$\mathbf{E} = eA(x, y, z, t) \exp i(\omega_0 t - k_0 z), \quad (4.1.1)$$

где $A(x, y, z, t)$ — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в масштабах среднего периода колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ и средней длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$; e — единичный вектор поляризации волны (об описании комплексных случайных функций см. §§ 1, 5 гл. 1). Поскольку для волн в линейных средах, точно так же как и для колебаний в линейных системах с сосредоточенными параметрами (см. гл. 3), справедлив принцип суперпозиции, основным аппаратом этой главы будет корреляционно-спектральная теория. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением полей с пространственно-временной корреляционной функцией

$$B(\mathbf{r}_1, z_1, t_1; \mathbf{r}_2, z_2, t_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, z_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, z_2, t_2) \rangle, \quad (4.1.2)$$

(вектор \mathbf{r} расположен в плоскости xy), которая распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций:

$$B = B(\mathbf{r}_1, z_1; \mathbf{r}_2, z_2) B(t_1, t_2; z_1, z_2)$$

(см. также формулу (1.8.9)).

Для полей с такими когерентными свойствами во многих случаях эффекты временной и пространственной когерентности можно рассматривать по отдельности. Дело в том, что пространственные масштабы, на которых проявляются эффекты временной и пространственной модуляции, сильно различаются. Поэтому далее мы пользуемся моделью плоской шумовой волны и моделью монохроматического частично когерентного волнового пучка (имеется в виду пучок со случайной поперечной структурой, изменение поля во времени полагается гармоническим).

Для описания временной статистики рассматриваемых волн мы будем пользоваться моделями случайных процессов, разобранными в гл. 2. При описании пространственной статистики квазиплоских случайных волн будем рассматривать пространственные корреляционные функции

$$B(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{r}_2, z_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, z_1, t) E^*(\mathbf{r}_2, z_2, t) \rangle. \quad (4.1.2a)$$

В (2a) можно выделить корреляционные функции двух типов (см. § 8 гл. 1). Прежде всего это поперечная пространственная корреляционная функция (именно с этой функцией для волн типа (1) связывается ниже понятие *пространственной когерентности*)

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = B_{\perp}(x_1, x_2, y_1, y_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle, \quad (4.1.3)$$

которая для статистически однородного случайного поля имеет вид

$$B_{\perp} = B_{\perp}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{s}; z) = B_{\perp}(s_x, s_y; z) \quad (4.1.4a)$$

и для изотропного поля

$$B_{\perp} = B_{\perp}(s; z). \quad (4.1.4b)$$

Для квазиплоской случайной волны (1) весьма наглядный смысл имеет и определяемая с помощью (4a), (4б), зависящая, вообще говоря, от координаты z угловая спектральная плотность, или просто угловой спектр:

$$G(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(s_x, s_y, z) e^{i(k_x s_x + k_y s_y)} ds_x ds_y. \quad (4.1.5)$$

Мы будем называть квазиплоской случайную волну, для которой ширина углового спектра мала:

$$\Delta k_x/k_0 \ll 1, \quad \Delta k_y/k_0 \ll 1.$$

Таким образом, волновое поле (1) можно представлять как случайную суперпозицию плоских волн, волновые векторы которых расположены вблизи оси z и составляют с ней малые углы:

$$\theta_x = k_x/k_0 \ll 1, \quad \theta_y = k_y/k_0 \ll 1.$$

Поэтому далее мы будем обычно иметь дело с двумя спектральными распределениями одновременно: с угловым спектром $G(k)$ и частотным спектром $G(\omega)$.

Заметим, что если для временной статистики рассматриваемых в этой главе процессов в большинстве случаев хорошо применима модель стационарного процесса, то в подавляющем большинстве практически интересных задач случайное поле волн в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, оказывается существенно неоднородным. При этом неоднородность поля волны, как правило, связана с ее пространственной ограниченностью.

В ряде волновых задач, и в частности в задачах о случайных волнах в нелинейных средах (см. гл. 8), наряду с поперечными корреляциями мы будем интересоваться также и продольными корреляциями в случайных волнах:

$$B_{\parallel}(z, z+s) = \langle A(x, y, z) A^*(x, y, z+s) \rangle. \quad (4.1.6)$$

Несколько слов о плане предлагаемой главы.

Если говорить об общей классификации проблем, связанных с распространением случайных волн в линейных средах, то здесь можно выделить прежде всего задачи о преобразовании пространственно-временных корреляционных функций (и, соответственно, частотно-угловых спектров) случайных волн в процессе

распространения. К изменению временных корреляционных функций приводит зависящее от частоты поглощение (в этом смысле диспергирующая среда аналогична селективному фильтру, рассмотренному в гл. 3); причиной трансформации пространственных корреляций оказывается дифракция.

В задачах об интерференции и дифракции случайных волн две постановки вопроса представляют особый интерес для статистической радиофизики и оптики. С одной стороны, необходимы ясные представления о том, как изменяется характер интерференционных и дифракционных явлений, когда вместо регулярной волны мы имеем дело со случайными волнами. Этот аспект детально прослеживается в настоящей главе.

С другой стороны, ряд интерференционных и дифракционных схем можно использовать для спектроскопии излучения; временные и пространственные корреляционные функции, определяемые из интерференционных и дифракционных опытов, позволяют с помощью преобразования Фурье рассчитать частотный и угловой спектры волны. Такой метод получил название фурье-спектроскопии; он широко используется при исследовании частотных спектров в оптике. Перечисленным вопросам посвящены §§ 2, 4—6.

Специальный § 3 посвящен изложению метода медленно меняющихся амплитуд в волновых задачах*).

В §§ 7, 8 речь идет о проблемах иного типа — о рассеянии регулярных волн в средах с хаотически изменяющимися параметрами. Это большая и быстро развивающаяся область статистической радиофизики и оптики. Мы же ограничимся здесь лишь рассмотрением некоторых простейших задач.

Наконец, в § 9 кратко рассмотрены основные характеристики теплового электромагнитного излучения.

§ 2. Пространственная и временная когерентность. Методы измерения. Фурье-спектроскопия

Чтобы сделать дальнейшее изложение более наглядным, мы рассмотрим кратко оптические методы экспериментального определения пространственных и временных корреляционных функ-

* В некоторых задачах о распространении волн в линейных средах возможен подход, полностью эквивалентный «частотному» описанию, использованному в гл. 3. В этом случае, аналогично тому, как это делается в гл. 3, можно ввести комплексный коэффициент передачи для преобразования угловых спектров $K(k_x, k_y)$. Тогда угловые спектры полей на входе и выходе среды будут связаны соотношением $G(k_x, k_y) = K(k_x, k_y)^2 G_0(k_x, k_y)$. Изложение этого метода, обсуждение пределов его применимости можно найти, например, в монографии [49], где методом передаточных функций решен ряд задач о случайных волнах в свободном пространстве, о прохождении волн через случайные экраны и т. п. Мы же в этой главе основное внимание уделим статистически неоднородным процессам — волновым пучкам со случайной поперечной структурой.

ций, или, в терминах оптики, методы измерения пространственной и временной когерентности световых полей. Исторически понятие когерентности возникло в оптике в связи с интерпретацией результатов интерференционных опытов. Классические интерференционные опыты Юнга и Майкельсона оказываются прямыми методами измерения пространственных и временных корреляционных функций; распределение средней интенсивности в интерференционной картине непосредственно дает корреляционную функцию поля*). Одновременно эти опыты можно рассматривать как схемы, поясняющие физический смысл пространственных и временных корреляционных функций. Обратимся к их рассмотрению.

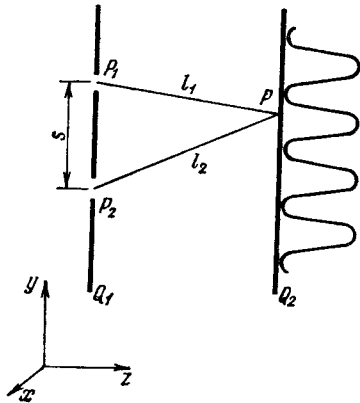


Рис. 4.1. Схема интерферометра Юнга.

Измерение пространственной когерентности; поперечные корреляционные функции; интерферометр Юнга. Интерферометр Юнга представляет собой непрозрачный экран, в котором на некотором расстоянии s друг от друга вырезаны два отверстия P_1 и P_2 с диаметрами, гораздо меньшими радиуса корреляции r_k светового поля (рис. 4.1).

Пусть на такой экран перпендикулярно падает случайная линейно поляризованная волна, поле которой $E(r, t)$ будем считать стационарным и однородным. Волновые пучки, исходящие из отверстий P_1 и P_2 , интерферируют на экране Q_2 , расположенном на некотором расстоянии от экрана Q_1 .

Обозначим комплексное поле в точке P_j через $E(P_j, t)$, а расстояние между точкой P_j и произвольной точкой P экрана Q_2 через $l_j = P_j P$. Суммарное электрическое поле в точке P от двух отверстий равно

$$E(P, t) = K_1 E(P_1, t - t_1) + K_2 E(P_2, t - t_2), \quad (4.2.1)$$

где $t_j = l_j/c$ — время запаздывания (дисперсией среды пренебрегаем). Коэффициенты передачи K_1 и K_2 являются комплексными величинами, их абсолютные значения зависят от формы и размеров отверстий (см. § 5).

* Методы измерения корреляционных функций поля называют также амплитудной интерферометрией. Разумеется, рассматриваемые ниже интерференционные схемы могут быть положены также в основу измерения высших корреляционных функций. Методы исследования когерентности, основанные на измерении корреляционных функций интенсивности, называют интерферометрией интенсивностей (см. гл. 5).

Для средней интенсивности в точке P получаем

$$I(P) = \langle |E(P, t)|^2 \rangle = K_1 K_1^* I_1 + K_2 K_2^* I_2 + K_1 K_2^* \langle E(P_1, t - t_1) E^*(P_2, t - t_2) \rangle + K_1^* K_2 \langle E^*(P_1, t - t_1) E(P_2, t - t_2) \rangle,$$

или

$$I(P) = |K_1|^2 I_1 + |K_2|^2 I_2 + 2 |K_1 K_2| \operatorname{Re} B(s, \tau). \quad (4.2.2)$$

Здесь $B(s, \tau)$ — пространственно-временная корреляционная функция (1.8.1):

$$B(s, \tau) = \langle E(P_1, t - t_1) E^*(P_2, t - t_2) \rangle, \quad (4.2.3)$$

$t_2 - t_1 = \tau$, s — расстояние между точками P_1 и P_2 на экране Q_1 ; при этом учтена статистическая стационарность и однородность поля.

Если открыто лишь одно из отверстий в экране Q_1 , то в точке P интенсивность, очевидно, равна

$$I_1 = I_1(P) = |K_1|^2 I_1 \quad \text{либо} \quad I_2 = I_2(P) = |K_2|^2 I_2.$$

Пользуясь этими обозначениями, выражение (2) можно переписать в виде

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma(s, \tau), \quad (4.2.4)$$

$$\gamma(s, \tau) = B(s, \tau) / (I_1 I_2)^{1/2},$$

где $\gamma(s, \tau)$ — комплексная степень когерентности (1.8.38).

Для электромагнитного поля вида (4.1.1) корреляционная функция (3) равна

$$B(s, \tau) = \langle A(r, t) A^*(r + s, t + \tau) \rangle \exp i(-\omega_0 \tau) = B_{\perp}(s, \tau) e^{-i\omega_0 \tau}.$$

Следовательно,

$$\gamma(s, \tau) = |\gamma(s, \tau)| \exp i[\alpha(s, \tau) - \omega_0 \tau], \quad (4.2.5)$$

где

$$\alpha(s, \tau) = \arg B_{\perp}(s, \tau).$$

Таким образом, выражение (4) принимает вид

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} |\gamma(s, \tau)| \cos[\alpha(s, \tau) - \delta]. \quad (4.2.6)$$

Параметры τ и δ равны

$$\tau = \frac{l_2 - l_1}{c}, \quad \delta = \omega_0 \tau = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1),$$

λ_0 — средняя длина волны. При $\tau \ll \tau_k$ зависимость от τ в (6) входит только через δ , так что максимальные и минимальные

значения интенсивности на экране Q_2 (рис. 4.2) определяются выражением

$$I_{\min}^{\max} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(s)|. \quad (4.2.7)$$

Контраст интерференционной картины, следуя Майкельсону, обычно характеризуют величиной

$$v = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.2.8)$$

которую называют видностью. В соответствии с (7) для видности в окрестности точки P имеем

$$v(P) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma(s)| = 2 \left\{ \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^{1/2} \right\}^{-1} |\gamma(s)|. \quad (4.2.9)$$

Если интенсивности интерферирующих пучков одинаковы ($I_1 = I_2$), то значение (9) максимально и

$$v = |\gamma(s)| = \frac{|B_{\perp}(s)|}{\sqrt{I_1 I_2}}, \quad (4.2.10)$$

т. е. видность интерференционной картины просто равна степени пространственной когерентности. В общем случае видность (8) дает

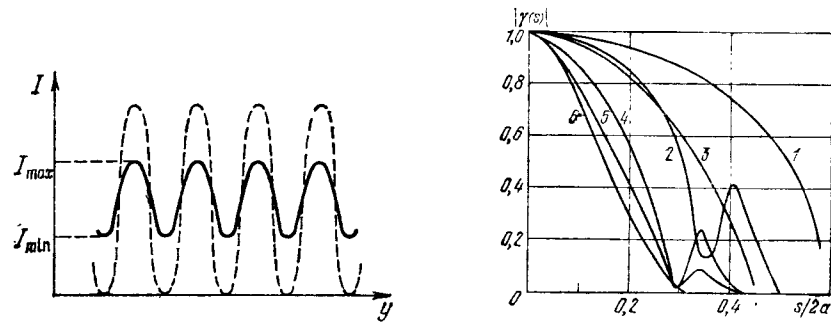


Рис. 4.2. Распределение интенсивности в интерференционной картине для различных видностей ($v \sim \delta \sim \tau$).

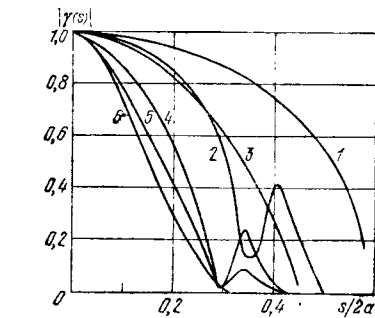


Рис. 4.3. Пространственные корреляционные функции излучения лазеров, измеренные с помощью интерферометра Юнга [38].

Кривые 1—6 относятся к разным лазерам (s — расстояние между отверстиями интерферометра, $2a$ — диаметр лазерного пучка).

информацию о степени пространственно-временной когерентности. Если время задержки $\tau \sim \tau_k$, то максимумы на рис. 4.2 будут иметь различную величину, т. е. видность будет зависеть от τ :

$$v = v(\tau) = |\gamma(s, \tau)|. \quad (4.2.11)$$

Таким образом, если временная задержка меньше времени корреляции ($\tau \ll \tau_k$), то интерферометр Юнга позволяет определить поперечную корреляционную функцию (4.1.3). Примеры поперечных функций для лазерного поля, измеренных с помощью интерферометра Юнга, приведены на рис. 4.3.

Если мы хотим измерить не искаженную пространственной статистикой временную корреляционную функцию поля, следует обратиться к другой интерференционной схеме — интерферометру Майкельсона.

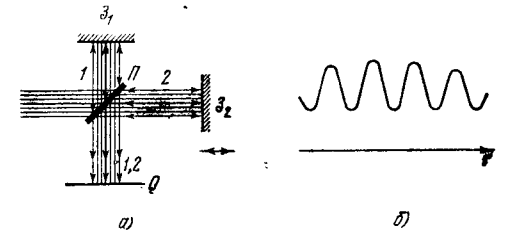


Рис. 4.4. Схема интерферометра Майкельсона (а) и изменение интерференционного сигнала на экране Q (б).

Измерение временной когерентности; интерферометр Майкельсона. Понятие временной когерентности прямо связано с интерференционным экспериментом, схема которого изображена на рис. 4.4.

Волна падает на наклонную полупрозрачную пластинку Π интерферометра Майкельсона, формирующую два пучка. Эти пучки отражаются от зеркал Z_1 и Z_2 . Затем один из них, пройдя через пластинку Π , а другой, отразившись от нее, поступают на экран Q , где интерферируют. В плоскости экрана расположен детектор, измеряющий интенсивность (например, фотодетектор, величина тока которого пропорциональна средней интенсивности).

Если напряженности электрических полей пучков E_1 и E_2 , то поле на экране Q равно

$$E(r, t) = E_1(r, t - t_1) + E_2(r, t - t_2), \quad (4.2.12)$$

где $t_j = 2l_j/c$, l_j — расстояние от зеркала Z_j до пластинки Π . Выражение (12) аналогично (1). Поэтому расчеты, подобные выполненным выше, приводят к выражению для средней интенсивности

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \cos[\alpha(\tau) - \omega_0 \tau], \quad (4.2.13)$$

которое сходно с (6) ($\tau = t_2 - t_1$).

Таким образом, изменяя временную задержку в схеме интерферометра Майкельсона от $\tau = 0$ до $\tau \rightarrow \infty$, из графика распределения средней интенсивности в интерференционной картине (интерферограмме) можно непосредственно определить временную корреляционную функцию светового поля.

Как и для интерферометра Юнга, для интерферометра Майкельсона можно ввести понятие видности интерференционной картины. В данном случае им удобно пользоваться, если волна квазимонохроматическая, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$; для такой волны, используя (8), для видности интерференционной картины в интерферо-

метре Майкельсона вблизи заданного значения τ при $I_1 = I_2$ имеем

$$v = |\gamma(\tau)|. \quad (4.2.14)$$

На рис. 4.5 показаны временные корреляционные функции лазерного излучения, измеренные интерферометром Майкельсона.

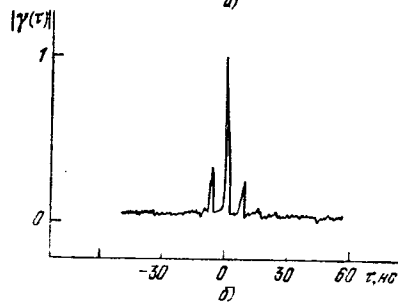
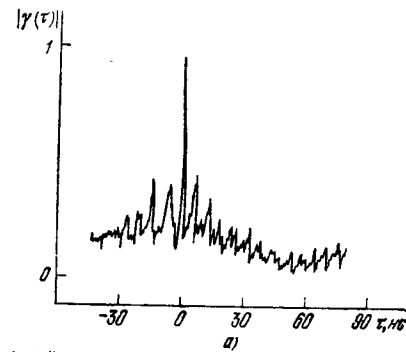


Рис. 4.5. Временные корреляционные функции излучения инжекционного лазера для различных токов накачки [37]:

а) $i = 1,16i_{\text{пор}}$; б) $i = 1,4i_{\text{пор}}$ ($i_{\text{пор}}$ — пороговый ток).

большой светосилой, чем схема Юнга.

Рассмотрим еще один — сравнительно новый — тип интерферометра, который используется для измерения поперечных корреляционных функций и базируется на методе деления амплитуды.

Поляризационный интерферометр. Поляризационный интерферометр (рис. 4.6) обладает высоким пространственным разрешением и пригоден для регистрации малых изменений степени пространственной когерентности $|\gamma(s)|$ (см. [39]). Предельное разрешение (минимальный измеряемый радиус корреляции) поляризационного интерферометра обусловлено дифракцией и может достигать порядка 10 мкм. Заметим, что в схеме Юнга разрешающая способность ограничена размерами отверстий.

Схемы интерферометров; деление амплитуды и деление волнового фронта. Кроме интерферометров Юнга и Майкельсона существует большое число и других схем, используемых для измерения временной и пространственной когерентности оптических полей. Все многообразие интерферометров базируется на двух методах [1]: методе деления амплитуды и методе деления волнового фронта. В методе деления амплитуды исходный пучок делится на частично отражающих или частично пропускающих оптических элементах. В методе деления волнового фронта пучок, проходя через отверстия, делится на несколько пучков.

Согласно такой классификации интерферометр Юнга — это интерферометр с делением фронта, интерферометр Майкельсона — интерферометр с делением амплитуды. Очевидно, интерферометр Майкельсона обладает

Для того чтобы измерить поперечную пространственную корреляционную функцию светового пучка, надо получить интерференционную картину от различных участков его поперечного сечения. В поляризационном интерферометре для этого используется расщепление исследуемого пучка в двулучепреломляющей пластине на два сдвинутых относительно друг друга параллельных пучка; величину сдвига можно плавно менять, что позволяет измерить значения поперечной корреляционной функции при различных значениях разности координат в поперечном сечении.

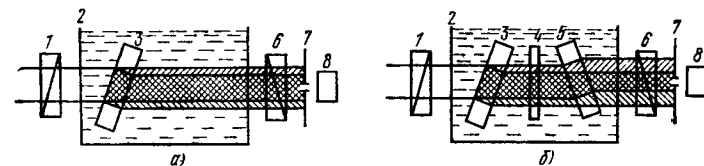


Рис. 4.6. Схемы поляризационных интерферометров [39]:

1 — поляризатор, 2 — четвертьволновая пластинка, 3 и 5 — двулучепреломляющие пластины, 4 — четвертьволновая пластинка, 6 — анализатор, 7 — диафрагма, 8 — фоторегистрирующее устройство. При измерении пространственной корреляционной функции интенсивности вместо анализатора ставится нелинейный кристалл, в котором происходит удвоение частоты света.

В описываемом интерферометре исследуемый световой пучок, пройдя через поляризатор, попадает на плоскопараллельную двулучепреломляющую пластину. Оптическая ось пластины, вокруг которой она поворачивается, ориентирована перпендикулярно плоскости чертежа и образует некоторый угол θ ($\approx 45^\circ$) с направлением поляризации падающего пучка. В пластине исходный пучок делится на два пучка с взаимно перпендикулярными поляризациями — обыкновенный (o) и необыкновенный (e). На выходе пластины электрическое поле равно

$$E(r, t, z) = E_o(r, t, z) + E_e(r+s, t-\tau, z), \quad (4.2.15)$$

где $E_{o,e}(r, t, z)$ — поле соответствующего пучка, причем ось z совпадает с направлением распространения исходного пучка.

Относительное смещение s образующихся пучков и приобретаемая временная задержка τ зависят от толщины пластины, показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн (n_o и n_e) и угла падения пучка на пластину. Пластина помещается в иммерсионную жидкость с показателем преломления n_i , равным, например, n_e . Испытав различные смещения в пластине, пучки проходят через анализатор, скрещенный с поляризатором.

На выходе анализатора оба пучка поляризованы одинаково и могут интерферировать; суммарное электрическое поле имеет вид

$$E'(r, t, z) = q[E(r, t, z) + E(r+s, t-\tau, z)]. \quad (4.2.16)$$

Здесь $E(r, t, z)$ — поле исходного пучка, коэффициент $q = 0,5 \sin 2\theta$ учитывает изменение амплитуды пучков при прохождении через анализатор.

Выражение (16) аналогично по структуре выражениям (1) и (12). Следовательно, в области перекрытия пучков регистрируемая средняя интенсивность

$\langle I'(\mathbf{r}, t, z) \rangle = \langle E'(\mathbf{r}, t, z) \rangle^2$ содержит сведения о пространственно-временной корреляционной функции случайного поля

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{s}, \tau; z) = \langle E(\mathbf{r}, t, z) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t - \tau, z) \rangle. \quad (4.2.17a)$$

Временную задержку τ можно полностью компенсировать, используя четвертьволновую пластину, поворачивающую поляризацию на угол $\pi/2$, и пластину 5, аналогичную пластине 3, но вращающаяся в противоположном направлении (рис. 4.6, б). Тип поляризации волны во второй пластине меняется, и относительное смещение s претерпевает уже другой пучок. При помощи

такой схемы можно измерить пространственную корреляционную функцию вида

$$B_{\perp}(\mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{r} - \mathbf{s}, 0; z) = \langle E(\mathbf{r} - \mathbf{s}, t, z) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z) \rangle, \quad (4.2.17b)$$

т. е. исследовать пространственную когерентность пучков с широким частотным спектром.

Следует еще отметить, что подстройку на максимум и минимум интерференции (величины I') можно производить небольшим поворотом пластины 3. При расположении фоторегистрирующего устройства в точке $r=0$ согласно (17a) и (17b) измеряются степени пространственной когерентности следующего вида:

$$|\gamma(0, s, 0; z)|, \quad \gamma(s, -s, 0; z). \quad (4.2.18a, б)$$

Вращение двулучепреломляющих пластин позволяет легко измерить функции (18) в зависимости от s . Следует заметить, что в

схеме Юнга для этих целей необходимо иметь набор экранов с отверстиями. На рис. 4.7 показаны пространственные корреляционные функции квазистеплового источника, измеренные с помощью поляризационного интерферометра.

Фурье-спектроскопия. Поскольку вид интерференционной картины, как показано выше, полностью определяется корреляционной функцией поля, в силу теоремы Винера — Хинчина, пользуясь интерферограммой, можно найти спектральную плотность излучения. Такую методику называют фурье-спектроскопией [56].

Покажем это для общего случая. Возьмем преобразование Фурье от интерферограммы (13), которое, однако, запишем в виде (4), пригодном для излучения с произвольным спектром. Тогда имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = (I_1 + I_2) \delta(\omega) + G(\omega).$$

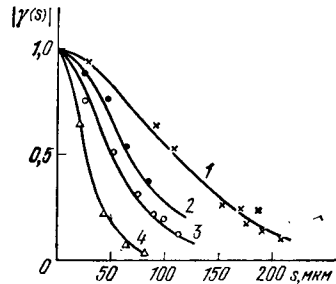


Рис. 4.7. Нормированная пространственная корреляционная функция квазистеплового источника [39].

Кривые соответствуют разным угловым размерам θ_0 источника: 1) $3,6 \cdot 10^{-3}$; 2) $4,4 \cdot 10^{-3}$; 3) $5,2 \cdot 10^{-3}$; 4) $9,8 \cdot 10^{-3}$. Квазистепловой источник представляет собой когерентное излучение, рассеянное вращающимся матовым диском (см. § 8).

Сведения о спектре излучения содержатся во втором слагаемом,

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} (I_1 I_2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.2.19)$$

где $R(\tau) = \frac{1}{2} [\gamma(\tau) + \gamma^*(\tau)]$ — нормированная временная корреляционная функция действительного поля, равного $\frac{1}{2}(E + E^*)$. В случае четной функции $R(\tau)$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} (I_1 I_2)^{1/2} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Для измерения $R(\tau)$ можно использовать, например, интерферометр Майкельсона. Таким образом, фурье-спектрометр состоит

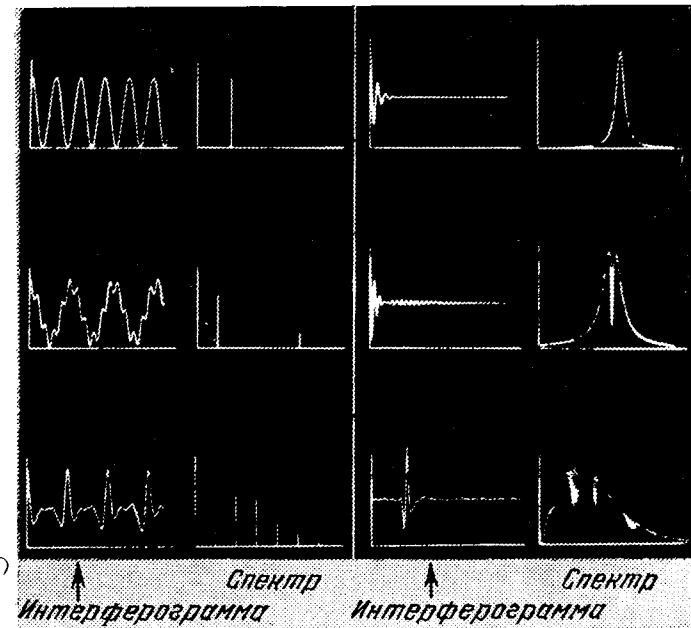


Рис. 4.8. Интерферограммы и соответствующие им спектры.

из интерферометра с изменяемой временной задержкой τ и устройства, вычисляющего интеграл (19). Примеры интерферограмм и соответствующие им спектры изображены на рис. 4.8.

В реальном эксперименте частотный спектр $G(\omega)$ (19) может быть восстановлен, разумеется, лишь с определенной точностью.

Последнее связано с тем, что в реальном интерферометре максимальное время задержки τ ограничено. Поэтому измеряемый спектр $G_{\text{изм}}(\omega) \neq G(\omega)$.

Предположим, что корреляционная функция $R(\tau)$ измеряется на конечном временном интервале $(-T, T)$. Следовательно, в этом случае выражение (19) нужно записать как

$$G_{\text{изм}}(\omega) = \frac{(I_1 I_2)^{1/2}}{2\pi} \int_{-T}^T R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Эту формулу можно представить в виде

$$G_{\text{изм}}(\omega) = \frac{(I_1 I_2)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.2.20)$$

где $\Pi(\tau)$ — прямоугольная функция:

$$\Pi(\tau) = \begin{cases} 1, & -T \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T. \end{cases}$$

Подставляя в (20) фурье-преобразование, обратное (19), получаем

$$G_{\text{изм}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega - \Omega) G(\Omega) d\Omega, \quad (4.2.21)$$

где $M(\omega)$ — аппаратная функция:

$$M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{T}{\pi} \frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

Функция $M(\omega - \omega_0)$ представляет собой отклик измерительной системы на монохроматическую волну ($G(\Omega) = \delta(\omega_0 - \Omega)$). Если исходить из критерия разрешения Рэлея (две линии ω_1 и ω_2 разрешены, когда максимум спектра одной приходится на нулевое значение другой), то согласно (21) можно разрешить линии, разделенные частотным интервалом

$$\Delta\omega = \pi/T \quad \text{или} \quad \Delta f = 1/2T. \quad (4.2.22)$$

Практически можно реализовать $T = 2(l_2 - l_1)/c \approx 10^{-8}$ с и, следовательно, иметь разрешение по частоте $\Delta f \approx 10^8$ Гц. Разрешающая способность фурье-спектрометра равна

$$\lambda/\Delta\lambda = 2cT/\lambda = 4(l_2 - l_1)/\lambda, \quad (4.2.23)$$

т. е. пропорциональна максимальной разности хода. В видимом диапазоне $\lambda/\Delta\lambda \approx 10^7$.

Поперечная корреляционная функция и угловой спектр частично когерентного ограниченного светового пучка. Точно так же, как результаты измерения временных корреляционных функций

используются в фурье-спектроскопии для определения частотных спектров, данные о пространственных корреляциях могут быть, вообще говоря, использованы для определения угловых спектров, т. е. угловой расходимости волны. Следует, однако, отметить, что здесь ситуация оказывается более сложной. Дело в том, что, если модель стационарного случайного процесса хорошо описывает излучение многих источников света, случайные поля реальных световых пучков часто существенно отличаются от модели однородного случайного поля — пространственного аналога стационарного процесса. Угловые спектры реальных световых пучков определяются не только радиусом поперечной корреляции, но и геометрическими параметрами пучка, в частности распределением средней интенсивности в его поперечном сечении. Этот вопрос имеет большое значение для лазерной оптики; остановимся на нем подробнее. Итак, рассмотрим угловой спектр, соответствующий поперечной корреляционной функции неоднородного случайного поля.

Для фиксированной продольной координаты z поперечная корреляционная функция поля (1.8.28)

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z, t) A^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle, \quad (4.2.24)$$

или, в координатах $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$,

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = B(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z). \quad (4.2.25)$$

Фурье-спектр комплексной амплитуды $A(\mathbf{r}, z)$ монохроматического поля равен

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{x}}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{r}, z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} d^2r \quad (\kappa_x \equiv k_x, \kappa_y \equiv k_y). \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Следовательно, угловой спектр статистически неоднородного случайного поля определяется выражением

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, z) &= \langle |A_{\mathbf{x}}(z)|^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle e^{i\mathbf{x}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} d^2r_1 d^2r_2. \end{aligned}$$

Учитывая (24) и (25), имеем

$$G(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} d^2r d^2R. \quad (4.2.27)$$

Спектр (27) можно интерпретировать как спектр статистически однородного поля (1.8.19) с корреляционной функцией

$$B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) d^2R, \quad (4.2.28a)$$

$$G(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} d^2r. \quad (4.2.28б)$$

Заметим, что для поперечной корреляционной функции, не зависящей от R , выражение (28a) дает бесконечное значение, что связано в этом случае с однородностью поля (см. (1.8.5)).

Если рассматриваемое поле статистически изотропно, то для него можно воспользоваться соотношениями (1.8.25) для безграничной случайной волны. В частности,

$$G(\mathbf{x}, z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} s J_0(\mathbf{x}s) B_{\perp}^{\text{одн}}(s; z) ds. \quad (4.2.29)$$

Для поля с узким угловым спектром $\mathbf{x} = k_0 \sin \theta \approx k_0 \theta$ (θ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{k}_0), и, следовательно, угловой спектр поля

$$G(k_0 \theta, z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} s J_0(k_0 s \theta) B_{\perp}^{\text{одн}}(s; z) ds. \quad (4.2.30)$$

Преобразование, обратное (30), дается выражением (1.8.24).

В заключение рассмотрим, как изменяется угловой спектр пучка с изменением радиуса корреляции r_k при постоянном радиусе пучка a . В качестве примера возьмем пучок с корреляционной функцией вида

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z) = I_0 \exp \left\{ -\frac{r_2^2 + r_1^2}{a^2} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_k^2} \right\}, \quad (4.2.31a)$$

или, в координатах \mathbf{r}, \mathbf{R} ,

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = I_0 \exp \left\{ -\frac{2R^2}{a^2} - \frac{r^2}{r_{\Phi\Phi}^2} \right\}, \quad (4.2.31б)$$

где

$$r_{\Phi\Phi}^2 = r_k^2 + a^2/2. \quad (4.2.32)$$

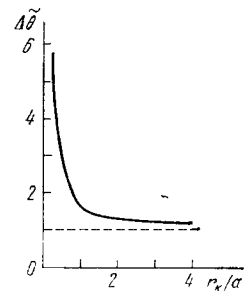


Рис. 4.9. Приведенная полуширина углового спектра $\Delta\tilde{\theta} = \Delta\theta/\Delta\theta_1$ ($\Delta\theta_1 = 2/ka$) частично когерентного светового пучка в зависимости от радиуса корреляции r_k .

В соответствии с (31) для (27) получаем

$$B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) = \frac{2\pi}{a^2} I_0 \exp \left\{ -\frac{r^2}{r_{\Phi\Phi}^2} \right\}, \quad (4.2.33)$$

$$G(\theta; z) = \frac{\pi r_{\Phi\Phi}^2}{a^2} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (kr_{\Phi\Phi} \theta)^2 \right\}.$$

Согласно (33) полуширина углового спектра по уровню e^{-1}

$$\Delta\theta = \frac{2}{kr_{\Phi\Phi}} = \left(\frac{2}{k^2 a^2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2a^2}{r_k^2} \right]^{1/2}. \quad (4.2.34)$$

Изменение $\Delta\theta$ в зависимости от радиуса корреляции r_k изображено на рис. 4.9. Уменьшение значения r_k приводит к сильному расширению углового спектра. При $r_k \ll a$

$$\Delta\theta = 2/kr_k, \quad (4.2.35)$$

т. е. угловой спектр пучка определяется исключительно значением радиуса корреляции. Если $r_k \gg a$, $\Delta\theta = 2(ka)^{-1}$.

§ 3. Метод медленно меняющихся амплитуд в теории распространения волн. Укороченные уравнения

Для описания процесса распространения квазиплоских и квазимонохроматических волн можно использовать приближенные уравнения, получаемые из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

В случае линейных сред уравнения (1) также линейны и для их решений выполняется принцип суперпозиции. Поэтому, хотя реальные поля, разумеется, всегда вещественны, при рассмотрении волн в линейных средах удобно использовать комплексную запись поля в виде (4.1.1) (подобно тому, как это делалось при рассмотрении колебаний в линейной системе с сосредоточенными параметрами — см. (3.1.5—8)).

В пренебрежении пространственной дисперсией поляризация и поле в случае линейной среды связаны соотношением

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \hat{H}(t', \mathbf{r}) \mathbf{E}(t-t', \mathbf{r}) dt', \quad (4.3.2)$$

аналогичным интегралу Дюамеля (3.1.18), где \hat{H} — тензор линей-

ной восприимчивости. Из (1) и (2) следует интегро-дифференциальное уравнение для напряженности поля:

$$c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3.3)$$

Анализ задач о распространении случайных волн в линейной среде требует решения уравнения (3) со случайными краевыми условиями. В такой постановке аналитические результаты удается получить лишь в сравнительно простых случаях, поэтому большое значение, даже для линейных задач, приобретает разработка приближенных методов, базирующихся на упрощении исходных уравнений.

Ниже излагается один из наиболее эффективных приближенных методов упрощения волновых уравнений — метод медленно меняющихся амплитуд. Этот метод широко используется в линейной и нелинейной теории колебаний; в гл. 3 мы использовали его для рассмотрения шумовых колебаний в контуре. В физике волновых процессов метод медленно меняющихся амплитуд впервые был применен Леонтовичем в задачах распространения радиоволн [2] (метод параболического уравнения). Для решения линейных и нелинейных волновых задач метод медленно меняющихся амплитуд детально разработал Хохлов [4]. Подробное изложение этого метода можно найти в книге [3]; в [5] параболическое уравнение выведено для оптически анизотропных сред. В работе [8] параболическое уравнение использовано для описания распространения волновых пакетов в диспергирующих средах.

В теории волн, как и в теории колебаний, в основе метода медленно меняющихся амплитуд лежит естественное для волн типа (4.1.1) предположение о том, что комплексная амплитуда A волны изменяется медленно в масштабе средней длины волны λ и среднего периода колебаний T , т. е. $|\Delta A_\lambda| \ll |A|$ и $|\Delta A_T| \ll |A|$. Условие медленности позволяет записать для амплитуды A вместо (3) дифференциальное уравнение и одновременно понизить его порядок.

В довольно общем случае вместо интегро-дифференциального уравнения (3) удается записать дифференциальное уравнение параболического типа.

Проведем вывод приближенных уравнений *) для двух типов модулированных волн: для плоских квазимонохроматических волн и для квазиплоских монохроматических волн.

*) Здесь мы ограничиваемся, по существу, весьма конспективным изложением. Для более детального ознакомления с методом медленно меняющихся амплитуд и его применением для решения волновых задач можно обратиться к [3, 7, 9, 10].

Плоские шумовые волны; первое и второе приближения теории дисперсии. Рассмотрим сначала распространение плоских квазимонохроматических волн в однородных линейных изотропных средах (восприимчивость — скаляр, $\hat{H} \rightarrow H(t)$). Решение уравнения (3) в данном случае ищем в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = eA(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}. \quad (4.3.4)$$

Направление z совпадает с вектором k_0 .

Существенным моментом при получении уравнения для амплитуды A является вычисление линейной поляризации среды (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) &= \int_0^\infty H(t') \mathbf{E}(t-t', z) dt' = \\ &= \int_0^\infty H(t') eA(z, t-t') e^{i[\omega_0(t-t') - k_0 z]} dt'. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Используя условие медленности изменения амплитуды квазимонохроматической волны ($|\Delta A_T| \ll |A|$), разложим $A(z, t-t')$ в ряд Тейлора по аргументу t' :

$$A(z, t-t') = A(z, t) + \sum_{n=1}^\infty (-t')^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial t^n}, \quad (4.3.6)$$

и подставим *) в (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, t) &= \\ &= e \left[\chi(\omega) A(z, t) + \sum_{n=1}^\infty (-i)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \chi(\omega)}{\partial \omega^n} \frac{\partial^n A}{\partial t^n} \right] e^{i(\omega t - k z)} + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

где $\chi(\omega) = \int_0^\infty H(t') e^{-i\omega t'} dt'$ — восприимчивость среды на частоте ω .

В первом приближении при слабой дисперсии из (7) имеем

$$\mathbf{P}(z, t) = e \left[\chi(\omega) A - i \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} \right] e^{i(\omega t - k z)}. \quad (4.3.8)$$

Подставим (4) в (3), принимая во внимание (8). Для производной от поляризации получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = e \left\{ -\omega^2 \chi A + i\omega^2 \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} + i2\omega \chi \frac{\partial A}{\partial t} \right\} e^{i(\omega t - k z)}. \quad (4.3.9)$$

Для других производных получаем точные выражения:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = e \left[-\omega^2 A + i2\omega \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] e^{i(\omega t - k z)}, \quad (4.3.10a)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = e \left[k^2 A + i2k \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] e^{i(\omega t - k z)}. \quad (4.3.10б)$$

*) Для упрощения записи индексы у средней частоты ω_0 и волнового числа k_0 временно опускаем.

В нулевом приближении после подстановки (9) и (10) в (3) имеем дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 (1 + 4\pi\kappa(\omega)) - k^2 c^2 = 0, \text{ или } \omega n(\omega) = kc, \quad (4.3.11)$$

которое дает связь между волновым числом k и частотой ω ; $n(\omega) = (1 + 4\pi\kappa(\omega))^{1/2}$ — показатель преломления среды.

Если в уравнении (3) сохранить только первые производные амплитуды, то получим

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad (4.3.12)$$

где u — групповая скорость волны:

$$u = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)^{-1}. \quad (4.3.13)$$

Общим решением уравнения (12) является

$$A(z, t) = A_0(t - z/u), \quad (4.3.14)$$

где вид функции $A_0(t)$ определяется условиями на границе среды.

Характер приближения, которому соответствует уравнение (12), легко выявить, если подставить A в виде

$$A = \exp i(\Omega t - qz). \quad (4.3.15)$$

Добавка q к волновому числу равна

$$q = \frac{\Omega}{u} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Omega,$$

а само волновое число на частоте $\omega' = \omega + \Omega$ равно

$$k(\omega + \Omega) = k(\omega) + q = k(\omega) + \Omega/u. \quad (4.3.16)$$

Таким образом, уравнение (12) справедливо в той области, где дисперсию среды можно считать линейной. Это соответствует первому приближению теории дисперсии.

Для монохроматических волн $A = A(z)$ уравнение (12) дает $dA/dz \equiv 0$; $A = \text{const}$. Последнее есть следствие того, что восприимчивость среды $\kappa(\omega)$ мы считали действительной величиной, т. е. фактически пренебрегали потерями. С учетом потерь среды амплитуда изменяется.

Принимая во внимание потери среды $\sigma(\omega)$, ее восприимчивость следует уже записывать в комплексном виде как $\kappa(\omega) - i\sigma(\omega)/\omega$. Тогда, пользуясь (9), (10), для комплексной амплитуды монохроматической волны получим уравнение

$$\frac{dA}{dz} + \alpha A = 0, \quad (4.3.17a)$$

где $\alpha = \omega\sigma(\omega)/2k$. Если речь идет о распространении квазимонохроматических волн в диспергирующей среде с потерями, то

в пренебрежении частотной зависимостью потерь получим, что дисперсионные и диссипативные члены в упрощенное уравнение входят аддитивно. Таким образом, для комплексной амплитуды имеем (ср. с (12) и (17a))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha A = 0. \quad (4.3.17b)$$

Уравнение (17a) позволяет установить весьма плодотворную пространственно-временную аналогию в теории колебаний и волн. Действительно, уравнение (17a) аналогично уравнению, описывающему затухание свободных колебаний в колебательном контуре (см. (3.2.27)). Таким образом, временной колебательной задаче можно сопоставить волновую пространственную задачу-аналог. Независимой переменной t в пространственной задаче соответствует координата z , частоте ω — волновое число k , начальным условиям — краевые условия. Этой аналогией мы воспользуемся в гл. 8.

В тех случаях, когда линейной аппроксимации дисперсионного уравнения недостаточно, следует учесть старшие производные в разложении поляризации. Во втором приближении для поляризации (7) имеем

$$\mathbf{P}(\omega) = e \left[\kappa A - i \frac{\partial \kappa}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] e^{i(\omega t - kz)}.$$

Вторая производная $\partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ равна

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = e \left\{ -\omega^2 \kappa A + i\omega^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} + i2\omega \kappa \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (\omega^2 \kappa) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right\} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (4.3.18)$$

Подстановка в (3) выражения (18) и остальных производных из (10) приводит к следующему уравнению для комплексной амплитуды A :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) + i \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (4.3.19)$$

Здесь полагаем потери $\alpha = 0$. При выводе уравнения (19) применены те же операции, что и при получении (12). Уравнение (19) является точным в отношении учета изменения амплитуды A в пространстве, но приближенным в отношении учета дисперсионных свойств среды.

В рамках рассматриваемого приближения уравнение (19) можно упростить. Покажем, что член в квадратных скобках имеет более высокий порядок малости. В самом деле,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) A \approx \approx 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right). \quad (4.3.20)$$

Пусть первые производные имеют порядок μ ($\mu \ll 1$), тогда второй множитель согласно (12) с точностью до μ^2 равен нулю. Отсюда следует, что выражение (20) имеет по крайней мере порядок μ^3 . Поэтому уравнение (19) с точностью до μ^3 можно записать как

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3.21)$$

где параметр $g = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} (u^{-1})$ характеризует дисперсию групповой скорости.

К уравнению (21) можно прийти и более наглядным путем. В отличие от решения (14) уравнения (12), решение (19) зависит как от z , так и от $t - z/u$: $A(z, t - z/u)$, т. е. при учете дисперсии среды во втором приближении форма квазимонохроматической волны не сохраняется. Перейдем к системе координат

$$\zeta = z, \quad \eta = t - z/u, \quad (4.3.22)$$

связанной с распространяющейся волной, и будем полагать, что зависимость амплитуды A от переменной η является более быстрой (происходит переход через границу волнового пакета), нежели от переменной ζ :

$$A = A(\zeta, \eta). \quad (4.3.23)$$

Тогда, сохраняя в (19) члены одного порядка, приходим к параболическому уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = 0. \quad (4.3.24)$$

Уравнения (24) и (21), в отличие от (19), приближены в смысле учета как пространственных, так и временных производных.

Подставляя (15) в (21), найдем, что во втором приближении дисперсионные свойства среды аппроксимируются квадратичной зависимостью

$$k(\omega + \Omega) = k(\omega) + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Omega^2. \quad (4.3.25)$$

Напомним, что уравнение (21) относится к изотропной среде. Для анизотропной среды это уравнение принимает вид

$$[e[ke]] \left(\nabla A + s \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (4.3.26)$$

Здесь $s = \partial k / \partial \omega$ — лучевой вектор (вектор направления потока энергии), $|s| = 1/u$, $g = \partial s / \partial \omega$. Вектор $[e[ke]]$ коллинеарен вектору s ; следовательно, уравнения (26) и (21) характеризуют пространственные изменения комплексной амплитуды A вдоль лучевых векторов.

Изложенным выше способом можно получить уравнения и в более высоком приближении. Однако с увеличением точности получаемое уравнение для комплексной амплитуды A усложняется.

Волновые пучки; учет дифракции; однородные и неоднородные среды. Здесь решение (3) следует искать в виде

$$E = eA(x, y, z) e^{i(\omega t - kr)}. \quad (4.3.27)$$

В первом приближении изменение комплексной амплитуды A вдоль всех координат имеет одинаковый порядок, при этом поле (27) можно записать как

$$E(r, t) = eA(r) e^{i(\omega t - kr)}. \quad (4.3.28)$$

Подставляя (28) в точное уравнение (3) и учитывая (7), получаем

$$[e[ke]] \nabla A = 0, \quad \text{или} \quad s \nabla A = 0. \quad (4.3.29)$$

Общим решением (29) является (ср. с (14))

$$A = A_0([sr]), \quad (4.3.30)$$

т. е. амплитуда A представляет собой определяемую граничными условиями функцией координат в плоскости, перпендикулярной лучевому вектору s . Уравнение (29) и его решение (30) соответствуют приближению геометрической оптики.

При распространении в среде волновых пучков вида (4.1.1) с узким угловым спектром изменения комплексной амплитуды поперек пучка происходят быстрее, чем вдоль, поскольку происходит переход в область тени [2]. Быстрые изменения волны вдоль направления распространения учитываются экспоненциальным множителем в (4.1.1).

Подставим выражение (4.1.1) в уравнение (3) и учтем условие медленности изменения комплексной амплитуды:

$$k_0 \frac{\partial A}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

Получим следующее приближенное уравнение:

$$\frac{dA}{dz} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0, \quad (4.3.31a)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — поперечный лапласиан. В более общем случае уравнение (31a) следует записать как

$$s_0 \nabla A + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0, \quad (4.3.31b)$$

где $s_0 = s/s$ — единичный вектор.

Параболические уравнения (31) учитывают дифракционные эффекты в так называемом квазиоптическом приближении. Для

выявления существа использованного приближения возьмем A в виде

$$A = e^{-iqr}.$$

В соответствии с (31a) имеем

$$2k_0q_z + q_x^2 + q_y^2 = 0. \quad (4.3.32)$$

В то же время согласно точному уравнению (3)

$$(k_0 + q)^2 = k_0^2, \quad \text{или} \quad 2k_0q_z + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 0. \quad (4.3.33)$$

Из (33) и (32) следует, что в квазиоптическом приближении сферическая поверхность заменяется параболоидом. Аппроксимация поверхности волновых векторов (33) параболоидом, ось которого совпадает с направлением среднего волнового вектора k_0 , очевидно, оправдана лишь для относительно узких угловых спектров ($q/k_0 \ll 1$). Параболическое уравнение (31a), обобщенное на неоднородные и нелинейные среды, используется для описания распространения волн в случайных средах [11] и нелинейного взаимодействия квазиплоских пучков [8—10] (см. также гл. 8).

В неоднородных средах линейная восприимчивость среды H явно зависит от координаты r (см. (2)). Пусть изотропная недиспергирующая среда обладает слабыми случайными неоднородностями:

$$H(r) = H + \tilde{H}(r), \quad \text{где} \quad [(\tilde{H}(r))^2]^{1,2} H^{-1} \ll 1.$$

Будем считать неоднородности среды крупномасштабными: характерный масштаб изменения восприимчивости среды $l_{\text{неодн}}$ значительно превосходит длину волны λ ($l_{\text{неодн}} \gg \lambda$). В этом случае решение волнового уравнения (3) можно искать в квазиоптическом приближении. Описанная процедура упрощения дает

$$i2k_0 \nabla A - \Delta_{\perp} A - k_0^2 \tilde{\epsilon}(r) A = 0, \quad (4.3.34)$$

где k_0 — волновое число, связанное с постоянной частью диэлектрической проницаемости, $\tilde{\epsilon}(r)$ — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости: $\tilde{\epsilon}(r) = 4\pi \tilde{H}(r)$.

Мы не имеем здесь возможности подробнее остановиться на условиях перехода от (3) к (34). Заметим только, что уравнение (34) не учитывает наличия волн, рассеянных неоднородностями среды в обратном направлении.

Общее уравнение для случайных волн. Выше получены приближенные уравнения, описывающие распространение в линейной среде волн, случайно модулированных только во времени или только в пространстве. Хотя на практике обычно приходится иметь дело со случайными волнами, модулированными одновременно в пространстве и времени, раздельное рассмотрение эффектов частичной пространственной и временной когерентности очень

часто вполне оправдано. Как будет видно из дальнейшего анализа, это связано с существенным различием в темпе проявления эффектов, связанных с временной и пространственной модуляциями. Вместе с тем для целого ряда задач оказывается необходимым одновременный учет обоих видов модуляций. Уравнение в этом случае можно записать, пользуясь уравнениями (31) и (21) (или (24)). Полагая, что производные в них одного порядка, имеем

$$s_0 \left(\nabla A + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} A \right) - i \frac{1}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0. \quad (4.3.35)$$

Общее уравнение (35) записано в квазиоптическом приближении и во втором приближении теории дисперсии.

Пространственно-временная аналогия. В исходное уравнение (3) пространственная координата r и время t входят несимметрично; по времени, кроме дифференцирования, производится интегрирование в выражении (2) для поляризации вследствие частотной дисперсии. Линейное волновое уравнение принимает симметричный вид, если среда обладает одновременно и пространственной дисперсией: при этом линейная поляризация среды записывается в виде

$$P(r, t) = \int_0^{\infty} dt' \int d^3r' H(t', r') E(t-t', r-r'). \quad (4.3.36)$$

Однако при приближенном описании распространения волн, модулированных только в пространстве, и волн, модулированных только во времени, удастся выделить важные частные случаи, которые описываются сходными уравнениями. Действительно, в квазиоптическом приближении распространение пространственно-модулированных волн подчиняется параболическому уравнению (31a). Уравнением такого же типа во втором приближении теории дисперсии описывается распространение волн, модулированных во времени (см. (21) и (26)). Дисперсионному расплыванию волнового пакета можно уподобить дифракционное расширение пучка. Сказанное означает, что результаты решения временных задач могут быть в определенной мере перенесены на пространственные задачи и наоборот.

Пространственно-временная аналогия распространяется на нелинейные волновые задачи [3, 8, 9] (см. также § 1 гл. 8), и ее можно обобщить на распространение волн в неоднородных и нестационарных средах. Ценность аналогии состоит в том, что она позволяет предсказать качественную картину поведения модулированной волны, если известны результаты, относящиеся к волне-аналогу. Вместе с тем следует себе ясно представлять ограниченность этой пространственно-временной аналогии. Так, в случае распространения модулированных волн в линейных средах возможно отличие временных задач от пространственных, и причины этого заключаются в следующем.

1 Прежде всего, следует иметь в виду различие в числе измерений: временные задачи — одномерные, а пространственные задачи — трехмерные, при-

чем направления, перпендикулярные направлению распространения волн, могут быть неравноправными.

2. Если во временных задачах во многих случаях процесс можно считать стационарным, то в пространственных задачах принципиальное значение для большинства случаев имеют конечные пространственные размеры случайных пучков (статистическая неоднородность, см. § 8 гл. 1).

3. Наконец, следует отметить различие в виде исходных временных и пространственных корреляционных функций поля. Для симметричного спектра временные корреляционные функции являются действительными. Поперечные (пространственные) корреляционные функции даже для симметричного углового спектра в общем случае комплексны (см. § 5). Последнее обусловлено тем, что в угловом спектре положительные и отрицательные углы физически различимы, а в частотном спектре положительные и отрицательные частоты физически идентичны.

§ 4. Плоские шумовые волны в диспергирующей среде

В соответствии с предыдущими результатами распространение плоских квазимонохроматических волн во втором приближении теории дисперсии можно описывать уравнениями (4.3.21), (4.3.26) или (4.3.24) в бегущей системе координат (4.3.22).

Для выяснения особенностей поведения шумовой волны в диспергирующей среде воспользуемся уравнением (4.3.21) для изотропной среды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{g}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = 0. \quad (4.4.1)$$

Условие на границе среды при $z=0$ запишем как

$$A(t, z=0) = A_0(t). \quad (4.4.2)$$

Случайный процесс $A_0(t)$ будем считать стационарным с корреляционной функцией вида

$$B_0(\tau) = \langle A_0(t) A_0^*(t+\tau) \rangle = I_0 e^{-(\tau/\tau_k)^2}, \quad (4.4.3)$$

где τ_k — время корреляции. Решением уравнения (1) с условием (2) является

$$A(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\theta) H(t-\theta, z) d\theta, \quad (4.4.4)$$

где H — функция Грина:

$$H(t-\theta, z) = (i2\pi gz)^{-1/2} \exp\left\{i \frac{(t-z/u-\theta)^2}{2gz}\right\}. \quad (4.4.4a)$$

Покажем сначала, что временная корреляционная функция

$$B(\tau; z) = \langle A(t, z) A^*(t+\tau, z) \rangle \quad (4.4.5)$$

стационарного случайного процесса при распространении в среде,

описываемой уравнением (1), остается неизменной. Запишем уравнение для корреляционной функции (5). Умножим (1) на $A^*(t_1, z)$ и сложим с уравнением для $A^*(t_1, z)$, умноженным в свою очередь на $A(t, z)$; в результате получим

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) - i \frac{g}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\right)\right\} A(t, z) A^*(t_1, z) = 0. \quad (4.4.6)$$

Усредним уравнение (6); вследствие стационарности процесса $A(t, z)$ временные производные выпадут и получим

$$\partial B(\tau; z)/\partial z = 0.$$

Отсюда следует, что корреляционная функция стационарного процесса остается неизменной:

$$B(\tau; z) = B(\tau; z=0) = B_0(\tau). \quad (4.4.5a)$$

Полученный результат нетрудно понять, обратившись к спектру рассматриваемого процесса. Согласно (1) фурье-компоненты $A_\omega(z)$ амплитуды $A(t, z)$ изменяются как *

$$A_\omega(z) = A_\omega(0) e^{-i\varphi(\omega, z)}, \quad \varphi(\omega, z) = \left(\frac{\omega}{u} + \frac{1}{2} g \omega^2\right) z, \quad (4.4.7)$$

т. е. при распространении у функции $A_\omega(z)$ изменяется только фаза φ . Поскольку для исходного стационарного случайного процесса (см. (1.3.16))

$$\langle A_\omega(0) A_{\omega'}^*(0) \rangle = G_0(\omega) \delta(\omega' - \omega), \quad (4.4.7a)$$

спектральная плотность в среде $G(\omega, z)$ не зависит от фазового набега и

$$G(\omega, z) = G_0(\omega).$$

Переходя здесь к корреляционной функции, получим соотношение (5a).

Для нестационарного случайного процесса $A_0(t)$ соотношение (1.3.16) не выполняется и положение отличается от только что рассмотренного. Здесь мы не будем останавливаться на этой задаче, а только заметим в связи с пространственно-временной аналогией, что такая задача сходна с задачей о дифракции частично пространственно когерентной волны на отверстии, которая будет рассмотрена в § 5.

Влияние дисперсии на продольную корреляцию. Воспользовавшись решением (4), рассчитаем продольную корреляционную

* Заметим, что в силу соотношений Крамерса—Кронига дисперсия скорости неразрывно связана с дисперсией поглощения. Последнее же приведет, очевидно, к изменению амплитуд спектральных компонент и вида корреляционной функции. Тем не менее вдали от полюсов поглощения использование только уравнения (1) оправдано, и тогда сохраняет силу (7).

функцию шумовой волны в диспергирующей среде

$$B_{||}(z, z+s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle A_0(\theta_1) A_0^*(\theta_2) \rangle H(t-\theta_1, z) H^*(t-\theta_2, z+s) d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.4.8)$$

Учитывая (3) и используя замену переменных

$$t_2 = t - \frac{z+s}{u} - \theta_2, \quad t_1 = t - \frac{z}{u} - \theta_1,$$

выражение (8) можно записать в виде

$$B_{||}(z, z+s) = (2\pi g)^{-1} [z(z+s)]^{-1/2} I_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \frac{t_2^2}{2g(z+s)} + i \frac{t_1^2}{2gz} - \frac{(t_1 - t_2 - s/u)^2}{\tau_k^2} \right\} dt_1 dt_2. \quad (4.4.9)$$

Интегрирование в (9) нетрудно выполнить, используя формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -p^2 x^2 \pm qx \} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp \left\{ -\frac{q^2}{4p^2} \right\}, \quad (4.4.10)$$

которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем. В результате для продольной корреляционной функции получаем

$$B(s) = I_0 [1 - is/l_k^{(2)}]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(s/l_k^{(1)})^2}{1 - is/l_k^{(2)}} \right\}. \quad (4.4.11)$$

В (11) введены характерные длины

$$l_k^{(1)} = \tau_k u, \quad l_k^{(2)} = \tau_k^2 / 2g. \quad (4.4.12)$$

В первом приближении теории дисперсии ($g=0$, $l_k^{(2)} \rightarrow \infty$) корреляционная функция (11) равна

$$B^{(1)}(s) = I_0 \exp \{ -(s/l_k^{(1)})^2 \},$$

откуда видно, что характерная продольная длина $l_k^{(1)}$ связана с эффектом переноса временной когерентности с групповой скоростью u (ср. с (3)).

Во втором приближении теории дисперсии в системе координат (4.3.22), распространяющейся вместе с волной со скоростью u (что эквивалентно $u^{-1}=0$ в (1)), имеем

$$B^{(2)}(s) = I_0 [1 - is/l_k^{(2)}]^{-1/2}.$$

В этом случае конечное значение продольной длины $l_k^{(2)}$ обусловлено дисперсионным расплыванием флуктуационных выбросов.

Более сложная картина имеет место в общем случае ($u^{-1} \neq 0$, $g \neq 0$), при этом модуль корреляционной функции (11) равен

$$|B_{||}(s)| = I_0 [1 + (s/l_k^{(2)})^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(s/l_k^{(1)})^2}{1 + (s/l_k^{(2)})^2} \right\}. \quad (4.4.13)$$

На рис. 4.10 представлены графики нормированной функции (13) для различных отношений длин $l_k^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$.

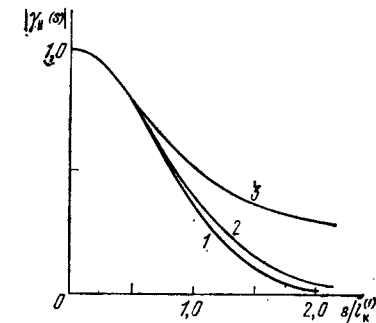


Рис. 4.10. Нормированная продольная корреляционная функция $|\gamma_{||}(s)| = |B_{||}(s)|/B_{||}(0)$ в зависимости от $s/l_k^{(1)}$.

Кривым соответствуют различные отношения когерентных длин $(l_k^{(1)}/l_k^{(2)})^2$: 1) 0; 2) 0,1; 3) 1.

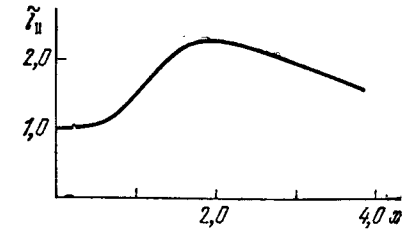


Рис. 4.11. Приведенная продольная длина корреляции $\tilde{l}_{||} = l_{||}^{(1)}/l_k^{(1)}$ в зависимости от соотношения когерентных длин $x = l_k^{(1)}/l_k^{(2)}$.

Значение продольной длины корреляции $s = l_{||}$, определенной по уровню e^{-1} из (13), удовлетворяет соотношению

$$(l/l_k^{(1)})^2 [1 + (l/l_k^{(2)})^2]^{-1} + 1/4 \ln [1 + (l/l_k^{(2)})^2] = 1. \quad (4.4.14)$$

Наглядные выражения для $l_{||}$ получаются лишь в предельных случаях. Если $l_k^{(1)} < l_k^{(2)}$, то после алгебраических операций получаем

$$l_{||} = l_k^{(1)} [1 + 3/8 (l_k^{(1)}/l_k^{(2)})^2]. \quad (4.4.15a)$$

Значение $l_{||}$ растет с уменьшением длины $l_k^{(2)}$ (12), т. е. с увеличением дисперсии групповой скорости (рис. 4.11). При $l_k^{(2)} < l_k^{(1)}$, преобразуя (14), имеем

$$l_{||} = l_k^{(2)} [\exp \{ 4 [1 - (l_k^{(2)}/l_k^{(1)})^2] \} - 1]^{1/2}. \quad (4.4.15b)$$

В этом случае происходит уменьшение длины продольной корреляции, когда длина $l_k^{(2)}$ уменьшается.

В заключение полезно сопоставить поведение в диспергирующей среде временной корреляционной функции $B(\tau)$ стационарного случайного процесса и продольной корреляционной функции $B_{||}(s)$. В соответствии с (7) и (7a) продольная корреляция фурье-компонент амплитуды поля равна

$$\langle A_{\omega}(z) A_{\omega}^*(z+s) \rangle = \langle A_{\omega} A_{\omega}^* \rangle e^{i[\psi(\omega', z+s) - \psi(\omega, z)]} = G_0(\omega) e^{i\psi(\omega, s)} \delta(\omega' - \omega). \quad (4.4.16)$$

Интегрируя (16) по $d\omega' d\omega$, в первом приближении теории дисперсии, где фаза $\varphi = \omega s/u$, получим

$$B_{||}(s/u) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) e^{i(\omega/u)s} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B(\tau),$$

т. е. здесь отношение s/u играет роль времени τ , а функция $B_{||}(s)$ прямо выражается через $B(\tau)$. Однако в случае $g \neq 0$ из-за того, что фаза $\varphi(\omega, s)$ квадратично зависит от частоты ω (см. (7)), имеем

$$B_{||}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) \exp \left\{ is \left[\frac{\omega}{u} + \frac{1}{2} g \omega^2 \right] \right\} d\omega.$$

Здесь простой связи между $B_{||}(s)$ и $B(\tau)$ нет.

О прямых измерениях групповой скорости. Исследования прохождения шума через диспергирующую среду могут быть положены в основу прямого «шумового» метода измерения групповой скорости*).

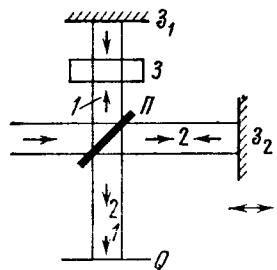


Рис. 4.12. Схема интерферометра Майкельсона для измерения групповой скорости в образце 3.

Групповая скорость световой волны — важный параметр вещества. Для ее определения в оптике обычно используется два метода:

1) групповую скорость можно вычислить, располагая результатами измерений фазовой скорости с помощью монохроматического излучения;

2) прямые измерения групповой скорости в веществе можно осуществить на основе измерения времени запаздывания световых импульсов.

Нетрудно убедиться, что величину групповой скорости можно также найти из корреляционных измерений, определяя взаимную корреляцию шумовой волны на входе и выходе исследуемой диспергирующей среды.

В качестве примера рассмотрим интерферометр Майкельсона, в одно плечо которого помещен исследуемый образец 3 (рис. 4.12). Обозначим поле в этом плече через $E_1(t)$. Во втором плече интерферометра поле $E_2(t-\tau)$ испытывает временную задержку τ ($\tau = 2(l_2 - l_1)/c$, где l_1 — длина плеча 1 без длины образца 3).

*) Таким образом, речь будет идти об одном из вариантов шумовой спектроскопии вещества. Заметим, что в этой книге мы уже сталкивались с примером определения функции Грина линейной системы по результатам корреляционных измерений (см. § 2 гл. 3). В § 5 гл. 5 обсуждается шумовая спектроскопия двухуровневых систем.

Интерференционная картина описывается общим выражением (4.2.13); для ее расчета в данном случае следует принять во внимание дисперсию исследуемой среды. С ее учетом комплексная амплитуда $A_1(t)$ квазимонохроматического поля $E_1(t)$ дается выражением

$$A_1(t, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\theta) H(t - \theta, l) d\theta. \quad (4.4.17)$$

Здесь $A_0(t)$ — амплитуда исходного поля, функция $H(t - \theta, l)$ определяется (4а), l — удвоенная длина исследуемой среды. Само поле $E_1(t, z)$ имеет вид

$$E_1(t, z) = A_1(t, l) e^{i(\omega_0 t - kl - k_0 z)}, \quad (4.4.18)$$

где k и k_0 — волновые числа в исследуемой среде и воздухе соответственно. Поле $E_2(t, z)$ распространяется в среде без дисперсии, поэтому

$$E_2(t, z) = A_0(t - \tau) e^{i(\omega_0(t - \tau) - k_0 z)}.$$

Корреляция между полями E_1 и E_2

$$B(\tau; l) = \langle E_1(t, z) E_2^*(t, z) \rangle = \langle A_1(t, l) A_0^*(t - \tau) \rangle e^{i(\omega_0 \tau - kl)}. \quad (4.4.19)$$

Рассчитаем сначала значение (19) в первом приближении теории дисперсии (параметр $g = 0$). При этом согласно (17) амплитуда $A_1(t, l) = A_0(t - l/u)$ и корреляционная функция равна

$$B(\tau; l) = \langle A_0(t - l/u) A_0^*(t - \tau) \rangle e^{i(\omega_0 \tau - kl)} = B_A(\tau - l/u) e^{i(\omega_0 \tau - kl)}.$$

Ее максимальное значение имеет место при временах задержки*)

$$\tau = l/u. \quad (4.4.20)$$

Отсюда ясно, что, зная величины τ и l , можно определить групповую скорость в диспергирующей среде [12].

Рассмотрим теперь, не изменится ли полученный результат, если дисперсию среды учесть во втором приближении ($g \neq 0$). Подставляем в (19) выражение (17) и выполняем необходимые операции:

$$B(\tau; l) = e^{i(\omega_0 \tau - kl)} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A_0(\theta) A_0^*(t - \tau) \rangle H(t - \theta, l) d\theta. \quad (4.4.21)$$

Для исходной корреляционной функции $B_0(\tau)$ вида (3) с помощью замены $\eta = t - l/u - \theta$ приходим к выражению

$$B(\tau; l) = (i2\pi gl)^{-1/2} I_0 e^{i(\omega_0 \tau - kl)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(\tau - l/u - \eta)^2}{\tau_k^2} + i \frac{\eta^2}{2gl} \right\} d\eta.$$

*) Это утверждение справедливо не только для амплитудной временной интерферометрии, но и для интерферометрии интенсивности. Соответствующие расчеты для интерферометра интенсивности, основанного на явлении генерации второй гармоники, приведены в работе [12] (см. также § 4 гл. 5).

Выполняя интегрирование, получим

$$B(\tau; l) = I_0 (1 + \tilde{z}^2)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(\tau - l/u)^2}{\tau_k^2 (1 + \tilde{z}^2)} + i(\omega_0 \tau - kl - \alpha(\tau)) \right\}. \quad (4.4.22)$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{z} = l/l_k^{(2)}, \quad \alpha(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tilde{z} - \frac{(\tau - l/u)^2 \tilde{z}}{\tau_k^2 (1 + \tilde{z}^2)}, \quad (4.4.23)$$

длина $l_k^{(2)}$ определяется (12). На рис. 4.13 изображена интерференционная картина (4.2.13), рассчитанная для корреляционной функции (22).

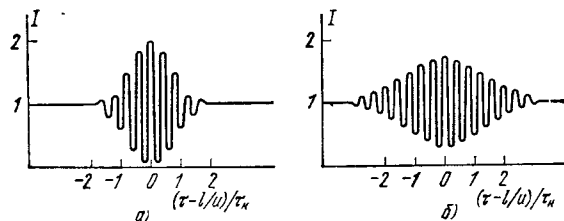


Рис. 4.13. Интерференционная картина в интерферометре, изображенном на рис. 4.12 [12]:

а) если $g=0$ (первое приближение теории дисперсии), ширина корреляционной функции определяется временем корреляции исходной волны; б) при $g \neq 0$ корреляционная функция уширяется (рисунок построен для $gl = \sqrt{3}$).

Максимум корреляционной функции достигается при временах задержки, удовлетворяющих условию (20), т. е. на это условие не влияет дисперсия групповой скорости ($g \neq 0$). Однако время взаимной корреляции оказывается зависящим от дисперсионных свойств исследуемой среды.

Согласно выражению (22) измеряемое время корреляции равно

$$\tau_k^{\text{изм}}(z) = \tau_k (1 + \tilde{z}^2)^{1/2}, \quad (4.4.24)$$

т. е. оно зависит, вообще говоря, от дисперсии групповой скорости $g = \frac{\partial}{\partial \omega}(u^{-1})$.

§ 5. Дифракция случайных волн

Теперь мы перейдем к анализу дифракции случайных волн. Мы будем пользоваться при этом приближенным параболическим уравнением*), выведенным в § 3.

*) Надо сказать, что в литературе (см., например, [1, 6]) рассматриваемые в настоящем параграфе явления часто анализируются на основе волнового уравнения. Однако на этапе получения окончательных результатов применяют приближение, приводящее к тем же формулам, которые следуют из параболического уравнения.

Дифракционное изменение радиуса корреляции при распространении волны; теорема Ван Циттерта—Цернике. Мы начинаем рассмотрение статистических дифракционных проблем с фундаментальной задачи о преобразовании поперечной корреляционной функции светового пучка в процессе распространения. Мы убедимся, что поперечный радиус корреляции частично когерентного волнового пучка в процессе распространения за счет дифракции увеличивается. Это обстоятельство имеет много важных приложений в физической и прикладной оптике; часть из них рассматривается в этой главе, об использовании указанного обстоятельства в лазерной технике см. § 2 гл. 8.

Мы рассмотрим сначала монохроматический волновой пучок со случайной поперечной структурой. Влияние временной некогерентности на дифракционное преобразование поперечных корреляционных функций обсуждается в конце этого параграфа (см. формулы (37), (38)).

Распространение волны, обладающей неполной пространственной когерентностью, в квазиоптическом приближении описывается уравнениями (4.3.31) для комплексной амплитуды. Направим ось z вдоль направления распространения волны, тогда имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \right) A(\mathbf{r}, z) = 0. \quad (4.5.1)$$

Получим уравнение для поперечной корреляционной функции (4.1.3):

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = (A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z)),$$

поступив так же, как в § 4. Заменяем в (1) координату \mathbf{r} на \mathbf{r}_1 и умножим уравнение на $A^*(\mathbf{r}_2, z)$. Полученное таким образом уравнение сложим с этим же комплексно сопряженным уравнением, предварительно поменяв местами индексы 1 и 2. Выполняя статистическое усреднение, придем к уравнению для поперечной корреляционной функции:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{1}{2k} (\Delta_{\perp, 1} - \Delta_{\perp, 2}) \right\} B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = 0. \quad (4.5.2)$$

В новых переменных

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = 1/2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \quad (4.5.3)$$

уравнение (2) имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{R}} \right\} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = 0. \quad (4.5.4)$$

ческого уравнения. На основе параболического уравнения эти формулы получаются быстрее. Применение параболического уравнения в теории частичной когерентности методически оправдано также тем, что для его решения требуется задание лишь значения случайной функции на границе, а для решения точного волнового уравнения нужно еще задать значение производной.

Из (4) видно, что для статистически однородного процесса (B_{\perp} не зависит от R — см. (1.8.2)) поперечная корреляционная функция не зависит от z (ср. с результатом § 4 для стационарного случайного процесса).

Чтобы найти решение уравнения (4), воспользуемся фурье-преобразованием поперечной корреляционной функции $B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z)$. Для фурье-амплитуд функции B_{\perp} получаем простые уравнения первого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i \frac{1}{k} \alpha \beta\right) B_{\perp}(\alpha, \beta; z) = 0, \quad (4.5.5)$$

$$B_{\perp}(\alpha, \beta; z) = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) e^{i(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{R})} d^2r d^2R.$$

Решая (5), получим

$$B_{\perp}(\alpha, \beta; z) = B_{\perp 0}(\alpha, \beta) e^{i\alpha\beta z/k}, \quad (4.5.6)$$

где $B_{\perp 0}(\alpha, \beta)$ — фурье-образ корреляционной функции $B_{\perp 0}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ на границе $z=0$. Произведем обратное фурье-преобразование выражения (6):

$$\begin{aligned} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\alpha, \beta; z) e^{-i(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{R})} d^2\alpha d^2\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\alpha, \beta) e^{i\alpha\beta z/k - i(\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{R})} d^2\alpha d^2\beta = \\ &= (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \exp\left\{i\left[\frac{z}{k}\alpha\beta - \alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \beta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\right]\right\} \times \\ &\quad \times d^2\alpha d^2\beta d^2r' d^2R'. \end{aligned}$$

Используя определение δ -функции:

$$(2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-i\left[\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{z}{k}\beta\right)\alpha\right]\right\} d^2\alpha = \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{z}{k}\beta\right),$$

и ее свойства, для поперечной корреляционной функции окончательно получаем

$$\begin{aligned} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) &= \\ &= C'(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \exp\left\{-i\frac{k}{z}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\right\} d^2r' d^2R', \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

где $C'(z) = (k/2\pi z)^2 = (\lambda z)^{-2}$. Формула (7) в квазиоптическом приближении дает связь поперечной корреляционной функции в произвольной плоскости с ее значением в плоскости $z=0$ (рис. 4.14).

Рассмотрим прежде всего важный частный случай выражения (7). Заменим корреляционную функцию $B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}')$ реального поля в плоскости $z=0$ на δ -функцию, т. е. будем считать, что поле создается δ -коррелированными в пространстве источниками:

$$B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') = h^2 I(\mathbf{R}') \delta(\mathbf{r}'). \quad (4.5.8)$$

Функция $I(\mathbf{R}')$ характеризует распределение средней интенсивности поля, а коэффициент h определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d^2r = h^2 I(\mathbf{R}).$$

Для корреляционной функции (8) формула (7) принимает вид

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = C \exp\left\{-i\frac{k}{z}\mathbf{r}\mathbf{R}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{R}') \exp\left\{i\frac{k}{z}\mathbf{r}\mathbf{R}'\right\} d^2R', \quad (4.5.9)$$

где $C = h^2 C' = (h/\lambda z)^2 = (hk/2\pi z)^2$. Формула (9) выражает теорему Ван Циттерта — Цернике: поперечная корреляционная функция поля связана фурье-преобразованием с начальным распределением интенсивности.

Возвращаясь в (9) к старым переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (3), получаем

$$\begin{aligned} B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) &= C \exp\left\{i\frac{k}{2z}(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2)\right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x', y') \exp\left\{i\frac{k}{z}[(x_1 - x_2)x' + (y_1 - y_2)y']\right\} dx' dy'. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Удобство расчета с помощью выражения (9) или (10) зависит от вида распределения интенсивности $I(\mathbf{R})$.

Из (9) и (10) видно, что при $z > 0$ корреляционная функция поля отличается от начальной (8), а радиус корреляции уже не равен нулю. В формулы (9) и (10) входит отношение k/z ; поэтому при $k/z \rightarrow \infty$ получаем одинаковый результат независимо от того, устремляем ли мы волновое число к бесконечности ($k \rightarrow \infty$, приближение геометрической оптики) или полагаем $z \rightarrow 0$.

Если $I(\mathbf{R})$ существенно уменьшается на масштабе порядка a (a — радиус пучка), то радиус корреляции согласно (9) равен

$$r_k \approx z/ka. \quad (4.5.11)$$

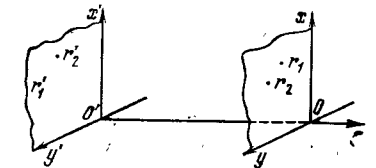


Рис. 4.14. Расположение координат плоскости источника $x'y'$ и произвольной плоскости наблюдения xy .

Таким образом, радиус корреляции линейно нарастает с пройденным расстоянием. Речь идет, действительно, о существенно дифракционном эффекте; он тем больше, чем больше длина волны λ . Наглядное физическое объяснение полученного результата заключается в том, что по мере распространения фазовые фронты элементарных волн, на которые можно разложить поле пучка, совпадают между собой на все возрастающей с ростом z площади.

Расчеты корреляционной функции $B_{\perp}(r, R; z)$ и значения r_k для ряда конкретных случаев выполнены ниже.

Дифракция некогерентной волны на отверстии; звездный интерферометр Майкельсона. Применим теперь полученные выше общие результаты для решения конкретных задач. Сначала рассмотрим дифракцию δ -коррелированной волны. Предположим, что отверстие имеет форму круга радиуса a с центром в точке O и распределение интенсивности вдоль отверстия равномерное:

$$I(R) = \begin{cases} I_0, & R \leq a, \\ 0, & R \geq a. \end{cases} \quad (4.5.12)$$

Для расчета функции B_{\perp} на расстоянии z от такого источника воспользуемся формулой (9), полагая $r_1 = 0$ и $r_2 = s \neq 0$. Переходя к полярным координатам и обозначая угол между векторами s и R через φ , имеем

$$\begin{aligned} B_{\perp}(s; z) &= CI_0 \exp\left\{-i \frac{k}{z} s^2\right\} \int_0^a dR \int_0^{2\pi} R d\varphi \exp\left\{-i \frac{k}{z} R s \cos \varphi\right\} = \\ &= 2\pi CI_0 e^{-iks^2/z} \int_0^a R J_0\left(\frac{kR s}{z}\right) dR = I_0 \frac{kas e^{-iks^2/z}}{2\pi z s} J_1\left(\frac{kas}{z}\right). \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

При выводе (13) использовано рекуррентное соотношение для функции Бесселя

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(vx)) = vx^n J_{n-1}(vx).$$

Нормированная корреляционная функция (13) равна

$$|\gamma(s)| = |B_{\perp}(s; z)/B_{\perp}(0; z)| = 2 \left| J_1\left(\frac{kas}{z}\right) / \left(\frac{kas}{z}\right) \right|. \quad (4.5.14)$$

Функция (14) представлена на рис. 4.15. Первое нулевое значение $|\gamma(s)|$ принимает при $kas/z = 3,83$, т. е. при

$$s = s_0 = 0,61\lambda/\theta_0, \quad (4.5.15)$$

где $\theta_0 = a/z$ — так называемый угловой радиус источника излучения. Радиус, значение которого удовлетворяет условию $|\gamma(s)| = 0,88$, будем считать радиусом корреляции (ср. с (11)):

$$r_k = 0,16\lambda z/a = 0,16\lambda/\theta_0. \quad (4.5.16)$$

Видно, что радиус корреляции прямо пропорционален расстоянию z от источника излучения и обратно пропорционален размеру источника. При $a \rightarrow \infty$ излучение остается δ -коррелированным.

Рассмотренная модель источника δ -коррелированного в пространстве излучения, ограниченного круглой диафрагмой, широко используется в астрофизике для описания собственного излучения звезд. Измерения радиуса корреляции приходящего от звезд излучения согласно (14) могут быть использованы для определения угловых размеров звезд (или диаметров звезд, если известно расстояние z).

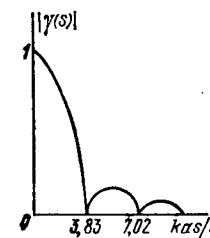


Рис. 4.15. Степень пространственной когерентности $|\gamma(s)|$ пространственно некогерентного источника, имеющего форму диска радиуса a .

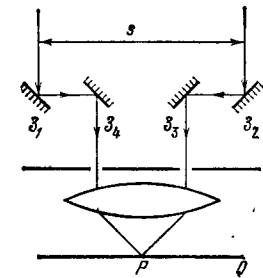


Рис. 4.16. Схема звездного интерферометра Майкельсона: Z_1, Z_2 — зеркала, Q — экран

Для измерения поперечной корреляционной функции излучения, приходящего от звезды, можно использовать звездный интерферометр Майкельсона (рис. 4.16), видность интерференционной картины в точке наблюдения P изменяется в соответствии с зависимостью, изображенной на рис. 4.15, при изменении расстояния между зеркалами Z_1 и Z_2 . Если угловой радиус звезды $\theta_0 \approx 10^{-7}$, то $|\gamma(s)| = 0$ при расстоянии $s = 4$ м ($k = 10^5 \text{ см}^{-1}$). Угловой радиус Солнца, наблюдаемый с Земли, $\theta_0 \approx 0,0047$; таким образом, для волн оптического диапазона радиус корреляции (16) принимает значение $r_k \approx 0,02$ мм. Практическое применение звездного интерферометра Майкельсона ограничено, однако, тем обстоятельством, что на измеряемую степень когерентности звезды сильное влияние оказывают флуктуации показателя преломления атмосферы. Эти флуктуации приводят лишь к фазовым искажениям, которые не влияют на измерения корреляционных функций интенсивности (см. § 3 гл. 5).

Заметим, что корреляционная функция (14) описывается точно таким же выражением, как и поле плоской монохроматической волны, дифрагированное на круглом отверстии. Действительно,

для амплитуды волны, дифрагированной на круглом отверстии, имеем [1]

$$|A(\mathbf{r}, z)| = \sqrt{I_0} \left| \frac{a}{r} J_1\left(\frac{kar}{z}\right) \right|, \quad (4.5.17)$$

что аналогично (14); см. также рис. 4.17. Радиус дифрагированного когерентного пучка $a(z)$ выражается формулой, аналогичной (15):

$$a(z) = 0,61\lambda z/a. \quad (4.5.18)$$

До сих пор речь шла о дифракции δ -коррелированного излучения с равномерным распределением интенсивности по апертуре.

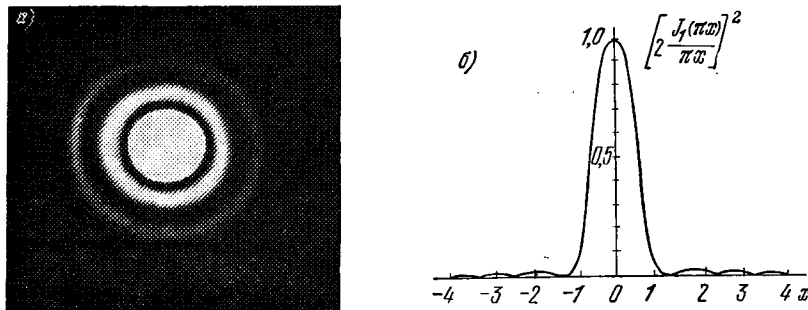


Рис. 4.17. Картина дифракции полностью когерентной волны на круглом отверстии (а) и соответствующее ей распределение интенсивности (б) [13].

$$x = kar/\lambda z.$$

Покажем теперь, что неравномерное распределение интенсивности, вообще говоря, изменяет вид поперечной корреляционной функции поля. В качестве примера рассмотрим распространение цилиндрически-симметричного пучка с плавным поперечным распределением интенсивности (дифракция на «мягкой» диафрагме), когда распределение интенсивности $I(\mathbf{R})$ имеет вид

$$I(\mathbf{R}) = I_0 \exp\{-2R^2/a^2\}; \quad (4.5.19)$$

здесь a — радиус пучка по уровню e^{-2} .

В этом случае вместо выражения (13) для поперечной корреляционной функции имеем

$$B_{\perp}(s; z) = 2\pi C I_0 e^{-iks^2/z} \int_0^{\infty} R e^{-2R^2/a^2} J_0\left(\frac{kRs}{z}\right) dR. \quad (4.5.20)$$

Интегрирование приводит к следующему результату (ср. с (13)):

$$B_{\perp}(s; z) = \frac{\pi}{2} a^2 C I_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{kas}{z}\right)^2 - i\frac{ks^2}{z}\right\}. \quad (4.5.21)$$

Корреляционная функция (21) имеет гауссовский вид с радиусом корреляции по половинному уровню

$$r_k = \lambda z \sqrt{2}/\pi a. \quad (4.5.22)$$

Дифракция некогерентной волны на решетке. Полученные выше результаты относятся к дифракции некогерентных волн на одном отверстии. Здесь мы обратимся к более сложному объекту — дифракционной решетке и покажем, как изменяются когерентные свойства дифрагированной волны с изменением числа штрихов решетки. Для простоты рассмотрим одномерную решетку с шагом p , состоящую из щелей шириной d (рис. 4.18, а). Полная ширина решетки $a = 2Np + d$; число щелей решетки для упрощения дальнейшей записи принимаем равным $2N + 1 = N_0$.

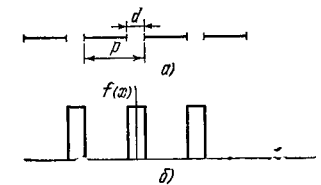


Рис. 4.18. Дифракционная решетка (а) и ее передаточная функция (б).

Если передаточная функция по интенсивности одной щели (рис. 4.18, б)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq d/2, \\ 0, & |x| \geq d/2, \end{cases} \quad (4.5.23a)$$

то пропускание всей дифракционной решетки

$$F(x) = \sum_{n=-N}^N f(x - np). \quad (4.5.23b)$$

Найдем пространственную когерентность в плоскости наблюдения между симметрично расположенными точками $x_1 = -x_2 = s$ для случая, когда падающая на дифракционную решетку волна имеет равномерное распределение интенсивности. Тогда подстановка (23) в (10) дает

$$\begin{aligned} B_{\perp}(s; z) &= C I_0 \int_{-a/2}^{+a/2} F(x) e^{i2ksx/z} dx = \\ &= C I_0 \sum_{n=-N}^N e^{i2ksnp/z} \int_{-a/2-np}^{a/2-np} f(x) e^{i2ksx/z} dx. \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

В силу условий (23a) и $a/2 - Np \geq d/2$

$$\int_{-a/2-np}^{a/2-np} f(x) e^{i2ksx/z} dx = d \frac{\sin(ksd/z)}{ksd/z}. \quad (4.5.25)$$

С учетом (25) после суммирования выражение для поперечной корреляционной функции (24) принимает вид

$$B_{\perp}(s; z) = I_0 C d \frac{\sin N_0 \delta}{\sin \delta} \frac{\sin(\delta d/p)}{\delta d/p}, \quad (4.5.26)$$

где $\delta = \delta(s) = ksp/z$. Отсюда для степени пространственной когерентности имеем

$$|\gamma(s; z)| = \left| \frac{\sin N_0 \delta}{N_0 \sin \delta} \frac{\sin(\delta d/p)}{\delta d/p} \right|. \quad (4.5.27)$$

Заметим, что выражение (27) аналогично выражению для распределения амплитуды полностью когерентной волны, дифрагирующей на решетке.

Выражения (26) и (27) получены для одномерной дифракционной решетки. Однако они справедливы и для двумерной решетки, если речь идет о пространственной когерентности между двумя точками, имеющими одинаковые координаты вдоль оси y (см. (10)). В общем случае для двумерной решетки корреляционная функция определяется произведением функций вида (26).

Из (27) для случая одной щели ($N_0 = 1$) шириной $d = a$ следует

$$|\gamma(s; z)| = \left| \frac{\sin(ksa/z)}{ksa/z} \right|. \quad (4.5.28)$$

Здесь, как и при дифракции на круглом отверстии (см. формулы (16) и (22)), радиус корреляции обратно пропорционален углу $\theta_0 = a/z$, под которым щель видна из плоскости измерения:

$$r_k = \pi z / 2ka \approx (k\theta_0)^{-1}. \quad (4.5.29)$$

Значение (29) определено по уровню $|\gamma(r_k; z)| = 2/\pi$. На рис. 4.19 показана зависимость степени когерентности (27) от s для различного числа N_0 штрихов решетки.

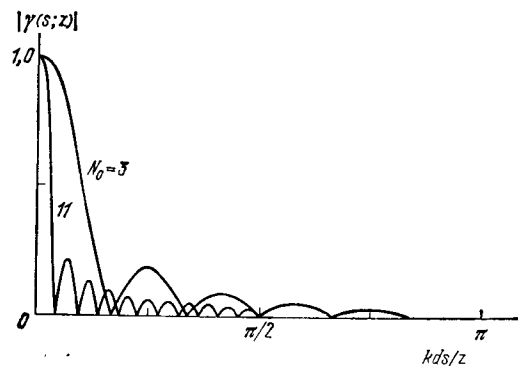


Рис. 4.19. Нормированная пространственная корреляционная функция для различного числа N_0 штрихов решетки.

В формуле (27) второй множитель, аналогичный (28), представляет собой действие одной щели шириной d , а первый множитель учитывает результат действия всей дифракционной решетки. Если $N_0 \gg 1$, радиус корреляции определяется первым множителем:

$$r_k = \pi z / 2kN_0p \approx \pi z / 2ka, \quad (4.5.30)$$

так как $N_0p = (2N + 1)p = a + p - d \approx a$. Таким образом, радиус корреляции рассеянной на дифракционной решетке некогерентной волны такой же, как в случае дифракции некогерентной волны на щели, равной ширине дифракционной решетки.

Влияние некогерентности волны на пространственную когерентность. Предыдущие результаты относятся к монохроматической волне. Рассмотрим

теперь, как неполная временная когерентность волны может влиять на пространственную когерентность [14].

Физика эффекта заключается в следующем. Как мы выяснили, анализируя теорему Ван Цинттерта—Чернике, изменение радиуса корреляции в процессе распространения связано с дифракцией пучка конечной апертуры. Естественно, что если мы имеем дело с некогерентным излучением, различные спектральные компоненты частотного спектра дифрагируют по-разному. Это приводит к отличию дифракционной картины от таковой для случая монохроматической волны.

Здесь возникает и другой вопрос. Пусть пространственно-временная корреляционная функция поля источника распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций. Сохраняется ли это свойство в любой точке пространства для практически реализуемых параметров?

Итак, предположим, что в плоскости $z = 0$ пространственно-временная корреляционная функция поля распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций:

$$B_0(r, R; \tau) = B_{\perp 0}(r, R) B_0(\tau). \quad (4.5.31)$$

Применив к (31) преобразование Фурье, получим

$$B_0(r, R; \omega) = G_0(\omega) B_{\perp 0}(r, R), \quad (4.5.32)$$

где функция $B_{\perp 0}(r, R)$ дается выражением (8), $G_0(\omega)$ — спектральная плотность. В случае стационарного поля для каждой спектральной компоненты на основе результатов § 4 можно записать

$$B(r, R, \omega; z) = G_0(\omega) B_{\perp}(r, R; z). \quad (4.5.33)$$

Предположим также для простоты, что среда недиспергирующая ($k = \omega/c$), а поле в плоскости источника излучения δ -коррелировано в пространстве. Тогда согласно (33) и (9) пространственно-временная корреляционная функция в среде равна

$$B(r, R, \tau; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(r, R, \omega; z) e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ = - \left(\frac{h}{2\pi cz} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) I(R') e^{i\omega f} d^2R', \quad (4.5.34)$$

где

$$f = \frac{1}{cz} r(R' - R) - \tau.$$

Для квазимонохроматического поля со средней частотой ω_0 ($G_0(\omega) = G_0(\omega - \omega_0)$) выражение (34) можно упростить:

$$B(r, R, \tau; z) = \left(\frac{h\omega_0}{2\pi cz} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(R') e^{i\omega_0 f} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\Omega) e^{i\Omega f} d\Omega d^2R'. \quad (4.5.35)$$

Для гауссовского спектра поля, т. е. временной корреляционной функции (4.4.3), последний интеграл в (35) равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tau_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_0^2 \Omega^2 / 4 + i\Omega t} d\Omega = e^{-t^2 / \tau_0^2}$$

(через τ_0 обозначено время корреляции исходного излучения). Следовательно, выражение (35) принимает вид

$$B(r, R, \tau; z) = \left(\frac{h\omega_0}{2\pi cz} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(R') e^{-t^2 / \tau_0^2 + i\omega_0 t} d^2 R'. \quad (4.5.36)$$

Отсюда следует, что при $z \neq 0$ запись корреляционной функции поля в виде произведения временной и пространственной корреляционных функций остается справедливой при условии

$$|f + \tau| = |r(R' - R)/cz| \ll \tau_0,$$

которое в координатах r_1, r_2 (3) и при $r_1 = 0, r_2 = s$ можно записать как

$$sa/z \ll c\tau_0, \quad s^2/z \ll c\tau_0, \quad (4.5.37a, б)$$

где a — размер источника.

Подстановка в (37) вместо текущей координаты s радиуса корреляции r_k (например, выражения (16) для монохроматического поля) показывает, что условие (37a) выполняется всегда ($ck_0\tau_0 \gg 1$ или $\omega_0\tau_0 \gg 1$), а для выполнения условия (37б) необходимо, чтобы

$$z \ll l_0, \quad l_0 = (a\omega_0)^2 c^{-1} \tau_0 \approx (\omega_0/\Delta\omega) ka^2 \quad (4.5.38)$$

Таким образом, неполная временная когерентность поля не влияет на пространственную когерентность при выполнении (38). Радиус корреляции при этом пропорционален пройденному расстоянию z (11).

Оценим характерную длину l_0 . Пусть радиус источника излучения $a = 1$ см, $\Delta\omega/\omega_0 \approx 10^{-4}$ и $k = 10^5$ см $^{-1}$; тогда $l_0 \approx 10^9$ см. Следовательно, в практических случаях временная некогерентность излучения не оказывает влияния на пространственную когерентность, а произведение временной и пространственной корреляционных функций дает пространственно-временную корреляционную функцию поля.

В другом предельном случае, $z \gg l_0$, согласно (36)

$$B(s, \tau; z) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{4} \frac{s^2}{cz\tau_0} \right\}$$

и радиус корреляции оценивается как

$$r_k \approx 2 (c\tau_0 z)^{1/2}, \quad (4.5.39)$$

т. е. пропорционален корню квадратному из длины z (см. также рис. 4.20).

Временная некогерентность изменяет, таким образом, закон роста радиуса корреляции с увеличением расстояния. Естественно, что пространственная некогерентность влияет в свою очередь на временную когерентность поля (см. (36)). Однако на этом вопросе здесь не будем останавливаться,

Дифракция частично когерентной волны на одном и двух отверстиях. До сих пор мы считали, что исходная волна δ -коррелирована в пространстве. В реальных условиях радиус корреляции случайной волны или источника шумового излучения всегда имеет конечное значение.

Решение задачи о дифракции частично когерентной волны дается общей формулой (7), определяющей изменение пространственной когерентности волны в процессе распространения. Мы, однако, изложим здесь другой метод, удобный для описания распространения гауссовских световых пучков, поперечная корреляционная функция которых также имеет вид гауссовской кривой.

В квазиоптическом приближении гауссовская форма пучка и форма корреляционной функции в процессе распространения остаются неизменными; с пройденным расстоянием z изменяются лишь параметры этих кривых. Это связано со следующим обстоятельством.

Согласно общему решению (7) в этом случае для произвольного расстояния z поперечная корреляционная функция представляет собой свертку функции $B_{\perp 0}(r', R)$ гауссовского вида (4.2.31) и функции отклика, имеющей вид экспоненты, показатель которой квадратичен по $r - r'$ и $R - R'$. В подобных случаях интегральное преобразование (7) сохраняет гауссовский вид функции B_{\perp} (см. примеры расчета спектров и корреляционных функций в §§ 3 и 8 гл. 1).

Для рассматриваемого гауссовского пучка дифференциальное уравнение в частных производных для корреляционных функций можно свести к уравнениям в обыкновенных производных для функций, описывающих ширину пучка, ширину корреляционной функции и т. п.

В этом разделе мы используем такой подход для рассмотрения преобразования радиуса корреляции в пучке. Мы установим весьма важный факт, заключающийся в том, что для реальной модели пучка с ненулевым начальным радиусом корреляции коэффициент когерентности пучка (см. § 8 гл. 1) сохраняется в процессе распространения, т. е. является статистическим-инвариантом пучка. (В гл. 8 мы воспользуемся таким подходом для изучения самофокусировки световых пучков.)

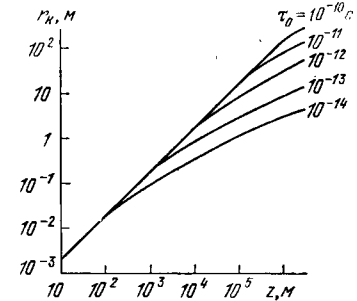


Рис. 4.20. Зависимость радиуса корреляции некогерентного излучения от расстояния z при различных временах корреляции τ_0 [14].

Радиус источника 1 мм.

Рассмотрим сначала дифракцию частично когерентной волны на одном отверстии. Пусть амплитудный коэффициент пропускания (передаточная функция) отверстия равен

$$M(\mathbf{r}) = \exp\{-\alpha(\mathbf{r}/a)^2\} \quad (4.5.40)$$

и падающее излучение статистически изотропно в пространстве и имеет экспоненциальную корреляционную функцию. Тогда непосредственно за отверстием поперечная корреляционная функция волны равна

$$B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \langle A_0(\mathbf{r}_1) A_0^*(\mathbf{r}_2) \rangle = I_0 \exp\left\{-\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{a^2} - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{r_0^2} - \frac{i\alpha_0}{2}(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2)\right\}, \quad (4.5.41a)$$

где a — радиус пучка, r_0 — радиус корреляции, параметр α_0 характеризует фазу корреляционной функции. В переменных \mathbf{R} и \mathbf{r} (3) функция (41a) имеет вид

$$B_{\perp 0}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = I_0 \exp\left\{-\frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} - i\alpha_0 \mathbf{R}\mathbf{r}\right\}, \quad (4.5.41b)$$

где $r_{\text{эфф}}$ определяется формулой (4.2.32). Изменение корреляционной функции (41b) в процессе распространения волны описывается уравнением (4). Его решение ищем в виде

$$B_{\perp}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z) = I_0 f(z) \exp\left\{-g(z) \frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - h(z) \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} - i\alpha(z) \mathbf{R}\mathbf{r}\right\}. \quad (4.5.42)$$

Выражение (42) представляет собой обобщение формулы (41b). Производные функции (42) равны

$$\frac{\partial B_{\perp}}{\partial z} = I_0 \left[f' - fg' \frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - fh' \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} - if\alpha' \mathbf{R}\mathbf{r} \right] \exp\{\dots\}, \quad (4.5.43a)$$

$$\frac{\partial^2 B_{\perp}}{\partial \mathbf{R} \partial \mathbf{r}} = I_0 \left[-i2\alpha f + f \left(-\alpha^2 \mathbf{R}\mathbf{r} + hg \frac{8\mathbf{R}\mathbf{r}}{a^2 r_{\text{эфф}}^2} + iah \frac{2\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} + i\alpha g \frac{4\mathbf{R}^2}{a^2} \right) \right] \exp\{\dots\}. \quad (4.5.43b)$$

В (43a) штрих означает производную по z . Подставляем (43) в (4) и приравниваем нулю коэффициенты перед различными степенями $\mathbf{R}^m \mathbf{r}^n$ ($m, n = 0, 1, 2$). В результате получаем систему уравнений

$$\frac{f'}{f} = -\frac{2}{k}\alpha, \quad \frac{g'}{g} = -\frac{2}{l}\alpha, \quad \frac{h'}{h} = -\frac{2}{k}\alpha, \quad (4.5.44)$$

$$k\alpha' = -\alpha^2 + \frac{8}{a^2 r_{\text{эфф}}^2} hg.$$

Значения функций в (44) при $z = 0$ следующие:

$$f(0) = g(0) = h(0) = 1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (4.5.45)$$

Из (44) легко видеть, что

$$f(z) \equiv g(z) \equiv h(z). \quad (4.5.46)$$

Подставляя первое уравнение системы (44) в последнее, получаем уравнение для функции f :

$$-ff'' + \frac{3}{2}(f')^2 = \frac{16}{(kar_{\text{эфф}})^2} f^4. \quad (4.5.47)$$

С помощью замены $f = u^{-2}$ приходим к уравнению

$$u^3 u'' = \frac{8}{(kar_{\text{эфф}})^2}. \quad (4.5.48)$$

Это уравнение имеет интеграл

$$(u')^2 = -u^{-2} \frac{8}{(kar_{\text{эфф}})^2} + C_0, \quad (4.5.49)$$

где постоянная интегрирования

$$C_0 = \left(\frac{\alpha_0}{k}\right)^2 + l_x^{-2}, \quad l_x = \frac{kar_{\text{эфф}}}{2\sqrt{2}}, \quad (4.5.50)$$

l_x — дифракционная длина. Интегрирование уравнения (49) дает

$$u^2 = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k}\right)^2 + l_x^{-2} \right] z^2 + 2\frac{\alpha_0}{k} z + 1. \quad (4.5.51)$$

Наконец, пользуясь соотношениями (44), находим функцию

$$\alpha(z) = \frac{k}{2} \frac{(u^2)'}{u^2}. \quad (4.5.52)$$

Запишем функцию (42) с учетом полученных результатов (46), (51) и (52) и перейдем к переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (3):

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{1}{u^2} \left[\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{a^2} + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{r_0^2} - i\frac{k}{4}(u^2)'(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2) \right]\right\}. \quad (4.5.53)$$

Отсюда нетрудно найти распределение интенсивности пучка ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}$)

$$I(\mathbf{R}, z) = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{2\mathbf{R}^2}{(ua)^2}\right\} = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{2\mathbf{R}^2}{a^2(z)}\right\} \quad (4.5.54)$$

и степень когерентности ($s = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$|\gamma(s; z)| = \exp\left\{-\frac{s^2}{(ur_0)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{s^2}{r_x^2(z)}\right\}. \quad (4.5.55)$$

Из (54) и (55) следует, что радиус пучка $a(z)$ и радиус корреляции $r_x(z)$ изменяются по одному и тому же закону:

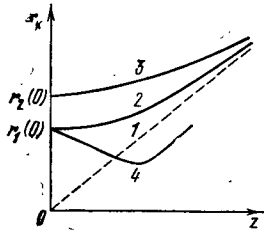
$$a(z) = au, \quad r_x(z) = r_0 u. \quad (4.5.56a)$$

Следовательно, коэффициент когерентности пучка (см. § 8 гл. 1)

$$C = r_k(z)/a(z) = r_0/a \quad (4.5.56)$$

есть постоянная величина, определяемая начальным значением (статистический инвариант пучка).

Согласно (51) в случае расходящихся пучков ($\alpha_0 > 0$) радиусы пучка и корреляции монотонно увеличиваются с расстоянием. Интересно, что при $\alpha_0 = 0$ (рис. 4.21) и $a \gg r_0$ в дальней зоне частично когерентного пучка (на расстояниях z , больших дифракционной длины l_d (50)) радиус пучка определяется начальным радиусом корреляции:



$$a(z) = 2\sqrt{2} z/kr_0, \quad (4.5.57a)$$

а радиус корреляции определяется первоначальным значением радиуса пучка:

$$r_k(z) = 2\sqrt{2} z/ka = \sqrt{2} \lambda z/\pi a, \quad (4.5.57b)$$

Рис. 4.21. Зависимость радиуса корреляции дифрагированной на круглом отверстии частично когерентной волны от расстояния до отверстия:

- 1) дельта-коррелированная исходная волна;
- 2) $r_0 = r_1(0) \neq 0, \alpha_0 = 0$;
- 3) $r_0 = r_2(0) > r_1(0), \alpha_0 = 0$;
- 4) $r_0 = r_1(0) \neq 0, \alpha_0 < 0$.

т. е. так же, как при δ -коррелированной исходной волне (см. (22)). В ближней зоне пучка ($z \ll l_d$) при $\alpha_0 = 0$ как радиус пучка, так и радиус корреляции согласно (56), (50) не меняются.

В случае дифракции сходящегося пучка ($\alpha_0 < 0$) радиусы пучка и корреляции сначала уменьшаются с расстоянием, достигая минимума при

$$z = z_0 = -\frac{\alpha_0}{k} \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 + l_d^2 \right]^{-1/2}, \quad (4.5.58)$$

а затем увеличиваются. На расстоянии $z = z_0$ значение функции u (51) равно

$$u^2(z_0) = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 l_d^2 + 1 \right]^{-1}. \quad (4.5.59)$$

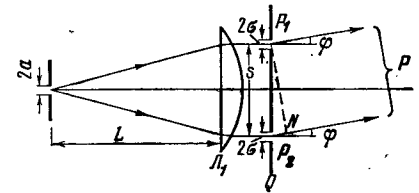
Дифракционной длиной для частично когерентного пучка является величина $l_d = kar_{\text{эф}}/2\sqrt{2}$ (50). На расстоянии $z = l_d$ радиусы пучка и корреляции увеличиваются в $\sqrt{2}$ раз (при $\alpha_0 = 0$). Если исходный радиус корреляции $r_0 \rightarrow \infty$, то величина l_d стремится к величине дифракционной длины для полностью когерентного пучка ($l_d \rightarrow ka^2/2$).

Другой характерной длиной, которая возникает в рассматриваемой задаче, является длина продольной корреляции $l_{||}$. Для ее оценки воспользуемся пространственно-временной аналогией, отмеченной в § 3, и формулой (4.4.12). Аналогом времени корреляции τ_r является радиус поперечной корреляции r_0 , а аналогом дисперсионного параметра g^{-1} — волновое число k . В соответствии с этим искомая длина продольной корреляции равна

$$l_{||} = kr_0^2/2. \quad (4.5.60)$$

Значения полей в поперечных сечениях пучка, продольное расстояние между которыми превосходит масштаб (60), не коррелированы между собой. Ясно, что при $r_0 < a$ длина $l_{||} < l_d$.

Перейдем теперь к анализу дифракции частично когерентной волны на двух отверстиях (рис. 4.22). Фактически мы вернемся к интерферометру Юнга (рис. 4.1), при рассмотрении которого в § 2 было введено понятие пространственной когерентности и обоснован метод измерения поперечной корреляционной функции поля. Теперь мы располагаем теоретическими основами для более строгого расчета интерференционной картины при дифракции световой волны на двух отверстиях.



В схеме, изображенной на рис. 4.22, частичная когерентность волны возникает вследствие распространения излучения от некогерентного источника до линзы L_1 , расположенной перед экраном Q с отверстиями P_1 и P_2 . За экраном располагается вторая линза L_2 (на рис. 4.22 не показана), в фокальной плоскости которой наблюдается интерференция от двух отверстий. Изменение расстояния s между отверстиями P_1 и P_2 приводит к изменению распределения интенсивности в интерференционной картине (см. рис. 4.23). Рассчитаем это распределение интенсивности.

Согласно формуле (13) комплексная степень когерентности между точками P_1 и P_2 экрана Q равна

$$\gamma(s; L) = |\gamma| e^{-i\psi_0} = \frac{2J_1(v)}{v} e^{-i\psi_0}, \quad (4.5.61)$$

где $v = kas/L$, $\psi_0 = k(r_2^2 - r_1^2)/2L$, a — радиус источника излучения, L — расстояние от источника до линзы L_1 , r_1 — расстояние от P_1 до оси пучка.

Для симметрично расположенных относительно оси точек P_1 и P_2 фаза $\psi_0 = 0$. Последнее условие считаем выполненным. Будем также предполагать, что радиусы отверстий одинаковы и гораздо меньше радиуса корреляции r_k (16) излучения в плоскости экрана. Тогда распределения интенсивностей $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ от каждого отверстия даются формулой Эйри (17) для дифракции полностью когерентной волны на круглом отверстии. Если точка наблюдения P служит фокусом для лучей, дифрагированных под углом ϕ к нор-

мали экрана Q , то согласно (17) с точностью до нормировочного множителя имеем

$$I^{(1)}(P) = I^{(2)}(P) = \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2, \quad u = k\sigma\varphi, \quad (4.5.62)$$

где $\varphi = r/f_2$, f_2 — фокусное расстояние линзы L_2 , r — расстояние от оси до точки P , σ — радиус отверстий P_1 и P_2 . Разность фаз для лучей, дифрагированных к точке P от двух отверстий, равна (см. рис. 4.22)

$$\delta = kP_2N = ks \sin \varphi = ks\varphi = \tilde{L}uv, \quad \tilde{L} = L/ka\sigma. \quad (4.5.63)$$

Подставляя (61) — (63) в выражение (4.2.6), для распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы L_2 получаем

$$I(s, \varphi) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left[1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \cos(\psi(v) - \tilde{L}uv) \right], \quad (4.5.64)$$

где

$$\psi(v) = \begin{cases} 0, & J_1(v) > 0, \\ \pi, & J_1(v) < 0. \end{cases}$$

Кривые, рассчитанные по формуле (64), приведены на рис. 4.23, где представлены и фотографии интерференционных картин для различных расстояний s между отверстиями P_1 и P_2 . Пунктирные кривые рис. 4.23 соответствуют огибающим

$$I_{\max/\min}(s, \varphi) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 \pm \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\}.$$

Заметим, что при значении фазы $\psi = \pi$ (рис. 4.23, Г, Д) интенсивность в центре интерференционной картины имеет относительный минимум.

Дифракция в фокусе линзы. Рассмотрим применительно к случайной волне классическую задачу оптики о фокусировке светового пучка. Естественно ожидать, что неполная когерентность пучка будет ухудшать возможность концентрации энергии в фокусе.

Тонкая линза, через которую проходит падающая волна, задерживает ее фазовый фронт на величину, пропорциональную толщине линзы, в каждой точке, т. е. тонкая линза изменяет фазу падающей волны, трансформируя ее волновой фронт. Передаточная функция сферической линзы [13]

$$M(r) = \exp \left\{ i \frac{k}{2f} r^2 \right\}. \quad (4.5.65)$$

Здесь f — фокусное расстояние линзы. Для собирающих линз $f > 0$, для рассеивающих линз $f < 0$.

Пусть источник излучения находится на расстоянии l_1 от линзы L (плоскость $z=0$, см. рис. 4.24). Комплексная амплитуда

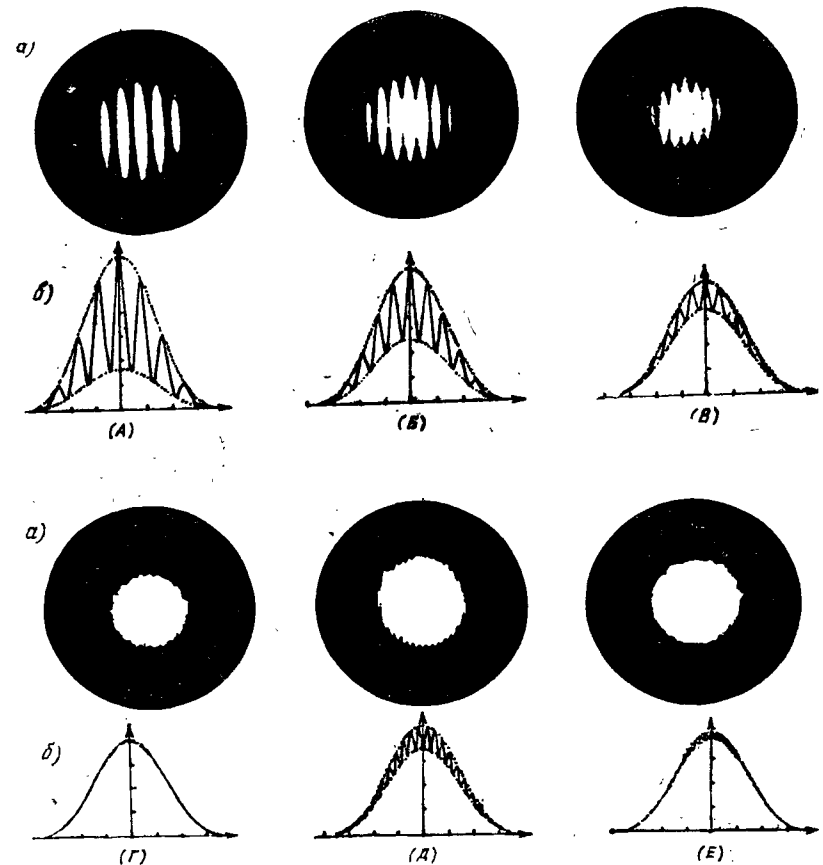


Рис. 4.23. Интерференция двух частично когерентных световых пучков [1]:

(А) $s = 0,6$ см; $|\gamma(s)| = 0,593$; $\psi = 0$. (Г) $s = 1,2$ см; $|\gamma(s)| = 0,015$; $\psi = \pi$.
 (Б) $s = 0,8$ см; $|\gamma(s)| = 0,361$; $\psi = 0$. (Д) $s = 1,7$ см; $|\gamma(s)| = 0,123$; $\psi = \pi$.
 (В) $s = 1$ см; $|\gamma(s)| = 0,146$; $\psi = 0$. (Е) $s = 2,3$ см; $|\gamma(s)| = 0,035$; $\psi = 0$.

а) Наблюдаемые интерференционные картины; б) теоретические кривые распределения интенсивности; s — расстояние между отверстиями экрана Q , диаметр отверстий в точках P_1 и P_2 — 0,14 см, средняя длина волны $\lambda = 579$ нм. По оси абсцисс отложено значение u .

излучения источника $A(r, z=0) = A_0(r)$. Процесс распространения волны от источника до линзы описывается параболическим уравнением (1). Амплитуда волны непосредственно перед линзой дается выражением

$$A_1(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(r_1) H_1(r - r_1) d^2r_1, \quad (4.5.66)$$

где

$$H_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \frac{ik}{2\pi l_n} \exp\left\{-i \frac{k}{2l_n} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)^2\right\} \quad (4.5.66a)$$

— функция Грина уравнения (1). Непосредственно после линзы амплитуда волны с учетом передаточной функции $M(\mathbf{r})$ (65) равна

$$A_2(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r}) A_1(\mathbf{r}). \quad (4.5.67)$$

За линзой процесс распространения волны описывается опять

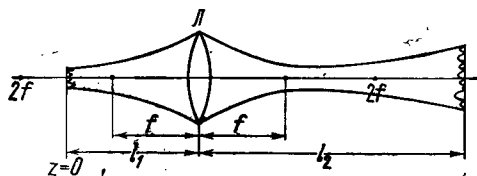


Рис. 4.24. Прохождение частично когерентного светового пучка через линзу (качественная картина).

уравнением (1). На некотором расстоянии l_2 от линзы для амплитуды волны имеем

$$A(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\mathbf{r}_2) H_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) d^2r_2. \quad (4.5.68)$$

Подстановка в (68) выражений (67) и (66) дает значение комплексной амплитуды $A(\mathbf{r})$ через ее исходное значение $A_0(\mathbf{r})$:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d^2r_1. \quad (4.5.69)$$

Здесь $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — функция Грина, характеризующая весь процесс распространения:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) M(\mathbf{r}_2) H_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) d^2r_2. \quad (4.5.70)$$

Выражение (70) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) &= \\ &= -\frac{k^2}{(2\pi)^2 l_1 l_2} \exp\left\{-i \frac{k}{2} \left(\frac{r^2}{l_2} + \frac{r_1^2}{l_1}\right)\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-i \frac{k}{2} q r_2^2 + i k h r_2\right\} d^2r_2 = \\ &= (\pi l_1 l_2 q^2)^{-1} \exp\left\{-i \frac{k}{2} \left(\frac{r^2}{l_2} + \frac{r_1^2}{l_1}\right) - i \frac{k}{q} h^2\right\}, \end{aligned} \quad (4.5.71)$$

где

$$q = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \frac{1}{f}, \quad h = \frac{r_1}{l_1} + \frac{r}{l_2}. \quad (4.5.72)$$

В оптически сопряженных плоскостях ($q=0$) выражение (71) дает δ -функцию:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \left(-\frac{1}{l_1 l_2}\right) \exp\left\{-i \frac{k}{2} \left(\frac{r^2}{l_2} + \frac{r_1^2}{l_1}\right)\right\} \delta(\mathbf{h}). \quad (4.5.73)$$

В геометрической оптике условие $q=0$ известно как формула линзы

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}. \quad (4.5.74)$$

Подставляя (73) в (69), получаем

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= \left(-\frac{1}{l_1 l_2}\right) \exp\left\{-i \frac{k}{2} \frac{r^2}{l_2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) \exp\left\{-i \frac{k}{2l_1} r_1^2\right\} \times \\ &\times \delta\left(\frac{r_1}{l_1} + \frac{r}{l_2}\right) d^2r_1 = \left(-\frac{l_1}{l_2}\right) A_0\left(-\frac{l_1 r}{l_2}\right) \exp\left\{-i k r^2 \frac{l_1 + l_2}{2l_1^2}\right\}. \end{aligned} \quad (4.5.75)$$

Видно, что в оптически сопряженных плоскостях комплексные амплитуды световых пучков связаны довольно простым соотношением. Значение амплитуды меняется в l_1/l_2 раз, поперечный пространственный размер пучка изменяется в l_2/l_1 раз. Кроме того, изображение перевернуто относительно первоначального. При выводе соотношения (75) мы нигде не использовали когерентные свойства пучков, поэтому оно справедливо как для полностью, так и для частично когерентных световых пучков.

Пользуясь (75), нетрудно получить связь между корреляционными функциями в оптически сопряженных плоскостях:

$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 B_{10}\left(-\frac{l_1}{l_2} \mathbf{r}_2, -\frac{l_1}{l_2} \mathbf{r}_1\right) \exp\left\{i \frac{k(l_1 + l_2)}{2l_1^2} (r_2^2 - r_1^2)\right\}. \end{aligned} \quad (4.5.76)$$

Отсюда следует, что, помимо изменения масштаба когерентности пучка, при прохождении им линзы происходит изменение фазы корреляционной функции.

Для степени когерентности в оптически сопряженных плоскостях из (76) имеем

$$|\gamma(s)| = |\gamma_0(l_1 s / l_2)|.$$

В силу этого изменение радиуса корреляции при прохождении через линзу определяется соотношением

$$r_k = \frac{l_2}{l_1} r_0. \quad (4.5.77)$$

Если исходный пучок находится на двойном фокусном расстоянии $l_1 = 2f$, то расстояние $l_2 = 2f$ и радиус корреляции пучка остается неизменным: $r_k = r_0$. Следует, однако, подчеркнуть, что

фаза корреляционной функции в этом случае изменяется: появляется дополнительный множитель $\exp\left\{i \frac{k}{2f} (\mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_1^2)\right\}$ (см. (76)).

Рассмотрим еще один пример *фокусировки* сферической линзой *частично когерентного светового пучка*. Пусть пучок задан непосредственно перед линзой ($l_1 \approx 0$), причем его поперечная корреляционная функция $B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ дается выражением (41а). Найдем минимальные размеры сфокусированного пучка и соответствующую интенсивность. Для такой постановки решение задачи фактически содержится в предыдущем разделе. Здесь только надо учесть изменение фазы корреляционной функции, вносимое линзой. Сразу же после линзы, в соответствии с (41а) и (65),

$$B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \exp\left\{i \frac{k}{2f} (\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2)\right\}. \quad (4.5.78)$$

Из (78) и (41а) видно, что для использования результатов, следующих за формулой (41а), нужно произвести замену

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 - k/f. \quad (4.5.79)$$

Наиболее интересными являются результаты при $\alpha_0 < k/f$, когда существует расстояние $z_0 \neq 0$, при котором радиусы корреляции и пучка минимальны. В соответствии с (58) расстояние до области перетяжки

$$z_0 = \left(\frac{1}{f} - \frac{\alpha_0}{k}\right) \left[\left(\frac{1}{f} - \frac{\alpha_0}{k}\right)^2 + l_x^{-2}\right]. \quad (4.5.80)$$

Дифракционная длина l_x частично когерентного пучка определяется (50). В геометрическом приближении ($k \rightarrow \infty$, $l_x \rightarrow \infty$), как и следовало ожидать,

$$z'_0 = f. \quad (4.5.81)$$

Дифракция приводит к отличию значения z_0 от f . При $\alpha_0 = 0$ расстояние до перетяжки

$$z''_0 = f/[1 + (f/l_x)^2] \quad (4.5.82)$$

меньше, чем фокусное расстояние линзы (рис. 4.25).

Для полностью когерентного пучка, полагая $l_x \rightarrow \infty$, из (80) имеем

$$z'''_0 = kf/(k - \alpha_0 f), \quad (4.5.83)$$

т. е. при наличии регулярной кривизны волнового фронта ($\alpha_0 \neq 0$) $z'''_0 > f$. В общем случае значение z_0 для частично когерентных пучков определяется конкуренцией дифракционных эффектов и эффектов, связанных с фазой корреляционной функции. Зависимость положения области перетяжки пучка от фазы корреляционной функции можно использовать, очевидно, для определения величины α_0 .

Распределение интенсивности в области перетяжки согласно (54) равно

$$I(\mathbf{r}, z_0) = I_0 u^{-2}(z_0) \exp\left\{-\frac{2\mathbf{r}^2}{(au(z_0))^2}\right\}, \quad (4.5.84)$$

где $u^2(z_0)$ определяется (59):

$$u^2(z_0) = \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha_0 k}{f}\right)^2 \left(\frac{l_x}{f}\right)^2\right]^{-1}. \quad (4.5.85)$$

Здесь наличие $\alpha_0 \neq 0$ эквивалентно изменению дифракционной длины l_x , поэтому далее считаем $\alpha_0 = 0$.

Радиус пучка в области перетяжки

$$a_{\min}(z_0) = au(z_0) = \left\{1 + \left(\frac{l_x}{f}\right)^2\right\}^{-1/2} a \approx \frac{2V_2 f}{kr_0}. \quad (4.5.86)$$

Интенсивность в центре пучка

$$I(0, z_0) = I_0 \left[1 + \left(\frac{l_x}{f}\right)^2\right] \approx \left(\frac{l_x}{f}\right)^2 I_0 = \left(\frac{a}{a_{\min}(z_0)}\right)^2 I_0. \quad (4.5.87)$$

Приближенные равенства в (86) и (87) справедливы при $l_x \gg f$.

Для случая регулярных гауссовских пучков в формулах (86) и (87) r_0^2 нужно заменить на a/V_2 . Таким образом, при фокусировке частично когерентных световых пучков *интенсивность в области перетяжки* меньше, чем для когерентных пучков, в $N = a^2/2r_0^2$ раз; соответственно во столько же раз увеличивается *площадь пятна в перетяжке*. Величина N равна среднему числу неоднородностей в пучке.

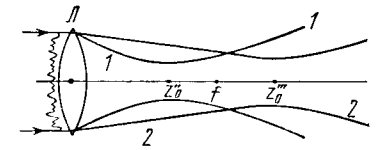


Рис. 4.25. Фокусировка частично когерентного светового пучка:

1) $l_x \neq 0$, $\alpha_0 = 0$; 2) $l_x \rightarrow \infty$, $\alpha_0 \neq 0$.

Покажем теперь, что линзу можно применять в качестве элемента, позволяющего измерить *угловой спектр излучения*. Обратимся к формуле (68), описывающей поле за линзой. Поскольку анализируемое излучение задано непосредственно перед линзой ($l_1 = 0$), то согласно (68) имеем

$$A(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) \exp\left\{i \frac{k}{2f} \mathbf{r}_1^2\right\} H(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) d^2 r_1$$

или, учитывая вид функции Грина (66а),

$$A(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) \exp\left\{-\frac{k}{2l} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 + i \frac{k}{2f} \mathbf{r}_1^2\right\} d^2 r_1, \quad (4.5.88)$$

где l — расстояние от линзы. В фокальной плоскости линзы, т. е. при $l=f$, амплитуда поля

$$A(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi f} \exp\left(-\frac{ik}{2f} r^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) \exp\left(-i\frac{k}{f} \mathbf{r}\mathbf{r}_1\right) d^2r_1 \quad (4.5.89)$$

есть фурье-образ исходного поля. Отличие от точного фурье-спектра поля связано с фазовым множителем, стоящим перед интегралом.

В соответствии с (89) распределение интенсивности в фокусе линзы

$$I(\mathbf{R}) = \left(\frac{k}{2\pi f}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \exp\left\{i\frac{k}{f} \mathbf{R}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right\} d^2r_1 d^2r_2. \quad (4.5.90)$$

В координатах \mathbf{r} и \mathbf{R} (3) выражение (90) принимает вид

$$I(\mathbf{R}) = \left(\frac{k}{2\pi f}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \exp\left\{-i\frac{k}{f} \mathbf{R}\mathbf{r}'\right\} d^2r' d^2R' \quad (4.5.91)$$

и с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром (4.2.27) случайного поля, причем поперечной компоненте \mathbf{x} волнового вектора соответствует величина $k\mathbf{R}/f$. В связи с этим можно воспользоваться выводами § 2. Так, например, формула (4.2.34) и рис. 4.9 показывают зависимость углового спектра (фокального размера пятна $\Delta\theta = s/f$) от параметров исходного пучка.

Распространение случайных волн в оптических волокнах. Задача о распространении случайных волн в оптических волокнах относится к классу задач о распространении волн в средах с регулярными неоднородностями. В общем случае такой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \Delta_{\perp}(\mathbf{r}) E - \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0. \quad (4.5.92)$$

Напомним, что ось z имеет направление распространения волны, $\Delta_{\perp}(\mathbf{r})$ — поперечный лапласиан, $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость, изменяющаяся в направлении, поперечном распространению.

Рассмотрим среду с квадратичным законом изменения диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \{1 - q^2 r^2\}. \quad (4.5.93)$$

Параметр q определяет скорость изменения $\varepsilon(\mathbf{r})$ *).

Решение уравнения (92) для квазиплоских монохроматических волн ищем в виде

$$E(\mathbf{r}, z) = A(z, \mathbf{r}) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}, \quad (4.5.94)$$

*) Далее для краткости такую среду будем называть средой с квадратичной неоднородностью.

где волновое число $k_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}/c$. В квазиоптическом приближении для комплексной амплитуды A получаем (см. (4.3.34))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A - i\frac{1}{2} k_0 q^2 r^2 A = 0. \quad (4.5.95)$$

Мы рассмотрим решение уравнения (95) с помощью разложения по модам. Решение уравнения (95) в виде разложения по модам [15, 16] имеет вид

$$A(\mathbf{r}, z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} A_{mn} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{a_0}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{a_0}\right) \times \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{a_0^2} + iq(1+m+n)z\right\}. \quad (4.5.96)$$

Здесь $H_m(\xi)$ — полиномы Эрмита, a_0 характеризует модовый размер пятна: $a_0 = (2/qk_0)^{1/2}$. (4.5.97)

Коэффициенты разложения A_{mn} определяются условиями на границе при $z=0$:

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a_0^2} \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\boldsymbol{\rho}) H_m\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{a_0}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}\eta}{a_0}\right) \times \exp\left\{-\frac{\xi^2+\eta^2}{a_0^2}\right\} d^2\rho, \quad (4.5.98)$$

где $A_0(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho}, z=0)$, $d^2\rho = d\xi d\eta$.

Подставляя A_{mn} в (96), амплитуду $A(\mathbf{r}, z)$ можно представить в виде

$$A(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) A_0(\boldsymbol{\rho}) d^2\rho. \quad (4.5.99)$$

Ядро $K(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ определяется выражением

$$K(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{2}{\pi a_0^2} e^{iqz} S(x, \xi; z) S(y, \eta; z) \exp\left\{-\frac{r^2+\rho^2}{a_0^2}\right\}, \quad (4.5.100)$$

$$S(x, \xi; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2} e^{-iqz}\right)^m H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{a_0}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{a_0}\right). \quad (4.5.101)$$

Пользуясь формулой Мелера [17]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2} z\right)^m H_m(x) H_m(y) = (1-z^2)^{-1/2} \exp\left\{\frac{2xyz - z^2(x^2+y^2)}{1-z^2}\right\}, \quad (4.5.102)$$

выражение (101) можно переписать:

$$S(x, \xi; z) = \exp\left\{\frac{x^2+\xi^2}{a_0^2} - \frac{iqz}{2}\right\} (2i \sin qz)^{-1/2} \exp\left\{i\frac{x^2+\xi^2}{a_0^2} \operatorname{ctg} qz - i\frac{x\xi k_0 q}{\sin qz}\right\}. \quad (4.5.103)$$

В результате функция (100) принимает вид

$$K(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = i \frac{k_0 \rho}{2\pi z} \exp\left\{i\left[\psi(\mathbf{r}, z) + \varphi(\boldsymbol{\rho}, z) - \frac{k}{2} \rho(z) r \rho\right]\right\}, \quad (4.5.104)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2} \frac{k_0}{z} [p(z) \cos qz] r^2, \quad p(z) = \frac{qz}{\sin qz}.$$

Определяем поперечную корреляционную функцию:

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\mathbf{r}_1, \rho_1) K^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) B_{\perp 0}(\rho_2, \rho_1) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2. \quad (4.5.105)$$

Пусть падающий пучок δ -коррелирован в пространстве (см. (8)):

$$B_{\perp 0}(\rho_1, \rho_2) = \langle A_0(\rho_1) A_0^*(\rho_2) \rangle = h^2 I(\rho_1) \delta(\rho_1 - \rho_2).$$

Тогда корреляционная функция (105) дается выражением (см. также [16])

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \left(\frac{hq}{\lambda \sin qz} \right)^2 \exp \{-i[\varphi(\mathbf{r}_1, z) - \varphi(\mathbf{r}_2, z)]\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} I(\rho) \exp \left\{ i \frac{p(z) k_0}{z} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \rho \right\} d^2 \rho. \quad (4.5.106)$$

При $q=0$ ($p=1$) из (106) получаем результат (9) для однородной среды. Выражение (106) представляет собой, таким образом, обобщение теоремы Ван Циттерта—Цернике на среды с квадратичной неоднородностью в поперечном сечении. По существу, отличие (106) от случая однородной среды состоит в замене расстояния z на некоторое эффективное расстояние $z_{\text{эфф}} = \frac{z}{p(z)} = \frac{1}{q} \sin qz$. Отсюда ясно, что когерентные свойства волны являются периодической функцией расстояния z . Это обусловлено тем обстоятельством, что среда с квадратичной неоднородностью действует как линза и, следовательно, на определенном расстоянии воспроизводит характеристики падающего излучения (см. (76)).

Если на рассматриваемую неоднородную среду падает пространственно некогерентный пучок радиуса a с равномерным распределением интенсивности, то, пользуясь формулой (14), можно сразу, не интегрируя (106), написать выражение для степени пространственной когерентности поля:

$$|\gamma(s; z)| = |2J_1(\tilde{s})/\tilde{s}|, \quad \text{где } \tilde{s} = k_0 a q s / \sin qz.$$

Радиус корреляции равен (ср. с (16))

$$r_k = 0,16\lambda |\sin qz| / aq. \quad (4.5.107)$$

Изменение r_k с расстоянием в однородной и неоднородной средах показано на рис. 4.26.

Общая формула (105) допускает анализ распространения пучков с начальным ненулевым радиусом корреляции в средах с квадратичной неоднородностью, например пучков, имеющих корреляционную функцию вида (41). Однако для анализа распространения частично когерентных пучков мы применим метод, изложенный в начале параграфа.

Из уравнения для корреляционной функции поля, следуя этой методике, получим уравнение вида (ср. с (4))

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{k_0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{R}} - ik_0 q^2 \mathbf{r} \mathbf{R} \right\} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = 0. \quad (4.5.108)$$

Решение уравнения (108), как и в случае однородной среды ($q=0$), ищем в виде (42):

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = I_0 f(z) \exp \left\{ -g(z) \frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - h(z) \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} - i\alpha(z) \mathbf{r} \mathbf{R} \right\}. \quad (4.5.109)$$

На границе среды ($z=0$)

$$f(0) = g(0) = h(0) = 1, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad r_{\text{эфф}}^{-2} = r_0^{-2} + a^{-2}/2 \quad (4.5.110)$$

(a и r_0 — радиусы пучка и корреляции соответственно).

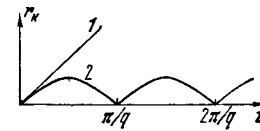


Рис. 4.26. Зависимость радиуса корреляции первоначально δ -коррелированного пучка от расстояния:

1 — в однородной среде, 2 — в среде с квадратичной неоднородностью.

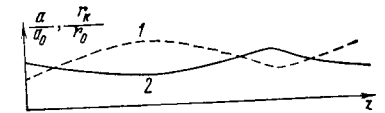


Рис. 4.27. Изменение в среде с квадратичной неоднородностью радиуса пучка и радиуса корреляции:

1) $q l_{\Delta} < 1$; 2) $q l_{\Delta} > 1$.

Подстановка (109) в (108) после приравнивания нулю коэффициентов перед различными степенями $R^m r^n$ приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} = -\frac{2\alpha}{k_0}, \quad k_0 \alpha' = -\alpha^2 + \frac{8hg}{(ar_{\text{эфф}})^2} - (k_0 q)^2. \quad (4.5.111)$$

Заметим, что при $q=0$ постоянный член в уравнении для α выпадает и мы приходим к уравнению (44).

Из (111) для функции $u = f^{-1/2}$ получаем (ср. с (48))

$$u^2 \left(u'' + \frac{q^2 u}{2} \right) = \frac{8}{(k_0 ar_{\text{эфф}})^2}. \quad (4.5.112)$$

Решение (112) с учетом условий (110) при $\alpha_0 = 0$ дает

$$u^2 = \cos^2 qz + \left(\frac{1}{q l_{\Delta}} \right)^2 \sin^2 qz. \quad (4.5.113)$$

Дифракционная длина l_{Δ} определяется выражением (50).

Изменение радиусов пучка и корреляции в процессе распространения определяется формулами (56a). Таким образом, в среде с квадратичной неод-

нородностью указанные параметры в общем случае изменяются периодически (рис. 4.27). Если же дифракционные эффекты уравниваются фокусирующей способностью среды ($l_d = q^{-1}$), то параметры частично когерентного пучка остаются неизменными ($u \equiv 1$).

§ 6. Дифракция случайных волн на трехмерных структурах. Динамическое рассеяние частично когерентного рентгеновского излучения в совершенных кристаллах

Интересные дифракционные явления возникают при рассеянии электромагнитных волн на трехмерных периодических структурах. Один из наиболее важных примеров — дифракция рентгеновского излучения на кристаллической решетке совершенного кристалла. Если излучение обладает высокой степенью пространственной и временной когерентности, фазы вторичных волн, рассеянных различными атомами кристаллической решетки, жестко связаны.

Возникающие при этом когерентные взаимодействия многократно рассеянных волн приводят к разнообразным эффектам динамического рассеяния, таким, как «маятниковые биения», эффект Боррмана и др. (см. [28, 57]). Теоретическая интерпретация этих явлений основывается на модели взаимодействия двух связанных волн в кристалле, обменивающихся энергией при последовательных актах рассеяния на атомах решетки. Эффекты динамического рассеяния могут быть положены в основу весьма точных методов изучения кристаллов; в последние годы обсуждаются возможности их использования для создания резонаторов рентгеновских и гамма-лазеров.

Несовершенства, дефекты кристаллической структуры смазывают эффекты многократного рассеяния; в этом случае в рентгеновской оптике говорят о кинематическом рассеянии.

Естественно ожидать, что к аналогичным явлениям будет приводить и неполная когерентность рентгеновского излучения. Как влияет неполная временная и пространственная когерентность рассеиваемого излучения на основные эффекты динамического рассеяния рентгеновского излучения в совершенных кристаллах? Этот вопрос рассматривается в настоящем параграфе на примере дифракционных явлений, описываемых в так называемом двухволновом приближении*). Как и при рассмотрении в § 5 оптических дифракционных задач, здесь возможна обратная постановка задачи — эффекты динамического рассеяния могут быть положены в основу методов измерения пространственных и временных корреляционных функций рентгеновского излучения.

В общем виде распространение электромагнитных волн в неоднородных средах описывается уравнением (4.3.3). Поляризация (4.3.2) для случая изотропной среды

$$P(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} H(t', \mathbf{r}) E(t - t', \mathbf{r}) dt';$$

*) Эффекты только временной некогерентности рассматривались в [58].

при этом волновое уравнение имеет вид

$$c^2 \Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.6.1)$$

(Δ — оператор Лапласа). Для периодически неоднородных сред восприимчивость $H(\mathbf{r})$ можно разложить в ряд Фурье [28, 57]:

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} \chi_{\mathbf{h}} e^{-i\mathbf{k}_{\mathbf{h}} \mathbf{r}}, \quad \chi_{\mathbf{h}} = v^{-1} \int_{\mathbf{v}} H(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{h}} \mathbf{r}} d^3 r. \quad (4.6.2a, б)$$

Здесь v — объем элементарной ячейки кристалла, суммирование производится по векторам обратной решетки $\mathbf{k}_{\mathbf{h}}$.

В двухволновом приближении решение уравнения (1) отыскиваем в виде (см. также [25—27])

$$E(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + i\omega t) + A_{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\mathbf{h}}) \mathbf{r} + i\omega_0 t], \quad (4.6.3)$$

где $A_0(\mathbf{r}, t)$ и $A_{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, t)$ — амплитуды падающей и рассеянной волн, ω_0 — средняя частота спектра волны. Эффективное динамическое рассеяние имеет место, если приближенно удовлетворяется условие брэгговского отражения:

$$(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\mathbf{h}})^2 \approx k_0^2.$$

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, в первом порядке по малому параметру μ ($\mu \sim \chi = 4\pi\mu \ll 1$) получаем (ср. с (4.3.29))

$$\begin{aligned} \frac{2i}{k_0^2} \left(\mathbf{k}_0 \nabla + \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_0 &= \chi_0 A_0 + \chi_{\mathbf{h}} A_{\mathbf{h}}, \\ \frac{2i}{k_0^2} \left[(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\mathbf{h}}) \nabla + \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] A_{\mathbf{h}} &= \chi_{\mathbf{h}} A_0 + (\chi_0 + 2\delta) A_{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

где $2\delta = 1 - k_0^2 (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\mathbf{h}})^2$ — брэгговская расстройка. При выводе (4) для поляризации P использовано разложение (4.3.8).

Экспериментально наблюдение эффектов динамического рассеяния реализуется либо в схеме Лауэ, либо в схеме Брэгга; для определенности рассмотрим симметричную геометрию (рис. 4.28): излучение падает на входную грань кристалла $z=0$, при этом в схеме Лауэ $\mathbf{k}_{\mathbf{h}} \perp z$, в схеме Брэгга $\mathbf{k}_{\mathbf{h}} \parallel z$. В системе координат, изображенной на рис. 4.28, уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2i}{k_0} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_0 &= \chi_0 A_0 + \chi_{\mathbf{h}} A_{\mathbf{h}}, \\ \frac{2i}{k_0} \left(\mp \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \pm \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_{\mathbf{h}} &= \chi_{\mathbf{h}} A_0 + (\chi_0 + 2\delta) A_{\mathbf{h}} \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

(верхний знак относится к геометрии Лауэ, нижний — Брэгга).

В рассматриваемом приближении эффекты дифракционного расплывания не учитываются (предполагается, что толщина кристалла $z \ll l_{\mathbf{h}}$ (4.5.50)). Система (5) эквивалентна одному уравнению второго порядка и, так же как волновое уравнение, описывает эффекты интерференционного смешения, обусловленные переотражениями от кристаллических плоскостей. Отметим, что эти эффекты существенно двумерны: в используемом приближении проходящий и рассеянный пучки не претерпевают изменений по координате ортогональной

плоскости, в которой лежат векторы k_0 и k_h . Векторные же эффекты, связанные с поляризацией падающего излучения и анизотропией восприимчивости, малы в обычных кристаллах и становятся заметными лишь в сильно анизотропных кристаллах (пример для оптического диапазона — холестерические жидкие кристаллы) [26, 30].

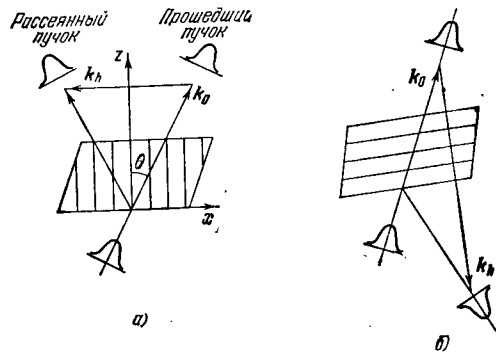


Рис. 4.28. Геометрия динамического рассеяния: а) схема Лауэ; б) схема Брэгга.

Решение уравнений (5) в квадратурах может быть найдено методом Фурье (см. § 3 гл. 3) или методом Римана. Приведем выражение для полной энергии, рассеянной кристаллом под брэгговским углом*):

$$W_h(z) = \iint dx dt B_{hh}(x, x', t, t', z),$$

где корреляционная функция рассеянного излучения

$$B_{hh}(x, x', t, t', z) = \langle A_h(x, t, z) A_h^*(x', t', z) \rangle.$$

Предположим, что корреляционная функция падающего на кристалл излучения имеет гауссовскую форму, т. е.

$$B_{00}(x, x', t, t', 0) = \frac{W_0}{\pi \tau_{\text{имп}} a_0} \exp \left\{ -\frac{(x+x')^2 \cos^2 \theta}{4a_0^2} - \frac{(x-x')^2 \cos^2 \theta}{r_0^2} - \frac{[c(t+t') - (x+x') \sin \theta]^2}{(2\tau_{\text{имп}} c)^2} - \frac{[c(t-t') - (x-x') \sin \theta]^2}{(c\tau_0)^2} + \frac{ik_0}{R} (x^2 - x'^2) \cos^2 \theta - \frac{i\omega_0}{cT} [(ct - x \sin \theta)^2 - (ct' - x' \sin \theta)^2] \right\}. \quad (4.6.6)$$

Корреляционная функция в (6) записана в наиболее общем виде: для ограниченного в пространстве и времени волнового пакета, испытывающего одновременно регулярную и случайную пространственно-временную модуляцию. В (6) a_0 — ширина пучка, R — радиус кривизны волнового фронта, r_0 — радиус корреляции, τ_0 — время корреляции, $\tau_{\text{имп}}$ — длительность импульса, T — обратный

* Все зависимости амплитуд от z сохраняются.

период частотной модуляции. Для геометрии Лауэ получим

$$\frac{W_h(z)}{W_0} = \frac{k_0^2 |\chi_h|^2}{8\pi^{1/2}} r_{\text{Л}} \exp \left\{ -k_0 z \text{Im} \chi_0 \cos \theta \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} da F_{\text{Л}}(z, a) \exp \left\{ -\left(\frac{ar_{\text{Л}}}{2} \right)^2 \right\}, \quad (4.6.7)$$

$$F_{\text{Л}}(z, a) = (z \cos \theta)^2 \left| \text{sinc} \left\{ \frac{z}{\cos \theta} \left[\left(a + \frac{k_0 \delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{k_0 \chi_h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right|^2.$$

В формуле (7) имеющий размерность длины параметр $r_{\text{Л}}$ определяется соотношением

$$(r_{\text{Л}} \sin \theta)^{-2} = \cos^2 \theta \left[r_0^{-2} + \left(\frac{k_0 a_0}{R} \right)^2 \right] + \left(\frac{\sin \theta}{c} \right)^2 \left[\tau_0^{-2} + \left(\frac{\omega_0 \tau_{\text{имп}}}{T} \right)^2 \right].$$

В схеме Брэгга имеем

$$\frac{W_h(z)}{W_0} = \frac{k_0^2 |\chi_h|^2}{8\pi^{1/2}} r_{\text{Б}} \int_{-\infty}^{+\infty} da F_{\text{Б}}(z, a) \exp \left\{ -\left(\frac{ar_{\text{Б}}}{2} \right)^2 \right\}, \quad (4.6.8)$$

$$F_{\text{Б}}(z, a) = \left[\left(\frac{k_0 \chi_h}{2} \right)^2 + Q^2 \right]^{1/2} \text{cth} \left\{ \frac{z}{\cos \theta} \left[\left(\frac{k_0 \chi_h}{2} \right)^2 + Q^2 \right]^{1/2} \right\} - iQ,$$

где $Q = a - k_0(\chi_0 + \delta)/2$, а аналогичный $r_{\text{Л}}$ параметр $r_{\text{Б}}$ определяется соотношением

$$(r_{\text{Б}} \cos \theta)^{-2} = \sin^2 \theta \left[r_0^{-2} + \left(\frac{k_0 a_0}{R} \right)^2 \right] + \left(\frac{\cos \theta}{c} \right)^2 \left[\tau_0^{-2} + \left(\frac{\omega_0 \tau_{\text{имп}}}{T} \right)^2 \right].$$

Полученные формулы позволяют провести полный анализ влияния когерентности рентгеновского излучения на картину динамического рассеяния.

Далее главный акцент будет сделан на эффекты динамического рассеяния в геометрии Лауэ; следующее ниже рассмотрение основывается на анализе формулы (7). Заметим сразу, что параметры модуляции, радиусы временной и пространственной когерентности входят в (7) только через величину $r_{\text{Л}}$. Фактически величина $r_{\text{Л}}$ имеет смысл «эффективного» радиуса когерентности; с аналогичной ситуацией мы уже встречались, рассматривая дифракцию ограниченного светового пучка со случайной поперечной структурой (см. формулу (4.5.41б)).

Выясним теперь, как влияет некогерентность излучения на проявление основных эффектов динамического рассеяния.

В «тонком» (слабопоглощающем, $z < (k_0 \text{Im} \chi_0 h)^{-1}$) кристалле основной эффект рассеяния — это «маятниковые биения», т. е. периодический по координате распространения обмен энергией между проходящей и рассеянной волнами [28]. Для когерентного излучения ($r_{\text{Л}} \rightarrow \infty$) этот обмен описывает простая формула (брэгговскую расстройку считаем малой, $k_0 \delta z \ll 1$):

$$W_h(z) = W_0 \sin^2 \frac{z}{L_{\text{экс}} \cos \theta},$$

где экстинкционная длина $L_{\text{экс}} = 2(k_0 |\chi_h|)^{-1}$; резкость маятниковой картины в координатах «энергия рассеяния — толщина кристалла» равна единице

Аналогичные решения можно записать для остальных корреляционных функций.

Для анализа рассеяния частично когерентного излучения поступим так же, как и выше (см. § 3) при переходе от волнового уравнения к параболическому в задачах дифракции оптических волн. Отыщем решение (12) в виде (15), считая коэффициенты $C_{\pm}(\mu\xi, \mu^{1/2}\xi)$ функциями, медленно меняющимися на расстояниях порядка $L_{\text{экс}}$. Здесь малый параметр μ порядка $L_{\text{экс}}/r_0$; предполагается также, что корреляционные функции быстро спадают при $\xi \rightarrow \infty$

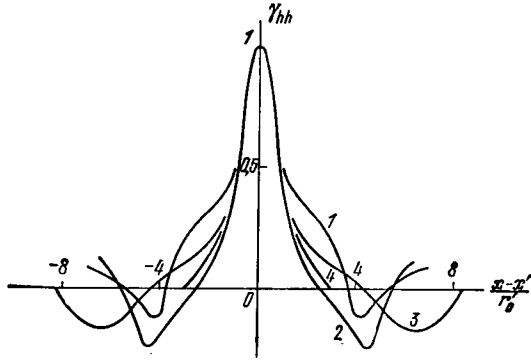


Рис. 4.31. Изменение нормированной функции рассеянной волны с толщиной кристалла при различных значениях $z/L_{\text{экс}}$: 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) ∞ . $(L_{\text{экс}} \sin \theta / r_0)^2 = 0,5$.

(переход в область тени при движении точки поперек пучка). Подставляя указанное представление амплитуд C_{\pm} в (14), приходим к параболическим уравнениям

$$\left(\pm 2i \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) C_{\pm} = 0, \quad (4.6.16)$$

которые дают расплывание волнового пучка с ростом ξ в поперечном сечении. С учетом граничных условий (6), упрощающихся для анализируемого монохроматического излучения, согласно (16) получаем, например (рис. 4.31),

$$\begin{aligned} \gamma_{hh} &= \frac{2\bar{B}_{hh}(z, x-x')}{\bar{B}_{00}(0, 0)} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 \cos^2 \theta}{r_0^2} \right\} \left[1 + \left(\frac{z}{L_{\text{экс}}} \right)^2 \right]^{-1/4} \cos \left\{ \frac{2z}{L_{\text{экс}} \cos \theta} + \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{z}{L_{\text{экс}}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z(x-x')^2 \cos^2 \theta}{L_{\text{экс}} r_0^2 [1 - (z/L_{\text{экс}})^2]} \right\} \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 \cos^2 \theta}{r_0^2 [1 + (z/L_{\text{экс}})^2]} \right\}. \quad (4.6.17) \end{aligned}$$

Определим здесь радиус корреляции как

$$r_k^2(z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x-x')(x-x')^2 |\bar{B}_{hh}|^2}{\int d(x-x') |\bar{B}_{hh}|^2}.$$

Из (17) можно получить довольно громоздкое выражение для $r_k(z)$, которое в пределе $r_0 \rightarrow 0$ (некогерентное исходное излучение) дает

$$r_k(z) \approx (zL_{\text{экс}})^{1/2} \text{tg } \theta. \quad (4.6.18)$$

Угловая зависимость в (18) интерпретируется следующим образом. При $\theta = 0$ имеется вырождение ($k_h = 0$), которое исключает перемешивание пучков, поэтому $r_k \equiv 0$. Отметим, что при $L_{\text{экс}} \rightarrow 0$ формула (18) неприменима, так как она получена в предположении $L_{\text{экс}} \gg r_0$.

Формулу (18) можно рассматривать как аналог теоремы Ван Циттерта — Цернике для светового пучка, испытывающего динамическое рассеяние в трехмерном кристалле; как и в (4.5.11), радиус корреляции увеличивается с пройденным расстоянием. Однако физика увеличения пространственной когерентности здесь иная: при динамическом рассеянии радиус корреляции увеличивается за счет интерференционного сложения волн при многократных переотражениях от атомных плоскостей; радиус апертуры в (18), в отличие от (4.5.11), вообще не входит (напомним, что в уравнениях (5) поперечный лапласиан опущен; пучки считаются широкими, $a/L_{\text{экс}} \gg 1$).

Как уже отмечалось, векторный характер динамического рассеяния становится существенным, когда анизотропию χ_h нельзя считать малой. Такой пример в рентгеновском диапазоне отсутствует; в видимом и ближнем ИК-диапазонах указанная ситуация реализуется при наклонном падении волнового пучка на холестерический жидкий кристалл (ХЖК). Если ось ХЖК направлена вдоль оси x , его диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_0 + \delta & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 + \delta \cos(2qx) & -\delta \sin(2qx) \\ 0 & -\delta \sin(2qx) & \epsilon_0 - \delta \cos(2qx) \end{pmatrix}, \quad (4.6.19)$$

где q — обратный шаг спирали, $\epsilon_0 = (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp})/2$, $\delta = (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})/2$ (ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} — соответственно продольная и поперечная компоненты диэлектрической проницаемости) [30].

При $\theta \lesssim \pi/4$ и точном выполнении условия Вульфа — Брэгга $2k_0 c_0^{1/2} \times \sin \theta / c = q$ распространение светового пучка в ХЖК описывается уравнениями (5), где роль A_0 и A_h играют амплитуды эллиптически поляризованных компонент проходящей и рассеянной волн:

$$A_{0,h} = A_{\eta}^{(0,h)} \sin \theta + i A_{\eta}^{(0,h)} \quad (4.6.20)$$

(оси $\eta^{(0,h)}$ направлены перпендикулярно y и k_0, h). Решение уравнений для этих амплитуд, помимо уже проанализированного эффекта увеличения радиуса корреляции $r_k(z)$, дает также изменение степени поляризации проходящего и рассеянного пучков [26]. Определяя интегральную степень поляризации в функции z , как в [26], находим, например, для проходящего пучка

$$P_0 = (1 - Q(z)) / (3 + Q(z)), \quad (4.6.21)$$

$$Q(z) = \left[1 + \left(\frac{z}{L_{\text{экс}}} \right)^2 \right]^{-1/4} \cos \left\{ \frac{2z}{L_{\text{экс}} \cos \theta} + \frac{1}{2} \arctg \frac{z}{L_{\text{экс}}} \right\}.$$

Рассеивающийся под брэгговским углом пучок при этом оказывается полностью поляризованным.

§ 7. Дифракция регулярной волны на случайном экране

Здесь мы рассмотрим задачу, по постановке противоположную задачам § 5, в котором изучалась дифракция случайной волны. Проанализируем задачу о дифракции когерентного светового пучка на плоском экране со случайным пропусканием $M(\mathbf{r})$. В общем случае функция $M(\mathbf{r})$ является комплексной:

$$M(\mathbf{r}) = m(\mathbf{r}) e^{i\Phi(\mathbf{r})}, \quad (4.7.1)$$

где $m(\mathbf{r})$ — амплитудный коэффициент пропускания, $\Phi(\mathbf{r})$ — фаза. Изменение $m(\mathbf{r})$ связано с изменением прозрачности экрана, а изменение фазы $\Phi(\mathbf{r})$ — с изменением толщины или коэффициента преломления экрана. Эта задача представляет интерес как в статистической оптике, так и в статистической теории антенн [11, 18–23, 45].

Можно выделить весьма важный частный случай, когда $m = 1$ и, следовательно, $M(\mathbf{r}) = e^{i\Phi(\mathbf{r})}$; такой случайный экран называется фазовым. Модель рассеивающего объекта как случайного фазового экрана является довольно распространенной как в радиофизике, так и в оптике. Она успешно используется для изучения распространения волн в неоднородной ионосфере и межзвездной плазме, турбулентных средах.

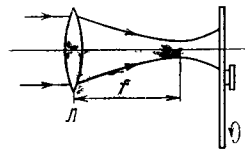


Рис. 4.32. Фокусировка светового пучка на вращающийся матовый диск.

Случайный фазовый экран достаточно подробно изучен и теоретически [42, 43, 46]. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением лишь одного примера, заимствованного из оптики. Речь пойдет о модели так называемого квазитеплового источника света, реализующейся при рассеянии когерентной световой волны (например, от лазера) на вращающемся матовом диске [20–22]. Такой источник часто используется в экспериментах по статистической оптике, он детально изучался экспериментально, так что здесь возможно подробное сравнение теории и эксперимента.

Случайный фазовый экран. Пусть на движущийся фазовый экран нормально падает лазерный пучок с гауссовским профилем (мода TEM_{00}), предварительно прошедший через линзу (рис. 4.32). В плоскости экрана комплексную амплитуду пучка можно представить в виде

$$A_0(\mathbf{r}) = A_0 \exp \left\{ -\frac{r^2}{a^2} - i\alpha r^2 \right\}, \quad (4.7.2)$$

где a — радиус пучка на экране, коэффициент α характеризует расходимость пучка, значения a и α определяются фокусным расстоянием линзы и расстоянием от линзы до экрана.

Непосредственно за случайным фазовым экраном имеем

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}) e^{i\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} = A_0 \exp \left\{ -\frac{r^2}{a^2} - i\alpha r^2 + i\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t) \right\}, \quad (4.7.3)$$

где \mathbf{v} — скорость движения экрана (экран с «замороженными» неоднородностями). Случайный процесс $\Phi(\mathbf{r})$ считаем статистически изотропным, дисперсия процесса $\overline{\Phi^2} = \sigma_\Phi^2$, а коэффициент корреляции

$$\gamma_\Phi(\mathbf{s}) = \overline{\Phi(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}+\mathbf{s})} / \sigma_\Phi^2. \quad (4.7.4)$$

Поскольку флуктуации $\Phi(\mathbf{r})$ связаны с изменением толщины экрана $h(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi \Delta n}{\lambda} h(\mathbf{r}),$$

то дисперсия

$$\sigma_\Phi^2 = \left(\frac{2\pi \Delta n}{\lambda} \right)^2 \sigma_h^2, \quad \sigma_h^2 = \overline{h^2}, \quad (4.7.5)$$

λ — длина волны излучения, Δn — разность показателей преломления материала экрана и окружающей среды.

Изменение дифрагированного поля на расстоянии l от случайного экрана до плоскости наблюдения дается выражением типа (4.5.66):

$$A(\mathbf{r}, l; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) e^{i\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{v}t)} H(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) d^2r_1, \quad (4.7.6)$$

$$H(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = \frac{ik_0}{2\pi l} \exp \left\{ -i \frac{k_0}{2l} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2 \right\}.$$

Временная корреляционная функция рассеянного поля при этом записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \langle A(\mathbf{r}, l; t) A^*(\mathbf{r}, l; t+\tau) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) A_0^*(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) H^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \times \\ &\times \langle \exp i[\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{v}t) - \Phi(\mathbf{r}_2-\mathbf{v}(t+\tau))] \rangle d^2r_1 d^2r_2. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Под интегралом в (7) фигурирует структурная функция, представляющая собой двумерную характеристическую функцию процесса $\Phi(\mathbf{r})$. Если статистика поля $\Phi(\mathbf{r})$ гауссовская, то

$$C_\Phi(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = \langle \exp i[\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)] \rangle = \exp \left\{ -\sigma_\Phi^2 [1 - \gamma_\Phi(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)] \right\} \quad (4.7.8)$$

и выражение (7) записывается как

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) A_0^*(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) H^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) C_\Phi(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1-\mathbf{v}\tau) d^2r_1 d^2r_2. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Воспользовавшись выражением для функции Грина (6), представим (9) в виде

$$B(\mathbf{r}, l; \tau) = \left(\frac{k_0}{2\pi l}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{u}) C_{\Phi}(\mathbf{u} - \mathbf{v}\tau) \exp\left\{-i\frac{k_0}{2l}(2\mathbf{r} - \mathbf{u})\mathbf{u}\right\} d^2u, \quad (4.7.10)$$

$$A(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{u}_1) A_0^*(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}) \exp\left\{i\frac{k_0}{l}\mathbf{u}\mathbf{u}_1\right\} d^2u_1.$$

Здесь произведена замена переменных $\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Учитывая (2), для функции $A(\mathbf{u})$ имеем

$$A(\mathbf{u}) = \frac{\pi a^2}{2} A_0^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{\omega^2} - i\frac{k_0}{2l}\mathbf{u}^2\right\}, \quad (4.7.11)$$

$$\omega = \left\{2a^{-2} + \left(2\alpha + \frac{k_0}{l}\right)^2 a^2\right\}^{-1/2}.$$

Вследствие этого корреляционная функция (10) приводится к виду

$$B(\mathbf{r}, l; \tau) = \left(\frac{k_0}{2\pi l}\right)^2 \frac{\pi a^2}{2} A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\Phi}(\mathbf{u} - \mathbf{v}\tau) \exp\left\{-\frac{u^2}{\omega^2} - i\frac{k_0}{l}\mathbf{r}\mathbf{u}\right\} d^2u. \quad (4.7.12)$$

Рассмотрим частный случай, когда коэффициент корреляции $\gamma_{\Phi}(\mathbf{s})$ имеет гауссовскую форму:

$$\gamma_{\Phi}(\mathbf{s}) = \exp\left\{-\frac{s^2}{r_0^2}\right\},$$

где r_0 — радиус корреляции фазовых флуктуаций. Тогда функция (8) равна

$$C_{\Phi}(\mathbf{s}) = \exp\left\{-\sigma_{\Phi}^2 [1 - \exp\left\{-\frac{s^2}{r_0^2}\right\}]\right\}. \quad (4.7.13)$$

Однако для произвольных значений фазовых флуктуаций интегрирование (12) для функции $C_{\Phi}(\mathbf{s})$ (13) не удастся выполнить. Наглядные аналитические результаты можно получить в предельных случаях сильных ($\sigma_{\Phi}^2 \gg 1$) и слабых флуктуаций ($\sigma_{\Phi}^2 \ll 1$).

При больших значениях σ_{Φ}^2 функция $C_{\Phi}(\mathbf{s})$ очень быстро убывает от единицы до $\exp\{-\sigma_{\Phi}^2\}$ при изменении s от нуля до $s \gg r_0$. Самое быстрое изменение $C_{\Phi}(\mathbf{s})$ происходит при $s < r_0$, и поэтому можно использовать приближение

$$\exp\left\{-\frac{s^2}{r_0^2}\right\} \approx 1 - \frac{s^2}{r_0^2},$$

а $C_{\Phi}(\mathbf{s})$ заменить приближенным выражением (см. [21])

$$C_{\Phi}(\mathbf{s}) = \exp\{-\sigma_{\Phi}^2\} + [1 - \exp\{-\sigma_{\Phi}^2\}] \exp\left\{-\sigma_{\Phi}^2 \frac{s^2}{r_0^2}\right\}. \quad (4.7.14)$$

Используя (14), интеграл (12) легко вычислить:

$$B(\mathbf{r}, l; \tau) = I_{\text{рег}}(\mathbf{r}, l) + B_{\Phi}(\mathbf{r}, l; \tau), \quad (4.7.15)$$

где

$$I_{\text{рег}}(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_0 a \omega}{2l}\right)^2 A_0^2 \exp\left\{-\sigma_{\Phi}^2 - \left(\frac{k_0 \mathbf{r} \omega}{2l}\right)^2\right\}, \quad (4.7.16)$$

$$B_{\Phi}(\mathbf{r}, l; \tau) = \frac{(k_0 a \omega / 2l)^2}{2(1 + \sigma^2 \omega^2)} (1 - \exp\{-\sigma_{\Phi}^2\}) \times \\ \times A_0^2 \exp\left\{-\frac{1}{4} [(k_0 \mathbf{r} \omega / l)^2 + (\sigma \mathbf{v} \tau)^2 + \frac{i}{l} \sigma^2 k_0 \omega^2 \mathbf{v} \mathbf{r} \tau] (1 + \sigma^2 \omega^2)^{-1}\right\}. \quad (4.7.17)$$

Здесь введено обозначение

$$\sigma^2 = \sigma_{\Phi}^2 / r_0^2. \quad (4.7.18)$$

Функция $I_{\text{рег}}$ (16) описывает распределение интенсивности нерассеянной части пучка, дифрагирующего на собственной апертуре. Очевидно, что при $\sigma_{\Phi}^2 \gg 1$ значение $I_{\text{рег}}$ мало.

Выражение (17) соответствует рассеянной части пучка. Первое слагаемое экспоненты ответственно за распределение интенсивности в поперечном сечении пучка, второе слагаемое — за временную когерентность поля и последнее — за доплеровское смещение частоты, которое равно нулю, когда направление наблюдения (вектор \mathbf{r}) перпендикулярно скорости \mathbf{v} .

Ширина рассеянного пучка в плоскости наблюдения

$$a_p = \frac{2l}{k_0 \omega} (1 + \sigma^2 \omega^2)^{1/2}. \quad (4.7.19)$$

В реализуемых на практике условиях $\sigma \omega \gg 1$, так как $\sigma \omega = \sigma_{\Phi}(\omega / r_0)$, $\omega \gg r_0$ и $\sigma_{\Phi} > 1$ (*). Поэтому в реальных условиях ширина рассеянного пучка

$$a_p = 2\sigma l / k_0 = 2\sigma_{\Phi} l / k_0 r_0 \quad (4.7.20)$$

не зависит от первоначального значения, а определяется статистическими характеристиками случайного экрана (σ_{Φ} и r_0) и расстоянием l от экрана до плоскости наблюдения. Напротив, при условии $\sigma \omega \gg 1$ время корреляции излучения

$$\tau_k = 2\omega / \nu \quad (4.7.21)$$

не зависит от характеристик случайного экрана.

Согласно (11) параметр ω и, следовательно, время корреляции τ_k зависят от радиуса a и угловой расходимости (величины α) падающего пучка и расстояния l . На рис. 4.33 показано время корреляции для различных ширин пучка a . При $a^2 = l / k_0 \sqrt{2}$ и $\alpha = 0$ время корреляции достигает максимального значения

$$\tau_{k \text{ max}} = \frac{2^{5/4}}{\nu} \left(\frac{l}{k_0}\right)^{1/2}. \quad (4.7.22)$$

*) В типичных условиях $\lambda \approx 10^3$ см⁻¹, $\Delta \lambda \approx 0,3 - 0,5$, $\sigma_{\Phi} \approx 1 - 10$ мкм и, согласно (5), $\sigma_{\Phi} \approx 3 - 30$.

Если падающий световой пучок рассеивается вращающимся матовым стеклом, то скорость

$$v = \Omega R, \quad (4.7.23)$$

где Ω — угловая скорость вращения матового диска, R — расстояние от оси вращения до центра пучка на диске. В этом случае имеются дополнительные возможности изменения времени корреляции за счет изменения значений Ω и R .

Следует отметить, что статистика рассеянной волны становится гауссовской, когда ширина исходного пучка a гораздо больше радиуса корреляции r_0 неоднородностей рассеивающего экрана [11, 21, 22].

Теперь обратимся к случаю слабых флуктуаций фазы ($\sigma_\Phi \ll 1$); здесь можно воспользоваться следующим приближением для функции (13):

$$C_\Phi \approx 1 - \sigma_\Phi^2 + \sigma_\Phi^2 \exp \{ - (s/r_0)^2 \}. \quad (4.7.24)$$

Соотношение (24) можно получить из выражения (14), если в экспонентах, в которых отсутствует параметр s , считать $\sigma_\Phi^2 < 1$, а при наличии s положить $\sigma_\Phi^2 = 1$, т. е. в

(18) принять $\sigma^2 = r_0^{-2}$. При таких предположениях можно использовать формулы (15) — (17) и (19), в которых, однако, нужно учесть новое значение $\sigma^2 = r_0^{-2}$. При этом время корреляции рассеянного излучения, определенное из (17),

$$\tau_k = \frac{2}{\sigma v} [1 + \sigma^2 \omega^2]^{1/2} \approx 2\omega/v \quad (4.7.25)$$

совпадает с результатом (21) для сильных флуктуаций. Радиус же рассеянного пучка согласно (19)

$$a_p = \left(\frac{2l}{k_0} \right) [\omega^{-2} + r_0^{-2}]^{1/2} \approx \frac{2l}{k_0 r_0} \quad (4.7.26)$$

и меньше, чем в случае сильных флуктуаций (20).

Дифрагированное поле во фраунгоферовой зоне; решение по методу Рэлея. Рассмотрим общий случай дифракции регулярной волны на плоском экране со случайным комплексным пропуска-

нием (1). В методе Рэлея дифрагированное поле разлагается на плоские волны. Разложение произвольного поля по плоским волнам дается формулой (1.8.4):

$$E(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{kR})} d\omega d^3k, \quad (4.7.27)$$

где $\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k})$ — амплитуда волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} .

Ограничимся рассмотрением монохроматических полей, тогда

$$\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) = \mathcal{E}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \omega/c). \quad (4.7.28)$$

Появление в (28) функции $\delta(\mathbf{k} - \omega/c)$ связано с дисперсионным соотношением $k = \omega/c$. Амплитуды волн, которые не удовлетворяют этому соотношению, равны нулю [11]. В этом случае

$$E(\mathbf{R}, t) = E(\mathbf{R}) e^{i\omega_0 t},$$

где

$$E(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \omega_0/c) e^{-i\mathbf{kR}} d^3k. \quad (4.7.29)$$

Представим \mathbf{kR} в виде

$$\mathbf{kR} = k_z z + k_x x + k_y y = k_z z + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}, \quad k^2 = k_z^2 + \boldsymbol{\kappa}^2.$$

Интегрируя (29) по $d\boldsymbol{\kappa}$, получаем

$$E(\mathbf{r}, z) = E(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} + \sqrt{k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2} z)} d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (4.7.30)$$

Разложение (30) состоит из суперпозиции волн двух типов. До тех пор, пока $k^2 > \boldsymbol{\kappa}^2$, это плоские бегущие волны. Значениям $k^2 < \boldsymbol{\kappa}^2$ соответствуют неоднородные волны, затухающие в направлении z .

Функция $\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa})$ определяется из условия на границе линейной среды при $z=0$:

$$E(\mathbf{r}, z=0) = A_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}} d^2\boldsymbol{\kappa},$$

откуда

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r}} d^2\mathbf{r}.$$

Следовательно,

$$E(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int A_0(\mathbf{r}_1) e^{-i[\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \sqrt{k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2} z]} d^2\mathbf{r}_1 d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (4.7.31)$$

Если характерный размер неоднородностей рассеивающего экрана порядка r_0 и угловой спектр (4.2.35) рассеянной волны узок ($\Delta\chi/k = 2/kr_0 \ll 1$), то существенны лишь бегущие волны и в интеграле (31) можно использовать приближение

$$(k^2 - \chi^2)^{1/2} \approx k - \chi^2/2k,$$

после чего получаем

$$E(\mathbf{r}, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{r}_1) e^{-ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2/2z} d^2\mathbf{r}_1. \quad (4.7.32)$$

Выражение (32) аналогично выражению (4.5.66), вытекающему из решения параболического уравнения (4.5.1). Таким образом, задача о дифракции монохроматической волны на экране со случайным пропусканием оказывается аналогичной задаче о дифракции шумовой волны на регулярном препятствии. Физически эта аналогия вполне понятна. Случайный экран модулирует проходящую через него волну по амплитуде и фазе. В связи с этим нетрудно прийти к выводу, что результаты § 5 по дифракции случайных волн могут быть перенесены на задачи о дифракции волн на случайном экране.

Разумеется, полное перенесение указанных результатов возможно лишь в том случае, когда статистические характеристики случайной волны и случайного экрана одинаковы. Этим замечанием мы и ограничим анализ выражения (32). Следует также отметить, что формула (32), как и параболическое уравнение (4.5.1), применима только для крупномасштабных неоднородностей ($kr_0 \gg 1$). Общее же решение (31) получено без каких-либо ограничений на соотношение между длиной волны λ и масштабом неоднородностей r_0 .

§ 8. Рассеяние света в статистически неоднородных средах

Модель фазового экрана является одной из простейших моделей статистически неоднородной среды; как уже указывалось, она тем не менее хорошо описывает некоторые явления, связанные с прохождением радиоволн через неоднородную ионосферу. Надо сказать, что и среду с объемными неоднородностями также удастся моделировать как последовательность случайных фазовых экранов. Однако, в особенности для оптики, наиболее естественной является модель среды с объемными неоднородностями. Физические ситуации, приводящие к такой постановке, весьма разнообразны; здесь можно назвать, например, рассеяние радиоволн и света в неоднородной атмосфере, рассеяние в дисперсной среде и, наконец, одну из принципиальных физических задач — задачу о молекулярном, или рэлеевском, рассеянии света.

Рассеяние электромагнитных волн в статистически неоднородных средах — огромная и быстро развивающаяся область физики. Для ознакомления с ней можно рекомендовать книги [11, 36, 41, 44, 47, 48]. Из большого многообразия задач о распространении света в неоднородных средах в этом параграфе разберем всего две характерные проблемы, отличающиеся как методами анализа, так и областями приложения. Мы рассмотрим рассеяние света частицами и распространение света в средах с мелкомасштабными неоднородностями.

Рэлеевское рассеяние; интенсивность и корреляционная функция рассеянного света. Рассмотрим для простоты стационарную неоднородную недиспергирующую изотропную линейную среду. Оставляя в стороне вопрос о деполяризации рассеянной волны, процесс распространения электромагнитных волн в такой среде можно описать скалярным уравнением, являющимся следствием уравнений Максвелла (см. (4.3.3)):

$$c^2 \Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (4.8.1)$$

Δ — оператор Лапласа. Линейная поляризация среды

$$P(\mathbf{r}, t) = [\chi_0 + \tilde{\chi}(\mathbf{r})] E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) (\epsilon_0 - 1 + \tilde{\epsilon})/4\pi, \quad (4.8.2)$$

где индексом «0» отмечены регулярные, а волнистой чертой — случайные компоненты линейной восприимчивости χ и диэлектрической проницаемости ϵ среды. В этом разделе вектор \mathbf{r} трехмерный.

Будем предполагать рассеянное поле слабым, тогда в приближении однократного рассеяния или в борновском приближении поле в неоднородной среде можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}, t) + E_p(\mathbf{r}, t). \quad (4.8.3)$$

Здесь $E_0(\mathbf{r}, t)$ — поле падающей волны, которую считаем плоской и монохроматической:

$$E_0(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}. \quad (4.8.4)$$

Поле $E_p(\mathbf{r}, t)$ рассеянной волны согласно (1) определяется уравнением

$$\Delta E_p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})}{c^2} \omega^2 A_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}, \quad (4.8.5)$$

$v = c/\sqrt{\epsilon_0}$ — скорость волны.

Решением уравнения (5), удовлетворяющим условию излучения [10], является

$$E_p(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) \frac{e^{-ik_0 r_1 + i\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/v)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1. \quad (4.8.6)$$

Интегрирование производится по объему рассеяния V , радиус r_1 определяет положение рассеивающей точки, \mathbf{r} — точку наблюдения рассеянного поля (рис. 4.34).

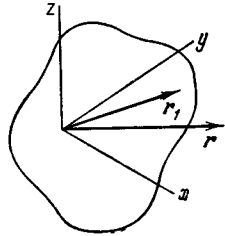


Рис. 4.34. К анализу рассеяния света.

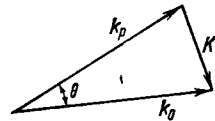


Рис. 4.35. Геометрическая картина волновых векторов.

В дальней (фраунгоферовой) зоне рассеивающего объема можно принять

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \approx r - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r} / r,$$

и, следовательно,

$$\frac{\omega}{v} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \approx k_0 r - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}_1, \quad (4.8.7)$$

где $\mathbf{k}_p = k_0 \mathbf{r} / r$ — волновой вектор рассеянного поля *).

Таким образом, при выполнении условий $r \gg r_1$ и $r \gg k r_1^2$ выражение (6) принимает вид

$$E_p(\mathbf{r}) = -\frac{k_0^2}{r e_0} A_0 e^{i(\omega t - k_0 r)} \int \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_1} d^3 r_1. \quad (4.8.8)$$

Волновой вектор \mathbf{K} равен

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_p, \quad \text{или} \quad K = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda_0} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4.8.9)$$

θ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн, $\theta = \widehat{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_p}$ (рис. 4.35).

Следует отметить, что при учете векторного характера поля в выражении (8) появляется зависящий от направления волн коэффициент

$$[\mathbf{k}_p [\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{e}_0]] k_0^{-2} = \sin \Phi, \quad (4.8.10)$$

где Φ — угол между вектором поляризации \mathbf{e}_0 падающей волны и направлением рассеянной волны.

* Заметим, что абсолютные значения волновых векторов падающего и рассеянного полей, в силу предполагаемой стационарности неоднородностей среды, одинаковы ($k_p = k_0$).

Согласно (8) интенсивность рассеянной волны равна

$$I_p(\mathbf{K}) = |E_p|^2 = \frac{k_0^4}{r^2 e_0^2} I_0 \int \int B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} d^3 r_2 d^3 r_1, \quad (4.8.11)$$

I_0 — интенсивность падающей волны. Корреляционная функция

$$B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \langle \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_2) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) \rangle;$$

для статистически однородного поля $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$ зависит лишь от разности аргументов: $B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. В связи с этим при помощи замены переменных интегрирования (4.5.3) выражение (11) можно преобразовать к виду

$$I_p(\mathbf{K}) = \frac{k_0^4}{r^2 e_0^2} I_0 V G_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{K}). \quad (4.8.12)$$

Здесь V — объем рассеяния и

$$G_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{K}) = \int B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \quad (4.8.13)$$

представляет собой пространственный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Флуктуации $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$ могут быть связаны с флуктуациями плотности ρ и температуры T . Если зависимость $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$ от T можно пренебречь, то

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) = \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)_{\rho = \rho_0} \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \quad (4.8.14)$$

и интенсивность рассеяния

$$I_p(\mathbf{K}) = \frac{k_0^4}{r^2 e_0^2} V I_0 \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)_{\rho_0}^2 G_{\tilde{\rho}}(\mathbf{K}), \quad (4.8.15)$$

$$G_{\tilde{\rho}}(\mathbf{K}) = \int B_{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r'. \quad (4.8.16)$$

Из последнего выражения следует, что распределение интенсивности рассеянной волны по углу θ , называемое диаграммой или индикатрисой рассеяния, зависит от вида корреляционной функции $B_{\tilde{\rho}}(\mathbf{r})$ и масштаба корреляции $\mathbf{r}_{\kappa, \rho}$ флуктуаций плотности.

Пространственная корреляционная функция рассеянной волны непосредственно связана с корреляционной функцией $B_{\tilde{\rho}}(\mathbf{r})$. Действительно,

$$\begin{aligned} B_p(s) &= \int I_p(\mathbf{K}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}} d^3 K = \\ &= \frac{k_0^4}{r^2 e_0^2} \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)^2 \int B_{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{s})} d^3 r' d^3 K = \frac{2k_0^4}{r^2 e_0^2} \left(\frac{d\epsilon}{d\rho} \right)^2 B_{\tilde{\rho}}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (4.8.17)$$

В случае однородных простых жидкостей и газов корреляционная длина $r_{\kappa \rho}$ значительно меньше длины волны. При этом

коэффициент (16) равен

$$G_{\rho}(\mathbf{K}) = G(0) = \int B_{\rho}(\mathbf{r}') d^3r',$$

а значение интенсивности $I_{\rho}(\mathbf{K})$ не зависит от направления рассеяния, т. е. индикатриса рассеяния изотропна.

Согласно термодинамическим расчетам [31],

$$G_{\rho}(0) = \rho_0^2 \kappa T \chi_T, \quad (4.8.18)$$

и, таким образом,

$$I_{\rho}(\mathbf{K}) = \frac{k_0^4}{r^2 \varepsilon_0^2} I_0 V \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho} \right)^2 \rho_0^2 \kappa T \chi_T, \quad (4.8.19)$$

где κ — постоянная Больцмана, χ_T — изотермическая сжимаемость. Следовательно, в экспериментах по рассеянию света может быть определена величина χ_T . Для нулевого угла рассеяния ($\theta = 0$, $\mathbf{k}_{\rho} = \mathbf{k}_0$) значение χ_T можно найти при произвольном соотношении между радиусом корреляции $r_{\text{кр}}$ и длиной волны λ_0 .

Интенсивность света, рассеянного в единичный телесный угол, отнесенная к интенсивности падающего пучка и объему рассеяния, определяет коэффициент рассеяния

$$R(\mathbf{K}) = I_{\rho}(\mathbf{K}) r^2 / I_0 V. \quad (4.8.20)$$

Здесь r — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения. Полный коэффициент рассеяния равен

$$h = \int R(\mathbf{K}) d\Omega = \frac{r^2}{I_0 V} \int I_{\rho}(\mathbf{K}) d\Omega. \quad (4.8.21)$$

В случае изотропного рассеяния, принимая во внимание поляризационные эффекты, определяемые квадратом множителя (10), для коэффициента h получаем

$$h = R(0) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^2 \Phi \sin \Phi d\Phi = \frac{8\pi}{3} R(0), \quad (4.8.22)$$

где

$$R(0) = \frac{k_0^4}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho} \right)^2 \rho_0^2 \kappa T \chi_T.$$

В этом разделе рассмотрено упругое рэлеевское рассеяние. Временная зависимость флуктуаций среды приводит к неупругому рассеянию света. При этом флуктуации давления, сопровождающиеся распространением звуковых волн, ответственны за рассеяние Мандельштама — Бриллюэна, а внутренняя динамика молекул — за комбинационное рассеяние света. Статистические явления при комбинационном рассеянии света будут рассмотрены в § 5 гл. 8.

Рассеяние света полидисперсными средами; нахождение распределения частиц по размерам. Полидисперсные среды представляют собой неоднородные среды, в которых частицы так называемой дисперсной фазы (твердое тело, жидкость, газ) распределены в виде мелких частиц в окружающей сплошной среде.

К настоящему времени развита строгая теория рассеяния света частицами сферической формы (теория Ми), которая позволяет находить рассеянное поле при падении электромагнитной волны на сферическую поверхность, свойства которой отличаются от окружающей среды. Последовательное решение указанной задачи весьма громоздко [1, 32], и мы не имеем возможности воспроизвести его здесь. Отметим лишь два момента этой теории.

Индикатриса рассеяния сильно зависит от параметра $\rho = 2\pi a/\lambda$, где a — радиус частицы, λ — длина волны (рис. 4.36). Сечение рассеяния частицы определяется произведением ее геометрического сечения πa^2 на функцию Ми $\mathcal{H}(\rho)$,

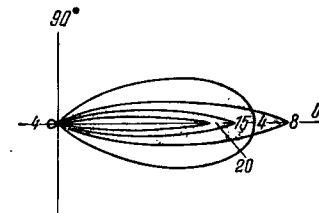


Рис. 4.36. Индикатриса рассеяния для сферических частиц с показателем преломления $n = 1,33$ и различными $\rho = 2\pi a/\lambda$: 4, 8, 15 и 20 [1]. Видно, что преобладает рассеяние в направлении падающего пучка.

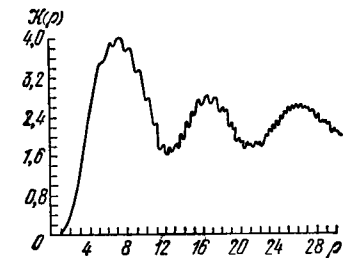


Рис. 4.37. Фактор эффективности рассеяния для сферических частиц с $n = 1,33$ в зависимости от параметра ρ [1].

изображенную на рис. 4.37. При больших значениях ρ функция $\mathcal{H}(\rho)$ асимптотически стремится к значению 2, т. е. сечение рассеяния частицы оказывается в два раза больше геометрического сечения.

Ниже проанализируем рассеяние света в малоугловом приближении для случая оптически тонкого слоя, что позволяет ограничиться анализом однократного рассеяния [33].

Чтобы упростить вывод формулы для индикатрисы рассеяния света, рассмотрим модельную задачу о дифракции светового пучка на хаотически расположенных частично прозрачных круглых дисках. Диски, имеющие случайное распределение радиусов a_i , расположены в плоскости, перпендикулярной оси пучка. Такую модель сферических частиц можно применить, если фазовый сдвиг, вносимый частицей, мал: $4\pi a(n - n_{\text{ср}})/\lambda \ll 1$ ($n_{\text{ср}}$ и n — показатели преломления среды и частицы соответственно). Для рассеяния света изотропными сферическими частицами рассматриваемая модель может быть довольно хорошим приближением.

Поскольку нас интересует индикатриса рассеянного света, то, воспользовавшись результатами § 7 (см. (4.7.30)), запишем фурье-спектр светового поля в виде

$$E(\kappa, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \int A_0(r) m(r) e^{i\kappa r} d^2r. \quad (4.8.23)$$

Здесь $A_0(r)$ описывает поле падающего пучка. Введенная под интеграл (23) функция $m(r)$ есть амплитудный коэффициент пропускания совокупности дисков, который можно представить в виде

$$m(r) = \sum_{i=1}^N [1 - (1 - m_d) f_i(r - r_i)], \quad (4.8.24a)$$

где m_d — коэффициент пропускания отдельного диска, i — номер диска, N — число дисков,

$$f_i(r - r_i) = \begin{cases} 1, & |r - r_i| \leq a_i, \\ 0, & |r - r_i| \geq a_i, \end{cases} \quad (4.8.24b)$$

r_i — координата центра диска, a_i — радиус диска, величины r_i и a_i — случайные.

С учетом (24) выражение (23) можно записать так:

$$E(\kappa, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \left\{ \int A_0(r) e^{i\kappa r} d^2r - (1 - m_d) \sum_{i=1}^N \int A_0(r) f_i(r - r_i) e^{i\kappa r} d^2r \right\}. \quad (4.8.25)$$

Первое слагаемое в (25) представляет собой угловой спектр падающего пучка, который далее не будет рассматриваться. Остальные слагаемые определяют спектр рассеянного поля:

$$E_p(\kappa) = \frac{1 - m_d}{(2\pi)^2} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \sum_{i=1}^N \int A_0(r) f_i(r - r_i) e^{i\kappa r} d^2r. \quad (4.8.26)$$

Если радиус падающего пучка a гораздо больше радиуса диска a_i , выражение (26) можно несколько упростить:

$$E_p(\kappa) = \frac{1 - m_d}{(2\pi)^2} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \sum_{i=1}^N A_0(r_i) e^{i\kappa r_i} \int f_i(r) e^{i\kappa r} d^2r. \quad (4.8.27)$$

С интегралом вида (27) мы встречались в задаче о дифракции света на отверстии (см. § 5), поэтому воспользуемся полученным там выражением (4.5.13). Учитывая (24б), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int f_i(r) e^{i\kappa r} d^2r &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{a_i} r dr \int_0^{2\pi} e^{i\kappa r \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{a_i} r J_0(\kappa r) dr = \frac{a_i}{\kappa} J_1(\kappa a_i). \end{aligned} \quad (4.8.28)$$

Подстановка (28) в (27) дает

$$E_p(\kappa) = \frac{1}{2\pi \kappa} e^{-i\sqrt{k^2 - \kappa^2} z} \sum_{i=1}^N A_0(r_i) a_i e^{i\kappa r_i} J_1(\kappa a_i). \quad (4.8.29)$$

Таким образом, индикатриса рассеянного света определяется выражением

$$I_p(\kappa) = \langle |E_p(\kappa)|^2 \rangle = \frac{(1 - m_d)^2}{(2\pi \kappa)^2} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N A_0(r_i) a_i e^{i\kappa r_i} J_1(\kappa a_i) \right|^2 \right\rangle. \quad (4.8.30)$$

Угловые скобки означают усреднение по случайным величинам a_i и r_i , которые разумно считать статистически независимыми. Принимая также статистически независимыми расположения различных дисков, имеем

$$I_p(\kappa) = (2\pi \kappa)^{-2} (1 - m_d)^2 N \langle I(r_i) \rangle_{r_i} \langle a_i^2 J_1^2(\kappa a_i) \rangle_{a_i}, \quad (4.8.31)$$

где $I(r_i)$ — функция распределения интенсивности света в падающем пучке.

Из (31) видно, что при сделанных предположениях полидисперсная индикатриса не зависит от формы падающего пучка. Для малых углов рассеяния ($\kappa/k = \sin \theta \approx \theta$) введем обозначения

$$C = (2\pi \kappa)^{-2} (1 - m_d)^2 N \langle I(r_i) \rangle_{r_i}, \quad \rho = \kappa a \quad (4.8.32)$$

и запишем (31) в общепринятой форме:

$$I_p(\theta) = C \theta^{-2} \int_0^\infty \omega(\rho) \rho^2 J_1^2(\rho \theta) d\rho. \quad (4.8.33)$$

Здесь $\omega(\rho)$ — плотность вероятности распределения частиц (дисков) по размерам, называемая часто спектром частиц.

Полученное выражение (33) является решением прямой задачи о рассеянии света полидисперсной средой, состоящей из сферических независимо рассеивающих частиц. В качестве примера рассчитаем индикатрису рассеяния (33) для рэлеевского спектра частиц:

$$\omega(\rho) = 2\alpha \rho e^{-\alpha \rho^2}, \quad (4.8.34a)$$

при этом средний радиус частиц равен

$$\bar{\rho} = (\pi/4\alpha)^{1/2}. \quad (4.8.34b)$$

Подставим (34) в (33) и используем формулу

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} J_1^2(\beta x) dx = \left(\frac{z}{2\alpha^2}\right) e^{-z} \{I_0(z) - I_1(z)\}, \quad (4.8.35)$$

где обозначено $z = \frac{\theta^2}{2\alpha} = \frac{2}{\pi} (\theta \bar{\rho})^2$. В результате для индикатрисы рассеяния получим выражение

$$I_p(\theta) = C (4\bar{\rho})^{-2} e^{-z} \{I_0(z) - I_1(z)\} \quad (4.8.36a)$$

или, в нормированном виде,

$$\tilde{I}_p(\theta) = e^{-z} \{I_0(z) - I_1(z)\}. \quad (4.8.36b)$$

Функция (366) изображена на рис. 4.38. Ее полуширина по половинному уровню равна $\theta' = 1,1\rho^{-1}$. Отсюда следует, что угловая расходимость рассеянного света $\Delta\theta_p \approx \lambda/\pi a$ определяется фактически дифракцией на частицах среднего размера

С помощью обращения выражения (33) можно найти функцию распределения частиц по размерам $\omega(\rho)$. Это обращение было установлено в работе [34]; способ его получения изложен ниже.

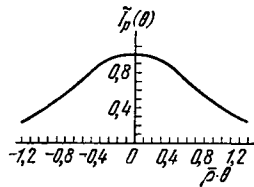


Рис. 4.38. Индикатрса рассеяния света в малоугловом приближении для рэлеевского спектра частиц.

$a = 10$ мкм, $\lambda = 1$ мкм.

Обращение основано на теории обобщенных преобразований Фурье. Исходными являются соотношения

$$f(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}(xu) g(u) du. \quad (4.8.37a)$$

$$g(u) = \int_0^{\infty} h(uy) f(y) dy. \quad (4.8.37b)$$

Как известно, если в (37), например,

$$\mathcal{H}(x) = h(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x,$$

то имеем обычное преобразование Фурье. Однако если в формуле (37a)

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \frac{d}{dx} \left\{ x J_j \left(\frac{x}{2} \right) \right\},$$

то в (37b) должно быть

$$h(x) = -\sqrt{\pi} J_j \left(\frac{x}{2} \right) N_j \left(\frac{x}{2} \right),$$

где $N_j(x)$ — функция Неймана j -го порядка. Следовательно, имеет место соотношение

$$f(x) = -2\pi \int_0^{\infty} J_j(xu) N_j(xu) u du \int_0^{\infty} \frac{d}{du} \{ u J_j^2(ut) \} t f(t) dt. \quad (4.8.38)$$

Преобразуем теперь выражение (33):

$$\frac{d}{d\theta} [I_p(\theta) \theta^3 C^{-1}] = \int_0^{\infty} \frac{d}{d\theta} \{ \theta J_1^2(\rho\theta) \} \rho^2 \omega(\rho) d\rho. \quad (4.8.39)$$

Из сравнения (39) и (38) следует, что

$$f(t) \rightarrow \rho \omega(\rho).$$

Поэтому функция $\omega(\rho)$ определяется выражением

$$\omega(\rho) = -\frac{2\pi}{C\rho} \int_0^{\infty} \theta J_1(\rho\theta) N_1(\rho\theta) \frac{d}{d\theta} [\theta^{-3} I_p(\theta)] d\theta. \quad (4.8.40)$$

Соотношение (40) лежит в основе метода измерения размеров частиц по рассеянию света в диапазоне малых углов (метод малых углов). Однако для определения $\omega(\rho)$ необходимо дифференцировать экспериментальную зависимость $I_p(\theta)$, что усложняет обработку результатов измерений. От этого недостатка свободна другая, несколько измененная, процедура нахождения $\omega(\rho)$, предложенная в [35]:

$$\omega(\rho) = -\frac{C}{\rho} \int_0^{\infty} h(\theta\rho) T(\theta) d\theta, \quad (4.8.41)$$

где

$$h(x) = -2\pi N_1(x) [2x J_0(x) - J_1(x)] - 4, \quad (4.8.42)$$

$$T(\theta) = P(\theta) - P(\infty), \quad P(\theta) = \theta^3 I_p(\theta) C^{-1}.$$

В случае (41) нет необходимости в дифференцировании экспериментальной кривой $I_p(\theta)$.

§ 9. Тепловое излучение

До сих пор при рассмотрении вопросов, связанных с частично когерентными электромагнитными волнами, мы не интересовались природой их возникновения. Частично когерентные световые пучки или случайные волны считались заданными в определенном сечении среды, и задача состояла в определении изменения их свойств в процессе распространения. Как указывалось во введении к этой главе, исключение будет сделано для теплового излучения*). В диапазоне сверхвысоких радиочастот и в оптическом диапазоне тепловое излучение является причиной «внутренних» шумов поглощающей среды.

Источником теплового излучения, как и рассмотренного в гл. 3 теплового шума, является хаотическое движение заряженных микрочастиц (электронов, ионов). Однако, в отличие от теплового шума в квазистационарных цепях, здесь речь будет идти не о случайном токе или напряжении, а о случайном электромагнитном поле [50, 51].

Порядок изложения материала в этом параграфе во многом аналогичен принятому в § 4 гл. 3. Мы начинаем с термодинамических соображений, которые позволяют вывести общие заключения, касающиеся спектральной плотности теплового излучения. Рассматривая условия термодинамического равновесия в системе нагретое тело — излучение, мы приходим к установлению фундаментального закона теплового излучения — закона Кирхгофа.

Помимо общей, «оптической», записи закона Кирхгофа, ниже введена также и полученная впервые Рытовым специальная фор-

*) Статистические свойства излучения радиогенераторов и лазеров рассматриваются в гл. 7.

мулировка закона Кирхгофа, относящаяся к волноводным системам, — так называемая «волноводная форма» закона Кирхгофа [50, 51]. Главный результат термодинамического рассмотрения заключается в том, что спектральная плотность теплового излучения произвольного нагретого тела выражается через универсальную функцию — спектральную плотность излучения абсолютно черного тела. Вычисление последней и является ключевой проблемой физики теплового излучения.

Таким образом, общая структура теории теплового излучения аналогична структуре теории теплового шума в квазистационарных цепях. Следует вместе с тем еще раз подчеркнуть различия в описании этих процессов. Если тепловой шум описывается в терминах случайных токов и напряжений, т. е. в терминах теории случайных процессов, то в тепловом излучении мы имеем дело с генерацией случайных электромагнитных полей $E(r, t)$, $H(r, t)$ распределенными источниками. Поэтому здесь дело не ограничивается только определением спектральной плотности теплового излучения. В излагаемую ниже теорию входит также спектральная плотность излучения в единице объема (объемная спектральная плотность) $u(\omega)$; естественно, что надо располагать и данными о пространственно-временных корреляционных функциях теплового излучения.

Закон Кирхгофа. В теории теплового излучения нагретое тело характеризуется его испускательной способностью $I(\omega, \theta)$, равной интенсивности теплового излучения, испускаемого с единицы поверхности в частотном интервале $\omega, \omega + d\omega$ и телесном угле $\theta, \theta + d\theta$. Введем также поглощательную способность $A(\omega, \theta)$, определяемую как отношение энергии, поглощенной единичной площадкой тела в интервалах $\omega, \omega + d\omega$ и $\theta, \theta + d\theta$, к энергии падающего на тело излучения.

В теории теплового излучения особое место занимает тепловое излучение так называемого абсолютно черного тела, для которого

$$A_0(\omega, \theta) \equiv 1. \quad (4.9.1)$$

Нетрудно убедиться, что отношение излучательной способности произвольного тела к его поглощательной способности $I(\omega, \theta)/A(\omega, \theta)$ оказывается универсальной функцией частоты и температуры, — это и составляет содержание закона Кирхгофа. Речь идет, таким образом, о соотношении, совершенно аналогичном по структуре отношению спектральной плотности теплового шума к действительной части полного сопротивления, выведенному в § 4 гл. 3. Рассуждения, используемые для вывода закона Кирхгофа, во многом аналогичны рассуждениям гл. 3.

Рассмотрим замкнутую полость, стенки которой представляют собой абсолютно черное тело, находящееся при температуре T .

Полость заполнена равновесным изотропным «черным» излучением с объемной спектральной плотностью $u_0(\omega)$. Пусть теперь площадка $d\sigma$ черного тела заменена площадкой произвольного тела, находящегося при той же температуре. Условия теплового равновесия при этом не изменяются, и можно записать баланс энергии:

$$I(\omega, \theta) d\omega d\theta d\sigma = cu_0(\omega) A(\omega, \theta) \cos \theta d\omega d\theta d\sigma, \quad (4.9.2)$$

где θ — угол, отсчитываемый от нормали к рассматриваемой площадке. Таким образом,

$$I(\omega, \theta)/A(\omega, \theta) = cu_0(\omega) \cos \theta, \quad (4.9.3)$$

и задача сводится к определению объемной спектральной плотности «черного» излучения $u_0(\omega)$. Однако, прежде чем переходить к определению $u_0(\omega)$, запишем еще одну формулировку закона Кирхгофа, занимающую «промежуточное» место между оптической формулировкой (3) и ее аналогом для квазистационарных цепей. Речь идет о формулировке, пригодной для описания тепловых шумов в волноводных системах — линиях передачи, радиоволноводах и т. п. Здесь мы выведем выражение для спектральной плотности теплового излучения, посылаемого в n -ю моду волновода нагретым телом; подробный вывод см. в [11].

Будем характеризовать взаимодействие исследуемого тела M с n -й модой волновода коэффициентами поглощения A_n^\pm , отражения R_n^\pm и прозрачности D_n^\pm *); знаки « \pm » относятся к волнам, падающим на рассматриваемое тело соответственно слева и справа (рис. 4.39). Из закона сохранения энергии имеем

$$A_n^+ + R_n^+ + D_n^+ = 1, \quad A_n^- + R_n^- + D_n^- = 1. \quad (4.9.4)$$

Пусть с обоих концов волновод перекрыт согласованными нагрузками, представляющими собой абсолютно черные тела с температурой T . Обозначим через $\langle \omega(\omega) \rangle$ среднюю энергию моды, излучаемой черным телом. Тогда мощность излучения в интервале частот $\omega, \omega + d\omega$ равна

$$P_\omega d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle d\omega. \quad (4.9.5)$$

Предположим, что $P_{\omega n}^\pm$ — спектральные плотности мощности, излучаемые вправо и влево телом на n -й волне.

*) Для простоты считаем, что трансформации волн не происходит; общий случай рассмотрен в [11].

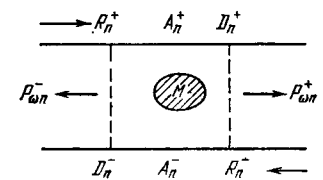


Рис. 4.39. Схема расположения излучателя M в волноводе.

Записывая выражение, описывающее баланс потоков энергии, можно написать (рис. 4.39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle &= P_{\omega n}^+ + \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle (D_n^+ + R_n^-), \\ \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle &= P_{\omega n}^- + \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle (D_n^- + R_n^+). \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

Умножая соотношения (4) на $\langle \omega(\omega)/2\pi \rangle$ и вычитая из (6), получим

$$\begin{aligned} P_{\omega n}^+ &= \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle (A_n^- + D_n^- - D_n^+), \\ P_{\omega n}^- &= \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle (A_n^+ + D_n^+ - D_n^-). \end{aligned}$$

Если значения коэффициентов D_n не зависят от направления падения волны ($D_n^+ = D_n^-$, выполняется принцип взаимности), то из последних соотношений получаем

$$P_{\omega n}^+ = \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle A_n^-, \quad P_{\omega n}^- = \frac{1}{2\pi} \langle \omega(\omega) \rangle A_n^+. \quad (4.9.7)$$

Отсюда следует, что мощность, излучаемая телом M в волноводе на n -й волне направо (налево), определяется коэффициентом поглощения n -й волны, падающей справа (слева). Для абсолютно черного тела ($A_n^\pm = 1$) приходим, естественно, к выражению (5).

Тепловое излучение абсолютно черного тела. Обратимся теперь к определению объемной спектральной плотности излучения $u_0(\omega)$ абсолютно черного тела. Поскольку объемная спектральная плотность $u_0(\omega)$ не зависит от формы полости, рассмотрим для простоты полость в виде прямоугольного «ящика» со сторонами длиной L . В таком «ящике» поле излучения можно разложить по плоским волнам или модам (в тройной ряд Фурье):

$$E(r, t) = L^{-3/2} \sum_k \sum_{m=1}^2 e_{km} A_{km} e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}. \quad (4.9.8)$$

Здесь e_{km} — единичный вектор поляризации моды с волновым вектором \mathbf{k} . Векторы e_{k1} и e_{k2} взаимно перпендикулярны и в силу поперечности электромагнитного поля перпендикулярны также вектору \mathbf{k} , т. е.

$$e_{k1} e_{k2} = 0, \quad e_{km} \mathbf{k} = 0.$$

Для проекций рассматриваемых векторов имеет место соотношение

$$e_{k1i} e_{k1j} + e_{k2i} e_{k2j} + k_i k_j k^{-2} = \delta_{ij}. \quad (4.9.9)$$

A_{km} — амплитуда моды, соответствующая данному набору векторов e_{km} и \mathbf{k} . Вектор \mathbf{k} имеет координаты

$$\mathbf{k} = \left\{ (2\pi/L) n_x, (2\pi/L) n_y, (2\pi/L) n_z \right\},$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа. Волновое число k удовлетворяет соотношению

$$k = \omega/c, \quad k = (2\pi/L) (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}. \quad (4.9.10)$$

В формуле (8) суммирование по \mathbf{k} означает суммирование по набору чисел n_x, n_y и n_z .

Поле излучения черного тела изотропно и полностью не поляризовано; учитывая соотношения (1.8.5), (1.8.55) и (1.8.59), для корреляций амплитуд поля можно написать

$$\langle A_{kl} A_{k'm} \rangle = |A_k|^2 \delta_{lm} \delta_{kk'}.$$

Декартова компонента комплексного поля (2) равна

$$E_i(\mathbf{r}, t) = L^{-3/2} \sum_k \sum_{m=1}^2 e_{kmi} A_{km} e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}.$$

Для пространственно-временной корреляционной функции поля получим выражение

$$\begin{aligned} B_{ij}(s, \tau) &= \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t + \tau) \rangle = \\ &= L^{-3} \sum_k \sum_{m=1}^2 e_{kmi} e_{kjm} |A_{k,m}|^2 e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}s)}. \end{aligned} \quad (4.9.11)$$

Устремим размеры полости к бесконечности ($L \rightarrow \infty$), при этом суммирование в (8) можно заменить интегрированием:

$$L^{-3} \sum_k (\dots) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) d^3k.$$

Подставляя в преобразованное указанным образом выражение (11) соотношение (9), имеем

$$B_{ij}(s, \tau) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_k|^2 (\delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}) e^{i(k\tau - \mathbf{k}s)} d^3k. \quad (4.9.12)$$

Пользуясь (12), рассчитаем сначала объемную плотность энергии:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} |E|^2 = \int_0^\infty u_0(\omega) d\omega, \quad (4.9.13)$$

где учтено равенство электрической и магнитной энергий.

Объемная плотность энергии электромагнитного излучения в свободном пространстве с учетом изотропии поля равна

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 B_{ii}(0, 0) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \omega(k) \rangle d^3k, \quad (4.9.14)$$

где

$$\langle w(k) \rangle = |A(k)|^2 / 4\pi \quad (4.9.15)$$

— средняя энергия моды. Перейдем в выражении (14) от декартовых координат $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ к сферическим координатам $d^3k = k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и проинтегрируем. Тогда получим

$$U_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 \langle w(k) \rangle dk.$$

Пользуясь дисперсионным соотношением (10), последнее соотношение можно представить в виде

$$U_0 = \int_0^\infty \rho(\omega) \langle w(\omega) \rangle d\omega. \quad (4.9.16)$$

Здесь $\rho(\omega) = \omega^2 / \pi^2 c^3$ есть число мод в единице объема и в единичном частотном интервале.

Из сравнения (16) с (13) следует, что объемная спектральная плотность излучения абсолютно черного тела равна

$$u_0(\omega) = (\omega^2 / \pi^2 c^3) \langle w(\omega) \rangle. \quad (4.9.17)$$

В классической области $\hbar\omega \ll kT$, $\langle w \rangle = kT$, и для объемной спектральной плотности черного излучения получаем

$$u_0 = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (4.9.18)$$

Формула (18) в теории теплового излучения выражает закон Рэлея — Джинса. Расходимость полной энергии теплового излучения в (18), как известно, устраняется за счет перехода от закона равномерного распределения классической статистики к распределению Планка

$$\langle w \rangle = \hbar\omega / [e^{\hbar\omega/kT} - 1]. \quad (4.9.18a)$$

Тогда вместо (18) приходим к выражению для $u_0(\omega)$, справедливому при любых частотах:

$$u_0(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (4.9.19)$$

Когерентные свойства излучения абсолютно черного тела. Вернемся к выражению (12). Поскольку мы знаем выражение (18) для средней энергии отдельной моды (15), теперь можно рассчитать пространственно-временную корреляционную функцию излучения абсолютно черного тела [52—55]. Принимая во внимание соотношения (18), (19), для корреляционной функции

поля имеем

$$B_{ij}(s, \tau) = \frac{\hbar c}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k(e^{\alpha k} - 1)} e^{i(kc\tau - ks)} d^3k = \frac{\hbar c}{4\pi^2} \hat{L}_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(kc\tau - ks)}}{k(e^{\alpha k} - 1)} d^3k,$$

где $\alpha = \hbar c / kT$, $\hat{L}_{ij} = \frac{\partial}{\partial s_i} \frac{\partial}{\partial s_j} - \delta_{ij} \Delta$, s_i — компонента вектора s , Δ — трехмерный оператор Лапласа.

В сферических координатах с полярной осью вдоль направления вектора s

$$B_{ij}(s, \tau) = \frac{\hbar c}{4\pi^2} \hat{L}_{ij} \int_0^\infty k \int_0^\pi \sin \vartheta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(kc\tau - ks \cos \vartheta)}}{e^{\alpha k} - 1} d\varphi d\vartheta dk.$$

После интегрирования по угловым переменным получим

$$B_{ij}(s, \tau) = \frac{\hbar c}{\pi} \hat{L}_{ij} \int_0^\infty \frac{\sin ks e^{-ikc\tau}}{s(e^{\alpha k} - 1)} dk. \quad (4.9.20)$$

Разложим под интегралом (20) знаменатель в ряд и проинтегрируем; тогда

$$B_{ij}(s, \tau) = \frac{\hbar c}{\pi} \hat{L}_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} f(n; s, \tau), \quad (4.9.21)$$

$$f(n; s, \tau) = [(n\alpha - ic\tau)^2 + s^2]^{-1}.$$

Выполняя в (21) дифференцирование, приходим к выражению

$$B_{ij}(s, \tau) = \frac{4\hbar c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{ij} f^2(n; s, \tau) + 2(s_i s_j - s^2 \delta_{ij}) f^3(n; s, \tau). \quad (4.9.22)$$

Средняя интенсивность теплового излучения i -й компоненты поля равна

$$B_{ii}(0, 0) = \frac{4\hbar c}{\pi} \alpha^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-4} = \frac{4\hbar c}{\pi} \alpha^{-4} \frac{\pi^4}{90}.$$

Здесь сумма представляет собой обобщенную ζ -функцию Римана:

$$\zeta(x, q) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)^{-x}, \quad \text{причем } \zeta(4, 1) = \pi^4/90.$$

Нормированная пространственно-временная корреляционная функция (22) согласно (1.8.37) равна

$$\gamma_{ij}(s, \tau) = 90\pi^{-4}\alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \delta_{ij} f^2(n; s, \tau) + 2(s_i s_j - s^2) \delta_{ij} f^3(n; s, \tau) \}. \quad (4.9.23)$$

Проанализируем сначала временную когерентность теплового излучения. Из (23) нетрудно получить, что при $s=0$ недиагональные элементы поляризационной матрицы $\gamma_{ij}(0, \tau)$ равны нулю:

$$\gamma_{ij}(0, \tau) = 90\pi^{-4} \zeta(4, 1 - ic\tau/\alpha) \delta_{ij}. \quad (4.9.24)$$

Диагональные компоненты матрицы (24) равны друг другу. Поведение временной корреляционной функции (24) показано на

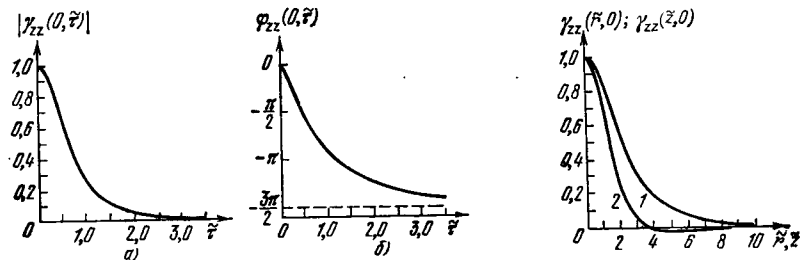


Рис. 4.40. Модуль (а) и аргумент (б) временной корреляционной функции излучения абсолютно черного тела [52]:

$$\gamma_{zz}(0, \tau) = |\gamma_{zz}(0, \tau)| \exp i\varphi_{zz}(0, \tau), \quad \tilde{\tau} = (\kappa T/\hbar) \tau.$$

Рис. 4.41. Продольная $\gamma_{zz}(\tilde{z}, 0)$ (1) и поперечная $\gamma_{zz}(\tilde{r}, 0)$ (2) пространственные корреляционные функции излучения абсолютно черного тела [52]:

$$\tilde{z} = (\pi\kappa T/\hbar c) z, \quad \tilde{r} = (\pi\kappa T/\hbar c) r.$$

рис. 4.40. Таким образом, время корреляции излучения абсолютно черного тела τ_κ порядка $\hbar/\kappa T$, т. е. порядка среднего периода излучения.

При $\tau \rightarrow \infty$ модуль корреляционной функции (24) быстро спадает: $|\gamma_{ii}(0, \tau)| \sim 30\pi^{-4}\tau^{-3}$, а ее фаза $\varphi(\tau) = -\arg \gamma_{ii}$ изменяется как $-\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\kappa T} \tau^{-1}$.

Обратимся теперь к пространственной когерентности теплового излучения. В соответствии с (23) для пространственной корреляционной функции имеем

$$\gamma_{ij}(s, 0) = 90\pi^{-4} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \delta_{ij} [n^2 + (s/\alpha)^2]^{-2} + 2\alpha^{-2} (s_i s_j - \delta_{ij} s^2) [n^2 + (s/\alpha)^2]^{-3} \}. \quad (4.9.25)$$

Ряды в (25) удается просуммировать и выражение записать в виде

$$\gamma_{ij}(s, 0) = (45/4\tilde{s}^4) [C(\tilde{s})\delta_{ij} + D(\tilde{s})\tilde{s}_i\tilde{s}_j\tilde{s}^{-2}], \quad (4.9.26)$$

где $\tilde{s} = (\pi/\alpha) s$ и

$$C(x) = -x \operatorname{cth} x - x^2 \operatorname{sh}^{-2} x - 2x^3 \operatorname{cth} x \operatorname{sh}^{-2} x + 4, \\ D(x) = -8 + 3x \operatorname{cth} x + 3x^2 \operatorname{sh}^{-2} x + 2x^3 \operatorname{sh}^{-2} x \operatorname{cth} x.$$

Из (26) видно, что пространственная корреляционная функция вещественна. Это согласуется с предположением об однородности и изотропности излучения абсолютно черного тела (см. § 8 гл. 1). Изменение продольной $\gamma_{zz}(z, 0)$ и поперечной $\gamma_{zz}(r, 0)$ корреляционных функций (26) показано на рис. 4.41 (радиус-вектор \mathbf{r} перпендикулярен направлению оси z). В обоих случаях радиус корреляции

$$r_\kappa \approx 2\hbar c/\kappa T.$$

В силу произвольности выбора оси z поведение остальных компонент матрицы совпадает с поведением $\gamma_{zz}(r, 0)$.

В заключение сделаем замечание о статистике излучения абсолютно черного тела. Его поле излучения представляет собой совокупность большого числа мод (плоских волн), статистически не связанных между собой (строго говоря, не коррелированных). Число мод излучения при устремлении размера полости к бесконечности растет. В этом случае, как было показано в § 10 гл. 2, статистика суперпозиции мод стремится к гауссовской. Следовательно, функция распределения интенсивности излучения черного тела является экспоненциальной.

Нелинейные преобразования колебаний — детектирование, смещение, умножение частоты — играют исключительно важную роль в радиофизике; быстро растет их значение и в современной оптике. В этой главе речь пойдет о преобразовании шумовых колебаний в нелинейных системах с сосредоточенными параметрами. Закономерности преобразования случайных сигналов в нелинейных системах принципиально отличаются от рассмотренного в гл. 3 поведения случайных колебаний в линейных системах.

Прежде всего, в нелинейных системах происходит существенное изменение законов распределения (статистики флуктуаций). В частности, в отличие от линейных систем, гауссовское распределение теряет здесь устойчивость. Гауссовские флуктуационные силы, действующие на нелинейную систему, возбуждают в ней колебания, статистика которых может очень сильно отличаться от гауссовской.

Принципиально изменяются в нелинейных системах (по сравнению с линейными) и законы преобразования спектров и корреляционных функций. Причиной этого оказывается обстоятельство, имеющее фундаментальный характер: для колебаний в нелинейных системах перестает выполняться принцип суперпозиции. При нелинейных преобразованиях возникают новые спектральные компоненты шума и вся форма спектрального распределения, вообще говоря, кардинально меняется. Кроме того, в нелинейных системах закономерности преобразования спектров зависят от статистики процесса; напомним, что в линейных системах такой зависимости нет.

Хотя в большинстве случаев нелинейные преобразования оптического шума носят характер взаимодействия и самовоздействия волн (таким задачам специально посвящена гл. 8), имеются важные примеры, когда и в оптике можно говорить о нелинейном преобразовании шумовых колебаний. Сюда относятся, прежде всего, различные варианты детектирования и смешения световых волн на фотокатоде, задача о воздействии оптического шума на атомы и

молекулы («эталонной» здесь является задача о воздействии оптического шума на двухуровневую квантовую систему).

Подчеркнем еще один существенный аспект. С помощью нелинейных преобразований можно построить разнообразные схемы измерений высших корреляционных функций оптического шума. Такие измерения приобретают все большее значение в современной оптике. Прежде всего, при генерации света в современных лазерных устройствах, в ряде ситуаций при рассеянии света мы сталкиваемся с существенно негауссовскими шумами. В этом случае измерение набора корреляционных функций различных порядков дает важную информацию о физических процессах в системе, генерирующей негауссовский случайный процесс. Вместе с тем и при исследовании гауссовских процессов измерение высших корреляционных функций оказывается более выгодным, нежели измерение корреляционной функции первого порядка. Классическим примером такой ситуации служит интерферометрия интенсивностей в радиоастрономии, когда измерение корреляционной функции интенсивности позволяет избавиться от фазовых искажений приходящего сигнала турбулентной атмосферой.

В практических задачах нас часто интересует эффективность или коэффициент полезного действия (к. п. д.) нелинейного преобразования. При этом естественной становится постановка вопроса о сравнении к. п. д. при монохроматическом (регулярном) и шумовом возбуждениях. Мы неоднократно будем обращаться к такому сравнению в этой и последующих главах. Это приводит к интересным физическим выводам. Оказывается, например, что в безынерционных нелинейных системах к. п. д. преобразования шумового сигнала существенно превышает к. п. д. преобразования монохроматического сигнала, имеющего такую же среднюю интенсивность, поскольку нелинейность подчеркивает выбросы шума.

Теория нелинейных преобразований случайных функций — хорошо разработанная область; здесь развиты эффективные математические методы, обзор которых читатель найдет, например, в [2, 4—6]. В предлагаемой главе мы ограничимся рассмотрением сравнительно узкого круга задач, представляющих, на наш взгляд, наибольший физический интерес. Умножение частоты, детектирование и смешение случайных сигналов в радиофизике и оптике — рассмотрением этих проблем в значительной мере исчерпывается содержание гл. 5. При этом большое внимание уделено приложениям перечисленных процессов в технике измерения радишумов, для анализа сложных оптических сигналов. Специальный (и довольно обширный) § 5 посвящен подробному рассмотрению нелинейной задачи о воздействии шума на двухуровневую квантовую систему; для современной статистической оптики эта задача оказывается одной из главных.

§ 1. Нелинейное безынерционное преобразование

Нелинейные характеристики. Безынерционным называется такое нелинейное устройство, в котором связь между процессом на входе $x(t)$ и процессом на выходе $y(t)$ является чисто алгебраической:

$$y = f(x), \tag{5.1.1}$$

т. е. значение y в любой момент времени определяется величиной x в тот же самый момент. Функция $f(x)$ называется нелинейной характеристикой устройства. Нелинейные характеристики, или, как говорят, нелинейности различных видов, могут быть получены, в частности, на основе вольт-амперной характеристики электронной лампы (рис. 5.1). Например, в области $u < u_1$ вольт-амперную характеристику можно аппроксимировать односторонней параболой n -й степени (рис. 5.2, а), а в области $u_1 \ll u < u_2$ — линейно-ломаной кривой

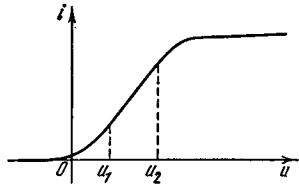


Рис. 5.1. Вольт-амперная характеристика электронной лампы.

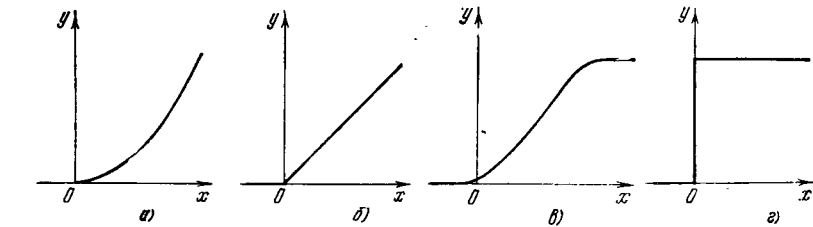


Рис. 5.2. Нелинейные характеристики:

а) параболический детектор; б) «линейный» детектор; в) ограничитель; г) идеальный ограничитель.

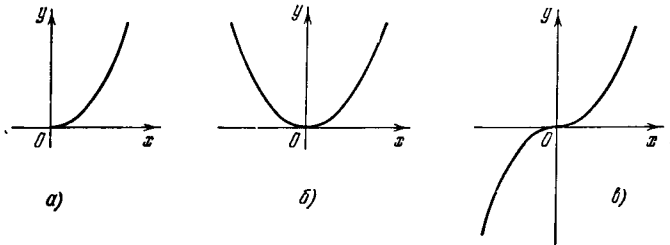


Рис. 5.3. Симметричные и антисимметричные нелинейные характеристики.

(рис. 5.2, б). Если $u_2 < u$, то мы имеем характеристику ограничителя (рис. 5.2, в), и при $u_2 \ll u$ — характеристику идеального

ограничителя (рис. 5.2, г). Используя две лампы, можно получить симметричные или антисимметричные нелинейные характеристики (рис. 5.3).

Многие реальные нелинейные устройства нельзя считать безынерционными, но в то же время их можно представить в виде последовательно соединенных двух частей: безынерционного нелинейного элемента $НЛ$ и линейного инерционного элемента — фильтра Φ (рис. 5.4), причем обе части этой схемы (линейную и нелинейную) с допустимой точностью можно считать развязанными, т. е. ее элементы можно рассматривать по отдельности.

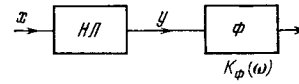


Рис. 5.4. Типовое радиотехническое звено.

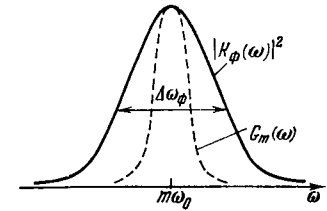


Рис. 5.5. Частотная характеристика фильтра, выделяющего без искажения m -ю гармонику.

Это обстоятельство намного упрощает анализ таких схем, который, соответственно, проводится в два этапа: сначала рассматривается нелинейное преобразование $x \rightarrow y$, а затем линейное преобразование $y \rightarrow z$ (по этой схеме дальше рассматривается преобразование шума в умножителе частоты и квадратичном детекторе).

Умножение частоты. Как в радиофизике, так и в оптике одним из наиболее часто встречающихся нелинейных преобразований является умножение частоты (генерация гармоник). Исследуем этот процесс, предполагая, что для получения m -й гармоники используется нелинейность n -й степени ($n \geq m$), т. е. зависимость (1) имеет вид

$$y = x^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots), \tag{5.1.2}$$

а исходное колебание, частота которого умножается, представляет собой квазигармонический случайный процесс:

$$x = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}, \quad A = \frac{\rho}{2} e^{i\varphi}, \tag{5.1.3}$$

с относительно узким частотным спектром. Для простоты считаем, что стоящий после нелинейного элемента фильтр Φ (рис. 5.4), настроенный на частоту $m\omega_0$, имеет достаточно большую полосу пропускания $\Delta\omega_\Phi$ (рис. 5.5), так что инерционность фильтра никак не влияет на форму спектра m -й гармоники; роль такого фильтра сводится просто к выделению без искажения m -й гармоники и полному подавлению всех остальных.

Подставляя (3) в (2) и используя формулу бинома Ньютона, получим

$$y = (Ae^{i\omega_0 t} + A^*e^{-i\omega_0 t})^n = \sum_{p=0}^n C_n^p A^{n-p} A^{*p} e^{i\omega_0(n-2p)t} = \frac{\rho^n(t)}{2^n} \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} e^{i(n-2\nu)(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (5.1.4)$$

Из этого выражения видно, что с помощью нелинейности четной степени можно генерировать только четные гармоники:

$$0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots, n\omega_0 \quad (n - \text{четное}),$$

а при нелинейности нечетной степени — только нечетные:

$$\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots, n\omega_0 \quad (n - \text{нечетное}).$$

К. п. д. при гармоническом и шумовом возбуждениях. Согласно (4) m -я гармоника, образующая процесс на выходе фильтра, описывается выражением

$$z(t) = C_n \frac{n-m}{2} \frac{\rho^n(t)}{2^n} (2 - \delta_{0m}) \cos m(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (5.1.5)$$

где δ_{0m} — символ Кронекера: $\delta_{0m} = 1$ ($m = 0$), 0 ($m = 1, 2, \dots$). Средняя интенсивность процесса (5) равна

$$\sigma_m^2 = \langle z^2 \rangle = 2^{1-2n} F_{mn} \langle \rho^{2n} \rangle, \quad (5.1.6)$$

где

$$F_{mn} = \left(C_n \frac{n-m}{2} \right)^2 (1 - \delta_{0m}/2), \quad (5.1.7)$$

$$C_n \frac{n-m}{2} = \frac{n!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}. \quad (5.1.8)$$

Форма интегрального спектра на выходе нелинейного безынерционного элемента, т. е. относительное распределение интенсивности процесса y по гармоникам, определяется зависимостью величин σ_m от индекса m . Как видно из (6), от статистических свойств входного процесса (3) форма этого спектра не зависит; относительное распределение интенсивности по гармоникам $m\omega_0$ определяется фактором F_{mn} . Из табл. 5.1 следует, что относительная эффективность генерации m -й гармоники, пропорциональная F_{mn} , уменьшается с ростом m (при заданной степени нелинейности n).

Статистический выигрыш. Величина к. п. д. генерации гармоник, напротив, существенно зависит от статистических свойств входного процесса x , точнее — от статистики огибающей ρ этого процесса: согласно (6)

$$\sigma_m^2 \sim \langle \rho^{2n} \rangle \quad (m = n, n-2, \dots).$$

Таблица 5.1
Значения фактора F_{mn}

m	n			
	2	3	4	5
0	2	—	18	—
1	—	9	—	100
2	1	—	16	—
3	—	1	—	25
4	—	—	1	—
5	—	—	—	1

Обозначив среднюю интенсивность входного колебания через $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle / 2$, находим, например, что при гармоническом возбуждении (ρ и φ постоянны, причем величина огибающей неслучайна)

$$\langle \rho^{2n} \rangle_0 = \sigma^{2n} 2^n, \quad (5.1.8a)$$

а при возбуждении стационарным гауссовским шумом с рэлеевским распределением амплитуды $w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2}$

$$\langle \rho^{2n} \rangle = \sigma^{2n} 2^n n! \quad (5.1.9)$$

(см. (2.4.7)). Из сравнения (8a) и (9) следует, что при одинаковых интенсивностях σ^2 входных колебаний к. п. д. генерации любой гармоники гауссовским шумом в

$$\eta = \langle \rho^{2n} \rangle / \langle \rho^{2n} \rangle_0 = n! \quad (5.1.9a)$$

раз больше, чем при гармоническом возбуждении (n — степень нелинейности процесса). Подчеркнем, что факториальный выигрыш $n!$ отнюдь не является наибольшим возможным. Статистический выигрыш при генерации гармоник проявляется тем сильнее, чем медленнее спадают распределения вероятностей $w(x)$ и $w(\rho)$ на бесконечности. Взяв, например, экспоненциальное распределение для огибающей

$$w(\rho) = \frac{1}{\sigma} e^{-\rho/\sigma} \quad (5.1.10)$$

(оно спадает более медленно, чем рэлеевское), получим

$$\langle \rho^{2n} \rangle = \sigma^{2n} (2n)!,$$

т. е. статистический выигрыш здесь еще более значителен, чем в (9). Распределению (10) соответствует распределение входного процесса

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sigma} K_0\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) \sim \frac{e^{-|x|/\sigma}}{\sqrt{|x|}} \quad (|x| \gg \sigma)$$

(см. [1], с. 312), спад которого с ростом x является, очевидно, также не таким быстрым, как в случае гауссовского распределения.

Отметим, что статистический выигрыш, больший $n!$, получается и в том случае, когда гармоники возбуждаются с помощью гауссовского, но периодически нестационарного шума вида

$$x(t) = a(t) \cos \omega_0 t, \quad \langle x^2 \rangle = \sigma^2 = 1/2 \sigma_a^2, \quad \sigma_a^2 = \langle a^2 \rangle, \quad (5.1.11)$$

который формируется на выходе параметрических усилителей радио- и оптического диапазона при достаточно больших коэффициентах усиления (см. гл. 6). В (11) $a(t)$ — относительно медленный гауссовский стационарный процесс:

$$\langle a \rangle = 0, \quad \omega(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right).$$

В этом случае

$$\langle \rho^{2n} \rangle = \langle a^{2n} \rangle = \sigma_a^{2n} (2n-1)!! = \sigma^{2n} 2^n (2n-1)!! \quad (5.1.12)$$

и статистический выигрыш по сравнению со стационарным гауссовским шумом (см. (9)) растет с увеличением степени нелинейности n :

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = \begin{cases} 1,5, & n=2, \\ 2,5, & n=3, \\ 4,4, & n=4, \\ 7,9, & n=5. \end{cases}$$

Корреляционные функции и спектры на выходе множителя частоты. Рассмотрим теперь спектр $G_m(\omega)$ m -й гармоники (рис. 5.5). Интегральная интенсивность, соответствующая этому спектру, определяется дисперсией (6):

$$2 \int_0^\infty G_m(\omega) d\omega = \sigma_m^2 = 2^{1-2n} F_{mn} \langle \rho^{2n} \rangle. \quad (5.1.13)$$

Как было установлено выше, зависимость σ_m^2 от m одинакова для всех процессов (3) на входе множителя, однако величина σ_m^2 и форма спектра $G_m(\omega)$ зависят как от вида спектра $G(\omega)$ входного шума (3), так и от статистических свойств этого шума.

Предположим, что процесс (3) — гауссовский и стационарный с корреляционной функцией $\langle xx_\tau \rangle = B(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$. Корреляционная функция $\langle yy_\tau \rangle = \langle x^n x_\tau^n \rangle$ на выходе нелинейного элемента может быть в этом случае представлена в виде конечного ряда по степеням $B(\tau)$. Используя формулы

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (2\sigma)^n \Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; R^2(\tau)\right) & (n - \text{четное}), \\ \frac{2}{\pi} (2\sigma^2)^n R(\tau) \Gamma^2\left(1 + \frac{n}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; R^2(\tau)\right) & (n - \text{нечетное}) \end{cases}$$

(см. [2], с. 472) и представление гипергеометрической функции в виде ряда (ГР, с. 1053), получим

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = a_0 + a_2 R^2 + a_4 R^4 + \dots + a_n R^n \quad (n - \text{четное}), \quad (5.1.14)$$

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = a_1 R + a_3 R^3 + a_5 R^5 + \dots + a_n R^n \quad (n - \text{нечетное}), \quad (5.1.15)$$

где

$$a_0 = \frac{2^n \sigma^{2n}}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad a_m = a_0 \frac{n^2 (n-2)^2 \dots (n-m+2)^2}{2^{m/2} \left(\frac{m}{2}\right)! (m-1)!!} \quad (m=2, 4, \dots, n), \quad (5.1.16)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} 2^n \sigma^{2n} \Gamma^2\left(1 + \frac{n}{2}\right), \quad a_m = a_1 \frac{(n-1)^2 (n-3)^2 \dots (n-m+2)^2}{2^{(m-1)/2} \left(\frac{m+1}{2}\right)! m!!} \quad (m=3, 5, \dots, n). \quad (5.1.17)$$

Теперь учтем, что для квазигармонического процесса x коэффициент корреляции может быть представлен как

$$R(\tau) = r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)] = p(\tau) \cos \omega_0 \tau - q(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (5.1.18)$$

(см. (2.3.7)) или

$$R(\tau) = Q(\tau) e^{i\omega_0 \tau} + \text{к.с.}, \quad Q(\tau) = [p(\tau) + iq(\tau)]/2. \quad (5.1.19)$$

Для четной степени s согласно (4) и (19) имеем

$$R^s = (Q e^{i\omega_0 \tau} + Q^* e^{-i\omega_0 \tau})^s = \sum_{m=0, 2, \dots}^s C_s^{\frac{s-m}{2}} \left[Q^{\frac{s+m}{2}} Q^{*\frac{s-m}{2}} e^{i\omega_0 m \tau} + \text{к.с.} \right] \left(1 - \frac{\delta_{0m}}{2}\right), \quad (5.1.20)$$

где δ_{0m} имеет тот же смысл, что и в (5). Подставив (20) в (14), получим

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = \sum_{s=0, 2, \dots}^n a_s R^s = \sum_{s=0, 2, \dots}^n a_s \sum_{m=0, 2, \dots}^s C_s^{\frac{s-m}{2}} \left[Q^{\frac{s+m}{2}} Q^{*\frac{s-m}{2}} e^{i\omega_0 m \tau} + \text{к.с.} \right] \left(1 - \frac{\delta_{0m}}{2}\right). \quad (5.1.21)$$

Область значений m и s , по которым проводится суммирование в (21), заштрихована на рис. 5.6. Изменив в (21) порядок суммирования, получим следующее выражение:

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = \sum_{m=0, 2, \dots}^n Q_m(\tau) e^{i\omega_0 m \tau} + \text{к.с.}, \quad (5.1.22)$$

где

$$Q_m(\tau) = \left(1 - \frac{\delta_{0m}}{2}\right) \sum_{s=m, m+2, \dots}^n a_s C_s \frac{s-m}{2} [Q(\tau)]^{\frac{s+m}{2}} [Q^*(\tau)]^{\frac{s-m}{2}} \quad (5.1.23)$$

с коэффициентами a_s из (16).

Аналогично можно показать, что при нечетном n

$$\langle x^n x_\tau^n \rangle = \sum_{m=1, 3, \dots}^n Q_m(\tau) e^{i\omega_0 m \tau} + \text{к.с.}, \quad (5.1.24)$$

где

$$Q_m(\tau) = \sum_{s=m, m+2, \dots}^n a_s C_s \frac{s-m}{2} [Q(\tau)]^{\frac{s+m}{2}} [Q^*(\tau)]^{\frac{s-m}{2}} \quad (5.1.25)$$

с a_s из (17).

Таким образом, корреляционная функция m -й гармоники определяется выражением

$$B_m(\tau) = Q_m(\tau) e^{i\omega_0 m \tau} + \text{к.с.}, \quad (5.1.26)$$

где $Q_m(\tau)$ вычисляется по формуле (23), если гармоника четная, или (25), если гармоника нечетная. Спектральную интенсивность гармоники $G_m(\omega)$ найдем, выполнив фурье-преобразование функции (26).

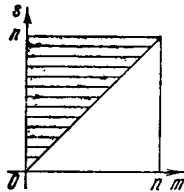


Рис. 5.6. Область суммирования (заштрихована) в формуле (21).

Полученные выражения дают возможность сделать некоторые общие заключения о структуре спектра m -й гармоники.

1. Предположим, что спектр $G^+(\omega)$ исходного колебания (3) симметричен относительно частоты ω_0 . Тогда в (19) $q(\tau) = 0$ и $Q(\tau) = \rho(\tau)/2$, т. е. $Q(\tau)$ — вещественная функция. При этом в (23) и (25)

$$[Q(\tau)]^{\frac{s+m}{2}} [Q^*(\tau)]^{\frac{s-m}{2}} = Q^s(\tau) = \frac{\rho^s(\tau)}{2^s}. \quad (5.1.27)$$

Так как коэффициенты a_s и $C_s^{(s-m)/2}$ в рядах (23) и (25) положительны, то функции $Q_m(\tau)$ вещественны, т. е. спектры гармоник также будут симметричны относительно частот $m\omega_0$.

2. Функция $\rho(\tau)$ имеет смысл коэффициента корреляции квадратурных компонент процесса (3) (см. (2.3.4)), т. е. $-1 \leq \rho(\tau) \leq 1$. Но в суммы (23) и (25) функция $\rho(\tau)$ входит в степенях, больших или равных m ($m \leq s \leq n$). Поэтому $Q_m(\tau)$ с ростом τ будет

уменьшаться не медленнее, чем $\rho^m(\tau)$. Определяя время корреляции входного процесса (3) соотношением $\tau_k^{\text{вх}} = \int_0^\infty |\rho(\tau)| d\tau$, используем аналогичную оценку для времени корреляции m -й гармоники:

$$\tau_k^{(m)} = \frac{\int_0^\infty |Q_m(\tau)| d\tau}{Q_m(0)} \leq \int_0^\infty |\rho(\tau)|^m d\tau, \quad (5.1.28)$$

т. е.

$$\tau_k^{(m)} \leq \tau_k^{\text{вх}}. \quad (5.1.29)$$

Знак равенства в (28) относится к гармонике самого высокого порядка, номер которой совпадает со степенью нелинейности ($m=n$); при этом в рядах (23) и (25) остается по одному члену. Так как выражение (23) содержит лишь четные степени $\rho(\tau)$, то (28) можно переписать как

$$\tau_k^{(m)} = \frac{\sum_{s=m, m+2, \dots}^n a_s C_s \frac{s-m}{2} 2^{-s} \int_0^\infty \rho^s(\tau) d\tau}{\sum_{s=m, m+2, \dots}^n a_s C_s \frac{s-m}{2} 2^{-s}} \quad (n, m - \text{четные}). \quad (5.1.30)$$

Если $\rho(\tau) \geq 0$, то аналогичное выражение можно написать и для нечетных гармоник.

При любом виде корреляционной функции $\rho(\tau)$ величина интеграла $\int_0^\infty |\rho(\tau)|^m d\tau$ тем меньше, чем больше m . Таким образом, оценка (28) позволяет сделать вывод о том, что с ростом номера гармоники время корреляции уменьшается. Отсюда, в свою очередь, следует, что чем выше номер гармоники m , тем шире ее спектр $G_m(\omega)$ (ширину спектра можно оценить как $\Delta\omega_m \sim 1/\tau_k^{(m)}$). Это расширение спектра сопровождается, напомним, уменьшением интегральной интенсивности гармоники $\sigma_m^2 = 2 \int_0^\infty G_m(\omega) d\omega F_{mn}$ (см. табл. 5.1).

3. Предположим, что известны ширина спектра входного гауссовского шума $\Delta\omega_{\text{вх}} \sim 1/\tau_k^{\text{вх}}$, степень нелинейности n и номер гармоники m . Оценим по этим данным ширину частотного спектра гармоники.

На основании (29) можно утверждать, что спектр шума на выходе умножителя частоты будет более широким, чем на его входе:

$$\Delta\omega_m > \Delta\omega_{\text{вх}}.$$

Однако количественно уширение может быть или большим, или, наоборот, незначительным, и это зависит от формы спектра входного шума $G(\omega)$, т. е. от конкретного вида коэффициента корреляции $\rho(\tau)$.

В качестве примера рассмотрим подробнее самую высокочастотную гармонику ($m=n$). Согласно (23)—(26) ее корреляционная функция имеет вид

$$B_n(\tau) = a_n 2^{-n+1} \rho^n(\tau) \cos n\omega_0 \tau, \quad (5.1.31)$$

где коэффициент a_n определяется (16) или (17) в зависимости от того, является степень нелинейности n четной или нечетной. При этом колебание (3), частота которого умножается, имеет корреляционную функцию

$$B(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (5.1.32)$$

Форма спектральной линии на входе умножителя определяется функцией (см. (2.3.15))

$$G^+(\omega_0 \pm \omega) \sim g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (5.1.33)$$

а на выходе — функцией

$$\begin{aligned} G_m^+(m\omega_0 \pm \omega) \sim g_m(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^m(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho^m(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Задаваясь конкретными выражениями для $\rho(\tau)$, наладим:

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho(\tau) &= e^{-\alpha|\tau|}, \quad g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \\ g_m(\omega) &= \frac{1}{\pi} \frac{m\alpha}{(m\alpha)^2 + \omega^2}; \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \rho(\tau) &= e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad g(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-\omega^2/4\alpha^2}, \\ g_m(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi m}\alpha} e^{-\omega^2/4\alpha^2 m}; \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

$$3) \quad \rho(\tau) = \frac{1}{\text{ch } \alpha\tau}, \quad g(\omega) = \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\text{ch}(\pi\omega/2\alpha)},$$

$$g_m(\omega) = \begin{cases} \frac{4^{m/2-1} \omega}{2(m-1)! \alpha^2 \text{sh}(\pi\omega/2\alpha)} \prod_{r=1}^{m/2-1} \left(\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + r^2 \right) & (m - \text{четное}), \\ \frac{2^{m-2}}{\alpha(m-1)! \text{ch}(\pi\omega/2\alpha)} \prod_{r=1}^{(m-1)/2} \left[\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + \left(\frac{2r-1}{2} \right)^2 \right] & (m - \text{нечетное}); \end{cases} \quad (5.1.37)$$

$$4) \quad \rho(\tau) = \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha\tau}, \quad g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & |\omega| < \alpha, \\ 0, & |\omega| > \alpha. \end{cases} \quad (5.1.38)$$

Спектр $g_m(\omega)$ в этом случае находится по формуле (11) на с. 28 справочника [51].

Согласно (35) при лоренцевском спектре $g(\omega)$ спектр гармоники $g_m(\omega)$ тоже лоренцевский и в m раз более широкий, чем

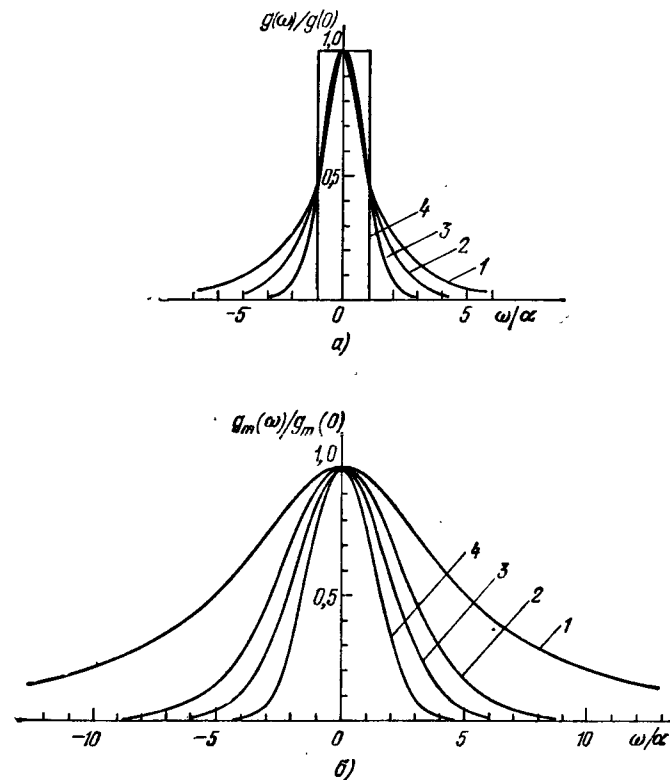


Рис. 5.7. Спектры на входе (а) и выходе (б) умножителя частоты.

Приведенные кривые соответствуют следующим формулам 1 — (35), 2 — (36), 3 — (37) 4 — (38)

$g(\omega)$. Если спектр $g(\omega)$ гауссовский, то, как следует из (36), спектр гармоники тоже будет гауссовским, но его уширение меньше — оно составляет \sqrt{m} (см. также § 3 гл. 8 и [45]).

На рис. 5.7 показаны рассчитанные по формулам (35)—(38) спектры на входе и выходе умножителя частоты для случая ге-

нерации пятой гармоники ($m=5$). Видно, что спектр гармоники тем шире, чем медленнее спадают крылья спектра входного колебания.

Преобразование амплитудных и фазовых флуктуаций. К анализу флуктуаций при умножении частоты иногда удобно подойти с других позиций, а именно рассмотреть, как непосредственно связаны флуктуации амплитуды и фазы (или, соответственно, амплитудная и фазовая модуляции) на входе и выходе умножителя частоты.

Перепишем выражение (3) для входного шума, выделив амплитудные и фазовые флуктуации:

$$x(t) = \bar{\rho} [1 + \alpha(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \langle \alpha \rangle = 0, \quad \langle \varphi \rangle = 0. \quad (5.1.39)$$

В аналогичном виде запишется и шумовой процесс, описывающий m -ю гармонику:

$$z(t) = \bar{\rho}_m [1 + \beta(t)] \cos[m\omega_0 t + \psi(t)], \quad \langle \beta \rangle = 0, \quad \langle \psi \rangle = 0. \quad (5.1.40)$$

Будем считать, что характеристика нелинейного элемента имеет вид (2). Тогда (40) совпадает с (5), т. е.

$$\psi(t) = m\varphi(t) \quad (m \geq 1), \quad (5.1.41)$$

$$\bar{\rho}_m [1 + \beta(t)] = C_n^{\frac{n-m}{2}} 2^{-n+1} \bar{\rho}^n [1 + \alpha(t)]^n. \quad (5.1.42)$$

Из (41), (42) видно, что амплитудные и фазовые флуктуации преобразуются независимо. Согласно (41) фазовые флуктуации увеличиваются в m раз.

Рассмотрим теперь амплитудные флуктуации $\beta(t)$. Усредняя (42), получаем

$$\bar{\rho}_m = C_n^{\frac{n-m}{2}} 2^{-n+1} \bar{\rho}^n \langle (1 + \alpha)^n \rangle. \quad (5.1.43)$$

Подставив (43) в (42), найдем

$$\beta(t) = \frac{[1 + \alpha(t)]^n}{\langle [1 + \alpha(t)]^n \rangle} - 1 = \frac{\sum_{p=1}^n C_n^p [\alpha^p(t) - \langle \alpha^p \rangle]}{\sum_{p=0}^n C_n^p \langle \alpha^p \rangle}, \quad (5.1.44)$$

или, поскольку $C_n^1 = n$ и $\langle \alpha \rangle = 0$,

$$\beta(t) = \frac{n\alpha(t) + \sum_{p=2}^n C_n^p [\alpha^p(t) - \langle \alpha^p \rangle]}{1 + \sum_{p=2}^n C_n^p \langle \alpha^p \rangle} = n\alpha(t) + \frac{n(n-1)}{2} [\alpha^2(t) - \langle \alpha^2 \rangle] + \frac{n^2(n-1)}{2} \alpha(t) \bar{\alpha}^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} [\alpha^3(t) - \langle \alpha^3 \rangle] + \dots \quad (5.1.45)$$

Выражения (44) и (45) не зависят от m , т. е. амплитудные флуктуации для всех гармоник одинаковы. Если амплитудные флуктуации на входе относительно малы, $\alpha(t) \ll 1$, то согласно (45)

$$\beta(t) = n\alpha(t) \quad (5.1.46)$$

— амплитудные флуктуации в гармониках в n раз больше, чем в исходном колебании (n — степень нелинейности).

Преобразование распределения вероятностей. При прохождении шума через нелинейную систему его распределение вероятностей меняет вид. По общей формуле (1.2.11) найдем, что распределению $W_1(x)$ при $y = x^n$ соответствует распределение

$$W_2(y) = W_1(x = y^{1/n}) \frac{y^{1/n-1}}{n}.$$

В частности, гауссовское распределение

$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

переходит в существенно негауссовское распределение

$$W_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma n y^{1-1/n}} \exp\left(-\frac{y^{2/n}}{2\sigma^2}\right).$$

По сравнению с $W_1(x)$ функция $W_2(y)$ медленнее стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$. Меняется и характер распределения вблизи нуля: конечным значениям $W_1(0)$ соответствует $W_2(0) = \infty$.

Оптический пример безынерционного нелинейного преобразования: нерезонансная многофотонная ионизация атома. Интересный пример безынерционного нелинейного преобразования оптического шума дает новый раздел оптики, связанный с изучением так называемых многофотонных процессов в атомах [21, 20]. В поле мощного лазерного излучения красной границы фотоэффекта не существует: фотоионизация атома происходит и в условиях, когда энергия кванта света меньше потенциала ионизации. В сильном световом поле конечную вероятность имеет многофотонный процесс (рис. 5.8), в котором складываются энергии нескольких квантов. В этом случае вероятность фотоионизации пропорциональна уже не первой степени, как в обычном, однофотонном фотоэффекте (см. (2.9.1)), а более высоким степеням интенсивности.

Для n -фотонного процесса вероятность ионизации атома в единицу времени $W_n(t) = dP_n(t)/dt$ равна (ср. с (2.9.1))

$$P_n(t) = W_n(t) = \beta_n I^n(t), \quad (5.1.47)$$

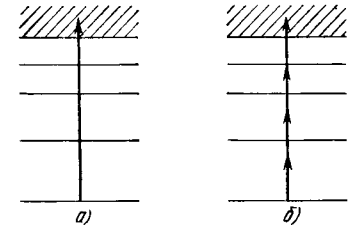


Рис. 5.8. Нерезонансная ионизация атома:

а) однофотонная (отрыв электрона от атома происходит в результате поглощения одного фотона); б) четырехфотонная (отрыв электрона от атома происходит в результате одновременного поглощения четырех фотонов)

где n — число поглощаемых фотонов, β_n — сечение многофотонной ионизации, $I(t)$ — интенсивность поля*).

В случае монохроматического поля интенсивность I есть величина постоянная ($I = I_0$) и вероятность

$$W_{n,0} = \beta_n I_0^n. \quad (5.1.48)$$

При действии на атом шумового поля (3) мгновенная интенсивность $I(t) = \rho^2(t)/2$ и, следовательно, вероятность

$$W_n(t) = 2^{-n} \beta_n \rho^{2n}(t) \quad (5.1.49)$$

представляет собой величину, случайным образом изменяющуюся во времени.

Пусть огибающая поля $\rho(t)$ подчиняется распределению Рэлея (статистика поля — гауссовская) со средней интенсивностью I_0 той же, что и для монохроматического излучения. Тогда из (49), учитывая (9), для средней вероятности процесса получаем

$$\bar{W}_n = 2^{-n} \beta_n \int_0^\infty I_0^{-1} \rho^{2n+1} e^{-\rho^2/I_0} d\rho = n! \beta_n I_0^n. \quad (5.1.50)$$

Статистический выигрыш в рассматриваемом шумовом поле

$$\eta_n = \bar{W}_n / W_{n,0} = \bar{I}^n(t) / I_0^n = n!, \quad (5.1.51)$$

т. е. такой же, как при возбуждении n -й гармоники шумом. Отметим, что результат (51) применим и для многофотонной эмиссии и люминесценции (ср. также с (9а)).

Таким образом, если многофотонная ионизация осуществляется гауссовским оптическим шумом, шумовое возбуждение в $n!$ раз более эффективно, нежели монохроматическое.

Для реального лазерного излучения формулой (51) следует пользоваться с осторожностью; сначала надо убедиться в том, что критерий гауссовости (см. § 10 гл. 2) выполнен. Пусть оптический шум описывается многомодовой моделью (2.10.1). Возникает вопрос: каким должно быть число мод, чтобы можно было пользоваться формулой (51)? Ответ для одного случая фактически уже содержится в результатах гл. 2; обратимся к более детальному обсуждению ионизации атома многомодовым излучением.

Пусть световое поле имеет вид (2.10.1):

$$x(t) = \sum_{m=1}^N \rho_m \cos(\omega_m t + \varphi_m), \quad (5.1.52)$$

* Формула (47) хорошо описывает процессы нерезонансной многофотонной ионизации атомов в световых полях; строгое ее обоснование и результаты весьма полного рассмотрения задачи можно найти в работе [21].

где $\omega_m = \omega_0 + m\Omega$ — частота моды ($m = 1, 2, \dots, N$), фазы мод φ_m считаем статистически независимыми и распределенными равномерно на интервале 2π (см. (2.10.2)), N — число мод.

Расчет статистического выигрыша в многомодовом поле (52) существенно зависит от того, определяется ли он для излучения с постоянными или с флуктуирующими амплитудами.

В случае непрерывного многомодового излучения амплитуды мод ρ_m можно считать постоянными; поле излучения представляет собой стационарный случайный процесс. Если амплитуды ρ_m для простоты считать равными, то для оценки статистического выигрыша

$$\eta_n = \bar{W}_n^{MM} / W_{n,0} = \bar{I}^n(t) / I_0^n$$

можно воспользоваться значениями моментов интенсивности многомодового колебания, полученными в § 10 гл. 2. При большом числе N мод, пользуясь формулами (2.10.34) и (2.10.17), можно записать [22]

$$\eta_n \approx n! \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{4N} \right\}. \quad (5.1.53)$$

Точная зависимость η_n от числа N до $n=6$ включительно приведена в табл. 2.1.

В случае импульсного многомодового излучения в (52)

$$\rho_m = \rho_m(t) = \rho_{m0} f(t), \quad f_{\max} = 1, \quad (5.1.54)$$

где ρ_{m0} — максимальное значение амплитуды. При этом, если амплитуды мод постоянны, то, очевидно,

$$I_0^n \sim f^{2n}(t) \quad \text{и} \quad \langle I^n(t) \rangle \sim f^{2n}(t).$$

Поэтому выражение (53) не меняется и остается справедливым для импульсного излучения.

Для излучения с флуктуирующими амплитудами мод статистический выигрыш иногда определяют по отношению к усредненной за время $T \gg 2\pi/\Omega$ интенсивности $\tilde{I}(t)$ [23—25]. Согласно (52) и (54)

$$\tilde{I}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x^2(t') dt' = I_{\max} f^2(t), \quad I_{\max} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} \rho_{m0}^2 = \sum_{m=1}^N I_m. \quad (5.1.55)$$

Максимальная интенсивность I_{\max} в рассматриваемом случае является случайной величиной. Статистику мод будем считать гауссовской, а средние интенсивности мод — равными. Следовательно,

$$w(I_m) = \frac{1}{\sigma_0^2} \exp\{-I_m/\sigma_0^2\}.$$

Вероятность многофотонной ионизации атома для излучения с интенсивностью (55)

$$W_n(t) = \beta_n f^{2n}(t) I_{\max}^n. \quad (5.1.56)$$

В случае многомодового излучения вероятность ионизации атома равна

$$W_n^{MM}(t) = \beta_n f^{2n}(t) \widetilde{I}^n(t). \quad (5.1.57)$$

Здесь, как и выше, волнистая линия означает усреднение по интервалу времени T , $I(t)$ — мгновенная интенсивность:

$$I(t) = \frac{1}{2} \left| \sum_{m=1}^N \rho_m e^{i(m\Omega t + \varphi_m)} \right|^2. \quad (5.1.58)$$

Согласно (56), (57) на величину

$$W_n^{MM}(t)/W_n(t) = \widetilde{I}^n(t)/I_{\max}^n \quad (5.1.59)$$

$I(t)$ не влияет. Усредняя (59), находим статистический выигрыш

$$\eta_n = \langle \widetilde{I}^n(t) / I_{\max}^n \rangle. \quad (5.1.60)$$

При большом числе N мод величины $\widetilde{I}^n(t)$ и I_{\max}^n можно считать статистически независимыми, так как I_{\max} (55), в отличие от $I(t)$ (58), не зависит от фаз мод. В этом случае соотношение (60) можно записать так [24, 28]:

$$\eta_n = \langle \widetilde{I}^n(t) \rangle / \langle I_{\max}^n \rangle. \quad (5.1.61)$$

Поскольку в рассматриваемом случае статистика поля (52) гауссовская (таковой обладают отдельные моды, характеристическая функция поля (2.10.25)), то среднее

$$\langle \widetilde{I}^n(t) \rangle = \langle I^n(t) \rangle = n! (N\sigma_0^2)^n.$$

Чтобы определить $\langle I_{\max}^n \rangle$, найдем сперва функцию распределения $\omega(I_{\max})$:

$$\begin{aligned} \omega(I_{\max}) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \delta\left(I_{\max} - \sum_{m=1}^N I_m\right) \prod_{m=1}^N \omega(I_m) dI_1 \dots dI_N = \\ &= \frac{I_{\max}^{N-1}}{(N-1)! \sigma_0^{2N}} \exp\{-I_{\max}/\sigma_0^2\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle I_{\max}^n \rangle = \int_0^\infty \frac{I_{\max}^{N+n-1}}{(N-1)! \sigma_0^{2N}} \exp\{-I_{\max}/\sigma_0^2\} dI_{\max} = \frac{(N+n-1)! \sigma_0^{2n}}{(N-1)!}. \quad (5.1.62)$$

Таким образом, значение статистического выигрыша равно

$$\eta_n = n! \frac{N^n (N-1)!}{(n+N-1)!}. \quad (5.1.63)$$

Мы следовали методу расчета, изложенному в [24]. Более строгие, но и более громоздкие вычисления [25] также приводят к формуле (63). Следует отметить, что значения величин η_n ,

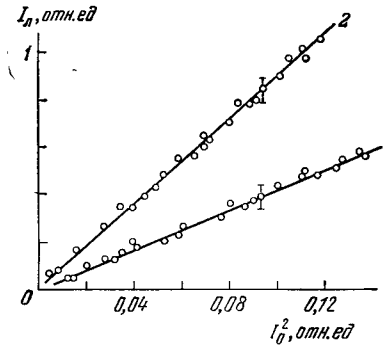


Рис 5.9. Интенсивность двухфотонной люминесценции I_n в зависимости от квадрата средней интенсивности одномодового (I) и многомодового ($N \approx 300$) (2) лазерных полей [27].

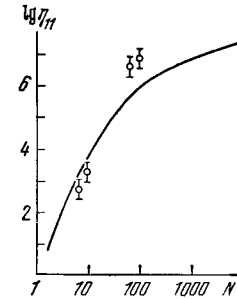


Рис 5.10. Статистический выигрыш в зависимости от числа N мод лазера [25].

Точки — экспериментальные значения, кривая рассчитана по формуле (63).

определяемые формулой (63) и приведенные в табл. 2.1, несколько различаются между собой. Это обусловлено различием как статистических свойств рассмотренных многомодовых процессов (постоянные и флуктуирующие амплитуды), так и способом определения коэффициента выигрыша η_n .

При числе мод $N > 1$, но $n^2 < N$ формулу (63) можно привести к виду (ср. с (53))

$$\eta_n \approx n! \exp\left\{-\frac{n(n-1)}{2N}\right\} \approx n! \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2N}\right\}. \quad (5.1.64)$$

Формулой (64) удобно пользоваться для оценки числа мод N^* , при котором статистический выигрыш с относительной точностью $\Delta\eta/\eta = \widetilde{\Delta\eta}$ близок к предельному значению $\eta_n = n!$:

$$N^* = n(n-1)/2\widetilde{\Delta\eta}.$$

Как видно из табл. 5.2, величина N^* сильно зависит от n . Таким образом, в нелинейном процессе условия, при выполнении которых многомодовое излучение можно рассматривать как гауссовский случайный процесс, зависят от степени нелинейности (см. также гл. 8).

Таблица 5.2

Значения N^* для $\Delta\eta = 0,1$ и различных n [26]

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N^*	10	30	60	100	150	210	280	360	450	550

В заключение приведем некоторые экспериментальные данные о коэффициенте статистического выигрыша. На рис. 5.9 наглядно показан выигрыш в эффективности двухфотонной люминесценции в поле излучения многомодового лазера по сравнению с одномодовым; здесь с точностью до 0,1 значение $\eta_2 = 2$. Рис. 5.10 для одиннадцатифотонного процесса ионизации иллюстрирует рост статистического выигрыша с увеличением числа мод.

§ 2. Амплитудное детектирование шума

Квадратичный детектор. Идеальным квадратичным детектором называют устройство с нелинейной характеристикой

$$y = \alpha x^2. \quad (5.2.1)$$

Согласно (5.1.4) на выходе квадратичного детектора генерируются нулевая и вторая гармоники входного колебания (5.1.3):

$$y(t) = y_0(t) + y_2(t),$$

$$y_0(t) = \frac{\alpha}{2} \rho^2(t), \quad y_2(t) = \frac{\alpha}{2} \rho^2(t) \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)].$$

С помощью квадратичного детектора можно измерять интенсивность $I(t) = \rho^2(t)/2$ входного процесса $x(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$.

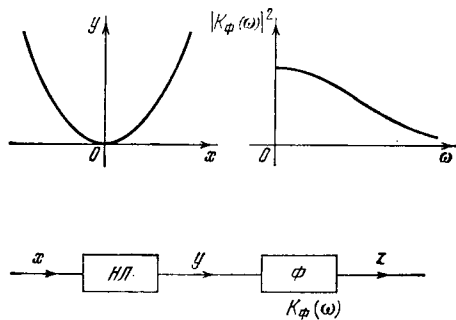


Рис. 5.11. Квадратичный параболический детектор.

Поставив после нелинейного элемента низкочастотный фильтр с соответствующим образом подобранной полосой пропускания

$\Delta\omega_\Phi$ (рис. 5.11), получим на выходе фильтра сигнал, пропорциональный мгновенному значению интенсивности:

$$z \sim y_0(t) \sim \rho^2(t) \sim I(t) \quad (\Delta\omega \ll \Delta\omega_\Phi),$$

или ее среднему значению:

$$z \sim \overline{y_0(t)} \sim \langle \rho^2(t) \rangle \sim I(t) \quad (\Delta\omega \gg \Delta\omega_\Phi).$$

Здесь $\Delta\omega$ — ширина частотного спектра процесса x .

Корреляционная функция и спектр на выходе детектора. Корреляционная функция на выходе детектора

$$\overline{y y_\tau} = \alpha^2 \langle x^2 x_\tau^2 \rangle$$

легко находится, если шум на входе — гауссовский и известна его корреляционная функция:

$$\bar{x} = 0, \quad \overline{x x_\tau} = B_0(\tau) = \sigma^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2.2)$$

Учитывая правило вычисления моментов гауссовского шума (см. (2.2.8), (2.2.10)), находим

$$\overline{y y_\tau} = \alpha^2 [\sigma^4 + 2B_0^2(\tau)] = \alpha^2 \sigma^4 [1 + 2R_0^2(\tau)]. \quad (5.2.3)$$

Определим теперь выражение для спектра на выходе детектора:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{y y_\tau} e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Подставляя сюда (2) и (3) и интегрируя по τ , получим

$$G(\omega) = \alpha^2 \sigma^4 \delta(\omega) + 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1, \quad (5.2.4)$$

где первое слагаемое описывает постоянную составляющую \bar{y} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^0(\omega) d\omega = \alpha^2 \sigma^4 = (\bar{y})^2, \quad G^0(\omega) = \alpha^2 \sigma^4 \delta(\omega), \quad (5.2.4a)$$

а второе — спектр флуктуаций $\tilde{y} = y - \bar{y}$:

$$G^{\Phi n}(\omega) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^{\Phi n}(\omega) d\omega = 2\alpha^2 \sigma^4. \quad (5.2.5)$$

Так как процесс x предполагается узкополосным и спектр $G_0(\omega)$ сосредоточен в узкой области частот $\sim \Delta\omega$ около $\omega \approx \pm \omega_0$, то

из структуры подынтегрального выражения в (5) видно, что $G^{\Phi n}(\omega)$ будет заметно отличаться от нуля лишь при $\omega \approx 0$ и $\omega \approx \pm 2\omega_0$. Соответственно $G^{\Phi n}(\omega)$ можно представить в виде двух компонент:

$$G^{\Phi n}(\omega) = G_{нч}(\omega) + G_{вч}(\omega),$$

а именно, спектра низкочастотных флуктуаций

$$G_{нч}(\omega) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (\omega \approx 0) \quad (5.2.6)$$

и спектра высокочастотных флуктуаций

$$G_{вч}(\omega) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1 \quad (\omega \approx \pm 2\omega_0), \quad (5.2.7)$$

причем интенсивности низкочастотных и высокочастотных флуктуаций одинаковы и равны интенсивности постоянной составляющей:

$$\sigma_{нч}^2 = \int_{|\omega| < \omega_0} G_{нч}(\omega) d\omega = \alpha^2 \sigma^4 = \bar{y}^2,$$

$$\sigma_{вч}^2 = \int_{|\omega \pm 2\omega_0| < \omega_0} G_{вч}(\omega) d\omega = \alpha^2 \sigma^4 = \bar{y}^2$$

(см. (4а)). Вид спектров (5)—(7) для частного случая прямоугольного спектра шума на входе детектора показан на рис. 5.12.

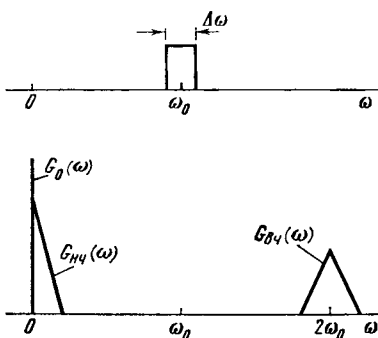


Рис. 5.12. Спектры на входе и выходе детектора.

Подчеркнем, что полученное «равнораспределение» интенсивности по компонентам выходного шума постоянной, низкочастотной и высокочастотной,

$$\bar{y}^2 : \sigma_{нч}^2 : \sigma_{вч}^2 = 1 : 1 : 1, \quad (5.2.7a)$$

связано именно с гауссовостью входного шума. Напротив, универсальным является соотношение

$$(\bar{y}^2 + \sigma_{нч}^2) : \sigma_{вч}^2 = 2 : 1, \quad (5.2.7б)$$

в согласии с табл. 5.1 ($n=2$;

$m=0, 2$). Например, если детектируется стационарный ФМ-шум

$$x = \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

(это — негауссовский процесс с распределением (2.5.20)), то

$$y = \alpha x^2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)],$$

и ясно, что низкочастотные флуктуации на выходе детектора вообще отсутствуют:

$$\bar{y} = \alpha/2, \quad \sigma_{нч}^2 = 0, \quad \sigma_{вч}^2 = \alpha^2/8.$$

При этом «равнораспределение» (7а) уже не имеет места, но соотношение (7б) по-прежнему выполняется:

$$\bar{y}^2 : \sigma_{вч}^2 = 2 : 1.$$

Роль инерционности детектора. В часто встречающейся схеме детектора (рис. 5.13, а) между нелинейным элементом (диодом) и фильтром RC нет развязки. В этом случае фильтр оказывает влияние на режим работы диода (меняется так называемый угол

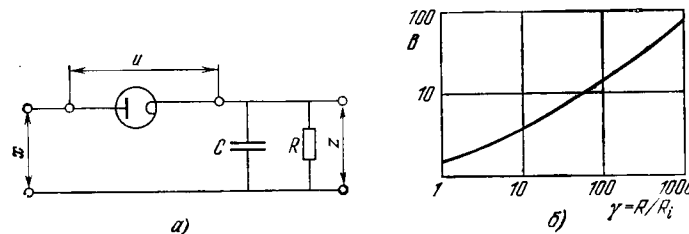


Рис. 5.13. а) Схема реального детектора.

б) «Коэффициент ушрения» полосы пропускания детектора в зависимости от отношения сопротивления фильтра R к внутреннему сопротивлению диода R_i .

отсечки — см. ниже), а диод шунтирует фильтр, расширяя его полосу пропускания. Последнее обстоятельство необходимо учитывать, чтобы правильно оценить ширину спектра флуктуаций на выходе детектора и их величину.

Уравнение, описывающее изменение напряжения на выходе инерционного детектора, имеет вид

$$\dot{z} + \frac{1}{RC} z = \frac{1}{C} f(x - z), \quad (5.2.8)$$

где x — напряжение на входе детектора, z — напряжение на выходе, f — нелинейная функция, определяющая ток $i = f(u)$ через диод в зависимости от управляющего напряжения $u = x - z$. Полоса фильтра выбирается достаточно малой:

$$\Delta\omega_{\Phi} = 1/RC \ll \omega_0, \quad (5.2.9)$$

так что z можно считать медленным процессом (по сравнению с x). Вследствие медленности z функцию $f(x - z)$ можно заменить средним за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ значением, переписав (8) как

$$\dot{z} + \frac{1}{RC} z = \frac{1}{C} \overline{f(x - z)}. \quad (5.2.10)$$

Предположим вначале, что шум отсутствует и детектируется гармонический сигнал

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.2.11)$$

Согласно (10) при этом $z = z_0 = \text{const}$. Предположим, что характеристика диода является линейно-ломаной:

$$f(u) = \begin{cases} u/R_i & (u \geq 0), \\ 0 & (u < 0) \end{cases} \quad (5.2.12)$$

(такой детектор называется «линейным»). Диод периодически «открывается» (т. е. через него течет ток) на время

$$0 < T_0 \cdot \theta / \pi < T_0 / 2,$$

где θ — угол отсечки, определяемый соотношением

$$a_0 \cos \theta = z_0 \quad (0 < \theta < \pi/2). \quad (5.2.13)$$

Подставив (12) и (13) в (10), получим уравнение

$$\pi/\gamma = \text{tg } \theta - \theta \quad (\gamma = R/R_i), \quad (5.2.14)$$

показывающее, что угол θ зависит от отношения сопротивления фильтра R к внутреннему сопротивлению диода R_i . В общем случае процесс на входе детектора квазигармонический:

$$x(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

и уравнение (10) принимает сложный вид:

$$\dot{z} + \frac{z}{RC} = \frac{\rho(t)}{R_i C \pi} \left[\sin \arccos \frac{z}{\rho(t)} - \frac{z}{\rho(t)} \arccos \frac{z}{\rho(t)} \right]. \quad (5.2.15)$$

Чтобы упростить задачу, ограничимся анализом ситуации, когда на входе детектора имеется гармонический сигнал и аддитивный малый шум:

$$x(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \xi(t) \quad (\xi \ll a_0).$$

При этом $\rho(t)$ и $z(t)$ будут испытывать слабые флуктуации:

$$\rho(t) = a_0 [1 + \alpha(t)], \quad z(t) = z_0 [1 + \zeta(t)] \quad (\alpha, \zeta \ll 1). \quad (5.2.16)$$

Подставляя (16) в (15) и линеаризуя по ζ и α , получим

$$\dot{\zeta} + \frac{B}{RC} \zeta = \frac{B}{RC} \alpha(t), \quad (5.2.17)$$

т. е. для малых амплитудных флуктуаций инерционный детектор эквивалентен линейному фильтру с полосой пропускания $\beta = B/RC$. Постоянную

$$B = 1 + \frac{\gamma}{\pi} \theta$$

можно назвать коэффициентом уширения полосы выходного RC-фильтра. График зависимости B от γ (рис. 5.13, б) показывает, что это уширение может быть значительным.

В заключение посмотрим, как меняется отношение сигнал/шум при прохождении сигнала и малого шума через детектор. Обозначив $\langle \xi^2 \rangle = \sigma_{\text{вх}}^2$, имеем

$$(c/\text{ш})_{\text{вх}} = a_0^2 / 2\sigma_{\text{вх}}^2. \quad (5.2.18)$$

Согласно (16) интенсивность сигнала на выходе детектора равна z_0^2 , а дисперсия шума $\sigma_{\text{вых}}^2 = z_0^2 \langle \zeta^2 \rangle$, т. е.

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = z_0^2 / \sigma_{\text{вых}}^2 = 1 / \langle \zeta^2 \rangle. \quad (5.2.19)$$

Как следует из (17),

$$\langle \zeta^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{G_\alpha^+(\omega) d\omega}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (5.2.20)$$

где $G_\alpha^+(\omega)$ — спектральная интенсивность флуктуаций $\alpha(t)$. Но $\alpha(t) = a(t)/a_0$, где $a(t)$ — квадратурная компонента входного шума $\xi(t)$, дисперсия которой равна дисперсии ξ , $\langle a^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle = \sigma_{\text{вх}}^2$. Поэтому спектр $G_\alpha^+(\omega)$ должен удовлетворять нормировке

$$\langle \alpha^2 \rangle = \int_0^\infty G_\alpha^+(\omega) d\omega = \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{a_0^2}. \quad (5.2.21)$$

Для определенности предположим, что квазигармонический выходной шум $\xi(t)$ имеет лоренцевский спектр шириной $\Delta\omega = 2h$. В соответствии с (21) в этом случае полагаем

$$G_\alpha^+(\omega) = \frac{2h\sigma_{\text{вх}}^2}{\pi a_0^2} \frac{1}{h^2 + \omega^2}. \quad (5.2.22)$$

Подставляя (22) в (20) и интегрируя, получим с учетом (19) и (18)

$$\frac{(c/\text{ш})_{\text{вых}}}{(c/\text{ш})_{\text{вх}}} = 2 \left(1 + \frac{h}{\beta} \right) \geq 2. \quad (5.2.23)$$

Таким образом, минимальный выигрыш в отношении сигнал/шум равен двум (за счет того, что через амплитудный детектор вообще не проходят фазовые флуктуации, на создание которых приходится половина входной интенсивности шума). С уменьшением эффективной полосы пропускания $\beta = B/RC$ этот выигрыш возрастает. В [9, с. 223] дан анализ прохождения широкополосного шума через детектор на основе стохастических методов; при этом условие малости шума несущественно.

§ 3. Измерение слабых шумов

Принцип действия радиометра. Результаты, полученные в § 5 гл. 3, показывают, что даже при использовании оптимальной линейной фильтрации эффективное выделение слабого случайного сигнала ξ_1 на фоне сильного ξ_2 возможно лишь в том случае, когда спектры шумов достаточно разнесены на оси частот. Если же спектры накладываются, причем $G_1(\omega) \ll G_2(\omega)$, то методы дискриминации по спектральному признаку не приводят к положительному результату и для выделения ξ_1 на фоне ξ_2 нужно использовать какие-то другие признаки, различающие ξ_1 и ξ_2 . Эта проблема становится практически важной при измерении очень слабых шумовых полей. Устройства, используемые для этой цели, называются радиометрами. Помехой при измерениях являются

в данном случае внутренние (в частности, тепловые и дробовые) шумы радиометра.

Для измерения ξ_1 на фоне $\xi_2 \gg \xi_1$ в радиометрах используется то обстоятельство, что слабый шум ξ_1 является внешним, так что, периодически отключая приемную

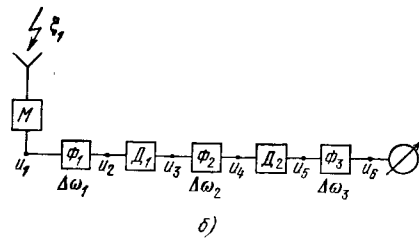
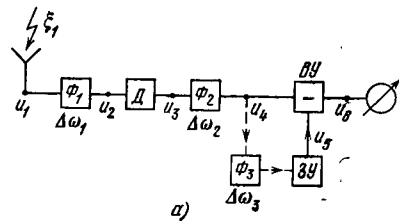


Рис. 5.14. а) Схема компенсационного радиометра ($\Delta\omega_3 \ll \Delta\omega_2 \ll \Delta\omega_1$).

б) Схема модуляционного радиометра ($\Delta\omega_2 \ll \Omega_0$, $\Delta\omega_1$; $\Delta\omega_1 < \Delta\omega_3 \ll 2\pi\Omega_0$).

в) Спектр процесса u_3 на выходе первого детектора D_1 модуляционного радиометра.

антенну, процесс ξ_1 можно модулировать или вообще выключать, не влияя при этом на большой внутренний шум ξ_2 . Ниже рассматриваются два типа радиометров — компенсационный и модуляционный.

Радиометр можно упрощенно представить как стандартный приемник, основными элементами которого являются антенна, фильтр, детектор, фильтр низких частот и выходной измерительный прибор. Фильтр Φ_1 (рис. 5.14, а) заменяет элемент системы реального приемника, состоящий из усилителя высокой частоты

(УВЧ), смесителя и усилителя промежуточной частоты (УПЧ); под полосой $\Delta\omega_1$ следует понимать полосу УПЧ.

Прибор регистрирует сумму двух постоянных составляющих: малой, обусловленной измеряемым шумом ξ_1 , и большой, связанной с внутренними шумами ξ_2 . Разделение этих составляющих осуществляется следующим образом. В компенсационной схеме, выключив ξ_1 , измеряют составляющую, наведенную внутренними шумами, и компенсируют ее (рис. 5.14, а). Недостаток схемы в том, что неизбежные медленные изменения параметров приемного тракта (связанные, например, с флуктуациями внешней температуры) могут сделать точную компенсацию невозможной.

От этого недостатка свободна модуляционная схема (рис. 5.14, б). При периодической (с некоторым периодом T_0) модуляции шума ξ_1 регулярная составляющая на выходе детектора, связанная с ξ_1 , возникает не только на нулевой частоте, но и на частотах Ω_0 , $2\Omega_0$ и т. д. ($\Omega_0 = 2\pi/T_0$), на которых нет конкурирующих регулярных составляющих, порожденных внутренним шумом ξ_2 . Поэтому, используя второй полосовой фильтр Φ_2 , настроенный на одну из частот $n\Omega_0$, второй детектор D_2 и второй фильтр низких частот Φ_3 , можно выделить на выходе радиометра постоянную составляющую, обусловленную в основном только измеряемым шумом ξ_1 . Влияние флуктуаций параметров подавляется, если ширина их частотного спектра $\Delta\omega_n \ll \Omega_0$ [11].

Рассмотрим подробнее преобразование шумов в обеих схемах.

Компенсационный радиометр. Условно задавая шумы ξ_1 и ξ_2 на выходе фильтра Φ_1 (рис. 5.14, а), получим, считая детектор квадратичным,

$$u_1 = \xi_1, \quad u_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad u_3 = \alpha(\xi_1 + \xi_2)^2. \quad (5.3.1)$$

Предположим, что шумы ξ_1 и ξ_2 являются гауссовскими и статистически независимыми, причем

$$\langle \xi_i \rangle = 0, \quad \langle \xi_i^2 \rangle = \sigma_i^2, \quad B_i(\tau) = \int G_i(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (i=1, 2). \quad (5.3.2)$$

В этом случае корреляционная функция флуктуаций

$$\tilde{u}_3 = u_3 - \bar{u}_3, \quad \bar{u}_3 = \alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

на выходе детектора равна

$$\langle \tilde{u}_3 \tilde{u}_{3\tau} \rangle = 2\alpha^2 [B_1(\tau) + B_2(\tau)]^2 \approx 2\alpha^2 B_2^2(\tau). \quad (5.3.3)$$

В (3) учтено, что $B_1(\tau) \ll B_2(\tau)$ ввиду предполагаемой малости измеряемого шума ξ_1 .

Корреляционной функции (3) соответствует спектральная интенсивность

$$G_3(\omega) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega_1) G_2(\omega - \omega_1) d\omega_1; \quad (5.3.4)$$

ширина флуктуационного спектра (4) порядка $\Delta\omega_1$ — полосы фильтра Φ_1 (см., например, рис. 5.12). Для того чтобы показания радиометра были достаточно точными, полосу пропускания последнего низкочастотного фильтра Φ_2 необходимо сделать узкой: $\Delta\omega_2 \ll \Delta\omega_1$ (см. (76)). При этом зависимость от ω в (4) становится несущественной и при дальнейшем анализе можно считать $\omega = 0$:

$$G_3(\omega) \approx G_3(0) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_2^2(\omega_1) d\omega_1.$$

Таким образом, предполагая для простоты, что фильтр Φ_2 имеет прямоугольную частотную характеристику:

$$|K_2(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Delta\omega_2, \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega_2, \end{cases}$$

получим для процесса u_4 на выходе фильтра Φ_2

$$u_4 = \bar{u}_4 + \tilde{u}_4, \quad \bar{u}_4 = \bar{u}_3 = \alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

$$G_4(\omega) = |K_2(\omega)|^2 G_3(\omega) = \begin{cases} 2\alpha^2 \int_0^{\infty} G_2^2(\omega) d\omega, & |\omega| < \Delta\omega_2, \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega_2. \end{cases}$$

При выключенной антенне ($\xi_1 = 0$) вводится в действие показанная пунктиром на рис. 5.14, а цепь с фильтром Φ_3 и в запоминающем устройстве ЗУ фиксируется постоянная составляющая на выходе детектора, равная $\bar{u}_3|_{\xi_1=0} = \alpha\sigma_2^2$. Затем при включенной антенне эта составляющая подается на вычитающее устройство ВУ, так что

$$u_5 = \alpha\sigma_2^2, \quad u_6 = u_4 - u_5 = \bar{u}_6 + \tilde{u}_6, \quad \bar{u}_6 = \alpha\sigma_1^2, \quad \tilde{u}_6 = \tilde{u}_4.$$

Следовательно, интенсивность сигнала на выходе радиометра равна

$$\bar{u}_6^2 = \alpha^2\sigma_1^2,$$

а интенсивность шума

$$\langle \tilde{u}_6^2 \rangle = \langle \tilde{u}_4^2 \rangle = G_4(0) 2\Delta\omega_2 = 8\alpha^2 \Delta\omega_2 \int_0^{\infty} G_2^2(\omega) d\omega.$$

Теперь можно найти отношение сигнал/шум на выходе радиометра:

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{\bar{u}_6^2}{\langle \tilde{u}_6^2 \rangle} = \frac{\sigma_1^2}{8\Delta\omega_2 \int_0^{\infty} G_2^2(\omega) d\omega}. \quad (5.3.5)$$

При прямоугольной частотной характеристике фильтра Φ_1 спектры шумов ξ_1 и ξ_2 будут иметь вид

$$G_i(\omega) = \begin{cases} G_i, & |\omega - \omega_1| < \Delta\omega_1/2, \\ 0, & |\omega - \omega_1| > \Delta\omega_1/2. \end{cases} \quad (5.3.6)$$

В этом случае

$$\sigma_1^2 = 2G_1 \Delta\omega_1, \quad \sigma_2^2 = 2G_2 \Delta\omega_1, \quad \int_0^{\infty} G_2^2(\omega) d\omega = G_2^2 \Delta\omega_1 \quad (5.3.7)$$

и выражение (5) примет вид

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{\Delta\omega_1}{2\Delta\omega_2} \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2. \quad (5.3.7a)$$

Относительная ошибка, возникающая при измерении ξ_1 и обусловленная ξ_2 , равна величине, обратной (7a). Считая эту ошибку малой, находим из (7a)

$$\frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} = 2(с/ш)_{\text{вых}} \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 \gg 1, \quad (5.3.7б)$$

как и предполагалось выше.

Модуляционный радиометр. В этой схеме (рис. 5.14, б)

$$u_1 = m(t) \xi_1, \quad u_2 = m(t) \xi_1 + \xi_2, \quad u_3 = \alpha[m(t) \xi_1 + \xi_2]^2,$$

где $m(t) := m(t + T_0)$ — функция времени, описывающая периодическую модуляцию слабого шума ξ_1 , осуществляемую модулятором M . Для процесса u_3 на выходе детектора D_1 находим, учитывая малость ξ_1 по сравнению с ξ_2 ,

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3, \quad \bar{u}_3 = \alpha[m^2(t) \sigma_1^2 + \sigma_2^2], \quad (5.3.8)$$

$$\langle \tilde{u}_3 \tilde{u}_{3\tau} \rangle = 2\alpha^2 [m(t) m(t + \tau) B_1(\tau) + B_2(\tau)]^2 \approx 2\alpha^2 B_3^2(\tau). \quad (5.3.9)$$

Последнее выражение совпадает с (3), т. е. спектр $G_3(\omega)$ флуктуаций \tilde{u}_3 дается формулой (4).

Представим периодическую функцию $m^2(t)$ в виде ряда Фурье:

$$m^2(t) = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos(\Omega_0 n t + \varphi_n). \quad (5.3.9a)$$

Тогда регулярную компоненту процесса на выходе детектора можно записать как

$$\bar{u}_3 = \alpha\mu_0\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \alpha\sigma_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos(\Omega_0 n t + \varphi_n). \quad (5.3.10)$$

Дискретный спектр процесса (10) показан на рис. 5.14, в. Там же пунктиром показана частотная характеристика узкополосного ($\Delta\omega_2 \ll \Omega_0$) фильтра Φ_2 , которую мы для простоты будем считать прямоугольной:

$$|K_2(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & |\omega - n\Omega_0| \leq \Delta\omega_2/2, \\ 0, & |\omega - n\Omega_0| > \Delta\omega_2/2. \end{cases}$$

Процесс u_4 на выходе узкополосного фильтра Φ_2 будет квазигармоническим с регулярной составляющей

$$u_4 = a_n \cos(n\Omega_0 t + \varphi_n) \quad (a_n = \alpha\sigma_1^2 \mu_n) \quad (5.3.11)$$

и флуктуационной составляющей

$$\tilde{u}_4 = a(t) \cos(n\Omega_0 t + \varphi_n) - b(t) \sin(n\Omega_0 t + \varphi_n), \quad (5.3.12)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — медленно меняющиеся случайные функции (см. (2.3.2)). Флуктуационный процесс \tilde{u}_4 имеет спектральную плотность

$$G_4(\omega) = |K_2(\omega)|^2 G_3(\omega) \approx \begin{cases} 4\alpha^2 \int_0^\infty G_3^2(\omega) d\omega, & |\omega - n\Omega_0| < \Delta\omega_2/2, \\ 0, & |\omega - n\Omega_0| > \Delta\omega_2/2, \end{cases}$$

и дисперсию

$$\sigma_4^2 = 4\alpha^2 2\Delta\omega_2 \int_0^\infty G_3^2(\omega) d\omega.$$

В случае прямоугольной частотной характеристики фильтра Φ_1

$$\sigma_4^2 = 8\alpha^2 \Delta\omega_1 \Delta\omega_2 G_3^2. \quad (5.3.13)$$

Согласно (2.3.3), (2.3.5) и (13)

$$\bar{a} = \bar{b} = 0, \quad \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \sigma_4^2 = 8\alpha^2 \Delta\omega_1 \Delta\omega_2 G_3^2. \quad (5.3.14)$$

Как следует из (11) и (13), отношение сигнал/шум на выходе фильтра Φ_2 равно

$$(с/ш)_{\text{вых}\Phi_2} = \frac{\mu_n^2}{2} \frac{\Delta\omega_1}{2\Delta\omega_2} \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2 \quad (5.3.15)$$

(ср. с (7а)). Полоса $\Delta\omega_2$ выбирается так, чтобы это отношение было большим:

$$(с/ш)_{\text{вых}\Phi_2} \gg 1. \quad (5.3.16)$$

Условие (16) означает малость флуктуационной составляющей ($\bar{u}_4 \gg \tilde{u}_4$). При этом процесс u_5 на выходе квадратичного детектора D_2 можно представить как

$$u_5 = \beta u_4^2 \approx \beta (\bar{u}_4^2 + 2\tilde{u}_4 \bar{u}_4) = \frac{\beta \sigma_4^2}{2} + \beta a_0 a(t) + \dots; \quad (5.3.17)$$

в (17) опущены члены, спектр которых лежит около частоты $2n\Omega_0$ и которые не пропускаются низкочастотным фильтром Φ_3 .

Таким образом, после фильтра Φ_3 имеется процесс

$$u_6 = \bar{u}_6 + \tilde{u}_6, \quad \bar{u}_6 = \beta \sigma_4^2 / 2, \quad \tilde{u}_6 = \beta a_0 a(t).$$

Отношение сигнал/шум на выходе модуляционного радиометра будет, следовательно, равно

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{(u_6)^2}{\langle \tilde{u}_6^2 \rangle} = \frac{\sigma_6^2}{4\langle a^2 \rangle},$$

или с учетом (11) и (14)

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{\mu_n^2}{4} \frac{\Delta\omega_1}{2\Delta\omega_2} \left(\frac{G_1}{G}\right)^2, \quad (5.3.18)$$

т. е. оно в два раза меньше (15) и отличается лишь фактором $\mu_n^2/4$ от выражения (7а), полученного для компенсационного радиометра.

В частности, при гармоническом законе модуляции

$$m(t) = \cos(\Omega_0 t + \varphi_0), \quad m^2(t) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\Omega_0 t + \varphi_0)]$$

и в (9а) $\mu_0 = \mu_2 = 1/2$. Считая, что фильтр Φ_2 настроен на частоту $2\Omega_0$, получим, подставив в (18) $\mu_0 = 1/2$,

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{1}{32} \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2. \quad (5.3.19)$$

Выбирая частоту модуляции Ω_0 достаточно большой (так, чтобы она лежала выше спектра флуктуаций параметров), мы можем избавиться от влияния медленных «уходов» параметров, которые на практике ограничивают чувствительность реального компенсационного радиометра.

Чувствительность радиометра. Предельная чувствительность радиометра условно определяется как величина $G_{1\min}$, при которой отношение сигнал/шум на выходе равно единице. При этом, используя формулу Найквиста (3.4.10), спектральные плотности иногда выражают через эквивалентные шумовые температуры.

Как следует из (7а) и (19), для идеального компенсационного радиометра

$$G_{1\min} = \sqrt{2} G_2/q, \quad T_{1\min} = \sqrt{2} T_2/q, \quad (5.3.20)$$

а для модуляционного радиометра

$$G_{1\min} = 4\sqrt{2} G_2/q, \quad T_{1\min} = 4\sqrt{2} T_2/q, \quad (5.3.21)$$

где $q = \sqrt{\Delta\omega_1/\Delta\omega_2} \gg 1$. Если бы для измерения G_1 использовался обычный приемник (без компенсации или модуляции), то шум ξ_1 можно было бы надежно зарегистрировать лишь при

$$G_{1\min} \geq G_2, \quad T_{1\min} \geq T_2, \quad (5.3.22)$$

т. е. чувствительность у приемника была бы примерно в q раз меньше, чем у радиометра. Поэтому параметр q называют *радиометрическим выигрышем*. В современных радиометрах величина q достигает значений $10^4 - 10^5$ [11].

§ 4. Нелинейные преобразования оптического шума

Нелинейные преобразования оптического шума стали сейчас столь же привычными, как и нелинейные преобразования радиосигналов, хотя первые эксперименты по смешению световых волн были выполнены сравнительно недавно — лишь в 1955 г. [29] (см. также обзор [30]); им предшествовала дискуссия о принципиальной возможности подобных опытов [31—33].

Мы начнем исследование процессов нелинейного преобразования оптического шума с эффекта смешения световых волн на фотокатоде. Если на элемент с нелинейностью вида (5.1.2) поступают два квазигармонических колебания со средними частотами ω_1 и ω_2 , то, кроме генерации рассмотренных в § 1 гармоник, происходит также генерация комбинационных частот $p\omega_1 \pm q\omega_2$, где p и q — целые числа, не превышающие n . В схемах с фотокатодом (ФЭУ, квадратичное преобразование) возможно лишь исследование спектра вблизи разностной частоты $\omega_1 - \omega_2$.

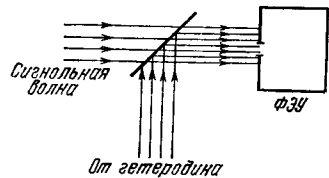


Рис. 5.15. Схема гетеродинного детектора.

Смешение световых волн представляет значительный интерес и как метод спектрального анализа [34]. Смешение оказывается одним из наиболее эффективных методов спектроскопии высокого и сверхвысокого разрешения.

Далее мы рассмотрим две задачи о смешении световых волн на фотокатоде: прямое фотодетектирование и гетеродинирование. Общим в указанных способах преобразования оптического шума является то, что в результате нелинейного преобразования спектр флуктуаций анализируемой волны переносится в область низких частот, в диапазон радиочастот, где он измеряется радиотехническими методами.

Гетеродинирование света; использование в спектроскопии сверхвысокого разрешения. При гетеродинировании на детектор одновременно подается сигнальная волна и дополнительная, опорная, волна от генератора (гетеродина) (рис. 5.15). В экспериментах по рассеянию электромагнитных волн в качестве опорной волны используется, как правило, часть излучения генератора, которым зондируется исследуемый объект [34, 35].

Оставляя в стороне вопрос о влиянии неполной пространственной когерентности принимаемых световых волн на процесс регистрации [31] (см. ниже), будем считать сигнальную волну $E_c(t)$ и опорную волну $E_0(t)$ плоскими, т. е. детектор фактически предполагаем точечным. Суммарное поле запишем в комплексном

виде:

$$E(t) = E_c(t) + E_0(t) = A_c(t)e^{i\omega_c t} + A_0 e^{i\omega_0 t}, \quad (5.4.1)$$

где амплитуда $A_c(t)$ — стационарная случайная функция, A_0 — постоянная величина. Спектр поля (1) изображен на рис. 5.16, а.

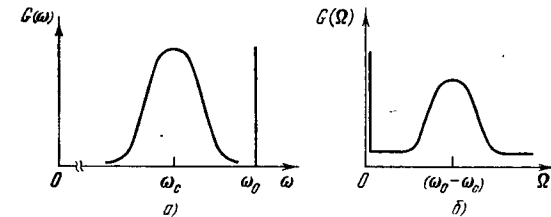


Рис. 5.16. Спектр регистрируемых световых волн (а) и спектр фототока (б).

Предположим сначала, что световое излучение регистрируется безынерционным фотодетектором (влияние постоянной времени детектора на процесс фотосмешения мы обсудим несколько позже). Тогда в силу соотношения (2.9.1) число фотозлектронов, регистрируемых в единицу времени, пропорционально интенсивности падающего света, т. е. ток фотодетектора (см. также (2.9.3))

$$i(t) = \beta I(t) = \beta E(t) E^*(t), \quad (5.4.2)$$

где β — квантовая эффективность детектора. Подстановка (1) в (2) дает

$$i(t) = i_0 + i_c(t) + 2\beta \operatorname{Re} \{ A_c(t) A_0 e^{i(\omega_c - \omega_0)t} \}, \quad (5.4.3)$$

где i_c и i_0 — компоненты тока, обусловленные по отдельности сигнальной и опорной волнами. Для корреляционной функции тока (3) получаем с учетом дробового шума:

$$B_i(\tau) = \langle i(t) i(t + \tau) \rangle + e(i_0 + \langle i_c \rangle) \delta(\tau) = e(i_0 + \langle i_c \rangle) \delta(\tau) + i_0^2 + B_c(\tau) + 2i_0 \langle i_c \rangle \operatorname{Re} \{ \gamma_c(\tau) e^{i\omega_0 \tau} \}. \quad (5.4.4)$$

Здесь $B_c(\tau)$ — компонента корреляционной функции тока, обусловленная детектированием только сигнала (ее мы более детально рассмотрим в следующем разделе), $\gamma_c(\tau)$ — нормированная корреляционная функция поля сигнала:

$$\gamma_c(\tau) = \langle E_c(\tau) E_c^*(t + \tau) \rangle / I_c = \langle A_c(t) A_c^*(t + \tau) \rangle e^{-i\omega_c \tau} / I_c.$$

Первый член в (4) учитывает наличие дробового шума (см. § 8 гл. 2).

При условии $A_0 \gg A_c$ и, следовательно, $i_0 \gg \langle i_c \rangle$, которое обычно выполняется в эксперименте, вместо (4) имеем

$$B_i(\tau) = e i_0 \delta(\tau) + i_0^2 + 2i_0 \langle i_c \rangle \operatorname{Re} \gamma_c(\tau) e^{i\omega_0 \tau}. \quad (5.4.5)$$

Функция $B_i(\tau)$ линейно связана с корреляционной функцией поля сигнала $\gamma_c(\tau)$, поэтому спектр тока детектора полностью воспроизводит спектр поля сигнала.

Пусть для простоты спектр сигнала симметричен, т. е. $\gamma_c(\tau) = \tilde{\gamma}_c(\tau) e^{-i\omega_c \tau}$, где $\tilde{\gamma}_c(\tau)$ — действительная функция. В этом случае спектральная плотность тока

$$G_i(\omega) = \frac{1}{\pi} e i_0 + i_0^2 \delta(\tau) + \frac{2}{\pi} i_0 \langle i_c \rangle \int_0^{\infty} \tilde{\gamma}_c(\tau) \cos[(\omega_0 - \omega_c - \omega)\tau] d\tau \quad (5.4.6)$$

состоит из спектра дробового шума (первый член), постоянной составляющей на нулевой частоте (второй член) и спектра сигнала, смещенного с частоты ω_c на частоту $\omega_0 - \omega_c$ (третий член) (рис. 5.16, б).

Формула (6) наглядно показывает преимущества метода гетеродинамирования как метода спектрального анализа оптических сигналов. Согласно (6) спектр сигнала вблизи разностной частоты — спектр фототока — повторяет спектр исследуемого сигнала в оптической области. При выводе (6) мы не пользовались какими-либо предположениями относительно функции распределения поля $E_c(t)$. Последнее означает, что полученный результат не зависит от статистики сигнальной волны.

Спектр фототока можно исследовать с помощью спектроанализатора или быстродействующего цифрового коррелятора. Поскольку средняя частота сигнала при этом понижается по крайней мере на 12–13 порядков, спектральное разрешение в методе оптического гетеродинамирования $R = \omega_c / \Delta\omega_c$ достигает значений $R \approx 10^{14}$, совершенно недоступных традиционным методам оптической спектроскопии. Даже для оптических спектрометров сверхвысокого разрешения, использующих эталоны Фабри — Перо, $R \approx 10^7$.

Рассмотрим теперь ограничения, связанные с инерционностью фотодетектора; речь будет идти об ограничениях на ширину анализируемого спектра. С учетом конечного значения T (постоянной времени фотодетектора) вместо (2) следует писать (инерционное фотодетектирование)

$$i(t) = \frac{\beta}{T} \int_t^{t+T} I(t') dt'.$$

Подставляя (1) в это выражение, имеем

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_c(t') dt' + 2 \frac{\beta}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \operatorname{Re} A_c(t') A_0 e^{i(\omega_c - \omega_0)t'} dt'. \quad (5.4.7)$$

Если время корреляции τ_k сигнальной волны больше T , а раз-

ность частот $\omega_c - \omega_0$ меньше $2\pi/T$, то выражение (7) для фототока приводится к виду (3)*.

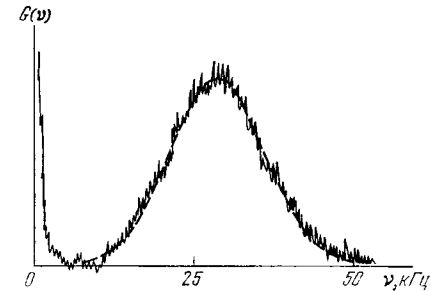
В другом предельном случае, $\omega_c - \omega_0 \gg 2\pi/T$, ток фотодетектора (7) вообще не содержит интерференционного члена:

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} i_c(t') dt'; \quad (5.4.8)$$

эффект гетеродинамирования исчезает.

Таким образом, возможность сохранения полной информации о регистрируемой сигнальной волне в процессе гетеродинамирования существенно определяется инерционностью процесса фотодетектирования.

В заключение отметим, что в настоящее время метод гетеродинамирования широко используется для анализа рассеянного света, имеющего частоту, смещенную по отношению к частоте зондирующей волны: рэлеевского рассеяния, рассеяния света брауновскими частицами и турбулентными потоками жидкости и газа и т. п. Пример спектра света, рассеянного частицами в турбулентном потоке, представлен на рис. 5.17.



Прямое фотодетектирование; влияние пространственной некогерентности сигнала на процесс детектирования. В этом методе преобразования оптического излучения на фотодетектор поступает только сигнальная волна (в формулах (3) и (4) следует принять $i_0 = 0$) и первоочередное значение приобретает корреляционная функция $B_c(\tau)$. Поскольку при этом флуктуации тока обусловлены флуктуациями интенсивности сигнала, информация о фазе и частоте сигнала теряется. Спектр флуктуаций тока прямо связан с оптическим спектром (5.2.4)).

Рис. 5.17. Спектр излучения, рассеянного турбулентным потоком; измерен методом гетеродинамирования [36].

Спектр тока фотодетектора имеет только низкочастотную составляющую, так как постоянная времени детектора всегда

* Заметим, что выражение (3) имеет ту же структуру, что и выражение для интерференционной картины в амплитудной интерферометрии (см. (4.2.4)). Поэтому можно говорить, что (3) описывает динамическую интерференционную картину, перемещающуюся в пространстве со скоростью света. Наблюдение «следа» этой интерференционной картины в фиксированной точке пространства возможно лишь с помощью фотодетектора с постоянной времени $T \ll 2\pi/(\omega_c - \omega_0)$.

гораздо больше периода оптических колебаний. Поэтому формулы § 2 для низкочастотных флуктуаций на выходе квадратичного детектора полностью применимы и для оптических сигналов. Вместе с тем процесс детектирования в оптическом диапазоне имеет и определенную специфику, на которой мы остановимся в настоящем разделе.

Модель точечного фотодетектора, которой мы пользовались до сих пор, применима, если радиус корреляции r_k излучения существенно больше размера d освещаемой площади фотокатода или диафрагмы, помещаемой перед детектором. В противоположном случае ($r_k \ll d$) такая модель непригодна. Тогда детектор можно рассматривать, очевидно, как совокупность $N \approx (d/r_k)^2$ точечных детекторов, токи которых статистически независимы. На апертуре фотодетектора будет, по существу, происходить усреднение по пространству. Тем не менее относительная величина помех, обусловленных дробовым шумом, при изменении N остается, как будет показано ниже, неизменной.

Рассмотрим детально влияние неполной пространственной когерентности волны на процесс прямого фотодетектирования.

С учетом конечной площади фотокатода ток детектора следует записать в виде (ср. с (2))

$$i(t) = \tilde{\beta} \int I(r, t) d^2r. \quad (5.4.9)$$

Параметр $\tilde{\beta}$ связан с квантовой эффективностью детектора β , $\tilde{\beta} = \beta/\pi d^2$; d — радиус апертуры детектора. На величину среднего тока пространственная некогерентность излучения не влияет:

$$\langle i(t) \rangle = \tilde{\beta} \int \langle I(r, t) \rangle d^2r = \beta I. \quad (5.4.10)$$

Распределение средней интенсивности в плоскости фотокатода принято равномерным.

Корреляционная функция фототока (9) с учетом дробового шума детектора

$$B_i(\tau) = eI\delta(\tau) + \tilde{\beta}^2 \iint \langle I(r_2, t+\tau) I(r_1, t) \rangle d^2r_2 d^2r_1. \quad (5.4.11)$$

Если рассматривается излучение с гауссовской статистикой, то в силу (2.4.17)

$$\langle I(r_2, t+\tau) I(r_1, t) \rangle = \langle I(r_1) \rangle \langle I(r_2) \rangle [1 + |\gamma(r_2 - r_1, \tau)|^2], \quad (5.4.12)$$

где $\gamma(r_2 - r_1, \tau)$ — степень пространственно-временной когерентности поля.

Для полей с разделяющимися пространственно-временными корреляционными функциями $|\gamma(r_2 - r_1, \tau)| = |\gamma(r_2 - r_1)| |\gamma(\tau)|$. Из (11) с учетом (12) получаем

$$B_i(\tau) = e\langle i \rangle \delta(\tau) + \langle i \rangle^2 [1 + N^{-1} |\gamma(\tau)|^2]. \quad (5.4.13)$$

Здесь

$$N = \frac{(\pi d^2)^2}{\iint |\gamma(r_2 - r_1)|^2 d^2r_1 d^2r_2}. \quad (5.4.14)$$

Спектр, соответствующий корреляционной функции (13), равен (ср. с (6))

$$G_i(\omega) = \langle i \rangle^2 \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} e\langle i \rangle + \langle i \rangle^2 (2\pi N)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau)^2 e^{i\omega\tau} d\tau \quad (5.4.15)$$

и состоит из спектра на нулевой частоте, спектра дробового шума и спектра, обусловленного флуктуациями сигнала.

Неполная пространственная когерентность излучения уменьшает в N раз величину, содержащую сведения о временных флуктуациях. Для статистически изотропных полей при $d \gg r_k$

$$N \approx \frac{\pi d^2}{\int |\gamma(s)|^2 d^2s}.$$

В случае пространственной корреляционной функции поля вида $|\gamma(s)| = \exp\{-s^2/r_k^2\}$ имеем

$$N = 2(d/r_k)^2.$$

Однако такая важная характеристика детектора, как чувствительность, не зависит от N . Определим отношение сигнал/шум детектора как

$$(с/ш) = G_{i, c}(\omega) \Delta\omega / G_{i, ш}(\omega) \Delta\omega \quad (5.4.16)$$

Спектры $G_{i, c}(\omega)$ и $G_{i, ш}(\omega)$ определяются соответственно последним и вторым слагаемым в (15); $\Delta\omega$ — полоса преддетекторного фильтра. Для частоты $\omega \approx 0$ находим

$$(с/ш) = e^{-1} \langle i \rangle (2N)^{-1} \tau_k, \quad \tau_k = \int |\gamma(\tau)|^2 d\tau.$$

Согласно (10) постоянный ток можно записать в виде

$$\langle i \rangle = \beta \hbar \omega N (dn/dt)_{\text{ког}}.$$

Здесь $(dn/dt)_{\text{ког}}$ — число фотонов, падающих на «площадь когерентности» πr_k^2 в единицу времени. Таким образом,

$$(с/ш) = (2e)^{-1} \hbar \omega \beta (dn/dt)_{\text{ког}} \tau_k. \quad (5.4.17)$$

Отсюда следует, что регистрация широких световых пучков, в апертуре которых умещается несколько площадей когерентности, не приводит к улучшению отношения (17) по сравнению со значением для одной площади когерентности. Аналогичный эффект имеет место и при гетеродинаровании [47].

Интерферометрия интенсивности; эксперимент Брауна—Твисса. Нелинейные преобразования оптического шума могут быть использованы для измерения корреляционных функций поля высших порядков. Фактически с этими функциями мы уже встречались, когда рассматривали процесс прямого фотодетектирования, в котором корреляционная функция тока непосредственно связана с корреляционной функцией интенсивности падающего излучения (11). Однако главный акцент при этом делался на исследование спектра излучения.

Вместе с тем знание корреляционных функций поля высшего порядка представляет и самостоятельный интерес. Далее будут рассмотрены два примера измерения корреляционных функций интенсивности. Первый пример, заимствованный из радиоастрономии, связан с проблемой измерения угловых диаметров звезд.

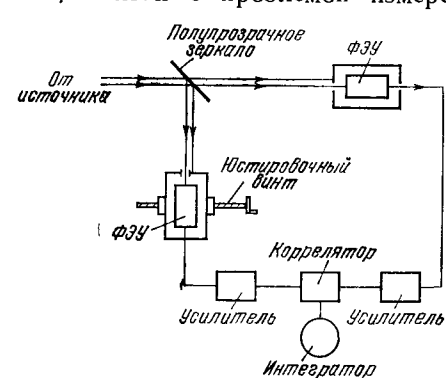


Рис. 5.18. Схема установки Брауна и Твисса для измерения корреляционной функции интенсивности.

Вносящую случайные изменения в фазу, то фазовые флуктуации никак не отразятся на виде корреляционных функций интенсивности. Это принципиальное преимущество интерферометрии интенсивности по сравнению с амплитудной интерферометрией. Применение интерферометрии интенсивности в радиоастрономии позволяет почти полностью исключить влияние состояния атмосферы на результаты измерений [38]. Вместе с тем, как уже отмечалось, для полей с гауссовской статистикой корреляционные функции поля и интенсивности содержат одинаковую информацию.

Упрощенная схема интерферометра Брауна—Твисса показана на рис. 5.18. Излучение от исследуемого источника делится на полупрозрачном зеркале на два пучка, которые падают на фотумножители (ФЭУ). Перед ФЭУ расположены щели, вырезающие регистрируемые сигналы; одна из щелей перемещается перпендикулярно направлению распространения пучка.

Сигналы, регистрируемые ФЭУ за время T ,

$$U_n(t_n) = \beta \int_{t_n}^{t_n+T} I_n(r_n, t) dt, \quad (5.4.18)$$

где $I_n(r_n, t)$ — интенсивность падающего излучения. Коррелятор дает величину $U_1(t_1)U_2(t_2)$, среднее значение которой на выходе интегрирующего устройства

$$B_U(r_1, r_2, \tau) = \beta^2 \int_0^T \int_0^T \langle I_1(r_1, t') I_2(r_2, \tau + t'') \rangle dt' dt'', \quad (5.4.19)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ — время задержки между сигналами.

Для стационарного случайного поля с гауссовской статистикой в силу (12) при $\tau = 0$ имеем

$$B_U(r_1, r_2) = (\beta T)^2 I_1 I_2 \{1 + \xi(r_1, r_2)/T\}, \quad (5.4.20)$$

$$\xi(r_1, r_2) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - t') |\gamma(r_1, r_2, t')|^2 dt'.$$

Здесь $|\gamma(r_1, r_2, \tau)|$ — степень пространственно-временной когерентности исследуемого излучения (см. (1.8.38)). Если время задержки $\tau = 0$ и время корреляции $\tau_k \gg T$, то выражение (20) сводится к пространственной корреляционной функции интенсивности (ср. с (1.8.26)):

$$B_U(r_1, r_2) = (\beta T)^2 I_1 I_2 [1 + |\gamma(r_1, r_2)|^2]. \quad (5.4.21)$$

Формула (21) позволяет найти степень пространственной когерентности $|\gamma(r_1, r_2)|$. Результаты измерения последней для газоразрядного источника представлены на рис. 5.19. Такая возможность определения $|\gamma(r_1, r_2)|$ с помощью интерферометрии интенсивности широко используется в астрофизике для измерения угловых диаметров звезд (рис. 5.20). В основе этих измерений лежат соотношения (4.5.13) и (4.5.15).

Влияние временной некогерентности излучения на измерение пространственной корреляционной функции несущественно при выполнении условия $\tau_k \gg T, \tau$. Электрические фильтры, следующие за ФЭУ (на рис. 5.18 и 5.20 они не показаны), позволяют получить сигналы с временем корреляции $\tau_k = 1/\Delta f \approx 10^{-8}$ с (Δf — полоса пропускания фильтров). Полагая полосу пропускания прямоугольной, для временной степени когерентности имеем (см. (1.3.30))

$$|\gamma(\tau)| = \left| \frac{\sin(\pi \tau \Delta f)}{\pi \tau \Delta f} \right|.$$

Эта формула позволяет оценить ослабление корреляции при наличии задержки τ между поступающими на коррелятор сигналами.

лами. Для $\tau = 10^{-9}$ с, соответствующей разности хода 30 см, $|\gamma(\tau)|$ уменьшается всего на 2%. В интерферометре интенсивности достижение разности хода всего лишь в несколько сантиметров не представляет трудностей [38]. Что же касается звездного интерферометра Майкельсона (рис. 4.16), то из-за широкого спектра принимаемого сигнала ($\Delta\lambda \approx 100$ нм) для получения высокой точности измерения степени простран-

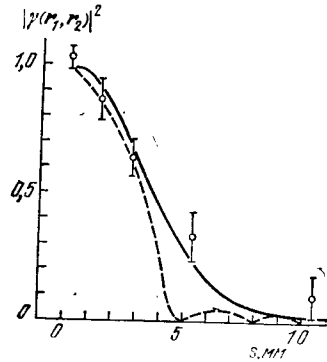


Рис. 5.19. Степень пространственной когерентности излучения ртутной лампы в зависимости от расстояния между фотокатадами, измеренная с помощью установки Брауна и Твисса.

Пунктир — теоретическая зависимость, рассчитанная по формуле (13).

венной когерентности разность хода между интерферирующими пучками не должна превышать одной длины световой волны. Это накладывает чрезвычайно жесткие требования на механическую конструкцию интерферометра [38].

До сих пор мы рассматривали пространственные корреляционные функции интенсивности шумовых полей. Для временных корреляционных функций интенсивности в (19) надо положить $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, тогда

$$B_U(\tau) = \beta^2 \int_0^T \int_0^T \langle I(t') I(\tau + t'') \rangle dt' dt''.$$

Если время корреляции поля $\tau_c \gg T$, то

$$B_U(\tau) = (\beta T)^2 \langle I(t) I(t + \tau) \rangle \quad (5.4.22)$$

или

$$B_U(\tau) = (\beta T)^2 I^2 \{1 + |\gamma(\tau)|^2\} \quad (5.4.23)$$

для полей с гауссовской статистикой.

Измерение $B_U(\tau)$ можно, очевидно, выполнить с помощью схемы (рис. 5.18), содержащей два ФЭУ, вводя оптическую задержку в один из каналов регистрации. Однако на практике

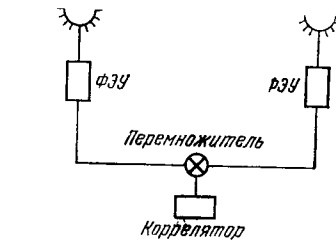


Рис. 5.20. Схема звездного интерферометра интенсивности.

такие измерения обычно проводятся с одним ФЭУ, работающим в режиме счета фотонов, а задержка вносится после разделения электрического сигнала (см. [34]). Поскольку при использовании метода счета фотонов нетрудно реализовать большие времена задержек, предельное разрешение интерферометра интенсивности в этом случае может быть лучше 0,1 Гц. Минимальное время корреляции, которое удается измерить рассматриваемым способом, определяется быстродействием элементов установки и может быть порядка 1—10 нс.

На рис. 5.21 показан типичный вид временной корреляционной функции интенсивности для рассеянного света.

В интерферометрии интенсивности измеряются время или радиус корреляции огибающей случайного поля. В случае же полей с гауссовской статистикой, исходя из соотношения (12), можно получить сведения о корреляционной функции поля. Поэтому соотношение (12) часто используется, чтобы проверить связь между корреляционными функциями поля и интенсивности и вынести суждение о статистике поля (см. следующий раздел).

Интерферометрия интенсивности в лазерной оптике — регистрация сверхкоротких световых импульсов. Физическая идея генерации сверхкоротких импульсов (она была выдвинута в 1966 г. (см. [49])) проста и наглядна. Рассмотрим многомодовый лазер; его поле описывается соотношением (2.10.1). Как уже указывалось в гл. 2, огибающая многомодового излучения в общем случае представляет собой случайный процесс. Однако, если моды эквидистантны, а фазы связаны между собой (например, выполняется соотношение (2.10.35)), излучение состоит из последовательности импульсов длительностью $\tau_{\text{имп}} \approx 1/\Delta f$, где Δf — полная ширина спектра (рис. 2.35).

Таким образом, при одной и той же ширине спектра в зависимости от фаз мод имеем либо практически гауссовский случайный процесс, либо последовательность регулярных коротких импульсов.

Различить эти два процесса не представляет труда, если имеются достаточно быстродействующие регистрирующие устройства. К сожалению, прямая регистрация световых импульсов длительностью 10^{-12} — 10^{-13} с оказывается трудной задачей. Поэтому для исследования сверхкоротких световых импульсов в оптике широкое распространение получили косвенные методы, основан-

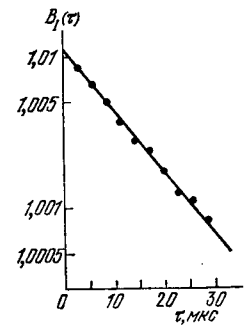


Рис. 5.21. Корреляционная функция интенсивности когерентного излучения, рассеянного в четыреххлористом углероде [39].

Угол рассеяния $3^{\circ}23'$, температура 20°C . Время корреляции по уровню e^{-1} равно $11,2$ мкс.

ные на измерении корреляционных функций высших порядков. Действительно, если фазы мод зависимы, то мы имеем дело с негауссовским случайным процессом и, следовательно, корреляционные функции интенсивности для многомодового излучения с синхронизованными и несинхронизованными модами должны отличаться. Когда же установлен факт синхронизации мод, корреляционные функции интенсивности различных порядков можно использовать для весьма точных измерений формы и длительности световых импульсов.

Рассмотрим прежде всего корреляционные функции поля и корреляционные функции интенсивности для двух моделей излучения: несинхронизованных мод и полностью синхронизованных мод.

Будем исходить из выражения (2.10.32) для эквидистантного спектра, полагая амплитуды мод равными. В этом случае комплексное электрическое поле с шириной спектра $\Delta\omega \approx N\Omega$ имеет вид

$$E(t) = ae^{i(\omega_0 - N\Omega/2)t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n\Omega t + \varphi_n)}, \quad (5.4.24)$$

где ω_0 — центральная частота спектра, Ω — частота межмодовых биений, N — число мод. Процесс (24) периодически нестационарный. Поэтому по аналогии с (2.4.35) запишем

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \overline{\langle E(t+\tau) E^*(t) \rangle} = a^2 e^{i(\omega_0 - N\Omega/2)\tau} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega\tau} = \\ &= a^2 e^{i(\omega_0 - N\Omega/2)\tau} \frac{e^{iN\Omega\tau} - 1}{e^{i\Omega\tau} - 1} = a^2 e^{i(\omega_0 - N\Omega/2)\tau} \frac{\sin(N\Omega\tau/2)}{\sin(\Omega\tau/2)}. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Члены, зависящие от t , при усреднении по времени регистрации $T \gg 2\pi/\Omega$ дают нулевое значение; сумма представляет собой геометрическую прогрессию. Для случая флуктуирующих фаз φ_n фактически предполагается, что они являются случайными величинами. Подчеркнем, что результат (25) не зависит от статистических свойств фаз φ_n . Другими словами, корреляционные функции поля не несут информации о степени синхронизации мод.

Нормированная корреляционная функция (25) имеет вид

$$|\gamma(\tau)| = \frac{|B(\tau)|}{|B(0)|} = \left| \frac{\sin(N\Omega\tau/2)}{N \sin(\Omega\tau/2)} \right|. \quad (5.4.26)$$

Функция (26) — периодическая, ее график показан на рис. 5.22. Характерное время уменьшения корреляционной функции $|\gamma(\tau)|$ (время корреляции) равно

$$\tau_k \approx 4/N\Omega = 2T/\pi N, \quad (5.4.27)$$

т. е. оно приблизительно в N раз меньше периода межмодовых биений ($N > 1$). Вообще говоря, степень когерентности $\gamma(\tau)$ зави-

сит от соотношения амплитуд мод (рис. 5.23). В связи с этим изменяется несколько и время корреляции τ_k , однако характер зависимости τ_k от числа мод N сохраняется.

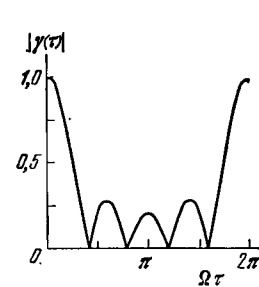


Рис. 5.22. Нормированная корреляционная функция поля многомодового излучения ($N=5$) с равными интенсивностями мод.

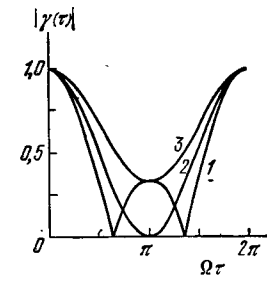


Рис. 5.23. Нормированная корреляционная функция поля трехмодового излучения:

1) интенсивности мод равны ($I_1=I_2=I_3$); 2) $I_1=I_2=0,5I_3$; 3) $I_1=I_2=0,25I_3$.

Теперь рассчитаем корреляционные функции интенсивности $B_I(\tau) = \langle I(t) I(t+\tau) \rangle$. В соответствии с (24) интенсивность

$$I(t) = |E(t)|^2 = a^2 \sum_{m,n=0}^{N-1} e^{i[(m-n)\Omega t + \varphi_m - \varphi_n]}. \quad (5.4.28)$$

Для синхронизованных мод $\varphi_m - \varphi_n \equiv 0$ и интенсивность (28) является детерминированной функцией, задаваемой (2.10.37). Тем не менее корреляционную функцию $B_I(\tau)$ здесь удобнее определить с помощью общего выражения (24), а не (2.10.37).

В общем случае имеем

$$\begin{aligned} \langle II \rangle &= a^4 \sum_{p,l,m,n=0}^{N-1} \langle \exp i \{ (p-l)\Omega t + \\ &+ (m-n)\Omega(t+\tau) + \varphi_p - \varphi_l - \varphi_m - \varphi_n \} \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

В случае синхронизованных мод при усреднении по времени $T \gg 2\pi/\Omega$ в (29) остаются только члены, для которых $p-l + m-n=0$. Среди них имеется: N^2 членов с $p=l$ и $m=n$; $(N-1)^2$ членов с $p-l=1$ и $m-n=-1$; $(N-2)^2$ членов с $p-l=2$ и $m-n=-2$ и т. д. В результате для функции $B_I(\tau)$ получаем

$$B_I(\tau) = a^4 \left\{ N^2 + 2 \sum_{k=1}^N (N-k)^2 \cos k\Omega\tau \right\}. \quad (5.4.30)$$

Хотя в (30) можно выполнить суммирование, окончательное выражение имеет довольно громоздкий вид. Нормированная

функция (30) равна

$$b_I(\tau) = \frac{B_I(\tau)}{B_I(0)} = \frac{3}{N(2N^2+1)} \left\{ N^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} j^2 \cos(N-j)\Omega\tau \right\}. \quad (5.4.31)$$

График функции (31) изображен на рис. 5.24 (кривая 1).

В случае несинхронизованных мод при усреднении выражения (29) по случайным фазам φ_n со статистикой, описываемой (2.10.2), остаются члены с $p=l$ и $m=n$ (их число N^2) и члены с $p=n$ и $l=m$. В результате имеем

$$\frac{B_I(\tau)}{a^4} = N^2 + \sum_{m, n=1; m \neq n}^N e^{i(m-n)\Omega\tau} = N^2 - N + \frac{\sin^2(N\Omega\tau/2)}{\sin^2(\Omega\tau/2)}.$$

Отсюда следует, что нормированная корреляционная функция интенсивности равна

$$b_I(\tau) = \frac{B_I(\tau)}{B_I(0)} = \frac{1}{2N^2 - N} \left(N^2 - N + \frac{\sin^2(N\Omega\tau/2)}{\sin^2(\Omega\tau/2)} \right). \quad (5.4.32)$$

График функции (32) также показан на рис. 5.24 (кривая 2).

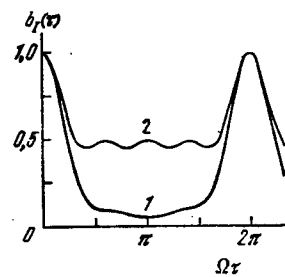


Рис. 5.24. Нормированные временные корреляционные функции интенсивности многомодового излучения ($N=5$) с равными интенсивностями мод:

1 — синхронизованные моды;
2 — несинхронизованные моды.

Некоторые сведения о статистике излучения и статистике фаз мод можно также получить, располагая только данными о корреляционной функции интенсивности $B_I(\tau)$. Введем контраст функции $B_I(\tau)$:

$$R_I = B_{I, \max} / B_{I, \min} = b_I'_{, \min}. \quad (5.4.34)$$

Для излучения с несинхронизованными модами в соответствии с (32)

$$R_I = (2N - 1) / (N - 1) \quad (5.4.35)$$

и, как следовало ожидать, $R_I \rightarrow 2$ при $N \rightarrow \infty$. В случае синхронизованных мод, пользуясь (31), имеем

$$R_I = \frac{1}{3} N (2N^2 + 1) \left\{ N^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} j^2 \cos(N-j)\pi \right\}^{-1} \quad (5.4.36)$$

Контраст (36) имеет значение больше 2 (см. также рис. 5.24), и при $N \gg 1$ $R_I \sim N$, т. е. R_I растет с ростом числа мод.

На рис. 5.25 представлены результаты измерения [41] корреляционной функции интенсивности излучения непрерывного лазера, работающего в режимах несинхронизованных и самосинхронизованных мод. В случае несинхронизованных мод экспериментальные данные и теоретическая кривая удовлетворительно согласуются между собой. Для режима самосинхронизованных мод между теорией и экспериментом имеет место отличие, выходящее за ошибку измерения. Это свидетельствует о том, что в исследованном режиме самосинхронизации мод, которому соответствует контраст $R_I = 5$, моды были синхронизованы не полностью.

Рассмотренные примеры иллюстрируют возможность получения информации о режиме работы лазера по корреляционной функции интенсивности. Как уже отмечалось, широкое распространение интерферометрия интенсивности в лазерной физике получила благодаря возможности измерения длительности сверхкоротких лазерных импульсов. Рассмотрим применяемые схемы интерферометров интенсивности и корреляционные функции, измеряемые с их помощью.

Чаще всего для измерения корреляционной функции интенсивности используется явление генерации второй оптической гармоники. Предположим, что генерация второй гармоники происходит при ее возбуждении в нелинейном кристалле пучками ос-

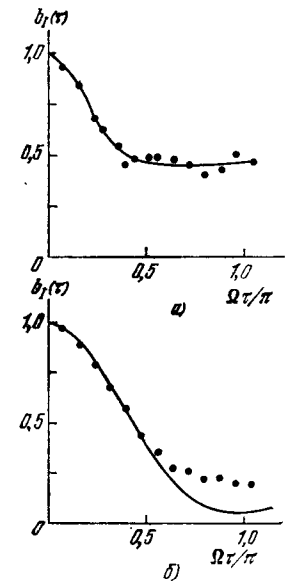


Рис. 5.25. Временные корреляционные функции интенсивности He-Ne-лазера для режимов несинхронизованных (а) и самосинхронизованных (б) мод [41].

Точки — экспериментальные значения. Теоретические кривые построены для измененного распределения интенсивностей между модами: а) 0,26; 0,31; 1,0; 0,61; 0,26 (статистически независимые случайные фазы); б) 0,63; 1,0; 0,48 (равные фазы).

нового излучения с различными поляризациями; напряженности полей пучков обозначим через E_1 и E_2 . В этом случае поле второй гармоники (см. § 3 гл. 8)

$$E_{2r}(t, z) = \beta_{2r} E_1(t, z) E_2(t, z). \quad (5.4.37)$$

Параметр β_{2r} определяется нелинейными свойствами кристалла и его длиной. Средняя интенсивность гармоники

$$I_{2r} = \beta_{2r}^2 \langle I_1(t) I_2(t) \rangle.$$

Схема, реализующая измерение I_{2r} , показана на рис. 5.26. Исходное излучение на полупрозрачном зеркале расщепляется на два

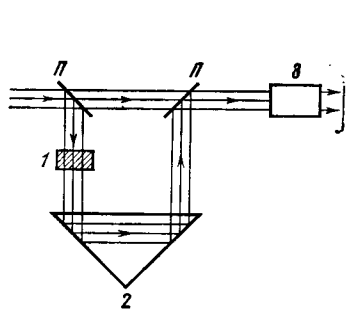


Рис. 5.26. Схема измерения корреляционной функции интенсивности с помощью эффекта генерации второй гармоники:

1 — четвертьволновая пластинка, 2 — призма, 3 — оптически нелинейный кристалл, П — полупрозрачное зеркало.

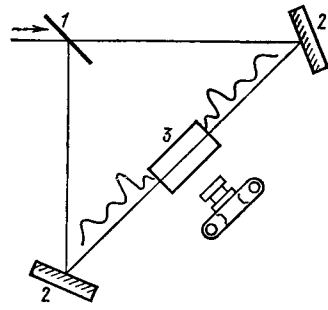


Рис. 5.27. Схема установки для измерения корреляционной функции интенсивности $B_I(\tau)$ по эффекту двухфотонной люминесценции:

1 — полупрозрачное зеркало, 2 — глухие зеркала, 3 — кювета с люминесцирующей жидкостью.

пучка, поляризация одного из них повернута на $\pi/2$, и между ними введена задержка τ . Интенсивность гармоники определяет автокорреляционную функцию интенсивности

$$I_{2r}(\tau) = \beta_{2r}^2 \langle I(t) I(t-\tau) \rangle \sim B_I(\tau). \quad (5.4.38)$$

Другой метод измерения функции $B_I(\tau)$ основан на явлении двухфотонной люминесценции. Схема установки изображена на рис. 5.27. Интенсивность двухфотонного свечения вещества в соответствии с (5.1.47) равна

$$I_{2\phi} = \beta_2 I^2 = \beta_2 E^2 E^{*2}. \quad (5.4.39)$$

Исследуемое излучение $E = \sqrt{2} A_0(t) e^{i\omega t}$ на зеркале делится на два пучка.

Напряженность электрического поля между зеркалами представляет собой сумму бегущих навстречу друг другу полей:

$$E(t, z) = E_1(t, z) + E_2(t, z) = A_1(t, z) e^{i(\omega t - kz)} + A_2(t, z) e^{i(\omega t + kz)}. \quad (5.4.40)$$

Далее будем считать, что интенсивности полей одинаковы, центр образца находится в точке $z=0$, длина двухфотонно-люминесцирующего образца $2l$. Тогда в первом приближении теории дисперсии для полей можно написать (см. § 4 гл. 4)

$$\begin{aligned} E_1(t, z) &= A_0 \left(t - \frac{z}{u} - \frac{l}{u} \right) e^{i(\omega t - kz - kt)}, \\ E_2(t, z) &= A_0 \left(t + \frac{z}{u} - \frac{l}{u} \right) e^{i(\omega t + kz - kt)}, \end{aligned} \quad (5.4.41)$$

где u — групповая скорость волны в жидкости. Подставляя (40) в (39), получим

$$\begin{aligned} I_{2\phi} &= \beta_2 \{ (E_1 + E_2)^2 (E_1^* + E_2^*)^2 \} = \\ &= \beta_2 \{ I_1^2 + I_2^2 + 4I_1 I_2 + [E_1^2 E_2^{*2} + E_1^{*2} E_2^2] + \\ &\quad + 2(I_1 + I_2)(E_1 E_2^* + E_1^* E_2) \}. \end{aligned} \quad (5.4.42)$$

Рассмотрим в (42) последнюю скобку:

$$E_1 E_2^* + E_1^* E_2 = 2A_0(t_1) A_0(t_2) \cos kz. \quad (5.4.43)$$

Усреднение по пространству, реализуемое при регистрации двухфотонной люминесценции на фотопленку (разрешение ~ 100 мкм), обращает в нуль выражение (43). Учитывая сказанное и проводя статистическое усреднение (42), получаем

$$I_{2\phi} = \beta_2 \{ 2\bar{I}_0^2 + 4B_I(\tau = 2z/u) \}. \quad (5.4.44)$$

Пространственный размер s_n яркого пятна двухфотонной люминесценции определяется временем корреляции: $s_n = \tau_k u/2$; в случае $\tau_k = 4$ пс $s_n = 0,6$ мм.

Для анализа (44) удобно использовать нормированную функцию

$$f(\tau) = I_{2\phi}/2\beta_2 \bar{I}_0^2 = 1 + 2b_I(\tau). \quad (5.4.45)$$

Поведение функции $f(\tau)$, как и $b_I(\tau)$, сильно зависит от характера поля (рис. 5.28). Действительно, контраст функции $R_f = f(0)/f_{\min}$ для многомодового излучения с несинхронизованными модами $R_f = (1+2)/(1+1) = 1,5$, тогда как в случае наблюдения двухфотонной люминесценции от излучения с синхронизованными модами $b_I(\tau \gg \tau_{\text{мпл}}) = 0$ и $R_f = 3,0$.

Наряду с временными корреляционными функциями интенсивности значительный интерес для лазерной физики представляют пространственные корреляционные функции интенсивности. Зна-

ние последних позволяет судить о пространственной связи поперечных мод лазерных пучков. Для измерения пространственных корреляционных функций интенсивности можно также применять нелинейно-оптические методы. С этой целью в соответствующих схемах измерения пространственных корреляционных функций поля необходимо использовать двухфотонные детекторы, т. е. устройства, показания которых пропорциональны квадрату интенсивности [48].

Вид излучения	Увеличение контраста
Гармоничный шум	$b_I(\tau)$ 2:1 ДФЛ
Синхронизованные волны	$b_I(\tau)$ 3:1 ДФЛ
Мультиформный излучательный шум	$b_I(\tau)$ 4,5:0 ДФЛ

Рис. 5.28 Типы корреляционных функций интенсивности $b_I(\tau)$ и треков люминесценции $I(\tau)$, измеренных соответственно с помощью второй гармоники (ВГ) и двухфотонной люминесценции (ДФЛ), для полей с различной статистикой; справа сверху приведены значения контрастов [52].

Одной из возможных схем измерения пространственной корреляционной интенсивности $B_I(s)$ является поляризационный интерферометр, сопряженный с удвоителем оптической частоты. Нетрудно показать, что если в схеме поляризационного интерферометра (рис. 4.6) вместо анализатора использовать удвоитель, то будет измеряться корреляционная функция $B_I(s)$, представляющая собой пространственный аналог корреляционной функции $B_I(\tau)$ (38).

На рис. 5.29 показаны пространственные корреляционные функции интенсивности для лазерного излучения со многими поперечными модами. Здесь же изображена функция, связанная с квадратом модуля пространственной корреляционной функции

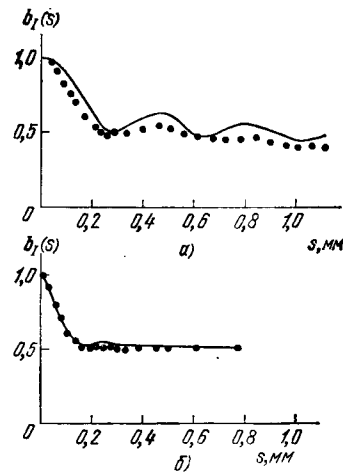


Рис. 5.29. Нормированная пространственная корреляционная функция интенсивности многомодового лазера на алюмо-иттриевом гранате [40]:

а) для лазера с селектором поперечных мод (диафрагма диаметром 4 мм); б) для лазера без селектора поперечных мод. Точки — экспериментальные значения $b_I(s)$, сплошные кривые построены по формуле $F(s) = (1 + \gamma_{\text{всп}}(s))^2/2$.

поля. Видно, что данные рис. 5.29, б хорошо удовлетворяют соотношению (33), т. е. в этом случае пространственная статистика лазерного излучения в рамках корреляционной функции интенсивности является гауссовской, а фазы поперечных мод некоррелированы.

Измерение высших корреляционных функций. Применение оптических преобразователей с нелинейными характеристиками высокого порядка позволяет измерить корреляционные функции интенсивности выше второго порядка. В частности, с помощью трехфотонной люминесценции и генерации третьей гармоники удается измерить корреляционную функцию вида

$$B_I^{(3)}(\tau) = \langle I^2(\tau) \rangle. \quad (5.4.46)$$

Если в схеме, изображенной на рис. 5.27, кювета заполнена веществом, люминесцирующим при одновременном поглощении трех квантов света, то интенсивность свечения

$$I_{\text{вф}} = \beta_3 I^3 = \beta_3 E^3 E^{*3}. \quad (5.4.47)$$

Принимая во внимание (40), (41) и проводя расчеты по аналогии с двухфотонной люминесценцией, для средней интенсивности (47) получаем

$$I_{\text{вф}} = 2\beta_3 [B_I^{(3)}(0) + 9B_I^{(3)}(\tau)]. \quad (5.4.48)$$

Возможен другой вариант измерения корреляционной функции интенсивности (46). Если наблюдается двухфотонная люминесценция в результате поглощения кванта света сильной волны и кванта света слабой волны на удвоенной частоте, то поле имеет вид (ср. с (40))

$$E(t, z) = A_1(t, z) e^{i(\omega t - kz)} + A_2(t, z) e^{i2(\omega t + kz)}. \quad (5.4.49)$$

Пользуясь (42), для средней интенсивности люминесценции можно сразу написать

$$I_{2\text{ф}}(\tau) = 4\beta_2 \overline{I_1 I_2} = 4\beta_2 \beta_{2\Gamma}^2 \langle I_0^2(\tau = 2z/u) \rangle \sim B_I^{(3)}(\tau). \quad (5.4.50)$$

При получении последнего равенства в (50) принято во внимание, что $A_2(t, z) = \beta_{2\Gamma} A_0^2(t + z/u - l/u)$.

На рис. 5.30 изображена схема нелинейного преобразователя для измерения двухточечной корреляционной функции интенсивности

$$B_I^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = \langle I(t) I(t + \tau_1) I(t + \tau_2) \rangle. \quad (5.4.51)$$

Знание этой функции необходимо для восстановления временной структуры импульса (см. § 6 гл. 7).

При умножении частоты исходного излучения реализуется преобразование вида (37) с временной задержкой τ между возбуждающими волнами, т. е. поле второй гармоники

$$L_{2\Gamma}(t, z) = \beta_{2\Gamma} L(t, z) E(t - \tau, z). \quad (5.4.52)$$

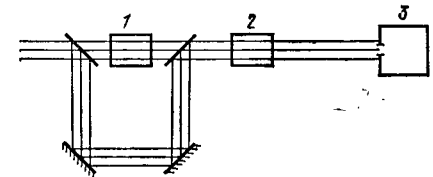


Рис. 5.30. Схема установки для измерения корреляционной функции интенсивности третьего порядка:

1 — удвоитель оптической частоты, 2 — оптический смеситель, 3 — фотодетектор.

Та часть основного излучения, которая поступает на оптический смеситель, минуя удвоитель частоты, имеет задержку τ_2 . В процессе смешения получаем поле на суммарной частоте

$$E_c(t, z) = \beta_c E_{2r}(t, z) E(t - \tau_2, z),$$

или с учетом (52)

$$E_c(t, z) = \beta_c \beta_{2r} E(t, z) E(t - \tau_1, z) E(t - \tau_2, z).$$

Отсюда средняя интенсивность на суммарной частоте равна

$$I_c = (\beta_c \beta_{2r})^2 \langle I(t) I(t - \tau_1) I(t - \tau_2) \rangle, \quad (5.4.53)$$

т. е. она пропорциональна корреляционной функции (51).

Приведем еще один пример. Если двухфотонная люминесценция наблюдается от поля излучения второй гармоники, то с помощью (44) можно найти корреляционную функцию интенсивности второй гармоники

$$B_{I_{2r}}(\tau) = \langle I_{2r}(t) I_{2r}(t + \tau) \rangle,$$

т. е. корреляционную функцию интенсивности четвертого порядка основного излучения

$$B_{I^4}(0, \tau, \tau) = \langle I^2(t) I^2(t + \tau) \rangle. \quad (5.4.54)$$

Наивысшая корреляционная функция, которая измерена к настоящему времени нелинейно-оптическими методами, является одноточечной корреляционной функцией интенсивности пятого порядка $\langle I^4(t) I(t + \tau) \rangle$ [46].

Рассмотренные примеры показывают, каким образом нелинейно-оптическое преобразование шумового поля позволяет определить высшие корреляционные функции интенсивности, применяя преобразователи оптических частот и (или) многофотонные детекторы

В заключение отметим, что корреляционные функции поля высшего порядка, в принципе, можно изучать, используя для регистрации систему из нескольких детекторов или разделяя сигнал после регистрации одним детектором на несколько каналов и вводя соответствующие временные задержки.

§ 5. Двухуровневая среда в сильном шумовом поле — пример иерархического нелинейного преобразования в оптике

Однофотонный и многофотонный резонансы. Как известно, атомы и молекулы характеризуются квантовомеханическим спектром уровней энергии E_0, E_1, E_2, \dots , которым соответствуют частоты перехода $\omega_{ik} = (E_i - E_k)/\hbar$. Если частота ω_0 излучения, падающего на среду, близка к одной из частот перехода ($\omega_0 \approx \omega_{ik}$), то взаимодействие излучения с веществом носит резонансный характер: параметры распространяющегося излучения и динамика среды обнаруживают сильную зависимость от расстройки $\delta = \omega_0 - \omega_{ik}$. Хорошо известный пример резонансного взаимодействия — появление в спектре прошедшего через вещество света резких линий поглощения, обусловленных возрастанием оптических потерь при $\delta = 0$. В сильных полях наряду с однофотонными

($\omega_0 \approx \omega_{ik}$) появляются также многофотонные резонансы ($k\omega_0 \approx \omega_{ik}$, $k = 2, 3, \dots$).

Уравнения двухуровневой среды. Естественно предположить, что поле частоты ω_0 сильнее всего влияет на параметры только двух уровней, частота перехода которыми ω_{ik} близка к ω_0 (или $k\omega_0$). Эта простейшая двухуровневая модель резонансной среды описывается уравнениями [14, 16, 44, 53]

$$\begin{aligned} \dot{n} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) &= \gamma_k [p_1 A^*(t)^k + p_1^* A(t)^k], \\ \dot{p}_1 + \left(\frac{1}{T_2} + i\delta \right) p_1 &= -\beta_k \frac{1}{2} A(t)^k n, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

в которых n — разность населенностей нижнего и верхнего уровней, p_1 — поляризация, $A(t)$ — комплексная амплитуда поля

$$E = A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \quad (\omega_0 = \omega_{ik}), \quad (5.5.2)$$

$\delta = \omega_0 - \omega_{ik}$ — частотная отстройка (в дальнейшем для простоты считаем $\delta = 0$), $T_{1,2}$ — времена релаксации, γ_k и β_k — постоянные параметры. При $k = 1$ уравнения (1) описывают наиболее изученный случай однофотонного резонанса [7, 8, 10, 15].

Уравнения (1) являются основными, определяющими изменение среды под действием произвольного некогерентного шумового поля при не слишком большой глубине z проникновения поля в среду (чтобы можно было пренебречь обратным влиянием среды на поле и считать $A(t)$ известной функцией времени).

Если положить

$$A(t) = a(t) I_{\text{нас}}^{1/2}, \quad p_1(t) = \frac{p(t)}{T_1 \gamma_k I_{\text{нас}}^{k/2}}, \quad (5.5.3)$$

где $I_{\text{нас}}$ — так называемая интенсивность насыщения:

$$I_{\text{нас}} = (T_1 T_2 \gamma_k \beta_k)^{-1/k} \quad (5.5.4)$$

(см. ниже (7)), то система уравнений (1) примет вид

$$T_1 \dot{n} + n - n_0 = p^* a^k(t) + \text{к.с.}, \quad T_2 \dot{p} + p = -\frac{1}{2} a^k(t) n. \quad (5.5.5)$$

При $k = 1$ (однофотонный резонанс) уравнения (5) переходят в (1.6.24).

Как видно из уравнений (5), когда под действием светового поля изменяется не только поляризация p , но и разность населенностей n , даже в случае однофотонного резонанса ($k = 1$) отклик двухуровневой системы на световое поле оказывается нелинейным. В случае же $n \approx \text{const}$ второе уравнение (5) фактически совпадает с укороченным уравнением для амплитуды колебаний в линейном контуре (см. § 2 гл. 3).

При взаимодействии сильного светового поля с двухуровневой системой возникает целый ряд нелинейных эффектов; они хорошо изучены для регулярных полей. В этом параграфе рассмотрены особенности такого нелинейного взаимодействия среды со случайным полем. Главный акцент сделан на трех эффектах. Прежде всего, это стационарный эффект насыщения; для шумового возбуждения определены средние мощности насыщения, флуктуации населенности и т. п. Большой интерес представляет исследование когерентных эффектов в случайно модулированном поле; здесь появляется возможность проследить за распадом когерентного взаимодействия и переходом к некогерентному режиму за счет конечного времени корреляции поля. Этот процесс прослежен ниже на примере оптических нутаций. Рассмотрена генерация гармоник в шумовом поле. Наконец, в последнем разделе этого параграфа рассмотрены возможности «шумовой» спектроскопии двухуровневой среды.

Монохроматическое поле. Если поле отсутствует, то

$$n = n_0, \quad p = 0. \quad (5.5.6)$$

Согласно (5) после включения поля с постоянной амплитудой $a = \text{const}$ в пределе $t \rightarrow \infty$ n и p принимают следующие постоянные значения:

$$n(\infty) = \frac{n_0}{1+x^k}, \quad p(\infty) = \frac{1}{2} \frac{a^k n_0}{1+x^k}, \quad x = |a|^2. \quad (5.5.7)$$

Таким образом, с ростом интенсивности поля x населенности выравниваются ($n \rightarrow 0$) и происходит насыщение перехода. Характерная интенсивность поля x , соответствующая уменьшению n в два раза по сравнению с равновесным значением, равна единице или в размерном виде $I = I_{\text{нас}}$, где $I_{\text{нас}}$ определяется выражением (4).

Нутации. Переход к стационарным значениям (7) описывается следующими решениями уравнений (5), написанными для начальных условий (6) (при $t=0$) и $a = \text{const}$:

$$n(t) = n(\infty) \left[1 + x^k \frac{\alpha' + R}{2R} e^{-(\alpha' - R)t} - x^k \frac{\alpha' - R}{2R} e^{-(\alpha' + R)t} \right], \quad (5.5.8)$$

$$p(t) = p(\infty) \left[1 + \frac{x^k \alpha_2}{2R} \frac{\alpha' + R}{\alpha' + R} e^{-(\alpha' - R)t} - \frac{x^k \alpha_2}{2R} \frac{\alpha' - R}{\alpha' - R} e^{-(\alpha' + R)t} \right], \quad (5.5.9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \alpha'' = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \quad (5.5.10)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \alpha_1 \alpha_2 x^k},$$

причем согласно (2) и (4) в (10)

$$\alpha_1 \alpha_2 x^k = \alpha_1 \alpha_2 \frac{I^k}{I_{\text{нас}}^k} = \gamma_k \beta_k I^k. \quad (5.5.11)$$

Выражение (8) показывает, что при достаточно большой интенсивности падающего на среду света, т. е. когда

$$x^k > x_{\Omega}^k \equiv \frac{(\alpha'')^2}{\alpha_1 \alpha_2} \quad (\text{или } I^k > I_{\Omega}^k \equiv (\alpha'')^2 \frac{1}{\gamma_k \beta_k}), \quad (5.5.12)$$

величина R мнима и изменение $n(t)$ имеет вид затухающего колебательного процесса. Такое изменение разности населенностей называют *нутациями* [23]. Частота нутаций равна

$$\Omega = \alpha'' \sqrt{N^k - 1} |R|, \quad (5.5.13)$$

где $N = x/x_{\Omega} = I/I_{\Omega}$ — превышение нутационного порога (12). Декремент затухания нутаций равен α' — полусумме обратных времен релаксации. Согласно (10) и (11) в предельном случае $T_{1,2} \rightarrow \infty$ нутации становятся незатухающими и происходят с частотой $\Omega = \sqrt{x^k/T_1 T_2}$. Пороговая интенсивность, при которой возникают нутации, в зависимости от соотношения между временами релаксации может быть как больше, так и меньше интенсивности насыщения $I_{\text{нас}}$ (рис. 5.31): согласно (12),

$$\left(\frac{I_{\Omega}}{I_{\text{нас}}}\right)^k = \frac{(\alpha'')^2}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{4\alpha_1 \alpha_2} = \frac{(1 - T_2/T_1)^2}{4T_2/T_1}. \quad (5.5.14)$$

Действие на среду узкополосного оптического шума (адиабатическое приближение). Рассмотрим теперь, каким образом проявляется при резонансном взаимодействии с веществом случайность поля. Начнем с анализа наиболее простого случая, когда спектр поля настолько узок ($\Delta\omega T_{1,2} \ll 1$), что среда, инерционность которой определяется временами релаксации T_1 и T_2 , успевает полностью отслеживать флуктуации поля. Этот предельный случай можно рассматривать адиабатически (или, как иногда говорят, квазистаттически), т. е. можно пользоваться выражениями, полученными выше для чисто монохроматического поля, но теперь считать входящую в них интенсивность падающего света x слу-

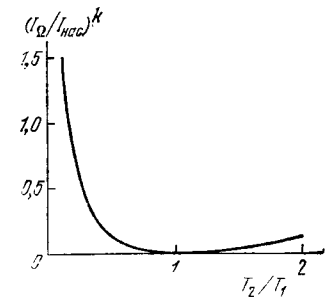


Рис. 5.31. Зависимость приведенного нутационного порога $I_{\Omega}/I_{\text{нас}}$ от отношения времен релаксации при k -фотонном резонансном взаимодействии монохроматического поля с двухуровневой средой.

чайной величиной с некоторым распределением вероятностей $w(x)^*$.

Под действием случайного поля разность населенностей тоже становится случайной, и ее можно записать как сумму среднего значения и флуктуаций: $n = \bar{n} + \tilde{n}$.

Оценим величину флуктуационной компоненты \tilde{n} . Используя (7), первый и второй моменты n можно записать как

$$\langle n \rangle = n_0 \int_0^{\infty} \frac{w(x) dx}{1+x^k}, \quad \langle n^2 \rangle = n_0^2 \int_0^{\infty} \frac{w(x) dx}{(1+x^k)^2}. \quad (5.5.15)$$

Вычислив их, найдем дисперсию

$$\sigma_n^2 = \langle \tilde{n}^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \geq 0 \quad (5.5.16)$$

или относительную дисперсию

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = \frac{\langle \tilde{n}^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1 \geq 0, \quad (5.5.17)$$

которая оценивает относительную величину флуктуаций \tilde{n} около среднего значения \bar{n} .

Общие результаты можно получить для двух предельных случаев, когда средняя интенсивность поля много меньше ($\bar{x} \ll 1$) или много больше ($\bar{x} \gg 1$) интенсивности насыщения.

При $\bar{x} \ll 1$ считаем, что функция $w(x)$ заметно отличается от нуля лишь в области $x \ll 1$. Поэтому множители при $w(x)$ в (15)

$$\frac{1}{1+x^k}, \quad \frac{1}{(1+x^k)^2} \quad (5.5.18)$$

можно разложить по степеням x^k . В результате получим, что

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = \langle x^{2k} \rangle - \langle x^k \rangle^2 = \frac{\langle I^{2k} \rangle - \langle I^k \rangle^2}{I_{\text{нас}}^{2k}}, \quad (5.5.19)$$

т. е. относительная дисперсия разности населенностей равна центральному моменту $2k$ -го порядка для интенсивности света.

При $\bar{x} \gg 1$, наоборот, спад функции $w(x)$ происходит, когда $x \gg 1$, т. е. сходимость интегралов (15) фактически определяется множителями (18) (если $k \geq 2$). Полагая, соответственно, в (15) $w(x) = w(0)$, найдем

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = \frac{k-1}{\pi w(0)} \frac{\sin(\pi/k)}{\sin(\pi(k-1)/k)} - 1. \quad (5.5.20)$$

Например, для гауссовского стационарного поля распределение интенсивности имеет вид

$$w(x) = e^{-x/\sigma^2}, \quad \bar{x} = \sigma^2, \quad \langle x^m \rangle = m! \sigma^{2m} \quad (5.5.21)$$

*) Аналогичный подход использовался при выводе формулы Майделя (2.9.6).

(см. (2.4.8), (2.4.9)) и согласно (19) и (20)

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = \begin{cases} [(2k)! - (k!)^2] \sigma^{4k}, & \sigma^2 \ll 1, \\ \sigma^2 \frac{k-1}{\pi} \frac{\sin^2(\pi/k)}{\sin(\pi(k-1)/k)} - 1, & \sigma^2 \gg 1. \end{cases} \quad (5.5.22)$$

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = \begin{cases} [(2k)! - (k!)^2] \sigma^{4k}, & \sigma^2 \ll 1, \\ \sigma^2 \frac{k-1}{\pi} \frac{\sin^2(\pi/k)}{\sin(\pi(k-1)/k)} - 1, & \sigma^2 \gg 1. \end{cases} \quad (5.5.23)$$

Таким образом, с увеличением интенсивности поля относительная дисперсия $\sigma_{n/\bar{n}}^2$ все время растет: сначала по степенному закону пропорционально $\langle x \rangle^{2k}$, а затем, в области насыщения, более медленно — линейно по $\langle x \rangle$. Этот результат означает, что в достаточно сильном случайном поле флуктуационная компонента \tilde{n} становится доминирующей и среднее значение \bar{n} не дает представления о величине n^* .

Выражения (20) и (23) не применимы к случаю однофотонного резонанса ($k=1$), так как интеграл (15), определяющий $\langle n \rangle$, расходится, если в нем заменить $w(x)$ на $w(0)$. Однако для распределения вероятностей (21) интегралы (15) берутся аналитически: при $k=1$

$$\langle n \rangle / n_0 = F(\sigma^2), \quad \langle n^2 \rangle / n_0^2 = 1 - F(\sigma^2) / \sigma^2, \quad (5.5.24)$$

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = F^{-2}(\sigma^2) [1 - \sigma^2 F(\sigma^2)] - 1, \quad (5.5.25)$$

где

$$F(\sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2} e^{1/\sigma^2} \text{Ei}(-1/\sigma^2)$$

(Ei — интегральная показательная функция). Если $\sigma^2 \gg 1$, то

$$\text{Ei}(-1/\sigma^2) \approx C + \ln(1/\sigma^2) \approx -\ln \sigma^2, \quad F(\sigma^2) \approx \sigma^2 \ln \sigma^2,$$

и согласно (25)

$$\sigma_{n/\bar{n}}^2 = (\sigma^2 / \ln \sigma^2)^2 \quad (\sigma^2 \gg 1). \quad (5.5.25a)$$

Эта зависимость отличается от (23), и можно сделать вывод, что в однофотонном случае относительные флуктуации \tilde{n} увеличиваются с ростом интенсивности поля быстрее, чем в многофотонном.

При двухфотонном резонансе ($k=2$) и гауссовской статистике поля (21) средние также находятся аналитически:

$$\frac{\langle n \rangle}{n_0} = \mu P(\mu), \quad \frac{\langle n^2 \rangle}{n_0^2} = \frac{\mu}{2} [P(\mu) + \mu Q(\mu)], \quad \sigma_{n/\bar{n}}^2 = \frac{P(\mu) + \mu Q(\mu)}{2\mu P^2(\mu)} - 1, \quad (5.5.26)$$

где $\mu = 1/\bar{x} = 1/\sigma^2$ и

$$P(\mu) = \text{ci } \mu \sin \mu - \text{si } \mu \cos \mu, \quad Q(\mu) = \text{ci } \mu \cos \mu + \text{si } \mu \sin \mu, \quad (5.5.27)$$

$$P \approx \frac{\mu}{2}, \quad Q \approx \ln \frac{1}{\mu} \quad (\mu \ll 1); \quad P \approx \frac{1}{\mu}, \quad Q \approx \frac{1}{\mu^2} \quad (\mu \gg 1).$$

*) Заметим, что при возрастании интенсивности поля как \bar{n} , так и \tilde{n} по абсолютной величине уменьшаются. Увеличение дисперсии $\sigma_{n/\bar{n}}^2$ просто означает, что \tilde{n} уменьшается быстрее, чем \bar{n} .

Как нетрудно убедиться, функции $P(\mu)$ и $Q(\mu)$ удовлетворяют соотношениям

$$P' = -Q, \quad Q' = P - 1/\mu, \quad (5.5.28)$$

которые будут использованы в дальнейшем; в (28) штрих означает дифференцирование по μ .

На рис. 5.32 приведены кривые, рассчитанные по формулам (24)–(27), показывающие уменьшение \bar{n} и относительный рост флуктуаций \bar{n} при увеличении средней интенсивности случайного поля.

Учет инерционности среды для двух моделей оптического шума с конечной шириной спектральной линии (оптический белый шум, поле с диффузией фазы). В общем случае переменного случайного поля с амплитудой $a(t)$ отыскание статистических средних, характеризующих двухуровневую среду (\bar{n} , \bar{n}^2 , $\sigma_{n/\bar{n}}^2$) или генерацию гармоник, становится очень трудной задачей, так как точное аналитическое решение для исходных уравнений (5) неизвестно (один частный случай решения рассматривался в § 6 гл. 1, см.

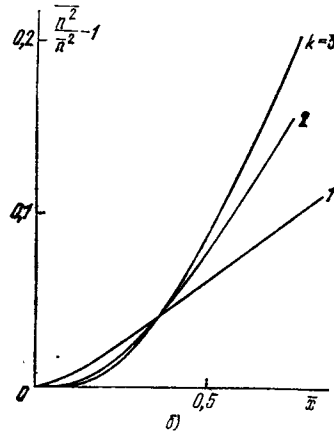
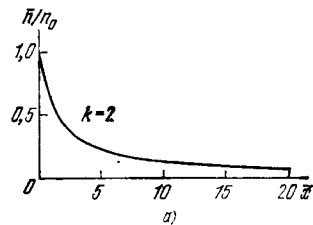


Рис. 5.32. Среднее значение (а) и относительная дисперсия (б) разности населенностей при k -фотонном взаимодействии двухуровневой среды с узкополосным случайным гауссовским полем (\bar{x} — средняя интенсивность поля).

также [43]). Естественно поэтому обратиться к стохастическим методам (см. § 7 гл. 1), которые дают возможность при определенных условиях найти уравнения для интересующих нас средних, минуя решение динамических уравнений (в данном случае уравнений (5)). Мы сделаем это, используя некоторые модели поля, рассмотренные в гл. 1 [14–17]*).

*) Первые результаты по анализу поведения двухуровневой среды в случайном поле были получены Бурштейном методом, который основан на представлении о случайном скачкообразном изменении во времени параметров комплексной амплитуды $a(t)$ [18, 19]; экспериментальные данные — см. [12, 13].

1-я модель: оптический белый шум. Если поле (2) стационарно и гауссово, то его нормированная комплексная амплитуда $a(t)$ удовлетворяет таким корреляционным соотношениям:

$$\langle aa_\tau \rangle = 0, \quad \langle a^k a_\tau^k \rangle = 0, \quad (5.5.29)$$

$$\langle aa_\tau^* \rangle = \sigma^2 [p_0(\tau) - iq_0(\tau)], \quad (5.5.30)$$

$$\langle a^k a_\tau^{*k} \rangle = \sigma^{2k} k! [p_0(\tau) - iq_0(\tau)]^k$$

(см. (2.4.53), (2.4.54)), где $\sigma^2 = \bar{x} = \langle a^2 \rangle$ — средняя интенсивность. Характерное время корреляции случайной функции $a^k(t)$, входящей в уравнения (5), можно определить как

$$\tau_k = \int_0^\infty |p_0(\tau) - iq_0(\tau)|^k d\tau = \int_0^\infty [p_0^2(\tau) + q_0^2(\tau)]^{k/2} d\tau. \quad (5.5.31)$$

Напомним, что наличие нечетной относительно τ функции $q_0(\tau) = -q_0(-\tau)$ в (30), (31) связано с асимметрией частотного спектра поля (относительно его средней частоты ω_0). Часто для простоты спектр считают симметричным; при этом $q_0(\tau) = 0$.

Использованное выше адиабатическое приближение применимо при условии, что время корреляции (31) достаточно велико:

$$\tau_k \gg T_1, T_2. \quad (5.5.32)$$

Теперь предположим, что выполняется обратное неравенство:

$$\tau_k \ll T_1, T_2. \quad (5.5.33)$$

Если время корреляции мало по сравнению с характерными временными параметрами задачи (в данном случае $T_{1,2}$), то допустимо вообще положить его равным нулю, т. е. считать процесс комплексным белым шумом, для которого вместо (30) можно написать

$$\langle a^k a_\tau^{*k} \rangle = C \delta(\tau). \quad (5.5.34)$$

Корреляционная константа C в (34) определяется «условием эквивалентности» (34) и (30):

$$\sigma^{2k} k! \int_0^\infty [p_0(\tau) - iq_0(\tau)]^k d\tau = C. \quad (5.5.35)$$

Если поле имеет симметричный спектр, так что $q_0(\tau) = 0$, то, как следует из (31) и (35), время корреляции τ_k пропорционально постоянной корреляции C :

$$C = 2k! \sigma^{2k} \tau_k. \quad (5.5.36)$$

Например, в случае лоренцевского спектра

$$p_0(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \tau_k = 1/k\alpha, \quad C = 2(k-1)! \sigma^{2k}/\alpha, \quad (5.5.37)$$

а в случае гауссовского —

$$\rho_0(\tau) = e^{-\beta^2 \tau^2}, \quad \tau_k = \frac{1}{2\beta \sqrt{k/\pi}}, \quad C = \frac{k! \sigma^2 k}{\beta \sqrt{k/\pi}}. \quad (5.5.38)$$

После перехода к (34) задача отыскания статистических характеристик разности населенностей $n(t)$ и поляризации $p(t)$ становится стандартной. Усреднение системы линейных дифференциальных уравнений с δ -коррелированными коэффициентами рассматривалось в § 7 гл. 1. Применяя полученные там результаты к системе уравнений (5) и учитывая (29) и (34), находим следующую замкнутую систему уравнений для первых и вторых моментов:

$$\dot{\bar{n}} + \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C\right) \bar{n} = \alpha_1 n_0, \quad \dot{\bar{p}} + \alpha_2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha_1 C\right) \bar{p} = 0; \quad (5.5.39)$$

$$\dot{\bar{n}^2} + 2\alpha_1 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C\right) \bar{n}^2 = 2\alpha_1^2 C \overline{pp^*} + 2\alpha_1 n_0 \bar{n},$$

$$\dot{\bar{p}^2} + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{5}{4} \alpha_1 \alpha_2 C\right) \bar{p}^2 = \alpha_1 n_0 \bar{p}, \quad (5.5.40)$$

$$\dot{\bar{p}^2} + 2\alpha_2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha_1 C\right) \bar{p}^2 = 0,$$

$$\dot{\overline{pp^*}} + 2\alpha_2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha_1 C\right) \overline{pp^*} = \frac{1}{4} \alpha_2^2 C \bar{n}^2,$$

$$\bar{n} = n_0, \quad \bar{n}^2 = n_0^2, \quad \bar{p} = \bar{p}^2 = \overline{pp^*} = \bar{n} \bar{p} = 0 \quad (t=0). \quad (5.5.41)$$

Из (39), (40) и начальных условий (41) следует, что

$$\bar{p} = \bar{p}^2 = \overline{pp^*} = 0, \quad \bar{n}(t) = (n_0 - \bar{n}) \exp\left\{-\alpha_1 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C\right) t\right\} + \bar{n}, \quad (5.5.42)$$

причем в установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$)

$$\bar{n} = \frac{n_0}{1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C}, \quad \overline{pp^*} = \frac{n_0^2 \alpha_2 C}{8 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C + \frac{1}{4} \alpha_1 C\right) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 C\right)}, \quad (5.5.43)$$

$$\sigma_{\bar{n}/\bar{n}}^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 C^2}{8 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha_1 C + \frac{1}{2} \alpha_2 C\right)}.$$

2-я модель: поле с диффузией фазы. Теперь предположим, что поле постоянно по амплитуде, а его фаза случайным образом флуктуирует, образуя винеровский процесс, т. е. она является интегралом от белого шума:

$$a(t) = a_0 e^{i\varphi(t) + i\varphi_0}, \quad (5.5.44)$$

где

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \xi(\theta) d\theta, \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D \delta(\tau). \quad (5.5.45)$$

В этом случае

$$\langle a \rangle = 0, \quad \langle a a_\tau^* \rangle = x e^{-D|\tau|}, \quad (5.5.46)$$

где $x = \langle |a|^2 \rangle = |a|^2 = a_0^2$ — неслучайная интенсивность поля. Согласно (46) это поле имеет спектр лоренцевской формы с полушириной D .

Эта модель удобна тем, что, введя в (5) новую функцию $r(t)$, связанную с $p(t)$ соотношением

$$p(t) = r(t) e^{ik[\varphi(t) + \varphi_0]}, \quad (5.5.47)$$

мы получим для переменных n и r систему уравнений

$$\dot{n} + \alpha_1 (n - n_0) = \alpha_1 a_0^k r^* + \text{к.с.}, \quad \dot{r} + [\alpha_2 + ik\xi(t)]r = -\frac{1}{2} \alpha_2 a_0^k n, \quad (5.5.48)$$

т. е. опять уравнения с δ -коррелированным коэффициентом, усреднение которых уже рассматривалось. Уравнения для первых моментов теперь имеют вид

$$\dot{\bar{n}} + \alpha_1 (\bar{n} - n_0) = \alpha_1 a_0^k \bar{r}^* + \text{к.с.}, \quad \dot{\bar{r}} + (\alpha_2 + k^2 D) \bar{r} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a_0^k \bar{n}. \quad (5.5.49)$$

Для вторых моментов уравнения будут следующими:

$$\dot{\bar{n}^2} + 2\alpha_1 \bar{n}^2 = 2\alpha_1 a_0^k (\bar{n} \bar{r} + \bar{n} \bar{r}^*) + 2\alpha_1 n_0 \bar{n},$$

$$\dot{\bar{n} \bar{r}} + (\alpha_1 + \alpha_2 + k^2 D) \bar{n} \bar{r} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a_0^k \bar{n}^2 + \alpha_1 n_0 \bar{r} + \alpha_1 a_0^k (\bar{r} \bar{r}^* + \bar{r}^2), \quad (5.5.50)$$

$$\dot{\bar{r}^2} + 2(\alpha_2 + 2k^2 D) \bar{r}^2 = -\alpha_2 a_0^k \bar{n} \bar{r},$$

$$\dot{\bar{r} \bar{r}^*} + 2\alpha_2 \bar{r} \bar{r}^* = -\frac{1}{2} \alpha_2 a_0^k (\bar{n} \bar{r} + \bar{n} \bar{r}^*).$$

Коэффициенты уравнений (49), (50) вещественны; поэтому моменты \bar{r} , \bar{r}^2 , $\bar{n} \bar{r}$ и, разумеется, $\bar{r} \bar{r}^*$ можно считать вещественными функциями времени, что позволяет эти уравнения несколько упростить (однако сама случайная функция $p(t)$ (47) комплексна и, например, $\bar{r}^2 \neq \overline{r r^*}$).

Решение (49) дает

$$\bar{n}(t) = \bar{n} - \frac{\lambda_2 (n_0 - \bar{n})}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 (n_0 - \bar{n})}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \quad (5.5.51)$$

где

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + k^2 D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + k^2 D}{2}\right)^2 - \alpha_1 (\alpha_2 + k^2 D + \alpha_2 x^k)}, \quad (5.5.52)$$

а \bar{n} — стационарное значение $\bar{n}(t)$, к которому эта функция стремится в пределе $t \rightarrow \infty$:

$$\bar{n} = n_0 / \left(1 + \frac{\alpha_2 x^k}{\alpha_2 + k^2 D}\right). \quad (5.5.53)$$

Величина $p(t)$ стремится к стационарному значению

$$\bar{r} = -\frac{\alpha_2 x^{k/2}}{2(\alpha_2 + k^2 D) \bar{n}}. \quad (5.5.54)$$

При $D=0$ выражения (51), (53) и (54) переходят в (8) и (7).

Решение (50) в стационарном режиме, когда производными по времени можно пренебречь, дает

$$\overline{pp^*} = \bar{r}^2 \left[1 + \frac{k^2 D}{\alpha_2} \frac{\alpha_4 \alpha_5 + \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_5) x^k}{\alpha_4 \alpha_5 + (\alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_3) x^k} \right], \quad (5.5.55)$$

$$\sigma_{\bar{n}/\bar{n}}^2 = \frac{\bar{n}^2}{\bar{n}^2} - 1 = \left(\frac{kD}{\alpha_3} \right)^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 x^{2k}}{\alpha_4 \alpha_5 + (\alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_3) x^k}, \quad (5.5.56)$$

где для сокращения записи мы обозначили

$$\alpha_3 = \alpha_2 + k^2 D, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + k^2 D, \quad \alpha_5 = \alpha_2 + 2k^2 D. \quad (5.5.57)$$

Рассмотренные модели дают в области насыщения более быстрый рост $\sigma_{\bar{n}/\bar{n}}^2$, чем модель узкополосного гауссовского шума: согласно (43) и (56) $\sigma_{\bar{n}/\bar{n}}^2 \sim \sigma^{2k}$, в то время как согласно (23) и (25а) $\sigma_{\bar{n}/\bar{n}}^2 \sim \sigma^2$ или $(\sigma^2/\ln \sigma^2)^2$.

Шумовые нутации. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что шумовое поле либо совсем снимает нутации (т. е. изменение $\bar{n}(t)$ перестает быть периодическим), либо ускоряет их затухание. Этот эффект связан с двумя факторами: 1) случайностью поля и 2) конечной шириной $\Delta\omega$ частотного спектра поля. Нутации подавляются тем сильнее, чем больше величина $\Delta\omega$. Действительно, в предельном случае гауссовского оптического шума с очень широким спектром изменение $\bar{n}(t)$ согласно (42) является чисто релаксационным.

В случае ФМ-шума выражение (51) позволяет определить вид нутаций для любой величины $\Delta\omega = 2D$. Согласно (52) нутации происходят с частотой

$$\Omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 x^k - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right)^2 - \frac{k^2 D + 2(\alpha_2 - \alpha_1)}{4} k^2 D}. \quad (5.5.58)$$

Как следует из (58), нутации могут возникнуть лишь при условии, что интенсивность света достигла порогового значения x_Ω , определяемого соотношением

$$x_\Omega^k = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left[\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right)^2 + \frac{k^2 D + 2(\alpha_2 - \alpha_1)}{4} k^2 D \right]. \quad (5.5.59)$$

Пороговая интенсивность x_Ω минимальна при $T_1 = T_2$ ($\alpha_1 = \alpha_2$). Однако при $T_1 - T_2 \rightarrow 0$ величина x_Ω стремится не к нулю, как это было в случае монохроматического поля (см. (14)), а к некоторому конечному значению, зависящему от ширины спектра поля, $x_\Omega^k = k^4 D^2 T^2 / 4$ ($T_1 = T_2 = T$). (5.5.60)

Кроме нутационного порога, из-за конечной ширины спектра поля увеличивается декремент затухания нутации. Согласно (52) этот декремент равен

$$-\text{Re } \lambda_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_2 + k^2 D / 2. \quad (5.5.61)$$

Из (61) видно, в частности, что добавка к декременту характеризуется сильной зависимостью от кратности k резонансного взаимодействия ($\sim k^2$). На рис. 5.33 приведен ряд кривых $\bar{n}(t)$, соответствующих различной ширине спектра поля; видно, что с увеличением параметра $k^2 D T_2$ нутации затухают быстрее, а их частота уменьшается.

Резонансная генерация гармоник. Располагая решением для (1) или (5), можно рассмотреть возбуждение гармоник

$$E_m = A_m(t) e^{im\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (5.5.62)$$

немонохроматического поля (2) при резонансном взаимодействии этого поля с двухуровневой средой. Если для простоты пренебречь различием скоростей распространения волн на частотах ω_0 и $m\omega_0$, то уравнение для A_m будет иметь вид [14, 17]

$$\frac{dA_m}{dz} = \gamma_{mk} A_m^{m-1}(t) p_1(t), \quad (5.5.63)$$

где γ_{mk} — постоянная, пропорциональная нелинейной восприимчивости, z — расстояние, пройденное волной (62) в резонансной среде (ср. (63) с уравнением (8.3.24), описывающим генерацию второй гармоники в нерезонансных условиях). Как следует из (63), $A_m = \gamma_{mk} z A^{m-k}(t) p_1(t)$, т. е. интенсивность m -й гармоники определяется выражениями

$$I_m = \gamma_{mk}^2 z^{2m-k} I^{m-k}(t) p_1(t)^2, \quad (5.5.64)$$

$$I_m = |A_m|^2, \quad I = |A|^2. \quad (5.5.65)$$

Подставляя (3) в (64) и обозначая безразмерную интенсивность основного излучения (2) как

$$x = |a^2(t)|, \quad (5.5.66)$$

получим

$$S_m = 4x^{m-k} |p|^2, \quad (5.5.67)$$

где $S_m = I_m / J_{NL}$ — измеренная в относительных единицах

$$J_{NL} = \frac{\gamma_{mk}^2 z^2}{4T^2 \gamma_k^2 J_{\text{нас}}^{2k-m}} \quad (5.5.68)$$

интенсивность m -й гармоники *).

Стационарная генерация гармоник; динамический выигрыш. Подстановка (7) в (67) дает следующее выражение для относительной интенсивности m -й гармоники в стационарном режиме:

$$S_m(\infty) = \frac{x^m}{(1+x^k)^2}. \quad (5.5.69)$$

* При обычных условиях в парах и газах эффективно генерируются лишь нечетные гармоники; помещая среду в статическое поле, можно добиться возбуждения также и четных гармоник.

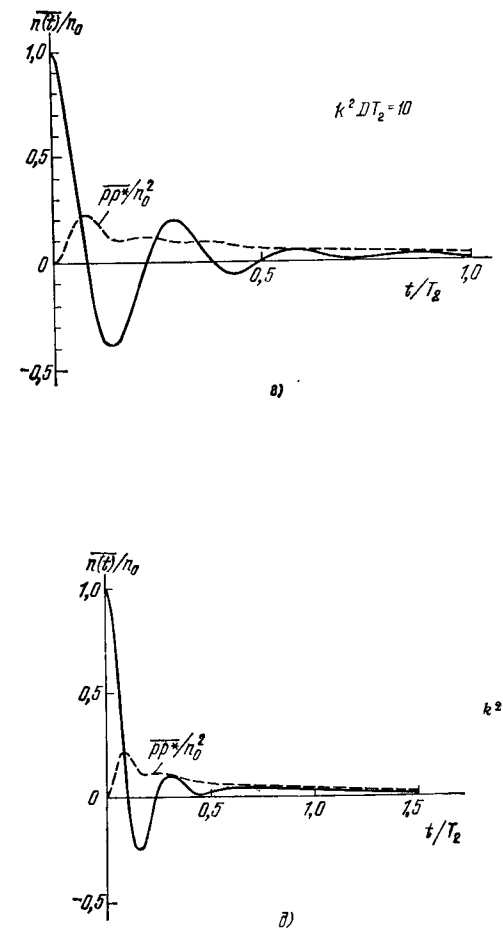
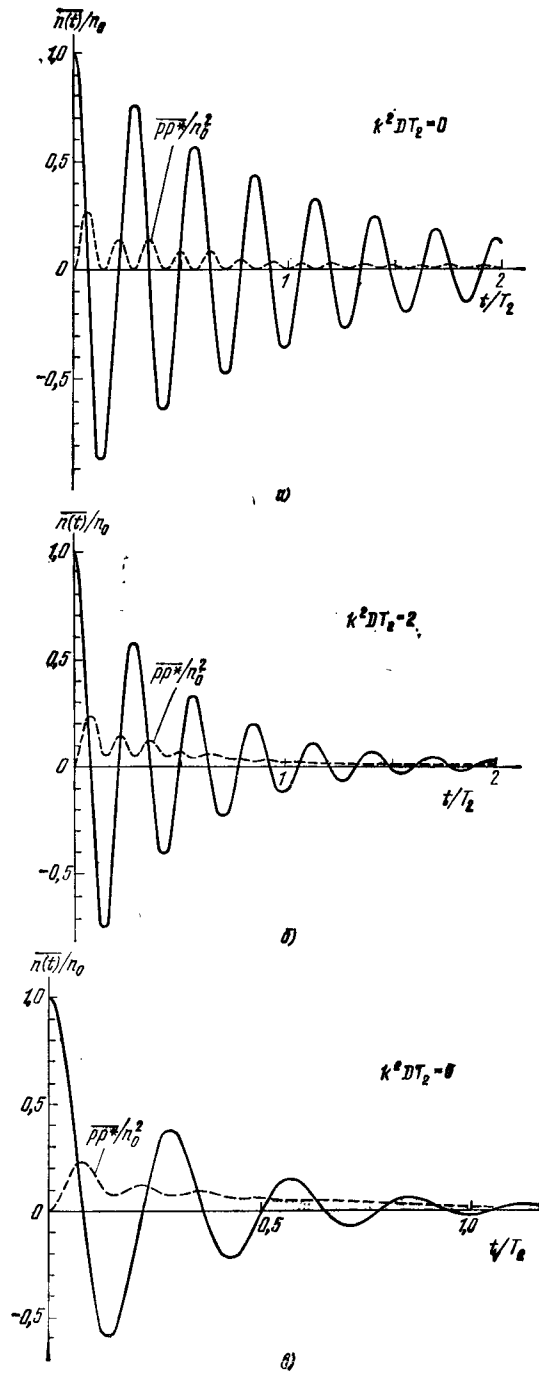
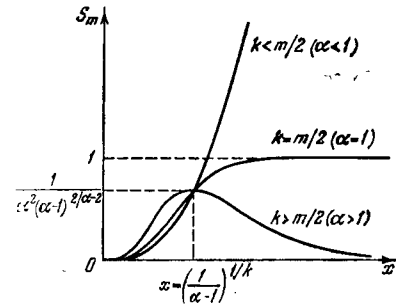


Рис. 5.33. Шумовые нутации и генерация гармоник при включении случайного поля с диффундирующей фазой.

Кривые построены на основе уравнений (49), (50) при фиксированном отношении времен релаксации $T_1/T_2 = 1$, заданной интенсивности поля $x = x$ и различных значениях ширины спектра поля; $x^k = 500$. Интенсивность m -й гармоники $\bar{S}_m \sim |p|^2 \sim |r|^2$ (см. далее (67)).

График функции (69) при различных соотношениях между m и k показан на рис. 5.34. Если $2k > m$, то S_m сначала растет, а затем убывает, принимая максимальное значение



$$(S_m)_{\max} = \left(\frac{m}{2k-m} \right)^{m/k} \left(\frac{2k-m}{2k} \right)^2, \quad (5.5.70)$$

когда интенсивность падающего на среду излучения равна

$$x_0 = \left(\frac{m}{2k-m} \right)^{1/k}. \quad (5.5.71)$$

В частности, если $m=k$, то $x_0=1$ и $(S_m)_{\max}=1/4$.

Рис. 5.34. Зависимость интенсивности $S_m \sim \rho \rho^*$ m -й гармоники от интенсивности x падающего на двухуровневую среду монохроматического поля при k -фотонном резонансе ($\alpha = 2k/m < 2$).

Представляет интерес рассмотреть также генерацию гармоник в нестационарном режиме. Как будет видно из дальнейшего, при этом могут быть достигнуты пиковые значения S_m , значительно превышающие стационарные (69).

Как следует из выражения (67) для S_m , при включении монохроматического света ($a(t) = \text{const}$ и $x(t) = \text{const}$ при $t > 0$) максимум интенсивности S_m гармоники приходится на максимум величины $|p^2|$, т. е. на тот момент $t=t_0$, при котором $\dot{p}(t_0)=0$. Дифференцируя (9), получим

$$\dot{p}(t) = p(\infty) \frac{x^k \alpha_1 \alpha_2^2 (1+x^k)}{2R} e^{-\alpha' t} \left[\frac{e^{-Rt}}{\alpha'' - R} - \frac{e^{Rt}}{\alpha'' + R} \right], \quad (5.5.72)$$

где величина $R = \alpha'' \sqrt{1-N^k} = \sqrt{(\alpha'')^2 - \gamma_k \beta_k} / k$ может быть вещественной ($N < 1$) или чисто мнимой ($N > 1$). В первом случае (ненуточный режим) из (72) находим для t_0 уравнение вида

$$e^{2Rt_0} = \frac{\alpha'' + R}{\alpha'' - R}, \quad (5.5.73)$$

причем, как следует из (67) и (8),

$$S_m(t_0) = S_m(\infty) \left[1 + \frac{x^k \alpha_2}{\alpha'' - R} e^{-(\alpha' + R)t_0} \right]^2 \geq S_m(\infty), \quad (5.5.74)$$

где $S_m(\infty)$ — стационарное значение интенсивности гармоники (69). Как видно из (74), интенсивность гармоники достигает наибольшей величины в нестационарном режиме. Чтобы оценить величину этого динамического выигрыша, преобразуем (74) с учетом (73). В результате получим

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{\alpha''}{\alpha_1} \frac{N^k}{1 - \sqrt{1-N^k}} \exp \left(- \frac{1 + \frac{\alpha''}{\alpha'} \sqrt{1-N^k}}{2 \frac{\alpha''}{\alpha'} \sqrt{1-N^k}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-N^k}}{1 - \sqrt{1-N^k}} \right) \right]^2. \quad (5.5.75)$$

При малых интенсивностях света динамический выигрыш, как и следовало ожидать, незначителен:

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \left(\frac{N^k}{4} \right)^{\alpha_2/(\alpha_2 - \alpha_1)} \right]^2 \approx 1 \quad (N \ll 1).$$

Вблизи нутационного порога ($N^k = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$) согласно (75)

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{\alpha''}{\alpha_1} e^{-\alpha'/\alpha''} \right]^2 \quad (N \approx 1), \quad (5.5.76)$$

т. е. динамический выигрыш будет, например, большим при $T_1 \gg T_2$:

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{T_1}{2eT_2} \right]^2 \approx \frac{1}{4e^2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 \gg 1.$$

В случае $N > 1$ (нутационный режим)

$$\alpha'' + R = \alpha'' (1 + i \sqrt{N^k - 1}) = \alpha'' N^{k/2} e^{i\psi_0},$$

где $\psi_0 = \arctg \sqrt{N^k - 1}$, и согласно (72)

$$\dot{p}(t) \sim e^{-\alpha' t} \sin(\Omega t - \psi_0).$$

Таким образом, первый и наибольший максимум величины $|p^2|$ приходится на момент времени

$$t_0 = \frac{\psi_0}{\Omega} = \frac{\arctg \sqrt{N^k - 1}}{\alpha'' \sqrt{N^k - 1}}, \quad (5.5.77)$$

т. е. на первую четверть периода нутаций ($\Omega t_0 = \psi_0 \leq \pi/2$). Подставив (77) и (9) в (67), получим

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{\alpha''}{\alpha_1} N^{k/2} \exp \left(- \frac{\alpha' \arctg \sqrt{N^k - 1}}{\alpha'' \sqrt{N^k - 1}} \right) \right]^2 \quad (N \geq 1). \quad (5.4.78)$$

При $N=1$ (78) совпадает с (76). Как видно из формулы (78), с увеличением N динамический выигрыш также увеличивается. При значительном превышении нутационного порога согласно (78)

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \frac{\alpha''}{\alpha_1} N^{k/2} \exp \left(- \frac{\alpha'}{\alpha''} \frac{\pi}{2N^{k/2}} \right) \right]^2 \quad (N \gg 1). \quad (5.5.79)$$

Учитывая, что

$$N^k = \frac{x^k}{x_0^k} = x^k \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha'')^2},$$

(79) можно переписать как

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} x^{k/2} \exp \left(- \frac{\pi \alpha'}{2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} x^{k/2}} \right) \right]^2 \quad (x \gg 1). \quad (5.5.80)$$

Например, если $T_1 = T_2$, то

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + x^{k/2} \exp \left(- \frac{\pi}{2x^{k/2}} \right) \right]^2,$$

и при достаточно сильном превышении порога насыщения динамический выигрыш будет

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} \approx x^k \gg 1.$$

Если $T_1 \gg T_2$, то согласно (80)

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \left[1 + \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} x^{k/2} \exp\left(-\frac{\pi}{4x^{k/2}} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) \right]^2.$$

Отсюда видно, что самый большой динамический выигрыш достигается при выполнении двух условий: $T_1/T_2 \gg 1$ и $x^k \gg T_1/T_2$. В этом случае

$$\frac{S_m(t_0)}{S_m(\infty)} = \frac{T_1}{T_2} x^k \gg 1.$$

Таким образом, изменение интенсивности генерации гармоник $S_m(t) \sim |p^2(t)|$ в нутационном режиме имеет импульсный характер, причем величина

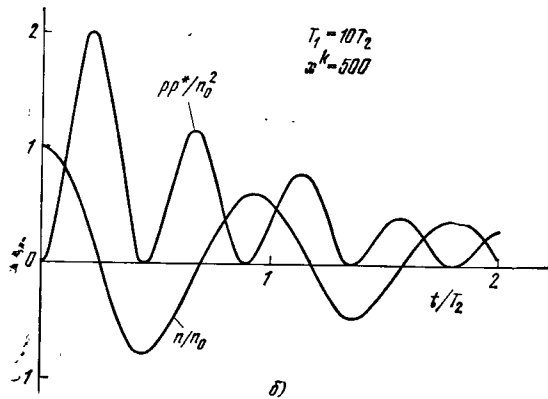
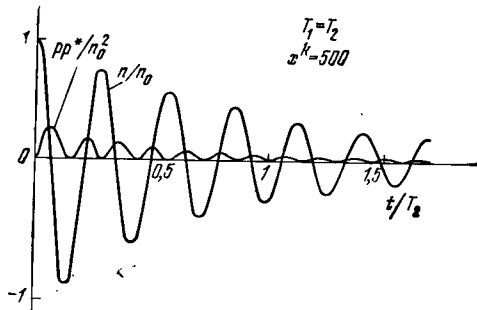


Рис. 5.35. Изменение во времени разности населенностей n и интенсивности m -й гармоники $S_m \sim pp^*$ в нутационном режиме при различном соотношении между временами релаксации (монохроматическое поле).

первого (и самого большого) импульса может на много превысить стационарное значение S_m . Это хорошо видно на рис. 5.35, где также показано нутационное изменение n .

Генерация гармоник; области статистического выигрыша. Средняя интенсивность m -й гармоники при k -фотонном резонансе в адиабатическом приближении находится путем статистического усреднения выражения (69):

$$\bar{S}_m = \int_0^\infty \frac{x^m \omega(x) dx}{(1+x^k)^2}. \quad (5.5.81)$$

В предельном случае очень слабого поля (эффекты насыщения не проявляются) из (81) следует

$$\bar{S}_m = \langle x^m \rangle \quad (\bar{x} \ll 1). \quad (5.5.82)$$

В частности, если поле гауссовское, то, подставив (21) в (81), получим

$$\bar{S}_m = m! \bar{x}^m = m! \sigma^{2m} \quad (\sigma^2 \ll 1). \quad (5.5.83)$$

С другой стороны, для монохроматического поля с малой интенсивностью мы, очевидно, имеем из (69)

$$S_m = x^m = \sigma^{2m} \quad (\sigma^2 \ll 1). \quad (5.5.84)$$

Сравнение (83) и (84) показывает, что случайность (и гауссовость) поля приводит к тому, что средняя интенсивность гармоники увеличивается в $m!$ раз:

$$\bar{S}_m / S_m = m!. \quad (5.5.85)$$

Это выражение аналогично выражению (5.1.90), полученному для генерации гармоники на нелинейности n -й степени, так как в (63) величина γ_{mk} связана с нелинейной восприимчивостью порядка $n = m$.

Теперь рассмотрим сильное случайное поле ($\bar{x} \gg 1$, эффекты насыщения существенны). Здесь оказывается важным соотношение между m и k :

$$\bar{S}_m = \begin{cases} \frac{\omega(0)(m+1-k)\pi/k^2}{\sin((m+1-k)\pi/k)}, & m < 2k-1, \\ 1, & m = 2k, \\ \langle x^{m-2k} \rangle, & m > 2k, \end{cases} \quad (5.5.86)$$

т. е. в случае гауссовского поля и $\bar{x} = \sigma^2 \gg 1$

$$\bar{S}_m = \begin{cases} \frac{(m+1-k)\pi/k^2}{\sin((m+1-k)\pi/k)} \frac{1}{\sigma^2}, & m < 2k-1, \end{cases} \quad (5.5.86a)$$

$$1, \quad m = 2k, \quad (5.5.86b)$$

$$\sigma^{2(m-2k)}, \quad m > 2k. \quad (5.5.86b)$$

Для сравнения напомним, что если поле не случайно, то при $x = \sigma^2 \gg 1$ согласно (69)

$$S_m = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{2(2k-m)}}, & m < 2k-1, \end{cases} \quad (5.5.87a)$$

$$1, \quad m = 2k, \quad (5.5.87b)$$

$$\sigma^{2(m-2k)} \quad m > 2k. \quad (5.5.87b)$$

Таким образом, при больших интенсивностях, как и при малых, случайности поля дает определенный выигрыш при генерации гармоник.

Более детально процесс генерации гармоник случайным полем иллюстрируют рис. 5.36 (стационарный режим, ширина спектра поля $\Delta\omega=0$), рис. 5.35 (переходный режим, $\Delta\omega=0$) и рис. 5.33 (переходный режим, $\Delta\omega \neq 0$).

Чтобы выяснить вопрос об эффективности генерации гармоник случайным полем в промежуточной области ($\bar{x} \approx 1$), рассмотрим случай двухфотонного резонанса ($k=2$), когда интеграл (81) берется точно. Из формулы (26) для $\langle n^2 \rangle$ находим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{P+\mu Q}{2}, \quad (5.5.88)$$

где $P=P(\mu)$ и $Q=Q(\mu)$ — функции, определенные выражениями (27). Дифференцируя (88) по μ , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m e^{-\mu x}}{(1+x^2)^2} dx = \left(-\frac{d}{d\mu}\right)^m \frac{P+\mu Q}{2}. \quad (5.5.89)$$

Если поле гауссовское, то \bar{S}_m (81) выражается через интеграл (89):

$$\bar{S}_m = \frac{\mu}{2} \left(-\frac{d}{d\mu}\right)^m (P+\mu Q), \quad \mu = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (5.5.90)$$

Используя, наконец, соотношения (28), в (90) можно избавиться от производных и выразить \bar{S}_m через P , Q и μ . В частности, выражения для средних интенсивностей гармоник при двухфотонном резонансном взаимодействии будут следующими:

$$\begin{aligned} \bar{S}_2 &= \frac{\mu}{2} (P-\mu Q), & S_3 &= \frac{\mu}{2} (2Q+\mu P-1), \\ \bar{S}_4 &= \frac{\mu}{2} \left(\mu Q + \frac{2}{\mu} - 3P\right), & S_5 &= \frac{\mu}{2} \left(1 + \frac{2}{\mu^2} - 4Q - \mu P\right). \end{aligned} \quad (5.5.91)$$

Зависимость \bar{S}_m (91) от σ^2 показана на рис. 5.36, где для сравнения также приведены соответствующие кривые $S_m(\infty)$ (69). Области, где кривые \bar{S}_m идут выше кривых S_m , т. е. области статистического выигрыша, заштрихованы.

Оптимальная ширина спектра излучения при генерации гармоник. Рассмотрим генерацию k -й гармоники при k -фотонном резонансе с учетом конечной ширины спектра излучения. Согласно (67) средняя интенсивность гармоники при этом равна

$$\bar{S}_k = 4\overline{pp^*}. \quad (5.5.92)$$

Если падающее на среду излучение можно считать оптическим белым шумом (см. критерий (33)), то, подставив (43) в (92), получим

$$\bar{S}_k = \frac{y}{(1+y) [1+(1+T_2/2T_1)y]}, \quad (5.5.93)$$

где $y = \alpha_2 C/2$. При

$$y = \frac{\alpha_2 C}{2} \frac{1}{\sqrt{1+T_2/2T_1}} \quad (5.5.94)$$

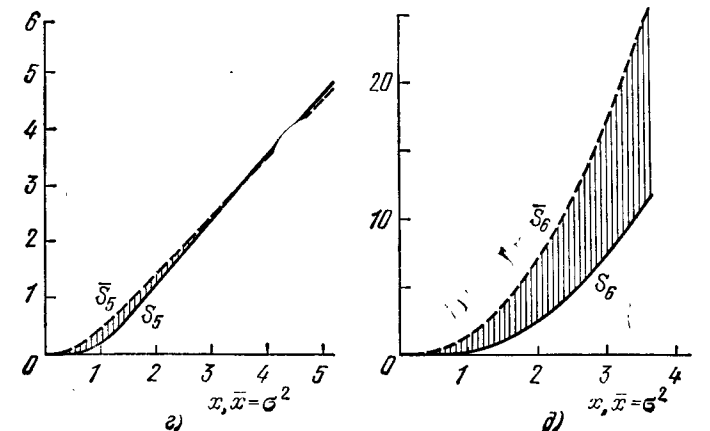
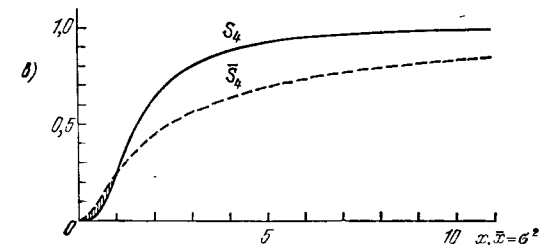
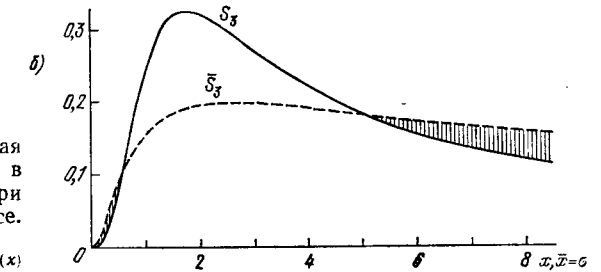
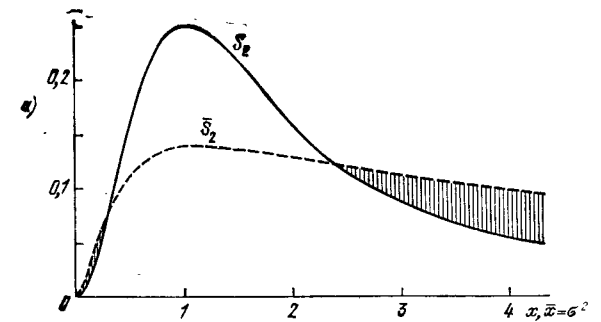


Рис. 5.36. Резонансная генерация гармоник в двухуровневой среде при двухфотонном резонансе.

Сплошные кривые $S_m(x)$ соответствуют монохроматическому регулярному полю, пунктирные кривые $\bar{S}_m(x)$ — монохроматическому гауссовскому полю; а) вторая гармоника, б) третья гармоника, в) четвертая гармоника, г) пятая гармоника, д) шестая гармоника.

интенсивность (90) имеет максимальное значение

$$(\bar{S}_k)_{\max} = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + T_2/2T_1})^2}, \quad (5.5.95)$$

которое лишь незначительно отличается от максимальной интенсивности $(S_k)_{\max} = 0,25$ гармоника, возбуждаемой чисто монохроматическим излучением ($0,2 < (\bar{S}_k)_{\max} < 0,25$, поскольку $T_2 \leq T_1$).

Так как корреляционная постоянная C зависит как от интегральной интенсивности оптического шума σ^2 , так и от ширины его спектральной линии $\Delta\omega$, условие (94) можно рассматривать двояко: как определяющее оптимальную интенсивность σ^2 (при фиксированной $\Delta\omega$) или оптимальную ширину спектра $\Delta\omega$ (при фиксированной σ^2). Следует иметь в виду, что расчет оптимальной полосы $\Delta\omega$ по формуле (94) корректен лишь при условии, что время корреляции, соответствующее этой $\Delta\omega$, удовлетворяет неравенству (33).

Аналогичные результаты могут быть получены и для модели оптического излучения с диффундирующей фазой.

Корреляция флуктуаций в двухуровневой системе; о методах «шумовой» спектроскопии [50]. Исследование отклика двухуровневой системы на случайное поле может быть положено в основу методов «шумовой» оптической спектроскопии. Естественно, что статистические характеристики разности населенностей и поляризации двухуровневой системы несут информацию о характерных параметрах γ_k , β_k , временах релаксации T_1 , T_2 , т. е. о величинах, представляющих первоочередный спектроскопический интерес. Ниже мы покажем, в частности, что, измеряя корреляционные функции в возбужденной стационарным шумом двухуровневой системе, можно определять время релаксации T_2 ; обычно оно определяется, как известно, из спектральных измерений*). Напомним, что в гл. 3 эта задача уже обсуждалась применительно к линейной радиотехнической системе с сосредоточенными параметрами.

Для двух рассмотренных моделей шумового поля удается определить точный вид корреляционных функций, например: $\langle nn_\tau \rangle$, $\langle p p_\tau^* \rangle$, $\langle p_\tau^* a \rangle$. Рассмотрим подробно, как находится корреляционная функция $\langle nn_\tau \rangle$ в том случае, когда действующее на систему излучение можно считать оптическим белым шумом.

Заменив в (5) t на $t + \tau$, будем считать τ новой независимой переменной, а t — параметром. Поскольку

$$dn(t + \tau)/d(t + \tau) = dn(t + \tau)/dt = dn_\tau/d\tau,$$

*) Поэтому корреляционную спектроскопию можно назвать «временной» спектроскопией; о «временной» спектроскопии в поле регулярных сигналов см., например, [49].

то (5) теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_1 \frac{dn_\tau}{d\tau} + n_\tau - n_0 &= p_\tau^* \xi_\tau + p_\tau \xi_\tau^*, \\ T_2 \frac{dp_\tau}{d\tau} + p_\tau &= -\frac{1}{2} n_\tau \xi_\tau, \end{aligned} \quad (5.5.96)$$

где $\xi_\tau \equiv a^k(t + \tau)$, причем

$$\langle \xi_{\tau_1} \xi_{\tau_2}^* \rangle = C \delta(\tau_1 - \tau_2), \quad \langle \xi_{\tau_1} \xi_{\tau_2} \rangle = 0.$$

Умножив (96) на $n = n(t)$, получим уравнения

$$\begin{aligned} T_1 \frac{dn n_\tau}{d\tau} + n n_\tau - n n_0 &= n p_\tau^* \xi_\tau + n p_\tau \xi_\tau^*, \\ T_2 \frac{dn p_\tau}{d\tau} + n p_\tau &= -\frac{1}{2} n n_\tau \xi_\tau, \end{aligned} \quad (5.5.97)$$

которые относятся к классу стохастических дифференциальных уравнений (относительно функций $n n_\tau$, $n p_\tau$ и n) со случайными δ -коррелированными коэффициентами ξ_τ . Усреднение уравнений такого типа нами уже рассматривалось (см. (39), (40) и § 7 гл. 1). В этом случае средние вида $\langle n p_\tau \xi_\tau^* \rangle$ находятся как

$$\langle n p_\tau \xi_\tau^* \rangle = \langle (n p_\tau)^{(k)} \xi_\tau^* \rangle,$$

где согласно (97)

$$(n p_\tau)^{(k)} = -\frac{1}{2T_2} \langle n n_\tau \rangle \dot{\xi}_\tau \quad \left(\dot{\xi}_\tau \equiv \int \xi(\tau') d\tau' \right),$$

т. е.

$$\langle n p_\tau \xi_\tau^* \rangle = \langle n p_\tau^* \xi_\tau \rangle = -\frac{C}{4T_2} \langle n n_\tau \rangle. \quad (5.5.98)$$

Усредняя первое из уравнений (97) и учитывая (98), получим замкнутое уравнение для $\langle n n_\tau \rangle$:

$$T_1 \frac{d}{d\tau} \langle n n_\tau \rangle + \left(1 + \frac{C}{2T_2} \right) \langle n n_\tau \rangle = \langle n \rangle n_0. \quad (5.5.99)$$

Учитывая выражение (43) для $\langle n \rangle$, уравнение (96) можно переписать в виде

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{C}{2T_1 T_2} \right) B(\tau) = 0, \quad (5.5.100)$$

где $B(\tau) = \langle n n_\tau \rangle - \langle n \rangle^2$ — корреляционная функция флуктуаций разности населенностей.

Аналогично могут быть получены уравнения для $\langle n^m p_\tau \rangle$, $\langle p^m n_\tau \rangle$, $\langle p^m p_\tau^* \rangle$ и $\langle a^m n_\tau \rangle$ ($m = 1, 2, \dots$). Как и в случае (99), интегрирование этих уравнений не представляет труда и приводит

к следующему результату (при $\tau \geq 0$):

$$\frac{\langle nn_\tau \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \frac{\langle pn_\tau \rangle}{\langle pn \rangle} = \frac{\langle an_\tau \rangle}{\langle an \rangle} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{C}{2T_1 T_2} \right) \tau \right\}, \quad (5.5.101)$$

$$\frac{\langle pp_\tau^* \rangle}{\langle pp^* \rangle} = \frac{\langle np_\tau \rangle}{\langle np \rangle} = \frac{\langle ap_\tau \rangle}{\langle ap \rangle} = \frac{\langle ap_\tau^* \rangle}{\langle ap^* \rangle} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T_2} + \frac{C}{4T_1 T_2} \right) \tau \right\}. \quad (5.5.102)$$

Заметим, что из стационарности флуктуаций n и p следует, что $\langle np_\tau \rangle = \langle n_{-\tau} p \rangle$. Таким образом, если $\tau = -|\tau| < 0$, то

$$\langle np_\tau \rangle = \langle np_{-|\tau|} \rangle = \langle n_{|\tau|} p \rangle.$$

Это значит, что корреляционная функция $\langle np_\tau \rangle$ определяется при $\tau \geq 0$ выражением (102), а при $\tau \leq 0$ — выражением (101):

$$\frac{\langle np_\tau \rangle}{\langle np \rangle} = \begin{cases} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T_2} + \frac{C}{4T_1 T_2} \right) \tau \right\} & (\tau \geq 0), \\ \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{C}{2T_1 T_2} \right) |\tau| \right\} & (\tau < 0). \end{cases} \quad (5.5.103)$$

Согласно (101)—(103) с ростом интенсивности поля (постоянная C при этом также растет — см. (35)) время корреляций всех флуктуаций уменьшается, т. е. эти флуктуации становятся более быстрыми. В то же время спад с ростом τ отношения

$$\frac{\langle pp_\tau^* \rangle}{B(\tau)} \sim \exp \left\{ - \left(\frac{2}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) |\tau| \right\} \quad (5.5.104)$$

от интенсивности не зависит вообще.

Эти результаты показывают, что измерение корреляционных функций в двухуровневой системе позволяет, в принципе, получить оценку времен релаксации T_1 и T_2 , а также интенсивности насыщения $I_{\text{нас}}$, от которой зависит нормировка корреляционной постоянной C . Знание точного вида корреляционных функций является при этом весьма существенным*).

Согласно (35) $C \sim \sigma^{2k} = (I/I_{\text{нас}})^k$; учитывая формулу (4) для $I_{\text{нас}}$, находим, что $C \sim T_1 T_2 I^k$. Таким образом, в предельном случае большой интенсивности излучения I , когда

$$\frac{C}{4T_1 T_2} \gg \frac{1}{T_2}, \quad \frac{C}{2T_1 T_2} \gg \frac{1}{T_1},$$

определяемое выражениями (101)—(103) время корреляции перестает зависеть от T_1 и T_2 :

$$\tau_k \sim \frac{T_1 T_2}{C} \sim \frac{1}{I^k}.$$

) Применение корреляционных методов с целью изучения двухуровневой системы было предложено в [42] для анализа ядерного магнитного резонанса. Однако, в отличие от (98), выражение для коррелятора $\langle ap_\tau^ \rangle$, приведенное в [42], не дает зависимости времени корреляции от интенсивности света.

Рассмотрим одну из возможных схем наблюдения корреляционной функции $\langle a_0 p_\tau^* \rangle$ (рис. 5.37, а). В случае однофотонного

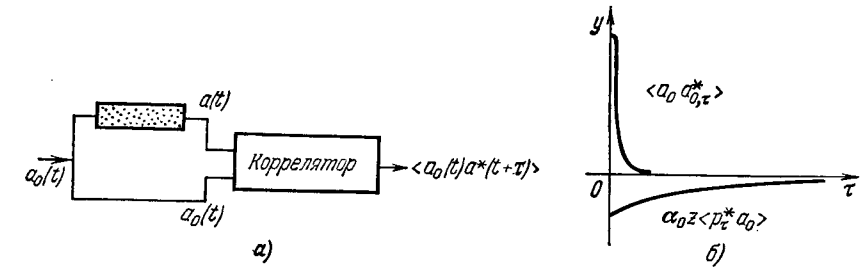


Рис. 5.37. а) Схема измерения взаимной корреляционной функции $\langle a_0 a_\tau^* \rangle$ полей на входе и выходе двухуровневой системы. б) Две компоненты функции $\langle a_0 a_\tau^* \rangle$ (см. (106)).

резонанса ($k=1$) амплитуда a света, распространяющегося в двухуровневой среде вдоль оси z , определяется уравнением

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \alpha_0 p, \quad (5.5.105)$$

откуда

$$a(t, z) = a_0(t, z=0) + \alpha_0 z p(t),$$

если слой вещества считать тонким ($a_0 \gg \alpha_0 z p$). Таким образом, корреляция между полями на входе и выходе слоя двухуровневой среды определяется выражением

$$\langle a_0 a_\tau^* \rangle = \langle a_0 a_{0\tau}^* \rangle + \alpha_0 z \langle p_\tau^* a_0 \rangle, \quad (5.5.106)$$

где в данном случае согласно (34) и (102)

$$\langle a_0 a_{0\tau}^* \rangle = C \delta(\tau),$$

$$\langle p_\tau^* a_0 \rangle = - \frac{n_0 C / 2}{C + 2T_2} \exp \left[- \left(\frac{1}{T_2} + \frac{C}{4T_1 T_2} \right) \tau \right] \quad (\tau > 0),$$

если учесть, что, как следует из (5) и (43),

$$\langle a_0 p^* \rangle = \frac{1}{2} (\bar{n} - n_0) = - \frac{n_0 C}{2(C + 2T_2)}.$$

Несмотря на то, что второе слагаемое в (106) мало по сравнению с первым при очень малых τ , оно будет выделяться благодаря своему более медленному спаду при достаточно больших τ (рис. 5.37, б).

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В этой главе речь пойдет в основном о двух проблемах, представляющих особый интерес для радиофизики и оптики, — о преобразовании шумов колебательными и волновыми системами с регулярно изменяющимися параметрами и о колебаниях и волнах в системах, параметры которых изменяются случайным образом. Закономерности преобразования шумов параметрическими системами существенно отличаются от таковых для линейных систем с постоянными параметрами (см. гл. 3, 4). В параметрических системах, вообще говоря, шум становится нестационарным; специфический характер может носить и преобразование одномерных распределений огибающей и фазы.

В разделе, посвященном системам со случайно изменяющимися параметрами, главный акцент сделан на ситуациях, когда флуктуации параметров могут привести к неустойчивости. Такая постановка вопроса, наряду с практическим интересом (радио- и оптические параметрические генераторы с шумовой накачкой), важна и с принципиальной точки зрения. С параметрическими неустойчивостями мы имеем дело во многих физических системах, и важно располагать ясными представлениями об их развитии для случая, когда параметры изменяются хаотически. Каковы статистические характеристики параметрических колебаний, возбужденных случайной накачкой? Выяснение этого вопроса представляет трудную задачу, и в этой главе мы будем широко пользоваться арсеналом стохастических методов, изложенных в гл. 1.

Один из интересных физических вопросов, возникающих здесь, связан с возможностями использования параметрических процессов для преобразования энергии широкополосного шума в достаточно узкополосные квазимонохроматические колебания. Особый интерес эта задача представляет для оптики. В определенном смысле параметрическая система может оказаться аналогом лазера с некогерентной оптической накачкой; наибольший интерес с этой точки зрения представляет такой параметрический процесс, как вынужденное рассеяние (см. гл. 8).

§ 1. Параметрическое усиление и преобразование частоты

Параметрическими обычно называют системы, один или несколько параметров которых меняются во времени (или пространстве). Процессы в параметрических системах описываются

дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, причем сами уравнения могут быть как линейными, так и нелинейными, а изменение параметров — регулярным или случайным [1, 2, 5—7, 12, 13].

О силе, модулирующей параметры системы, говорят как о накачке. Накачка может быть импульсной, непрерывной, шумовой, смешанной и т. п. Действие накачки на систему может проявляться по-разному. Отметим некоторые основные эффекты.

Если накачка гармоническая и ее частота ω_n выбрана произвольно, эффект является чисто модуляционным, т. е. при действии на параметрическую систему входного сигнала с частотой ω на выходе системы, кроме ω , появляются различные комбинационные частоты

$$\omega \pm n\omega_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.1.1)$$

т. е. коэффициент передачи в (3.1.8) периодичен по времени с периодом накачки $T_n = 2\pi/\omega_n$:

$$K(\omega, t) = K(\omega, t + T_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(\omega) e^{-in\omega_n t}. \quad (6.1.2)$$

При этом включение накачки не может менять характерные времена релаксаций свободных колебаний, т. е. накачка не вносит в систему эффективных потерь — ни положительных, ни отрицательных. Иными словами, в этом случае накачка не влияет на устойчивость системы.

Однако при специальном выборе ω_n накачка влияет на устойчивость. Рассмотрим, например, систему, состоящую из двух колебательных контуров, связанных через переменную емкость, величина которой меняется во времени под действием накачки (рис. 6.1). Если частота накачки равна суммарной частоте:

$$\omega_n \approx \omega_1 + \omega_2 \quad (6.1.3)$$

($\omega_{1,2}$ — собственные частоты контуров), то происходит компенсация собственных потерь контуров за счет энергии, передаваемой от источника накачки (иногда при этом говорят о вносимых накачкой отрицательных потерях). С ростом амплитуды накачки (т. е. с увеличением C_0) происходит сужение резонансной кривой системы. При некотором пороговом значении $C_0 = C_{пор}$ ширина резонансной кривой вообще обращается в нуль, а ее высота делается бесконечной, т. е. происходит потеря устойчивости (см., например, [13]).

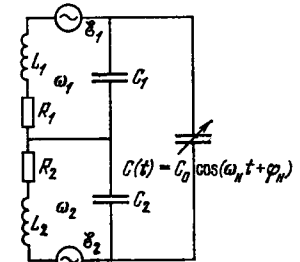


Рис. 6.1. Схема параметрической системы с переменной емкостью.

При $\omega_n \approx \omega_1 + \omega_2$ система работает как усилитель, при $\omega_n \approx \omega_2 - \omega_1$ — как преобразователь частоты вверх.

В области устойчивости ($C_0 < C_{\text{пор}}$) схема, изображенная на рис. 6.1, используется как усилитель (двухконтурный параметрический усилитель). Отметим, что при усилении входного сигнала, частота которого близка, например, к резонансной частоте первого контура, $\omega_c \approx \omega_1$, выходной сигнал параметрического усилителя может сниматься на двух частотах: сигнальной ω_c и разностной (ее называют также холостой) $\omega_x = \omega_n - \omega_c \approx \omega_2$.

Если частота накачки равна разности частот:

$$\omega_n = \omega_2 - \omega_1, \quad (6.1.3a)$$

то ее действие проявляется по-иному. Вносимые накачкой эффективные потери при этом положительны, резонансная кривая при увеличении амплитуды накачки расширяется. Полезным эффектом здесь является появление во втором контуре сигнала на суммарной частоте $\omega_c + \omega_n$, т. е. устройство работает как параметрический преобразователь частоты вверх [13].

Параметрические усилители и преобразователи широко используются в диапазоне сверхвысоких радиочастот [2, 8, 9, 11, 13] и в оптике [3, 17, 27–29]. Другой класс параметрических устройств — параметрические генераторы [29]. В двухконтурной схеме, изображенной на рис. 6.1, может происходить самовозбуждение колебаний на частотах ω_{10} и ω_{20} , для которых имеет место точное равенство

$$\omega_{10} + \omega_{20} = \omega_n. \quad (6.1.4)$$

Такие параметрические генераторы представляют особый интерес для оптики, поскольку на их основе удается создать оптические источники, перестраиваемые по частоте в широкой области видимого и инфракрасного спектров (разумеется, в качестве контуров здесь используются оптические резонаторы и процессы описываются в терминах полей и восприимчивостей). Помимо прикладных вопросов следует иметь в виду и обстоятельство более принципиального порядка. Параметрический процесс вида (4) играет фундаментальную роль не только в радиофизике и нелинейной оптике, но и в физике плазмы, теории турбулентности и т. п. [4, 30].

Статистические задачи, возникающие при анализе параметрических систем, связаны, во-первых, с рассмотрением случайных колебаний, возникающих под действием стороннего шума (при регулярной, например монохроматической, накачке), а во-вторых, с эффектами, обусловленными случайным характером самой накачки.

Ясно, что представление о строго монохроматической накачке — лишь удобная модель. Спектр любой реальной накачки имеет некоторую конечную ширину $\Delta\omega_n$, и пренебрегать величиной $\Delta\omega_n$ допустимо лишь при достаточно большой ширине резонансной

кривой системы:

$$\Delta\omega_n \ll \Delta\omega_{\text{рез.}}$$

Во многих случаях это условие оказывается невыполненным из-за случайной модуляции амплитуды, фазы или частоты накачки; для анализа параметрических процессов при этом нужен статистический подход.

§ 2. Преобразование сигнала и шума в параметрических усилителях колебаний

Изменение емкости $C(t)$ в параметрических усилителях (ПУ) радиочастотного диапазона можно получить, например, если модулировать напряжением накачки емкость $p-n$ -перехода полупроводникового диода. Отсутствие в ПУ источников дробового шума (электронных ламп) и возможность глубокого охлаждения позволяют получать относительно низкий уровень собственных шумов [2, 7–9, 13].

Одноконтурный параметрический усилитель. Одноконтурный ПУ (рис. 6.2) представляет собой обычный колебательный контур, емкость которого модулируется напряжением накачки с частотой, близкой к удвоенной резонансной частоте контура, так что

$$C(t) = C_0 \{1 - m(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)]\}, \quad \omega_n \approx 2\omega_0. \quad (6.2.1)$$

Область устойчивости одноконтурного ПУ с малыми потерями ($2\alpha \ll \omega_0$) соответствует малым значениям коэффициента модуляции, $m \ll 1$. Поэтому приближенно можно принять

$$\frac{1}{C(t)} \approx \frac{1 + m(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)]}{C_0}. \quad (6.2.2)$$

Подставив (2) в (3.2.20), получим уравнение

$$\ddot{u} + 2\alpha\dot{u} + \omega_0^2 \{1 + m(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)]\} u = \omega_0^2 \mathcal{E}(t), \quad (6.2.3)$$

описывающее процессы в одноконтурном ПУ; u — напряжение на постоянной емкости C_0 , $\mathcal{E}(t)$ — усиливаемый сигнал.

Коэффициент передачи. Найдем коэффициент передачи $K(\omega, t)$, предполагая для простоты, что накачка является монохроматической и ее частота равна удвоенной резонансной частоте ω_0 «холодного» контура, т. е. в (3)

$$m = \text{const}, \quad \varphi_n = \text{const}, \quad \omega_n = 2\omega_0. \quad (6.2.4)$$

Общее выражение для $K(\omega, t)$ имеет вид ряда (6.1.2), но достаточно учесть лишь наиболее существенные резонансные члены,

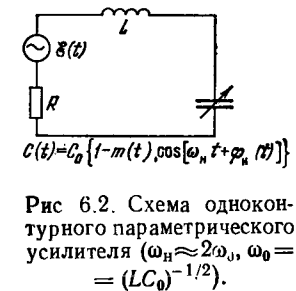


Рис 6.2. Схема одноконтурного параметрического усилителя ($\omega_n \approx 2\omega_0$, $\omega_0 = (LC_0)^{-1/2}$).

дающие при частоте внешнего воздействия $\omega \approx \pm \omega_0$ частоты, также близкие к $\pm \omega_0$. Соответственно, задав сигнал в виде

$$\mathcal{E}(t) = e^{i\omega t}, \quad \omega \approx \omega_0, \quad (6.2.5)$$

будем искать коэффициент передачи, полагая (см. (3.1.8))

$$K(\omega, t) \approx K_0(\omega) + K_1(\omega) e^{-i\omega_n t}. \quad (6.2.6)$$

При этом в спектре u имеются две частоты: сигнальная $\omega_c = \omega$ и разностная, или «холостая», $\omega_x = \omega_n - \omega$, т. е. решение для (3) ищем в виде

$$u(t) = K(\omega, t) e^{i\omega t} = K_0(\omega) e^{i\omega t} + K_1(\omega) e^{i(\omega - \omega_n)t}. \quad (6.2.7)$$

Подставив (5) и (7) в (3) и приравняв члены, меняющиеся с одной и той же частотой (сигнальной или холостой), получим, учитывая (4) и малость отклонения ω от ω_0 , два уравнения для определения $K_0(\omega)$ и $K_1(\omega)$:

$$\begin{aligned} (\omega_0 - \omega + i\alpha) K_0 + \frac{\omega_0 m}{4} e^{i\varphi_n} K_1 &= \frac{\omega_0}{2}, \\ (\omega_0 - \omega + i\alpha) e^{i\varphi_n} K_1 - \frac{\omega_0 m}{4} K_0 &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

В результате находим

$$K_0(\omega) = \frac{\omega_0/2}{\omega_0 - \omega + i\alpha + \frac{\omega_0^2 m^2/16}{\omega_0 - \omega + i\alpha}}. \quad (6.2.9)$$

Согласно (9) при резонансе ($\omega = \omega_0$) коэффициент передачи равен

$$K_0(\omega_0) = \frac{\omega_0}{2i\alpha(1 - \omega_0^2 m^2/16\alpha^2)}. \quad (6.2.10)$$

Сравнение (10) с резонансным значением коэффициента передачи «холодного» контура (т. е. при $m = 0$) $K(\omega_0) = \omega_0/2i\alpha$ показывает, что накачка частично компенсирует активные потери контура. Уменьшение потерь определяется фактором

$$1 - \left(\frac{\omega_0 m}{4\alpha}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m}{m_{\text{пор}}}\right)^2, \quad (6.2.11)$$

где

$$m_{\text{пор}} = \frac{4\alpha}{\omega_0} = \frac{2}{Q} \quad \left(Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} - \text{добротность}\right). \quad (6.2.12)$$

Значение $m_{\text{пор}}$ соответствует порогу устойчивости ПУ: согласно (10) при $m = m_{\text{пор}}$ величина $K_0(\omega_0)$ обращается в бесконечность (рис. 6.3). В области вблизи порога, когда

$$\varepsilon = 1 - |m|/m_{\text{пор}} \ll 1 \quad (6.2.13)$$

и велико дополнительное усиление, обусловленное накачкой, (9) можно переписать как

$$K_0(\omega) = \frac{\omega_0/4}{\omega_0 - \omega + i\alpha\varepsilon}.$$

В этом же приближении ($\varepsilon \ll 1$) находим из (8)

$$K_1(\omega) = \frac{\omega_0/4}{\omega_0 - \omega + i\alpha\varepsilon} \frac{m}{m_{\text{пор}}} e^{i\varphi_n - i\pi/2} = -iK_0(\omega) \frac{m}{m_{\text{пор}}} e^{-i\varphi_n}.$$

Полное выражение для коэффициента передачи (6) при $\varepsilon \ll 1$ будет следующим:

$$K(\omega, t) = \frac{\omega_0}{4} \frac{1 + (1 - \varepsilon) e^{-i\omega_n t - i\varphi_0}}{\omega_0 - \omega + i\alpha\varepsilon}, \quad \omega \geq 0, \quad (6.2.14)$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_n + \pi/2 + \arg m. \quad (6.2.14a)$$

Усиление сигнала. Согласно (14), если сигнал на входе одноконтурного ПУ является гармоническим, $\mathcal{E}(t) = a_c \cos(\omega_c t + \varphi_c)$, то на выходе ПУ возникает сигнал на двух частотах:

$$\omega_c = \omega_0 - \delta, \quad \omega_x = \omega_n - \omega_c = \omega_0 + \delta, \quad (6.2.15)$$

симметрично расположенных относительно ω_0 (рис. 6.4). Резонансные кривые, соответствующие этим частотам, при $\varepsilon \ll 1$ почти

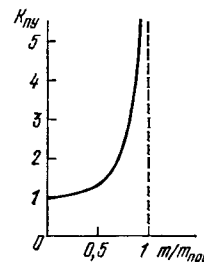


Рис. 6.3 Коэффициент параметрического усиления $K_{\text{ПУ}}$ в зависимости от коэффициента модуляции m емкости контура ($K_{\text{ПУ}} = [1 - (m/m_{\text{пор}})^2]^{-1}$).

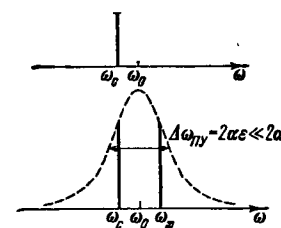


Рис. 6.4 Преобразование спектра сигнала в одноконтурном параметрическом усилителе.

При усилении гармонического колебания с частотой $\omega_c = \omega_0 - \delta$ на выходе усилителя возникают два гармонических колебания с частотами $\omega_0 \pm \delta$.

идентичны (для холостой частоты резонансная кривая идет немного ниже из-за фактора $1 - \varepsilon \leq 1$ в (14)), причем максимальное усиление в $\varepsilon^{-1} \gg 1$ раз больше, чем в «холодном» контуре, а область эффективного усиления соответственно во столько же раз уже:

$$\Delta\omega_{\text{ПУ}} = 2\alpha\varepsilon = 2\alpha(1 - |m|/m_{\text{пор}}). \quad (6.2.16)$$

Особо следует отметить случай, когда $\omega_c = \omega_0$. Согласно (15) при этом сигнальная и холостая частоты одинаковы. В результате интерференции между колебаниями с сигнальной и холостой частотой возникает новый интересный эффект: зависимость усиления от фазы сигнала на входе. Используя (14) и (7), находим при $\omega_c = \omega_0$

$$u = \frac{a_c}{2} e^{i\omega_0 t + i\varphi_c} K(\omega_0, t) + \text{к. с.} = \\ = \frac{a_c \omega_0}{2\alpha} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sin\left(\varphi_c - \frac{\psi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\omega_0 t + \psi - \varphi_c\right) \right]. \quad (6.2.17)$$

Как видно из (17), при изменении фазы сигнала φ_c на $\pi/2$ амплитуда колебания u сильно изменяется (в $\varepsilon^{-1} \gg 1$ раз).

Усиление шума. Если $\mathcal{E}(t)$ — стационарный шум, имеющий спектральную плотность $G(\omega)$, то дисперсия шумовых колебаний u может быть найдена по общей формуле (3.2.11):

$$\langle u^2 \rangle = 2 \int_0^\infty G(\omega) |K(\omega, t)|^2 d\omega = \sigma_{\text{вых}}^2(t). \quad (6.2.18)$$

Как следует из (14),

$$|K(\omega, t)|^2 = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{(1 - \varepsilon/2)^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi/2) + (\varepsilon/2)^2 \sin^2(\omega_0 t + \psi/2)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}. \quad (6.2.19)$$

Подставив (19) в (18), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \frac{\omega_0^2}{2} [(1 - \varepsilon/2)^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi/2) + (\varepsilon/2)^2 \sin^2(\omega_0 t + \psi/2)] \times \\ \times \int_0^\infty \frac{G(\omega) d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}. \quad (6.2.20)$$

Зависимость дисперсии (20) от времени свидетельствует о том, что шумовые колебания в одноконтурном параметрическом усилителе с гармонической накачкой представляют собой нестационарный случайный процесс. В рассматриваемом случае имеет место так называемая периодическая нестационарность: статистические параметры шума изменяются во времени с периодом, равным периоду накачки.

Двухконтурный параметрический усилитель. Упрощенная схема двухконтурного ПУ представлена на рис. 6.1. Записывая динамические уравнения, удобно выбрать в качестве переменных величин

$$u_1 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt, \quad u_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt,$$

где $i_{1,2}$ — токи через нагрузки $R_{1,2}$. При относительно малой емкости связи

$$C(t) = C_0(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] \ll C_{1,2}, \quad \omega_n \approx \omega_1 + \omega_2,$$

получим уравнения

$$\ddot{u}_1 + 2\alpha_1 \dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 - \omega_1^2 (u_1 + u_2) m_1(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] = \\ = \omega_1^2 \mathcal{E}_1(t), \quad (6.2.21) \\ \ddot{u}_2 + 2\alpha_2 \dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 - \omega_2^2 (u_1 + u_2) m_2(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] = \\ = \omega_2^2 \mathcal{E}_2(t),$$

где $2\alpha_i = R_i/L_i$, $\omega_i^2 = (L_i C_i)^{-1}$, $m_i(t) = C_0(t)/C_i$ ($i = 1, 2$).

Коэффициенты передачи. Двухконтурный ПУ имеет два входа (\mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2) и два выхода (u_1 и u_2), так что при монохроматической накачке он описывается четырьмя коэффициентами передачи $K_{mn}(\omega, t)$ ($m, n = 1, 2$) вида (6.1.2). Если предположить, что система не вырождена, т. е. частоты ω_1 и ω_2 достаточно разнесены и резонансные кривые обоих контуров не перекрываются, то в (6.1.2) в каждом случае достаточно учесть лишь по одному члену. Соответственно, если

$$\mathcal{E}_1(t) = e^{i\omega t}, \quad \mathcal{E}_2(t) = 0, \quad (6.2.22)$$

то решение уравнений (21) ищем в виде

$$u_1 = K_{11}(\omega) e^{i\omega t}, \quad \omega \approx \omega_1; \\ u_2 = K_{12}(\omega) e^{-i\omega_n t + i\omega t}, \quad \omega_n - \omega \approx \omega_2. \quad (6.2.23)$$

Для простоты считаем, что

$$m_{1,2} = \text{const}, \quad \varphi_n = \text{const}, \quad \omega_n = \omega_1 + \omega_2.$$

Подставив (22), (23) в (21), получим уравнения, аналогичные (8):

$$(\omega_1 - \omega + i\alpha_1) K_{11} - 1/4 \omega_1 m_1 e^{i\varphi_n} K_{12} = 1/2 \omega_1, \\ (\omega_1 - \omega + i\alpha_2) e^{i\varphi_n} K_{12} + 1/4 \omega_2 m_2 K_{11} = 0, \quad (6.2.24)$$

из которых находим

$$K_{11}(\omega) = \frac{\omega_1/2}{\omega_1 - \omega + i\alpha_1 + \frac{\omega_1 \omega_2 m_1 m_2 / 16}{\omega_1 - \omega + i\alpha_2}}. \quad (6.2.25)$$

Согласно (25) при частоте сигнала, совпадающей с резонансной частотой первого контура,

$$K_{11}(\omega = \omega_1) = \frac{\omega_1}{2i\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}{16\alpha_1 \alpha_2}}. \quad (6.2.26)$$

Здесь, как и в случае одноконтурного ПУ, происходит компенсация активных потерь контуров за счет накачки, причем порог неустойчивости определяется равенством

$$(m_1 m_2)_{\text{пор}} = \frac{16\alpha_1 \alpha_2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{4}{Q_1 Q_2}, \quad (6.2.27)$$

где $Q_{1,2} \gg 1$ — добротности контуров. В области около порога неустойчивости, когда

$$\varepsilon = 1 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 m_2)_{\text{пор}}} < 1, \quad (6.2.28)$$

выражение (25) можно переписать как

$$K_{11}(\omega) \approx \frac{Q_1 \alpha}{\omega_1 - \omega + i\alpha\varepsilon}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (6.2.29)$$

Аналогично находим

$$K_{12}(\omega) \approx \frac{Q_2 m_2}{2} \frac{Q_1 \alpha}{\omega_1 - \omega + i\alpha\varepsilon} e^{-i\varphi_n - i\pi/2}. \quad (6.2.30)$$

Усиление сигнала. Используя полученные результаты, находим, что при входном гармоническом сигнале $\xi_1 = a_c \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ на выходе первого контура ПУ имеется сигнал на той же частоте $\omega_c \approx \omega_1$:

$$u_1 = \frac{a_c}{2} e^{i\omega_c t + i\varphi_c} K_{11}(\omega_c) + \text{к. с.} = \frac{a_c \alpha Q_1}{\sqrt{(\omega_1 - \omega_c)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_c - \psi), \quad (6.2.31)$$

а на выходе второго — сигнал на комбинационной (холостой) частоте $\omega_n - \omega_c \approx \omega_2$:

$$u_2 = \frac{a_c}{2} e^{i\omega_c t + i\varphi_c} K_{12}(\omega_c) e^{-i\omega_n t} + \text{к. с.} = \frac{a_c \alpha Q_1}{\sqrt{(\omega_n - \omega_c)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}} \frac{Q_2 m_2}{2} \cos\left[(\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n + \psi - \frac{\pi}{2} - \varphi_c\right], \quad (6.2.32)$$

где $\psi = \arg(\omega_1 - \omega_c + i\alpha\varepsilon)$. Мы видим, что вблизи порога неустойчивости (когда $\varepsilon \ll 1$) обе резонансные кривые $|K_{11}(\omega)|^2$ и $|K_{12}(\omega)|^2$ двухконтурного ПУ имеют одинаковую форму; они идентичны резонансной кривой высокодобротного колебательного контура и характеризуются одинаковой полосой пропускания

$$\Delta\omega_{\text{ПУ}} = 2\alpha\varepsilon = \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 m_2)_{\text{пор}}}\right], \quad (6.2.33)$$

которая стремится к нулю по мере приближения к порогу неустойчивости. Заметим, что величина α определяется наименьшей из полос контуров: $\alpha = \alpha_1$ ($\alpha_1 \ll \alpha_2$), α_2 ($\alpha_1 \gg \alpha_2$).

В отличие от одноконтурного, в двухконтурном ПУ нет зависимости усиления от фазы сигнала.

Усиление шума. Дисперсии флуктуаций в контурах ПУ, обусловленных шумовым напряжением $\xi_1(t)$, будут согласно (29),

(30) равны

$$\langle u_1^2 \rangle = 2 \int_0^\infty G_1(\omega) |K_{11}(\omega)|^2 d\omega = 2Q_1^2 \alpha^2 \int_0^\infty \frac{G_1(\omega) d\omega}{(\omega_1 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}, \quad (6.2.34)$$

$$\langle u_2^2 \rangle = 2 \int_0^\infty G_1(\omega) |K_{12}(\omega)|^2 d\omega = \frac{Q_2^2 m_2^2}{4} 2Q_1^2 \alpha^2 \int_0^\infty \frac{G_1(\omega) d\omega}{(\omega_1 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2},$$

где $G_1(\omega)$ — спектральная плотность шума $\xi_1(t)$. Периодической нестационарности (как в одноконтурном ПУ) здесь не возникает, т. е. шумовые колебания в контурах стационарны*).

Статистика амплитуды и фазы на выходе параметрических усилителей. Одноконтурный ПУ [14]. Периодическая нестационарность шума на выходе одноконтурного ПУ приводит к ряду особенностей статистики огибающей и фазы.

Рассматривая действие на ПУ стационарного шумового напряжения $\xi(t)$, запишем решение уравнения (3) в виде квазигармонического процесса:

$$u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_0) - b(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)], \quad (6.2.35)$$

где φ_0 — произвольная постоянная фаза. Возведем (35) в квадрат и, статистически усреднив, получим

$$\langle u^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \langle b^2 \rangle \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) - \langle ab \rangle \sin 2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.2.36)$$

Сравним (36) с полученным ранее для $\langle u^2 \rangle = \sigma_{\text{вых}}^2$ выражением (20). Мы видим, что если выбрать $\varphi_0 = \varphi_0/2$ (φ_0 определяется формулой (14а)), то квадратурные компоненты $a(t)$ и $b(t)$ в (35) будут некоррелированными случайными процессами ($\langle ab \rangle = 0$), а их дисперсии будут равны

$$\sigma_1^2 = \langle a^2 \rangle = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{G(\omega) d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2}, \quad (6.2.37)$$

$$\sigma_2^2 = \langle b^2 \rangle = \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2}{4} \int_0^\infty \frac{G(\omega) d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \alpha^2 \varepsilon^2},$$

где $G(\omega)$ — спектр интенсивности входного шума $\xi(t)$.

Различие дисперсий квадратурных компонент характеризуется параметром

$$\beta_0 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{(1 - \varepsilon/2)^2 - \varepsilon^2/4}{(1 - \varepsilon/2)^2 + \varepsilon^2/4}, \quad (6.2.38)$$

*) Стационарность выходного шума, как и отсутствие зависимости усиления от фазы, связана с тем, что в двухконтурном ПУ комбинационные частоты ω_1 и ω_2 разделены и усиливаются в разных контурах.

так что $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 (1 + \beta_0)$, $\sigma_2^2 = \sigma_0^2 (1 - \beta_0)$, где $\sigma_0^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2$ — среднее по времени значение дисперсии периодически нестационарного шума на выходе

$$\langle u^2 \rangle = \sigma_0^2 [1 + \beta_0 \cos(2\omega_0 t + \psi_0)], \quad \langle \ddot{u}^2 \rangle = \sigma_0^2. \quad (6.2.39)$$

Таким образом, характерным для одноконтурного ПУ является то, что при больших коэффициентах усиления (т. е. вблизи порога неустойчивости) одна из квадратурных компонент относительно мала по интенсивности ($\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$, если $\varepsilon \ll 1$, см. (37)) и приближенно шум на выходе усилителя можно считать «однокомпонентным» квазигармоническим процессом вида (2.4.31):

$$u(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \approx a(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0/2). \quad (6.2.40)$$

Предположим, что распределение вероятностей шума $u(t)$ симметрично:

$$w(u, t) = w(-u, t). \quad (6.2.41)$$

По обычным правилам можно найти одномерное распределение для a :

$$w(a) = \left| \frac{\partial u}{\partial a} \right| w(u, t) \Big|_{u=a \cos(\omega_0 t + \psi_0/2)} = \\ = |\cos(\omega_0 t + \psi_0/2)| w(u, t) \Big|_{u=a \cos(\omega_0 t + \psi_0/2)}. \quad (6.2.42)$$

Это распределение также симметрично:

$$w(a) = w(-a), \quad (6.2.43)$$

откуда следует, что фаза $\varphi(t)$ в (40) принимает лишь два равновероятных значения: $\varphi = \psi_0/2$ ($a > 0$) и $\varphi = \psi_0/2 - \pi$ ($a < 0$). Таким образом, распределение для фазы процесса (39) имеет вид суммы двух δ -функций:

$$w(\varphi) = \frac{1}{2} \delta\left(\varphi - \frac{\psi_0}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\varphi - \frac{\psi_0}{2} + \pi\right), \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (6.2.44)$$

Учитывая (43), можно сразу записать и распределение для огибающей $\rho(t) = |a(t)|$:

$$w(\rho) = 2w(a) \Big|_{a=\rho}, \quad \rho > 0. \quad (6.2.45)$$

Например, если распределение для $u(t)$ гауссовское, то

$$w(u, t) = \frac{e^{-u^2/2\sigma^2(t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)}, \quad -\infty < u < \infty,$$

причем согласно (39) здесь $\sigma^2(t) = \sigma_0^2 [1 + \beta_0 \cos(2\omega_0 t + \psi_0)]$ и при $\beta_0 \approx 1$

$$\sigma^2(t) \approx 2\sigma_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi_0/2).$$

Используя (42), находим, что распределение вероятностей для a при этом также гауссовское:

$$w(a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_0} e^{-a^2/4\sigma_0^2}, \quad -\infty < a < \infty,$$

а распределение (45) для огибающей описывается положительной ветвью гауссовской кривой:

$$w(\rho) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2/4\sigma_0^2}, \quad \rho > 0. \quad (6.2.46)$$

Распределение вероятностей для огибающей и фазы гауссовского периодически нестационарного процесса нетрудно найти и в общем случае $0 < |\beta_0| < 1$, т. е. при произвольных уровнях усиления одноконтурного ПУ (см. (2.4.47) и (2.4.51)). С ростом усиления $w(\varphi)$ из равномерного трансформируется в сумму двух δ -функций (44), а $w(\rho)$ — из рэлеевского в (46), причем φ и ρ становятся статистически связанными (см. рис. 2.7 и 2.8). Аналогичная картина имеет место и в параметрическом усилителе волн (вырожденном)*.

Двухконтурный ПУ. При усилении стационарного внешнего шума в обоих контурах ПУ при этом возбуждаются случайные колебания, которые стационарны и имеют постоянные дисперсии (34). Соответственно фазы этих колебаний будут распределены равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$, а распределение огибающих будет зависеть от статистики входного шума. При гауссовской статистике огибающие, очевидно, распределены по закону Рэлея.

§ 3. Шумовая накачка в параметрических системах

В §§ 1, 2 спектр накачки считался бесконечно узким, $\Delta\omega_n = 0$ (гармоническая накачка). Используя эту модель, мы имели в виду, что на самом деле ширина спектра конечна, но она мала по сравнению с некоторыми характерными частотными параметрами задачи. Как вытекает из рассмотрения одноконтурного и двухконтурного ПУ, в качестве такого параметра естественно взять ширину полосы пропускания

$$\Delta\omega_{\text{ПУ}} = 2\alpha\varepsilon \quad (6.3.1)$$

(см. (6.2.16) и (6.2.33)). Однако ε в (1) стремится к нулю по мере приближения амплитуды накачки к критическому значению. Следовательно, неравенство

$$\Delta\omega_n \ll \Delta\omega_{\text{ПУ}} \quad (6.3.2)$$

всегда нарушается в области, близкой к порогу неустойчивости ПУ.

* См. § 5.

Квазигармоническая накачка. Рассмотрим одноконтурный ПУ, считая накачку квазигармоническим случайным процессом вида (2.3.1), ширина спектра которого мала:

$$\Delta\omega_n \ll \omega_0. \quad (6.3.3)$$

Будем опять искать коэффициент передачи $K(\omega, t)$ усилителя, полагая в (6.2.3)

$$\xi(t) = e^{i\omega t}, \quad u = K(\omega, t) e^{i\omega t}, \quad (6.3.4)$$

$$K(\omega, t) = K_0(\omega, t) + K_1(\omega, t) e^{i\omega_n t},$$

$$m(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] = A(t) e^{i\omega_n t} + \text{к.с.},$$

где, в отличие от (6.2.6), величины $K_0(\omega, t)$ и $K_1(\omega, t)$ теперь считаются случайным образом меняющимися. Учитывая (3), предполагаем, что изменение во времени величин K_0 , K_1 и A происходит достаточно медленно:

$$\dot{x} \ll \omega_0 x \quad (x = A, K_0, K_1). \quad (6.3.5)$$

Подставив (4) в (6.2.3) и учитывая (5), получим для K_0 и K_1 следующие укороченные уравнения:

$$\dot{K}_0 + [\alpha - i(\omega_0 - \omega)] K_0 + \frac{\omega_0}{2i} A(t) K_1 = \frac{\omega_0}{2i}, \quad (6.3.6)$$

$$\dot{K}_1 + [\alpha - i(\omega_0 - \omega)] K_1 - \frac{\omega_0}{2i} A^*(t) K_0 = 0.$$

При монохроматической накачке, когда $A = me^{i\varphi_n/2} = \text{const}$ и $\dot{K}_{0,1} = 0$, система уравнений (6) совпадает с (6.2.8).

Из-за флуктуаций коэффициента передачи $K(\omega, t)$ отклик (4) ПУ на гармонический сигнал будет теперь флуктуирующим: если $\xi(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, то

$$u(t) = \frac{a_c}{2} e^{i\omega t + i\varphi} K(\omega, t) + \text{к.с.} \quad (6.3.7)$$

Из (7) видно, что среднее значение $\langle u \rangle$ выражается через моменты первого порядка K_0, K_1 ; для того чтобы найти дисперсию u , нужно знать моменты второго порядка

$$\overline{K_0^2}, \overline{K_0 K_1}, \overline{K_1^2}, \overline{|K_0^2|}, \overline{K_0 K_1^*}, \overline{|K_1^2|} \quad (6.3.8)$$

и т. д.

Если воздействие $\xi(t)$ является шумовым, то дисперсия процесса

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, t) \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = G_{\text{вх}}(\omega) \delta(\omega + \omega'),$$

может быть записана как

$$\langle \langle u^2 \rangle \rangle = 2 \int_0^{\infty} \overline{|K(\omega, t)|^2} G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (6.3.8a)$$

В (8a) двойные угловые скобки означают усреднение по двум статистическим ансамблям: внешнего шума и накачки; оба ансамбля предполагаются независимыми; $\overline{|K(\omega, t)|^2}$ выражается через последние три момента (8).

Мы приходим, таким образом, к задаче об определении моментов первого и второго порядка функций K_0 и K_1 , удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений (6) со случайно меняющимися коэффициентами $A(t)$ и $A^*(t)$. Эта задача решается точно (причем для системы из произвольного числа уравнений), если можно предположить, что все случайные коэффициенты δ -коррелированы, т. е. что время корреляции коэффициентов $A(t)$ намного меньше, чем наименьшее из времен релаксации системы:

$$\tau_k \ll \tau_{\text{рел}}^{\min}. \quad (6.3.9)$$

В рассматриваемом здесь случае $\tau_k \sim \Delta\omega_n^{-1}$, $\tau_{\text{рел}} \sim \alpha^{-1}$, так что неравенства (3) и (9) можно переписать как

$$\alpha \ll \Delta\omega_n \ll \omega_0, \quad (6.3.10)$$

т. е. спектр накачки должен быть намного шире резонансной кривой контура. Предполагая условия (10) выполненными, будем считать теперь в уравнениях (6) процесс $A(t)$ комплексным белым шумом:

$$\langle A \rangle = 0, \quad \langle AA_{\tau} \rangle = 0, \quad \langle AA_{\tau}^* \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (6.3.11)$$

где корреляционную постоянную D следует определить из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{AA_{\tau}^*} d\tau = 2D,$$

в левую часть которого подставляется истинная корреляционная функция комплексной амплитуды накачки.

Рассмотрим, например, как находятся первые моменты K_0 и K_1 . Усреднив (6), будем иметь

$$\dot{K}_0 + [\alpha - i(\omega_0 - \omega)] K_0 + \frac{\omega_0}{2i} \overline{AK_1} = \frac{\omega_0}{2i}, \quad (6.3.12)$$

$$\dot{K}_1 + [\alpha - i(\omega_0 - \omega)] K_1 - \frac{\omega_0}{2i} \overline{A^*K_0} = 0.$$

Чтобы решить (12), средние $\overline{AK_1}$ и $\overline{A^*K_0}$ нужно выразить через K_0 и K_1 . Для этого, используя динамические уравнения (6), выделим ту компоненту, например K_0 , которая линейна по интегралам от случайных коэффициентов уравнений (см. (1.7.20))

$$\dot{K}_0^{(k)} = -\frac{\omega_0}{2i} K_1 A(t), \quad K_0^{(k)} = -\frac{\omega_0}{2i} K_1 \hat{A}, \quad \hat{A} = \int_{t_0 < t} A(\theta) d\theta. \quad (6.3.13)$$

Только эта компонента K_0 коррелирует со случайными коэффициентами $A_1(t)$ и $A_1^*(t)$ в (6). Используя (13), находим с учетом (11)

$$\langle A^* K_0 \rangle = \langle A^* K_0^{(k)} \rangle = -\frac{\omega_0}{2i} K_1 D. \quad (6.3.14)$$

Для функции K_1 находим аналогично

$$K_1^{(k)} = \frac{\omega_0}{2i} \bar{K}_0 A, \quad \langle A K_1 \rangle = \langle A K_1^{(k)} \rangle = \frac{\omega_0}{2i} \bar{K}_0 D. \quad (6.3.15)$$

Подставив (14) и (15) в (12), получим замкнутые уравнения для первых моментов:

$$\begin{aligned} \dot{K}_0 + \left[\alpha - \frac{\omega_0^2}{4} D - i(\omega_0 - \omega) \right] \bar{K}_0 &= \frac{\omega_0}{2i}, \\ \dot{K}_1 + \left[\alpha - \frac{\omega_0^2}{4} D - i(\omega_0 - \omega) \right] \bar{K}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

из которых следует, что в установившемся режиме ($\dot{K}_{0,1} = 0$)

$$K_0 = \bar{K}(\omega, t) = \frac{\omega_0/2}{\omega_0 - \omega + i\alpha(1 - \omega_0^2 D/4\alpha)}, \quad K_1 = 0. \quad (6.3.17)$$

Согласно (4) и (17) сигнал на выходе ПУ будет следующим:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{a_c}{2} e^{i\omega t + i\varphi} \bar{K}(\omega, t) + \text{к.с.} = \\ &= \frac{a_c \omega_0}{2} \frac{1}{V(\omega_0 - \omega)^2 + \alpha^2 e^2} \cos(\omega t + \varphi + \psi), \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= \arg(\omega_0 - \omega + i\alpha e_1), \\ e_1 &= 1 - \frac{\omega_0^2 D}{4\alpha} = 1 - \frac{D}{D_{\text{пор}}^{(1)}}, \quad D_{\text{пор}}^{(1)} = \frac{4\alpha}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Резонансная кривая для этого сигнала характеризуется шириной

$$\Delta\omega_{\text{ПУ}} = 2\alpha e_1, \quad (6.3.20)$$

которая уменьшается с ростом спектральной интенсивности накачки, пропорциональной D , и обращается в нуль при $D = D_{\text{пор}}^{(1)}$. Величина $D_{\text{пор}}^{(1)}$ соответствует *потере устойчивости*, т. е. обращению в ∞ первых моментов \bar{u} и \bar{K}_0 .

Заметим, что, в отличие от ПУ с монохроматической накачкой (см. § 2), здесь нет зависимости усиления от фазы φ сигнала. Это связано с отсутствием второй компоненты сигнала на холостой частоте (так как $\bar{K}_1 = 0$). Можно сказать, что холостая компонента при шумовой накачке имеет чисто флуктуационный характер.

Линейные уравнения типа (16) могут быть получены для моментов любого порядка. Заметим, что характерные параметры e_n ,

$D_{\text{пор}}^{(n)}$ и $\Delta\omega_{\text{ПУ}}^{(n)}$, вообще говоря, уменьшаются с ростом порядка момента.

Накачка с диффундирующей фазой. Эта специальная модель позволяет проанализировать параметрическое усиление в поле случайной квазигармонической накачки с произвольной шириной спектра (ср. с (10))

$$2\alpha \ll \Delta\omega_n \ll \omega_0. \quad (6.3.21)$$

Амплитуда и интенсивность накачки при этом постоянны и не случайны, а фаза образует случайный винеровский процесс:

$$A(t) = \frac{m}{2} e^{i\varphi_n(t)}, \quad m = \text{const}, \quad (6.3.22)$$

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^t \xi(\theta) d\theta,$$

$$\langle \xi \xi^*(\tau) \rangle = 2D_0 \delta(\tau). \quad (6.3.23)$$

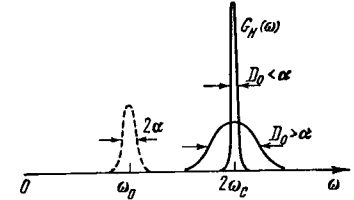


Рис. 6.5. Лоренцевский спектр $G_n(\omega)$ накачки с диффундирующей фазой.

Спектр накачки $G_n(\omega)$ может быть уже ($D_0 < \alpha$) или шире ($D_0 > \alpha$) резонансной кривой «холодного» контура, показанной пунктиром

Здесь D_0 — произвольная константа, имеющая размерность частоты. Такая накачка имеет лоренцевский спектр ширины $\Delta\omega_n = 2D_0$, симметричный относительно частоты $2\omega_0$ (рис. 6.5). Подставив (22) в уравнения (6) и полагая $K_1 = ye^{-i\varphi_n(t)}$, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с δ -коррелированным коэффициентом $\xi(t)$:

$$\dot{K}_0 + (\alpha - i\delta) K_0 + \frac{\omega_0 m}{4i} y = \frac{\omega_0}{2i}, \quad (6.3.24)$$

$$\dot{y} + [\alpha - i\delta - i\xi(t)] y - \frac{\omega_0 m}{4i} K_0 = 0,$$

где $\delta = \omega_0 - \omega$. Отсюда методом, использованным в предыдущем разделе, можно получить точные уравнения для \bar{K}_0 и \bar{y} . Уравнение для \bar{K}_0 будет следующим:

$$\dot{\bar{K}}_0 + \left(\alpha - i\delta - \frac{\omega_0^2 m^2}{16} \frac{1}{\alpha + D_0 - i\delta} \right) \bar{K}_0 = \frac{\omega_0}{2i}. \quad (6.3.25)$$

Согласно (25) при нулевой расстройке ($\delta = 0$) и стационарном режиме усиления ($\dot{\bar{K}}_0 = 0$)

$$\bar{K}_0 = \frac{\omega_0}{2i\alpha} \frac{1}{1 - (m/m_{\text{пор}})^2}, \quad (6.3.26)$$

где

$$m_{\text{пор}} = \frac{4\alpha}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{D_0}{\alpha}} = \frac{2}{Q_0} \sqrt{1 + \frac{D_0}{\alpha}}. \quad (6.3.27)$$

Сравнение выражений (6.2.12) и (27) для критического значения коэффициента модуляции показывает, что расширение спектра

накачки увеличивает $m_{\text{пор}}$ в $\sqrt{1 + D_0/\alpha}$ раз, где D_0/α — отношение ширины спектра накачки к ширине резонансной кривой контура.

Широкополосная накачка. Проведенный выше анализ относился к узкополосной случайной накачке ($\Delta\omega_n \ll \omega_0$), спектры которой схематически представлены кривыми на рис. 6.5 и 6.6 (область б). Используя в принципе ту же методику, можно рассмотреть и широкополосную накачку, для которой

$$\Delta\omega_n \gg \omega_0; \quad (6.3.28)$$

ее спектр $G_n(\omega) = \text{const}$ показан на рис. 6.6.

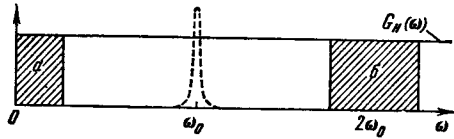


Рис. 6.6. Спектр δ -коррелированной накачки, $G_n(\omega) = D/\pi$.

Выделены стабилизирующая низкочастотная (а) и дестабилизирующая высокочастотная (б) части спектра. Пунктиром показана резонансная кривая «холодного» резонатора

Будем теперь исходить не из укороченных уравнений (6), а из полного уравнения (6.2.3):

$$\dot{u} + 2\alpha u + \omega_0^2 [1 + \xi(t)] u = \omega_0^2 \mathcal{E}(t), \quad (6.3.29)$$

где теперь с учетом (28) функцию $\xi(t)$ можно считать вещественным белым шумом:

$$\bar{\xi} = 0, \quad \overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau). \quad (6.3.30)$$

Полагая $\dot{u} = x$, перепишем (29) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = \omega_0^2 \mathcal{E}(t) - 2\alpha x - \omega_0^2 [1 + \xi(t)] u, \quad \dot{u} = x. \quad (6.3.31)$$

Система уравнений (31) того же вида, что и (6) или (24). Однако структура (31) такова, что коррелировать с ξ будет лишь компонента x , равная $x^{(k)} = \omega_0^2 \bar{u} \xi$, $\bar{\xi} = \int_{t_0 < \theta < t} \xi(\theta) d\theta$, а $u^{(k)} = 0$. Поэтому

$\bar{\xi} u = 0$, так что, усредняя (31) по ансамблю ξ , получим

$$\dot{\bar{x}} = -2\alpha \bar{x} - \omega_0^2 \bar{u} + \omega_0^2 \mathcal{E}(t), \quad \dot{\bar{u}} = \bar{x},$$

или

$$\ddot{\bar{u}} + 2\alpha \dot{\bar{u}} + \omega_0^2 \bar{u} = \omega_0^2 \mathcal{E}(t). \quad (6.3.32)$$

Мы получили несколько неожиданный результат: согласно (32) накачка типа белого шума вообще не влияет на величину \bar{u} . Это на первый взгляд не согласуется с полученной ранее картиной:

как выражение (18), так и (26), наоборот, показывают, что накачка существенно влияет на величину \bar{u} , а при некотором критическом уровне приводит к потере устойчивости ($\bar{u} \rightarrow \infty$).

Чтобы разобраться в этом парадоксе, рассмотрим еще один вид шумовой накачки — низкочастотную.

Низкочастотная шумовая накачка. В отличие от ранее рассмотренного случая $\omega_n \approx 2\omega_0$, предположим теперь, что

$$\omega_n \approx 0, \quad \Delta\omega_n \ll \omega_0, \quad (6.3.33)$$

т. е. спектр накачки $\xi(t)$ расположен в области низких частот (рис. 6.6, область а). Условие (33) дает возможность от точного уравнения параметрической системы

$$\ddot{u} + 2\alpha \dot{u} + \omega_0^2 [1 + \xi(t)] u = \omega_0^2 \mathcal{E}(t)$$

перейти к укороченному, полагая

$$\mathcal{E} = e^{i\omega t} (\omega \approx \omega_0), \quad u = e^{i\omega t} K(\omega, t)$$

и считая $K(\omega, t)$ медленно меняющейся случайной функцией ($\dot{K} \ll \omega_0 K$). В результате получим уравнение для $K(\omega, t)$ следующего вида:

$$\dot{K} + \left[\alpha - i\delta + \frac{\omega_0}{2i} \xi(t) \right] K = \frac{\omega_0}{2i}, \quad \delta = \omega_0 - \omega. \quad (6.3.34)$$

Если спектр накачки значительно шире резонансной кривой контура, то процесс ξ в (34) можно считать δ -коррелированным ($\overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau)$). Тогда

$$K^{(k)} = -\frac{\omega_0}{2i} K \int_{t_0 < \theta < t} \xi(\theta) d\theta, \quad \overline{\xi K} = \overline{\xi K^{(k)}} = -\frac{\omega_0}{2i} D \overline{K}.$$

Учитывая этот результат и усредняя (34), получим следующее уравнение для \bar{K} :

$$\dot{\bar{K}} + \left(\alpha + \frac{\omega_0^2 D}{4} - i\delta \right) \bar{K} = \frac{\omega_0}{2i}. \quad (6.3.35)$$

Мы видим, что действие низкочастотной накачки оказывается принципиально другим, чем высокочастотной: она создает положительную добавку к α , т. е. как бы увеличивает собственные потери контура. Можно сказать, что низкочастотная шумовая накачка стабилизирует систему, в то время как высокочастотная — ее дестабилизировала.

Заметим, что этот результат можно было бы предвидеть, так как в рассматриваемом случае ω_n удовлетворяет соотношению (6.1.3а) $\omega_n \approx \omega_0 - \omega \approx 0$, а не (6.1.3) $\omega_n \approx \omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$.

Стохастическая нестабильность и стохастическая стабилизация. Теперь можно объяснить, почему широкополосная накачка не влияет на величину $\bar{K}(\omega, t)$, хотя высокочастотная приводит к

росту \bar{K} и даже к обращению K в ∞ (см. предыдущий раздел). На рис. 6.6 показан спектр широкополосной накачки. Заметное влияние на \bar{K} могут оказывать низкочастотная и высокочастотная области этого спектра, отмеченные на рис. 6.6 штриховкой. Но область a дает положительную поправку $\omega_0^2 D/4$ к коэффициенту потерь α , а область b — такую же по величине, но отрицательную (см. (17) и (35)). В результате обе поправки взаимно компенсируются и не влияют на величину \bar{K} .

Итак, изменение параметров системы по случайному закону может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние. Потеря устойчивости, обусловленная случайным изменением параметров системы, встречается во многих колебательных и волновых задачах (параметрическое взаимодействие, вынужденное комбинационное рассеяние света и т. п.). Это явление иногда называют стохастической нестабильностью.

По аналогии, в тех случаях, когда в результате случайной модуляции устойчивость возрастает, можно говорить о стохастической стабилизации.

Простые оценки порога неустойчивости при шумовой накачке. Нормированная резонансная кривая контура может быть записана как

$$\alpha^2 / [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2].$$

Рассмотрим фильтр, настроенный на частоту накачки, но по форме резонансной кривой $|K(\omega)|^2$ идентичный с контуром:

$$|K(\omega)|^2 = \alpha^2 / [\alpha^2 - (\omega - 2\omega_0)^2].$$

Если представить, что накачка $\xi(t)$, имеющая спектр интенсивности $G_H^+(\omega)$, подана на вход этого фильтра, то средняя интенсивность процесса на его выходе будет равна

$$\sigma^2 = \int_0^\infty G_H^+(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.3.36)$$

Наглядный смысл дисперсии (36) состоит в том, что она характеризует среднестатистическую величину интенсивности накачки в полосе частот, равной полосе пропускания контура.

На примере уравнения

$$\ddot{v} + 2\alpha\dot{v} + \omega_0^2 [1 + \xi(t)] v = \omega_0^2 \varepsilon(t)$$

оценим теперь критическую величину интенсивности (36), соответствующую потере устойчивости в одноконтурном ПУ для трех уже рассмотренных видов накачки:

(а) гармонической

$$\xi(t) = m \cos(2\omega_0 t + \varphi_H); \quad (6.3.37)$$

(б) квазигармонической

$$\xi(t) = m(t) \cos[2\omega_0 t + \varphi_H(t)] = A(t) e^{i2\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad (6.3.38)$$

спектр которой значительно шире резонансной кривой контура:

$$\Delta A/A \sim \Delta\omega_H, \quad \alpha \ll \Delta\omega_H \ll \omega_0; \quad (6.3.39)$$

(в) квазигармонической с диффузией фазы

$$\xi(t) = m \cos[2\omega_0 t + \varphi_H(t)], \quad (6.3.40)$$

спектр которой может быть произвольной ширины:

$$\alpha \leq \Delta\omega_H \ll \omega_0.$$

Для гармонической накачки (37)

$$G_H^+(\omega) = \frac{m^2}{2} \delta(\omega - 2\omega_0)$$

и согласно (36) $\sigma^2 = m^2/2$. Подставив сюда $m = m_{\text{пор}} = 2/Q$, получим

$$\sigma_{\text{пор}}^2 = 2/Q^2 \quad (\text{а}). \quad (6.3.41)$$

Спектр квазигармонической накачки (38) предполагался почти не меняющим своей величины при изменениях частоты порядка α (см. (39)), так что при интегрировании в (36) функцию $G_H^+(\omega)$ можно считать постоянной:

$$\sigma^2 \approx G_H^+(2\omega_0) \int_0^\infty |K(\omega)|^2 d\omega = \alpha \pi G_H^+(2\omega_0). \quad (6.3.42)$$

Учитывая (11), выражение (42) можно переписать как

$$\sigma^2 \approx 2\alpha D. \quad (6.3.43)$$

Согласно (19) пороговое значение константы D равно

$$D_{\text{пор}}^{(1)} = 4\alpha/\omega_0^2. \quad (6.3.44)$$

Подстановка (44) в (43) дает величину

$$\sigma_{\text{пор}}^2 = 2\alpha D_{\text{пор}}^{(1)} = 2/Q^2 \quad (\text{б}), \quad (6.3.45)$$

совпадающую с (41).

Наконец, накачка с диффундирующей фазой (40) имеет спектр интенсивности

$$G_H^+(\omega) = \frac{m^2 D_0}{2\pi} \frac{1}{D_0^2 + (\omega - 2\omega_0)^2}.$$

Подставив это выражение в (36) и интегрируя, получим

$$\sigma^2 = \frac{m^2}{2} \frac{1}{1 + D_0/\alpha}.$$

Но в этом случае согласно (27)

$$m_{\text{пор}} = \frac{2}{Q} \sqrt{1 + D_0/\alpha},$$

так что опять

$$\sigma_{\text{пор}}^2 = \frac{m_{\text{пор}}^2}{2} \frac{1}{1 + D_0/\alpha} = \frac{2}{Q^2} \quad (\text{в}). \quad (6.3.46)$$

Устойчивость результата $\sigma_{\text{пор}}^2 = 2/Q^2$ показывает, что им, по-видимому, можно пользоваться для оценки критической интенсивности накачки для спектров $G_n^+(\omega)$ различной формы.

§ 4. Эффекты насыщения

Двухконтурный параметрический генератор. Если интенсивность накачки превышает пороговое значение (6.3.46), то происходит потеря устойчивости и система становится параметрическим генератором. Ограничение амплитуды нарастающих колебаний (насыщение) происходит, очевидно, за счет обратной

реакции их на накачку. В этих условиях параметрические колебания на частотах ω_1 и ω_2 и колебания накачки становятся равноправными, и задача сводится к исследованию взаимодействия колебаний на трех частотах ω_1 , ω_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ на нелинейном элементе, например нелинейной емкости, заряд на которой равен

$$q = c_0 u + c_1 u^2 + \dots$$

Рассмотрим колебания в схеме так называемого двухконтурного параметрического генератора (ПГ), изображенного на рис. 6.7. Мы будем рассматривать его как нелинейный усилитель монохроматического сигнала $u_{10}(t)$, настроенного в резонанс с частотой первого контура. Таким образом, в этом параграфе мы

будем считать, что генератор возбуждается от внешнего постоянно действующего сигнала, а не в результате некоего начального отклонения от положения равновесия (см. § 6 гл. 1). Если сигнал относительно мал ($u_{10} \ll u_{30}$), то обе модели возбуждения в области выше порога генерации дают примерно одинаковую картину колебаний, особенно при шумовой накачке, которая рассматривается ниже.

Амплитудные уравнения. Считая контуры высокодобротными, будем предполагать, что каждое из колебаний является узкополосным случайным процессом:

$$u_n = A_n(t) e^{i\omega_n t} + \text{к. с.}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (6.4.1)$$

причем амплитуды характеризуются относительно медленным изменением во времени:

$$A_n/A_n \ll \omega_n. \quad (6.4.2)$$

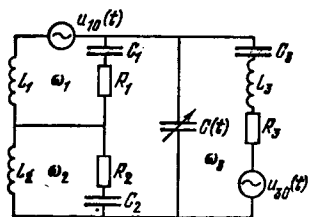


Рис. 6.7. Схема параметрического генератора.

В отличие от схемы параметрического усилителя (рис. 6.1), закон изменения емкости $C(t)$ теперь заранее не известен: он определяется с учетом обратной реакции колебаний в контурах ω_1, ω_2 на колебания в контуре накачки ω_3 .

Узость спектров колебаний (1) позволяет вместо точных уравнений для $u_n(t)$ вида (6.2.21) использовать при описании рассматриваемой системы укороченные уравнения для $A_n(t)$, аналогичные (6.3.6) или (6.3.12):

$$A_1 + \alpha_1 A_1 = \beta_1 A_2 A_3^* + \alpha_1 A_{10}(t), \quad (6.4.3a)$$

$$A_2 + \alpha_2 A_2 = \beta_2 A_1 A_3^*, \quad (6.4.3б)$$

$$A_3 + \alpha_3 A_3 = -\beta_3 A_1 A_2 + \alpha_3 A_{30}(t). \quad (6.4.3в)$$

В этих уравнениях $A_{10}(t)$ и $A_{30}(t)$ являются заданными функциями времени: $A_{10}(t)$ описывает усиливаемый сигнал, а $A_{30}(t)$ — напряжение накачки. Постоянные α_n равны полуширине частотной области резонанса n -го контура, коэффициенты при нелинейных членах $\beta_n \sim \omega_n$.

Подстановка

$$A_1 = \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\beta_2 \beta_3} \right)^{1/2} a_1, \quad A_2 = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\beta_1 \beta_3} \right)^{1/2} a_2, \quad A_3 = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} \right)^{1/2} a_3 \quad (6.4.4)$$

приводит (3) к виду

$$T_1 \dot{a}_1 + a_1 = a_3 a_2^* + a_{10}(t), \quad (6.4.5a)$$

$$T_2 \dot{a}_2 + a_2 = a_3 a_1^*, \quad (6.4.5б)$$

$$T_3 \dot{a}_3 + a_3 = -a_1 a_2 + a_{30}(t), \quad (6.4.5в)$$

где $T_i = \alpha_i^{-1}$.

Монохроматическая накачка. Если накачка и входной сигнал немодулированы, $a_{10}, a_{30} = \text{const}$, то, полагая в (5) $\dot{a}_n = 0$, получим

$$a_1 = \frac{a_{10}}{1 - |a_{30}^2| / (1 + |a_1^2|)^2}. \quad (6.4.6)$$

В области линейного усиления ($|a_1^2| \ll 1$) согласно (6)

$$a_1 \approx a_{10} / (1 - |a_{30}^2|), \quad (6.4.6a)$$

что соответствует (6.2.26). Таким образом, в принятой нормировке (4) пороговая интенсивность для немодулированной накачки равна единице:

$$I_{\text{пор}} = |a_{30}^2|_{\text{пор}} = 1. \quad (6.4.7)$$

В области над порогом амплитуда выходного сигнала мало зависит от относительно слабого входного сигнала и, как следует из (6),

$$|a_1^2| \approx |a_{30}| - 1. \quad (6.4.8)$$

С той же точностью уровень колебаний в контуре накачки в области над порогом остается постоянным:

$$|a_3^2| \approx 1 - |a_{10}|^2 / (|a_{30}| - 1) \approx 1 \quad (6.4.9)$$

(эффект ограничения по накачке).

Шумовая накачка — метод уравнений Дайсона. Рассмотрим теперь шумовую накачку, полагая, что в уравнении (5в) $a_{30}(t) = \xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектром $G(\omega)$. Амплитуду входного сигнала a_{10} будем считать для простоты постоянной. Для получения приближенных уравнений для средних мы используем метод уравнений Дайсона, рассмотренный в гл. 1.

Как видно из структуры уравнений (5), амплитуда a_1 является четной функцией ξ , а a_2 и a_3 — нечетными. Отсюда следует, что отличное от нуля среднее значение имеет лишь амплитуда a_1 :

$$a_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}'_1, \quad a_2 = \bar{a}_2, \quad a_3 = \bar{a}_3,$$

причем

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1^{(2)} + \bar{a}_1^{(4)} + \dots, \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_2^{(1)} + \bar{a}_2^{(3)} + \dots, \quad \bar{a}_3 = \bar{a}_3^{(1)} + \bar{a}_3^{(3)} + \dots,$$

где верхний индекс означает порядок по ξ .

Будем искать \bar{a}_1 . Проведя усреднение уравнения (5а), получим

$$\bar{a}_1 = \langle \bar{a}_3 \bar{a}_2^* \rangle + a_{10}. \quad (6.4.10)$$

Учитывая, далее, в (5б) и (5в) лишь флуктуационные члены первого порядка по ξ , получим два флуктуационных уравнения:

$$T_2 \dot{\bar{a}}_2^{(1)} + \bar{a}_2^{(1)} = \bar{a}_3^{(1)} \bar{a}_1^*, \quad T_3 \dot{\bar{a}}_3^{(1)} + \bar{a}_3^{(1)} = -\bar{a}_1 \bar{a}_2^{(1)} + \xi(t). \quad (6.4.11)$$

Подставляя в (11) выражения для $\bar{a}_2^{(1)}$ и $\bar{a}_3^{(1)}$ в виде интегралов Фурье

$$\bar{a}_n^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} a_{n\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega,$$

получим

$$a_{2\omega} = \frac{\bar{a}_3^* \xi_{\omega}}{(1+i\omega T_2)(1+i\omega T_3) + |\bar{a}_1|^2}, \quad (6.4.12)$$

$$a_{3\omega} = \frac{(1+i\omega T_2) \xi_{\omega}}{(1+i\omega T_2)(1+i\omega T_3) + |\bar{a}_1|^2}.$$

Теперь можно найти входящую в (10) величину

$$\langle \bar{a}_3 \bar{a}_2^* \rangle \approx \langle \bar{a}_3^{(1)} \bar{a}_2^{(1)*} \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' e^{i(\omega-\omega')t} \langle a_{2\omega} a_{2\omega'}^* \rangle. \quad (6.4.13)$$

Подставив (12) в (13) и учитывая, что $\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'}^* \rangle = G(\omega) \delta(\omega - \omega')$, получим

$$\langle \bar{a}_3 \bar{a}_2^* \rangle = \bar{a}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) (1+i\omega T_2) d\omega}{|(1+i\omega T_2)(1+i\omega T_3) + |\bar{a}_1|^2|^2}. \quad (6.4.14)$$

Подставив, наконец, (14) в (10), получим искомое уравнение для \bar{a}_1 :

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{|(1+i\omega T_2)(1+i\omega T_3) + |\bar{a}_1|^2|^2} + a_{10}. \quad (6.4.15)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. *Узкий спектр накачки.* В предельном случае бесконечно узкого спектра накачки имеем $G(\omega) = |\bar{a}_{30}^2| \delta(\omega)$. В результате уравнение (15) примет вид

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{a}_1 |\bar{a}_{30}^2|}{(1+|\bar{a}_1|^2)^2} + a_{10}.$$

Это уравнение, как легко убедиться, в точности совпадает с (6), если заманить средние величины на мгновенные: $\bar{a}_1 \rightarrow a_1$, $|\bar{a}_{30}^2| \rightarrow |a_{30}^2|$. Таким образом,

при превышении порога генерации в соответствии с (8)

$$|\bar{a}_1|^2 \approx (I_{30})^{1/2} - 1. \quad (6.4.16)$$

2. *Широкий спектр накачки.* Полагая в (15) $G(\omega) = G_0 = \text{const}$, получим

$$\bar{a}_1 = \frac{\pi G_0 \bar{a}_1}{(T_2 + T_3) (1 + |\bar{a}_1|^2)} - a_{10},$$

или

$$\bar{a}_1 = \frac{a_{10}}{1 - \frac{\pi G_0}{T_2 + T_3} \frac{1}{1 + |\bar{a}_1|^2}}.$$

Это выражение показывает, что в рассматриваемом случае пороговая величина спектра накачки равна

$$G_{\text{пор}} = (T_2 + T_3) / \pi \quad (6.4.17)$$

и

$$\bar{a}_1 \approx a_{10} / (1 - G_0 / G_{\text{пор}}), \quad G_0 / G_{\text{пор}} < 1; \quad (6.4.18)$$

$$|\bar{a}_1|^2 \approx G_0 / G_{\text{пор}} - 1, \quad G_0 / G_{\text{пор}} > 1$$

Таким образом, расширение спектра накачки существенно изменяет зависимость средней амплитуды \bar{a}_1 от интенсивности накачки. При узком спектре согласно (16) $\bar{a}_1 \sim I_{30}^{1/4}$; при широком спектре, как видно из (18), $\bar{a}_1 \sim \sim G_0^{1/2} \sim I_{30}^{1/2}$.

Нелинейный эффект образования провала в спектре накачки. Как следует из (12), спектр колебаний в контуре накачки имеет следующий вид:

$$G_3(\omega) = K_3(\omega)^2 G(\omega), \quad (6.4.19)$$

$$|K_3(\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 T_3^2}{|(1+i\omega T_2)(1+i\omega T_2) + |\bar{a}_1|^2|^2}. \quad (6.4.20)$$

Вид частотной функции $K_3(\omega)$ сильно зависит от величины \bar{a}_1 , т. е. в конечном счете от превышения накачки над порогом неустойчивости. Спектр $G_3(\omega)$ при $G(\omega) = G_0 = \text{const}$ показан на рис. 6.8. Анализ выражения (20) показывает, что в области малых \bar{a}_1 , когда

$$|\bar{a}_1|^2 < \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2} - 1 \quad (\beta = T_2/T_3), \quad (6.4.21)$$

функция $|K_3(\omega)|^2$ имеет максимум в нуле. При

$$|\bar{a}_1|^2 > \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2} - 1 \quad (6.4.22)$$

в нуле имеется минимум, а два симметричных максимума ($|K_3(\omega)|^2$ — четная функция ω) приходятся на частоты

$$\omega_{(\text{max})} = \pm \frac{\sqrt{R-1}}{T_2}, \quad R = \sqrt{(1+\beta + \beta |\bar{a}_1|^2)^2 - (1+\beta)^2}. \quad (6.4.23)$$

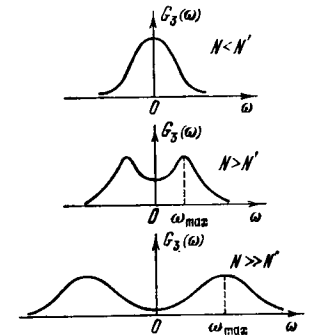


Рис. 6.8. Спектр $G_3(\omega)$ модуляции емкости $C(t)$ при широком спектре накачки (см. (19)).

$N = G_0 / G_{\text{пор}}$ — превышение спектром накачки G_0 порогового значения, соответствующего потере стабильности (в линейном приближении); N' — значение N , при котором в спектре $G_3(\omega)$ появляется провал — см. (27а).

Сами максимумы равны

$$|K_3|_{\max}^2 = \frac{R}{\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)(R-1) + \left[1 + a_1^2 + \frac{1}{\beta}(1-R)\right]^2}. \quad (6.4.24)$$

Согласно (20)

$$|K_3|_{\min}^2 = \frac{1}{1 + |a_1|^2}, \quad (6.4.25)$$

т. е. провал частотной функции в нуле углубляется с ростом a_1 . При больших a_1 из (23) и (24) находим также

$$\pm \omega_{(\max)} \sim a_1, \quad |K_3|_{\max}^2 \sim \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2. \quad (6.4.26)$$

Максимумы функции $|K_3(\omega)|^2$ не совпадают, вообще говоря, с максимумами спектра $G_3(\omega)$ (см (19)). Исключение составляет случай $G(\omega) = G_0 = \text{const}$, который мы и рассмотрим более подробно.

Интегральная интенсивность флуктуаций \tilde{a}_3

$$I_3 = 2 \int_0^{\infty} G_3(\omega) |K_3(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi G_0 (1 + \beta + \beta |a_1|^2)}{(T_2 + T_3) (1 + |a_1|^2)^2}$$

при увеличении G_0 также увеличивается, т. е. эффект ограничения интенсивности I_3 , имевший место при узком спектре накачки, в случае широкого спектра пропадает. Как следует из выражений (18) и (25), провал спектра $G_3(\omega)$ при $\omega = 0$ углубляется по мере увеличения мощности накачки:

$$G_3(0) = G_{\text{пор}}^2 / G_0. \quad (6.4.27)$$

Согласно (18) и (22) образование провала спектра в нуле имеет место лишь при достаточно большом превышении порога неустойчивости, а именно когда

$$G_0 / G_{\text{пор}} \geq \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2} = N'. \quad (6.4.27a)$$

Ширина $\Delta\omega = 2\omega_{(\max)}$ области провала с ростом мощности накачки увеличивается, поскольку, как следует из (23),

$$\omega_{(\max)} = \frac{1}{T_2} \left[\sqrt{\left(\frac{G_0}{G_{\text{пор}}} - 1\right) \left[2 + \beta \left(\frac{G_0}{G_{\text{пор}}}\right)\right] \beta - 1} \right]^{1/2} \sim \left(\frac{G_0}{G_{\text{пор}}}\right)^{1/2} \sim G_0^{1/2}. \quad (6.4.28)$$

В заключение отметим, что с увеличением G_0 остается постоянным произведение

$$G_{3\max} \cdot G_{3\min} \approx G_{\text{пор}}^2 \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2 = \text{const}$$

и

$$I_1 = I_3 \frac{\omega_1 T_1}{\omega_3 T_2}, \quad I_2 = I_3 \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad I_3 = \frac{\pi G_0 \beta}{T_2 + T_3}.$$

Провал имеется также в спектре флуктуаций \tilde{a}_2 . Согласно (12)

$$G_2(\omega) = \frac{\sigma_2 |a_1|^2 \alpha_2^2 G(\omega)}{(\alpha_2 + \alpha_2)^2 \omega^2 + (\alpha_2 \alpha_2 + \sigma_2 \sigma_3 |a_1|^2 - \omega^2)^2} = \frac{|a_1|^2 T_2 G(\omega)}{(T_2 + T_3)^2 \omega^2 + (1 + |a_1|^2 \omega^2 T_2^2 T_3^2)^2}. \quad (6.4.29)$$

Если $G = G_0$ и $G_0 / G_{\text{пор}} \geq (1 + \beta^2) / 2\beta$, то спектр $G_2(\omega)$ имеет минимум в нуле

$$G_{2\min} = \frac{|a_1|^2 G_0}{(1 + |a_1|^2)^2} \rightarrow \frac{\omega_2 T_2}{\omega_3 T_2} G_{\text{пор}}$$

и два симметричных максимума

$$G_{2\max} = \frac{|a|^2 \beta G_0}{(1 + \beta)^2 \left[\frac{G_0}{G_{\text{пор}}} - \frac{4(1 + \beta^2)}{\beta} \right]}. \quad (6.4.30)$$

Установление колебаний в параметрическом генераторе. Материал предыдущего раздела характеризует статистику установившихся колебаний в двухконтурном параметрическом генераторе.

Для того чтобы рассмотреть картину *установления* параметрических колебаний, самовозбуждающихся при $I_n > I_{\text{пор}}$, уравнения следует решить с начальными условиями при $t = 0$:

$$A_m(0) \neq 0, \quad m = 1, 2. \quad (6.4.31)$$

Надо сказать, что процесс самовозбуждения параметрического генератора обладает целым рядом особенностей по сравнению с самовозбуждением томсоновского генератора, рассмотренным в § 7 гл. 1. Например, если начальные амплитуды на обеих частотах ω_1, ω_2 отличны от нуля, то процесс самовозбуждения зависит от соотношения между начальными фазами колебаний на частотах ω_1, ω_2 и фазой накачки. Некоторые следствия этого обстоятельства для выровненного режима $\omega_1 = \omega_2 = \omega_n / 2$ обсуждаются в § 4 гл. 7.

Для монохроматической накачки, $A_{30} = \text{const}$, начальный этап процесса установления (пока амплитуду накачки можно считать не изменившейся) описывается уравнениями (3а), (3б) (затуханиями для простоты пренебрегаем):

$$\dot{A}_1 = \beta_1 A_{30} A_2^*, \quad \dot{A}_2 = \beta_2 A_{30} A_1^*. \quad (6.4.32)$$

С учетом начальных условий (31) решение имеет вид

$$A_1(t) = A_1(0) \text{ch } \Gamma t + A_2^*(0) e^{i\varphi_{30}} \sqrt{\beta_1 / \beta_2} \text{sh } \Gamma t, \quad (6.4.33)$$

$$A_2(t) = A_2(0) \text{ch } \Gamma t + A_1(0) e^{i\varphi_{30}} \sqrt{\beta_2 / \beta_1} \text{sh } \Gamma t,$$

где

$$e^{i\varphi_{30}} = A_{30} / |A_{30}|, \quad \Gamma = \sqrt{\beta_1 \beta_2 |A_{30}|^2}. \quad (6.4.34)$$

Полученные выражения показывают, что нарастание во времени колебаний происходит по экспоненциальному закону:

$$A_m(t) \sim \exp \Gamma t, \quad (6.4.35)$$

причем инкремент времениого усиления Γ пропорционален корню из интенсивности накачки:

$$\Gamma \sim \sqrt{I_n}, \quad I_n = |A_{30}|^2. \quad (6.4.36)$$

§ 5. Параметрическое усиление волн

Механизм параметрического взаимодействия волн. При определенных условиях параметрическое усиление может быть получено в распределенных системах, например в длинной линии передачи,

если ее реактивные параметры, например распределенная емкость, меняются по закону бегущей волны:

$$C = C_0 [1 + m \cos(\omega_n t - k_n z)] \quad (6.5.1)$$

(ср. с (6.2.1)). Если величина m в (1) превышает характерное пороговое значение $m_{\text{пор}}$, то в среде, описываемой (1), волны на частотах ω_1, ω_2 , удовлетворяющих условию $\omega_1 + \omega_2 = \omega_n$, могут экспоненциально нарастать в пространстве:

$$A_m(z) \sim \exp \Gamma z. \quad (6.5.2)$$

Этот процесс совершенно аналогичен экспоненциальному нарастанию во времени колебаний в двухконтурной системе при $I_n > I_{\text{пор}}$ (см. (6.4.35)). Хотя такие процессы наблюдаются в диапазоне СВЧ на длинных линиях, нагруженных полупроводниковыми диодами с $p-n$ -переходом, особое значение они имеют в оптике, и ниже основное внимание уделяется оптическим задачам [3, 17, 27–29].

В распределенных системах, точно так же как и в системах с сосредоточенными параметрами, модуляция реактивных параметров осуществляется обычно электромагнитной волной (волной накачки). В оптике бегущую волну типа (1) — здесь это, очевидно, должна быть «волна диэлектрической проницаемости»

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\omega_n t - k_n z) \quad (6.5.3)$$

— можно получить, например, если на среду, действительная часть поляризации которой квадратично зависит от напряженности светового поля:

$$P = \kappa E + \chi E^2, \quad D = \varepsilon E = E + 4\pi P, \quad (6.5.4)$$

падает интенсивная волна накачки

$$E_n(t, z) = A_n \cos(\omega_n t - k_n z). \quad (6.5.5)$$

Ниже будут детально рассмотрены различные режимы параметрического усиления волн; особый акцент будет сделан на исследовании так называемой шумовой накачки, т. е. когда $E_n(t, z)$ — плоская, случайным образом модулированная волна.

Амплитудные уравнения. Рассмотрим взаимодействие трех плоских модулированных волн в среде с квадратичной по полю нелинейностью. Полное поле в среде запишем в виде суперпозиции трех волн; нелинейность приводит к медленной (в масштабе длины волны и периода) зависимости комплексных амплитуд от координаты и времени:

$$E_{1,2}(t, z) = A_{1,2}(t, z) \exp i(\omega_{1,2} t - k_{1,2} z) + \text{к. с.}, \quad (6.5.6)$$

$$E_n(t, z) = i A_n(t, z) \exp i(\omega_n t - k_n z) + \text{к. с.} \quad (6.5.7)$$

Медленно меняющиеся комплексные амплитуды удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dA_m}{dt} \ll \omega_m A_m, \quad \frac{dA_m}{dz} \ll k_m A_m, \quad m = 1, 2, n; \quad (6.5.8)$$

индекс «н» соответствует волне накачки. Все волны распространяются слева направо параллельно оси z (рис. 6.9). Падающие на нелинейную среду волны считаются известными, т. е. все амплитуды задаются при $z=0$ как некоторые функции времени:

$$A_m(t, z=0) = A_{m0}(t). \quad (6.5.9)$$

Задача состоит в том, чтобы найти амплитуды A_m (или их статистические характеристики) в области $z > 0$, заполненной нелинейной средой.

Суммарное поле E удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (6.5.10)$$

Исходя из (10) и используя (6) — (8), можно получить уравнения, описывающие непосредственно амплитуды A_m , — так называемые укороченные уравнения. Вывод этих уравнений рассматривается в § 1 гл. 8. В случае слабонелинейной квадратичной среды (4) уравнения для амплитуд имеют вид (см. (8.1.20))

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = \beta_1 A_n A_2^* e^{-i\Delta z}, \quad (6.5.11a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = \beta_2 A_n A_1^* e^{-i\Delta z}, \quad (6.5.11b)$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial A_n}{\partial t} = -\beta_n A_1 A_2 e^{i\Delta z}. \quad (6.5.11в)$$

Постоянные $\beta_m \sim \omega_m$ в этих уравнениях определяются нелинейностью среды (см. (8.1.21)); так называемая волновая расстройка в (11) равна

$$\Delta = k_n = k_1 - k_2 \quad (6.5.12a)$$

и зависит от волновых чисел $k_m = k(\omega_m)$. Из (11) видно, что эффективное взаимодействие между волнами и, следовательно, эффективное параметрическое усиление возможно лишь при условии, что величина Δ достаточно мала. Условие $\Delta = 0$, при котором

$$k_n = k_1 + k_2 \quad (6.5.12b)$$

и взаимодействие волн наиболее эффективно, называют условием фазового синхронизма. Если же Δ велико, то правые части в

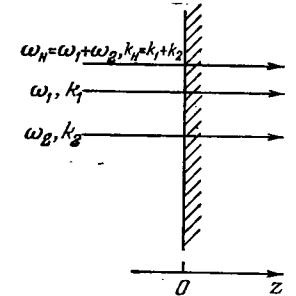


Рис. 6.9. Схема параметрического взаимодействия волн в нелинейной среде

уравнениях (11) быстро осциллируют и волны в среднем практически не взаимодействуют.

Приближение заданного поля накачки. Система уравнений (11) является нелинейной. Однако если амплитуды A_1 и A_2 малы по сравнению с A_n , то их влиянием на A_n можно пренебречь, записав уравнение (11в) приближенно как

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial A_n}{\partial t} = 0.$$

Отсюда, учитывая граничное условие (9), находим при $z > 0$

$$A_n(t, z) = A_{n0}(\theta), \quad \theta = t - z/u_n. \quad (6.5.13)$$

В этом случае амплитуда накачки в нелинейной среде является известной. Подставив (13) в (11а) и (11б), мы получим теперь систему из двух линейных относительно A_1 и A_2 уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = \beta_1 A_{n0}(\theta) A_2^* e^{-i\Delta z}, \quad (6.5.14a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = \beta_2 A_{n0}(\theta) A_1^* e^{-i\Delta z}. \quad (6.5.14б)$$

Если волны не модулированы во времени и $\Delta = 0$, то уравнения (14) принимают следующий простой вид:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \beta_1 A_{n0} A_2^*, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \beta_2 A_{n0} A_1^*. \quad (6.5.15)$$

Они являются пространственным аналогом уравнений (6.4.32), и их решение может быть записано на основании (6.4.33) как

$$A_1(z) = A_{10} \operatorname{ch} \Gamma z + A_{20}^* e^{i\varphi_{n0}} \sqrt{\beta_1/\beta_2} \operatorname{sh} \Gamma z, \quad (6.5.16)$$

$$A_2(z) = A_{20} \operatorname{ch} \Gamma z + A_{10}^* e^{i\varphi_{n0}} \sqrt{\beta_2/\beta_1} \operatorname{sh} \Gamma z,$$

где

$$e^{i\varphi_{n0}} = A_{n0}/|A_{n0}|, \quad \Gamma = \sqrt{\beta_1\beta_2 |A_{n0}|^2}. \quad (6.5.17)$$

Выражения (16) описывают пространственное усиление волн на частотах ω_1 и ω_2 . Зависимость амплитуд волн от z экспоненциальна. Согласно (17) коэффициент пространственного усиления пропорционален корню из интенсивности накачки (рис. 6.10):

$$g = \Gamma z = \sqrt{\beta_1\beta_2 |A_{n0}|^2} z \sim I_{n0}^{1/2}. \quad (6.5.17a)$$

Показав принципиальную возможность пространственного параметрического усиления, рассмотрим теперь более подробно математическое описание этого эффекта. В уравнения (14) могут быть добавлены члены $\alpha_{1,2}$, учитывающие линейное затухание волн:

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{u_{1,2}} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} + \alpha_{1,2} A_{1,2} = \beta_{1,2} A_{n0}(\theta) A_{2,1}^* e^{-i\Delta z}. \quad (6.5.18)$$

Используя подстановку $A_m = B_m \exp(-i\Delta z/2)$, уравнениям (18) можно придать вид

$$\frac{\partial B_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{u_{1,2}} \frac{\partial B_{1,2}}{\partial t} + (\alpha_{1,2} - i\Delta/2) B_{1,2} = \beta_{1,2} A_{n0}(\theta) B_{2,1}^*. \quad (6.5.19)$$

При наличии группового синхронизма ($u_1 = u_2 = u_n$) или в случае монохроматической накачки ($A_{n0} = A_{n0}^0 = \text{const}$) уравнения (19) сводятся к системе из двух уравнений с постоянными коэффициентами.

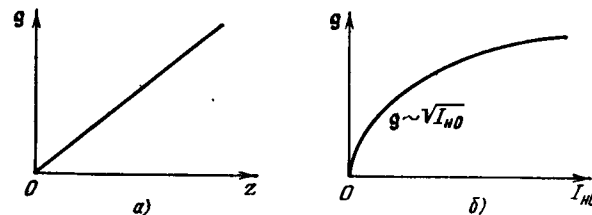


Рис. 6.10. Зависимость коэффициента усиления g при монохроматической неслучайной накачке от длины взаимодействия (а) и интенсивности накачки (б).

Запишем используемые в дальнейшем решения таких уравнений. Рассмотрим систему связанных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \quad \frac{dx_2}{dz} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2, \quad (6.5.20)$$

$$x_1 = B_1 = A_1 \exp(i\Delta z/2), \quad x_2 = B_2^* = A_2^* \exp(-i\Delta z/2).$$

Общее решение для (20), удовлетворяющее при $z=0$ граничным условиям $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, будет следующим:

$$x_1(z) = x_{10} \frac{e^{\Gamma_1 z} - m_1 m_2 e^{\Gamma_2 z}}{1 - m_1 m_2} + x_{20} \frac{e^{\Gamma_2 z} - e^{\Gamma_1 z}}{1 - m_1 m_2} m_1, \quad (6.5.21)$$

$$x_2(z) = x_{10} \frac{e^{\Gamma_1 z} - e^{\Gamma_2 z}}{1 - m_1 m_2} m_2 + x_{20} \frac{e^{\Gamma_2 z} - m_1 m_2 e^{\Gamma_1 z}}{1 - m_1 m_2},$$

причем

$$\Gamma_{1,2} = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} \mp \sqrt{\frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2}{4} + \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad (6.5.22)$$

$$m_1 = \frac{\Gamma_2 - \alpha_{22}}{\alpha_{21}} = \frac{\alpha_{12}}{\Gamma_2 - \alpha_{11}}, \quad m_2 = \frac{\Gamma_1 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\Gamma_1 - \alpha_{22}}.$$

Выражениями (21) описывается параметрическое усиление *попутных* волн. Кроме того, возможно также параметрическое усиление *встречных* волн. В последнем случае граничные условия разнесены: например, амплитуда первой волны задается при $z=0$, а амплитуда второй, которая бежит навстречу первой, — при $z=l$. Решение, удовлетворяющее таким условиям, имеет вид

$$x_1(z) = x_{10} \frac{e^{\Gamma_1 z} - e^{\Gamma_2 z} m_1 m_2 \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l}{1 - m_1 m_2 \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l} + x_{2l} \frac{(e^{\Gamma_2 z} - e^{\Gamma_1 z}) m_1 \exp \Gamma_2 l}{1 - m_1 m_2 \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l}, \quad (6.5.23)$$

$$x_2(z) = x_{10} \frac{e^{\Gamma_1 z} - e^{\Gamma_2 z} \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l}{1 - m_1 m_2 \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l} + x_{2l} \frac{(e^{\Gamma_2 z} - m_1 m_2 e^{\Gamma_1 z}) \exp \Gamma_2 l}{1 - m_1 m_2 \exp(\Gamma_1 - \Gamma_2)l}.$$

Заметим, что иногда (например, при расчете полосы пропускания параметрического усилителя — см. (43)) в (14) необходимо учесть дисперсию групповых скоростей в пределах спектра каждой из волн. Это сводится к добавлению членов со вторыми производными по времени (см. (8.1.20))

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_{1,2}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} k_{1,2}'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_{1,2} = \beta_{1,2} A_{n0}(\theta) A_{2,1}^* e^{-i\Delta z}, \quad (6.5.24)$$

где $k_{1,2}'' = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{u(\omega)} \right)_{\omega=\omega_{1,2}}$, $u(\omega)$ — групповые скорости на частотах $\omega = \omega_{1,2}$.

Вырожденный параметрический усилитель; преобразование статистики амплитуды и фазы. Рассмотрим случай, когда частоты ω_1 и ω_2 совпадают:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_n/2, \quad A_1 = A_2 = A. \quad (6.5.25)$$

Такой ПУ называется вырожденным. Согласно (16) при этом

$$A(z) = A_1(z) = A_0 \operatorname{ch} \Gamma z + A_0^* e^{i\varphi_{n0}} \operatorname{sh} \Gamma z. \quad (6.5.26)$$

Записав A_0 через квадратурные компоненты a_0 и b_0 :

$$A_0 = e^{i\varphi_{n0}/2} (a_0 + ib_0), \quad (6.5.27)$$

и подставив (27) в (26), получим

$$A(z) = e^{i\varphi_{n0}/2} [a(z) + ib(z)], \quad a(z) = a_0 e^{\Gamma z}, \quad b(z) = b_0 e^{-\Gamma z}. \quad (6.5.28)$$

Как следует из (28), вырожденный ПУ обладает следующей особенностью: в нем может усиливаться лишь одна из квадратурных компонент, а именно a_0 . Это означает также зависимость усиления от фазы входного сигнала. Действительно, полагая $A_0 = |A_0| e^{i\varphi_0}$, найдем

$$A(z) = |A_0| e^{i\varphi_{n0}/2} [e^{\Gamma z} \cos(\varphi_0 - \varphi_{n0}/2) + i e^{-\Gamma z} \sin(\varphi_0 - \varphi_{n0}/2)], \quad (6.5.29)$$

т. е. $A(z) \sim \cos(\varphi_0 - \varphi_{n0}/2)$. Напомним, что таким же свойством чувствительности к фазе сигнала обладает и одноконтурный ПУ, который может быть назван также вырожденным, поскольку для него выполнялось условие (25) (см. (6.2.17)) *).

Будем теперь считать сигнал A_0 случайным. Квадратурные компоненты a_0 и b_0 при этом случайны, и если сигнал стационарен, то $\langle a_0 \rangle = \langle b_0 \rangle = 0$, $\langle a_0^2 \rangle = \langle b_0^2 \rangle = \sigma_{10}^2$ (см. (2.3.3), (2.3.5)). Согласно (28) статистические характеристики квадратурных

* Заметим, что точным аналогом вырожденного параметрического усилителя бегущей волны оказывается одноконтурный параметрический генератор (см. § 4 гл. 7 и [18]).

компонент на выходе вырожденного ПУ будут следующими:

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0, \quad \langle a^2 \rangle = \sigma_{10}^2 e^{2\Gamma z}, \quad \langle b^2 \rangle = \sigma_{10}^2 e^{-2\Gamma z}. \quad (6.5.30)$$

Неравенство $\langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle$ означает, что на выходе ПУ образуется периодически-нестационарный случайный процесс вида (2.4.41), у которого согласно (30) и (2.4.43)

$$\sigma_0^2 = \sigma_{10}^2 \operatorname{sh} 2\Gamma z, \quad \beta_0 = \operatorname{th} 2\Gamma z.$$

Дисперсия поля $E_1(t, z) = A \exp i(\omega_1 t - k_1 z) + \text{к. с.}$ будет при этом меняться по периодическому закону (2.4.44) с частотой $\omega_n = 2\omega_1$.

Предположим теперь, что входной сигнал

$$E_1(t, 0) = \rho_0 \cos(\omega_n t/2 + \varphi_0)$$

имеет гауссовскую статистику и стационарен. В этом случае огибающая этого сигнала ρ_0 распределена по закону Рэлея, а фаза φ_0 — равномерно. Выходной процесс

$$E_1(t, z) \approx \rho \cos(\omega_n t/2 + \varphi)$$

также будет гауссовским, поскольку преобразование (28) линейно. Однако периодическая нестационарность поля $E_1(t, z)$ приводит к тому, что распределения огибающей ρ и фазы φ будут иметь вид (2.4.47) и (2.4.51) и будут отличаться, соответственно, от рэлеевского и равномерного. Это отличие растет вместе с усилением. В предельном случае большого усиления ($\Gamma z \gg 1$) распределение для ρ стремится к гауссовскому (2.4.49) на полуоси $\rho = 0$, а распределение для φ стягивается к δ -функциям (см. (2.4.40)). В этом предельном случае поле E_1 имеет вид колебания со случайной гауссовской знакопеременной амплитудой и регулярной фазой:

$$E_1(t, z) \approx a(z) \cos(\omega_n t/2 + \varphi_{n0}/2 - k_1 z), \quad a(z) = a_0 e^{\Gamma z}. \quad (6.5.31)$$

Такое изменение статистики огибающей и фазы является особенностью вырожденного ПУ.

Резонансная кривая параметрического усилителя. Усиление монохроматической волны в ПУ зависит от ее частоты. Определим эту зависимость. Рассмотрим граничные условия (9) вида

$$A_{10}(t) = A_0 e^{i\omega t}, \quad A_{20}(t) = 0, \quad A_{30} = \text{const}, \quad (6.5.32)$$

которые соответствуют усилению сигнальной волны E_1 с частотой $\omega_c = \omega_1 + \omega$. Частота ω_1 пока произвольна, но в дальнейшем мы увидим, чему должна быть равна ω_1 , чтобы она совпадала с центром резонансной кривой ПУ, когда усиление на частоте ω_1 максимально.

В результате взаимодействия сигнальной волны E_1 и волны накачки E_n в нелинейной среде возникает также холостая волна, имеющая частоту $\omega_x = \omega_n - \omega_c = \omega_2 - \omega$. Таким образом, решение

для уравнений (14) нужно искать в виде

$$A_1(t, z) = A_0 K_1(\omega, z) e^{i\omega t}, \quad A_2(t, z) = A_0^* K_2(\omega, z) e^{-i\omega t}. \quad (6.5.33)$$

Здесь K_1 и K_2 — частотные коэффициенты передачи, аналогичные коэффициентам передачи K линейных колебательных систем. В случае волновых систем коэффициент передачи, описывающий усиление, дополнительно зависит от длины z области взаимодействия волн.

Подставив (33) в (14), получим после подстановки

$$K_1 = x_1 e^{-i\Delta z/2}, \quad K_2 = x_2 e^{i\Delta z/2} \quad (6.5.34)$$

для x_1 и x_2 уравнения вида (20):

$$\frac{dx_1}{dz} + i \left(\frac{\omega}{u_1} - \frac{\Delta}{2} \right) x_1 = \beta_1 A_{н0} x_2, \quad \frac{dx_2}{dz} + i \left(\frac{\omega}{u_2} + \frac{\Delta}{2} \right) x_2 = \beta_2 A_{н0}^* x_1. \quad (6.5.35)$$

Решение этой задачи дается выражениями (21), в которых согласно (22)

$$\Gamma_{1,2} = -i \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) \mp \sqrt{\Gamma^2 - \frac{(\Delta - \omega v)^2}{4}}, \quad (6.5.36)$$

$$\Gamma^2 = \beta_1 \beta_2 |A_{н0}|^2, \quad v = 1/u_1 - 1/u_2. \quad (6.5.37)$$

За усиление ответственна вещественная часть Γ_2 , равная

$$\text{Re } \Gamma_2 = \sqrt{\Gamma^2 - (\Delta - \omega v)^2/4}. \quad (6.5.38)$$

Таким образом, усиление максимально для сигнальной частоты $\omega_{10} = \omega_1 + \Delta/v$ и, соответственно, холостой частоты $\omega_{20} = \omega_2 - \Delta/v$.

Определим теперь, какая волновая расстройка Δ соответствует резонансным частотам ω_{10} и ω_{20} . Согласно (12)

$$\begin{aligned} \Delta_0 = k(\omega_n) - k(\omega_{10}) - k(\omega_{20}) &\approx \\ &\approx k(\omega_n) - k(\omega_1) - k'(\omega_1) \frac{\Delta}{v} - k(\omega_2) + k'(\omega_2) \frac{\Delta}{v}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} k(\omega_n) - k(\omega_1) - k(\omega_2) &= k_n - k_1 - k_2 = \Delta, \\ k'(\omega_1) &= 1/u_1, \quad k'(\omega_2) = 1/u_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta_0 = \Delta - \frac{\Delta}{v} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \Delta - \Delta \frac{v}{v} = 0,$$

т. е. максимальное усиление в ПУ достигается на тех же частотах, на которых происходит обращение в нуль волновой расстройки (точно выполняется условие фазового синхронизма $\Delta = 0$).

Считая, что частота ω_1 совпадает с резонансной ($\omega_1 = \omega_{10}$), положим в (34) — (38) $\Delta = 0$. Используя (34), находим теперь,

что в случае большого усиления ($z \text{ Re } \Gamma_2 \gg 1$)

$$\begin{aligned} K_1(\omega, z) &\approx -\frac{m_1 m_2 e^{\Gamma^2 z}}{1 - m_1 m_2} = \frac{1}{2} \exp \left[-i \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) + \sqrt{\Gamma^2 - \frac{\omega^2 v^2}{4}} z \right], \\ |K_1(\omega, z)|^2 &\approx \frac{1}{4} \exp 2 \sqrt{\Gamma^2 - \frac{\omega^2 v^2}{4}} z \approx \\ &\approx \frac{1}{4} e^{2\Gamma z} \exp \left(-\frac{z v^2}{4\Gamma} \omega^2 \right), \quad \Gamma z \gg 1. \end{aligned} \quad (6.5.39)$$

Таким образом, резонансная кривая ПУ имеет форму симметричной гауссовской кривой. Из условия уменьшения величины $|K_1|^2$ в два раза относительно максимального значения получим следующее выражение для полосы пропускания ПУ:

$$\Delta \omega_{\text{ПУ}} = \frac{4 \sqrt{\ln 2}}{|v|} \sqrt{\frac{\Gamma}{z}}. \quad (6.5.40)$$

Резонансная кривая вырожденного ПУ. Выражение (40) дает в случае вырожденного ПУ ($u_1 = u_2$, $v = 0$) бесконечно широкую полосу усиления. В действительности $\Delta \omega_{\text{ПУ}}$ остается конечной, но ее величина определяется имеющейся зависимостью групповых скоростей от ω . Формула (40) эту зависимость не учитывает.

Обратимся к более точным уравнениям (37). Полагая в них $\Delta = 0$, имеем

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} - \frac{i}{2} k'' \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial t^2} = \beta A_n A_{2,1}^*. \quad (6.5.41)$$

Используя (33), получим для K_1 и K_2 следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial z} + i \left(\frac{\omega}{u} + \frac{1}{2} k'' \omega^2 \right) K_1 &= \beta A_{н0} K_2, \\ \frac{\partial K_2}{\partial z} + i \left(\frac{\omega}{u} - \frac{1}{2} k'' \omega^2 \right) K_2 &= \beta A_{н0} K_1. \end{aligned}$$

Эти уравнения того же вида, что и (20), и согласно (21) и (22) усиление связано с величиной

$$\Gamma_2 = -\frac{\omega}{u} + \sqrt{\Gamma^2 - (k'')^2 \frac{\omega^4}{4}}.$$

Из последнего выражения видно, что при большом усилении ($\Gamma z \gg 1$) резонансная кривая вырожденного ПУ дается формулой

$$|K_1(\omega, z)|^2 \sim e^{2\Gamma z} \exp \left[-\frac{z (k'')^2}{4\Gamma} \omega^4 \right]. \quad (6.5.42)$$

Используя (42), ширину области усиления можно оценить как

$$\Delta \omega_{\text{ПУ}} = 2 \sqrt[4]{\frac{4 \ln 2 \Gamma}{z (k'')^2}}. \quad (6.5.43)$$

Полосы (40) и (43) дают оценку ширины спектра шума на выходе ПУ, если случайное поле на входе $A_{m0}(t)$, $m = 1, 2$, можно считать широкополосным случайным процессом. Заметим, что согласно (40) и (43) полоса частот, в которой происходит наиболее эффективное усиление, растет при увеличении отношения Γ/z .

§ 6. Параметрическое усиление волн при некогерентной накачке

До сих пор мы предполагали, что волна накачки является строго монохроматической и неслучайной. Эта простая модель, разумеется, не всегда соответствует реальным условиям. Теперь рассмотрим более сложную задачу определения характеристик параметрического процесса, который идет в поле случайной и некогерентной накачки.

Вырожденный параметрический усилитель с шумовой накачкой, модулированной по амплитуде. В общем виде удается решить уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} = \beta A_{n0}(\theta) A^*, \quad (6.6.1)$$

описывающее вырожденный ПУ, накачка которого промодулирована только по амплитуде. Комплексную амплитуду в этом случае можно считать вещественной функцией:

$$A_{n0}(t) = A_{n0}^*(t). \quad (6.6.2)$$

Модуляцию сигнальной волны на входе ПУ будем считать произвольной: при $z = 0$

$$A = A_0(t) = a_0(t) + ib_0(t). \quad (6.6.3)$$

Полагая в (1)

$$A = a + ib, \quad (6.6.4)$$

где a и b — вещественные функции, и переходя к новым переменным

$$\eta = t - z/u, \quad \theta = t - z/u_n, \quad (6.6.5)$$

мы получим два уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = \frac{\beta}{v} A_{n0}(\theta) a, \quad \frac{\partial b}{\partial \theta} = -\frac{\beta}{v} A_{n0}(\theta) b, \quad v = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_n},$$

которые легко решаются; учитывая граничные условия (3), находим

$$a(\theta, \eta) = a_0(\eta) e^{\xi}, \quad b(\theta, \eta) = b_0(\eta) e^{-\xi}, \quad (6.6.6)$$

где

$$\xi = \frac{\beta}{v} \int_{\eta}^{\theta} A_{n0}(\theta_1) d\theta_1. \quad (6.6.7)$$

Подстановка (6) и (7) в (4) дает решение задачи в следующем виде:

$$A = a_0(\eta) e^{\xi} + ib_0(\eta) e^{-\xi}. \quad (6.6.8)$$

Решение можно получить и в более общем случае неоднородной среды или пространственно неоднородного (например, затухающего или сфокусированного) поля накачки. Эти факторы можно учесть, умножив правую часть уравнения (1) на некоторую функцию

$$F(z) = F\left(\frac{\theta - \eta}{v}\right),$$

которая затем войдет под интеграл в выражении для ξ (7).

Предположим теперь, что накачка промодулирована по амплитуде гауссовским шумом, т. е. $A_{n0}(\theta)$ — вещественный гауссовский процесс, причем

$$\langle A_{n0}(\theta) \rangle = 0, \quad \langle A_{n0}(\theta) A_{n0}(\theta + \tau) \rangle = B_{n0}(\tau) = I_{n0} R_n(\tau). \quad (6.6.9)$$

Величина ξ в (8) будет при этом тоже случайной и гауссовской (последнее — ввиду линейности выражения (7), связывающего ξ и A_{n0}), так что

$$\langle A \rangle = [a_0(\eta) + ib_0(\eta)] e^{\beta/4}, \quad (6.6.10)$$

$$\langle AA^* \rangle = [a_0^2(\eta) + b_0^2(\eta)] e^{\beta}, \quad (6.6.11)$$

где

$$\begin{aligned} g = 2 \langle \xi^2 \rangle &= 2 \frac{\beta^2}{v^2} \int_{\eta}^{\theta} \int_{\eta}^{\theta} B_n(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= 4 \frac{\beta^2}{v^2} \int_0^{|\nu|z} (|\nu|z - \tau) B_n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.6.12)$$

— экспоненциальный коэффициент усиления интенсивности сигнальной волны. Сравнивая (12) и (6.5.39), можно ввести коэффициент статистического выигрыша

$$\eta_0 = \frac{g}{2\Gamma z} = \frac{2\Gamma}{v^2 z} \int_0^{|\nu|z} (|\nu|z - \tau) R_n(\tau) d\tau, \quad (6.6.13)$$

показывающий, во сколько раз экспоненциальный коэффициент усиления при гауссовской накачке больше коэффициента усиления $2\Gamma z = 2\sqrt{\beta^2 I_{n0} z}$ при неслучайной монохроматической накачке, которая имеет ту же среднюю интенсивность, что и случайная.

Предположим, например, что шумовая накачка имеет лоренцевский спектр с шириной спектральной линии $\Delta\omega_n = 2D$. При

ЭТОМ

$$B_{н0}(\tau) = I_{н0} \exp(-D|\tau|) \quad (6.6.13a)$$

и согласно (12) и (13)

$$g = 2(\Gamma z)^2 \frac{e^{-D|v|z} - 1 + D|v|z}{(D|v|z)^2/2}, \quad (6.6.14)$$

$$\eta_0 = \Gamma z \frac{e^{-D|v|z} - 1 + D|v|z}{(D|v|z)^2/2}, \quad I = \beta \sqrt{I_{н0}}. \quad (6.6.15)$$

В предельных случаях малой и большой $\Delta\omega_n$ имеем

$$g = 2(\Gamma z)^2, \quad \eta_0 = \Gamma z, \quad D|v|z \ll 1, \quad (6.6.16)$$

$$g = \frac{4\Gamma^2 z}{D|v|}, \quad \eta_0 = \frac{2\Gamma}{D|v|}, \quad D|v|z \gg 1. \quad (6.6.17)$$

Заметим, что выражения (17) фактически соответствуют представлению накачки в виде δ -коррелированного процесса

$$\langle A_{н0}(t) A_{н0}(t+\tau) \rangle = 2\pi G_{н0} \delta(\tau) \quad (6.6.18)$$

со спектральной плотностью $G_{н0} = I_{н0}/\pi D$, соответствующей условию эквивалентности $2\pi G_{н0} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{н0}(\tau) d\tau = 2I_{н0}/D$. Действительно,

подставив (18) в (12), получим $g = 4\Gamma^2 z/D|v|$, что совпадает с (17). Выражение (14) указывает на следующую зависимость усиления от z : при малых z эта зависимость квадратична, а при больших — линейна, т. е. $g \sim z^2$, $z \ll l_{\text{ког}}$; $g \sim z - l_{\text{ког}}$, $z \gg l_{\text{ког}}$ (рис. 6.11, а, сплошная кривая). Здесь

$$l_{\text{ког}} = \frac{1}{|v|D} = \frac{2}{|v|\Delta\omega_n} \quad (6.6.19)$$

— так называемая когерентная длина. На этой длине между волнами ω_c и ω_n возникает запаздывание τ порядка времени корреляции накачки $\tau_k \sim 1/\Delta\omega_n$. Если $z \ll l_{\text{ког}}$ ($\tau \ll \tau_k$), то согласно (7) $\xi \sim A_{н0}$, в усилении участвует весь спектр накачки (*квазистатистический* режим) и вместе с z растет и η_0 . При $z > l_{\text{ког}}$ ($\tau > \tau_k$) в (7) $\xi \sim \overline{A_{н0}}$, т. е. усреднение определяется усредненным по времени $T = z|v| > \tau_k$ значением $A_{н0}(t)$ (*инерционный* режим); при этом с ростом z в процесс вовлекается все более узкая часть спектра накачки, и увеличение η_0 прекращается ($\eta_0 \rightarrow \eta_{0(\text{max})} = 2\Gamma/D|v| \geq 1$, рис. 6.11, а). Сказанное относится также к процессу генерации гармоник в диспергирующей среде (ср., например, (7) и (8.3.25)).

Из выражения (15) для η_0 следует, что при малых интенсивностях накачки более эффективной для усиления является гар-

моническая накачка, а при больших интенсивностях — шумовая:

$$\eta_0 < 1, \quad I_{н0} < I_1; \quad \eta_0 > 1, \quad I_{н0} > I_1.$$

Здесь I_1 — интенсивность накачки, при которой оба режима эквивалентны. Она определяется условием $\eta_0 = 1$; при большом усилении

$$\sqrt{I_1} = D|v|/2\beta \quad (6.6.20)$$

(рис. 6.11, б, пунктирная кривая).

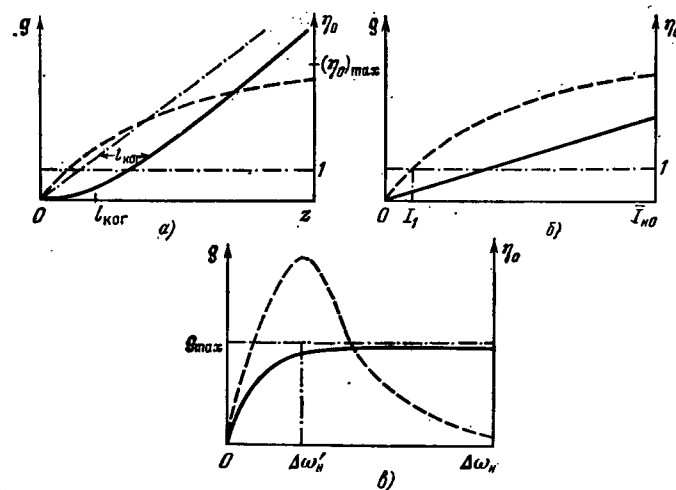


Рис. 6.11. Зависимость коэффициента усиления g (сплошные линии) и статистического выигрыша η_0 (пунктир) вырожденного ПУ со случайной амплитудно-модулированной накачкой от расстояния (а), средней интенсивности (б), ширины спектра накачки (в).

Рассмотрим теперь зависимость g и η_0 от $\Delta\omega_n$. Согласно (14) в рассматриваемом случае усиление равно

$$g = 4\beta^2 G_{н0} \frac{\pi z}{|v|} \frac{e^{-y} - 1 + y}{y}, \quad y = D|v|z, \quad (6.6.21)$$

т. е. сначала g увеличивается пропорционально полосе:

$$g \sim y \sim D = \Delta\omega_n/2,$$

но затем при достаточно больших полосах,

$$\Delta\omega_n > \frac{2}{|v|z} = \Delta\omega_n', \quad (6.6.22)$$

происходит насыщение усиления и величина g стремится к некоторому максимальному значению

$$g_{\text{max}} = \frac{4\pi\beta^2 G_{н0} z}{|v|}, \quad (6.6.23)$$

от $\Delta\omega_n$ не зависящему (рис. 6.11, в, сплошная кривая). Статистический выигрыш при $\Delta\omega_n \approx \Delta\omega'_n$ является наибольшим и стремится к нулю как в области малых, так и в области больших $\Delta\omega_n$ (рис. 6.11, в, пунктирная кривая).

Вырожденный параметрический усилитель с шумовой накачкой, модулированной по фазе. Будем исходить из уравнения (1), записанного в переменных (5):

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\beta}{\nu} A_{n0}(\theta) A^* \quad (6.6.24)$$

Считаем теперь, что

$$A_{n0}(\theta) = A_{n0}^0 \exp i\varphi(\theta), \quad A_{n0}^0 = \sqrt{I_{n0}} = \text{const}, \quad \varphi(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \xi(\theta_1) d\theta_1, \quad (6.6.25)$$

причем $\xi(t)$ является δ -коррелированным вещественным процессом:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_{\tau} \rangle = 2D\delta(\tau). \quad (6.6.26)$$

В этом случае накачка имеет экспоненциальную корреляционную функцию

$$\langle A_{n0}(\theta) A_{n0}^*(\theta + \tau) \rangle = I_{n0} \exp(-D|\tau|),$$

которой соответствует лоренцевский спектр с шириной $\Delta\omega_n = 2D$. Если в (24) сделать подстановку $A = B \exp(i\varphi/2)$, то для функции B получим уравнение

$$\dot{B} + \frac{i}{2} \xi(\theta) B = \frac{\Gamma}{\nu} B^*, \quad \Gamma = \beta A_{n0}^0, \quad \nu = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_n},$$

используя которое найдем уравнения, определяющие $x = BB^* = AA^*$ и $y = B^2$:

$$(a) \dot{x} = \frac{\Gamma}{\nu} (y^* + y), \quad (b) \dot{y} + i\xi(\theta) y = \frac{2\Gamma}{\nu} x. \quad (6.6.27)$$

Согласно (27) и (1.7.20) коррелирующая с $\xi(\theta)$ компонента y равна

$$y^{(K)} = i\gamma \int_{\eta}^{\theta} \xi(\theta_1) d\theta_1.$$

Учитывая (26), находим

$$\langle \xi(\theta) y \rangle = \langle \xi(\theta) y^{(K)} \rangle = -i\gamma 2D \int_{\eta=t-z/u}^{\theta=t-z/u_n} \delta(\theta - \theta_1) d\theta_1. \quad (6.6.28)$$

Заметим, что $\theta > \eta (u_n > u)$ и $\theta < \eta (u_n < u)$; поэтому интеграл от δ -функции в (28) будет иметь разный знак в зависимости от того, какая из групповых скоростей, u_n или u , является

наибольшей:

$$\int_{\eta}^{\theta} \delta(\theta - \theta_1) d\theta_1 = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \nu > 0, \quad u_n > u, \\ -\frac{1}{2}, & \nu < 0, \quad u_n < u. \end{cases} \quad (6.6.29)$$

Подстановка (29) в (28) дает

$$\langle \xi(\theta) y \rangle = -i\gamma D |\nu| / \nu. \quad (6.6.30)$$

Усредняя уравнения (27) и учитывая (30), получим

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\Gamma}{\nu} (\bar{y} + \bar{y}^*), \quad \dot{\bar{y}} + \frac{D|\nu|}{\nu} \bar{y} = \frac{2\Gamma}{\nu} \bar{x},$$

или, если $u = \bar{y} + \bar{y}^*$,

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\Gamma}{\nu} \bar{u}, \quad \dot{\bar{u}} = \frac{4\Gamma}{\nu} \bar{x} - \frac{D|\nu|}{\nu} \bar{u}. \quad (6.6.31)$$

Если теперь вернуться к переменным t и z и рассматривать установившийся режим, когда все производные по t равны нулю, то уравнения (31) примут вид

$$\frac{d\bar{x}}{dz} = -\Gamma \bar{u}, \quad \frac{d\bar{u}}{dz} = 4\Gamma \bar{x} - D|\nu| \bar{u}. \quad (6.6.32)$$

Здесь величина $\bar{x} = \langle AA^* \rangle = I(z)$ равна средней интенсивности усиливаемой волны, а

$$\bar{u} = \langle B^2 \rangle + \text{к. с.} = \langle A^2 \exp i\varphi(\theta) \rangle + \text{к. с.},$$

т. е. при $z=0$

$$\bar{x} = I(0), \quad \bar{u} = 0. \quad (6.6.33)$$

Решая (32) с учетом граничных условий (33), находим, используя (6.5.21),

$$I(z) = I(0) \frac{e^{\Gamma_1 z} + (\Gamma_1/\Gamma)^2 e^{\Gamma_2 z}}{1 + (\Gamma_1/\Gamma)^2}, \quad (6.6.34)$$

где

$$\Gamma_{1,2} = -D|\nu|/2 \mp \sqrt{(D|\nu|/2)^2 + 4\Gamma^2} \quad (\Gamma_1 < 0, \Gamma_2 > 0). \quad (6.6.35)$$

Выражение (34) показывает, что в ПУ с модулированной по фазе накачкой создается большое усиление, если

$$g = \Gamma_2 z = [\sqrt{(D|\nu|/2)^2 + 4\Gamma^2} - D|\nu|/2] z \gg 1, \quad (6.6.36)$$

при этом

$$I(z) \approx \frac{I(0) \exp g}{1 + (\Gamma/\Gamma_1)^2}.$$

В рассматриваемом случае в (35)

$$\Gamma^2 = \beta^2 I_{n0} = \beta^2 \pi D G_{n0}. \quad (6.6.37)$$

где $G_{н0}$ — спектральная плотность накачки, соответствующая частоте $\omega_n = 2\omega_{10}$.

Согласно (36) коэффициент статистического выигрыша при фазово-модулированной накачке равен

$$\eta_0 = \frac{g}{2\Gamma z} = \sqrt{1 + \left(\frac{D|v|}{4\Gamma}\right)^2} - \frac{D|v|}{4\Gamma}. \quad (6.6.38)$$

Определяемую выражениями (36) и (38) зависимость g и η_0 от z , $I_{н0}$ и $\Delta\omega_n$ иллюстрируют кривые на рис. 6.12. Обратим внимание на то, что эта зависимость носит совершенно другой характер,

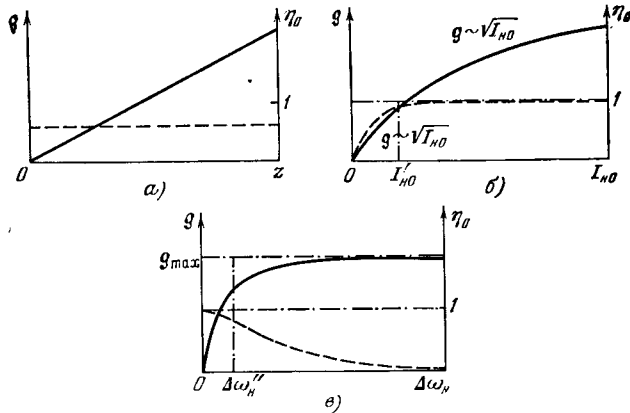


Рис. 6.12 Зависимость коэффициента усиления g (сплошные линии) и статистического выигрыша η_0 (пунктир) вырожденного ПУ со случайной фазово-модулированной накачкой от расстояния (а), интенсивности накачки (б), ширины спектра накачки (в).

чем при амплитудно-модулированной накачке (см. рис. 6.11). В частности, согласно (38) $\eta_0 \leq 1$. Отметим и следующее сходство: при расширении спектра накачки величина g стремится к постоянному значению

$$g_{\max} = \frac{4\pi\beta^2 G_{н0} z}{|v|}, \quad \Delta\omega_n \gg \Delta\omega_n', \quad (6.6.39)$$

которое не зависит от $\Delta\omega_n$ и совпадает с аналогичным значением g_{\max} (23) при амплитудно-модулированной накачке. Характерная полоса частот равна

$$\Delta\omega_n'' = \frac{64\pi\beta^2 G_{н0}}{|v|^2} = \frac{16}{|v|z} G_{\max} = 8G_{\max} \Delta\omega_n',$$

т. е. $\Delta\omega_n'' \gg \Delta\omega_n'$, где $\Delta\omega_n'$ — полоса частот (22), соответствующая насыщению усиления при амплитудно-модулированной накачке.

Точное решение амплитудных уравнений при равенстве групповых скоростей накачки и одной из волн. Уравнения (27) имеют точное аналитическое решение при любом виде функции $A_{н0}(\theta)$, если групповая скорость сигнальной или холостой волны совпадает с групповой скоростью накачки [19—21]. Мы будем считать, что

$$u_1 = u_n, \quad u_2 < u_n, \quad (6.6.40)$$

и примем для простоты $\Delta = 0$ *). Перепишем (27) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1\right) a_1 - a_{30}(\theta) a_2^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2\right) a_2 - a_{30}(\theta) a_1^* &= 0, \end{aligned} \quad (6.6.41)$$

где

$$a_1 = \sqrt{\beta_2 \beta_n} A_1, \quad a_2 = \sqrt{\beta_1 \beta_n} A_2, \quad a_3(\theta) = \sqrt{\beta_1 \beta_2} A_{н0}(\theta). \quad (6.6.42)$$

Отыскивая для уравнений (41) решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$a_m(t, z=0) = a_{m0}(t), \quad m=1, 2, \quad (6.6.43)$$

мы воспользуемся здесь методом, основанным на введении условий (43) непосредственно в сами уравнения (41) (аналогичный прием замены начальных условий эквивалентной внешней силой рассматривался в гл. 3). Для этого перейдем в (41) к новым функциям

$$a_m^+(t, z) = a_m(t, z) I(z) = \begin{cases} a_m(t, z), & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (6.6.44)$$

где $I(z)$ описывает единичный скачок. Подставив (44) в (41), получим уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1\right) a_1^+ - a_{30}(\theta) a_2^{+*} &= a_{10}(t) \delta(z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2\right) a_2^+ - a_{30}(\theta) a_1^{+*} &= a_{20}(t) \delta(z), \end{aligned} \quad (6.6.45)$$

преимущество которых перед (41) заключается в том, что их решение, совпадающее с решением (41) при $z > 0$, будет автоматически удовлетворять граничным условиям (43).

После замены переменных $\theta = t - z/u_n = t - z/u_1$, $\eta = t - z/u_2$,

$$a_m^+ = v_m \exp\left[-\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{v} t + \frac{\alpha_1}{u_2} - \frac{\alpha_2}{u_1}\right], \quad v = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} > 0, \quad (6.6.46)$$

уравнения (45) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + a_{30}(\theta) v_2^* &= -v f_1(\theta) \delta(\theta - \eta), \\ v \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - a_{30}(\theta) v_1 &= v f_2(\theta) \delta(\theta - \eta), \end{aligned} \quad (6.6.47)$$

* В общем случае $\Delta \neq 0$, а также при наличии распределенных сторонних сил решение получено в [22].

где

$$f_m(\theta) = a_{m0}(\theta) \exp \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\nu} \theta, \quad m = 1, 2.$$

Из (47) можно получить уравнение, содержащее только v_2 :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta \partial \eta} + Q(\theta) v_2 = f_3(\theta) \delta(\theta - \eta) + f_2(\theta) \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\theta - \eta), \quad (6.6.48)$$

в котором $Q(\theta) = \frac{1}{\nu^2} |a_{30}(\theta)|^2$, $f_3(\theta) = -\frac{1}{\nu} a_{30}(\theta) f_1^*(\theta)$.

Применим к (48) преобразование Фурье, полагая

$$v_2(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{2k}(\theta) e^{ik\eta} dk, \quad \delta(\theta - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\eta - \theta)} dk. \quad (6.6.49)$$

Уравнение (48) перейдет при этом в уравнение вида (3.1.27) для v_{2k} :

$$\frac{\partial v_{2k}}{\partial \theta} + \frac{Q(\theta)}{ik} v_{2k} = e^{-ik\theta} \left[\frac{f_3(\theta)}{ik} + f_2(\theta) \right],$$

которое решается точно:

$$v_{2k}(\theta) = \int_0^{\infty} \left[\frac{f_3(\theta - \theta_1)}{ik} + f_2(\theta - \theta_1) \right] \exp \left[-ik(\theta - \theta_1) - \frac{S(\theta, \theta_1)}{ik} \right] d\theta_1, \quad (6.6.50)$$

где

$$S(\theta, \theta_1) = \int_{\theta - \theta_1}^{\theta} Q(\theta_2) d\theta_2. \quad (6.6.51)$$

Подстановка (50) в (49) дает

$$v_2(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\theta_1 \left[\frac{f_3(\theta - \theta_1)}{ik} + f_2(\theta - \theta_1) \right] \exp \left[ik(\eta + \theta_1 - \theta) - \frac{S(\theta, \theta_1)}{ik} \right]. \quad (6.6.52)$$

Интегрирование по k в (52) можно выполнить в общем виде. Рассмотрим функцию

$$D(\beta, S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\beta - S/ik} dk}{ik}. \quad (6.6.53)$$

С помощью функции D решение (52) может быть представлено как

$$v_2(\theta, \eta) = \int_0^{\infty} \left[f_3(\theta - \theta_1) D + \frac{\partial D}{\partial \beta} f_2(\theta - \theta_1) \right] d\theta_1, \quad (6.6.54)$$

где $\beta = \eta + \theta_1 - \theta$, $S = S(\theta, \theta_1)$, $D = D(\beta, S)$. Согласно (53) $\frac{\partial^2 D}{\partial \beta \partial S} + D = 0$, $\frac{\partial D}{\partial \beta} \Big|_{S=0} = \delta(\beta)$, т. е.

$$D(\beta, S) = -I(-\beta) J_0(2\sqrt{\beta S}), \quad (6.6.55)$$

где J_0 — функция Бессели. Подстановка (55) в (54) дает

$$v_2(\theta, \eta) = I(\xi - \eta) \left\{ f_2(\eta) + \int_0^{\theta - \eta} S f_2(\theta - \theta_1) x^{-1} I_1(x) dx - \int_0^{\theta - \eta} f_3(\theta - \theta_1) I_0(x) d\theta_1 \right\}, \quad (6.6.56)$$

где $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя от аргумента

$$x = \frac{2}{\nu} \sqrt{(\theta - \eta - \theta_1) \int_{\theta - \theta_1}^{\theta} |a_{30}(\theta_2)|^2 d\theta_2}. \quad (6.6.57)$$

Функция v_1 находится из (56) дифференцированием в соответствии с (47). Переходя от $v_{1,2}$ к $a_{1,2}$, получим решение уравнений (41) в следующем виде: $a_1 = e^{-\alpha_1 z} a_{10}(\theta) +$

$$+ a_{30}(\theta) e^{-\alpha_1 z} \int_0^T e^{-\lambda \theta_1} \left\{ a_{10}(\theta - \theta_1) a_{30}^*(\theta - \theta_1) \frac{2(T - \theta_1) I_1(x)}{\nu^2 x} + a_{30}^*(\theta - \theta_1) \frac{I_0(x)}{\nu} \right\} d\theta_1, \quad (6.6.58)$$

 $a_2 = e^{-\alpha_2 z} a_{20}(\eta) +$

$$+ e^{-\alpha_2 z} \int_0^T e^{-\lambda \theta_1} \left\{ a_{20}(\theta - \theta_1) \frac{2S}{x} I_1(x) + a_{30}(\theta - \theta_1) a_{10}^*(\theta - \theta_1) \frac{I_0(x)}{\nu} \right\} d\theta_1, \quad (6.6.59)$$

где $\lambda = (\alpha_2 - \alpha_1)/\nu$, $T = \nu z$.При постоянных начальных амплитудах выражения (58) и (59) переходят в (6.5.16). Для простоты ограничимся случаем $a_{30} = 0$. При этом согласно (6.5.16) и с учетом нормировки (42) имеем

$$a_2(z) = a_{30} a_{10}^* \operatorname{sh} \Gamma z / \Gamma, \quad \Gamma = |a_{30}|. \quad (6.6.60)$$

С другой стороны, при $a_{m0} = \text{const}$ формула (59) дает

$$a_2(z) = e^{-\alpha_1 z} \frac{a_{30} a_{10}^*}{\nu} \int_0^T e^{-\lambda \theta_1} I_0 \left(\frac{2\Gamma}{\nu} \sqrt{(T - \theta_1) \theta_1} \right) d\theta_1.$$

Если перейти к интегрированию по углу φ , связанному с θ_1 соотношением $\theta_1 = (T/2)(1 + \cos \varphi)$, то получим

$$a_2(z) = a_{30} a_{10}^* z \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1) z \right] \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) z \cos \varphi \right] I_0(\Gamma z \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ = a_{30} a_{10}^* z \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) z \right] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{1/2}(y^{1/2})}{y^{1/4}}, \\ y = - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right)^2 z^2 - \Gamma^2 z^2$$

(ГР, с. 757) или (ГР, с. 980)

$$a_2(z) = a_{30} a_{10}^* z \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) z \right] \frac{\sin y^{1/2}}{y^{1/2}} = \\ = a_{30} a_{10}^* \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) z \right] \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\Gamma^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^2/4} z}{\sqrt{\Gamma^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^2/4}}. \quad (6.6.61)$$

В случае среды без потерь ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ — формулы (6.5.16), из которых следует (60), были получены при этом предположении) (61) совпадает с (60).

Независимость усиления от ширины спектра накачки. Используем (58) и (59), чтобы выявить основные особенности параметрического усиления воли при немонахроматической накачке. Сравним два случая:

а) накачка промодулирована только по фазе (или частоте): $A_{н0}(\theta) = \sqrt{\Gamma_{н0}} e^{i\Phi(\theta)}$;

б) накачка монохроматическая: $A_{н0} = \sqrt{\Gamma_{н0}}$.

Будем считать, что интенсивность накачки $I_{н0}$ в обоих случаях одинакова, усиление велико ($\Gamma z \gg 1$, $\Gamma = \sqrt{\beta_1 \beta_2 I_{н0}}$), а линейные потери отсутствуют ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Принимая во внимание нормировку (42), находим из (58)

$$A_1^{(a)} e^{i\Phi(\theta)} = A_1^{(6)} = \frac{\Gamma^2}{v^2} \int_0^T A_{10}(\theta - \theta_1) \frac{2(T - \theta_1)}{x} I_1(x) d\theta_1, \quad (6.6.62)$$

где $x = \frac{2\Gamma}{v} \sqrt{(T - \theta_1) \theta_1}$. Как следует из (62), интенсивности воли на выходе ПУ в обоих случаях одинаковы. Учитывая результаты, полученные для ПУ с монохроматической накачкой (см., в частности, (6.5.39) и (6.5.40)), находим, что в обоих случаях

$$(A_1 A_1^*) \approx (A_2 A_2^*) \sim e^{2\Gamma z}.$$

Таким образом можно сделать вывод, что, несмотря на расширение из-за модуляции частотного спектра накачки, создаваемое ею усиление не изменилось.

К такому же результату можно прийти и в случае накачки, модулированной произвольным образом (по амплитуде, частоте или фазе), если ее спектр достаточно широкий:

$$\Delta\omega_{н} \gg \Delta\omega_{ПУ}, \quad (6.6.63)$$

где $\Delta\omega_{ПУ}$ — полоса пропускания ПУ с монохроматической накачкой, эквивалентной шумовой по средней интенсивности. Для этой полосы были получены формулы (6.5.40) и (6.5.43). Выполнение условия (63) необходимо для того, чтобы в формулах (58) и (59) можно было пренебречь флуктуациями величины x (аналогичный вопрос в теории вынужденного комбинационного рассеяния света при немонахроматической накачке рассматривается в § 4 гл. 8).

Эффект повторения спектра и модуляции накачки. Как следует из (52), ширина спектра воли $A_1^{(6)}$ не превосходит $\Delta\omega_{ПУ}$:

$$\Delta\omega_1^{(6)} \leq \Delta\omega_{ПУ}.$$

Если переписать (62) в виде

$$A_1^{(a)} = A_1^{(6)} e^{-i\Phi(\theta)} \sim A_{н0}^*(\theta) A_1^{(6)},$$

то можно заключить, что при достаточно широкополосной накачке, когда выполнено неравенство (63), амплитуда $A_1^{(a)}$ представляет собой произведение быстро изменяющейся во времени функции $A_{н0}(\theta)$ на относительно медленную функцию $A_1^{(6)}$. Но при этом частотный спектр $A_1^{(a)}$ будет иметь примерно

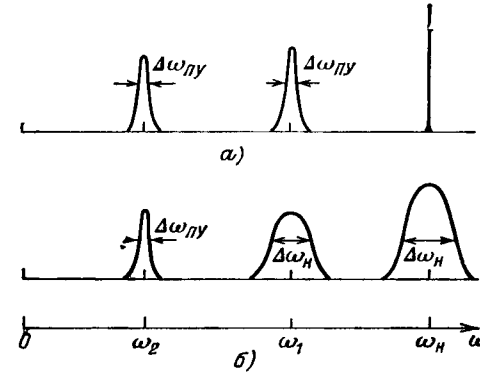


Рис. 6.13. Спектры воли на выходе параметрического усилителя при узкополосной (а) и широкополосной накачке (б) (ср. с рис. 8.12)

такую же форму, что и спектр накачки, и, в частности, ширина спектральной линии у сигнальной воли будет такой же, как у накачки:

$$\Delta\omega_1^{(a)} \approx \Delta\omega_{н} + \Delta\omega_1^{(6)} \approx \Delta\omega_{н}.$$

Для холостой воли A_2 получается другая оценка. Ее спектр слабо реагирует на расширение спектра накачки и остается узким:

$$\Delta\omega_2 \leq \Delta\omega_{ПУ}.$$

Таким образом, в процессе параметрического усиления та из волн, которая распространяется с групповой скоростью, близкой к скорости накачки, воспринимает ее спектр (рис. 6.13).

Взаимодействие встречных волн. Приведенные результаты соответствуют ситуации, когда расстройки групповых скоростей для сигнальной и холостой волн сильно различаются по величине:

$$|v_{1н}| \ll |v_{2н}|, \quad (6.6.64)$$

$$v_{1н} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{н}}, \quad v_{2н} = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_{н}}. \quad (6.6.65)$$

Ясно, что неравенство (64) всегда имеет место, если волны бегут в противоположных направлениях. Для попутной волны при этом $v_{1н} = 1/u_1 - 1/u_{н}$, а для встречной $v_{2н} = 1/u_2 + 1/u_{н}$. Поэтому можно ожидать, что широкий спектр накачки будет повторяться в спектре попутной волны, а спектр встречной волны будет оставаться узким. Такая картина действительно наблюдалась эксперимен-

тально [15]. Теория встречного и попутного взаимодействия немонхроматических волн с учетом нелинейных эффектов рассматривалась в [16].

Фоккер-планковское приближение в теории волновых процессов [23]. Анализ вырожденного ПУ показал, что при определенных условиях (заметим, разных для амплитудно-модулированной и фазово-модулированной накачки) комплексную амплитуду волны накачки $A_{н0}(\theta)$ в укороченных уравнениях (31) можно считать δ -коррелированным процессом. Это обстоятельство наводит на мысль сразу принять для накачки δ -корреляцию, т. е. использовать для анализа параметрического волнового взаимодействия так называемое фоккер-планковское приближение (см. § 7 гл. 1).

Будем исходить из уравнений (31):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \alpha_1 A_1 = \beta_1 A_{н0}(\theta) A_2^* e^{-i \Delta z}, \quad (6.6.66a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \alpha_2 A_2 = \beta_2 A_{н0}(\theta) A_1^* e^{-i \Delta z}, \quad (6.6.66b)$$

считая накачку δ -коррелированной и стационарной:

$$\begin{aligned} \langle A_{н0}(\theta) \rangle &= 0, \quad \langle A_{н0}(\theta) A_{н0}(\theta + \tau) \rangle = 0, \\ \langle A_{н0}(\theta) A_{н0}^*(\theta + \tau) \rangle &= 2\pi G_{н0} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (6.6.67)$$

Перейдем в (66a) к переменным

$$\eta_1 = t - z/u_1, \quad \theta = t - z/u_n, \quad (6.6.68)$$

а в (66b) к переменным

$$\eta_2 = t - z/u_2, \quad \theta = t - z/u_n. \quad (6.6.69)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\alpha_1}{v_1} A_1 &= \frac{\beta_1}{v_1} A_{н0}(\theta) A_2^* \exp\left[-\frac{i\Delta(\theta - \eta_1)}{v_1}\right], \\ \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\alpha_2}{v_2} A_2 &= \frac{\beta_2}{v_2} A_{н0}(\theta) A_1^* \exp\left[-\frac{i\Delta(\theta - \eta_2)}{v_2}\right], \end{aligned} \quad (6.6.70)$$

где

$$v_1 = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n}, \quad v_2 = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_n}. \quad (6.6.71)$$

Используя (70), по обычным правилам находим компоненту A_1 , коррелирующую с $A_{н0}(\theta)$ (см. (1.7.20)):

$$A_1^{(K)} = \frac{\beta_1}{v_1} A_2^* e^{-i \Delta z} \int_{\eta_1}^{\theta} A_{н0}(\theta_1) d\theta_1. \quad (6.6.72)$$

В зависимости от соотношения между групповыми скоростями u_1 и u_n может быть $\eta_1 > \theta$ (при этом $v_1 < 0$) или $\eta_1 < \theta$ (при этом

$v_1 > 0$). Мы автоматически учтем это обстоятельство, записав (72) в виде

$$A_1^{(K)} = \frac{\beta_1}{v_1} A_2^* e^{-i \Delta z} \hat{A}_{н0}, \quad A_{н0} = \int A_{н0}(\theta_1) d\theta_1 \quad (6.6.73)$$

и считая, что нижний предел интегрирования в (73) всегда меньше θ . Как следует из (73) и (67),

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_{н0}(\theta) \rangle &= \langle A_1^{(K)} A_{н0}(\theta) \rangle = 0, \\ \langle A_1 A_{н0}^*(\theta) \rangle &= \langle A_1^{(K)} A_{н0}^*(\theta) \rangle = \frac{\beta_1}{|v_1|} A_2^* e^{-i \Delta z} \pi G_{н0}. \end{aligned} \quad (6.6.74)$$

Аналогично доказывается, что

$$\langle A_2 A_{н0}(\theta) \rangle = 0, \quad \langle A_2 A_{н0}^*(\theta) \rangle = \frac{\beta_2}{|v_2|} A_1^* e^{-i \Delta z} \pi G_{н0}. \quad (6.6.75)$$

Средние (74) и (75) описывают корреляцию комплексных амплитуд с накачкой в одной и той же точке пространства и в совпадающие моменты времени. Подобным же образом можно определить корреляцию с накачкой величин, квадратичных, кубичных и более высокого порядка по амплитудам A_1 и A_2 .

Рассмотрим, например, квадратичные комбинации амплитуд. Используя (70) и переменные θ , η_1 и η_2 , нетрудно получить для них уравнения ($I_{1,2} = |A_{1,2}|^2$ — интенсивности волн)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + 2 \frac{\alpha_1}{v_1} I_1 &= \frac{\beta_1}{v_1} (A_1 A_2)^* e^{-i \Delta z} A_{н0}(\theta) |_{\eta_1} + \text{к.с.}, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \theta} + 2 \frac{\alpha_2}{v_2} I_2 &= \frac{\beta_2}{v_2} A_{н0}(\theta) (A_1 A_2)^* e^{-i \Delta z} A_{н0}(\theta) |_{\eta_2} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_1 A_2}{\partial \theta} + \left(\frac{\alpha_1}{v_1} + \frac{\alpha_2}{v_2} \right) A_1 A_2 = \frac{\beta_1}{v_1} I_2 e^{-i \Delta z} A_{н0}(\theta) |_{\eta_1} + \frac{\beta_2}{v_2} I_1 e^{-i \Delta z} A_{н0}(\theta) |_{\eta_2},$$

из которых непосредственно следует, что

$$I_1^{(K)} = \frac{\beta_1}{|v_1|} \overline{A_1 A_2^*} e^{-i \Delta z} \hat{A}_{н0} + \text{к.с.},$$

$$I_2^{(K)} = \frac{\beta_2}{|v_2|} \overline{A_1 A_2^*} e^{-i \Delta z} \hat{A}_{н0} + \text{к.с.},$$

$$(A_1 A_2)^{(K)} = \left(\frac{\beta_1}{|v_1|} I_2 e^{-i \Delta z} + \frac{\beta_2}{|v_2|} I_1 e^{-i \Delta z} \right) \hat{A}_{н0},$$

а значит,

$$\langle I_1 A_{н0}^*(\theta) \rangle = \frac{\beta_1}{|v_1|} \overline{A_1 A_2^*} e^{-i \Delta z} \pi G_{н0}, \quad (6.6.76a)$$

$$\langle I_2 A_{н0}^*(\theta) \rangle = \frac{\beta_2}{|v_2|} \overline{A_1 A_2^*} e^{-i \Delta z} \pi G_{н0}, \quad (6.6.76b)$$

$$\langle A_1 A_2 A_{н0}^*(\theta) \rangle = \left(\frac{\beta_1}{|v_1|} I_2 + \frac{\beta_2}{|v_2|} I_1 \right) e^{-i \Delta z} \pi G_{н0}. \quad (6.6.76b)$$

Уравнения для средних амплитуд и средних интенсивностей [23, 25]. Если статистически усреднить (66) и затем учесть соотношения (74) и (75), то мы получим замкнутую систему уравнений относительно первых моментов, т. е. средних амплитуд волн:

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t} + \left(\alpha_1 - \frac{\beta_1 \beta_2^*}{|v_2|} \pi G_{H0} \right) \bar{A}_1 = 0, \quad (6.6.77a)$$

$$\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t} + \left(\alpha_2 - \frac{\beta_2 \beta_1^*}{|v_1|} \pi G_{H0} \right) \bar{A}_2 = 0. \quad (6.6.77b)$$

Используя (76в), подобным же образом можно найти и уравнения для средних интенсивностей:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial I_1}{\partial t} + \left[2\alpha_1 - \frac{\operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2^*) 2\pi G_{H0}}{|v_2|} \right] I_1 = \frac{\beta_1^2 2\pi G_{H0}}{|v_1|} I_2, \quad (6.6.78)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial I_2}{\partial t} + \left[2\alpha_2 - \frac{\operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2^*) 2\pi G_{H0}}{|v_1|} \right] I_2 = \frac{\beta_2^2 2\pi G_{H0}}{|v_2|} I_1.$$

Заметим, что в полученные уравнения для средних не вошла волновая расстройка Δ . Как следует из вывода, уравнения (77) и (78) остаются справедливыми и в том случае, когда спектральная плотность накачки G_{H0} не постоянна, но меняется со временем:

$$G_{H0} = G_{H0}(\theta), \quad (6.6.79)$$

т. е. если накачка является нестационарным белым шумом, например, имеет вид шумового импульса.

Рассмотрим стационарные решения уравнений для средних. Для простоты будем считать, что линейные потери отсутствуют ($\alpha_{1,2} = 0$) и постоянные взаимодействия β_1 и β_2 вещественны. Согласно (77)

$$\bar{A}_1(z) = A_{10} \exp(\Gamma_1 z), \quad \Gamma_1 = \frac{\beta_1 \beta_2 \pi G_{H0}}{|v_2|}, \quad (6.6.80)$$

$$\bar{A}_2(z) = A_{20} \exp(\Gamma_2 z), \quad \Gamma_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 \pi G_{H0}}{|v_1|}.$$

Мы видим, что сильнее усиливается амплитуда той волны, групповая скорость которой больше отличается от скорости распространения накачки. Этот на первый взгляд странный результат станет понятен, если учесть, что усиление данной волны создается за счет взаимодействия накачки с другой волной, скорость которой в этом случае как раз оказывается более близкой к скорости накачки. Уравнения (78) для средних интенсивностей приводятся к виду (6.5.20):

$$I_1' = \alpha_{11} I_1 + \alpha_{12} I_2, \quad I_2' = \alpha_{21} I_1 + \alpha_{22} I_2, \quad (6.6.81)$$

где штрих означает дифференцирование по z и

$$\alpha_{11} = \beta_1 \beta_2 2\pi G_{H0} / |v_2|, \quad \alpha_{12} = \beta_1^2 2\pi G_{H0} / |v_1|, \\ \alpha_{21} = \beta_2^2 2\pi G_{H0} / |v_2|, \quad \alpha_{22} = \beta_1 \beta_2 2\pi G_{H0} / |v_1|.$$

Используя (6.5.21), находим

$$I_1(z) = I_{10} \frac{1 + ne^z}{1+n} + I_{20} \frac{e^{\Gamma_1 z} - 1}{1+n} \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad (6.6.82)$$

$$I_2(z) = I_{10} \frac{e^{\Gamma_2 z} - 1}{1+n} \frac{\beta_2}{\beta_1} + I_{20} \frac{e^{\Gamma_2 z} + n}{1+n},$$

где

$$n = \left| \frac{v_1}{v_2} \right|, \quad \Gamma = \beta_1 \beta_2 2\pi G_{H0} \left(\frac{1}{|v_1|} + \frac{1}{|v_2|} \right) = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2). \quad (6.6.83)$$

Таким образом, шумовая накачка (67) типа оптического белого шума создает в ПУ экспоненциальное пространственное усиление, коэффициент которого линейно зависит от z и от спектральной плотности накачки.

Как и следовало ожидать, в случае вырожденного ПУ ($v_1 = v_2 = v$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$) определяемое формулой (83) усиление

$$g = \Gamma z = \frac{4\pi \beta^2 G_{H0}}{v} z \quad (6.6.84)$$

совпадает с (23) и (39).

Корреляционные функции и спектры. Используя модель δ -коррелированной накачки, можно найти также корреляционные функции сигнальной и холостой волн и соответствующие спектры [31].

Пусть $A_{10} = 0$ и $A_{20} \neq 0$. В этом случае согласно (80) и (82)

$$\bar{A}_1 = 0, \quad I_1(z) = I_{20} \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{e^{\Gamma_2 z} - 1}{1+n}, \quad (6.6.85)$$

а корреляционная функция имеет вид

$$B_1(\tau) = \langle A_1(t, z) A_1^*(t + \tau, z) \rangle = \\ = \begin{cases} I_1(z) \frac{\operatorname{sh}[\Gamma(z - |\tau/v_1|)/2]}{\operatorname{sh}(\Gamma z/2)}, & |\tau| < z|v_1|, \\ 0, & |\tau| > z|v_1|. \end{cases} \quad (6.6.86)$$

Используя (86), находим время корреляции амплитуды A_1

$$\tau_k = \frac{1}{B_1(0)} \int_0^\infty B_1(\tau) d\tau = \frac{2|v_1|}{\Gamma} \frac{\operatorname{ch}(\Gamma z/2) - 1}{\operatorname{sh}(\Gamma z/2)} \quad (6.6.87)$$

и ее спектральную плотность

$$G_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty B_1(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \\ = \frac{I_1(z) \Gamma}{2\pi |v_1| \operatorname{sh}(\Gamma z/2)} \frac{\operatorname{ch}(\Gamma z/2) - \cos \omega z |v_1|}{(\Gamma/|v_1|)^2 + \omega^2}. \quad (6.6.88)$$

Ширину спектра (88) можно оценить как

$$\Delta\omega_1 = \frac{2}{\tau_k} = \frac{\Gamma}{|v_1|} \frac{\operatorname{sh}(\Gamma z/2)}{\operatorname{ch}(\Gamma z/2) - 1} = \begin{cases} 2/z |v_1|, & \Gamma z \ll 1, \\ \Gamma/|v_1|, & \Gamma z \gg 1. \end{cases} \quad (6.6.89)$$

Согласно (88) и (89) с увеличением z полюса $\Delta\omega_1$ уменьшается и стремится к не зависящему от z значению

$$\Delta\omega_1 = \frac{\Gamma}{v_1} = \frac{\beta_1\beta_2 2\pi G_{н0}}{v_1} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \quad (\Gamma z \gg 2). \quad (6.6.90)$$

При этом форма спектра $G_1(\omega)$ приближается к лоренцевской:

$$G_1(\omega) = \frac{I_1(z) \Gamma/2\pi |v_1|}{(\Gamma/2 |v_1|)^2 + \omega^2} \quad (\Gamma z \gg 2). \quad (6.6.91)$$

Некогерентные многофотонные параметрические процессы [32]. Исследование параметрических процессов представляет интерес в связи с проблемой создания генераторов света плавной перестройкой частоты. При многофотонном параметрическом взаимодействии, когда

$$\omega_1 + \omega_2 = k\omega_n, \quad k=2, 3, \dots,$$

диапазон изменения частот ω_1 и ω_2 наиболее значителен:

$$0 < \omega_2 < k\omega_n/2 < \omega_1 < k\omega_n.$$

В приближении заданного поля накачки многофотонный параметрический процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{u_{1,2}} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} + \alpha_{1,2} A_{1,2} = \beta_{1,2} \xi(\theta) A_{н0}^* e^{-i\Delta z}, \quad (6.6.92)$$

в которых $\xi(\theta) = A_{н0}^k(\theta)$. При использовании источников накачки ультрафиолетового или рентгеновского диапазона, когерентность которых невелика, процесс ξ можно считать оптическим белым комплексным шумом, полагая

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi^* \tau \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi^* \tau \rangle = C \delta(\tau).$$

Корреляционная постоянная C определяется из соотношения

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \langle [A_{н0}(\theta) A_{н0}^*(\theta + \tau)]^k \rangle d\tau. \quad (6.6.93)$$

Для гауссовской шумовой накачки

$$C = k! \int_{-\infty}^{\infty} B_{н0}^k(\tau) d\tau, \quad B_{н0}(\tau) = \langle A_{н0}(t) A_{н0}^*(t + \tau) \rangle \quad (6.6.94)$$

(см. (2.4.54)). В частности, если спектр накачки лоренцевский, то $B_{н0}(\tau) = I_{н0} e^{-D|\tau|}$ и согласно (94)

$$C = \frac{2(k-1)!}{D} I_{н0}^k = 2\pi^k (k-1)! D^{k-1} G_{н0}^{k-1}, \quad (6.6.95)$$

где $G_{н0}$ — спектральная плотность накачки на средней частоте ω_n . При $k=1$ согласно (95) $C = 2\pi G_{н0}$ в соответствии с (67).

Полученные ранее соотношения (74) — (91) полностью применимы для описания многофотонного процесса, если в них заменить $2\pi G_{н0}$ на C .

§ 7. Параметрические генераторы света

Взаимодействие волн в резонаторе. Проведенный в §§ 5, 6 анализ параметрического взаимодействия волн в открытом пространстве показал, что для эффективной перекачки энергии необходима достаточно длинная область взаимодействия или мощная накачка. Лишь при выполнении этих условий может быть получено большое усиление

$$g \gg 1; \quad (6.7.1)$$

напомним, что при монохроматической накачке

$$g = \sqrt{\beta_1\beta_2} I_{н0} L, \quad (6.7.2a)$$

а при случайной накачке

$$g = \beta_1\beta_2 2\pi G_{н0} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) L \quad (6.7.2b)$$

(см., например, (6.5.17) и (6.6.83)).

Для получения эффективного параметрического преобразования при малых усилениях, $g \ll 1$, нелинейную среду помещают в оптический резонатор (рис. 6.14), зеркала которого хорошо отражают излучение на частотах ω_1, ω_2 . В этом случае мы имеем дело с оптическим генератором с обратной связью; введение последней существенно меняет структуру полей на частотах ω_1, ω_2 .

Отражаясь от зеркал, волны проходят через нелинейную среду не один раз (как это было в открытом пространстве), а примерно

$$\frac{1}{1-R} \gg 1$$

раз, где R — коэффициент отражения, предполагаемый близким к единице; Соответственно эффективная длина взаимодействия волн с накачкой будет при этом значительно больше длины резонатора L :

$$L_{эфф} \sim \frac{L}{1-R} \gg L$$

При этом для получения высоких к. п. д. генерации достаточно небольшого усиления $g \ll 1$.

Устройства, в которых параметрическое возбуждение колебаний на частотах ω_1 и ω_2 происходит в нелинейной среде, помещенной в резонатор, называются параметрическими генераторами света (ПГС) [24, 26]. В зависимости от того, сколько из трех частот ω_1, ω_2 и ω_n отражается зеркалами, говорят об одно-, двух- или трехрезонаторном ПГС.

Преобразование уравнений. Допустим, что амплитуды $A = A_1, A_2, \dots$ резонирующих волн и амплитуды $A' = A'_1, A'_2, \dots$ волн полностью пропускаемые зеркалами (нерезонирующих), описываются уравнениями общего вида (6.5.11)

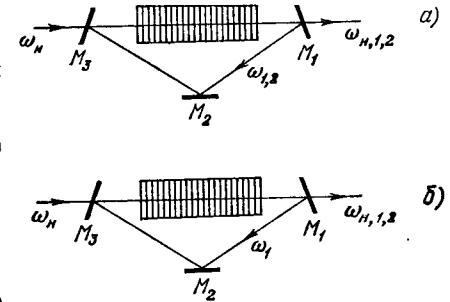


Рис. 6.14. Схема двухрезонаторного (а) и однорезонаторного (б) параметрического генератора света.

или (6.5.18):

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_n\right) A_n = f_n(A, A'), \quad (6.7.3a)$$

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_m} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_m\right) A'_m = f'_m(A, A'), \quad (6.7.3б)$$

где u — групповые скорости, α — коэффициенты потерь, f_n и f'_m — некоторые нелинейные функции амплитуд.

Нелинейные уравнения в частных производных необходимо решать с учетом отражения на зеркалах. Эта сложная задача, поддающаяся лишь численному решению, значительно упрощается, если сделать следующие предположения:

(а) A и A' пренебрежимо мало меняются за времена порядка времени пробега волн через резонатор; это значит, что можно пренебречь эффектами запаздывания;

(б) амплитуды резонирующих волн A мало изменяются по длине резонатора.

Эти условия, соответствующие резонаторам с хорошо отражающими зеркалами и не слишком мощному и достаточно длинному импульсу накачки, позволяют свести (3) к значительно более простым уравнениям, содержащим лишь производные по времени [33].

Условие (а) позволяет пренебречь в (3б) производными $\partial A'_m / \partial t$, а условие (б) — считать амплитуды резонирующих волн (и не их производные по z) не зависящими от z . Таким образом, (3б) можно заменить стационарными уравнениями

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_m\right) A'_m = f'_m(A, A'), \quad (6.7.4)$$

из которых амплитуды A' находятся как функции z и A :

$$A' = A'(z, A). \quad (6.7.5)$$

В силу условия (б) амплитуды A входят в (4) и (5) как параметры, зависящие только от времени. Подставив этот результат в (3а), получим

$$\left(\pm \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_n\right) A_n = f_n[A, A'(z, A)]. \quad (6.7.6)$$

Поскольку зависимость A_n от z несущественна (см. (б)), то ее удобно вообще исключить, усредняя (6) по области $0 < z < L$ между зеркалами резонатора. Окончательный вид уравнений для амплитуд A_n будет следующий:

$$\pm \frac{A_n(L) - A_n(0)}{L} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial}{\partial t} A_n + \alpha_n A_n = F_n(A), \quad (6.7.7)$$

где $F_n(A) = \frac{1}{L} \int_0^L f_n[A, A'(z, A)] dz$. Разность $A_n(L) - A_n(0)$ следует выразить через A_1, A_2, \dots с учетом граничных условий конкретной задачи.

Двухрезонаторный параметрический генератор света (ПГС) с монохроматической накачкой. Рассмотрим двухрезонаторный ПГС (рис. 6.14, а). Зеркала отражают в этом случае на частотах ω_1 и ω_2 , а волна накачки свободно про-

ходит через зеркала резонатора (в генераторе с обычным — не кольцевым — резонатором стоячие волны на частотах ω_1, ω_2 взаимодействуют с бегущей волной накачки). Для описания такого взаимодействия вместо уравнений для комплексных амплитуд трех бегущих в одном направлении волн, рассмотренных в предыдущем параграфе, следует записать пять уравнений, описывающих поведение волн $A_{1,2}^+$ на частотах ω_1, ω_2 , бегущих в том же направлении, что и накачка, волн $A_{1,2}^-$, бегущих в обратном направлении, и волны накачки A_H :

$$\frac{\partial A_{1,2}^+}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_{1,2}} - \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_{1,2}^+}{\partial t} + \alpha_{1,2} = \beta_{1,2} A_H A_{2,1}^{*+}, \quad (6.7.8a)$$

$$-\frac{\partial A_{1,2}^-}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_{1,2}} + \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_{1,2}^-}{\partial t} + \alpha_{1,2} A_{1,2}^- = 0, \quad (6.7.8б)$$

$$\frac{\partial A_H}{\partial z} = -\beta_H A_1^+ A_2^+. \quad (6.7.8в)$$

Для простоты мы ограничились здесь рассмотрением ПГС с кольцевым резонатором (рис. 6.14); в этом случае обратные волны распространяются вне нелинейной среды и в правые части уравнений (8) амплитуды $A_{1,2}^-$ не входят. Мы не будем также учитывать линейные потери по накачке, считая их пренебрежимо малыми ($\alpha_H = 0$).

С учетом условия (б) уравнение (8в) можно переписать как

$$\frac{\partial A_H}{\partial z} = -\beta_H A_1^+ A_2^+ \approx -\beta_H A_1 A_2, \quad (6.7.9)$$

где A_1 и A_2 зависят только от t . Интегрируя (9), мы получим

$$A_H(t, z) = A_{H0}(t) - \beta_H A_1 A_2 z, \quad (6.7.10)$$

где $A_{H0}(t)$ — заданная функция времени — амплитуда накачки на входе ПГС. Подстановка (10) в (8а) дает

$$\frac{\partial A_1^+}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_1^+}{\partial t} + \alpha_1 A_1^+ = \beta_1 [A_{H0}(t) - \beta_H A_1 A_2 z] A_2^*, \quad (6.7.11a)$$

$$-\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_1^-}{\partial t} + \alpha_1 A_1^- = 0, \quad (6.7.11б)$$

где на основании (а) считаем $\theta = t$.

При отражении от зеркал происходит изменение знака амплитуд (фазы меняются на π), так что в (11) везде, кроме членов с производными по z , можно положить $A_1^+ \approx A_1, A_1^- \approx -A_1$. В результате уравнения (11) примут вид

$$\frac{\partial A_1^+}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_1^+}{\partial t} + \alpha_1 A_1^+ = \beta_1 [A_{H0}(t) - \beta_H A_1 A_2 z] A_2^*,$$

$$\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_H}\right) \frac{\partial A_1^-}{\partial t} + \alpha_1 A_1^- = 0.$$

В этих уравнениях можно вообще исключить зависимость от z , усреднив их по длине резонатора, что эквивалентно переходу от (6) к (7). Сложив затем

оба уравнения, получим:

$$\frac{A_1^+(L) - A_1^+(0) + A_1^-(L) - A_1^-(0)}{L} + \frac{2}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} + 2\alpha_1 A_1 = \beta_1 \left[A_{H0}(t) - \beta_H A_1 A_2 \frac{L}{2} \right] A_2^* \quad (6.7.12)$$

Пусть R_{ik} — коэффициент отражения волны с частотой ω_i от зеркала M_k . Тогда в (12)

$$A_1^+(L) \approx A_1, \quad A_1^-(0) \approx -A_1, \quad A_1^+(0) = -R_{13} A_1^-(0) \approx R_{13} A_1,$$

$$A_1^-(L) = -R_{12} A_1^+(L) \approx -R_{12} A_1,$$

так что

$$\frac{A_1^+(L) - A_1^+(0) + A_1^-(L) - A_1^-(0)}{L} \approx \frac{2 - R_{12} - R_{13}}{L} A_1. \quad (6.7.13)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$2T_1 \dot{A}_1 + A_1 = \frac{\beta_1 L}{2 - R_{11} - R_{13} + 2\alpha_1 L} \left[A_{H0}(t) - \frac{\beta_H L}{2} A_1 A_2 \right] A_2^* \quad (6.7.14a)$$

Аналогичным образом можно преобразовать и уравнение (86):

$$2T_2 \dot{A}_2 + A_2 = \frac{\beta_2 L}{2 - R_{21} - R_{23} + 2\alpha_2 L} \left[A_{H0}(t) - \frac{\beta_H L}{2} A_1 A_2 \right] A_1^* \quad (6.7.14b)$$

В (14) точка означает дифференцирование по времени, времена релаксации равны

$$T_i = \frac{L/u_i}{2 - R_{i1} - R_{i3} + 2\alpha_i L}, \quad i = 1, 2.$$

Амплитуда накачки внутри резонатора дается выражением (10), в которое нужно подставить A_1 и A_2 , найденные из (14).

Как следует из (14), генерация может возникнуть лишь при условии, что интенсивность накачки превысит пороговое значение, равное

$$I_{\text{пор}} = \frac{(2 - R_{11} - R_{13} + 2\alpha_1 L)(2 - R_{21} - R_{23} + 2\alpha_2 L)}{\beta_1 \beta_2 L^2}.$$

С целью дальнейшего упрощения (14) будем считать зеркало M_3 (рис. 6.14) идеально отражающим ($R_{i3} = 1$), обозначим $R_{i1} = R_i$ и пренебрежем активными потерями волн ($\alpha_i = 0$). Учтем также, что уравнения (14) написаны для амплитуд A_i волн внутри резонатора. Вне резонатора волны, выходящие через зеркало M_1 , будут иметь амплитуды $A_1^{\text{вых}} = \sqrt{1 - R_1^2} A_1$ и $A_2^{\text{вых}} = \sqrt{1 - R_2^2} A_2$.

Нормируя $A_{1,2}^{\text{вых}}$ на пороговую интенсивность накачки, перейдем в уравнениях (14) и (10) к относительным амплитудам

$$a_1 = \frac{\sqrt{1 - R_1^2}}{\sqrt{I_{\text{пор}}}} A_1, \quad a_2 = \frac{\sqrt{1 - R_2^2}}{\sqrt{I_{\text{пор}}}} A_2, \quad a_0(t) = \frac{1}{\sqrt{I_{\text{пор}}}} A_{H0}(t).$$

Учитывая также, что $\beta_i \sim \omega_i$ (см. (8.1.21)), получим

$$2T_1 \dot{a}_1 + a_1 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \left[a_0(t) - \frac{\omega_H}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} a_1 a_2 \right] a_2^*, \quad (6.7.15a)$$

$$2T_2 \dot{a}_2 + a_2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[a_0(t) - \frac{\omega_H}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} a_1 a_2 \right] a_1^*, \quad (6.7.15b)$$

$$a_H(t, z) = a_0(t) - \frac{\omega_H z}{\sqrt{\omega_1 \omega_2} 2L} a_1 a_2. \quad (6.7.16)$$

Рассмотрим с помощью (15) и (16) некоторые характерные режимы работы ПГС.

ПГС с монохроматической накачкой. Согласно (15) и (16) в стационарном режиме генерации при немодулированной накачке интенсивности волн $I_i' = |a_i|^2$ постоянны и равны

$$I_1' = \frac{4\omega_1}{\omega_H} (\sqrt{I_{H0}' - 1}), \quad I_2' = \frac{4\omega_2}{\omega_H} (\sqrt{I_{H0}' - 1}), \quad (6.7.17)$$

$$I_H'(L) = |a_H(L)|^2 = (2 - \sqrt{I_{H0}'})^2. \quad (6.7.18)$$

При этом к. п. д. параметрического генератора будет равен

$$\eta = \frac{I_1' + I_2'}{I_{H0}'} = 4 \frac{\sqrt{I_{H0}' - 1}}{I_{H0}'}. \quad (6.7.19)$$

Зависимость η от превышения накачки порога показана на рис. 6.15, а (кривая 1). При $I_{H0}' = 4$ величина к. п. д. достигает 100%, а интенсивность излу-

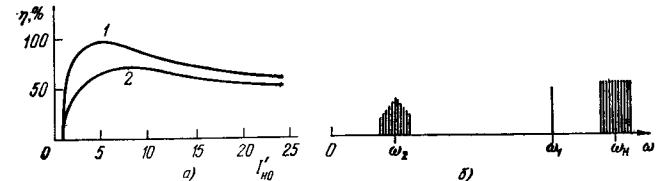


Рис. 6.15. Двухрезонаторный ПГС (схема с $\Omega T_1 \gg 1$) [34].

а) Зависимость к. п. д. генерации η от I_{H0}' при одномодовой (1) и многомодовой, $N = 11$ (2) накачке; б) спектры генерации при многомодовой накачке.

чения накачки на выходе ПГС $I_H'(L)$ обращается, соответственно, в нуль. Отметим, что интенсивность накачки равна при этом

$$I_{H0} = 4I_{\text{пор}} = \frac{4(1 - R_1)(1 - R_2)}{\beta_1 \beta_2 L^2};$$

при отсутствии зеркал такая накачка могла бы создать лишь незначительное усиление:

$$g = \sqrt{\beta_1 \beta_2 I_{\text{пор}}} L^2 = 2\sqrt{(1 - R_1)(1 - R_2)} \ll 1.$$

ПГС с многомодовой накачкой. Рассмотрим теперь более общий случай, когда амплитуда накачки на входе двухрезонаторного ПГС определяется выражением

$$a_0(t) = \sqrt{F(t)} \sum_n a_n \exp i\Omega n t, \quad \Omega \ll \Omega_{\text{рез}i}, \quad (6.7.20)$$

в котором $F(t)$ — функция, описывающая форму импульса накачки, $\Omega_{\text{рез}i}$ — интервал между собственными модами резонатора вблизи частоты ω_i , $i = 1, 2$ (см. (54)). Рассмотрим режим генерации, когда на одной из частот, например ω_1 , спектр генерации значительно уже, чем спектр накачки (20) (рис. 6.15, б).

Проанализируем сначала стационарный режим, полагая в (20) $F=1$. Решение уравнений (15) в этом случае можно представить как

$$a_i(t) = \sum a_{in} \exp i\Omega n t, \quad i=1, 2. \quad (6.7.21)$$

Узкий спектр генерации, например, на частоте ω_1 можно получить, если сделать достаточно большим соответствующее время релаксации:

$$T_1 \Omega \gg 1. \quad (6.7.22)$$

При выполнении этого условия в спектре a_1 будет существенна лишь одна мода:

$$a_1(t) \approx a_{10} = \text{const.}$$

Усреднив (15а) по периоду межмодовых биений (это усреднение обозначается волнистой чертой), мы получим

$$a_{10} = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \widetilde{a_0 a_2^*} - \frac{\omega_H}{4\omega_2} a_{10} \widetilde{a_2 a_2^*},$$

$$a_{10} = \frac{\sqrt{\omega_1/\omega_2} \widetilde{a_0 a_2^*}}{1 + \frac{\omega_H}{4\omega_2} I_2'}, \quad I_2' = \widetilde{a_2 a_2^*}. \quad (6.7.23)$$

откуда

Подставив (23) в (15б), получим для a_2 уравнение

$$2T_2 \dot{a}_2 + \left[1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right] a_2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} a_{10}^* a_1(t), \quad (6.7.24)$$

из которого можно найти связь между коэффициентами a_n и a_{2n} в (20) и (21):

$$a_{2n} = \frac{\sqrt{\omega_2/\omega_1} a_{10}^* a_n}{1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1' + i\Omega n 2T_2}. \quad (6.7.25)$$

Согласно (25)

$$I_2' = \frac{\omega_2}{\omega_1} I_1' \sum \frac{|a_n|^2}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2}. \quad (6.7.26)$$

Из (24) также следует, что

$$2I_2' \left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} (\widetilde{a_{10}^* a_0 a_2^*} + \text{к. с.}). \quad (6.7.27)$$

Комбинируя (23) и (27), получим соотношение Мэнли — Роу:

$$I_2'/\omega_2 = I_1'/\omega_1; \quad (6.7.28)$$

подставив (28) в (26), получим уравнение

$$1 = \sum_n \frac{a_n}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2}, \quad (6.7.29)$$

которое вместе с (28) в неявной форме определяет интенсивности I_1' и I_2' генерируемых волн.

При $I_1'=0$ соотношение (29) принимает вид

$$1 = \sum_n \frac{|a_n|_{\text{пор}}^2}{1 + (\Omega n 2T_2)^2} \quad (6.7.30)$$

и определяет порог генерации. Из (30) видно, что пороговая интенсивность многомодовой накачки зависит от расстояния Ω между модами, времени релаксации T_2 , а также от распределения интенсивности накачки по отдельным модам, т. е. от формы ее спектра. Поскольку

$$I'_{n0} = \sum_n |a_n|^2 \geq \sum_n \frac{|a_n|_{\text{пор}}^2}{1 + (\Omega n 2T_2)^2},$$

то

$$I'_{\text{пор}} = \sum |a_n|_{\text{пор}}^2 \geq 1,$$

т. е. порог генерации при многомодовой накачке всегда выше, чем при одномодовой.

Предположим для простоты, что число мод равно N и их интенсивности одинаковы. Тогда (29) можно переписать как

$$1 = \frac{I'_{n0}}{N} \sum \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2} \equiv \frac{I'_{n0}}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1}\right)^2} \varepsilon, \quad (6.7.31)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right)^2}{N} \sum \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2} < 1. \quad (6.7.32)$$

Из (28) и (31) находим

$$I_1' = \frac{4\omega_1}{\omega_H} (\sqrt{I'_{n0} \varepsilon} - 1), \quad I_2' = \frac{4\omega_2}{\omega_H} (\sqrt{I'_{n0} \varepsilon} - 1)$$

и

$$\eta = \frac{I_1' + I_2'}{I'_{n0}} = 4 \frac{\sqrt{I'_{n0} \varepsilon} - 1}{I'_{n0}}. \quad (6.7.33)$$

Эти выражения показывают, что при прочих равных условиях к. п. д. генерации при многомодовой накачке меньше, чем при одномодовой. Однако с ростом I'_{n0} величина ε стремится к единице, так что при больших мощностях накачки многомодовый состав ее спектра не влияет на величину к. п. д. При уменьшении расстояния между модами Ω происходит, очевидно, снижение порога и рост к. п. д. (рис. 6.15, а).

Нестационарная теория генерации — учет формы импульса многомодовой накачки. В общем случае $F(t) \neq 1$ амплитуды генерируемых волн ищем в виде

$$a_1(t) = a_{10}(t), \quad a_2(t) = \sum a_{2n}(t) \exp i\Omega n t,$$

считая $a_{10}(t)$, $a_{2n}(t)$ и $F(t)$ функциями времени, медленными по сравнению с $\exp i\Omega n t$. Согласно (15б) теперь

$$a_{2n}(t) = \frac{\sqrt{\omega_2/\omega_1} F^{1/2}(t) a_{10}^*(t) a_n}{1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1'(t) + i\Omega n 2T_2} \quad (6.7.34)$$

и уравнение (15а) принимает вид

$$2T_1 \dot{a}_{10} + a_{10} = \sqrt{\omega_1/\omega_2} a_0 \tilde{a}_2^* - (\omega_n/4\omega_2) I_2'(t) a_{10}, \quad (6.7.35)$$

где волнистая черта по-прежнему означает усреднение только по относительно быстрому межмодовому биению.

Как следует из (34),

$$\tilde{a}_0 \tilde{a}_2^* = \sqrt{\omega_2/\omega_1} F(t) a_{10}(t) \sum_n \frac{|a_n|^2}{1 + (\omega_n/4\omega_1) I_1'(t) - i\Omega n 2T_2}, \quad (6.7.36)$$

$$I_2'(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1} F(t) I_1'(t) \sum_n \frac{|a_n|^2}{\left[1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1'(t)\right]^2 + (\Omega n 2T_2)^2},$$

так что (35) можно переписать в виде

$$2T_1 \dot{a}_{10} + a_{10} = F a_{10} \sum_n \frac{|a_n|^2}{1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1' - i\Omega n 2T_2} - \frac{1}{4} \frac{\omega_n}{\omega_1} a_{10} F I_1' \sum_n \frac{|a_n|^2}{\left(1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2}. \quad (6.7.37)$$

После несложных преобразований получим следующее уравнение для I_1' :

$$T_1 \dot{I}_1' + I_1' = F(t) I_1' \sum_n \frac{|a_n|^2}{\left(1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1'\right)^2 + (\Omega n 2T_2)^2}. \quad (6.7.38)$$

Если $F(t) = 1$, то (32) переходит в (29). Согласно (32) в случае одномодовой накачки форма импульса генерации описывается уравнением

$$T_1 \dot{I}_1' + I_1' = \frac{I_1' I_{n0}'(t)}{\left(1 + \frac{\omega_n}{4\omega_1} I_1'\right)^2}, \quad (6.7.39)$$

в котором функция $I_{n0}'(t)$ дает мгновенное превышение импульсом накачки стационарного порога.

Результаты интегрирования уравнений (38) и (39) на ЭВМ при различном числе мод накачки и гауссовской форме ее импульса

$$F(t) = \exp\left[-(t-t_0)^2/t_{\text{имп}}^2\right] \quad (6.7.40)$$

приведены на рис. 6.16.

Однорезонаторный ПГС с немонахроматической накачкой. В этом случае зеркала отражают лишь волну на частоте ω_1 (рис. 6.14, б). Поступая так же,

как при анализе двухрезонаторного ПГС, получим уравнение

$$2T_1 \dot{A}_1 + A_1 = \frac{\omega_1}{2\omega_n A_1^*} \frac{I_{n0}(t)}{1-R+2\alpha_1 L} \sin^2(\sqrt{\beta_2 \beta_n} I_1 L), \quad (6.7.41)$$

в котором $I_1 = |A_1|^2$, $T_1 = \frac{L/u}{1-R+2\alpha_1 L}$. При малых A_1 (41) можно переписать в виде линейного уравнения

$$2T_1 \dot{A}_1 + \left[1 - \frac{\beta_1 \beta_2 I_{n0}(t) L^2}{2(1-R+2\alpha_1 L)}\right] A_1 = 0, \quad (6.7.42)$$

из которого видно, что пороговая интенсивность немодулированной накачки

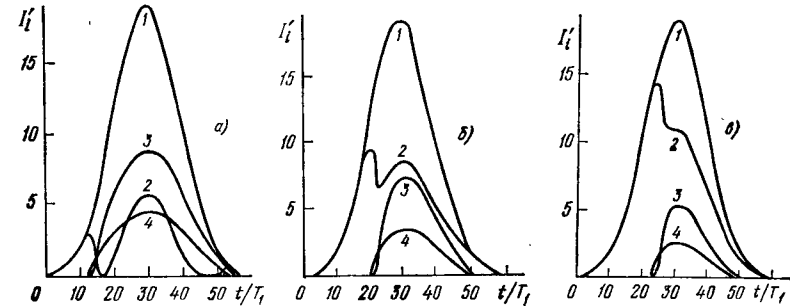


Рис. 6.16. Форма импульсов: накачки на входе (1) и выходе (2), волн ω_1 (3) и ω_2 (4) при различном числе N мод в спектре накачки [35]:

а) 1; б) 7; в) 11 ($I_{n0 \text{ max}}' = 19$, $\Omega T_2 = 0.7$, $\omega_1 = 2\omega_2$).

в случае однорезонаторного ПГС равна

$$I_{\text{пор}} = \frac{2(1-R+2\alpha_1 L)}{\beta_1 \beta_2}. \quad (6.7.43)$$

Остальные амплитуды выражаются через $A_1 = A_1(t)$:

$$A_n(t, z) = A_{n0}(t) \cos \sqrt{\beta_2 \beta_n} I_1 z, \quad (6.7.44)$$

$$A_2(t, z) = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{|A_1|}{A_1}} A_{n0}(t) \sin \sqrt{\beta_2 \beta_n} I_1 z$$

($0 < z < L$). Переходя в (41) и (44) к амплитудам на выходе ПГС ($z = L$), нормированным на $I_{\text{пор}}$:

$$a_1 = \frac{A_1 \sqrt{1-R^2}}{\sqrt{I_{\text{пор}}}}, \quad a_2 = \frac{A_2}{\sqrt{I_{\text{пор}}}}, \quad a_0(t) = \frac{A_{n0}(t)}{\sqrt{I_{\text{пор}}}},$$

получим

$$2T_1 \dot{a}_1 + a_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} \frac{|a_0(t)|^2}{a_1^*} \sin^2 \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_1} |a_1|^2 L}, \quad (6.7.45)$$

$$a_n(t) = a_0(t) \cos \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_1} |a_1|^2 L}.$$

Интенсивности $I'_i = |a_i|^2$ можно выразить через функцию x , удовлетворяющую уравнению

$$T_1 \dot{x} + x = I'_{н0}(t) \sin^2 \sqrt{x}, \quad (6.7.46)$$

а именно:

$$I'_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} x, \quad I'_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n} I'_{н0}(t) \sin^2 \sqrt{x}, \quad I_n(L) = I_{н0}(t) \cos^2 \sqrt{x}; \quad (6.7.47)$$

здесь $I_{н0}(t) = |a_0(t)|^2$. Для к. п. д. генератора имеем

$$\eta = \frac{I'_1 + I'_2}{I'_{н0}} = \sin^2 \sqrt{x}. \quad (6.7.48)$$

Согласно (48) $\eta = 100\%$ каждый раз, когда величина x принимает значение $\pi^2/4$. Как видно из (46), в стационарном режиме генерации при монохроматической накачке этому значению x соответствует $I'_{н0} = \pi^2/4$ (рис. 6.17). Для однорезонаторного ПГС характерен эффект насыщения: при больших $I'_{н0}$ величина x перестает зависеть от $I'_{н0}$:

$$x \approx \pi^2 \quad (I'_{н0} \gg 1). \quad (6.7.49)$$

Рассмотрим теперь процессы в ПГС при импульсной многомодовой накачке, т. е. когда в (46)

$$I'_{н0}(t) = F(t) \sum_m I_{н,m}^0 \exp i\Omega_m t. \quad (6.7.50)$$

В одномодовом случае при гауссовской форме импульса накачки

$$F(t) = \exp \left[- (t - t_0)^2 / t_{имп}^2 \right]. \quad (6.7.51)$$

Импульсы генерации имеют вид, показанный на рис. 6.18. Для сравнения приведен также симметричный импульс волны ω_1 (пунктир), соответствующий стационарному режиму генерации ($t_{имп} \gg T_1$). На этом рисунке заметна асимметрия между передними и задними фронтами импульсов, характерная для нестационарного режима генерации (в данном случае $t_{имп} = 13T_1$).

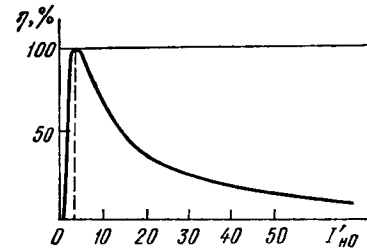


Рис. 6.17. Зависимость стационарного к. п. д. η однорезонаторного ПГС от $I'_{н0}$.

При многомодовой накачке нас может интересовать, например, получение узкой линии генерации при широком спектре накачки. Этого можно добиться за счет достаточно большой инерционности резонатора, выбрав время релаксации T_1 так, чтобы удовлетворялось условие $\Omega T_1 \gg 1$. На рис. 6.19 показан результат решения на ЭВМ уравнения (46) в случае трехмодовой накачки при двух значениях параметра ΩT_1 . Видно заметное уменьшение глубины модуляций волны ω_1 при увеличении параметра ΩT_1 в пределах $3 < \Omega T_1 < 20$; глубина модуляций нерезонирующей волны ω_2 меняется при этом незначительно.

Аналогичный результат может быть получен при любой величине ΩT_1 , если взять достаточно мощную накачку ($I'_{н0} \gg 1$), что связано с упоминавшимся эффектом насыщения.

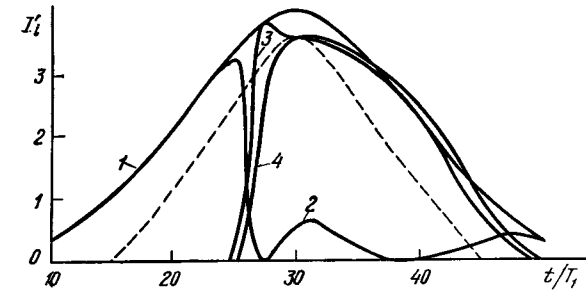
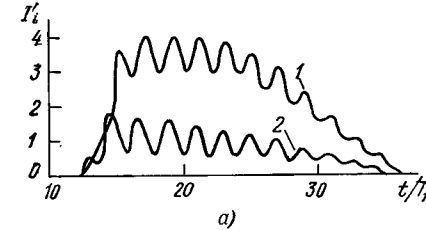
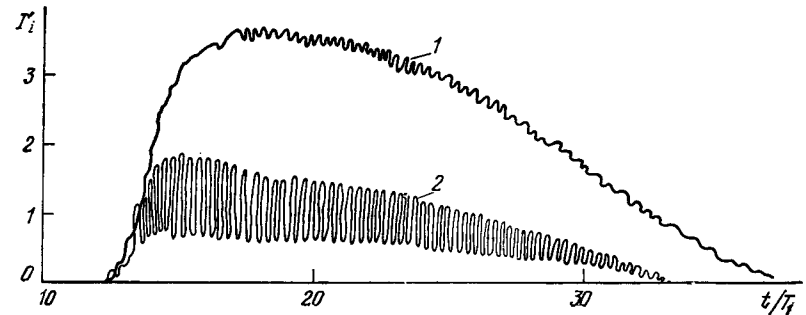


Рис. 6.18. Форма импульсов генерации в однорезонаторном ПГС при монохроматической накачке [36]:

1) накачка на входе; 2) накачка на выходе; 3) волна ω_2 ; 4) волна ω_1 .



а)



б)

Рис. 6.19. Форма импульсов генерации в однорезонаторном ПГС при трехмодовой накачке [36]:

1) волна ω_1 ; 2) волна ω_2 ; а) $\Omega T_1 = 3$; б) $\Omega T_1 = 20$.

Многомодовая накачка, согласованная с резонатором. В предыдущем рассмотрении, по существу, предполагалось, что центры спектров резонирующих волн совпадают с одной из собственных частот (мод) резонатора:

$$\omega_{i,m} = m\Omega_{рез(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (6.7.52)$$

(m — целые числа), причем спектр накачки уже интервала между этими модами:

$$\Delta\omega_n \ll \Omega_{\text{рез}(l)}. \quad (6.7.53)$$

В (52)

$$\Omega_{\text{рез}(l)} = \nu v_i / L, \quad (6.7.54)$$

где $v_i = v(\omega_i)$ — фазовая скорость волны ω_i в нелинейной среде, L — длина резонатора. При условии (52) соответствующие частотам ω_i , m длины волн $\lambda_{i,m}$ целое число раз укладываются на длине резонатора:

$$\lambda_{i,m} = \frac{2\pi v_i}{\omega_{i,m}} = \frac{2L}{m}.$$

Выполнение условий (52) и (53) необходимо для того, чтобы был равен нулю суммарный набег фазы при прохождении резонирующей волны через резонатор в прямом и обратном направлениях: $\Delta\varphi = 0$

Метод описания процессов в резонаторе с помощью чисто колебательных, а не волновых уравнений вида (15) или (45) можно обобщить на случай многомодовой накачки, согласованной с резонатором, когда моды накачки разделены тем же интервалом, что и моды резонатора. Если пренебречь дисперсией, то согласно (54) $\Omega_{\text{рез}(1)} = \Omega_{\text{рез}(2)} = \Omega_{\text{рез}}$. Итак, пусть

$$\Omega = \Omega_{\text{рез}}, \quad \Delta\omega_n = N\Omega_{\text{рез}}. \quad (6.7.55)$$

Рассматривая опять для простоты случай кольцевого резонатора, перепишем уравнения (8), описывающие двухрезонаторный ПГС. Пренебрегая линейными потерями и дисперсией скоростей, имеем

$$\frac{\partial A_1^+}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_1^+}{\partial t} = \beta_1 A_n A_2^{+*}, \quad (6.7.56a)$$

$$-\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_1^-}{\partial t} = 0, \quad (6.7.56b)$$

$$\frac{\partial A_2^+}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_2^+}{\partial t} = \beta_2 A_n A_1^{+*}, \quad (6.7.57a)$$

$$-\frac{\partial A_2^-}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_2^-}{\partial t} = 0, \quad (6.7.57b)$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_n}{\partial t} = -\beta_n A_1^+ A_2^+, \quad (6.7.58)$$

$A_n(t, z=0) = A_{n0}(t)$. Задавая накачку на входе ПГС в виде

$$A_{n0}(t) = \sum_m A_{n,m}^0(t) e^{i\Omega m t}, \quad (6.7.59a)$$

где амплитуды мод $A_{n,m}^0(t)$ меняются медленно по сравнению с $\exp i\Omega t$, будем искать A_1 и A_2 в виде аналогичных разложений:

$$A_n^\pm(t, z) = \sum_m A_{n,m}^\pm(t) e^{i\Omega m(t \mp z/u)}. \quad (6.7.59b)$$

Подстановка (59) в уравнения (56)–(58) дает

$$\frac{\partial A_{1,m}^+}{\partial z} = \beta_1 \sum_p A_{n,p+m} A_{2,p}^{+*}, \quad (6.7.60a)$$

$$-\frac{\partial A_{1,m}^-}{\partial z} + \frac{2}{u} \frac{\partial A_{1,m}^-}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = t - z/u, \quad (6.7.60b)$$

$$\frac{\partial A_{2,m}^+}{\partial z} = \beta_2 \sum_p A_{n,p+m} A_{1,p}^{+*}, \quad (6.7.61a)$$

$$-\frac{\partial A_{2,m}^-}{\partial z} + \frac{2}{u} \frac{\partial A_{2,m}^-}{\partial \theta} = 0, \quad (6.7.61b)$$

$$\frac{\partial A_{n,m}}{\partial z} = -\beta_n \sum_p A_{1,p+m}^+ A_{2,p}^+, \quad (6.7.62)$$

В полученных уравнениях, так же как раньше в (8), мы будем считать амплитуды мод резонирующих волн мало меняющимися по длине резонатора; при этом интегрирование (62) с учетом (59) дает

$$A_{n,m} = A_{n,m}^0 - \beta_n z \sum_p A_{1,p+m}^+ A_{2,p}^+. \quad (6.7.63)$$

Теперь следует подставить (63) в (60) и усреднить (60) по длине резонатора, учтя условия отражения. В результате мы получим следующие уравнения, являющиеся обобщением (12) ($A_{i,m} = A_{i,m}^+ = -A_{i,m}^-$; $i=1, 2$):

$$2T_1 A_{1,m} + A_{1,m} = \frac{\beta_1 L}{1-R_1} \sum_p \left[A_{n,p+m}^0 - \frac{1}{2} \beta_n L \sum_r A_{1,p+m-r} A_{2,r} \right] A_{2,p}^*, \quad (6.7.64a)$$

$$2T_2 A_{2,m} + A_{2,m} = \frac{\beta_2 L}{1-R_2} \sum_p \left[A_{n,p+m}^0 - \frac{1}{2} \beta_n L \sum_r A_{1,p+m-r} A_{2,r} \right] A_{1,p}^*. \quad (6.7.64b)$$

Чтобы упростить дальнейший анализ последних уравнений, рассмотрим частный случай, когда все моды, кроме нулевой, в волне ω_1 подавлены*):

$$A_{1,m} = A_{1,0} \quad (m=0); \quad 0 \quad (m \neq 0). \quad (6.7.65)$$

При этом уравнения (64) принимают следующий вид:

$$2T_1 A_{1,0} + A_{1,0} = \frac{\beta_1 L}{1-R_1} \left[\sum_p A_{n,p}^0 A_{2,p}^* - \frac{1}{2} \beta_n L A_{1,0} I_2 \right], \quad (6.7.66a)$$

$$2T_2 A_{2,m} + A_{2,m} = \frac{\beta_2 L}{1-R_2} \left[A_{n,m}^0 A_{1,0}^* - \frac{1}{2} \beta_n L A_{2,m} I_1 \right], \quad (6.7.66b)$$

где $I_1 = |A_{1,0}|^2$, $I_2 = \sum_m |A_{2,m}|^2$ — средние (вернее, усредненные по межмодо-

*) Такое подавление мод может быть получено путем введения в резонатор селективных поглощающих элементов, но оно может возникнуть и естественным образом из-за дисперсии, когда частоты Ω_1 и Ω_2 в (55) различны, так что моды накачки можно согласовать лишь с одной из частот.

вым биениям) интенсивности волн. Из (66) уже можно найти стационарный порог генерации: генерация начинается, когда средняя интенсивность накачки $I_{H0} = \sum |A_{H,m}^0|^2$ превышает величину

$$I_{\text{пор}} = \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{\beta_1 \beta_2 L^2}, \quad (6.7.67)$$

совпадающую с (14).

Удобно провести перенормировку амплитуд, аналогичную (14а):

$$A_{1,0} = \frac{a_1 \sqrt{I_{\text{пор}}}}{\sqrt{1-R_1^2}}, \quad A_{2,m} = \frac{a_{2,m} \sqrt{I_{\text{пор}}}}{\sqrt{1-R_2^2}}, \quad A_{H,m}^0 = a_{H,m}^0 \sqrt{I_{\text{пор}}}, \quad (6.7.68)$$

$$I'_1 = a_1^2, \quad I'_2 = \sum_m |a_{2,m}|^2, \quad I'_{H0} = \sum |a_{H,m}^0|^2.$$

В результате получим

$$2T_1 \dot{a}_1 + a_1 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \left[\sum_m a_{H,m}^0 a_{2,m}^* - \frac{\omega_H}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} a_1 I'_2 \right], \quad (6.7.69a)$$

$$2T_2 \dot{a}_{2,m} + a_{2,m} = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[a_{H,m}^0 a_1^* - \frac{\omega_H}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}} a_{2,m} I'_1 \right] \quad (6.7.69б)$$

$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(ср. с (15)). Из (69) следует, что в стационарном режиме генерации средние интенсивности волн при многомодовой согласованной накачке равны

$$I'_1 = \frac{4\omega_1}{\omega_H} (\sqrt{I'_{H0}} - 1), \quad I'_2 = \frac{4\omega_2}{\omega_H} (\sqrt{I'_{H0}} - 1), \quad (6.7.70)$$

т. е. они имеют ту же величину, что и при одномодовой накачке (см. (17)). Согласно (69) в стационарном режиме волна ω_2 воспроизводит спектр и форму модуляции накачки:

$$a_{2,m} = \frac{\sqrt{\omega_2/\omega_1} a_1^* a_{H,m}^0}{1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} I'_1} \sim a_{H,m}^0, \quad (6.7.71)$$

т. е. $A_2(t) \sim A_{H0}(t)$. Это аналогично эффекту повторения накачки при параметрическом взаимодействии в открытом пространстве (см. (6.6.3а)).

Согласно (65), (68), (71) и (63) амплитуды мод и средняя интенсивность накачки в произвольном сечении $0 < z < L$ резонатора равны

$$a_{H,m}(z) = a_{H,m}^0 \frac{1 + (1-2z/L)(\sqrt{I'_{H0}} - 1)}{\sqrt{I'_{H0}}}, \quad (6.7.72)$$

$$I'_H(z) = [1 + (1-2z/L)(\sqrt{I'_{H0}} - 1)]^2.$$

Для приложений важным является случай, когда накачка имеет вид пуга коротких высокочастотных импульсов, следующих через одинаковые интервалы времени:

$$A_{H0}(t) = AF^{1/2}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = F^{1/2}(t) \sum_m A_{H,m}^0 e^{i\Omega m t} \quad (6.7.73)$$

($\Omega = 2\pi/T$). В этом выражении $f(t)$ — огибающая отдельного импульса, $F(t)$ — огибающая пуга, T — период следования импульсов. Предполагается, что длительность импульса мала ($t_{\text{имп}} \ll T$) и функция $F(t)$ мало меняется за время $t_{\text{имп}}$. При этих условиях ширину спектра накачки можно оценить как

$$\Delta\omega_H = 2\pi/t_{\text{имп}}. \quad (6.7.74)$$

Подстановка (14) в (53) дает при $L=3$ см

$$t_{\text{имп}} c > 2L \quad (t_{\text{имп}} \geq 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 0,2 \text{ нс}).$$

Условие (55) можно, соответственно, переписать как

$$t_{\text{имп}} c < 2L \quad (t_{\text{имп}} < 0,2 \text{ нс}).$$

Таким образом, развитая здесь теория однорезонаторного и двухрезонаторного ПГС и уравнения (15), а также (24) и (38) применимы для описания генерации импульсов наносекундной длительности, в то время как уравнения двухрезонаторного ПГС (69) — импульсов субнаносекундного и пикосекундного диапазона.

Естественная ширина спектральной линии генерации ПГС. При интегрировании колебательных уравнений ПГС (в частности, при расчете импульсов генерации, представленных на рис. 6.16, 6.18 и 6.19) необходимо было задать некоторое малое начальное значение хотя бы одной из амплитуд, играющее роль затравки всего процесса генерации. В реальных условиях такой затравкой являются спонтанные шумовые поля. Для параметрического генератора света основной вклад в эти поля вносит так называемая параметрическая люминесценция, связанная со спонтанным параметрическим распадом квантов накачки [29]. Параметрическая люминесценция приводит к появлению слабых полей на частотах $\omega_{1,2}$. Воздействие этих полей на ПГС является одним из примеров воздействия собственных («естественных») флуктуаций на автоколебательную систему (см. также гл. 7).

Влияние спонтанных полей на интенсивность волн в режиме развитой генерации из-за их относительной малости пренебрежимо мало. Тем не менее благодаря им колебания, генерируемые в ПГС, всегда являются, в принципе, случайным процессом, который даже при идеально монохроматической накачке характеризуется малой, но конечной шириной спектра $\Delta\omega$. Величина $\Delta\omega$ ограничивает минимально достижимую ширину спектральной линии ПГС. Чтобы найти $\Delta\omega$, надо, как обычно, ввести в колебательные уравнения ПГС случайные источники. Рассмотрим здесь в качестве примера двухрезонаторный ПГС, процессы в котором при одномодовой монохроматической накачке описываются вытекающим из (37) уравнением ($a_1 \equiv a_{10}$)

$$2T_1 \dot{a}_1 + a_1 = \frac{a_1 I'_{H0}}{\left(1 + \frac{\omega_H}{4\omega_1} |a_1|^2\right)^2}. \quad (6.7.75)$$

Если обозначить $\sqrt{\omega_H/4\omega_1} a_1 = x$, $2T_1 = \alpha^{-1}$, то (75) переписывается как

$$\dot{x} + \alpha x = \frac{\alpha I'_{H0} x}{(1 + |x|^2)^2}. \quad (6.7.76)$$

В это уравнение нужно ввести случайные функции, описывающие шумовые источники, спектр которых лежит в области частот ω_1 , ω_2 и ω_n . Ограничимся здесь тем, что добавим в правую часть (76) δ -коррелированный шум $\xi(t)$, имеющий смысл комплексной амплитуды шумов с частотами, близкими к ω_1 :

$$\dot{x} + \alpha x = \frac{\alpha I'_{n0} x}{(1 + |x|^2)^2} + \alpha \xi(t), \quad (6.7.77)$$

где

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau^* \rangle = 2D\delta(\tau). \quad (6.7.78)$$

Выразим в (77) x через огибающую ρ и фазу φ , а $\xi(t)$ — через статистические независимые квадратурные компоненты a и b :

$$\begin{aligned} x &= \rho e^{i\varphi}, \quad \xi = a + ib, \\ \langle a \rangle = \langle b \rangle &= 0, \quad \langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle = 2D\delta(\tau). \end{aligned} \quad (6.7.79)$$

Комплексное уравнение (77) распадется при этом на два вещественных:

$$\dot{\rho} + \alpha\rho = \frac{\alpha I'_{n0} \rho}{(1 + \rho^2)^2} + \alpha (a \cos \varphi + b \sin \varphi), \quad (6.7.80a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{\rho} (b \cos \varphi - a \sin \varphi). \quad (6.7.80b)$$

После преобразований, полностью аналогичных приведенным в § 2 гл. 7, мы получим уравнения отдельно для ρ и φ :

$$\dot{\rho} + \alpha\rho = \frac{\alpha I'_{n0} \rho}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{\alpha^2 D}{\rho} + \xi_1(t), \quad (6.7.81)$$

$$\dot{\varphi} = \xi_2(t), \quad (6.7.82)$$

в которых

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = 2D_1 \delta(\tau), \quad D_1 = \alpha^2 D, \quad \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = 2D_2 \delta(\tau), \quad D_2 = \alpha^2 \langle 1/\rho \rangle^2 D.$$

Средняя интенсивность затравки σ_0^2 определяется как величина $\langle x^2 \rangle$ при $I'_{n0} = 0$: согласно (77)

$$\sigma_0^2 = D_1/\alpha = \alpha D. \quad (6.7.82a)$$

Постоянная D может быть вычислена как эффективная спектральная плотность спонтанной параметрической люминесценции (см., например, [29], с. 362). Заметим, что экспериментально величину σ_0^2 можно оценить по запаздыванию импульса генерации, учитывая результаты § 6 гл. 1; согласно полученной в [33] оценке $\sigma_0^2 = 10^{-14}$.

Рассмотрим теперь режим развитой генерации ($I'_{n0} \gg 1$). Полагая в (81) $\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}$, при $\tilde{\rho} \ll \bar{\rho}$ получим

$$\bar{\rho} = \sqrt{\sqrt{I'_{n0}} - 1}, \quad \dot{\tilde{\rho}} + 4\alpha(1 - 1/\sqrt{I'_{n0}})\tilde{\rho} = \xi_1(t). \quad (6.7.83)$$

Как следует из (83),

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle = \frac{D_1}{4\alpha(1 - 1/\sqrt{I'_{n0}})} = \frac{\alpha D}{4} = \frac{\sigma_0^2}{4}, \quad \frac{\langle \tilde{\rho}^2 \rangle}{(\bar{\rho})^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{I'_{n0}}} \ll 1.$$

Мы видим, что компонента $\tilde{\rho}$ действительно мала, а ширина ее спектра с ростом интенсивности накачки стремится к постоянной величине:

$$\Delta\omega_\rho = 4\alpha(1 - 1/\sqrt{I'_{n0}}) \approx 4\alpha. \quad (6.7.83a)$$

Таким образом, вклад $\tilde{\rho}$ в спектр излучения ПГС состоит в создании очень широкого, но малого по интенсивности «пьедестала» спектра (аналогично тому, как это имеет место в случае томсоновского генератора или лазера — см. рис. 7.5). Ширина спектра ПГС определяется, следовательно, фазовыми флуктуациями, и согласно (82) она равна (при $I'_{n0} \gg 1$)

$$\Delta\omega = 2D_2,$$

или

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 4\alpha^2 \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle^2 D \approx \frac{4\alpha^2}{\bar{\rho}^2} D = \frac{4\alpha\sigma_0^2}{\sqrt{I'_{n0}} - 1} \ll 4\alpha, \\ \Delta f &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi L} \frac{1 - R + 2\alpha_1 L}{\sqrt{I'_{n0}} - 1} \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (6.7.84)$$

Подставив сюда $L = 3$ см, $1 - R + 2\alpha_1 L = 5 \cdot 10^{-2}$, $I'_{n0} = 16$, $\sigma_0^2 = 10^{-14}$, получим $\Delta f = 0,25 \cdot 10^{-6}$ Гц.

Уравнение (83) является уравнением типа (1.7.28), так что распределение вероятностей $w(\rho)$ в установившемся режиме генерации ПГС дается решением уравнения Фоккера — Планка (1.7.50):

$$w(\rho) = C\rho \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} \left(\rho^2 + \frac{I'_{n0}}{1 + \rho^2} \right) \right].$$

Отсюда может быть найдено распределение интенсивности $I'_1 = (4\omega_1/\omega_n) |a_1|^2 = (4\omega_1/\omega_n) \rho^2$:

$$w(I'_1) = \frac{C}{8\omega_1/\omega_n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} \left(\frac{\omega_n}{4\omega_1} I'_1 + \frac{I'_{n0}}{1 + (\omega_n/4\omega_1) I'_1} \right) \right]. \quad (6.7.85)$$

Как следует из (85), наиболее вероятным является значение интенсивности, равное

$$I'_{1(\max w)} = \frac{4\omega_1}{\omega_n} (\sqrt{I'_{n0}} - 1). \quad (6.7.86)$$

Интенсивность $I'_{1(\max w)}$ оказалась не зависящей от спектральной плотности спонтанного шума; она равна I'_1 в отсутствие шума (см. (17)).

Подставив (85) в (2.5.30), можно найти также функцию распределения вероятностей $w(E_1)$ самого генерируемого поля E_1 . Заметим, что с учетом (82a) и (86) формулу (84) можно записать в виде $\Delta\omega = 16(\omega_1/\omega_n) \alpha^2 D / I_{1(\max w)}$, т. е. она аналогична формулам (7.2.54a) и (7.5.28) для ширины линий томсоновского генератора и лазера. В отношении же амплитудных флуктуаций такой аналогии нет: в ПГС ширина их спектра ограничена (ср. (83a) с (7.2.39a)).

ФЛУКТУАЦИИ В ГЕНЕРАТОРАХ РАДИО- И ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНОВ

§ 1. Введение. Флуктуации амплитуды и фазы автоколебаний. Форма и ширина спектральной линии

Статистические задачи, связанные с флуктуациями и шумами в автоколебательных системах, весьма разнообразны. Неизбежные в реальных генераторах радиодиапазона и лазерах нестабильности параметров представляют собой по существу случайные процессы $\xi_n(t)$. Спектры этих процессов $G_n(\omega)$ отличны от нуля лишь в узкой области вблизи нулевой частоты *); эффективная ширина спектра $G_n(\omega)$ флуктуаций параметров не превышает обычно $10^2 - 10^3$ Гц. Воздействие флуктуаций параметров на автогенератор проявляется поэтому обычно в виде медленной, квазистатической случайной модуляции амплитуды и частоты (фазы).

Колебания реального генератора, близкие к гармоническим, представляют собой случайный процесс вида

$$x(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (7.1.1)$$

Статистические характеристики $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ в рассматриваемом случае, разумеется, существенно отличаются от таковых для узкополосного гауссовского шума, рассмотренного в § 4 гл. 2. Амплитуда флуктуирует вблизи среднего значения $\bar{\rho}$, определяемого динамическими свойствами системы; флуктуации амплитуды и фазы в общем случае коррелированы.

По известным статистическим характеристикам $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ с помощью формул § 7 гл. 2 можно определить и форму спектральной линии. В соответствии с результатами гл. 2, если относительные флуктуации амплитуды невелики,

$$\rho(t) = \bar{\rho} + \tilde{\rho}(t), \quad \langle \tilde{\rho}^2 \rangle \ll \bar{\rho}^2,$$

форма и ширина спектральной линии в основном определяются квазистатическими флуктуациями частоты. Хорошим приближе-

*) Среди низкочастотных флуктуационных процессов, приводящих к флуктуациям параметров, особое место занимают процессы типа фликкер-шума, для которых, как показывает эксперимент, вплоть до очень низких частот ($\sim 10^{-2} - 10^{-3}$ Гц) $G_n^+(\omega) \sim \omega^{-1}$. Физика таких процессов с неинтегрируемым спектром до конца не ясна и по сей день. Принято считать, что речь идет о существенно нестационарных процессах [4]; обзор новых данных, относящихся к этой проблеме, содержится в [54].

нием в этом случае оказывается модель медленных и сильных гауссовских флуктуаций частоты (см. (2.7.39), (2.7.44)). Тогда спектр автоколебаний имеет вид (см. (2.7.41))

$$G^+(\omega) = \frac{\bar{\rho}^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}\right\}, \quad (7.1.2)$$

где σ_ω^2 — дисперсия частоты, $\sigma_\omega^2 \sim \int_0^\infty G_n^+(\omega) d\omega$.

Ширину спектральной линии

$$\Delta\omega_\tau = \sigma_\omega$$

называют *технической шириной*, подчеркивая этим, что причиной уширения линии в рассматриваемом случае оказываются факторы технического порядка, вклад которых зависит от конструкции генератора, стабилизации параметров и т. п.

Величина $\Delta\omega_\tau$ различна для генераторов разных типов; переход к высокостабильным системам, например таким, как лазеры, стабилизированные по сверхузким оптическим резонансам в атомах и молекулах, позволяет получить ширину спектральной линии $\sim 0,5$ Гц.

Чем определяются предельные возможности сужения линии? Оказывается, что наряду с «техническими» флуктуациями имеются обстоятельства и более принципиального порядка. Даже в гипотетической автоколебательной системе с абсолютно стабильными параметрами генерирование идеальных монохроматических колебаний невозможно. Причиной этого являются принципиально неустранимые собственные шумы генератора, такие, как тепловой и дробовой шум в радиогенераторе и спонтанные переходы в лазере. Эти источники флуктуаций в генераторе следует рассматривать, очевидно, как случайные внешние силы, в спектре которых имеются и компоненты на частоте автоколебаний.

Как ведет себя автоколебательная система, находящаяся под воздействием случайной силы?

Оказывается, что и в этом случае дело сводится к случайным амплитудной и фазовой модуляциям; автоколебания описываются формулой (1). Статистические же характеристики возникающих под действием собственных шумов *естественных флуктуаций* амплитуды и фазы, разумеется, отличаются от технических; по-иному выглядят и спектр колебаний.

Для естественных флуктуаций частоты адекватной оказывается модель быстрых и слабых флуктуаций (2.7.45), форма спектральной линии становится лоренцевской (см. (7.2.51a)).

Естественная ширина *) спектральной линии $\Delta\omega_e$ обычно гораздо меньше технической, $\Delta\omega_e \ll \Delta\omega_t$, однако для высокостабильных генераторов радио- и в особенности оптического диапазона [5], в технике предельных измерений [9], эффекты, обусловленные естественными флуктуациями, становятся существенными.

Большой круг статистических задач связан со статистикой многомодовых генераторов. Особенно актуальны эти задачи для оптики, поскольку лазер, если не приняты специальные меры, является принципиально многомодовым генератором.

Если речь идет о статистически независимых модах, для выяснения картины флуктуаций суммарного колебания достаточно довольно грубых представлений о статистике колебаний в отдельной моде. Случайная временная структура многомодового колебания определяется в основном величиной межмодового интервала и полным числом продольных лазерных мод. То же самое можно сказать и о случайной поперечной структуре излучения лазера, генерирующего несколько поперечных мод.

В этой главе мы ограничимся в основном рассмотрением трех проблем, относящихся к флуктуациям в автоколебательных системах, генерирующих колебания, близкие к гармоническим.

1. Прежде всего это классическая задача о естественных флуктуациях в слабонелинейной автоколебательной системе с высокочастотным контуром — в так называемом томсоновском генераторе. Близка к ней и задача об обусловленных спонтанными переходами естественных флуктуациях амплитуды и фазы в одномодовом лазере. Однако прямая аналогия прослеживается здесь лишь до тех пор, пока речь идет о временных флуктуациях амплитуды и фазы.

В лазере спонтанные переходы приводят и к флуктуациям в пространственном распределении генерируемого поля. Пространственным аналогом естественной ширины спектральной линии оказывается естественная ширина углового спектра, непосредственно связанная с определяемой спонтанными переходами предельной пространственной когерентностью излучения одномодового (по поперечным индексам) лазера **).

*) Классифицируя источники флуктуаций в автоколебательных системах, мы пользуемся здесь терминологией, введенной Гореликом.

**) Специфические задачи, связанные с флуктуациями в лазерах, этим не исчерпываются. Интересный класс статистических задач связан с изучением оптических генераторов с так называемой стохастической обратной связью, генераторов, принцип действия которых ближе к принципу действия ядерного реактора, нежели генератора радиодиапазона [3]. В лазерной физике предложены и методы осуществления регулярной обратной связи, не имеющие прямых аналогов в радиодиапазоне, — например, так называемой распределенной обратной связи [56]; о флуктуациях в лазере с распределенной обратной связью см в [58]. Заметим, наконец, что в оптике когерентные световые колебания, статистика которых практически аналогична статистике колебаний лазера

2. Стохастическим процессом оказывается во многих случаях и процесс самовозбуждения автоколебаний. Действительно, в автономном генераторе, если включение усиления или обратной связи не связано с возбуждением сигналов на частотах порядка средней частоты автоколебаний (именно с такой ситуацией приходится сталкиваться при самовозбуждении лазера), «затравку» для самовозбуждающихся колебаний создают собственные шумы. В этом случае процесс самовозбуждения можно рассматривать как процесс трансформации (во времени) собственного шума.

Ниже порога самовозбуждения собственный шум радиогенератора или лазера представляет собой стационарный узкополосный гауссовский процесс; в режиме развитой стационарной генерации мы имеем дело с существенно негауссовским процессом. Каковы закономерности такой трансформации?

Этот вопрос представляет не только принципиальный, но и несомненный практический интерес; ниже мы обсуждаем его применительно к томсоновскому генератору и одномодовому лазеру. Флуктуационный характер процесса самовозбуждения автоколебаний приводит к тому, что случайной величиной становится и время установления автоколебаний, — обстоятельство, существенное для импульсных систем.

Особенно важны статистические явления при установлении колебаний в генераторах с несколькими ненулевыми устойчивыми состояниями; здесь выбор устойчивого состояния может в значительной мере определяться статистикой начальных условий. Последнее положено в основу методов исследования достаточно тонких характеристик случайных процессов. В § 4 эта задача рассмотрена на примере одноконтурного параметрического генератора.

3. Наконец, в §§ 6, 7 обсуждается и статистика многомодового излучения. Надо сказать, что многие результаты, относящиеся к временным характеристикам многомодового излучения, содержатся в § 9 гл. 2 и § 4 гл. 5. Поэтому ниже главное внимание уделено поперечным корреляционным функциям излучения лазеров, генерирующих несколько поперечных мод.

Математическая сторона теории флуктуаций в автоколебательных системах оказывается сложной, что связано с решением нелинейных стохастических уравнений.

Поэтому ниже будут широко использованы различные физические приближения.

В режиме развитой генерации малость собственных шумов позволяет линеаризовать стохастические уравнения. Так строится

с обратной связью, могут быть сформированы в нелинейном усилителе без ушей волны (см. § 2 гл. 8).

теория естественных флуктуаций в томсоновском генераторе и одномодовом лазере в существенно «надпороговом» режиме.

Для исследования явлений вблизи порога генерации (этот режим представляет специальный физический интерес, поскольку именно здесь можно проследить, как происходит формирование когерентного негауссовского излучения из стационарного гауссовского шума) мы пользуемся методами уравнения Фоккера—Планка и статистической линеаризации; результаты хорошо согласуются между собой. Заметим наконец, что для описания закономерностей формирования когерентного излучения из шума при переходе через порог генерации плодотворным оказывается использование методов теории фазовых переходов.

Аналогия между самовозбуждением лазера и фазовым переходом детально прослеживается в § 8; мы используем методы теории критических явлений для расчета закономерностей формирования пространственной и временной когерентности одномодового лазера.

§ 2. Естественные флуктуации амплитуды и фазы в томсоновском генераторе в режиме развитой генерации

Мы начинаем с рассмотрения естественных флуктуаций в томсоновском генераторе радиодиапазона. Общее уравнение, описывающее колебания в томсоновском генераторе, имеет вид

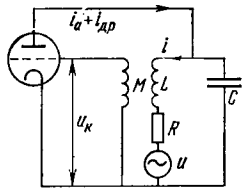


Рис. 7.1. Схема генератора с колебательным контуром в анодной цепи

где точка означает дифференцирование по времени. Малый параметр μ ($\mu \ll 1$) подчеркивает слабое отличие колебаний от гармонических.

Обратимся теперь к конкретной схеме, рассмотрим генератор с колебательным контуром в анодной цепи (рис. 7.1), который имеет параметры L , C , R ; M — коэффициент взаимной индукции катушек, i_a — регулярный анодный ток, i — ток индуктивной ветви, i_{dp} — ток дробового шума, u — напряжение теплового шума сопротивления контура.

Приравнявая напряжения на индуктивной и емкостной ветвях колебательного контура, получаем уравнение

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - \frac{1}{C} \int (i_a(t') + i_{dp}(t') - i(t')) dt' = u(t). \quad (7.2.2)$$

Напряжение на сетке лампы в отсутствие сеточных токов определяется наводимой электродвижущей силой:

$$u_k = M \frac{di}{dt}. \quad (7.2.3)$$

Характеристику электронной лампы запишем в виде

$$i_a = Su_k \left(1 - \frac{1}{3} \chi u_k^2 \right), \quad (7.2.4)$$

где S — крутизна характеристики, χ — коэффициент нелинейности. Вольт-амперная характеристика вида (4) соответствует так называемому мягкому режиму возбуждения генератора.

Дифференцируя (2) по времени и используя соотношения (3) и (4), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 2 \left[(\delta - \alpha) - \frac{4}{3} \beta \omega_0^{-2} \left(\frac{di}{dt} \right)^2 \right] \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \xi(t). \quad (7.2.5)$$

Здесь $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ — собственная частота колебательного контура, $\alpha = R/2L$ — величина, характеризующая затухание в контуре, $\delta = \omega_0^2 SM/2$ — отрицательные потери, вносимые обратной связью, параметр $\beta = \chi SM^3 \omega_0^4/8$ характеризует нелинейность генератора,

$$\xi(t) = i_{dp}(t) + \omega_0^{-2} \dot{u}(t)/L. \quad (7.2.6)$$

Слагаемые правой части уравнения (5) обуславливают отличие колебаний от гармонических.

Укороченные стохастические уравнения. Для того чтобы изучить колебательный процесс, описываемый уравнением (5), получим укороченные уравнения, воспользовавшись методом, развитым в § 2 гл. 3 на примере линейного контура. Представим решение уравнения (5) в виде

$$i(t) = x(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (7.2.7)$$

Поскольку высокочастотный колебательный контур подавляет спектр, расположенный вне узкой полосы вблизи частоты ω_0 (см. (3.2.32)), т. е. является полосовым фильтром, шум в контуре $\xi(t)$ можно представить как

$$\xi(t) = \eta(t) \exp[i(\omega_0 t + \pi/2)] + \text{к. с.} \quad (7.2.8)$$

(фаза $\pi/2$ добавлена для удобства дальнейшей записи). В (7) и (8) функции $A(t)$ и $\eta(t)$ являются медленными по сравнению с $\exp(i\omega_0 t)$.

Учитывая условия медленности изменения комплексной амплитуды $A(t)$ (3.2.33), из (5) получаем уравнение

$$\frac{dA}{dt} + [(\alpha - \delta) + \beta |A|^2] A = \omega_0 \eta(t), \quad (7.2.9)$$

в котором опущены быстро осциллирующие члены. Последние выпадают при умножении (5) на $\exp\{-i\omega_0 t\}$ и усреднении по периоду колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Уравнение (9) отличается от уравнения (3.2.37) линейного контура наличием нелинейного члена $\beta |A|^2$ и отрицательных потерь δ .

Выразим комплексную амплитуду A через огибающую ρ и фазу φ ($A = \rho e^{i\varphi}$), а случайную силу $\eta(t)$ представим через квадратные компоненты a и b :

$$\eta(t) = a + ib. \quad (7.2.10)$$

Разделяя в уравнении (9) вещественную и мнимую части, приходим к уравнениям

$$\dot{\rho} + [\alpha - \delta + \beta\rho^2]\rho = \omega_0 \zeta_\rho, \quad (7.2.11)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\rho} \zeta_\varphi, \quad (7.2.12)$$

где

$$\zeta_\rho = a \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad \zeta_\varphi = b \cos \varphi - a \sin \varphi. \quad (7.2.13)$$

Уравнение (9) и система уравнений (11), (12) являются укороченными уравнениями томсоновского генератора соответственно в комплексной и действительной записи.

В отсутствие флуктуаций ($\xi = 0$) уравнение (11) обстоятельно изучено в теории колебаний (см., например, [1]). Стационарному, или установившемуся, состоянию ($\dot{\rho} = 0$) соответствует амплитуда колебаний

$$\rho_\infty = [(\delta - \alpha)/\beta]^{1/2}. \quad (7.2.14)$$

Ясно, что в (14) должно быть $\delta > \alpha$, т. е. необходимо, чтобы вложение энергии, вносимое обратной связью генератора, превышало потери в контуре; пороговое значение $\delta_{\text{пор}} = \alpha$. Запишем формулу (14), вводя относительное превышение порога самовозбуждения $\varepsilon = \delta - \alpha$ (в теории лазера ε будем называть параметром накачки, см. § 5):

$$\rho_\infty = \rho_r \sqrt{\varepsilon - 1}, \quad \rho_r = (\alpha/\beta)^{1/2}, \quad \varepsilon = \delta/\alpha, \quad (7.2.15)$$

где ρ_r — характерная амплитуда колебаний генератора: $\rho_\infty = \rho_r$ при $\varepsilon = 2$. Изменение ρ_∞^2 с ростом ε показано на рис. 7.2 кривой 1.

Из уравнения (12) при $\dot{\varphi} = 0$ следует, что $\varphi_\infty = \varphi_0$, т. е. фаза сохраняет то значение, которое было в момент включения генератора (обратной связи). В автономном генераторе естественно считать φ_0 случайной величиной с законом распределения

$$\omega(\varphi_0) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_0 \leq \pi.$$

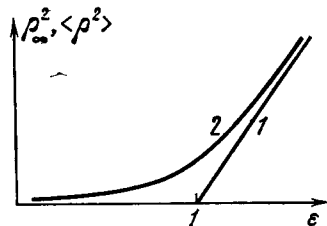


Рис. 7.2. Зависимость установившейся амплитуды колебаний томсоновского генератора от параметра накачки ε в отсутствие (1) и при наличии шума (2).

Таким образом, в отсутствие шума стационарные колебания томсоновского генератора гармонические:

$$x(t) = \rho_\infty \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.2.16)$$

При наличии шума колебания — квазигармонический процесс (7.1.1).

Относительно случайного процесса $\xi(t)$ (6) можно принять, что он представляет собой δ -коррелированный шум с гауссовской статистикой:

$$\xi = 0, \quad B_\xi(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2\pi G_\xi \delta(\tau). \quad (7.2.17)$$

Отметим, однако, следующее. Хотя дробовой и тепловой шум, дающие вклад в $\xi(t)$, являются δ -коррелированными, в выражение (6) входит производная от напряжения теплового шума, вследствие чего спектральная плотность процесса $\xi(t)$ зависит от частоты ω :

$$G_\xi(\omega) = G_{\text{др}}(\omega) + (\omega_0^2 L)^{-2} \omega^2 G_\tau(\omega).$$

$G_{\text{др}}(\omega)$ и $G_\tau(\omega)$ — спектральная плотность дробового и теплового шума соответственно. В пределах узкой области спектра $\Delta\omega$ в окрестности частоты ω_0 спектральная плотность

$$G_\xi(\omega) \approx G_{\text{др}}(\omega) + \frac{1}{(\omega_0 L)^2} G_\tau(\omega) = G_\xi(\omega_0) = G_\xi \quad (7.2.18)$$

практически постоянна. В этом случае применимо соотношение (17).

В укороченных уравнениях (9) и (11), (12) случайные функции $\eta(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ можно также считать белым шумом в масштабе изменения величин A , ρ и φ . При этом в соответствии с результатами § 3 гл. 2 и в силу постоянства, а, следовательно, симметрии спектра (18) относительно ω_0 ,

$$a = \bar{b} = 0, \quad \langle ab_\tau \rangle = \langle a_\tau b \rangle = 0, \quad \langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle = \frac{\pi}{2} G_\xi \delta(\tau) \quad (7.2.19a)$$

и

$$\bar{\eta} = 0, \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = 0, \quad \langle \eta \eta_\tau^* \rangle = \pi G_\xi \delta(\tau). \quad (7.2.19b)$$

Обратимся вновь к уравнениям генератора (11) и (12). Поскольку в случайные силы ζ_ρ и ζ_φ , помимо квадратурных компонент шума $a(t)$ и $b(t)$, входит фаза φ , мы имеем дело с системой двух связанных стохастических уравнений. Эти уравнения можно, однако, упростить таким образом, что уравнение для случайной амплитуды ρ становится независимым от уравнения для фазы φ . Для этой цели в случайных функциях ζ_ρ и ζ_φ выделим быструю и медленную компоненты.

Рассмотрим, например, процесс ζ_ρ ; представим его как

$$\zeta_\rho(t) = \xi_0(t) + \xi_\rho(t), \quad (7.2.20)$$

где медленная компонента $\xi_0(t)$ имеет тот же характерный временной масштаб изменения τ_m , что и огибающая ρ , τ_ρ , а быстрая компонента $\xi_\rho(t)$ имеет временной масштаб τ_ρ , одинаковый с характерными временами процессов $a(t)$ и $b(t)$ (при сделанных выше предположениях $\tau_\rho \approx 0$). Чтобы выделить $\xi_0(t)$, усредним ξ_ρ по времени T , значительно большему τ_ρ , но меньшему τ_m ($\tau_\rho \ll T \ll \tau_m$):

$$\xi_0(t) = \overline{\xi_\rho} = \overline{a \cos \varphi} + \overline{b \sin \varphi}. \quad (7.2.21a)$$

Вследствие стационарности воздействующего на автономный генератор шума автоколебания в режиме развитой генерации представляют собой стационарный случайный процесс. Фаза такого процесса φ , приведенная к интервалу периодичности, стационарна и распределена равномерно:

$$\omega(\varphi) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (7.2.22)$$

независимо от статистики самого процесса (см. § 5 гл. 2). Подчеркнем вместе с тем, что фаза, рассматриваемая как случайный процесс в интервале $(-\infty, \infty)$, оказывается существенно нестационарным процессом с бесконечной дисперсией (§ 6 гл. 2); для модели генератора мы убедимся в этом ниже, рассматривая уравнение (12).

В соответствии со сказанным случайные процессы $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ стационарны, и в силу свойства эргодичности (§ 4 гл. 1) временное усреднение в (21a) можно заменить статистическим усреднением по ансамблю быстрых флуктуаций $a(t)$ и $b(t)$ (фактически, таким образом, мы находим условные средние, которые сами являются медленно меняющимися случайными функциями):

$$\xi_0(t) = \langle a \cos \varphi \rangle + \langle b \sin \varphi \rangle.$$

Представляя $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в виде

$$\cos \varphi = (\cos \varphi)^{(к)} + (\cos \varphi)^{(нк)}, \quad \sin \varphi = (\sin \varphi)^{(к)} + (\sin \varphi)^{(нк)},$$

где индексами «к» и «нк» отмечены компоненты функций, коррелирующие и некоррелирующие с квадратурными компонентами $a(t)$ и $b(t)$, можно, очевидно, записать

$$\xi_0(t) = \langle a (\cos \varphi)^{(к)} \rangle + \langle b (\sin \varphi)^{(к)} \rangle, \quad (7.2.21б)$$

$$\xi_\rho(t) = a (\cos \varphi)^{(нк)} + b (\sin \varphi)^{(нк)}. \quad (7.2.21в)$$

В силу соотношений (19a)

$$\langle \xi_\rho \rangle = a \langle (\cos \varphi)^{(нк)} \rangle + b \langle (\sin \varphi)^{(нк)} \rangle = 0.$$

Чтобы найти, например, $(\cos \varphi)^{(к)}$, запишем уравнение для $\cos \varphi$, умножив (12) на $\sin \varphi$:

$$\frac{d \cos \varphi}{dt} = -\frac{\omega_0}{\rho} \zeta_\varphi \sin \varphi. \quad (7.2.23)$$

Отсюда, принимая во внимание выражения (13) и (1.7.21a), получаем

$$(\cos \varphi)^{(к)} = -\frac{\omega_0}{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \hat{b} \langle (\sin 2\varphi)^{(нк)} \rangle - \hat{a} \langle [(\sin \varphi)^{(нк)}]^2 \rangle \right\}, \quad (7.2.24)$$

где

$$\hat{a} = \hat{a}(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad \hat{b} = \hat{b}(t) = \int_{t_0}^t b(t') dt',$$

время t_0 меньше t . С учетом (22) и соотношений (24), (19a)

$$\langle a (\cos \varphi)^{(к)} \rangle = \frac{\omega_0}{2\rho} \int_{t_0}^t \langle a(t) a(t') \rangle dt' = \frac{\pi \omega_0}{8\rho} G_\xi.$$

Аналогично находим

$$\langle b (\sin \varphi)^{(к)} \rangle = \frac{\omega_0}{2\rho} \int_{t_0}^t \langle b(t) b(t') \rangle dt' = \frac{\pi \omega_0}{8\rho} G_\xi.$$

Таким образом, значение $\xi_0(t)$ (21б) равно

$$\xi_0(t) = \frac{\pi \omega_0}{4\rho(t)} G_\xi. \quad (7.2.25)$$

Корреляционная функция процесса ξ_ρ (21в) определяется выражением

$$B_{\xi_\rho}(\tau) = \langle \xi_\rho \xi_\rho, \tau \rangle = \langle [a (\cos \varphi)^{(нк)} + b (\sin \varphi)^{(нк)}] [a_\tau (\cos \varphi)^{(нк)} + b_\tau (\sin \varphi)^{(нк)}] \rangle.$$

В силу соотношений (19a) и (22) получим

$$B_{\xi_\rho}(\tau) = \frac{1}{2} \pi G_\xi \delta(\tau). \quad (7.2.26)$$

Расчеты, аналогичные только что проделанным, дают для медленной компоненты силы ζ_φ $\xi_{\varphi 0} = 0$, а для быстрой ξ_ρ

$$\xi_\varphi = 0, \quad \langle \xi_\varphi \xi_\varphi, \tau \rangle = \frac{1}{2} \pi G_\xi \delta(\tau), \quad \langle \xi_\rho \xi_\varphi \rangle = 0. \quad (7.2.27)$$

Теперь мы можем записать упрощенные уравнения*), соответствующие (11), (12):

$$\dot{\rho} + (\alpha - \delta + \beta \rho^2) \rho = \frac{\pi \omega_0^2}{4\rho} G_\xi + \omega_0 \xi_\rho(t), \quad (7.2.28)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\rho} \xi_\varphi(t). \quad (7.2.29)$$

*) В [7, 8] уравнения (28), (29) получены способом, несколько отличающимся от изложенного.

В уравнения (28), (29) входят случайные δ -коррелированные шумы $\xi_p(t)$ и $\xi_\varphi(t)$. Подчеркнем еще раз, что таковыми их можно считать, если время корреляции τ_k реальных источников шума значительно меньше характерных времен изменения амплитуды τ_p и фазы τ_φ . Условие $\tau_k \ll \tau_p$, в соответствии с (28), эквивалентно неравенству $(\delta - \alpha)\tau_k \ll 1$. Стохастическое уравнение (28) для амплитуды не содержит случайной фазы φ , и поэтому его следует решать в первую очередь.

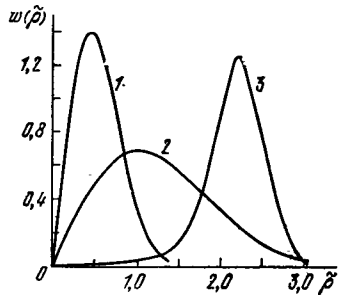


Рис. 7.3. Функция распределения $w(\rho)$ приведенной амплитуды $\tilde{\rho} = \rho N^{-1/4}$ для значений параметра $\tilde{q} = q N^{-1/2}$: 1) -5 , 2) 0 , 3) 5 .

Законы распределения и моменты амплитуды. Уравнение (28) принадлежит к уравнениям типа (1.7.28). Поэтому для функции распределения плотности вероятности $w(\rho)$ справедливо уравнение Фоккера — Планка (1.7.44):

$$\frac{\partial w(\rho, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \rho} [K_1 w(\rho, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [K_2 w(\rho, t)]. \quad (7.2.30)$$

В соответствии с (1.7.46, 47) функции K_1 и K_2 для рассматриваемого случая (28) определяются выражениями

$$K_1 = \beta [q - \rho^2] \rho + \frac{\beta}{\rho} N, \quad K_2 = 2\beta N, \\ N = (\pi/4) \omega_0^2 G_2 \beta^{-1}, \quad q = (\delta - \alpha)/\beta = \rho/\beta.$$

Стационарная функция распределения $w(\rho)$ (при $t \rightarrow \infty$) дается формулой (1.7.49), которая приводит к выражению

$$w(\rho) = C_0 \rho \exp \left\{ -\frac{\rho^4 - 2q\rho^2}{4N} \right\}.$$

Постоянная C_0 определяется из условия нормировки $\int_0^\infty w(\rho) d\rho = 1$; в результате имеем

$$w(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi N}} \left[1 + \Phi \left(\frac{q}{2\sqrt{N}} \right) \right]^{-1} \rho \exp \left\{ -\frac{(\rho^2 - q)^2}{4N} \right\}. \quad (7.2.31)$$

Графики функции (31) для различных значений q изображены на рис. 7.3. Для больших отрицательных значений q (в области значительно ниже порога генерации) распределение $w(\rho)$ близко к рэлеевскому распределению (2.4.6):

$$w(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad (7.2.32a)$$

где $\sigma_0^2 = N/|q| = \pi \omega_0^2 G_0/4 |p|$. Значительно выше порога генерации распределение становится гауссовским ($\sqrt{q} = \rho_\infty = \rho_r \cdot \sqrt{\varepsilon - 1}$):

$$w(\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{(\rho - \rho_\infty)^2}{2(\sigma_0^2/2)} \right\}. \quad (7.2.32b)$$

Из (32a) следует, что при наличии шума в генераторе среднее значение амплитуды $\bar{\rho}$ ниже порога генерации не равно нулю, $\bar{\rho} = (\pi/2)^{1/2} \sigma_0$ (см. рис. 7.2).

Дисперсии флуктуаций амплитуды ниже и выше порога генерации при одинаковых абсолютных значениях $|p|$ почти равны:

$$\sigma_\rho^2 = \rho^2 - \bar{\rho}^2 \approx \begin{cases} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_0^2 & (\text{ниже порога}), \\ \frac{1}{2} \sigma_0^2 & (\text{выше порога}). \end{cases}$$

Относительные же флуктуации амплитуды сильно различаются:

$$\sigma_\rho / \bar{\rho} \approx \begin{cases} 0,35 & (\text{ниже порога}), \\ \sigma_0 / 2\rho_\infty \ll 1 & (\text{выше порога}). \end{cases} \quad (7.2.32b)$$

Пользуясь (31), можно точно рассчитать поведение моментов распределения $w(\rho)$:

$$\langle \rho^n \rangle = \int_0^\infty \rho^n w(\rho) d\rho = C \int_0^\infty \rho^{n+1} \exp \{ -(\rho^2 - q)^2 / 4N \} d\rho,$$

$$C = 2(\pi N)^{-1/2} [1 + \Phi(q/2\sqrt{N})]^{-1}.$$

Отсюда с помощью замены $x = \rho^2 - q$ нетрудно получить соотношение

$$\langle \rho^{n+2} \rangle - q \langle \rho^n \rangle = \frac{1}{2} C \int_{-q}^\infty x(x+q)^{n/2} \exp(-x^2/4N) dx.$$

Интегрирование по частям для случая $n > 0$ приводит к рекуррентной формуле

$$\langle \rho^{n+2} \rangle - q \langle \rho^n \rangle = nN \langle \rho^{n-2} \rangle. \quad (7.2.33a)$$

Если $n=0$, то из предыдущего соотношения получаем

$$\langle \rho^2 \rangle = q + CN e^{-q^2/4N}. \quad (7.2.33b)$$

Пользуясь рекуррентной формулой, находим момент четвертого порядка:

$$\langle \rho^4 \rangle = 2N + q^2 + CN e^{-q^2/4N}. \quad (7.2.33b)$$

Общее выражение для произвольного момента огибающей

$$\langle \rho^n \rangle = C 2^{n/4 - 1/2} N^{n/4 + 1/2} \Gamma(1 + n/2) \times \\ \times \exp \{ -q^2/8N \} D_{-(1+n/2)}(-q/\sqrt{2N}), \quad (7.2.34)$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция, $D_{-m}(z)$ — функция параболического цилиндра, $n = 1, 2, \dots$

Выражения (33) позволяют проследить за изменением средней интенсивности колебаний $\bar{I} = 1/2\bar{\rho}^2$ и дисперсии флуктуаций интенсивности $\sigma_I^2 = \langle \Delta I^2 \rangle = 1/4 [\bar{\rho}^4 - (\bar{\rho}^2)^2]$ с ростом параметра q (рис. 7.4). При этом величина \bar{I} монотонно увеличивается, а относительные флуктуации интенсивности σ_I/\bar{I} уменьшаются.

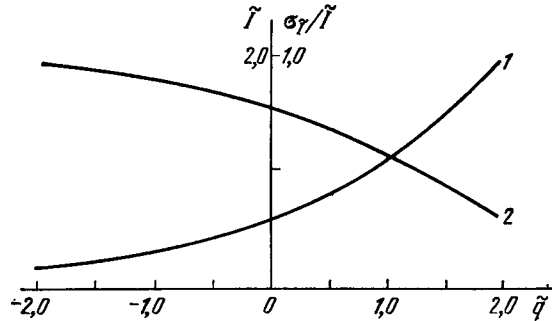


Рис. 7.4. Зависимость приведенной средней интенсивности колебаний $\bar{I} = \bar{I}/\sqrt{N}$ (1) и относительной дисперсии флуктуаций интенсивности σ_I/\bar{I} (2) от параметра $\tilde{q} = q/\sqrt{N}$.

Используя (31), (2.5.26) и (2.5.30), можно найти распределение $w(I)$ интенсивности $I = \rho^2/2$ (см. (7.5.29)) и распределение $w(x)$ самого колебания x (7); функция $w(x)$ имеет вид (2.5.32).

Спектр флуктуаций амплитуды. Ограничимся здесь рассмотрением спектра флуктуаций амплитуды $\tilde{\rho} = \rho - \rho_\infty$ для режима выше порога генерации ($\delta > \delta_{\text{пор}} = \alpha$). Как следует из предыдущего анализа, в этом случае относительные флуктуации амплитуды малы. Поэтому уравнение (28) можно линеаризовать:

$$\dot{\tilde{\rho}} + 2p\tilde{\rho} = \omega_0 \xi_\rho(t), \quad (7.2.35)$$

где

$$p = \delta - \alpha. \quad (7.2.36)$$

Параметр p характеризует прочность предельного цикла; на устойчивом цикле $p > 0$.

Решение уравнения (35) при нулевом начальном условии:

$$\tilde{\rho}(t) = \omega_0 \int_0^t \xi_\rho(t') e^{-2p(t-t')} dt'.$$

Среднее значение $\langle \tilde{\rho} \rangle = 0$. Корреляционная функция амплитудных флуктуаций равна

$$B_{\tilde{\rho}}(\tau) = \langle \tilde{\rho}\tilde{\rho}_\tau \rangle = \frac{\pi\omega_0^2 G_\xi}{8p} [e^{-2p\tau} - e^{-2p(2t+\tau)}] \quad (7.2.37)$$

и зависит от текущего времени t . При выводе (37) учтено соотношение (26). При $t \rightarrow \infty$ амплитудные флуктуации становятся стационарными с корреляционной функцией

$$B_{\tilde{\rho}}(\tau) = \sigma_{\tilde{\rho}}^2 e^{-2p\tau}, \quad \sigma_{\tilde{\rho}}^2 = \pi\omega_0^2 G_\xi / 8p. \quad (7.2.38)$$

Из-за линеаризации уравнения (37) полученные результаты справедливы при $\sigma_{\tilde{\rho}}^2 \ll \bar{\rho}_\infty^2$ или $G_\xi \ll \omega_0^{-2} \beta^{-1} p^2$, т. е. в области существенно выше порога генерации. Хотя мы предполагали источники шума δ -коррелированными, возможность использования метода линеаризации не зависит от этого ограничения. С помощью метода линеаризации можно получить результаты при наличии шумов с любым временем корреляции.

В соответствии с (1.3.31) спектр амплитудных флуктуаций имеет лоренцевскую форму:

$$G_{\tilde{\rho}}(\Omega) = \frac{2\sigma_{\tilde{\rho}}^2 p / \pi}{4p^2 + \Omega^2} = \frac{\omega_0^2 / 4}{4p^2 + \Omega^2} G_\xi. \quad (7.2.39)$$

Согласно (39) ширина спектра флуктуаций огибающей

$$\Delta\Omega = 2p = 2\alpha(\epsilon - 1), \quad (7.2.39a)$$

т. е. при $\epsilon = 2$ ширина спектра флуктуаций огибающей совпадает с шириной полосы «холодного» контура (см. (3.2.32)). Правильность формулы (39) неоднократно проверялась экспериментально как для генераторов радиодиапазона, так и для лазеров. В соответствии с результатами § 2 гл. 5 для этой цели можно использовать схему прямого детектирования; согласно формуле (5.2.4) на выходе квадратичного детектора в радиодиапазоне или фотоумножителя в оптике можно непосредственно получить спектр случайной амплитудной модуляции. Естественно, в реальном эксперименте на выходе детектора наблюдается смесь спектров технических и естественных флуктуаций амплитуды. Чтобы разделить их, надо вести измерения на достаточно высоких частотах $\Omega = \omega - \omega_0$; при $\Omega/2\pi > 10^2 - 10^3$ Гц вклад технических флуктуаций пренебрежимо мал. Уровень естественных флуктуаций амплитуды в генераторе, работающем в режиме развитой генерации, достаточно мал; согласно [51], для He-Ne-лазера $\sqrt{\langle \tilde{\rho}^2 \rangle} / \bar{\rho} \approx 10^{-2} - 10^{-4}$.

Флуктуации фазы. Флуктуации фазы колебаний описываются уравнением (29). В общем случае его анализ затруднителен, поскольку справа в знаменателе стоит случайная амплитуда. Однако, как уже подчеркивалось, в режиме развитой генерации флуктуации амплитуды ρ малы, и ρ в (29) можно заменить средним значением $\bar{\rho}$, т. е. записать

$$\dot{\psi} = (\omega_0/\bar{\rho}) \xi_\phi(t). \quad (7.2.40)$$

Статистические характеристики $\xi_{\varphi}(t)$ определяются (27). Так как в (40) случайная сила $\xi_{\varphi}(t)$ δ -коррелирована, приращение (или набег) фазы за интервал времени τ

$$\Delta\varphi(\tau) = \frac{\omega_0}{\rho} \int_t^{t+\tau} \xi_{\varphi}(t') dt',$$

согласно результатам § 6 гл. 2, представляет собой случайный винеровский процесс. Дисперсия такого процесса линейно зависит от времени τ :

$$\sigma_{\varphi}^2(\tau) = \langle (\Delta\varphi)^2 \rangle = D\tau, \quad D = \frac{\pi\omega_0^2}{2\rho^2} G_{\xi}, \quad (7.2.41)$$

где D — коэффициент диффузии фазы.

Функция распределения $\Delta\varphi$ на основе центральной предельной теоремы является гауссовской:

$$\omega(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}(\tau)} \exp\left\{-\frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sigma_{\varphi}^2(\tau)}\right\}. \quad (7.2.42)$$

Полная фаза колебания равна

$$\varphi_n(t) = \varphi_0 + \left(\frac{\omega_0}{\rho}\right) \int_0^t \xi_{\varphi}(t') dt' = \varphi_0 + \varphi(t).$$

Ее моменты равны $\langle \varphi_n(t) \rangle = \varphi_0$, $\sigma^2(t) = \langle (\varphi_n(t) - \varphi_0)^2 \rangle = Dt$, т. е. $\varphi_n(t)$ представляет собой нестационарный случайный процесс. Функция распределения фазы φ_n имеет вид

$$\omega(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{(\varphi_n - \varphi_0)^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad -\infty < \varphi_n < \infty. \quad (7.2.43)$$

Этот же результат можно получить, решая соответствующее (40) уравнение Фоккера — Планка.

Функция распределения (43) полной фазы в момент времени $t=0$, имеющая вид $\delta(\varphi_n - \varphi_0)$, при устремлении t к бесконечности принимает все более сглаженный вид. Причем фаза φ_n имеет конечную вероятность сколь угодно значительно отличаться от начальной величины.

Абсолютные значения уходов фазы φ_n существенны, если генератор используется в качестве эталона времени. В других случаях (например, нахождение функции распределения колебаний, фазовое детектирование и т. п.) оказывается не важным, имеет ли фаза колебаний значение φ_n или $\varphi_n \pm 2n\pi$ ($n=1, 2, \dots$). Поэтому здесь обычно пользуются фазой φ_n , приведенной к интервалу $[-\pi, +\pi]$, а колебания представляют в виде

$$i(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t)), \quad -\pi \leq \psi \leq \pi. \quad (7.2.44)$$

Как показано в § 6 гл. 2, в интервале периодичности фаза ψ распределена равномерно.

Спектральная плотность частотных флуктуаций. Согласно (40) мгновенная частота колебаний равна

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0}{\rho} \xi_{\varphi}(t).$$

Флуктуации частоты

$$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0 = \frac{\omega_0}{\rho} \xi_{\varphi}(t).$$

Частотный спектр, очевидно, равен

$$G_{\delta\omega}(\Omega) = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\rho}\right)^2 G_{\xi}, \quad (7.2.45)$$

т. е. спектральная плотность частотных флуктуаций является постоянной.

Однако здесь следует иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, случайный процесс $\xi_{\varphi}(t)$ был принят δ -коррелированным в характерных масштабах изменения огибающей и фазы колебания. Во-вторых, как отмечалось выше, в реальных ситуациях в области низких значений Ω частотный спектр будет маскироваться более интенсивными техническими флуктуациями (см. также § 5).

Можно ли тем не менее измерить малые естественные флуктуации частоты на фоне гораздо более сильных технических уходов? Впервые такой эксперимент выполнил в 1937 г. Берштейн. Для этой цели он использовал частотный дискриминатор на линии задержки и то обстоятельство, что спектры естественных и технических флуктуаций частоты сильно различаются; последние быстро спадают по мере увеличения частоты. С методами измерения частотных флуктуаций в радиодиапазоне можно ознакомиться по книге [4].

Спектр колебания; естественная ширина спектральной линии. Для определения формы спектральной линии вычислим сперва корреляционную функцию колебания $x(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ в установленном режиме:

$$B_x(\tau) = \langle xx_{\tau} \rangle = \langle \rho\rho_{\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0(t + \tau) + \varphi_{\tau}) \rangle. \quad (7.2.46)$$

Здесь усреднение должно производиться по ансамблю статистически независимых случайных функций ξ_{ρ} и ξ_{φ} (21), с которыми связаны амплитуда $\rho(t)$ (28) и фаза $\varphi(t)$ (29).

В соответствии с проведенным выше анализом в области, значительно выше порога генерации, флуктуации амплитуды ρ , $\tilde{\rho}$ малы ($\tilde{\rho} \ll \rho$, $\tilde{\rho} = \rho - \bar{\rho}$), а флуктуации фазы описываются уравнением (40). Вследствие этого функцию (46) можно представить в виде

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2} (\bar{\rho}^2 + \langle \tilde{\rho}\tilde{\rho}_{\tau} \rangle) \langle \cos(\omega_0 \tau + \Delta\varphi) \rangle. \quad (7.2.47)$$

Корреляционная функция $\langle \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\tau \rangle$ амплитудных флуктуаций дается формулой (38). Согласно (42) $\langle \sin \Delta\varphi \rangle = 0$, а $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = \exp(-D\tau/2)$. Поэтому

$$\langle \cos(\omega_0\tau + \Delta\varphi) \rangle = \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \omega_0\tau = e^{-D\tau/2} \cos \omega_0\tau. \quad (7.2.48)$$

Таким образом, с учетом (48) и (28) корреляционная функция (47) принимает вид ($\tau \geq 0$)

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2} (\bar{\rho}^2 + \sigma_\rho^2 e^{-D\tau}) e^{-D\tau/2} \cos \omega_0\tau. \quad (7.2.49)$$

Соответствующий (49) спектр колебаний дается выражением

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = G_1(\omega) + G_2(\omega), \quad (7.2.50)$$

где согласно формулам (1.3.31)

$$G_1(\omega) = \frac{\bar{\rho}^2 D}{8\pi} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 + (\omega - \omega_0)^2 \right]^{-1}, \quad (7.2.51a)$$

$$G_2(\omega) = \frac{\sigma_\rho^2}{4\pi} \left(\frac{D}{2} + p \right) \left[\left(p + \frac{D}{2} \right)^2 + (\omega - \omega_0)^2 \right]^{-1}, \quad \omega \geq 0. \quad (7.2.51b)$$

Спектр $G_1(\omega)$ обусловлен только флуктуациями фазы, а спектр $G_2(\omega)$ связан как с амплитудными, так и с фазовыми флуктуациями. Вид спектра (50) показан на рис. 7.5.

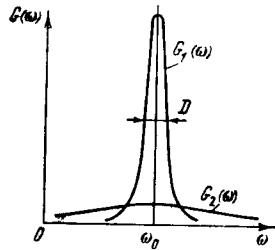


Рис. 7.5. Составляющие спектра колебаний генератора.

В отсутствие флуктуаций ($D=0$, $\sigma_\rho=0$) спектр колебаний представлял бы собой δ -функцию:

$$G(\omega) = G_1(\omega, D \rightarrow 0) = \frac{1}{2} \bar{\rho}^2 \delta(\omega - \omega_0).$$

В реальных условиях наличие шума и вследствие этого флуктуаций амплитуды и фазы приводит к размытию спектральной линии. Поскольку $\bar{\rho}^2 \gg \sigma_\rho^2$ и $p \gg D$, спектр (50) — (51) состоит из узкой спектральной линии шириной D и широкой более слабой линии (фона) шириной $D + 2p$ (рис. 7.5). В окрестности узкой линии вкладом амплитудных флуктуаций можно пренебречь и для спектра колебаний пользоваться формулой

$$G(\omega) \approx \frac{\bar{\rho}^2 D}{8\pi [(D/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (7.2.52)$$

Коэффициент диффузии D (41) определяет естественную ширину $\Delta\omega_e$ спектральной линии колебаний генератора. Выпишем явное выражение для $\Delta\omega_e$, пользуясь (18) и формулами для спектральных

плотностей теплового и дробового шумов (3.4.10) и (2.8.71):

$$\Delta\omega_e = \frac{\pi\omega_0^2}{2\bar{\rho}^2} G_\xi = \frac{\omega_0^2}{2\bar{\rho}^2} \left[e i_a + \frac{4kT\alpha^2}{R\omega_0^2} \right]. \quad (7.2.53)$$

Будем характеризовать действие шума эффективной шумовой температурой T^* :

$$T^* = T + \frac{e i_a \omega_0^2 R}{4k\alpha^2}.$$

Тогда (53) принимает вид

$$\Delta\omega_e = 2kT^* \alpha^2 / R \bar{\rho}^2.$$

Средняя мощность генератора, выделяемая на сопротивлении R , есть $P = R \bar{\rho}^2 / 2$; ширина спектра невозбужденного колебательного контура $\Delta f_k = \alpha / \pi$. Следовательно,

$$\Delta\omega_e = \pi^2 (\Delta f_k)^2 k T^* / P. \quad (7.2.54a)$$

Если воспользоваться выражением для добротности колебательного контура $Q_0 = \omega_0 / 2\pi \Delta f_k$, то

$$\Delta\omega_e = \pi^2 f_0^2 k T^* / Q_0^2 P. \quad (7.2.54b)$$

Оценим естественную ширину линии колебаний. Возьмем $T^* \approx 10^3$ К, $Q_0 = 100$, $f_0 = 10^5$ Гц и $P \approx 1$ мВт. В этом случае $\Delta\omega_e \approx 3 \cdot 10^{-10}$ Гц. Относительная ширина линии $\Delta f_e / f_0 \approx 10^{-15}$. Из рассмотренного примера видно, что естественная ширина линии генератора чрезвычайно мала.

О корреляции флуктуаций амплитуды и фазы. В томсоновском генераторе в режиме развитой генерации флуктуации амплитуды и фазы, как следует из уравнения (40), не коррелированы. Однако существует важный класс автоколебательных систем, так называемых неизохронных генераторов, для которых частота колебаний непосредственно зависит от амплитуды. К таким генераторам относится, например, отражательный клистрон. В надпороговом режиме генерации клистрона укороченное уравнение для фазы имеет вид (см. [4], с. 469)

$$\frac{d\varphi}{dt} = -q_0 \tilde{\rho} + (\omega_0 / \bar{\rho}) \xi_\varphi(t),$$

где q_0 — параметр неизохронности генератора. Флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}$ описываются уравнением (35).

В рассматриваемом случае флуктуации фазы φ содержат компоненту, связанную с амплитудными флуктуациями. Поэтому в корреляционной функции колебаний (46) амплитудные и фазовые флуктуации оказываются коррелированными. Данное обстоятельство приводит к несимметричному спектру колебаний. Этим замечанием мы здесь и ограничимся, подробное рассмотрение спектра колебаний неизохронного генератора можно найти в [4].

Стационарные колебания вблизи порога самовозбуждения; анализ методом статистической линеаризации. Проведенный выше анализ естественной ширины линии колебаний выполнен в предположении, что в режиме развитой генерации (высоко над порогом) в фазовом уравнении (12) огибающую ρ можно заменить средним значением $\bar{\rho}$. Чтобы получить более общий результат, включающий пороговую область, мы воспользуемся методом статистической линеаризации (см. § 7 гл. 1). Однако сначала покажем, что для средней интенсивности колебаний этот метод приводит практически к тем же результатам, которые следуют из изложенного в начале параграфа более строгого анализа. В рассматриваемом случае удобно исходить из уравнения (9) для комплексной амплитуды A .

Статистически линеаризованное уравнение (9) принимает вид (см. также (1.7.76))

$$\frac{dA}{dt} + (\alpha - \delta) A + 2m\beta\sigma^2 A = \omega_0 \eta(t), \quad (7.2.55)$$

где $\sigma^2 = I = \langle |A|^2 \rangle / 2$ — средняя интенсивность колебаний, m — подлежащий определению численный коэффициент. Перейдем к уравнению для средней интенсивности колебаний

$$\frac{d\sigma^2}{dt} + 2(\alpha - \delta)\sigma^2 + 4m\beta\sigma^4 = \frac{1}{2} \omega_0 \langle \eta(t) A^*(t) \rangle + \text{к. с.}$$

Среднее значение справа в полученном уравнении найдем подобно тому, как это было сделано при определении $\bar{\xi}_p$:

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) A^*(t) \rangle + \text{к. с.} &= \langle \eta A^{*(k)} \rangle + \text{к. с.} = \\ &= \omega_0 \int_{t_0}^t \langle \eta(t) \eta^*(t') \rangle dt' + \text{к. с.} = \pi \omega_0 G_{\xi}. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение (196). Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{d\sigma^2}{dt} - 2\rho\sigma^2 + 4m\beta\sigma^4 = \frac{\pi}{2} \omega_0^2 G_{\xi}. \quad (7.2.56)$$

В методе статистической линеаризации величину m выбирают так, чтобы интенсивность σ^2 в случае большого превышения порога ($p > 0$) совпадала со значением интенсивности, получаемым из строгого расчета. При этом автоматически получается правильное значение для σ^2 и в случае $p < 0$, когда нелинейность вообще несущественна. Таким образом, коэффициент m подлежит определению из условия $\sigma^2 = \sigma_{\infty}^2$ при $p > 0$.

Стационарное значение σ^2 удовлетворяет уравнению

$$4m\beta\sigma^4 - 2\rho\sigma^2 = (\pi/2) \omega_0^2 G_{\xi},$$

откуда, учитывая (14) и (15), получаем:

$$\sigma^2 = (1/4m)(\epsilon - 1)\rho_1^2 \{1 \pm \sqrt{1 + 8m(\epsilon - 1)^{-2} Q^2}\}. \quad (7.2.57)$$

Здесь знак минус соответствует $\epsilon \leq 1$ (ниже порога), а знак плюс — $\epsilon \geq 1$ (выше порога) и введено обозначение

$$Q^2 = \pi \omega_0^2 G_{\xi} / 4\beta\rho_1^4.$$

При очень большом превышении порога

$$\sigma^2 = (\epsilon - 1)\rho_1^2 / 2m, \quad Q/\epsilon \ll 1. \quad (7.2.58)$$

Ранее же было показано, что гораздо выше порога генерации огибающая колебаний описывается распределением (326), а ее флуктуации малы. Иначе говоря, при очень большом превышении порога интенсивность колебаний почти не флуктуирует и, следовательно (см. (15) и (336)),

$$\sigma^2 = \langle \rho^2 \rangle / 2 \approx \bar{\rho}^2 / 2 = \rho_{\infty}^2 / 2 = \rho_1^2 (\epsilon - 1) / 2. \quad (7.2.59)$$

Сравнивая (58) и (59), находим, что $m = 1$.

В соответствии с (57) средняя интенсивность колебаний в контуре, находящемся под воздействием шума, следующим образом зависит от параметра накачки:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\rho_1^2 / 2} &= \\ &= \begin{cases} 0,5(1 - \epsilon) [\sqrt{1 + 8(\epsilon - 1)^{-2} Q^2} - 1] & (\text{ниже порога, } \epsilon \leq 1), \\ \sqrt{2} Q & (\text{на пороге, } \epsilon = 1), \\ 0,5(\epsilon - 1) [\sqrt{1 + 8(\epsilon - 1)^{-2} Q^2} + 1] & (\text{выше порога, } \epsilon \geq 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.2.60)$$

На рис. 7.6 представлены две зависимости σ^2 от параметра ϵ , одна из которых построена по формуле (60), а другая найдена с помощью (336). Можно констатировать хорошее совпадение обеих кривых. Это обстоятельство дает нам основание для использования метода статистической линеаризации при расчете других статистических характеристик колебаний.

Обратимся к корреляционной функции колебаний $B(\tau) = \langle A A_{\tau}^* \rangle / 2$. Воспользуемся уравнением (55), принимая во внимание значение $m = 1$. Тогда можно получить

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} + (2\beta\sigma^2 - \rho) B(\tau) = 0.$$

Отсюда находим

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp \{-(2\beta\sigma^2 - \rho) |\tau|\}. \quad (7.2.61)$$

Корреляционной функции соответствует лоренцевский спектр с шириной по половинному уровню

$$\Delta\omega_{\epsilon} = 2(2\beta\sigma^2 - \rho).$$

Подставив сюда (60), получим зависимость ширины линии генерации от параметра накачки:

$$\frac{\Delta\omega_e}{\beta\rho^2} = \begin{cases} (1 - \epsilon) [\sqrt{1 + 8(\epsilon - 1)^{-2}Q^2} + 1] & (\text{ниже порога, } \epsilon \leq 1), \\ 2\sqrt{2}Q & (\text{на пороге, } \epsilon = 1), \\ (\epsilon - 1) [\sqrt{1 + 8(\epsilon - 1)^{-2}Q^2} - 1] & (\text{выше порога, } \epsilon \geq 1). \end{cases} \quad (7.2.62)$$

Зависимость ширины линии колебаний от параметра накачки ϵ изображена на рис. 7.7. В области, примыкающей непосредственно к порогу генерации ($\epsilon \approx 1$), имеет место резкая, практически скачкообразная зависимость.

Из (61) и (62) следует интересный факт: средняя интен-

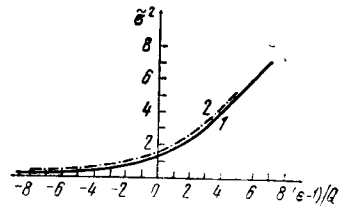


Рис. 7.6. Приведенная средняя интенсивность $\sigma^2 = 2\sigma^2/Q\rho^2$ колебаний автогенератора в зависимости от параметра накачки ϵ .

Кривая 1 построена с помощью формулы (336), вытекающей из уравнения Фоккера — Планка; кривая 2 — по формуле (60), найденной методом статистической линеаризации.

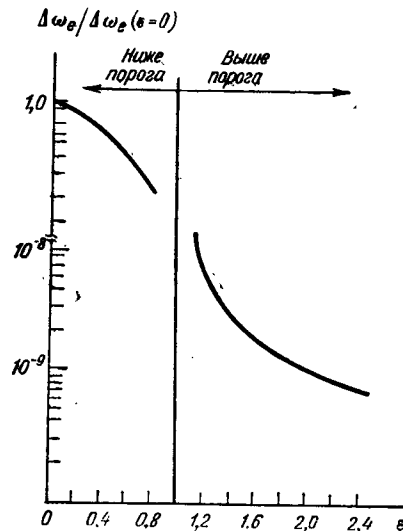


Рис. 7.7. Относительная ширина спектра колебаний генератора $\Delta\omega_\epsilon/\Delta\omega_\epsilon(\epsilon=0)$ в зависимости от параметра накачки ϵ [53].

Кривая соответствует значению $Q^2 = 5 \cdot 10^{-10}$.

сивность и ширина линии колебаний подчиняются соотношению

$$\Delta\omega_\epsilon = \pi\omega_0^2 G_\epsilon / 2\sigma^2, \quad (7.2.63)$$

которое не зависит от параметра накачки ϵ . Выражение (63) в режиме существенно выше порога генерации, когда имеет место соотношение (59), дает значение $\Delta\omega_\epsilon$ в два раза большее, чем значение, определяемое (53).

Сравним еще выражение (63) для случая ниже порога генерации с результатом, полученным непосредственно из уравне-

ния (9). Полагая в (9) $\beta=0$, для комплексной амплитуды A получаем уравнение

$$\frac{dA}{dt} + \rho A = \omega_0 \eta(t),$$

в соответствии с которым корреляционная функция $B(\tau)$ равна

$$B(\tau) = \frac{\pi}{4|\rho|} \omega_0^2 G_\epsilon e^{-|\rho|\tau}. \quad (7.2.64)$$

При выводе (64) учтено соотношение (196). Ниже порога генерации средняя интенсивность колебаний равна

$$I = \sigma^2 = \frac{\pi}{4|\rho|} \omega_0^2 G_\epsilon, \quad (7.2.65a)$$

а ширина спектра колебаний

$$\Delta\omega_\epsilon = 2|\rho|. \quad (7.2.65b)$$

Следовательно, в этом случае

$$\Delta\omega_\epsilon = \pi\omega_0^2 G_\epsilon / 2\sigma^2. \quad (7.2.66)$$

Выражение (66) в точности совпадает с (63). Таким образом, расчеты в приближении метода статистической линеаризации дают значение ширины линии колебаний, завышенное в два раза в области выше порога генерации ($\epsilon \gg 1$). Вместе с тем (62) позволяет достаточно точно оценить ширину спектра генерации вблизи ($\epsilon \approx 1$) и ниже ($\epsilon < 1$) порога генерации.

§ 3. Установление колебаний в генераторе.

Нестационарная статистика устанавливающихся колебаний

Выше мы проанализировали установившиеся колебания в генераторе. В настоящем параграфе будет рассмотрен процесс установления колебаний. Если «затравкой» самовозбуждающихся колебаний служит собственный шум генератора, начальная амплитуда колебаний, возникающих при включении усиления или обратной связи, представляет собой случайный процесс. Случайной величиной оказывается и время достижения установившейся амплитуды автоколебаний [52]. Анализ статистических характеристик амплитуды и времени достижения заданного уровня амплитуды устанавливающихся колебаний и посвящен данный параграф.

Изменение огибающей в процессе установления колебаний в генераторе описывается уравнением (7.2.28):

$$\rho + [-\rho + \beta\rho^2]\rho = \frac{\pi\omega_0^2}{4\rho} G_\epsilon + \omega_0 \xi_\rho(t). \quad (7.3.1)$$

Статистические свойства случайной силы $\xi_p(t)$ (7.2.21б) определяются (7.2.26); $\rho = \delta - \alpha$.

Для случая «запуска» генератора от шумов начальная амплитуда $\rho_0 = \rho(t=0)$ является случайной величиной. Функцию распределения $w_0(\rho_0)$ естественно считать рэлеевской:

$$w_0(\rho_0) = \frac{\rho_0}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{\rho_0^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad (7.3.2)$$

где σ_0^2 — интенсивность начального шума, т. е. соответствующего моменту времени $t=0$.

Для выяснения физики изучаемого процесса решение уравнения (1) целесообразно разбить на два этапа:

1) сначала, полагая $G_\xi = 0$, исследовать статистические характеристики амплитуды устанавливающихся колебаний, связанные только с флуктуациями начальных условий;

2) далее рассмотреть возмущения вычисленных указанным способом амплитудных траекторий случайной силой $\xi_p(t)$.

Напомним, что, поскольку в настоящем параграфе рассматриваются существенно нестационарные случайные процессы, все усреднения понимаются в смысле усреднения по ансамблю реализаций.

Статистические характеристики амплитуды в отсутствие флуктуационной силы. В этом случае $G_\xi = 0$ и уравнение (1) оказывается аналогичным уравнению (1.6.4). Решение последнего (1.6.5) в обозначениях настоящего параграфа имеет вид

$$\rho(t) = \rho_\infty \left[1 + \left(\frac{\rho_0^2}{\rho_\infty^2} - 1 \right) e^{-\tau} \right]^{-1/2} = F(\rho_0), \quad (7.3.3)$$

где $\tau = \rho t/2$, ρ_∞ — установившееся стационарное значение амплитуды, вычисленное при $G_\xi = 0$ (см. также (7.2.14)):

$$\rho_\infty^2 = \rho/\beta \quad (7.3.4)$$

(рассматриваем надпороговый режим генерации, $\rho > 0$). Статистический ансамбль реализаций процесса установления амплитуды (3) показан на рис. 1.14.

Функцию распределения амплитуды $w_t(\rho)$ найдем, воспользовавшись соотношением (1.2.11):

$$w_t(\rho) = w_0[F^{-1}(\rho)] \left| \frac{dF^{-1}(\rho)}{d\rho} \right|, \quad (7.3.5)$$

где $F^{-1}(\rho)$ — обратная функция; $\rho_0 = F^{-1}(\rho)$. Интересно заметить, что она получается из (3) заменой $\rho \leftrightarrow \rho_0$ и $t \rightarrow -t$:

$$\rho_0 = \rho_\infty \left[1 + \left(\frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - 1 \right) e^\tau \right]^{-1/2} = F^{-1}(\rho). \quad (7.3.6)$$

После преобразований с учетом (2) для нестационарной функции распределения амплитуды устанавливающихся колебаний получаем

$$w_t(\rho) = \frac{2K_0\rho_\infty^2\rho}{\{\rho^2 + (\rho_\infty^2 - \rho^2)e^\tau\}^2} \exp \left\{ \tau - \frac{K_0\rho^2}{\rho^2 + (\rho_\infty^2 - \rho^2)e^\tau} \right\}, \quad (7.3.7)$$

где $K_0 = \rho_\infty^2/2\sigma_0^2$.

Функция распределения (7) обладает следующими свойствами. При $\tau=0$ она, как и следовало ожидать, переходит в рэлеевскую функцию распределения (2). При $\tau \rightarrow \infty$

$$w_t(\rho) \approx 2K_0 e^{-\tau} \frac{\rho_\infty^2 \rho}{(\rho_\infty^2 - \rho^2)^2} \exp \left\{ -K_0 e^{-\tau} \frac{\rho^2}{\rho_\infty^2 - \rho^2} \right\}.$$

Отсюда видно, что при $K_0 e^{-\tau} \rightarrow 0$ функция распределения становится все уже, превращаясь в пределе в δ -функцию, причем экстремум имеет место при $\rho = \rho_\infty$. Сказанное иллюстрируется рис. 7.8, 7.9, откуда также следует, что нестационарная дисперсия амплитуды в процессе установления колебаний сначала нарастает, проходит через максимум и затем уменьшается.

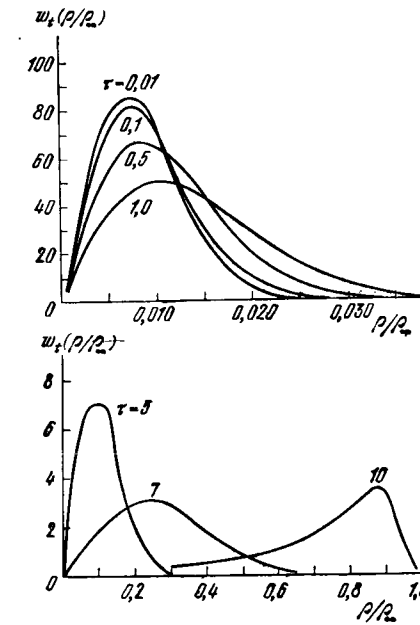


Рис. 7.8. Распределение амплитуд устанавливающихся колебаний $w_t(\rho/\rho_\infty)$ для параметра $K_0 = 2 \cdot 10^4$ и различных значений безразмерного времени $\tau = \rho t/2$.

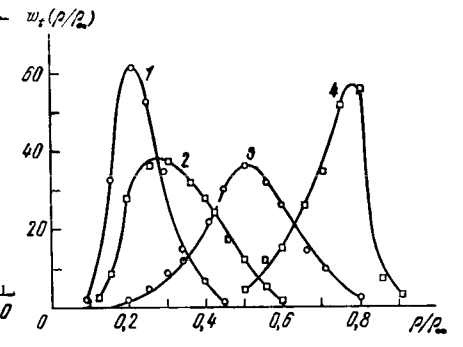


Рис. 7.9. Распределение амплитуд $w_t(\rho/\rho_\infty)$ для отражательного клистрона [11].

Точки — экспериментальные данные для разных моментов времени t : 1) 520 нс; 2) 550 нс; 3) 590 нс; 4) 660 нс. Моменту $t=0$ соответствует включение генератора.

Для количественного исследования поведения дисперсии амплитуды вычислим среднюю $\bar{\rho}$ и среднеквадратичную $\bar{\rho}^2$ амплитуды

колебаний:

$$\bar{\rho} = \int_0^{\infty} \rho \omega(\rho) d\rho = \int_0^{\infty} F(\rho_0) \omega(\rho_0) d\rho_0,$$

$$\bar{\rho}^2 = \int_0^{\infty} \rho^2 \omega(\rho) d\rho = \int_0^{\infty} F^2(\rho_0) \omega(\rho_0) d\rho_0.$$

Подставляя сюда (2), (3) и пользуясь табличными интегралами 3.383 (ГР, с. 333), получим

$$\bar{\rho} = (1 - e^{-\tau})^{-1/2} e^{K(\tau)/2} W_{-1/2, 1/2}(K(\tau)), \quad (7.3.8)$$

$$\bar{\rho}^2 = 2\sigma_0^2 e^{\tau} K^2(\tau) e^{K(\tau)} \Gamma(-1, K(\tau)). \quad (7.3.9)$$

Здесь $W_{-1/2, 1/2}(x)$ — функция Уиттекера, $\Gamma(a, x)$ — неполная гамма-функция и введено обозначение

$$K(\tau) = \rho_{\infty}^2 / [2\sigma_0^2 (e^{\tau} - 1)]. \quad (7.3.10)$$

В большинстве практических случаев отношение $K_0 = \rho_{\infty}^2 / 2\sigma_0^2$ весьма велико ($K_0 \sim 10^4 - 10^6$, а в ряде случаев $\sim 10^9$), так что для большей части процесса установления можно принять $K(\tau) \gg 1$. При этом формулы (8), (9) можно упростить. Так, для (9), воспользовавшись представлением $\Gamma(a, x)$ в виде непрерывной дроби:

$$\Gamma(a, x) = \frac{x^a e^{-x}}{1 + \frac{1-a}{1 + \frac{2-a}{1 + \frac{x}{\dots}}}}$$

получаем

$$\bar{\rho}^2 = \frac{\rho_{\infty}^2 / 2}{1 + (\rho_{\infty}^2 / 4\sigma_0^2 - 1) e^{-\tau}}. \quad (7.3.11)$$

Следует помнить, что выражение (11) справедливо для не слишком больших значений τ в силу условия $K(\tau) \gg 1$.

Пользуясь соотношениями для гамма-функций

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x), \quad x^{-a} \gamma(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(a+n)},$$

нетрудно убедиться, что при больших временах τ ($K(\tau) < 1$) независимо от величины начальных флуктуаций достигается одинаковое установившееся значение интенсивности колебаний $\bar{\rho}^2 = \rho_{\infty}^2$.

На рис. 7.10 показано временное поведение дисперсии амплитуды $\sigma_{\rho}^2 = \bar{\rho}^2 - \bar{\rho}^2$, найденное с помощью (8) и (9). Интенсивность начальных флуктуаций σ_0^2 влияет на время t_y достижения заданного уровня средней интенсивности. Если $\rho^2(t) / \rho_{\infty}^2 = 1 - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \ll 1$,

то согласно (3)

$$2\tau_y = \rho t_y = \ln \left(\frac{\rho_{\infty}^2}{\rho_0^2} - 1 \right) \varepsilon_0^{-1} \approx \ln \frac{\rho_{\infty}^2}{\rho_0^2} \varepsilon_0^{-1}. \quad (7.3.12)$$

Пользуясь (2) и (3), можно найти одномерную функцию распределения времени достижения определенного уровня амплитуды $\rho(t) = \rho$. Для этого время t необходимо рассматривать как функцию ρ_0 . Вычисления, подобные примененным для расчета (7), дают

$$\omega_{\rho}(\tau) = \frac{K_0 [\rho_{\infty}^2 / \rho^2 - 1]}{[1 + (\rho_{\infty}^2 / \rho^2 - 1) e^{\tau}]^2} \exp \left\{ \tau - K_0 \left[1 + \left(\frac{\rho_{\infty}^2}{\rho^2} - 1 \right) e^{\tau} \right]^{-1} \right\}. \quad (7.3.13)$$

Распределение (13) показано на рис. 7.11. Детальный анализ статистических характеристик времени τ на основе (13) возможен только с привлечением численных методов.

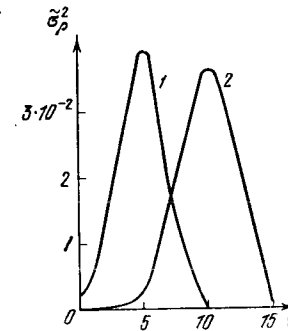


Рис. 7.10. Нестационарная относительная дисперсия амплитуды колебаний $\tilde{\sigma}_{\rho}^2 = \sigma_{\rho}^2 / \rho_{\infty}^2 = (\bar{\rho}^2 - \rho^2) / \rho_{\infty}^2$ для параметра $K_0 = 200$ (1) и $2 \cdot 10^4$ (2).

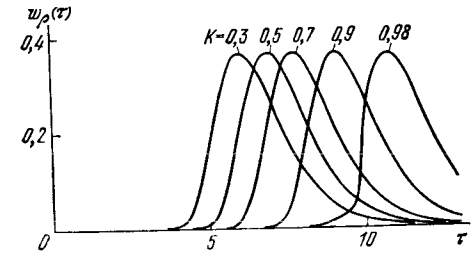


Рис. 7.11. Функция распределения времени достижения уровня $\rho^2(t) = K\rho_{\infty}^2$; $\tau = \rho t / 2$.

Для значений τ , при которых $K(\tau) \gg 1$, генератор ведет себя как линейный контур с отрицательным сопротивлением. В связи со сказанным, полагая в (7) и (13) $\rho \ll \rho_{\infty}$, нетрудно получить упрощенные выражения

$$\omega_t(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_0^2 e^{2\tau}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2 e^{\tau}} \right], \quad (7.3.14)$$

$$\omega_{\rho}(\tau) = \frac{\rho^2}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\left(\tau + \frac{\rho^2}{2\sigma_0^2} e^{-\tau} \right) \right\}. \quad (7.3.15)$$

На рассматриваемом линейном этапе функция распределения амплитуды (14) является рэлеевской с экспоненциально нарастающей

дисперсией

$$\sigma_p^2(t) = 0,5(4 - \pi) \sigma_0^2 e^{-t}.$$

Функция распределения времени (15) — несколько несимметричная, с максимумом при

$$t_{\max} = \ln \rho^2 / 2\sigma_0^2 \quad (7.3.16)$$

($t_{\max} = 2t_{\max}/\rho$ — наивероятнейшее время достижения амплитуды ρ) и дисперсией

$$\sigma_t^2 = (0,64/\rho)^2. \quad (7.3.17)$$

Влияние флуктуационной силы на статистические характеристики амплитуды.

Наличие флуктуационных сил (правая часть уравнения (1)) вносит возмущение в рассмотренные выше амплитудные траектории. При проведении количественной оценки можно зафиксировать начальное значение амплитуды ρ_0 и исследовать флуктуационное размытие выбранной амплитудной траектории, а затем воспользоваться статистическими характеристиками амплитуды ρ .

В общем случае флуктуации начальной амплитуды ρ_0 и флуктуации внешней силы влияют неоднородно на интенсивность колебаний. Вместе с тем в некоторых случаях исследование нестационарной статистики устанавливающихся колебаний при наличии флуктуационной силы угадается свести к задаче исследования установления колебаний в генераторе со случайной амплитудой [11].

Следует подчеркнуть, что сказанное нельзя распространить на установившийся режим генерации. Как было показано выше, флуктуации начальной амплитуды колебаний не влияют на ее установившееся значение. В то же время, как следует из § 2, флуктуационная сила вызывает флуктуации амплитуды колебаний и в режиме развитой генерации.

Отметим, что экспериментальное исследование статистических характеристик амплитуды и времени для достижения определенного уровня амплитуды в процессе установления колебаний описано в [11], где получено согласно с теорией (см. также рис. 7.12). К вопросу о статистических свойствах колебаний в процессе установления мы еще вернемся в § 5.

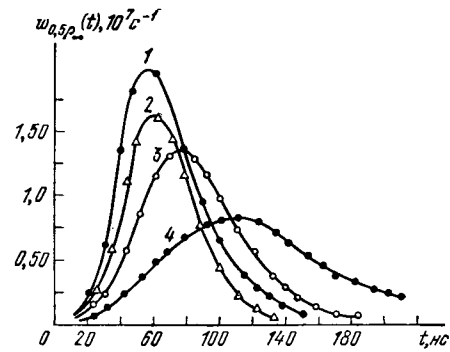


Рис. 7.12. Экспериментальная функция распределения $\omega_{0,5\rho_{\infty}}(t)$ времени достижения амплитуды ρ , равной половине установившейся, в различных точках области генерации клистрона [11].

Параметром кривых является отрицательное напряжение на отражателе $V_{отр}$: 1) 135,5 В (генерируемая мощность максимальна, P_{\max}); 2) 139 В; 3) 142 В; 4) 144 В ($P = 0,4P_{\max}$).

Как было показано выше, флуктуации начальной амплитуды колебаний не влияют на ее установившееся значение. В то же время, как следует из § 2, флуктуационная сила вызывает флуктуации амплитуды колебаний и в режиме развитой генерации.

Отметим, что экспериментальное исследование статистических характеристик амплитуды и времени для достижения определенного уровня амплитуды в процессе установления колебаний описано в [11], где получено согласно с теорией (см. также рис. 7.12). К вопросу о статистических свойствах колебаний в процессе установления мы еще вернемся в § 5.

§ 4. О флуктуациях в генераторе с несколькими устойчивыми состояниями. Одноконтурный параметрический генератор

Рассмотренный в предыдущих параграфах томсоновский генератор с мягким самовозбуждением (кубичной нелинейностью) является типичным примером генератора с устойчивой амплитудой и произвольным значением фазы. Характер установившегося движения в генераторах подобного типа определяется в основном динамическими силами системы. Иное положение для генераторов с несколькими устойчивыми состояниями, различающимися амплитудами или фазами, в которых выбор того или иного состояния определяется начальными условиями. В этих генераторах роль флуктуационных воздействий, в особенности воздействий на начальных этапах процесса установления колебаний, принципиальна: флуктуации существенно влияют на характер установившегося движения, определяя в ряде случаев выбор устойчивого состояния. Последнее обстоятельство представляет наибольший интерес при изучении флуктуационных явлений в таких генераторах [12—14]. Анализ особенностей процесса установления в генераторах с несколькими устойчивыми состояниями мы проведем на примере одноконтурного параметрического генератора, обладающего двумя устойчивыми состояниями, отличающимися фазой генерируемых колебаний.

Будем рассматривать одноконтурный параметрический генератор с переменной емкостью (см. рис. 6.2), в котором ограничение стационарной амплитуды колебаний происходит за счет нелинейного сопротивления с инерционной квадратичной характеристикой [1]: $R = R_0 + 2\beta\tilde{u}^2$ (усреднение производится по периоду колебаний). Колебания в таком генераторе описываются уравнением (ср. с (6.2.3))

$$\ddot{u} + 2(\alpha + 2\beta\tilde{u}^2)\dot{u} + \omega_0^2\{1 + m \sin(\omega_n t + \varphi_n)\}u = 0, \quad (7.4.1)$$

где u — напряжение на постоянной емкости, ω_0 — собственная частота контура, m — коэффициент модуляции емкости.

Если решение уравнения (1) искать в виде

$$u(t) = \rho(t) \cos\left(\frac{1}{2}\omega_n t + \frac{1}{2}\varphi_n - \varphi(t)\right), \quad (7.4.2)$$

где $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза, то соответствующие укороченные уравнения параметрического генератора принимают вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left[-\alpha + \frac{m\omega_n}{2} \cos 2\varphi - \beta\rho^2 \right], \quad (7.4.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = h\omega_n - \frac{m\omega_n}{2} \sin 2\varphi. \quad (7.4.4)$$

Здесь $h = [1/4\omega_n^2 - \omega_0^2]/\omega_n^2$ — относительная отстройка.

Для простоты будем считать $h=0$ ($\omega_n=2\omega_0$). В этом случае стационарные значения фазы определяются выражением

$$\sin 2\varphi_\infty = 0. \quad (7.4.5)$$

Из (5) получаем четыре возможных значения фазы:

$$\varphi_\infty = 0, \pi/2, -\pi/2, \pi. \quad (7.4.6)$$

Для фаз $\varphi_\infty = \pi/2$ и $\varphi_\infty = -\pi/2$ ($\cos 2\varphi_\infty = \cos \pi = -1$) параметрические колебания подавляются. Фазы $\varphi_\infty = 0$ и $\varphi_\infty = \pi$ ($\cos \varphi_\infty = 1$) соответствуют устойчивым параметрическим колебаниям, для этих значений фаз энергия накачки передается колебаниям.

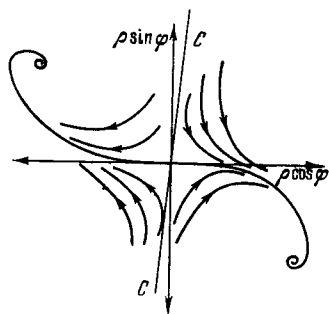


Рис. 7.13. Области притяжения стационарных фаз одноконтурного параметрического генератора (разделены сепаратрисой C).

Из (3) при $\dot{\rho} = 0$ следует, что в параметрическом генераторе возможны два устойчивых состояния, которым соответствует одинаковое значение установившейся амплитуды и различные значения установившейся фазы, отсчитываемой от накачки, и которые сдвинуты друг относительно друга на π . Общее представление о характере переходных процессов в параметрическом генераторе может быть получено из рассмотрения фазовой плоскости системы (рис. 7.13), построенной в координатах $y = \rho \sin \varphi$, $x = \rho \cos \varphi$ для общего случая $h \neq 0$.

Решение уравнения (4) при $h=0$ имеет вид

$$\varphi = \arctg [e^{-\Gamma_0 t} \operatorname{tg} \varphi_0], \quad \varphi_0 = \varphi(t=0), \quad (7.4.7)$$

т. е. процесс установления фазы характеризуется временным масштабом

$$t_\varphi = 1/\Gamma_0, \quad \Gamma_0 = m\omega_n. \quad (7.4.8)$$

Подставляя (7) в (3) и полагая $\beta\rho^2 \ll \alpha$, найдем закон изменения амплитуды $\rho(t)$ на линейном этапе процесса установления:

$$\rho(t) = \rho_0 \{ \cos^2 \varphi_0 + e^{-2\Gamma_0 t} \sin^2 \varphi_0 \}^{1/2} e^{(\Gamma_0/2 - \alpha)t}. \quad (7.4.9)$$

Видно, что при $t > t_\varphi$ имеет место экспоненциальный рост амплитуды с инкрементом, равным $\Gamma_0/2 - \alpha$. Дальнейшее поведение амплитуды на нелинейном этапе совершенно аналогично таковому для томсоновского генератора (см. § 3).

Вероятность возбуждения устойчивых состояний; квантование фазы. Рассмотрим влияние флуктуационных начальных условий на возбуждение параметрического генератора. Статистику начального «шума» естественно принять гауссовской, т. е. функции

распределения амплитуды и фазы начального колебания имеют вид

$$\omega_0(\rho_0) = \frac{\rho_0}{2\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{\rho_0^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad \omega_0(\varphi_0) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_0 \leq \pi. \quad (7.4.10)$$

Пользуясь соотношениями (7), (10) и формулами преобразования функций распределения для функционально связанных величин (см. § 2 гл. 1, а также предыдущий параграф), для нестационарной функции распределения фазы находим

$$\omega_t(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\Gamma_0 t}}{\cos^2 \varphi + e^{\Gamma_0 t} \sin^2 \varphi}. \quad (7.4.11)$$

Графики функции распределения (11) приведены на рис. 7.14. Видно, что с ростом времени t вблизи стационарных фаз $\varphi_\infty = 0, \pi$ формируются два горба плотности вероятности. В пределе при $t \rightarrow \infty$ плотность вероятности фазы $\omega_\infty(\varphi) = 0$ всюду, где $\varphi \neq \varphi_\infty$, и испытывает дельтаобразные выбросы при $\varphi = 0, \pi$ (см. также рис. 2.8 и с. 425 и 447).

В соответствии с (7) вероятность возбуждения устойчивых состояний определяется только функцией распределения начальной фазы:

$$P_1(\varphi=0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega_0(\varphi_0) d\varphi_0, \quad P_2(\varphi=\pi) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \omega_0(\varphi_0) d\varphi_0. \quad (7.4.12)$$

Значениям $\varphi_0 = \pm \pi/2$ соответствует сепаратриса на фазовой плоскости (см. рис. 7.14).

В случае равномерной функции распределения фазы (10)

$$P_1 = P_2 = 1/2,$$

т. е. вероятности возбуждения колебаний с фазой 0 или π равны. В общем случае для функции $\omega_0(\varphi_0)$, отличной от (10), $P_1 \neq P_2$. Если запуск параметрического генератора происходит от шумов, представляющих собой сумму гауссовского шума и регулярного сигнала $u_c = \rho_c \cos(\omega_0 t + \varphi_c)$, то согласно формуле (2.4.69)

$$\omega(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\rho_c}{2\pi\sigma_0} \cos(\varphi_0 - \varphi_p). \quad (7.4.13a)$$

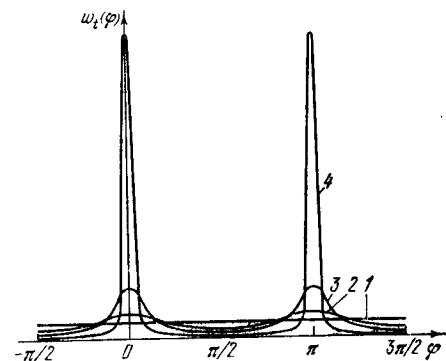


Рис. 7.14. Функция распределения фазы $\omega_t(\varphi)$ устанавливающихся параметрических колебаний для различных моментов времени $\tau = \Gamma_0 t$: 1) 0; 2) 0,5; 3) 1,0; 4) 3,0.

Теперь получим

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\rho_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cos \varphi_c. \quad (7.4.136)$$

Разность вероятностей возбуждения рассматриваемых фаз 0 и π

$$\Delta P(0) = P_1 - P_2 = 2 \frac{\rho_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cos \varphi_c \quad (7.4.14)$$

зависит не только от отношения начальных интенсивностей регулярного колебания и гауссовского шума, но и от фазы колебания. Знак ΔP позволяет при многократных запусках параметрического генератора определить, в какой интервал, $(-\pi/2, \pi/2)$ или $(\pi/2, -\pi/2)$, попадает фаза φ_c начального регулярного колебания. Знание величин ΔP и ρ_c/σ_0 позволяет, очевидно, найти значение и самой фазы φ_c (13), (14).

Таким образом, параметрический генератор производит, по существу, *квантование фазы*. В такой системе сигнал на выходе имеет строго постоянную амплитуду (реализуется «идеальное» амплитудное ограничение), а его фаза определяется фазой входного сигнала. При этом непрерывному множеству значений входной фазы в одноконтурном параметрическом генераторе сопоставляется два значения выходной фазы. Квантование фазы, в отличие от квантования амплитуды, представляет собой квантование «по интервалу»: область изменения фазы, приведенной в большинстве случаев к интервалу периодичности $(0, 2\pi)$, делится на i подынтервалов, заключенных между значениями фазы $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$. При попадании фазы φ квантуемого сигнала в интервал $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ квантующее устройство выдает сигнал с одной и той же фазой.

Обработка таким образом квантованного сигнала в фазовых системах позволяет преобразовать фазовую информацию в амплитудную. Для регистрации амплитудных сигналов уже можно использовать цифровые способы. Такой метод находит применение в технике фазовых измерений, в технике обнаружения слабых сигналов на фоне шумов [10, 14].

Флукуационные переходы из одного устойчивого состояния в другое. В проведенном анализе учитывались только случайные начальные условия или предосцилляционные шумы. Весьма существенными для параметрических генераторов оказываются эффекты, связанные с воздействием флукуационных сил на процесс установления колебаний. Флукуационные силы в параметрическом генераторе могут приводить к переходу фазы из одной области притяжения в другую [15].

Для исследования флукуационных переходов в правую часть уравнения (1) необходимо добавить случайную силу $\omega_0 \xi(t)$. Тогда фазовое уравнение (4) принимает вид (ср. с (7.2.29))

$$\frac{d\varphi}{dt} = h \omega_n - \frac{n(\omega_0)}{2} \sin 2\varphi + \frac{\omega_0}{\rho} \xi_\varphi. \quad (7.4.15)$$

Статистические характеристики ξ_φ определяются (7.2.27):

$$\xi_\varphi = 0, \quad \langle \xi_\varphi \xi_\varphi(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \pi G_\xi \delta(\tau), \quad (7.4.16)$$

где G_ξ — спектральная плотность δ -коррелированного случайного процесса $\xi(t)$. Уравнение (15) в общем случае является нестационарным, что обусловлено зависимостью от времени амплитуды $\rho(t)$.

Можно дать наглядную интерпретацию флукуационным явлениям при установлении фазы, если сопоставить движению фазы в параметрическом генераторе одномерное движение брауновской частицы в силовом поле, потенциал которого

$$U(\varphi) = h\omega_n \varphi - \frac{\Gamma_0}{4} \cos 2\varphi. \quad (7.4.17)$$

График функции $U(\varphi)$ изображен на рис. 7.15. Потенциальная функция $U(\varphi)$ является периодической. Минимумы $U(\varphi)$ (потенциальные ямы) соответствуют устойчивым состояниям параметрического генератора, максимумы (потенциальные барьеры) — сепаратрисам.

В отсутствие флукуационной силы ($\xi_\varphi \equiv 0$) процесс установления можно представить как скатывание в потенциальную яму изображающих точек, распределенных в момент времени $t=0$ в соответствии с функцией $\omega_0(\varphi_0)$. При наличии флукуационной силы $\xi_\varphi(t)$, наряду с движением в сторону потенциальной ямы возможны движения в сторону барьера. Иначе говоря, имеется определенная вероятность достижения барьера и перехода изображающей точки в другую область притяжения.

При этом возможные переходы можно условно разделить на два типа: «краевые» и «глубинные». В первом случае (при временах $t < t_\varphi$) число точек, расположенных вблизи потенциального барьера, достаточно велико, а действие случайной силы $\xi_\varphi(t)/\rho$ максимально. Поэтому вероятность «краевых» переходов велика. Во втором случае ($t > t_\varphi$), когда эффективное действие случайной силы $\xi_\varphi(t)/\rho$ спадает как $\exp\{-\frac{\Gamma_0}{2} - \alpha t\}$, подавляющее большинство изображающих точек находится вблизи потенциальной ямы, совершая малые колебания вблизи устойчивого состояния равновесия. Переходы через потенциальный барьер в этом случае маловероятны.

17*

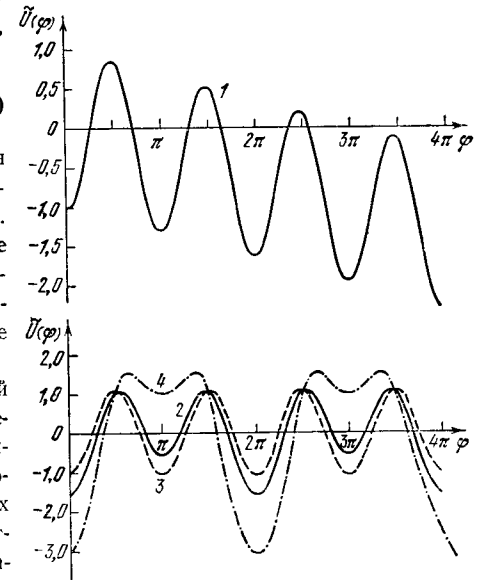


Рис. 7.15. Нормированная потенциальная функция $\tilde{U}(\varphi)$ (17) силового поля:

1) $-0,1\varphi - \cos 2\varphi$; 2) $-\cos 2\varphi - 0,5 \cos \varphi$; 3) $-\cos 2\varphi$; 4) $-\cos 2\varphi - 2 \cos \varphi$. Кривая 1 построена для автономного параметрического генератора. Кривые 2, 4 построены для генератора, находящегося под воздействием внешней гармонической силы с частотой, равной частоте параметрических колебаний, и фазой, равной одной из стационарных фаз автономного генератора.

Рассчитаем, следуя работе [15], влияние «краевых» переходов на вероятности $P_{1,2}$ (12). Поскольку в рассматриваемом случае фазовые траектории проходят в непосредственной близости от сепаратрисы, которой соответствует фаза $\varphi = \varphi_{ГР}$ (изображающие точки в момент $t=0$ расположены вблизи максимума потенциального профиля), уравнение (4) можно линеаризовать, представляя $\varphi = \varphi_{ГР} + \theta(t)$, $|\theta| \ll 1$.

Для θ имеем

$$\frac{d\theta}{dt} + (m\omega_H \cos 2\varphi_{ГР}) \theta = \frac{\omega}{\rho} \xi_{\varphi}(t). \quad (7.4.18)$$

При этом $\sin 2\varphi_{ГР} = 2h/m$. Поскольку $\cos 2\varphi_{ГР} < 0$ (см. также (6)), целесообразно ввести фазовый инкремент $\Gamma = -m\omega_H \cos 2\varphi_{ГР}$.

На рассматриваемом интервале времени ($t < t_{\varphi}$) амплитуда ρ приблизительно постоянна, поэтому из (18) имеем:

$$\theta = [\theta_0 + \psi(t)] e^{\Gamma t}, \quad (7.4.19)$$

где

$$\theta_0 = \theta(t=0), \quad \psi(t) = \frac{\omega}{\rho_0} \int_0^t e^{-\Gamma x} \xi_{\varphi}(x) dx.$$

Согласно (19) движение изображающей точки вблизи сепаратрисы является суперпозицией регулярного скатывания по закону $\theta_p = \theta_0 e^{\Gamma t}$ и случайных блужданий $\theta_{с.л.} = \psi(t) e^{\Gamma t}$.

Для гауссовского случайного процесса $\xi_{\varphi}(t)$ условное нестационарное распределение $w(t, \theta_{с.л.})$ (при фиксированном $\rho = \rho_0$) является гауссовским:

$$w(t, \theta_{с.л.}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\theta}^2}} \exp\left\{-\frac{\theta_{с.л.}^2}{2\sigma_{\theta}^2}\right\}, \quad (7.4.20)$$

с дисперсией σ_{θ}^2 , в соответствии с (19) равной

$$\sigma_{\theta}^2 = \overline{\psi^2} e^{2\Gamma t} = \frac{\omega^2 e^{2\Gamma t}}{\rho_0^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\Gamma(x'+x'')} \langle \xi_{\varphi}(x') \xi_{\varphi}(x'') \rangle dx' dx''.$$

С учетом соотношения (16)

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{\pi\omega^2 G_{\xi}^2}{4\rho_0^2 \Gamma} [e^{2\Gamma t} - 1]. \quad (7.4.21)$$

Примем для определенности, что область притяжения 1 соответствует $\theta < 0$, а область 2 — $\theta > 0$. Для условной вероятности перехода фазовой траектории, начинающейся с заданного значения θ_0 , из области 1 в область 2 имеем

$$\rho_{1 \rightarrow 2}(t, \theta_p) = \int_{\theta_p}^{\infty} w(t, \theta_{с.л.}) d\theta_{с.л.} \quad (7.4.22)$$

Полная вероятность перехода из области 1 в область 2

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}^{\circ}(t) = \int_{(1)} w(\theta_p) \rho_{1 \rightarrow 2}(t, \theta_p) d\theta_p. \quad (7.4.23)$$

Вероятности перехода $\rho_{2 \rightarrow 1}$ и $\mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}^{\circ}$ даются формулами, аналогичными (22), (23).

Очевидно, что, если функция распределения начальной фазы $w(\theta_0)$ симметрична относительно сепаратрисы (таким является и распределение $w(\theta_p)$), вероятности $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}^{\circ} = \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}^{\circ}$ и краевые переходы не изменяют вероятностей P_1, P_2 возбуждения устойчивых состояний. Иная ситуация имеет место для условий, при которых функция $w(\theta_0)$ несимметрична относительно сепаратрисы.

Предположим, что запуск генератора происходит от суперпозиции регулярного сигнала и шума. При $t=0$ разность вероятностей $\Delta P(0)$ попадания фазы возбуждаемого колебания в область 1 или 2 дается формулой (14). В качестве меры влияния внешних сил на $\Delta P(0)$ удобно использовать величину ($t > 0$)

$$M(t) = \frac{\Delta P(0)}{\Delta P(t)} = \frac{\Delta P(0)}{\Delta P(0) - R(t)} = \frac{\Delta P(0)/R(t)}{\Delta P_0/R(t) - 1}. \quad (7.4.24)$$

В статистическом ансамбле параметрических генераторов, самовозбуждающихся с начальным условием $\Delta P(0) \neq 0$ и подверженных случайным воздействиям, флуктуационные переходы из одной области притяжения в другую будут приводить, очевидно, к выравниванию вероятностей P_1 и P_2 , т. е. $\Delta P(t) \rightarrow 0$ и, следовательно, $M(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$.

Для наиболее интересного случая максимального значения $\Delta P(0)$ функцию распределения (13а) вблизи сепаратрисы можно представить в виде ($\varphi_c = \varphi_{ГР} = \pi/2$)

$$w_0(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\rho_c}{2\sqrt{2\pi}\sigma_0} \theta_0. \quad (7.4.25)$$

Тогда, пользуясь (22), (23), (21) и (25), для $t \geq t_{\varphi}$ можно записать

$$R(t_{\varphi}, \rho_0) = 2[\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}^{\circ} - \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}^{\circ}] \approx \frac{\rho_c}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta_0 \int_{\theta_0}^{\infty} w(\psi) d\psi d\theta_0. \quad (7.4.26)$$

Отсюда, учитывая (14), получаем

$$\frac{\Delta P(0)}{R(t_{\varphi}, \rho_0)} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta_0 \int_{\theta_0}^{\infty} e^{-x^2} dx d\theta_0 \right]^{-1} \approx 4C_0^2, \quad (7.4.27)$$

где $C_0 = 2\rho_0 \sqrt{\Gamma/\omega} \sqrt{\pi G_{\xi}^2}$.

Для получения окончательного результата соотношение нужно усреднить по ансамблю реализаций, а именно по распределению $w_0(\rho_0)$ (10). Тогда будем иметь

$$\frac{\Delta P(0)}{R(t_{\varphi})} = \left\langle \frac{\Delta P(0)}{R(t_{\varphi}, \rho_0)} \right\rangle \approx 4\pi \frac{\overline{\rho_0^2} \Gamma}{\omega^2 G_{\xi}^2}. \quad (7.4.28)$$

Величину $\overline{\rho_0^2}$ нетрудно оценить, рассматривая колебания в невозбужденном контуре. Действительно, пользуясь линеаризованным уравнением (3) ($\beta = 0$), можно получить

$$\overline{\rho_0^2} = \pi\omega^2 G_{\xi}^2 / \alpha.$$

Пользуясь формулой для величины Γ и вводя добротность генератора $Q_0 = \omega/2\alpha$, приходим к результату

$$\frac{\Delta P(0)}{R(t_0)} \approx -8\pi^2 m Q_0 \cos 2\varphi_{r.p.}$$

Полученный результат вполне понятен: с ростом коэффициента модуляции m уменьшается время установления фазы, т. е. увеличивается скорость скачивания изображающих точек в потенциальную яму, а с увеличением добротности Q_0 увеличивается роль начальных условий.

§ 5. Временная статистика колебаний одномодового лазера

В этом параграфе мы рассмотрим естественные флуктуации излучения квантовых генераторов оптического диапазона. Как мы убедимся ниже, эта задача оказывается во многом аналогичной задаче о естественных флуктуациях в томсоновском генераторе, рассмотренной в § 2.

Исходными уравнениями при полуклассическом описании процесса лазерной генерации являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля и уравнение для матрицы плотности атомов среды. Электрическое поле внутри лазерного резонатора будем описывать уравнением (ср. с (4.3.3))

$$c^2 \Delta E = 2\alpha \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (7.5.1)$$

Здесь эффективная проводимость α учитывает как активные потери внутри резонатора, так и потери, обусловленные дифракцией и отражением на зеркалах.

Для анализа временных свойств лазерного излучения в большинстве случаев можно не рассматривать поперечную структуру лазерных пучков и учитывать изменение поля лишь вдоль оси резонатора (оси z). Решение уравнения (1) ищем, таким образом, в виде

$$E(t, z) = \sum_q E_q(t) U_q(z), \quad (7.5.2)$$

где $U_q(z)$ — собственные функции одномерного «резонатора»:

$$U_q(z) = \sin k_q z, \quad k_q = \pi q/l, \quad (7.5.3)$$

l — длина резонатора, q — целое положительное число.

Подставим (2) в уравнение (1) и умножим на $U_q(z)$. После интегрирования по z , учитывая ортогональность функций $U_q(z)$, получим следующее уравнение для $E_q(t)$:

$$\frac{d^2 E_q(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dE_q(t)}{dt} + \omega_q^2 E_q = -4\pi \frac{d^2 P_q(t)}{dt^2}, \quad (7.5.4)$$

где $\omega_q = ck_q$ и $P_q(t)$ — пространственная фурье-компонента поляризации $P(t, z)$:

$$P_q(t) = \frac{2}{l} \int_0^l P(t, z) \sin k_q z dz. \quad (7.5.5)$$

Если процесс $P_q(t)$ квазимонохроматический со средней частотой ω , то можно сделать замену

$$-\frac{d^2 P_q}{dt^2} \approx \omega^2 P_q.$$

Выразим потери 2α через добротность Q_q q -й моды резонатора:

$$2\alpha = \omega/Q_q. \quad (7.5.6)$$

Тогда уравнение (4) принимает форму уравнения вынужденных гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 E_q}{dt^2} + \frac{\omega}{Q_q} \frac{dE_q}{dt} + \omega_q^2 E = \omega^2 P_q. \quad (7.5.7)$$

Поле $E_q(t)$ создается поляризацией P_q , которая в свою очередь создается атомами активной среды. Поэтому для решения самосогласованной задачи нужно произвести квантовомеханический расчет поляризации P_q , основанный на анализе поведения атомов в электрическом поле. Такой анализ выходит, однако, за рамки нашего рассмотрения. Поэтому здесь мы воспользуемся известными результатами. Пусть

$$E(t) = E_q(t) = \rho \cos(\omega_q t + \varphi). \quad (7.5.8)$$

Поляризация активной среды на частоте ω_q при учете кубичной нелинейности может быть записана в виде [2, 16, 17, 19]

$$P_q(t) = [\operatorname{Re} \kappa + \operatorname{Re} \theta \rho^2] \rho \cos(\omega_q t + \varphi) + [\operatorname{Im} \kappa + \operatorname{Im} \theta \rho^2] \rho \sin(\omega_q t + \varphi). \quad (7.5.9)$$

κ и θ — линейная и нелинейная восприимчивости среды, Re и Im означают соответственно действительную и мнимую части. Если предположить, что частота ω_q приходится на центр линии люминесценции активной среды ($\omega_q = \omega_0$), то $\operatorname{Im} \kappa = \operatorname{Re} \theta = 0$. При этом уравнение (7) принимает вид, аналогичный (7.2.9):

$$\frac{d^2 E}{dt^2} - 2(\delta - \alpha - \beta \rho^2) \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E = 0, \quad (7.5.10)$$

где введены обозначения

$$\delta = \omega_0^3 \operatorname{Im} \kappa/2, \quad \beta = \omega_0^3 \operatorname{Im} \theta/2.$$

Уравнение (10) описывает колебания в отсутствие шумового воздействия. Как и в томсоновском генераторе, собственные флуктуации в лазере приводят к появлению случайной внешней силы $\xi(t)$.

Естественными источниками шума в оптическом диапазоне являются тепловые шумы резонатора ξ_r и спонтанное излучение атомов (молекул) активной среды $\xi_{сп}$; последнее играет особенно важную роль. С учетом шума лазера уравнение (10) следует записать в виде

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + 2(\alpha - \delta + \beta\rho^2) \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E = \xi(t), \quad (7.5.11)$$

где

$$\xi(t) = \xi_r(t) + \xi_{сп}(t). \quad (7.5.12)$$

Свойства феноменологически введенных δ -коррелированных случайных сил $\xi_r(t)$ и $\xi_{сп}(t)$ мы определим следующим образом. Спектральную плотность теплового шума в резонаторе лазера $G_r(\omega)$ можно непосредственно рассчитать, пользуясь результатами § 9 гл. 4. Что же касается спектральной плотности спонтанного шума $G_{сп}(\omega)$ в инвертированной системе, то, как это обычно делается в квантовой электронике (см., например, [53], с. 236), мы определим ее вблизи порога генерации как «эквивалентный тепловой шум» среды с отрицательной температурой. Для этого в выражение для $G_r(\omega)$ надо ввести определяемые инверсией отрицательную температуру и отрицательные потери.

Последовательное описание случайных источников в лазере должно базироваться на квантовой теории [24]. Отметим вместе с тем, что излагаемая ниже простая полупеноменологическая теория правильно описывает такие основные характеристики, как ширина линии и уровень амплитудных флуктуаций лазера.

Спектр случайного источника; укороченные уравнения. Обратимся сначала к расчету тепловых флуктуаций в пассивном резонаторе ($\delta = \beta = 0$), при этом уравнение (11) принимает вид

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + 2\alpha \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 E = \xi_r(t). \quad (7.5.13)$$

Согласно (13) для спектральных амплитуд поля $E(t)$ имеем:

$$E(\omega) = \frac{\xi_r(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha}. \quad (7.5.14)$$

Отсюда находим спектральную плотность флуктуаций поля:

$$G_E(\omega) = \frac{G_r(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha}^2 = \frac{G_r(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\alpha^2}. \quad (7.5.15)$$

Средняя энергия одной моды резонатора в окрестности частоты ω_0

$$\langle \omega(\omega_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_E(\omega) d\omega \approx \frac{1}{(2\omega_0)^2} \frac{\pi}{\alpha} G_r(\omega_0). \quad (7.5.16)$$

В то же время энергия моды есть средняя тепловая энергия, равная (см. (4.9.18a))

$$\langle \omega(\omega) \rangle = \hbar\omega\bar{n} = \hbar\omega \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (7.5.17)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов в моде, $\hbar = h/2\pi$, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана. Из (16) и (17) находим выражение для спектральной плотности тепловых флуктуаций:

$$G_r(\omega_0) = \frac{4\alpha\hbar\omega_0^3}{\pi} \bar{n}. \quad (7.5.18)$$

Воспользуемся соотношением (18) для нахождения спектральной плотности спонтанного шума лазера, работающего вблизи порога генерации. Заменим α на $-\delta$ (отрицательное поглощение), а отрицательную температуру T , которая соответствует системе с инвертированной населенностью, выразим через населенность N_2 верхнего и N_1 нижнего уровней атомов:

$$e^{-\hbar\omega/kT} = \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{N_2}{N_1}, \quad (7.5.19)$$

где g_n — кратность вырождения уровней. Следовательно, получаем

$$G_{сп}(\omega_0) = \frac{4\delta\hbar\omega_0^3}{\pi} \left[\frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1)N_1} \right]. \quad (7.5.20)$$

В соответствии с (18) и (20) для спектральной плотности флуктуаций шума $\xi(t)$ имеем

$$G_\xi(\omega) = \frac{4\alpha\hbar\omega^3}{\pi} \left[\frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1)N_1} + \bar{n} \right]. \quad (7.5.21)$$

Здесь частота ω близка к ω_0 и учтено, что вблизи порога генерации $\alpha \approx \delta$.

Теперь вернемся к уравнению (11). Будем искать его решение в виде (7.2.7):

$$E(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}; \quad (7.5.22)$$

$A(t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда. Используя методику получения укороченных уравнений, приходим к уравнению (ср. с (7.2.9))

$$\dot{A} + (\alpha - \delta) A + \beta |A|^2 A = \omega_0 \eta(t), \quad (7.5.23)$$

где $\eta(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\xi(t) = \omega_0^2 \eta(t) e^{i(\omega_0 t + \pi/2)} + \text{к.с.} \quad (7.5.24)$$

Как и при рассмотрении флуктуаций в томсоновском генераторе, случайные силы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будем считать δ -коррелированными:

$$\xi = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2\pi G_\xi(\omega_0) \delta(\tau), \quad (7.5.25)$$

$$\eta = 0, \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = \pi \omega_0^{-4} G_\xi(\omega_0) \delta(\tau). \quad (7.5.26)$$

Из сравнения (11) и (7.2.5) следует, что между случайными функциями и их спектрами имеет место соответствие

$$\xi(t) \rightarrow \omega \delta \xi(t), \quad (7.5.27)$$

$$G_{\xi}(\omega_0) \rightarrow \omega_0^2 G_{\xi}(\omega_0).$$

С учетом этого соотношения для анализа флуктуаций в лазере можно полностью воспользоваться результатами § 3, вытекающими из решения укороченного уравнения (7.2.9), тождественного (23). Из сказанного, в частности, следует, что в надпороговом режиме

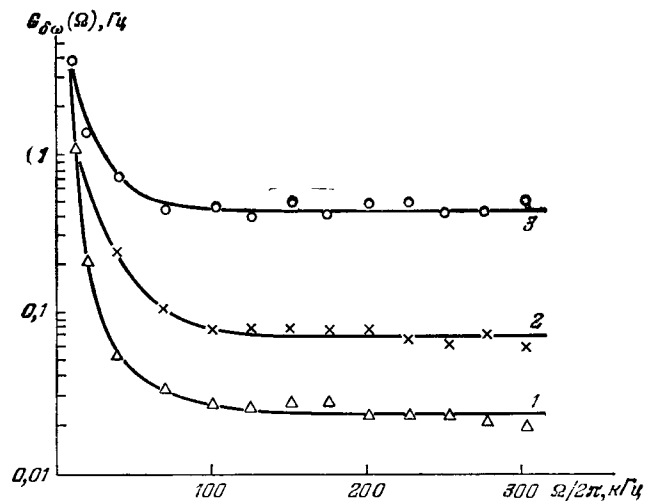


Рис. 7.16. Спектр частотных флуктуаций гелий-неонового лазера для различных значений полной мощности генерации [21]:

1) 1000, 2) 300 и 3) 80 мВт (длина волны излучения 633 нм). Размерность спектра частотных флуктуаций Гц²/Гц.

генерации лазера амплитудные *) и частотные флуктуации излучения описываются соответственно выражениями (7.2.37) и (7.2.45), в которых надо учесть соотношение (27).

На рис. 7.16 показан спектр частотных флуктуаций лазера. В согласии с теорией спектральная плотность частотных флуктуаций уменьшается с ростом генерируемой мощности. Как уже отмечалось ранее, в области низких частот рост спектральной плотности обусловлен техническими флуктуациями. Заметим, что для измерения частотных флуктуаций излучения лазера приме-

*) Распределение амплитуды колебаний лазера впервые было измерено в работе [6].

няют оптическое гетеродинирование (см. § 4 гл. 5), при этом задача исследования сводится к анализу спектра флуктуаций разностной частоты двух лазеров.

Естественная ширина линии. Обратимся теперь к вопросу о ширине линии лазерного излучения, связанной с принципиально неустранимыми шумами лазера, со спонтанным излучением.

Выше порога генерации лазера естественная ширина линии определяется выражением (7.2.53), где следует учесть соотношение (27) и (21). Примем также во внимание, что излучаемая средой средняя мощность $P = \alpha \bar{p}^2$ (P включает как мощность на выходе лазера, так и мощность, идущую на компенсацию потерь). При этом для естественной ширины линии лазера получаем *)

$$\Delta \omega_e = \frac{2\pi^2 (\Delta \nu_p)^2 h \nu_0}{P} \left[\bar{n} + \frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1) N_1} \right], \quad (7.5.28)$$

где $\Delta \nu_p = \alpha/\pi$ — ширина линии пассивного резонатора.

Формула (28) аналогична формуле (7.2.54а) для ширины спектра колебаний томсоновского генератора. Различие лишь в величине энергии шума, которая в томсоновском генераторе равна kT **), а в лазере

$$h \nu_0 \left[\bar{n} + \frac{N_2}{N_2 - (g_2/g_1) N_1} \right].$$

Для квантовых генераторов формула (28) была получена впервые Шавловым и Таунсом [20].

Приведем два численных примера. Для излучения гелий-неонового лазера **) с длиной волны 633 нм, мощностью $P \approx 1$ мкВт, шириной $\Delta \nu_p \approx 10^6$ Гц, при $N_2/[N_2 - (g_2/g_1) N_1] \approx 1,5$, $\bar{n} \ll 1$ согласно (28) естественная ширина линии $\Delta \omega_e \approx 10^{-2}$ Гц. Для лазера на $Pb_{0,88}Sp_{0,12}Te$, излучающего на длине волны 10,6 мкм, при мощности излучения $P \approx 200$ мкВт и $\Delta \nu_p \approx 10^8$ Гц ширина линии $\Delta \omega_e \approx 10$ кГц (см. [57]).

Зависимость ширины линии излучения лазера от параметра накачки $\varepsilon = \delta/\alpha$ определяется выражением (7.2.60) и показана на рис. 7.7. На рис. 7.17 представлена экспериментальная зависимость ширины линии от мощности излучения лазера. Из этого рисунка следует, что при одной и той же мощности излучения двух лазеров и одинаковых энергиях шума лазер, работающий в надпороговом режиме, имеет ширину линии в два раза меньшую ширины линии лазера, работающего в подпороговом режиме. Этот вывод согласуется с теорией и соответствует переходу от

*) Отметим еще раз, что формула (28) справедлива вблизи порога генерации. С ростом мощности генерации P величина $\Delta \omega_e$ стремится не к нулю, а к постоянной величине, что обусловлено зависимостью от P величины шума в существенно неравновесном состоянии [2].

**) Впервые естественная ширина линии лазера была измерена в [21].

формулы (7.2.53) к формуле (7.2.66). Последняя, приведенная к виду (28), имеет в числителе вместо 2 коэффициент 4.

Статистика фотоотчетов; стационарный режим. В оптике для измерения одномерных законов распределения используется техника фотоотчетов; в соответствии с результатами § 9 гл. 2, для

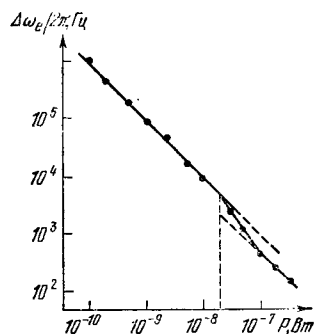


Рис. 7.17. Ширина спектральной линии лазера в зависимости от мощности излучения P [22, 23].

На пороге генерации (отмечено пунктиром) $P = 2 \cdot 10^{-8}$ Вт. В области выше порога генерации наклон кривой $\Delta\omega_e$ в обычной зависимости от P^{-1} в два раза меньше, чем в области ниже порога.

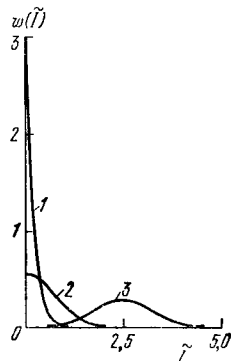


Рис. 7.18. Стационарная функция распределения приведенной интенсивности $I = I/VN$ для различных значений параметра $q = q/VN$: 1) -5 ; 2) 0; 3) 5.

того чтобы определить статистику фотоотчетов для лазера с флуктуирующей амплитудой, следует найти одномерный закон распределения интенсивности.

В стационарном режиме генерации функция распределения действительной амплитуды, соответствующая уравнению (23) или (7.2.9), что одно и то же, дается формулой (7.2.31), откуда для функции распределения интенсивности $I = \rho^2/2$ имеем

$$\omega(I) = \frac{2}{\sqrt{\pi N}} \left[1 + \Phi\left(\frac{q}{2\sqrt{N}}\right) \right]^{-1} \exp\left\{-\left(I - \frac{q}{2}\right)^2 / N\right\}, \quad (7.5.29)$$

где $q = \rho/\beta$, $N = (\pi/4)\beta^{-1}\omega_0^2 G_{\Sigma}$. Графики распределения (29) показаны на рис. 7.18. Кривая 1, соответствующая подпороговому режиму генерации ($q < 0$), имеет вид экспоненциального распределения; кривая 3, соответствующая надпороговому режиму ($q > 0$), представляет собой фактически гауссовское распределение (ср. с рис. 7.3). Первые два момента распределения (29) определяются выражениями (7.2.33). Теоретические кривые зависимости средней интенсивности и дисперсии флуктуаций интенсивности от параметра q изображены на рис. 7.1.

Если при исследовании статистики интенсивности время измерения T меньше времени корреляции излучения, то функция распределения числа фотоотчетов $P(n)$ связана с функцией распределения интенсивности $\omega(I)$ формулой Мандела (2.9.6):

$$P(n) = \int_0^{\infty} \frac{(\eta I)^n}{n!} e^{-\eta I \omega(I)} dI, \quad (7.5.30)$$

где $\eta = \beta_0 T$, β_0 — квантовая эффективность фотодетектора.

Распределение фотоотчетов, соответствующее распределению интенсивности (29), дается формулой (2.9.6), которая в нашем случае имеет вид

$$P(n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{4}k^2 + \frac{(m-k)^2}{8}\right\} D_{-(n+1)}\left[\frac{m-k}{\sqrt{2}}\right], \quad (7.5.31)$$

где $m = \eta N^{1/2}$, $k = N^{1/2}q$. Вероятность появления n фотоотчетов $P(n)$ подчиняется рекуррентному соотношению

$$2nP(n) = (km - m^2)P(n-1) + m^2P(n-2), \quad (7.5.32)$$

которое можно получить, если при расчете интеграла (30) поступить таким же образом, как при выводе (7.2.33а).

Выражение (32) позволяет найти связь между факториальными моментами $n^{[l]}$ распределения (31):

$$n^{[l]} = \langle n(n-1)\dots(n+1-p) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n+1-p)P(n).$$

Умножим (32) на $(n-1)(n-2)\dots(n+1-p)$ и просуммируем по всевозможным значениям n ; в результате получим

$$2n^{[l]} = kmn^{[l-1]} + (l-1)m^2n^{[l-2]}. \quad (7.5.33)$$

Отсюда следует, что распределение фотоотчетов лазерного излучения можно полностью охарактеризовать двумя факториальными моментами (ср. с пуассоновским распределением).

Факториальные моменты $n^{[1]}$ и $n^{[2]}$ нетрудно найти, пользуясь формулами (2.9.7) и (7.2.33):

$$n^{[1]} = \bar{n} = \eta I = \frac{1}{2} \eta \langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{2} km + mC_0 e^{-k^2/4}, \quad (7.5.34a)$$

$$\begin{aligned} n^{[2]} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 &= \eta^2 \langle I^2 \rangle = \frac{1}{4} \eta^2 \langle \rho^4 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{4} (km)^2 + \frac{1}{2} km^2 C_0 e^{-k^2/4}, \end{aligned} \quad (7.5.34b)$$

где $C_0^{-1} = \pi^{1/2} [1 + \Phi(k/2)]$. Таким образом, зная значения параметров k и m , можно рассчитать моменты $n^{[1]}$, $n^{[2]}$ и, пользуясь (33), найти факториальные моменты любого порядка.

Удобной характеристикой распределения фотоотсчетов является приведенный факториальный момент, определяемый как

$$H_l = n^{(l)} / (\bar{n})^l - 1. \quad (7.5.35)$$

Для пуассоновской статистики $H_l = 0$, поэтому значение $H_l \neq 0$ обусловлено флуктуациями интенсивности.

На рис. 7.19 показана зависимость приведенных факториальных моментов второго и третьего порядков от режима работы лазера. Видно, что теоретические зависимости хорошо согласуются

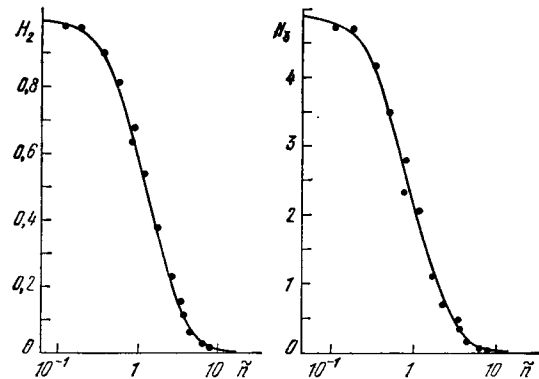


Рис. 7.19. Значения H_2 и H_3 в зависимости от нормированного среднего числа фотоотсчетов $\bar{n} = \bar{n}/n_0$ [24].

n_0 — среднее число фотоотсчетов на пороге генерации лазера. Кривые — теоретические, точки — экспериментальные значения.

с экспериментальными данными. В области значительно ниже порога генерации значения $H_2 = 1$ и $H_3 = 5$ соответствуют экспоненциальному распределению интенсивности. При прохождении порога генерации значения H_2 и H_3 уменьшаются и в надпороговой области стремятся к нулю (амплитудно-стабилизированное излучение). Приведенные результаты относятся к статистическим характеристикам лазерного излучения в установившемся процессе генерации.

Статистика фотоотсчетов; режим установления колебаний. Теперь обратимся к анализу статистики переходного процесса в лазере. Как отмечалось в § 3, для исследования статистических свойств устанавливающихся колебаний, описываемых уравнением (7.3.1), можно исходить из уравнения, в котором случайная внешняя сила отсутствует. Учет роли внешней силы при этом сводится к переопределению интенсивности начальных колебаний. В силу сказанного можно пользоваться выражением (7.3.3), описы-

вающим изменение во времени действительной амплитуды, и следующими из него функциями распределения амплитуды (7.3.7) и времени достижения заданного уровня амплитуды (7.3.13).

Распределение (7.3.13) содержит квадрат действительной амплитуды, и, следовательно, им можно непосредственно пользоваться для расчета распределения времени достижения заданного уровня интенсивности $\omega_l(t)$. Результаты измерений этой функции приведены в работе [25]; заимствованные из нее графики изображены на рис. 7.20. Экспериментальные данные на рис. 7.20, а хорошо согласуются с теоретической кривой, построенной по формуле (7.3.13) для измеренного значения интенсивности начального (предосцилляционного) шума. Теоретическая кривая рис. 7.20, б, в соответствии с условиями опыта, согласуется с экспериментальными данными только в предположении, что интенсивность «затравочного» шума равна сумме интенсивностей начального шума и шума, накопленного на начальном этапе процесса генерации.

Распределение интенсивности $\omega_l(I)$ при установлении колебаний подчиняется закону (см. также (1.6.9))

$$\omega_l(I) = \frac{K_0 I_{\infty}}{2 \{I + (I_{\infty} - I) e^{\tau}\}^2} \exp \left\{ \tau - \frac{K_0 I}{I + (I_{\infty} - I) e^{\tau}} \right\}, \quad (7.5.36)$$

который легко получить из (7.3.7). В выражении (36) $I = \rho^2/2$, $K_0 = I_{\infty}/\sigma_0^2$, $\tau = pt/2$. Временная эволюция распределения интенсивности (36) показана на рис. 1.15.

Изменение во времени средней интенсивности излучения определяется выражением (7.3.9), которое перепишем в виде

$$\dot{I}(\tau) = (1 - e^{-\tau})^{-1} [1 + K(\tau) e^{K(\tau)} \text{Ei}(-K(\tau))] I_{\infty}, \quad (7.5.37)$$

где $K(\tau) = I_{\infty} [\sigma_0^2 (e^{\tau} - 1)]$. Расчет второго момента распределения интенсивности (36) приводит к выражению ($K = K(\tau)$)

$$\langle I^2(\tau) \rangle = (1 - e^{-\tau})^{-1} [1 + K + (2 + K) K e^{K} \text{Ei}(-K)] I_{\infty}^2. \quad (7.5.38)$$

Пользуясь (37) и (38), рассмотрим нестационарное поведение дисперсии интенсивности $\sigma_l^2(\tau) = \overline{I^2(\tau)} - \overline{I}^2(\tau)$ в устанавливающихся автоколебаниях. Результаты численного расчета $\sigma_l(\tau)$ представлены на рис. 7.21. Видно, что σ_l сначала растет, а затем уменьшается, принимая в какой-то момент времени максимальное

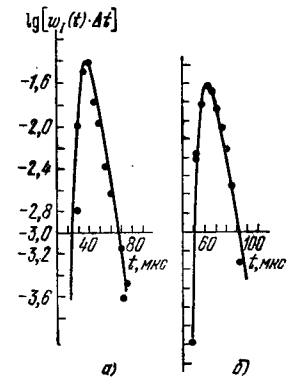


Рис. 7.20. Распределение вероятности времени достижения заданного уровня интенсивности $\lg[\omega_l(t) \cdot \Delta t]$ ($\Delta t = 0,7$ мкс) [25].

Кривые — теоретические, точки — экспериментальные значения.

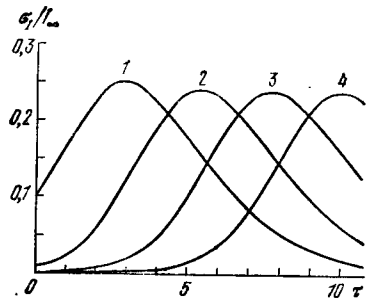


Рис. 7.21. Временная зависимость дисперсии интенсивности в переходном процессе генерации для различных значений I_{∞}/σ_0^2 : 1) 10; 2) 10²; 3) 10³; 4) 10⁴ ($\tau = pt/2$).

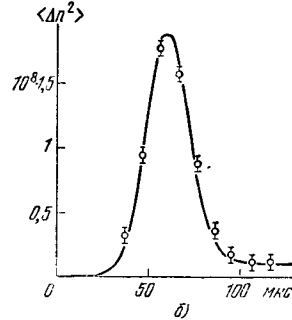
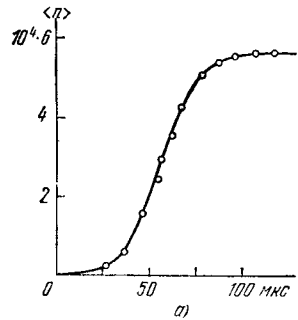


Рис. 7.22. Временная зависимость среднего числа фотонов $\langle n \rangle$ (а) и дисперсии числа фотонов $\langle \Delta n^2 \rangle$ (б) лазерного излучения [26, 27].

$n = IV/4\hbar\omega$, I — интенсивность излучения, V — объем резонатора лазера, \hbar — постоянная Планка. Точки — экспериментальные значения, кривые — теоретические.

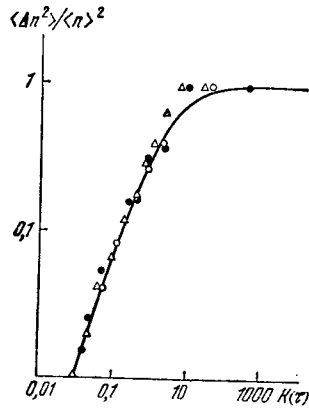


Рис. 7.23. Относительная дисперсия числа фотонов $\langle \Delta n^2 \rangle / \langle n \rangle^2$ в зависимости от параметра $K(\tau) = (I_{\infty}/\sigma_0^2) \times (e^{\tau} - 1)^{-1}$ [26].

Точки — экспериментальные значения, кривая — теоретическая.

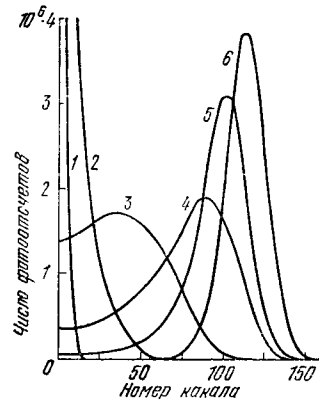


Рис. 7.24. Нестационарные распределения фотоотчетов в переходном процессе генерации лазера при различных временных задержках t [26]:

1) 2,6 мкс; 2) 3,7 мкс; 3) 4,3 мкс; 4) 5 мкс; 5) 5,6 мкс; 6) 8,8 мкс. Кривые проведены по экспериментальным точкам; все распределения нормированы к равным площадям.

значение. Анализ показывает, что максимальное значение дисперсии $\sigma_i^2, \max = (0,24I_{\infty})^2$ достигается при $K(\tau) = 0,4$, т. е. в момент времени

$$t_{\max} = \frac{2}{\rho} \ln \left(1 + 2,5 \frac{I_{\infty}}{\sigma_0^2} \right) \approx \frac{2}{\rho} \ln 2,5 \frac{I_{\infty}}{\sigma_0^2},$$

который определяется линейным инкрементом ρ и отношением начальной и конечной интенсивности колебаний.

На рис. 7.22 показано экспериментальное и теоретическое временное поведение в переходном процессе средней интенсивности и дисперсии интенсивности излучения лазера, выраженных в числах фотонов. На рис. 7.23 представлена зависимость относительной дисперсии числа фотонов от параметра $K(\tau)$. Здесь большим значениям K соответствуют малые значения τ и, наоборот, малым K — большие значения τ . Видно, что согласие между теоретическими и экспериментальными результатами на рис. 7.22 и рис. 7.23 хорошее.

Получение аналитического выражения для распределения фотоотчетов в переходном процессе генерации лазера, т. е. соответствующего распределению интенсивности (36), представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся иллюстрацией (рис. 7.24) экспериментальных результатов нестационарного распределения фотоотчетов. Кривые этого рисунка интересно сравнить с распределениями амплитуды, показанными на рис. 7.9.

§ 6. Временная статистика излучения многомодового лазера

Существенно многомодовая структура собственных колебаний оптических резонаторов приводит к тому, что наиболее типичным режимом генерации лазера оказывается режим многомодовой генерации, для которого напряженность электрического поля можно представить в виде разложения по продольным и поперечным модам:

$$E(r, t) = \sum_{n, m, q} \rho_{nmq} e^{i(\omega_{nmq}t + \Phi_{nmq})}, \quad (7.6.1)$$

где ρ , Φ и ω — амплитуда, фаза и частота моды, n и m — поперечные индексы моды, q — продольный индекс, равный числу полуволн, укладываемых на длине резонатора l .

Технические флуктуации параметров, спонтанное излучение приводят к флуктуациям амплитуд и фаз отдельных мод. Однако если речь идет о статистических свойствах многомодового излучения в целом, то они определяются в первую очередь степенью статистической связи между колебаниями в различных модах, межмодовыми интервалами и полным числом возбуждаемых мод.

Пространственно-временные корреляции поля (1) определяются в первую очередь статистикой фаз мод φ_{nmq} (см. также § 10 гл. 2, § 3 гл. 5).

Временная статистика многомодового излучения с несинхронизованными модами. Обращаясь к временной статистике многомодового излучения, будем считать для простоты, что в (1) выделена одна поперечная мода; тогда (1) можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \sum_{q=q_0}^{q_0+N} \rho_q e^{i[\omega_q t + \varphi_q(t)]}. \quad (7.6.2)$$

В (2) функция $\rho(\mathbf{r})$ описывает распределение излучения в выбранной поперечной моде, ρ_q — относительные амплитуды возбуждаемых продольных мод. Частота q -й моды

$$\omega_q = \omega_{q_0} + (q - q_0) \Omega,$$

где Ω — частотный интервал между модами (частота межмодовых биений).

Если моды статистически независимы (несинхронизованы), многомерное распределение фаз равно

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = \prod_{q=1}^N \psi(\varphi_q),$$

и тогда мы приходим к детально обсужденной в § 10 гл. 2 задаче о сложении колебаний со случайными фазами. В этом случае флуктуации амплитуд мод практически несущественны, так что

$$\rho_q = \begin{cases} 1, & q_0 \leq q \leq q_0 + N - 1, \\ 0, & q < q_0, q \geq q_0 + N. \end{cases} \quad (7.6.3)$$

Корреляционные функции поля и интенсивности для модели (2) многомодового излучения были рассчитаны в § 3 гл. 5. Напомним здесь основные результаты этого расчета.

Время корреляции τ_k многомодового излучения дается формулой (5.4.27), оно уменьшается с ростом числа мод N , $\tau_k \approx T/N$ ($T = 2\pi/\Omega$). Для большого числа несинхронизованных мод между корреляционными функциями поля и интенсивности имеет место соотношение (5.4.33), справедливое для излучения с гауссовской статистикой. В реальных случаях это соотношение выполняется вполне удовлетворительно (рис. 7.25): при $\tau \gg \tau_k$ $b_1(\tau) \approx 0,5$.

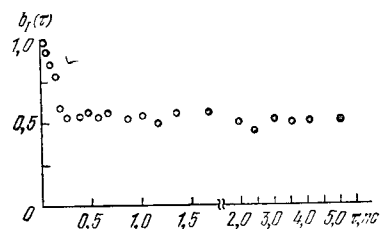


Рис. 7.25. Нормированная временная корреляционная функция интенсивности лазерного излучения с несинхронизованными модами [31].

В обычных ситуациях межмодовый интервал $\Omega \gg \Delta\omega$ — технической и естественной ширины спектральной линии отдельной моды; вклад последних во временные корреляции многомодового излучения с несинхронизованными модами пренебрежимо мал.

Модель (2) строго применима для описания излучения многомодового лазера, работающего в непрерывном режиме. Однако мощные многомодовые лазеры работают обычно в импульсном режиме, так что в (2) следует принять

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) f(t).$$

Поэтому случайный процесс (2) становится, вообще говоря, существенно нестационарным. Тем не менее, если длительность импульса $f(t)$

$$\tau_{\text{имп}} \gg \tau_k \approx T/N \quad (7.6.4)$$

(это условие обычно хорошо выполняется), вышеприведенными формулами можно пользоваться. Вместе с тем, особенно при исследовании нелинейных процессов высокого порядка, здесь надо соблюдать известную осторожность*).

Другой удобной моделью импульсного многомодового излучения может служить рассмотренная в § 8 гл. 2 модель импульсного излучения со случайной субструктурой.

Синхронизованные моды; корреляционные методы определения формы светового импульса. Если моды полностью синхронизованы ($\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N$) и амплитуды мод одинаковы, для интенсивности излучения из (2) непосредственно получаем

$$I(t) = \frac{1}{2} \rho^2(r) \frac{\sin^2(N\Omega t/2)}{\sin^2(\Omega t/2)}. \quad (7.6.5)$$

Соотношение (5) описывает последовательность световых импульсов длительностью $\tau_{\text{имп}} \approx 1/N\Omega$, следующих друг за другом через интервал $T = 2\pi/\Omega$. Пиковая интенсивность импульса $I_{\text{max}} = N^2 \rho^2/2$. Разумеется, модель полностью синхронизованных мод является идеализацией; в реальном лазере возникают отклонения (в том числе флуктуационные) от точной синхронизации. Статистика этих отклонений зависит от используемого метода синхронизации мод**).

* См., например, работы по многофотонной ионизации атомов в поле интенсивного лазерного излучения, цитируемые в § 2 гл. 5, в которых эти вопросы детально обсуждаются.

** Интересную и сложную статистическую задачу представляет собой исследование процесса установления режима самосинхронизации мод, когда моды синхронизируются за счет их нелинейного взаимодействия. В импульсном лазере эта задача оказывается, по существу, главной; идеальный стационарный режим полной синхронизации мод может вообще не достигаться, и статистическое описание излучения такого лазера становится наиболее адекватным. Анализ статистической картины режима самосинхронизации мод выходит за рамки настоящей книги; читателя, интересующегося этой проблемой, мы отсылаем к [28, 29].

В твердотельных лазерах и лазерах на красителях при синхронизации мод генерируются очень короткие световые импульсы, импульсы длительностью до 10^{-12} — 10^{-13} с.

В заключение этого параграфа мы хотим обратить внимание на то, что косвенные, корреляционные методы исследования, базирующиеся на измерении высших корреляционных функций, могут быть использованы не только для суждения о наличии самого эффекта синхронизации мод и измерения длительности импульса (см. § 3 гл. 5), но и для достаточно тонких измерений формы сверхкоротких световых импульсов. В § 4 гл. 5 речь шла об информации, извлекаемой из корреляционных функций поля $B(\tau)$ и интенсивности $B_I(\tau)$.

Нетрудно убедиться, что, если речь идет о регулярных импульсах $I(t)$, корреляционная функция интенсивности (в данном случае это фактически свертка интенсивности) не содержит информации о форме импульса.

Действительно, фурье-спектр интенсивности $I(t)$ определяется выражением

$$I(\omega) = |I(\omega)| e^{i\psi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega t} dt, \quad (7.6.6)$$

в то время как фурье-спектр корреляционной функции $B_I(\tau)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B_I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_I(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} I(t) I(t+\tau) e^{i\omega\tau} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(t_1) e^{i\omega t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt = |I(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

Здесь учтено, что $I(t)$ — действительная функция. В (7) сведения о фазе $\psi(\omega)$, необходимой для определения вида $I(t)$, отсутствуют. Если же считать $\psi(\omega) = \text{const}$, что равносильно предположению о симметричной форме импульса $I(t)$, то

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{B_I(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Вместе с тем оказывается [32], что форму $I(t)$ можно восстановить с помощью корреляционной функции интенсивности третьего порядка вида $B^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = B_I^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$:

$$B^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) I(t+\tau_1) I(t+\tau_2) dt. \quad (7.6.8)$$

Фурье-преобразование соотношения (8) содержит сведения о фазе $\psi(\omega)$:

$$\begin{aligned} B^{(3)}(\omega_1, \omega_2) &= \int \int B^{(3)}(\tau_1, \tau_2) e^{i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= |I(\omega_1 + \omega_2) I(\omega_1) I(\omega_2)| \exp\{i[\psi(\omega_1) + \psi(\omega_2) - \psi(\omega_1 + \omega_2)]\}. \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

Отсюда находим, что

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \frac{\partial B^{(3)}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \Big|_{\omega_2=0} = i[\psi'(0) - \psi'(\omega_1)] B^{(3)}(\omega_1, 0). \quad (7.6.10)$$

Согласно (6) имеем

$$\frac{\partial I(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} = i \int_{-\infty}^{\infty} t I(t) dt = i \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} I(\omega=0).$$

Если принять $\psi'(0) = 0$, то должно быть

$$t = \int_{-\infty}^{\infty} t I(t) dt = 0.$$

При этом время t следует отсчитывать от \bar{t} и рассматривать $I(t)$ как функцию распределения, т. е. считать, что $\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = 1$. В этом случае в соответствии с (9) и (10) получаем

$$\psi'(\omega_1) = - \frac{\int \int \tau_2 \cos(\omega_1 \tau_1) B^{(3)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\int \int \cos(\omega_1 \tau_1) B^{(3)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}. \quad (7.6.11)$$

Следовательно, фаза

$$\psi(\omega) = \int_0^{\omega} \psi'(\omega_1) d\omega_1.$$

Таким образом, с помощью корреляционной функции $B^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ можно найти $\psi(\omega)$ и $|I(\omega)|$ и точно восстановить форму огибающей $I(t)$.

Заметим наконец, что при помощи методов нелинейной оптики сравнительно легко можно измерять одноточечные корреляционные функции вида (см. § 3 гл. 5)

$$B^{(n)}(\tau) = \int I^{n-1}(t) I(t+\tau) dt.$$

Очевидно, чем выше порядок функции $B^{(n)}(\tau)$, тем ближе форма последней к форме $I(\tau)$. Точный вид $I(t)$ можно получить, если зондирующий импульс $I^{n-1}(t)$ является δ -функцией.

§ 7. Пространственная когерентность излучения лазера

Спонтанные шумы, статистика возбуждения многих поперечных мод приводят, очевидно, к тому, что поперечная структура реальных лазерных пучков становится случайной [57].

Чем определяются характерные масштабы поперечных коррелирующей лазерного излучения или, иными словами, его пространственная когерентность?

Мы кратко обсудим эту проблему для двух предельных случаев — многомодового по поперечным индексам лазерного пучка (эту задачу можно рассматривать как пространственный аналог задачи о временной статистике многомодового излучения) и одномодового излучения. В последнем случае принципиально неустра-

нимым фактором, приводящим к невозможности генерировать пучки с идеальной пространственной некогерентностью, являются δ -коррелированные в пространстве источники спонтанного излучения. Таким образом, мы приходим к аналогу временной задачи о естественной ширине спектральной линии.

Обратимся прежде всего к исследованию многомодового лазерного пучка и оценим характерные масштабы пространственных корреляций, обусловленных возбуждением большого числа поперечных мод со статистически независимыми фазами. Будем предполагать, что возбуждаемые в лазере моды с различными поперечными индексами m и n вырождены по частоте. Тогда многомодовое поле лазерного излучения можно записать в виде

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{m, n} A_{mn}(\mathbf{r}, z) \exp i \{ \omega_0 t - kz + \varphi_{mn} \}, \quad (7.7.1)$$

где A_{mn} и φ_{mn} — не зависящие от времени t комплексные амплитуды и фазы мод, z — координата вдоль направления распространения пучка, отсчитываемая от области наименьшего радиуса (перетяжки) лазерного пучка. Амплитуда $A_{mn}(\mathbf{r}, z)$ в общем случае является медленной функцией z .

Распределение амплитуд A_{mn} зависит от типа оптического резонатора и формы зеркал. Наиболее простой вид амплитуды A_{mn} имеют для плоского резонатора.

Пусть резонатор имеет прямоугольные зеркала; в этом случае [33]

$$A_{mn}(\mathbf{r}) = A_{mn}(x, y) = h_{mn} f_m(x) f_n(y), \quad (7.7.2)$$

где

$$f_m(x) = \begin{cases} \cos \kappa m x, & m = 1, 3, \dots, \\ \sin \kappa m x, & m = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (7.7.3)$$

$$\kappa = \pi \{ 2a [1 + 0,824 (1 + i) (l/4ka^2)] \}^{-1}.$$

Здесь l — длина резонатора, $2a$ — размер зеркал по оси x . В (2) h_{mn} — весовые коэффициенты, определяемые распределением интенсивности по модам. Вид, аналогичный (3), имеет функция $f_n(y)$.

В соответствии с (1.8.28) для пространственной поперечной корреляционной функции на выходе резонатора

$$B_{\perp}(s) = \langle E(\mathbf{r}, z, t) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z, t) \rangle$$

в случае статистически независимых фаз мод φ_{mn} имеем

$$B_{\perp}(s) = \sum_{m, n} \langle A_{mn}(\mathbf{r}, z) A_{mn}^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z) \rangle. \quad (7.7.4)$$

Рассчитаем корреляционную функцию (4) вблизи центра пучка ($\mathbf{r} = 0$). Зададим смещение s вдоль оси x и будем считать, что возбуждаются поперечные моды с индексами от $m = 1$ до $m = N_{\perp}$.

Пусть для определенности N_{\perp} нечетно и коэффициенты h_{mn} одинаковы; тогда получаем

$$B_{\perp}(s) = 2 \sum_{q=1}^{(N_{\perp}+1)/2} \cos \kappa^* (2q-1)s = \sin[(N_{\perp}+1)\kappa s] \operatorname{cosec} \kappa^* s.$$

Многомодовые лазерные пучки; статистически независимые моды. Модуль степени пространственной когерентности при числе $N_{\perp} \gg 1$ равен (ср. с (5.4.26))

$$|\gamma(s)| = \left| \frac{\sin(N_{\perp} \kappa^* s)}{N_{\perp} \sin(\kappa^* s)} \right|. \quad (7.7.5)$$

Функция (5) является квазипериодической. В реальных случаях длина оптического резонатора $l \gg a$, а число Френеля $ka^2/2\pi l \gg 1$. С учетом этого из (5) нетрудно получить следующее значение радиуса корреляции *):

$$r_{\kappa} \approx a/N_{\perp}. \quad (7.7.6)$$

Таким образом, для многомодовых лазерных пучков, возбуждаемых в плоском резонаторе с прямоугольными зеркалами, радиус корреляции обратно пропорционален числу возбуждаемых поперечных мод N_{\perp} . Формулу (6) можно рассматривать как пространственный аналог формулы (5.4.27) для времени корреляции многомодового излучения, генерируемого лазером с несинхронизованными модами.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что (6) можно использовать лишь для довольно грубых оценок. Отличия экспериментально измеренных и рассчитанных по (6) значений радиусов корреляции могут быть связаны с неоднородностями (в том числе — статистическими) активной среды лазера, с неравномерностью распределения интенсивности по модам и т. п. Заметим, что при наличии неоднородностей даже для плоского резонатора более адекватной оказывается модель сферического резонатора.

Однако прежде чем перейти к анализу модели сферического резонатора, покажем, что приближенный расчет радиуса корреляции лазерного поля со статистически независимыми модами можно выполнить более простым способом, оценивая средний размер неоднородности по возбуждаемым модам. В соответствии с (3) размер неоднородностей по половинному уровню m -й моды можно оценить как $r_m \approx 2a/m$. Предположим, что возбуждается N_{\perp} поперечных мод, причем $N_{\perp} \gg 1$. Тогда радиус корреляции поля

$$r_{\kappa} \approx \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{m=1}^{N_{\perp}} r_m \approx \frac{2a}{N_{\perp}} \sum_{m=1}^{N_{\perp}} \frac{1}{m} \approx \frac{2a}{N_{\perp}} (0,58 + \ln N_{\perp}) \approx \frac{2a \ln N_{\perp}}{N_{\perp}}. \quad (7.7.7)$$

*) Другим способом формула (6) была получена в [34].

Выражение (7) дает практически такую же зависимость от числа поперечных мод N_{\perp} , что и выражение (6), полученное более строго.

Применим теперь только что изложенный способ для определения радиуса корреляции поля сферического резонатора. Поперечное распределение поля моды сферического резонатора с одинаковыми зеркалами круговой формы радиуса кривизны R дается выражением [33]

$$A_{nm}(r, z) = A_{nm}(p, \varphi, z) = h_{nm} p^{m/2} L_n^m(p) e^{-p/2} \cos m\varphi. \quad (7.7.8)$$

Здесь L_n^m — полиномы Лагерра, n и m — радиальный и угловой индексы,

$$p = p_0 \Gamma^2 / \omega^2(z),$$

$$\omega^2(z) = \omega^2(0) (1 + 4z^2 b^{-2}), \quad \omega^2(0) = b p_0 / 2k_0,$$

$\omega(z)$ — радиус моды на расстоянии z от ее перетяжки, $b = (2Rl - l^2)^{1/2}$ — конфокальный параметр резонатора,

$$p_0 = (m + 2n + 1) + [(2n + 1)(2m + 2n + 1)]^{1/2}. \quad (7.7.8a)$$

В лазерах с квазиконцентрическими резонаторами число возбуждаемых поперечных мод N_{\perp} может достигать $\sim 10^4 - 10^5$ [55]. В этом случае можно пользоваться асимптотикой функций $L_n^m(p)$ при $n \gg 1$. Тогда распределение (8) принимает вид

$$A_{nm} \approx h_{nm} (\pi^2 p)^{-1/4} n^{0,5(m-1)} \times \times \cos \left[2(np)^{1/2} - \frac{1}{4} \pi(m+1) \right] \cos m\varphi. \quad (7.7.9)$$

Отсюда следует, что по половинному уровню масштаб радиальных осцилляций (размер пятен) равен

$$r_n(z) = \pi \omega(z) / 3 (np_0)^{1/2}. \quad (7.7.10)$$

Число мод с индексом n определяется возможными значениями индекса m . Согласно (8a) индекс m изменяется от нуля до m_0 ,

$$m_0 = m_0(n) = p_0 - [2p_0(2n + 1)]^{1/2}.$$

Оценим радиус корреляции пучка как средний размер пятна по всем модам с индексом n :

$$r_k(z) \approx \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{n=0}^{n_0^{\max}} m_0(n) r_n(z). \quad (7.7.11)$$

Здесь $n_0^{\max} = (p_0 - 2)/4$ — максимальное значение n , найденное из (8a) при условии, что радиус моды равен радиусу пучка и $m = 0$.

Выразим величину N_{\perp} через параметр p_0 ; N_{\perp} равно сумме всевозможных комбинаций n и m , удовлетворяющих (8a), т. е.

$$N_{\perp} = \sum_{n=0}^{n_0^{\max}} m_0(n) = \sum_{m=0}^{m_0^{\max}} n_0(m) = \frac{p_0^2 + 3p_0 - 2\sqrt{2p_0}}{12} + \frac{1}{2}. \quad (7.7.12)$$

Для моды нулевого порядка $p_0 = 2$ и $N_{\perp} = 1$.

Для расчета (11) заменим суммирование по n интегрированием; в приближении $p_0 \gg 1$ ($N_{\perp} \gg 1$), в котором только и имеет смысл проводимый расчет, для радиуса корреляции получим

$$r_k \approx \sqrt{3} \omega(z) N_{\perp}^{-1/2}. \quad (7.7.13)$$

Выражение (13) показывает существенное отличие зависимости радиуса корреляции от числа поперечных мод для сферического резонатора по сравнению с зависимостью (6) для плоского резонатора. Это обусловлено тем, что с увеличением номера радиального индекса n размер поперечных осцилляций в моде становится обратно пропорциональным \sqrt{n} (10).

В соответствии с (13) отношение $r_k(z)/\omega(z)$ не зависит от расстояния z и определяется только числом поперечных мод. Зависимость (13) экспериментально подтверждена в работе [35] (см. рис. 7.26). Для значения $N_{\perp} \approx 10^4$ $r_k/\omega \approx 10^2$; если радиус пучка $\omega \approx 10 - 1$ мм, то радиус корреляции $r_k \approx 10 - 100$ мкм.

Изменение вида поперечной корреляционной функции излучения лазера с уменьшением радиуса корреляции (ростом числа поперечных мод) иллюстрируется кривыми рис. 7.27. Видно, что при большом числе поперечных мод (кривая 3) поперечная корреляционная функция становится похожей на корреляционную функцию (4.5.13) δ -коррелированного излучения, дифрагированного на круглом отверстии (см. также рис. 4.15). Для больших значений N_{\perp} пространственная статистика многомодовых пучков становится гауссовской (см. рис. 5.29).

Из анализа (8) следуют и другие особенности пространственной когерентности многомодовых пучков. Поскольку с ростом аргумента полинома Лагерра $L_n^m(p)$ расстояние между нулями увеличивается, масштаб радиальных неоднородностей поля и, следовательно, радиус корреляции увеличиваются к краю пучка,

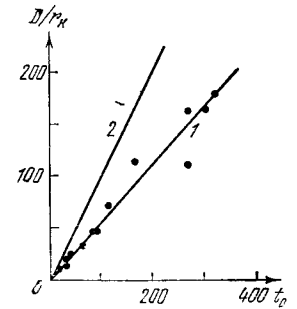


Рис. 7.26. Зависимость отношения диаметра пучка $D = 2\omega$ к радиусу корреляции поля r_k от параметра $t_0 = (1/2) kD(0) \operatorname{tg} \varphi$ [35].

$D(0)$ — наименьший диаметр пучка, φ — угловая расходимость пучка в дальней зоне. Точки и линия 1 — экспериментальные значения, линия 2 — теоретическая, рассчитанная по формуле (13).

Кроме того, от расстояния r зависит масштаб неоднородностей поля по углу, $r_\varphi \sim \pi r/m$. Таким образом, многомодовые лазерные пучки, возбуждаемые в сферических резонаторах, являются

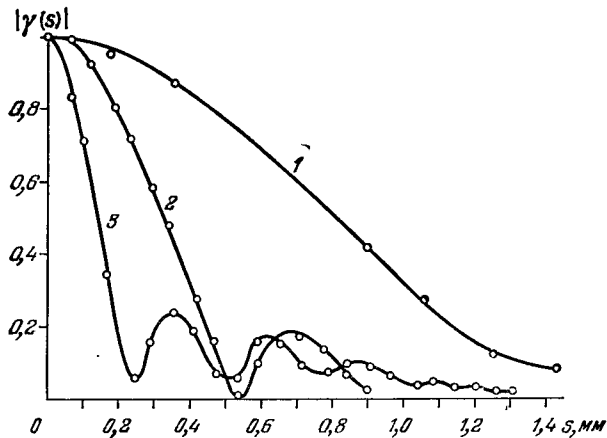


Рис. 7.27. Нормированная поперечная корреляционная функция излучения лазера на алюмоитриевом гранате для различного числа поперечных мод N_\perp : 1) 45; 2) ≈ 830 ; 3) $\approx 10^4$ (без селекции поперечных мод) [35].

статистически неоднородными. Эти выводы согласуются с экспериментальными результатами [35].

Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера. В § 5 нами были рассмотрены временные флуктуации одномодового лазера и установлено, что присутствующее в лазере спонтанное излучение приводит к естественным флуктуациям амплитуды и фазы лазерного поля. Однако спонтанное излучение некоррелировано не только во времени, но и в пространстве, поэтому оно неизбежно вызывает и естественные пространственные флуктуации амплитуды и фазы лазерных пучков. В надпороговом режиме работы лазера естественные флуктуации лазерных пучков в пространстве и во времени являются слабыми.

В отличие от частотного спектра, угловой спектр, связанный с естественными пространственными флуктуациями лазерных параметров, не удается, однако, измерить непосредственно, поскольку он маскируется существенно более сильной дифракционной расходимостью. Вместе с тем при измерении поперечных корреляционных функций одномодовых лазерных пучков удается обнаружить слабые отличия пространственной когерентности от полной, вызываемые именно спонтанным излучением. Пример такой поперечной корреляционной функции показан на рис. 7.28. Вблизи центра пучка ($s \approx 0$) степень когерентности $|\gamma| = 0,99997 \pm \pm 1 \cdot 10^{-5}$. При увеличении расстояния s между измеряемыми

точками профиля пучка значение $|\gamma|$ уменьшается, оставаясь довольно высоким (кривая 1). Для точек, в которых интенсивности составляют $1 \cdot 10^{-1}$ и $1 \cdot 10^{-3}$ максимальной величины, значения $|\gamma(s)|$ равны $0,9991 \pm 1 \cdot 10^{-4}$ и $0,998 \pm 1 \cdot 10^{-3}$ [37, 39]. Для лазерного излучения с большей мощностью наблюдалась еще более высокая степень пространственной когерентности (рис. 7.29).

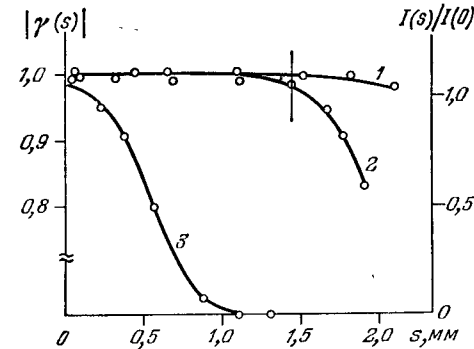


Рис. 7.28. Нормированная поперечная корреляционная функция нижней моды гелий-неонового лазера [39].

Длина волны излучения 633 нм, мощность излучения около 1 мкВт. Превышение над порогом генерации для кривой 1 больше, чем для кривой 2. Кривая 3 — гауссовский профиль пучка $I(s)$. Вертикальной чертой отмечено значение $|\gamma(s)|$ для кривой 1, где $I(s)/I(0) = 10^{-3}$.

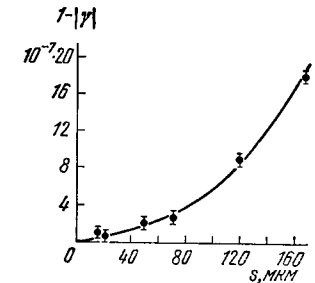


Рис. 7.29. Отличие степени пространственной когерентности излучения гелий-неонового лазера от единицы [37].

Мощность излучения лазера около 100 мкВт.

Поскольку к настоящему времени последовательной теории естественных пространственных флуктуаций в лазере не существует, для интерпретации данных рис. 7.28, 7.29 обратимся к простой модели, воспользовавшись аналогией с временными флуктуациями одномодового лазера. Поле одномодового излучения лазера выше порога генерации представим в виде

$$E(\mathbf{r}, t, z) = \rho(\mathbf{r}) [1 + m(\mathbf{r})] \exp i \{ \omega_0 t - k_0 z + \varphi(\mathbf{r}) \}, \quad (7.7.14)$$

где амплитуда $\rho(\mathbf{r})$ и определяет регулярный профиль пучка, $m(\mathbf{r})$ — случайный коэффициент амплитудной модуляции, $\varphi(\mathbf{r})$ — флуктуирующая фаза, причем $\overline{m} = \overline{\varphi} = 0$.

В соответствии с (14) нормированная поперечная корреляционная функция (1.8.38) равна

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \langle E(\mathbf{r}, t, z) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z) \rangle \times \\ &\quad \times \{ \langle |E(\mathbf{r}, t, z)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z)|^2 \rangle \}^{-1/2} = \\ &= \frac{1 + \overline{m^2} \gamma_m(s)}{1 + \overline{m^2}} \langle e^{-i \Delta \varphi(s)} \rangle. \end{aligned} \quad (7.7.15)$$

Здесь $\Delta \varphi(s) = \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})$ и $\gamma_m(s) = \langle m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \rangle / \langle m^2 \rangle$.

По аналогии с временными флуктуациями будем полагать, что

$$\langle \exp[-i\Delta\varphi(s)] \rangle = \exp\{-D_{\perp}s\},$$

где D_{\perp} — коэффициент поперечной диффузии фазы. Для смещений s таких, что $\gamma_m(s) \approx 0$ и $D_{\perp}s < 1$, с учетом $\langle m^2 \rangle \ll 1$ выражение (15) преобразуется к виду

$$\gamma(s) \approx 1 - \langle m^2 \rangle - D_{\perp}s. \quad (7.7.16)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{ds}(1 - \gamma(s)) \approx D_{\perp}.$$

Обработка данных, показанных на рис. 7.28, кривая 1, в соответствии с рассмотренной моделью дает

$$\langle m^2 \rangle \approx 3 \cdot 10^{-5}, \quad D_{\perp} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}. \quad (7.7.17)$$

Приведенная оценка $\langle m^2 \rangle$ согласуется с данными по временным флуктуациям (см. § 3, а также [39]). С поперечным коэффициентом диффузии фазы D_{\perp} , по аналогии с коэффициентом D во временной задаче, ответственным за естественную ширину линии, можно связать естественную угловую расходимость $\Delta\theta_e$:

$$\Delta\theta_e \approx D_{\perp}/k_0 \approx 10^{-7}. \quad (7.7.18)$$

Это значение существенно меньше дифракционной расходимости лазерных пучков $\Delta\theta_{\perp} \approx \lambda/a \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ (a — радиус пучка). Кривой, изображенной на рис. 7.29, соответствует значение $D_{\perp} = 10^{-9}$ [37].

Заметим, что естественная угловая расходимость лазерных пучков оказывается связанной с естественной шириной линии. Соответствующее рассмотрение, основанное на анализе усиления шума в резонаторе, приведено в работе [38].

§ 8. Самовозбуждение автоколебательных систем и фазовые переходы

Порог самообозбуждения в томсоновском генераторе и лазере разделяет области, в которых поведение системы существенно различно. В идеальном автономном генераторе (флуктуационные внешние силы отсутствуют) ниже порога самовозбуждения амплитуда колебаний $A=0$; выше порога имеется ненулевое устойчивое состояние. Амплитуда автоколебаний по мере превышения порога генерации нарастает либо плавно (такой режим в теории колебаний называют мягким режимом самовозбуждения; именно он рассматривался нами в § 2 применительно к томсоновскому генератору и в § 6 для лазера), либо скачком. Последний режим называют жестким режимом самовозбуждения; он реализуется в системах, для которых в укороченном уравнении (7.2.28), описывающем поведение амплитуды, следует добавить члены вида ρ^3 (см., например, [17, 44]).

Особой точкой оказывается, как мы убедились в предыдущих параграфах, порог самовозбуждения и в отношении флуктуаций колебаний. В подпороговой области по мере приближения к порогу флуктуации быстро возрастают, а время корреляции увеличивается. Статистические характеристики колебаний ниже и выше порога самовозбуждения существенно различаются: ниже порога мы имеем дело со стационарным гауссовским шумом, а в надпороговой области процесс становится существенно негауссовским.

Расчет статистики колебаний в припороговой области относится к числу наиболее трудных задач теории флуктуаций в автоколебательных системах. Поэтому здесь актуальна не только разработка новых методов расчета, но и привлечение новых теоретических подходов.

В этом параграфе мы обсудим кратко возможности использования в теории флуктуаций и генераторах радиодиапазона и в особенности в лазерах методов теории критических явлений, разработанных при изучении фазовых переходов в физических системах.

Надо сказать, что даже при чисто внешнем сопоставлении самовозбуждения генератора и фазового перехода между этими явлениями обнаруживается много общего. В точке фазового перехода, как и при самовозбуждении генератора, скачкообразно изменяются свойства физической системы; во многом сходно и поведение флуктуаций вблизи критической точки (порога самовозбуждения, критической температуры). Насколько далеко простирается эта аналогия?

Ниже мы убедимся, что уравнения вида (7.5.23), (7.2.9), описывающие самовозбуждение лазера (или томсоновского генератора) в мягком режиме, совершенно аналогичны уравнениям, используемым для описания в приближении самосогласованного поля фазового перехода второго рода, например типа порядок — беспорядок, в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках. При этом аналогом фигурирующего в физике фазовых переходов параметра порядка для генератора оказывается комплексная амплитуда колебаний, а температуры — параметр накачки [41—43]. Для лазера, излучение которого складывается из вкладов отдельных атомов, образующих трехмерный ансамбль, этой аналогии можно сопоставить и довольно наглядный физический образ.

В далекой подпороговой области атомы активной среды излучают спонтанно и независимо друг от друга (для ферромагнитного фазового перехода этому соответствует хаотическая ориентация спинов в парамагнитной фазе). По мере приближения к порогу все большим становятся вклад процессов вынужденного излучения, сохраняющих когерентность, — возрастают радиусы пространственной и временной корреляции суммарного поля (возрастает радиус корреляции флуктуаций параметра порядка при подходе к критической точке).

Наконец, в надпороговой области вынужденное излучение доминирует; формируется лазерное излучение с высокой пространственной и временной когерентностью — для ферромагнитного фазового перехода этому соответствует возникновение упорядоченной системы спинов в ферромагнитной фазе.

Разумеется, близость теоретического описания, наглядные соображения, приведенные выше, еще не свидетельствуют о полной идентичности явлений. «Фазовый переход» в лазере следует отнести к так называемым неравновесным

фазовым переходам: лазер находится под воздействием источника накачки. Мы не будем обсуждать проблемы, связанные с критическими явлениями в системах, далеких от состояния теплового равновесия; интересующегося читателя отсылаем к книгам [59, 60] и обзору [48].

Ниже мы сформулируем теорию лазера в терминах теории критических явлений (для этого потребуются определить эквивалентные термодинамический потенциал F и свободную энергию) и продемонстрируем плодотворность такого описания на примере исследования закономерностей формирования поперечной пространственной когерентности излучения лазера при подходе к порогу самовозбуждения.

Генерация лазера в терминах теории фазовых переходов; термодинамический потенциал, параметр порядка, критические индексы. Процесс генерации лазера описывается уравнением (7.5.23) для комплексной амплитуды A :

$$\dot{A} - (p - \beta |A|^2) A = \omega_0 \eta(t), \quad (7.8.1)$$

где $p = \delta - \alpha$ и $\eta(t)$ — комплексный случайный процесс, удовлетворяющий соотношениям (7.2.8, 196).

Уравнение для огибающей $\rho(t)$ процесса $A(t)$ имеет вид (7.2.28). Соответствующее ему стационарное решение уравнения Фоккера — Планка (7.2.30) для функции распределения интенсивности $I = \rho^2/2$ дается выражением (7.5.29):

$$\omega(I) = e^{-I/N}. \quad (7.8.2)$$

Здесь

$$f(I) = \frac{1}{4} (f_0 - q^2) - (I - \frac{1}{2} q)^2, \quad (7.8.3)$$

f_0 — постоянная величина, определяемая из условия нормировки (2),

$$N = (\pi/4) \beta^{-1} \omega_0^2 \sigma \xi, \quad q = p/\beta = (\alpha/\beta) (\varepsilon - 1). \quad (7.8.4)$$

Выразим (3) через комплексную амплитуду ($I = 1/2 |A|^2$):

$$f(AA^*) = f_0 - 2(\alpha/\beta) (\varepsilon - 1) |A|^2 + |A|^4. \quad (7.8.5)$$

В случае, если на лазер действует внешний регулярный сигнал $s(t)$, то справа в (1) появляется дополнительный член и функция (5) принимает вид

$$f(AA^*) = f_0 - 2(\alpha/\beta) (\varepsilon - 1) |A|^2 + |A|^4 - A(t) s^*(t) - A^*(t) s(t). \quad (7.8.6)$$

Функция распределения (3) похожа на функцию распределения, например, магнитного момента M ферромагнетика [40, 42]:

$$\omega(M) = C^n \exp \{ -\Phi(M)/kT \}, \quad (7.8.7)$$

где k — постоянная Больцмана, $\Phi(M)$ — свободная энергия:

$$\Phi(M) = \frac{1}{2} K_1 (T - T_{кр}) M^2 + \frac{1}{4} K_2 T M^4 - H M. \quad (7.8.8)$$

Здесь $T_{кр}$ — критическая температура, H — напряженность внешнего магнитного поля, K_j — постоянные коэффициенты. В теории критических явлений величина M является параметром порядка.

Из сравнения (6) и (8) видно, что комплексная амплитуда A аналогична параметру порядка M , а параметр накачки ε — температуре T . При этом функцию $f(AA^*)$ (6) можно интерпретировать как некий «термодинамический потенциал» лазера. Действительно, амплитуда A как параметр порядка должна удовлетворять релаксационному уравнению

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{df}{dA^*}, \quad (7.8.9)$$

которое с учетом (6) приводит к уравнению вида (1).

Равновесное значение параметра порядка $A = A_\infty$ удовлетворяет условиям

$$\left. \frac{\partial f}{\partial A^*} \right|_{A_\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial A^*} \right|_{A_\infty, A_\infty} > 0,$$

откуда, принимая во внимание (6), находим

$$|A_\infty|^2 = \rho_\infty^2 = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq 1, \\ \rho_c^2 (\varepsilon - 1), & \varepsilon \geq 1 \end{cases} \quad (7.8.10)$$

($\rho_c^2 = \alpha/\beta$). Этот результат в точности совпадает с (7.2.15), полученным непосредственно из уравнения (1) (или (7.2.9)). Неупорядоченной фазе соответствует значение параметра накачки $\varepsilon < 1$, упорядоченной — $\varepsilon > 1$, пороговое значение $\varepsilon = 1$ эквивалентно критической температуре.

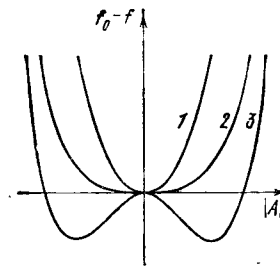


Рис. 7.30. Зависимость термодинамического потенциала лазерного излучения от параметра порядка (комплексной амплитуды) $|A|$ для фазового перехода второго рода.
1) $\varepsilon < 1$; 2) $\varepsilon = 1$; 3) $\varepsilon > 1$.

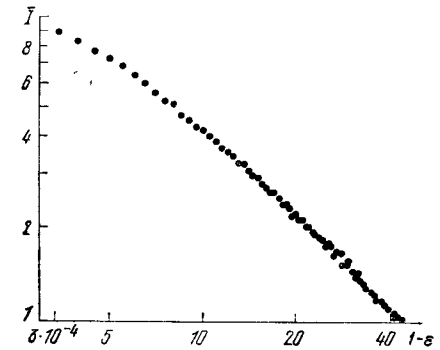


Рис. 7.31. Зависимость средней интенсивности лазерного излучения ниже порога генерации от $1 - \varepsilon$; ε — параметр накачки [45].

Рассматриваемый пример лазерной генерации, описываемой термодинамическим потенциалом с положительным коэффициентом β , относится к фазовому переходу второго рода (рис. 7.30): в точке перехода $\varepsilon = 1$ испытывает скачок обобщенная восприимчивость $\partial A / \partial s|_{s=0}$. Параметр же порядка A является непрерывной функцией (см. рис. 7.2). В случае $\beta < 0$ для описания процесса возбуждения колебаний необходим учет члена в разложении термодинамиче-

ского потенциала пропорционального $|A|^6$. Это жесткий режим генерации, он аналогичен фазовому переходу первого рода*). Его характерной особенностью является наличие гистерезиса: пороги возбуждения и срыва генерации не совпадают. Резкую зависимость физических параметров системы от температуры в окрестности точки фазового перехода принято характеризовать степенной зависимостью, при этом показатель степени носит название критического индекса.

Проанализируем полученные в §§ 2, 5 результаты, касающиеся поведения лазера вблизи порога генерации, с точки зрения критических индексов. Согласно (7.2.65а) в области ниже порога генерации средняя интенсивность изменяется как

$$I = (1/2) \langle |A|^2 \rangle = (\pi/4) \omega_0^2 G_\xi (1-\varepsilon)^{-1} \sim (1-\varepsilon)^{-\mu}, \quad (7.8.11)$$

т. е. критический индекс $\mu=1,0$. Это теоретическое значение хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 7.31). Что касается времени корреляции излучения $\tau_k \approx 1/\Delta\omega_\varepsilon$, то в соответствии с (7.2.65б) оно равно

$$\tau_k \approx 2(1-\varepsilon)^{-1} \sim (1-\varepsilon)^{-\nu}, \quad (7.8.12)$$

и, следовательно, критический индекс $\nu=1,0$.

В надпороговом режиме генерации ($\varepsilon > 1$) средняя интенсивность амплитудных флуктуаций равна (см. (7.2.37))

$$\begin{aligned} I_{\text{фл}} &= \frac{1}{2} \langle \tilde{\rho}^2 \rangle = \\ &= \frac{\pi}{8} \omega_0^2 G_\xi (\varepsilon-1)^{-1} \sim (\varepsilon-1)^{-\mu'}, \end{aligned} \quad (7.8.13)$$

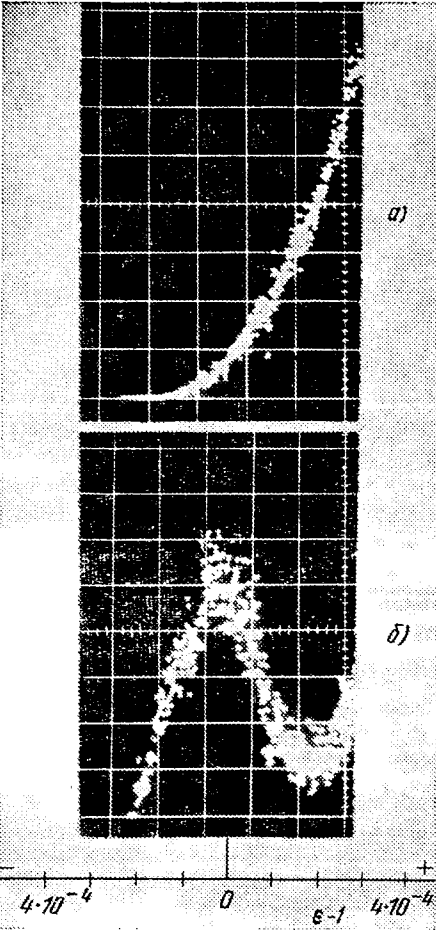


Рис. 7.32. Зависимости средней интенсивности (а) и дисперсии флуктуаций интенсивности (б) излучения лазера от параметра накачки ε при прохождении порога генерации [46]. Зависимость (а) ср с рис.7.6.

* К лазерам с фазовым переходом первого рода относятся лазеры с нелинейно поглощающей ячейкой [17, 44] и лазеры на органических красителях.

т. е. с удалением от порога генерации значение $I_{\text{фл}}$ уменьшается, причем критический индекс $\mu'=1,0$.

В области выше порога генерации нефлуктуационная, постоянная часть амплитуды увеличивается с ростом параметра накачки в соответствии с (10). Таким образом, средняя интенсивность излучения при прохождении порога генерации растет с ростом ε сначала в соответствии с (11), а затем — (10). Флуктуационная же часть интенсивности излучения нарастает при приближении к порогу генерации (11), достигает максимального значения на пороге и спадает при удалении от порога генерации (13). Такое поведение интенсивности лазерного излучения наблюдалось экспериментально [46] (см. рис. 7.32).

Пространственная статистика в пороговой области; формирование пространственной когерентности лазерных пучков. Простейшая теория пространственных флуктуаций излучения лазера может быть развита на основе идей феноменологической теории Ландау для фазовых переходов [18]. При таком подходе в выражение для плотности термодинамического потенциала лазера (6) следует добавить поперечный градиент ∇_\perp , учитывающий флуктуации параметра порядка A (комплексной амплитуды) в плоскости xy , перпендикулярной направлению z распространения излучения (см. [18], с. 516):

$$f(A, A^*) = f_0 - 2(\alpha/\beta)(\varepsilon-1) |A|^2 + |A|^4 + (d/\beta) |\nabla_\perp A|^2. \quad (7.8.14)$$

Здесь считаем $s(t)=0$. По определению (см. § 5) амплитуда A представляет собой величину, усредненную по длине l резонатора. Поэтому полный «термодинамический потенциал»

$$F = \int f(A, A^*) dV = l \int f(A, A^*) d^2r. \quad (7.8.15)$$

Ниже порога возбуждения (в линейном приближении) изменение «термодинамического потенциала» на единицу объема равно

$$\frac{\Delta F}{V} = \frac{2\alpha(\varepsilon-1)}{s_0} \int (1+r_k^2 \kappa^2) |A(\kappa)|^2 d^2\kappa, \quad (7.8.16)$$

где от амплитуды $A(r)$ мы перешли к ее фурье-образу $A(\kappa)$:

$$A(r) = \int A(\kappa) e^{-i\kappa r} d^2r,$$

s_0 — площадь поперечного сечения пучка и, как будет показано ниже, r_k — радиус корреляции:

$$r_k = \left[2 \frac{\alpha}{d} (1-\varepsilon) \right]^{-1/2}. \quad (7.8.17)$$

Плотность вероятности флуктуации $A(r)$ пропорциональна $\exp\{-\Delta F/4VN\}$,

согласно (18) спектральная плотность параметра порядка

$$\begin{aligned} G(\kappa) &= \langle |A(\kappa)|^2 \rangle = C_0 [(1-\varepsilon)(1+r_k^2 \kappa^2)]^{-1}, \\ C_0 &= (\pi/4) \omega_0^2 s_0 G_\xi. \end{aligned} \quad (7.8.19)$$

Для поперечной корреляционной функции

$$B_\perp(s) = \langle A(r) A^*(r+s) \rangle = \int G(\kappa) e^{i\kappa s} d^2\kappa \quad (7.8.20)$$

В соответствии с (19) получаем

$$B_{\perp}(s) = 2\pi C_0 r_k^{-3} (1-\varepsilon)^{-1} K_0(s/r_k), \quad (7.8.21)$$

где $K_0(x)$ — цилиндрическая функция от мнимого аргумента. При $s \gg r_k$ имеем

$$B_{\perp}(s) \sim s^{-1/2} \exp\{-s/r_k\}. \quad (7.8.22)$$

Выражение (21) не применимо для малых $s \approx 0$. В случае $s = 0$ формула для среднеквадратичного значения параметра порядка (средней интенсивности излучения) имеет вид

$$\langle I \rangle \approx 2\pi C_0 k^{-2} (1-\varepsilon)^{-1} \ln kr_k. \quad (7.8.23)$$

Отсюда видно, что критический индекс для средней интенсивности точно такой же, как в случае временных флуктуаций (см. (11)).

Из соотношения (17) следует, что

$$r_k \sim (1-\varepsilon)^{-1/2} = (1-\varepsilon)^{-\nu'}, \quad (7.8.24)$$

где критический индекс $\nu' = 0,5$. Наблюдался резкий рост радиуса корреляции лазерного излучения при подходе к порогу генерации, согласующийся с (24) [47], и получено экспериментальное значение $\nu'_{\text{ксп}} = 0,49 \pm 0,05$, а для средней интенсивности значение критического индекса было $\mu = 0,9 \pm 0,2$ (рис. 7.33).

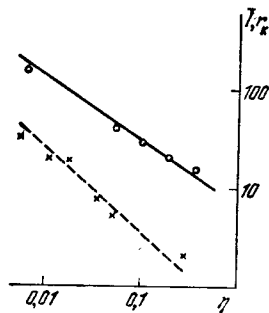


Рис. 7.33. Зависимости средней интенсивности излучения (пунктир) и радиуса корреляции излучения (сплошная линия) от параметра $\eta = 1 - \varepsilon$. Интенсивность I измерена в имп/с, а радиус корреляции r_k — в мкм [47].

Согласие теоретических и экспериментальных результатов исследования пространственных флуктуаций лазера свидетельствует о плодотворности применения методов теории фазовых переходов для анализа процесса генерации лазера. Более строгая теория пространственных флуктуаций лазера вблизи порога возбуждения развита Стратоновичем [36], который получил трехмерный аналог формулы (3). В работе [30] методом теории скейлинга изучен переходный процесс в лазере. Режимы работы лазеров можно классифицировать с точки зрения фазовых переходов; выше были рассмотрены режимы — аналоги фазовых переходов второго и первого рода.

Вместе с тем автоколебательные системы могут представить интерес и для изучения фазовых переходов, например для моделирования нестационарных фазовых переходов. В этом отношении интересен генератор Вина [49], который хорошо описывается феноменологической теорией Ландау.

§ 9. Флуктуации поляризации лазерного излучения.

Деполаризация, обусловленная спонтанными переходами

Спонтанное излучение в лазере оказывается причиной не только естественных флуктуаций амплитуды и фазы, но приводит и к деполаризации генерируемого излучения.

Расчет «естественной деполаризации» лазерного излучения выполним на примере лазера с брестеровским поляризатором. Будем считать, что такой поляризатор, помещенный внутрь резонатора лазера, практически не вносит потерь в моду, поляризованную вдоль оси x , и в значительной мере подавляет моду, поляризованную ортогонально, вдоль оси y . Однако даже в том случае, когда для моды, поляризованной вдоль оси y , порог самовозбуждения не превышен, в реальном лазере имеется спонтанное излучение на этой моде. Последнее приводит к слабой деполаризации генерируемого излучения

Из-за флуктуаций амплитуд и фаз взаимно ортогональных компонент параметры эллипса поляризации флуктуируют во времени. Мы рассчитаем статистические характеристики угла ориентации ψ (1.8.44) эллипса поляризации и вспомогательного угла χ (1.8.45), связанного с коэффициентом эллиптичности (см. рис. 1.23). Статистика указанных величин определяется статистикой амплитуд и фаз ортогональных лазерных компонент.

Напомним, что статистические свойства колебаний для произвольного значения параметра накачки ε были изучены в § 2, результаты которого здесь будут использованы.

Примем для определенности, что x -компонента лазерного поля возбуждается в надпороговом режиме ($\varepsilon_x > 1$). При значительном превышении порога генерации флуктуациями интенсивности I_x можно пренебречь. Тогда функцию распределения огибающей $\rho_x = |A_x|$ и фазы $\varphi_x = \arg A_x$ в соответствии с результатами § 2 можно записать в виде

$$w(\rho_x, \varphi_x) = \frac{1}{2\pi} \delta(\rho_x - \rho_\infty), \quad (7.9.1)$$

где ρ_∞ — установившееся значение амплитуды, $\rho_\infty = [(\alpha/\beta)(\varepsilon_x - 1)]^{1/2}$.

С другой стороны, y -компонента излучения лазера вследствие потерь, вносимых брестеровскими окнами, находится в подпороговом режиме генерации ($\varepsilon_y < 1$). При этом статистика поля излучения является гауссовской, и для функции распределения огибающей ρ_y и фазы φ_y имеем

$$w(\rho_y, \varphi_y) = \frac{\rho_y}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\rho_y^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (7.9.2)$$

где согласно (7.2.32а) $\sigma^2 = \pi\omega^2 G_{\xi}^2 / 2 |p_y|$, $p_y = \delta_y - \alpha = \alpha(\varepsilon_y - 1)$.

Разумно предположить статистическую независимость взаимно перпендикулярных компонент излучения лазера, т. е. что совместная функция распределения равна

$$w(\rho_x, \rho_y, \varphi_x, \varphi_y) = w(\rho_x, \varphi_x) w(\rho_y, \varphi_y) = \frac{\rho_y e^{-\rho_y^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^2} \delta(\rho_x - \rho_\infty). \quad (7.9.3)$$

Перепишем соотношения (1.8.44) и (1.8.45) в виде

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\rho_x \rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 - \rho_y^2} = f_1(\rho_x, \rho_y, \varphi_x, \varphi_y), \quad (7.9.4)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\rho_x \rho_y \sin(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 + \rho_y^2} = f_2(\rho_x, \rho_y, \varphi_x, \varphi_y). \quad (7.9.5)$$

Двумерная функция распределения ψ и χ равна

$$w(\psi, \chi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} w(\rho_x, \rho_y, \varphi_x, \varphi_y) \delta(\psi - f_1) \delta(\chi - f_2) d\rho_x d\rho_y d\varphi_x d\varphi_y. \quad (7.9.6)$$

Существует общий метод нахождения функции распределения (6) для числа случайных величин меньшего, чем число преобразуемых случайных величин. Однако для упрощения вывода мы сразу используем (3). Введя обозначение $\theta = \varphi_x - \varphi_y$, вместо (6) имеем

$$w(\psi, \chi) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \int_0^{\infty} d\rho_y \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\rho_y^2/2\sigma^2} \delta(\psi - f_{1,0}) \delta(\chi - f_{2,0}) d\theta, \quad (7.9.7)$$

где $f_{n,0} = f_n(\rho_{\infty}, \rho_y, \theta)$. Пользуясь свойством δ -функции

$$\int F(x) \delta(y - f(x)) dx = F(f^{-1}(y)) / f'(f^{-1}(y)),$$

из (7) получаем [50]

$$w(\psi, \chi) = \frac{\rho_{\infty}^2 \cos 2\chi}{2\pi\sigma^2 \cos^2 2\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \frac{\rho_{\infty}^2}{\sigma^2} (\sin^2 2\chi + \operatorname{tg}^2 2\psi) \right\}. \quad (7.9.8)$$

Из (8) следует, что в рассматриваемом случае параметры ψ и χ статистически независимы, причем

$$w(\psi) = \frac{\rho_{\infty}}{\sqrt{2\pi} \sigma \cos^2 2\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \frac{\rho_{\infty}^2}{\sigma^2} \operatorname{tg}^2 2\psi \right\}, \quad (7.9.9)$$

$$w(\chi) = \frac{\rho_{\infty} \cos 2\chi}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \frac{\rho_{\infty}^2}{\sigma^2} \sin^2 2\chi \right\}. \quad (7.9.10)$$

Отметим, что в более общем случае, когда статистика «подпороговой» компоненты отличается от гауссовской, параметры ψ и χ оказываются статистически связанными [50].

На основе (9) и (10) находим, что средние значения

$$\bar{\psi} = \bar{\chi} = 0,$$

а дисперсии

$$\bar{\psi}^2 = \mu_0 - 8\mu_0^2 + \dots, \quad \bar{\chi}^2 = \mu_0 + 4\mu_0^2 + \dots \quad (7.9.11)$$

зависят от отношения средних интенсивностей компонент x и y :

$$\mu_0 = I_y / 2I_x = \sigma^2 / \rho_{\infty}^2.$$

Таким образом, в первом приближении по μ_0

$$\bar{\psi}^2 \approx \bar{\chi}^2 = \mu_0 = \sigma^2 / \rho_{\infty}^2 = \pi \omega_0^2 G_{\xi}^2 \beta / 4\rho_x | \rho_y |. \quad (7.9.12)$$

Если принять, что $\rho_x \approx | \rho_y |$, то

$$\bar{\psi}^2 \approx \bar{\chi}^2 \approx \pi \omega_0^2 G_{\xi}^2 \beta / 4\rho_x^2.$$

Рассчитаем теперь степень поляризации P излучения, определяемую выражением (1.8.55) и имеющую смысл отношения интенсивности полностью поляризованного излучения к полной интенсивности излучения. В обозначениях

§ 8 гл. 1 в рассматриваемом случае

$$B_{xx} = \rho_{\infty}^2 / 2, \quad B_{yy} = \sigma^2, \quad B_{xy}(0) = 0.$$

Поэтому согласно (1.8.55) и (1.8.49)

$$P = \left\{ 1 - \frac{8\mu_0}{[1 + 2\mu_0]^2} \right\}^{1/2} \approx 1 - 4\mu_0 + 8\mu_0^2 - \dots, \quad (7.9.13)$$

где учтено, что $\mu_0 = \sigma^2 / \rho_{\infty}^2 \ll 1$. Полученные значения степени поляризации (13) и параметров эллипса поляризации (11) обусловлены спонтанным излучением, следовательно, выражения (13) и (11) дают предельные значения указанных величин: для P — максимальное, для $\bar{\psi}^2$ и $\bar{\chi}^2$ — минимальные.

В заключение оценим величину μ_0 . Так как источником шума является спонтанное излучение лазера, его спектральная плотность не зависит от направления поляризации. Однако мощность шума ортогональных компонент различна из-за различия потерь $\alpha_{x,y}$, вносимых брестеровскими окнами. Возьмем $\alpha_x l / c \approx 3 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_y l / c \approx 5 \cdot 10^{-1}$ (l — длина резонатора, c — скорость света), тогда отношение мощностей спонтанного излучения $P_{y, \text{сп}} / P_{x, \text{сп}} \approx 20$. Согласно данным работы [39], при мощности генерации $P_0 \approx 1$ мкВт мощность спонтанного излучения $P_{x, \text{сп}} \approx 5 \cdot 10^{-13}$ Вт. Следовательно, $P_{y, \text{сп}} \approx 10^{-11}$ Вт и $\mu_0 \sim 10^{-5}$. Такой же порядок имеет дисперсия углов ψ и χ (11), и отличие предельной степени поляризации лазерного излучения от полной степени поляризации, равной единице.

СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ И НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ

В средах, свойства которых зависят от напряженности поля электромагнитной волны или переменного акустического давления, — нелинейных средах, — принцип суперпозиции нарушается. Волны разных частот или разных направлений в нелинейной среде *взаимодействуют* между собой. Возникают и эффекты *самовоздействия*, обусловленные зависимостью коэффициента поглощения, фазовой и групповой скорости от интенсивности волны.

С нелинейными явлениями взаимодействия и самовоздействия волн все чаще приходится сталкиваться в современной лазерной оптике, акустике, физике плазмы. Нелинейные эффекты оказываются весьма существенными и при распространении мощных радиоволн в ионосфере. В современной физике волновых процессов *нелинейные волны* играют не менее важную роль, нежели нелинейные колебания в физике колебаний систем с сосредоточенными параметрами.

Предметом настоящей главы является обсуждение некоторых статистических задач физики нелинейных волновых процессов. Как статистика приходит в физику нелинейных волн, с чем связана постановка статистических задач в нелинейной оптике, нелинейной акустике и т. п.?

Здесь можно выделить три группы проблем.

1. Прежде всего, представляют интерес задачи, связанные с изучением статистических явлений, обусловленных случайной модуляцией волн, возбуждающих нелинейную среду (статистика поля).

2. Большой круг статистических задач связан с изучением эффектов, возникающих вследствие статистической неоднородности нелинейной среды (статистика среды).

3. И наконец, следует указать на статистические явления, обусловленные наличием в нелинейной среде распределенных шумовых источников (статистика распределенных источников).

Перечисленные проблемы представляют значительный интерес для всех разделов физики нелинейных волн; отметим, что во многих физических задачах эффекты статистики поля, статистики среды и статистики распределенных источников проявляются одновременно. Однако ниже мы ограничимся лишь рассмотрением статистических явлений, обусловленных статистикой поля. В чем отличие взаимодействий и самовоздействий случайных волн от взаимодействий и самовоздействий регулярных волн? Таков главный вопрос, на котором мы сосредоточим внимание в этой главе.

Основное внимание при этом мы уделим задачам нелинейной оптики — задачам о нелинейных волновых явлениях в сильно диспергирующих средах.

Одним из главных эффектов статистики поля здесь оказывается обусловленный дисперсией групповой скорости распад фазовых корреляций (декорреляция) взаимодействующих волн в процессе распространения. Декорреляция существенно снижает, вообще говоря, эффективность нелинейного взаимодействия и может привести к качественному изменению характера нелинейного эффекта; на смену когерентным взаимодействиям регулярных волн приходят некогерентные взаимодействия случайных волн. Эти явления детально прослежены ниже на примере таких фундаментальных волновых процессов, как генерация оптических гармоник и вынужденное рассеяние.

С другим классом нелинейных волновых взаимодействий — взаимодействиями волн в слабо диспергирующих средах — связаны задачи нелинейной акустики. Закономерности искажения гармонической волны в нелинейной недиспергирующей среде были установлены еще Риманом. В § 6 этой главы аналогичные вопросы обсуждаются применительно к шумовым волнам. Надо сказать, что такая постановка задачи представляет не только принципиальный, но и практический интерес: во многих случаях мощные акустические генераторы являются источниками широкополосного акустического шума.

Рассматриваемые ниже статистические задачи теории нелинейных волн в математическом плане, несомненно, относятся к наиболее сложным задачам статистической радиофизики. Поэтому в этой главе мы в полной мере используем математический аппарат, изложенный в гл. 1 и 2. Наряду с усреднением аналитических решений ниже широко используются уравнения для средних, записанные в различных приближениях.

В этой главе можно найти и примеры целесообразного использования математических моделей случайных процессов. Так, в § 4 для решения нелинейной задачи о вынужденном рассеянии в поле шумовой накачки реальный процесс со сплошным спектром оказывается целесообразным заменить многомодовым процессом — процессом с дискретным спектром.

§ 1. Приближенные уравнения нелинейной оптики. Классификация нелинейных эффектов

Поведение интенсивных электромагнитных волн описывается нелинейным волновым уравнением, являющимся следствием уравнений Максвелла (ср. с (4.3.3)):

$$c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 \mathbf{P}^1}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{1,2}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.1.1)$$

Линейная поляризация среды P^l определяется соотношением (4.3.2). Нелинейную поляризацию P^{nl} пассивной, слабо поглощающей среды можно представить в виде разложения по степеням напряженности E макроскопического поля (параметр разложения $\mu \approx E/E_a$, E_a — внутриатомное поле). Тогда i -я компонента нелинейного отклика среды без пространственной дисперсии запишется в виде

$$P_i^{nl}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dt' dt'' H_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t-t') E_k(\mathbf{r}, t-t'-t'') + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' dt''' H_{ijkl}^{(3)}(t', t'', t''') E_j(\mathbf{r}, t-t') \times \\ \times E_k(\mathbf{r}, t-t'-t'') E_l(\mathbf{r}, t-t'-t''-t''') + \dots \quad (8.1.2)$$

Здесь $H_{ijk}^{(2)}$ и $H_{ijkl}^{(3)}$ — компоненты тензоров третьего и четвертого ранга соответственно, E_j — компонента электрического поля.

В недиспергирующей среде

$$H_{ijk}^{(2)} = h_{ijk}^{(2)} \delta(t') \delta(t''), \quad H_{ijkl}^{(3)} = h_{ijkl}^{(3)} \delta(t') \delta(t'') \delta(t''')$$

и соотношение (2) становится алгебраическим:

$$P_i^{nl}(\mathbf{r}, t) = h_{ijk}^{(2)} E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) + h_{ijkl}^{(3)} E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) E_l(\mathbf{r}, t).$$

Используя разложение поля $E_j(\mathbf{r}, t)$ по плоским волнам:

$$E_j(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega d^3k E_j(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (8.1.3)$$

запишем спектральное разложение компоненты нелинейной поляризации:

$$P_i^{nl}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty d^3k P_i^{nl}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (8.1.4)$$

Спектральная компонента вектора нелинейной поляризации, связанная с тензором третьего ранга χ_{ijk} , равна

$$P_i^{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^\infty d\omega' d^3k' \chi_{ijk}(\omega, \omega') E_j(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') E_k(\omega', \mathbf{k}'), \quad (8.1.5)$$

$$\chi_{ijk}(\omega, \omega') = \int_0^\infty dt' dt'' H_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega t' + \omega' t'')}. \quad (8.1.6)$$

Отсюда следует, что спектральная компонента $P_i^{nl}(\omega, \mathbf{k})$ младшего в разложении нелинейной поляризации по полю члена возникает в результате взаимодействия спектральных компонент поля на частотах $\omega - \omega'$, ω' с волновыми векторами $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, \mathbf{k}' . Другими словами, соотношения между частотами и волновыми векторами фурье-компонент поля, взаимодействующих на нелинейности низшего порядка (квадратичной нелинейности), и фурье-компонент поляризации можно записать в виде

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (8.1.7a)$$

Поскольку в соотношениях (5), (6) величины ω и k могут принимать отрицательные значения, кроме взаимодействий типа (7a) в рассматриваемой среде могут быть взаимодействия, например, вида

$$\omega_3 = \omega_2 - \omega_1, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1. \quad (8.1.7b)$$

Взаимодействия, удовлетворяющие соотношениям (7), в нелинейной оптике принято называть трехчастотными; к ним относятся: сложение частот (в вырожденном случае, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, генерация второй гармоники), параметрическое усиление, линейный электрооптический эффект и т. п. (см. [1]).

Аналогично, спектральная компонента, связанная с тензором четвертого ранга θ_{ijkl} , записывается в виде

$$P_i^{nl}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^\infty d\omega' d\omega'' d^3k' d^3k'' \theta_{ijkl}(\omega, \omega', \omega'') \times \\ \times E_j(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') E_k(\omega' - \omega'', \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') E_l(\omega'', \mathbf{k}''), \quad (8.1.8)$$

причем выражение для спектральной компоненты θ_{ijkl} аналогично (6). В соответствии с (8) соотношения между частотами и волновыми векторами фурье-компонент, взаимодействующих на кубичной нелинейности, имеют вид

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (8.1.9a)$$

Помимо этого взаимодействия, в среде с кубичной нелинейностью могут протекать процессы с другими комбинациями частот и волновых векторов, например:

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_3 - \omega_2, \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2. \quad (8.1.9b)$$

Эти взаимодействия принято называть четырехчастотными. Участие четырех волн в (9) приводит к большому разнообразию нелинейных эффектов. Ряд из них имеет много общего с эффектами, возникающими на квадратичной нелинейности, — речь идет об эффектах типа генерации третьей гармоники ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, $\omega_4 = 3\omega$) и т. п.

Вместе с тем с поляризацией, кубичной по полю, связаны и принципиально новые эффекты, не имеющие аналогов среди эффектов, квадратичных по полю. В первую очередь это эффекты самовоздействия. Если в (96) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, то за счет четырехчастотного взаимодействия возникает спектральная компонента поляризации на частоте ω :

$$\omega = \omega + \omega - \omega, \quad k = k + k - k.$$

Последнее означает, что появляется добавка к комплексному показателю преломления на частоте распространяющейся волны ω , пропорциональная интенсивности. Символически это можно записать как

$$n = n_0 + n_2 E^2.$$

Таким образом, интенсивная волна сама изменяет поглощение и дисперсию среды, в которой распространяется.

Для квазиплоских квазимонохроматических волн выражения (5) и (8) можно упростить, следуя методу, изложенному в § 3 гл. 4. Выделим в поле, наряду с быстрыми переменными \mathbf{r} и t , медленные переменные $\mu_1 t$, $\mu_2 \mathbf{r}$, где малые параметры μ_1 , $\mu_2 \ll 1$ характеризуют относительные ширины частотного и углового спектров волн. В этом случае для поля $E = E(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t, \mathbf{r}, t)$ вместо разложения (3) можно ввести разложение

$$E_j(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t, \mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int d\omega d^3k E_j(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t, \omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (8.1.10)$$

в котором фурье-амплитуды сами являются функциями медленных переменных («недоразложенный» спектр).

Если средние частоты взаимодействующих волн существенно различаются, то

$$E_j(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t, \mathbf{r}, t) = \sum_n A_{nj}(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t) e^{i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})} + \text{к. с.} \quad (8.1.11)$$

С учетом соотношения (11) нелинейная поляризация среды, например, для случая трехчастотного взаимодействия (5) принимает вид

$$P_i^{\text{нл}}(\omega_l) = \sum_{n, m} \chi_{ijk}(\omega_l = \omega_m \pm \omega_n) A_{nj}(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t) A_{mk}(\mu_2 \mathbf{r}, \mu_1 t) \times \\ \times \exp\{i(\omega_m \pm \omega_n)t - (\mathbf{k}_m \pm \mathbf{k}_n)\mathbf{r}\} + \text{к. с.} \quad (8.1.12)$$

В выражении (12) нелинейный отклик среды учитывается квазистатически с помощью спектральных компонент χ , взятых для средних частот.

Соотношение (12) становится точным в смысле учета дисперсии нелинейной поляризуемости среды, если речь идет о взаимодействии плоских монохроматических волн. Полное поле в

нелинейной среде при этом следует искать в виде

$$E = \sum_n e_n A_n(\mu \mathbf{r}) e^{i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})} + \text{к. с.} \quad (8.1.13)$$

Здесь e_n — единичный вектор поляризации, а зависимость комплексной амплитуды $A_n(\mu \mathbf{r})$ от пространственной координаты обусловлена нелинейным взаимодействием. Подставляя (13) в (1), в первом приближении по μ получим систему уравнений вида

$$[e_n [k_n e_n]] \nabla A_n = F_n(A_1, \dots, A_N; \mathbf{r}), \quad (8.1.14)$$

где нелинейный член F_n имеет порядок μ :

$$F_n = i \frac{2\pi}{c^2} \omega_n^2 e_n P^{\text{нл}}(\omega_n). \quad (8.1.15)$$

Обобщим нелинейные уравнения (14) на случай взаимодействия плоских квазимонохроматических волн. Напомним, что в первом приближении теории дисперсии изменение комплексной амплитуды A описывается уравнением (4.3.12). В исходное уравнение (1) с учетом (12) нелинейные и дисперсионные члены входят аддитивно. Эта аддитивность сохраняется и в укороченных уравнениях. В первом приближении теории дисперсии

$$[e_n [k_n e_n]] \left\{ \nabla A_n + s_n \frac{\partial A_n}{\partial t} \right\} = F_n(A_1, \dots, A_N; \mathbf{r}). \quad (8.1.16)$$

В полуограниченной среде, направляя ось z по нормали к границе среды, систему можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{1}{u_n \cos \widehat{s_n z_0}} \frac{\partial A_n}{\partial t} = F'_n, \quad (8.1.17)$$

где z_0 — единичный вектор вдоль оси z , $F'_n(A_1, \dots, A_N; \mathbf{r}) = (k \cos \widehat{k s_n})^{-1} F_n(A_1, \dots, A_N; \mathbf{r})$. Система уравнений (16) или (17) значительно сложнее соответствующей системы (14) для немодулированных волн. Это сужает круг задач о взаимодействии модулированных волн, допускающих аналитическое решение.

Вместе с тем в случае равенства групповых скоростей, $u_n \cos \widehat{s_n z_0} = u$, уравнения (17) сводятся к системе уравнений вида (14).

Принято говорить, что в этом случае мы имеем дело с квазистатическим взаимодействием волн; картина взаимодействия здесь такая же, как и для немодулированных волн. Напротив, если групповые скорости волн отличаются, говорят о нестационарном взаимодействии волн. Заметим, что в конкретных задачах критерий квазистатики оказывается менее жестким. Поскольку нас интересует нелинейное взаимодействие в среде конечной длины l , нелинейное взаимодействие модулированных волн можно рассматривать как квазистатическое и при различающихся групповых

скоростях, если времена группового запаздывания $\tau_{ik} = l(u_i^{-1} - u_k^{-1})$ волн относительно друг друга малы по сравнению с характерным временным масштабом модуляции τ_m : $\tau_{ik} \ll \tau_m$ (см. ниже).

Отметим еще раз, что в уравнениях (16), (17) дисперсия среды учтена в первом приближении. Во втором приближении теории дисперсии линейное распространение плоских шумовых волн в бегущей системе координат (4.3.22) описывается уравнением (4.3.22). Уравнения нелинейного взаимодействия шумовых волн принимают вид

$$[e_n [k_n e_n]] \left[\nabla A_n - i \frac{g_n}{2} \frac{\partial^2 A_n}{\partial \eta^2} \right] = F_n(A_1, \dots, A_N; \mathbf{r}). \quad (8.1.18)$$

Уравнения (18) записаны в собственных бегущих координатах (4.3.22) волн, $g_n = \partial^2 k_n / \partial \omega_n^2$ — дисперсия групповой скорости.

Конкретизируем уравнения (18) на примере трехчастотного взаимодействия ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$) в среде с квадратичной нелинейностью. В этом случае поляризация $P_i^{nl}(\omega_n)$, входящая в нелинейный член (15), дается соотношением (12). Будем рассматривать одномерные взаимодействия, т. е. считать, что волновые векторы волн коллинеарны и для них имеет место соотношение

$$k_1 + k_2 = k_3 + \Delta. \quad (8.1.19)$$

Записывая три уравнения вида (18) в общей координатной системе, связанной с волной частоты ω_1 ,

$$z, \quad \eta = \eta_1 = t - z/u_1,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} - i \frac{1}{2} g_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \eta^2} &= -i \beta_1 A_3 A_2^* e^{i \Delta z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial \eta} - i \frac{1}{2} g_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \eta^2} &= -i \beta_2 A_3 A_1^* e^{i \Delta z}, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial \eta} - i \frac{1}{2} g_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial \eta^2} &= -i \beta_3 A_1 A_2 e^{-i \Delta z}. \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

Здесь β_n — коэффициенты нелинейной связи:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2\pi (\mathbf{e}_1 \hat{\chi} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \omega_1^2}{k_1 c^2}, & \beta_2 &= \frac{2\pi (\mathbf{e}_2 \hat{\chi} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) \omega_2^2}{k_2 c^2}, \\ \beta_3 &= \frac{2\pi (\mathbf{e}_3 \hat{\chi} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \omega_3^2}{k_3 c^2}; \end{aligned} \quad (8.1.21)$$

v_n — расстройки групповых скоростей:

$$v_n = 1/u_n - 1/u_1. \quad (8.1.22)$$

В (20) члены с коэффициентами v_2 и v_3 описывают групповое запаздывание взаимодействующих волн.

Нетрудно провести обобщение (14) и на случай взаимодействия квазиплоских монохроматических волн (волновых пучков со случайной поперечной структурой); при этом вместо (14) получаем уравнения

$$\frac{\partial A_n}{\partial z_n} + i \frac{1}{2k_n} \Delta_{\perp} A_n = F_n(A_1, \dots, A_n; \mathbf{r}), \quad (8.1.23)$$

где Δ_{\perp} — поперечный лапласиан. Уравнения (23) записаны в координатах, связанных с лучом, т. е. направление оси z_n совпадает с направлением лучевого вектора. Разумеется, уравнения (23) можно также рассматривать как обобщение параболического уравнения (4.3.31а) на нелинейные среды.

Нелинейные взаимодействия световых волн эффективны, если выполнены так называемые условия фазового синхронизма ($\Delta = 0$). Действительно, если в (20) Δ велико, члены в правых частях уравнений быстро осциллируют, взаимодействие практически исчезает и волны распространяются в линейной среде. Условия фазового синхронизма можно выполнить в анизотропной среде, например в одноосном кристалле (см. [1, 9]), если в нелинейном взаимодействии участвуют волны разной поляризации — обыкновенные и необыкновенные волны. В этом случае в приближенных уравнениях для комплексных амплитуд следует учесть различие направлений лучевого и волнового векторов необыкновенной волны.

Трехчастотное взаимодействие ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$) квазиплоских волн, при котором волна на частоте ω_3 является необыкновенной, а остальные волны — обыкновенными (так называемое взаимодействие $oo \rightarrow e$), в системе координат, связанной с обыкновенными волнами, в соответствии с (23) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1} \Delta_{\perp} A_1 &= -i \beta_1 A_3 A_2^* e^{i \Delta z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{i}{2k_2} \Delta_{\perp} A_2 &= -i \beta_2 A_3 A_1^* e^{i \Delta z}, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + \psi \frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{i}{2k_3} \Delta_{\perp} A_3 &= -i \beta_3 A_1 A_2 e^{-i \Delta z}, \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

где ψ — угол между волновым и лучевым векторами необыкновенной волны ($\psi = \widehat{k_3 s_3} \sim \mu^{1/2}$).

Уравнения (20) и (24) по отдельности учитывают эффекты временной и пространственной модуляции при взаимодействии волн. Нетрудно записать нелинейные уравнения, в которых одновременно принимаются во внимание пространственные и временные эффекты.

Сделаем краткое замечание о пространственно-временной аналогии в теории модулированных волн. В § 3 гл. 4 эта аналогия

рассматривалась применительно к линейной теории распространения модулированных волн. Однако ее можно перенести на нелинейную теорию волн. Ранее указывалось, что дисперсионному распыванию волнового пакета можно сопоставить дифракционное расширение пучка. Из уравнений (20) и (24), кроме того, следует, что аналогом группового запаздывания в теории взаимодействия квазимонохроматических волн является боковой снос энергии при взаимодействии квазиплоских волн, обусловленный различием в направлениях луча и волнового вектора в анизотропных средах.

§ 2. Преобразование шума в лазерном усилителе

Мы начинаем исследование нелинейных преобразований случайных волн с задачи о преобразовании статистики усиливаемой волны в лазерном усилителе. Здесь мы хотели бы специально подчеркнуть два аспекта этой задачи.

Преобразование волны в насыщающемся лазерном усилителе является одним из важных примеров самовоздействия световой волны. Ниже учитывается зависимость от интенсивности лишь коэффициента усиления, т. е. рассматривается самовоздействие, связанное с мнимой частью нелинейной восприимчивости; эффекты самовоздействия, обусловленные действительной частью восприимчивости, — самофокусировка и самодефокусировка — обсуждаются в § 5.

Другой аспект связан с физикой так называемых сверхлюминесцентных лазеров. Речь идет о лазерных системах, в которых по тем или иным причинам использование обратной связи (в виде открытого резонатора или распределенной обратной связи) невозможно. В этом случае выходное излучение представляет собой усиленный собственный шум. Каковы статистические характеристики этого излучения?

Ниже мы убедимся, что, если лазерный усилитель работает в нелинейном режиме, одномерный закон распределения интенсивности выходного излучения оказывается практически таким же, как и для генератора с обратной связью. Статистика усиливаемого стационарного шума преобразуется в пространстве точно так же, как статистика устанавливающихся колебаний в генераторе с обратной связью. В усиливающей среде быстро увеличиваются также время и радиус поперечной корреляции шума. Таким образом, при надлежащем подборе параметров излучение лазера, работающего в режиме сверхлюминесценции, может практически не отличаться от излучения лазера с обратной связью; при этом сказанное относится не только к расходимости и ширине спектральной линии (они прямо связаны с соответствующими

масштабами корреляции), но и к такой тонкой характеристике излучения, как одномерное распределение интенсивности.

Процесс распространения волн в среде с отрицательным поглощением будем описывать уравнением для комплексной амплитуды A поля (ср. с (4.3.176)):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp}\right) A = gA. \quad (8.2.1)$$

Коэффициент усиления g зависит от интенсивности усиливаемой волны:

$$g = \frac{\alpha(r, z)}{1 + |A|^2 / I_{\text{нас}}}, \quad (8.2.2)$$

где $I_{\text{нас}}$ — интенсивность насыщения. Профиль линейного коэффициента усиления $\alpha(r, z)$ определяется накачкой. Остальные обозначения в (2) обычные.

Временная статистика — пространственный аналог задачи о флуктуационном установлении колебаний. В задаче о поведении временных флуктуаций в лазерном усилителе дифракционным членом в (2) будем пренебрегать, что равносильно предположению об усилении плоской шумовой волны. Кроме того, будем считать, что интенсивность волны $|A|^2 < I_{\text{нас}}$ и коэффициент $\alpha(r, z) = \alpha = \text{const}$. Тогда, ограничиваясь первым членом в разложении (2) по $|A|^2 / I_{\text{нас}}$, уравнение (1) можно привести к виду (ср. с (7.5.23))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} - \alpha A + \beta A^* A^2 = 0, \quad (8.2.3)$$

где нелинейный коэффициент $\beta = \alpha / I_{\text{нас}} > 0$.

Перейдем в (3) к интенсивности $I = |A|^2$ и бегущим координатам z и $\eta = t - z/u$; тогда получим

$$\frac{\partial I}{\partial z} - \alpha I + \beta I^2 = 0. \quad (8.2.4)$$

Граничное условие для (4):

$$I(\eta, z=0) = I_0(\eta). \quad (8.2.5)$$

Решением уравнения (4) является

$$I(\eta, z) = \frac{I_0(\eta) e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z} - 1) I_0 / I_{\infty} + 1}. \quad (8.2.6)$$

Здесь $G = 2\alpha z$ и величина $I_{\infty} = \alpha / \beta = I_{\text{нас}}$ — установившееся значение интенсивности. Полученное решение (6) аналогично решению (1.6.7) задачи об установлении колебаний в генераторе, рассмотренной в § 3 гл. 7. Аналогом приведенного коэффициента усиления G в (1.6.7) является приведенное время τ .

Таким образом, мгновенная интенсивность усиливаемого в нелинейном лазерном усилителе сигнала ведет себя так же, как

интенсивность самовозбуждающихся колебаний в генераторе с обратной связью. Если $I_0(t)$ — случайная функция, то с помощью (6) можно определить закономерности преобразования статистики в процессе усиления.

В соответствии с (6) одномерные законы распределения стационарного усиливаемого шума различны в разных сечениях усиливающей среды. Если исходная случайная волна имеет гауссовскую статистику (распределение интенсивности экспоненциальное), то с помощью замены τ на G результаты анализа статистических характеристик интенсивности колебания $I(t)$ (1.6.7) полностью переносятся на интенсивность $I(\eta, z)$ усиливаемой волны. Поэтому можно использовать и кривые рис. 7.8—7.12.

Из сказанного следует, что флуктуации интенсивности усиливаемой волны сначала нарастают, достигают максимального значения и затем, когда начинает проявляться нелинейность коэффициента усиления, происходит их уменьшение*). Из-за флуктуаций интенсивности волны на входе усиливающей среды расстояние, на котором достигается заданное значение интенсивности, также флуктуирует.

Пространственная статистика; обобщение теоремы Ван Циттерта—Цернике на усиливающие среды. Для анализа вопроса о формировании пространственной когерентности световых пучков в усилителях бегущей волны будем предполагать коэффициент усиления заданным, но учтем дифракционные эффекты. Коэффициент усиления, определяемый профилем пучка накачки, представим в виде

$$\alpha(r, z) = \alpha_0 (1 - r^2/a_0^2), \quad (8.2.7)$$

где a_0 — поперечный размер пучка накачки. Таким образом, будем исходить из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} A - \alpha_0 A + \frac{\alpha_0}{a_0^2} r^2 A = 0. \quad (8.2.8)$$

Замена $A = \tilde{A} e^{\alpha_0 z}$ дает

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \tilde{A} + \frac{\alpha_0}{a_0^2} r^2 \tilde{A} = 0. \quad (8.2.9)$$

Уравнение (9) отличается от уравнения (4.5.95) распространения волн в оптических волокнах с показателем вида (4.5.93) тем, что в первом случае коэффициент перед третьим членом действительный, а во втором случае — мнимый (в усиливающей среде создается активный оптический канал). В связи с этим можно

*) Такое поведение характерно для усилителей бегущей волны и других типов; см., например, работу [41], где экспериментально исследовались флуктуации интенсивности сигнала, усиливаемого в оптическом параметрическом усилителе бегущей волны.

воспользоваться решением (4.5.105), производя замену

$$-i \frac{1}{2} k \beta^2 = \frac{\alpha_0}{a_0^2}. \quad (8.2.10)$$

В случае δ -коррелированной на входе волны поперечная корреляционная функция для произвольного сечения z равна

$$B_{\perp}(r_2, r_1) = F(z) \exp \left\{ -\frac{(r_2 + r_1)^2}{8a^2(z)} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{2r_k^2(z)} - iD(z)(r_2^2 - r_1^2) \right\}. \quad (8.2.11)$$

Здесь $D(z)$, $F(z)$, $a(z)$ и $r_k(z)$ — функции пройденного расстояния. Особый интерес представляют значения радиуса пучка $a(z)$ и радиуса корреляции $r_k(z)$, которые выражаются формулами (вывод см. в [2])

$$\begin{aligned} a^{-2}(z) &= -4[(\operatorname{Re} f)^2 - (\operatorname{Re} g)^2]/\operatorname{Re} f, \\ r_k^{-2}(z) &= -4[(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} g)^2]/\operatorname{Re} f, \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

где

$$\begin{aligned} f &= ie \operatorname{ctg}(2ez/k), \quad g = ie \operatorname{cosec}(2ez/k), \\ e &= (i2\alpha_0 k/a_0^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Графики функций $a^{-2}(z)$ и $r_k^{-2}(z)$ представлены на рис. 8.1. С ростом z радиус корреляции монотонно увеличивается, а радиус пучка — уменьшается. При $z \gg l_d/\sqrt{G_d}$ они асимптотически стремятся к одному значению, равному $a_0/2G_d^{1/4}$ ($G_d = \alpha_0 l_d$, $l_d = ka_0^2/2$). Таким образом, в усиливающей среде, как и в лазере с обратной связью, излучение становится полностью пространственно когерентным*).

Сужение спектральной линии усиливаемого шума. До сих пор при рассмотрении усиления шума в лазерном усилителе мы считали коэффициент усиления α не зависящим от частоты, т. е. фактически мы предполагали, что (см. уравнения двухуровневой среды (5.5.1)) характерное время модуляции усиливаемой волны значительно больше времени релаксации T_2 . На спектральном языке это означает, что ширина линии усиливаемого шума $\Delta\omega_{\text{ш}}$ значительно меньше ширины линии усилителя $\Delta\omega = 2/T_2$ ($\Delta\omega_{\text{ш}} \ll \Delta\omega$). Если это условие не выполнено, то отклик среды перестает быть квазистатическим. При условии $\Delta\omega_{\text{ш}} \gg \Delta\omega$ по

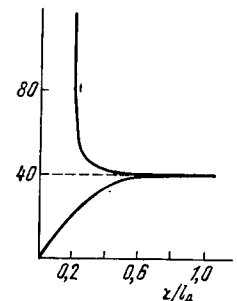


Рис. 8.1. a_0^2/r_k^2 (верхняя кривая) и a_0^2/a^2 (нижняя кривая) в зависимости от расстояния z в линейном лазерном усилителе [2].

$a_0 = a(z=0)$ — исходный радиус пучка.

*) Детальное исследование вопроса изложено в [2, 17]; результаты численного анализа формирования пространственной когерентности в усиливающих средах содержатся в [3].

мере усиления, очевидно, будет происходить сужение спектра усиленного шума.

Для описания таких процессов воспользуемся уравнением (3); запишем его для фурье-амплитуд A_ω , опуская нелинейность ($\beta = 0$). Тогда получим

$$\frac{dA_\omega}{dz} + \left(i \frac{\omega}{u} - \alpha \right) A_\omega = 0$$

и, следовательно,

$$A_\omega(z) = A_\omega(z=0) e^{(\alpha - i\omega/u)z}. \quad (8.2.13)$$

В интересующем нас случае коэффициент усиления $\alpha = \alpha(\omega)$. Его конкретный расчет нетрудно провести, пользуясь уравнениями для двухуровневой системы; аналогичные расчеты выполнены в § 5.

Для однородно уширенной линии коэффициент $\alpha(\omega)$ имеет лоренцевскую форму:

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 / (1 + \omega^2 T_2^2). \quad (8.2.14)$$

Таким образом, для спектра стационарного шума на выходе лазерного усилителя имеем

$$G(\omega) = G_0(\omega) \exp \frac{2\alpha_0 z}{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (8.2.15)$$

Отсюда находим, что ширина спектра шума на выходе усилителя равна

$$\Delta\omega_m = \frac{2}{T_2} \left(\frac{\ln 2}{2\alpha_0 z} \right)^{1/2} \quad (2\alpha_0 z \gg 1), \quad (8.2.16)$$

т. е. она обратно пропорциональна квадратному корню из коэффициента усиления (см. также (8.4.20) и рис. 8.12, а).

§ 3. Взаимодействие случайных волн в диспергирующей среде. Генерация второй оптической гармоники излучением с неполной временной и пространственной когерентностью

В этом параграфе мы проанализируем эффекты статистики поля на примере «эталонной» для нелинейной оптики задачи о генерации второй оптической гармоники в среде с квадратичной нелинейностью. Относительная простота исходных уравнений (заметим, впрочем, что даже в этой задаче общего аналитического решения для модулированных волн не существует) позволяет сформулировать на этом примере достаточно ясные представления о влиянии неполной временной и пространственной когерентности на процесс нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в диспергирующей среде.

Умножение частоты шума в нелинейных цепях с сосредоточенными параметрами было рассмотрено в гл. 5. Что нового воз-

никает при умножении частоты шума в распределенной нелинейной среде?

Поскольку в распределенной среде процесс умножения частоты представляет собой взаимодействие волн, решающую роль, очевидно, должны играть фазовые соотношения между взаимодействующими волнами. Если умножается частота плоской монохроматической волны, $\omega + \omega = 2\omega$, то волновое взаимодействие эффективно, если для волновых векторов выполняется соотношение

$$k'_1(\omega) + k'_1(\omega) = k_2(2\omega).$$

Это условие называют условием фазового синхронизма. Если же речь идет об удвоении частоты шумовой волны, то условие фазового синхронизма для всех спектральных компонент выполнить не удастся. Картина взаимодействия шумовых волн осложняется и тем обстоятельством, что, помимо умножения частот спектральных компонент волны, возникают нелинейные взаимодействия между спектральными компонентами.

Ниже мы убедимся, что эта сложная картина становится физически прозрачной, если воспользоваться временным описанием. В дальнейшем будет показано, что влияние временной некогерентности волн на процесс нелинейного взаимодействия просто описывается в терминах группового запаздывания; основными параметрами при этом являются расстройка групповых скоростей и время группового запаздывания.

Начнем с анализа удвоения частоты излучения с неполной временной когерентностью, а затем рассмотрим возбуждение гармоники пространственно некогерентным излучением.

Генерация второй гармоники плоскими шумовыми волнами в первом приближении теории дисперсии описывается уравнениями типа (8.1.20):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} = -i\beta_1 A_2 A_1^* e^{i\Delta z}, \quad (8.3.1a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i\beta_2 A_1^2 e^{-i\Delta z}. \quad (8.3.1b)$$

Здесь A_1 и A_2 — комплексные амплитуды основного излучения и второй гармоники соответственно, $\Delta = 2k_1 - k_2$ — волновая расстройка. Граничные условия для системы (1) в случае генерации гармоники следующие:

$$A_1(t, z=0) = A_{10}(t), \quad A_2(t, z=0) = 0, \quad (8.3.2)$$

где $A_{10}(t)$ — случайная функция. В общем случае при $u_1 \neq u_2$ и учете обратной реакции волны второй гармоники на волну основной частоты систему уравнений (1) решить не удастся.

Поэтому ниже мы будем основываться на анализе приближенных решений уравнений (1).

Весьма полное исследование статистических характеристик взаимодействующих волн удастся провести в квазистатистическом режиме, когда групповые скорости взаимодействующих волн совпадают [4—11]. В этом случае поле гармоники в некоторой пространственно-временной точке (t, z) определяется полем основной волны в той же самой точке.

Если взаимодействие перестает быть квазистатистическим, аналитическое решение (1) удастся записать лишь в довольно сильных предположениях о характере нелинейного взаимодействия: в приближении заданного поля основной волны (вид основной волны в нелинейной среде предполагается заданным, обратная реакция гармоники на основную волну вообще не учитывается) [4—12, 37] и в так называемом приближении заданной интенсивности основной волны (интенсивность основной волны предполагается заданной, но учитывается обратная реакция поля гармоники на фазу основной волны) [44].

Квазистатистический режим. В этом случае предполагается, что $u_1 = u_2 = u$. Тогда в бегущей системе координат

$$\zeta = z, \quad \eta = t - z/u$$

уравнения (1) записываются в виде

$$\frac{\partial A_1(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} = -i\beta A_2 A_1^*, \quad \frac{\partial A_2(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} = -i\beta A_1^2. \quad (8.3.3)$$

В (3) для простоты принято, что $\Delta = 0$ ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$); величина η входит как параметр.

Уравнения (3) имеют такой же вид, как и уравнения для взаимодействия плоских монохроматических волн, получаемые из (1) при $\partial/\partial t = 0$. Переходя к действительным амплитудам ρ_j и фазам φ_j ($A_j = \rho_j \exp i\varphi_j$), для уравнений (3) с учетом условий (2) получаем известные решения (см. [1]):

$$\rho_1(\eta, z) = \rho_{10}(\eta) \operatorname{sech}[\beta \rho_{10}(\eta) z], \quad (8.3.4a)$$

$$\rho_2(\eta, z) = \rho_{10}(\eta) \operatorname{th}[\beta \rho_{10}(\eta) z], \quad (8.3.4б)$$

$$\varphi_1(\eta, z) = \varphi_{10}(\eta), \quad \varphi_2(\eta, z) = 2\varphi_{10}(\eta) - \pi/2. \quad (8.3.4в)$$

Отсюда видно, что между амплитудами и фазами взаимодействующих волн существуют алгебраические соотношения, т. е. преобразование является безынерционным.

Для расчета временных корреляционных функций поля основного излучения и второй гармоники в нелинейной среде, т. е. функций

$$B_2(\tau; z) = \langle \rho_2 \rho_{2\tau} \exp i(\varphi_2 - \varphi_{2\tau}) \rangle, \quad (8.3.5a)$$

$$B_1(\tau; z) = \langle \rho_1 \rho_{1\tau} \exp i(\varphi_1 - \varphi_{1\tau}) \rangle, \quad (8.3.5б)$$

где $\rho_n = \rho_n(\eta, z)$, $\rho_{n\tau} = \rho_n(\eta + \tau, z)$, в общем случае необходимо знать четырехмерную функцию распределения огибающей и фазы исходной волны. Если падающая основная волна представляет собой случайный гауссовский процесс с симметричным спектром, то четырехмерное распределение согласно формуле (2.4.10) имеет вид*)

$$\omega(\rho, \rho_\tau; \varphi, \varphi_\tau) = \frac{\rho \rho_\tau}{\pi^2 \sigma^4 (1 - b^2(\tau))} \exp \left\{ -\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2 - 2\rho \rho_\tau b(\tau) \cos(\varphi - \varphi_\tau)}{\sigma^2 (1 - b^2(\tau))} \right\}. \quad (8.3.6)$$

Здесь введены обозначения: $\rho = \rho_{10}(t)$, $\rho_\tau = \rho_{10}(t + \tau)$, $\sigma^2 = \bar{\rho}^2$, $b(\tau) = \langle \rho \rho_\tau \rangle / \bar{\rho}^2$.

В случае возбуждения второй гармоники излучением со стабилизированной амплитудой (например, одномодовым излучением лазера, работающего высоко над порогом генерации) для расчета корреляционных функций (5) нужно знать лишь двумерную функцию распределения фазы (см. (2.5.49))

$$\omega(\varphi_1, \varphi_{1\tau}) = (4\pi^2)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} m^2 f(\tau) \right\} \cos m(\varphi_{1\tau} - \varphi_1), \quad (8.3.7)$$

где $f(\tau) = D\tau$ для излучения с лоренцевским спектром и $f(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^2$ для излучения с гауссовским спектром.

В рассматриваемом случае ($\rho_{10} = \rho_0 = \text{const}$) для корреляционных функций после подстановки в них выражения (7) получаем

$$B_1(\tau; z) = I_1 \exp \{-f(\tau)/2\}, \quad B_2(\tau; z) = I_2 \exp \{-2f(\tau)\}, \quad (8.3.8a, б)$$

где I_1 и I_2 — интенсивности основного излучения и второй гармоники соответственно:

$$I_1 = \rho_0^2 \operatorname{sech}^2(\beta \rho_0 z), \quad I_2 = \rho_0^2 \operatorname{th}^2(\beta \rho_0 z). \quad (8.3.9a, б)$$

Следует отметить, что точно такие же выражения для интенсивностей имеют место в отсутствие фазовых флуктуаций, т. е. для монохроматических волн. Согласно (9) интенсивность основного излучения может быть полностью преобразована в интенсивность второй гармоники (рис. 8.2).

Из (8) видно, что в процессе нелинейного взаимодействия волн вид корреляционных функций, а следовательно, и спектров не меняется. При этом для времен корреляций второй гармоники $\tau_{к2}$ и основного излучения $\tau_{к1}$ нетрудно получить следующие

) В этом параграфе для упрощения записи интенсивность волны определяется как $I = AA^ = \rho^2$, строго же в связи с записью поля в виде (8.1.11) интенсивность $I = c\rho^2/2\pi$.

соотношения:

$$\tau_{k2} = \tau_{k1}/4, \quad \tau_{k1} = 2/D \quad (8.3.10a)$$

для лоренцевского спектра и

$$\tau_{k2} = \tau_{k1}/2, \quad \tau_{k1} = 2\tau_0 \quad (8.3.10b)$$

для гауссовского спектра.

Из соотношений (10) следует, что в случае лоренцевского спектра ширина спектра второй гармоники в четыре раза больше ширины спектра основного излучения, т. е.

$$\Delta\omega_2^{(л)} = 4\Delta\omega_1^{(л)}, \quad (8.3.11a)$$

а в случае гауссовского спектра ширина спектра гармоники больше ширины спектра основного излучения в два раза, т. е.

$$\Delta\omega_2^{(г)} = 2\Delta\omega_1^{(г)}. \quad (8.3.11b)$$

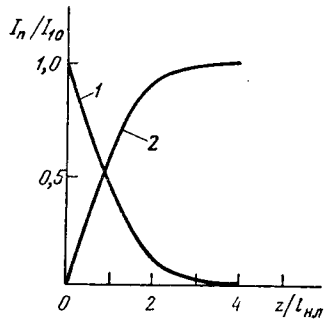


Рис. 8.2. Зависимость интенсивности основного монохроматического излучения I_1 (1) и интенсивности второй гармоники I_2 (2) от приведенного расстояния в нелинейной среде $z/l_{нл}$.

$l_{нл} = (\beta\rho_0)^{-1}$ — длина нелинейного взаимодействия, I_{10} — интенсивность основного излучения на входе среды.

характерную нелинейную длину $l_{нл} = (\beta\rho_0)^{-1}$. Согласно (96) на этой длине для случая плоских монохроматических волн коэффициент преобразования во вторую гармонику I_2/ρ_0^2 составляет около 60% (см. также рис. 8.2).

В соответствии с (4) имеем

$$\rho_2(\eta_1, z) = \begin{cases} \beta z \rho_{10}^2(\eta), & z \ll l_{нл}, \\ \rho_{10}(\eta), & z \gg l_{нл}. \end{cases} \quad (8.3.12a)$$

$$\rho_2(\eta_1, z) = \begin{cases} \beta z \rho_{10}^2(\eta), & z \ll l_{нл}, \\ \rho_{10}(\eta), & z \gg l_{нл}. \end{cases} \quad (8.3.12b)$$

Подставляя (12б) и (4в) в (5а), для корреляционной функции второй гармоники получаем (на больших расстояниях)

$$B_2(\tau; z \gg l_{нл}) = \langle \rho_{10}\rho_{10\tau} \exp[i2(\varphi_{10} - \varphi_{10\tau})] \rangle. \quad (8.3.13)$$

В выражении (13) усреднение следует производить по распределению (6). Воспользовавшись разложением

$$\exp(b \cos \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(b) \cos m\psi,$$

после интегрирования по фазам получим

$$B_2(\tau; z) = 2\alpha\sigma^2 \iint_0^{\infty} x_1^2 x_2^2 I_2(cx_1 x_2) e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, \quad (8.3.14)$$

где $x = \rho/\sigma$, $\alpha = \{1 - b^2(\tau)\}^{-1}$, $c = 2\alpha b(\tau)$, $I_m(b)$ — функция Бесселя.

Для интегрирования (14) воспользуемся формулами 6.643 и 7.621 (ГР, с. 734 и 873); в результате получим

$$B_2(\tau; z \gg l_{нл}) = \frac{9\pi}{32} b^2(\tau) \sigma^2 F\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3; b(\tau)\right], \quad (8.3.15)$$

где $F(1/2, 1/2, 3; x)$ — гипергеометрическая функция, изменяющаяся от $32/9\pi \approx 1,13$ до 1 при изменении аргумента x от 1 до 0. В (15) входит квадрат корреляционной функции основного излучения. Поэтому время корреляции гармоники меньше, чем время корреляции исходного излучения. Это связано (см. (13)) с большим вкладом фазовых флуктуаций во флуктуации поля гармоники по сравнению с их вкладом в поле основного излучения. Средняя же интенсивность гармоники равна средней интенсивности основного излучения:

$$I_2(z \gg l_{нл}) = I_{10}.$$

Другими словами, в квазистатическом режиме взаимодействия волн возможно, в принципе, полное преобразование основного излучения во вторую гармонику.

На малых расстояниях (в приближении заданного поля) корреляционная функция второй гармоники в соответствии с (4в), (5а) и (12а) дается выражением

$$B_2(\tau; z \ll l_{нл}) = (\beta z)^2 \langle \rho_{10}^2 \rho_{10\tau}^2 \exp[i2(\varphi_{10} - \varphi_{10\tau})] \rangle = (\beta z)^2 \langle A_{10}^2 A_{10\tau}^{*2} \rangle. \quad (8.3.16)$$

В данном случае, чтобы найти среднее (16), удобно воспользоваться соотношением

$$\langle A^2(\eta_1) A^{*2}(\eta_2) \rangle = 2 \langle A(\eta_1) A^*(\eta_2) \rangle^2 = 2B^2(\eta_2 - \eta_1), \quad (8.3.17)$$

справедливым для случайной комплексной амплитуды A с гауссовской статистикой. С учетом (17) для корреляционной функции (16) получаем

$$B_2(\tau; z \ll l_{нл}) = 2(\beta z)^2 B_{10}^2(\tau). \quad (8.3.18)$$

При этом средняя интенсивность второй гармоники равна

$$I_2(z \ll l_{нл}) = 2(\beta z)^2 I_{10}^2. \quad (8.3.19)$$

Полученный результат интересно сравнить с данными о возбуждении второй гармоники монохроматическим излучением. Согласно (9) при $z \ll (\beta \rho_0)^{-1}$ между интенсивностями монохроматической гармоники и основного излучения имеет место соотношение

$$I_2^{\text{мон}} = (\beta z)^2 (I_{10}^{\text{мон}})^2. \quad (8.3.20)$$

Из выражений (19) и (20) видно, что в обоих случаях зависимость интенсивности гармоники от расстояния одинаковая. Однако между этими выражениями имеется также важное различие: при одинаковых интенсивностях основного излучения интенсивность гармоники, возбуждаемой гауссовским излучением, вдвое больше, чем интенсивность монохроматической гармоники. Этот результат легко понять. В квазистатическом режиме можно воспользоваться результатами § 1 гл. 5; для излучения с гауссовской статистикой можно использовать выражение (5.1.14).

Напомним, что физическая природа обсуждаемого эффекта состоит в том, что в интенсивных выбросах поля основного излучения преобразование во вторую гармонику происходит наиболее эффективно (см. (12а)). В случае возбуждения второй гармоники многомодовым основным излучением эффективность генерации (см. табл. 2.1) оказывается больше, чем при одномодовом излучении той же интенсивности, в $(2 - 1/N)$ раз (см. также гл. 5 и [5, 6]).

Несколько позже мы проанализируем статистику поля второй гармоники, сейчас же обратимся к ее спектру. Возьмем корреляционную функцию основного излучения в виде экспоненты:

$$B_{10}(\tau) = I_0 \exp\{-2(\ln 2)(|\tau|/\tau_{к1})\}, \quad (8.3.21)$$

и в гауссовском виде:

$$B_{10}(\tau) = I_0 \exp\{-4(\ln 2)(\tau/\tau_{к1})^2\}. \quad (8.3.22)$$

В выражениях (21), (22) время корреляции $\tau_{к1}$ определено по половинному уровню. Подставляя эти выражения в (18), получим следующие формулы для времени корреляции второй гармоники и ширины спектров:

$$\tau_{к2}^{(n)} = \tau_{к1}/2, \quad \Delta\omega_2^{(n)} = 2\Delta\omega_1^{(n)}, \quad \Delta\omega_1^{(n)} = (4 \ln 2)/\tau_{к1} \quad (8.3.23a)$$

для корреляционной функции (21) и

$$\tau_{к2}^{(r)} = \tau_{к1}/\sqrt{2}, \quad \Delta\omega_2^{(r)} = \sqrt{2}\Delta\omega_1^{(r)}, \quad \Delta\omega_1^{(r)} = (8 \ln 2)/\tau_{к1} \quad (8.3.23b)$$

для корреляционной функции (22). Здесь, как и при удвоении частоты фазово-модулированного излучения, ширина спектра вто-

рой гармоники зависит от вида исходного спектра (корреляционной функции). Однако в формулах для соответствующих видов спектра коэффициенты пропорциональности, например для ширины спектра, оказываются иными (ср. (23а) с (11а) и (23б) с (11б)).

С ростом длины нелинейного взаимодействия, или при увеличении эффективности преобразования основного излучения во вторую гармонику, корреляционная функция гармоники меняется незначительно: от вида (18) к выражению (15). Напротив, корреляционная функция основного излучения $B_1(\tau; z)$ существенно зависит от обратной реакции гармоники; ее график в полулогарифмическом масштабе, полученный при помощи численного интегрирования (5б), показан на рис. 8.3. Из этого рисунка видно, что форма спектрального распределения основного излучения модифицируется, а ширина спектра увеличивается по мере его перекачки в гармонику.

Нестационарный режим генерации; когерентные и некогерентные взаимодействия. Обратимся теперь к анализу случая, когда групповые скорости основной волны и гармоники различны: $u_1 \neq u_2$ [4, 5, 7, 10, 12]. Тогда аналитические решения уравнений (1) записать не удается. Поэтому мы воспользуемся приближением заданного поля, т. е. будем полагать

$$A_1(t, z) = A_{10}(t - z/u_1),$$

а процесс генерации гармоники будем описывать линейным неоднородным уравнением ($\beta_2 = \beta$)

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i\beta A_{10}^2(t - z/u_1) e^{-i\Delta z}. \quad (8.3.24)$$

Решение (24) имеет вид

$$A_2(t, z) = -i\beta \int_0^z A_{10}^2(t - z/u_2 + v\xi) e^{-i\Delta\xi} d\xi, \quad (8.3.25)$$

где расстройка групповых скоростей

$$v = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{c} \left(n_2 - n_1 - \lambda_2 \frac{dn_2}{d\lambda_2} + \lambda_1 \frac{dn_1}{d\lambda_1} \right). \quad (8.3.26)$$

Отметим сразу же, что выражение (25) по своей структуре аналогично выражению (5.2.17), которым описывается прохождение

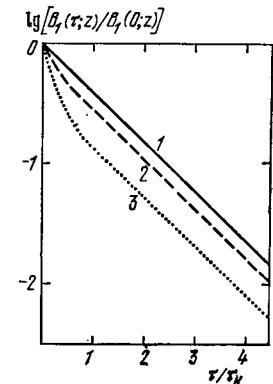


Рис. 8.3. Корреляционная функция основного излучения $B_1(\tau; z)$ для различных приведенных длин взаимодействия $z/l_{нл}$ [11]:

1) 0 — экспоненциальная кривая; 2) 1; 3) 2.

шума через звено «квадратичный детектор — фильтр»; роль постоянной времени фильтра в нелинейной диспергирующей среде играет время группового запаздывания $\tau_v = v z$. Таким образом, рассматриваемое нелинейное оптическое преобразование является инерционным. Вследствие этого по сравнению с исследованным ранее безынерционным случаем генерации второй гармоники здесь возможно появление новых эффектов.

Теперь корреляционная функция поля гармоники определяется выражением (ср. с (16))

$$B_2(\tau; z) = \beta^2 \int_0^z \langle A_{10}^*(t' + \tau + v\zeta_1) A_{10}^*(t' + v\zeta_2) \rangle e^{i\Delta(\zeta_2 - \zeta_1)} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (8.3.27)$$

где $t' = t - T_2$; $T_2 = z/u_2$ — время, за которое волна гармоники проходит расстояние z . В случае основного излучения с гауссовской статистикой, пользуясь (17), получим

$$B_2(\tau; z) = 2\beta^2 \int_0^z B_{10}^2[\tau + v(\zeta_2 - \zeta_1)] e^{i\Delta(\zeta_2 - \zeta_1)} d\zeta_2 d\zeta_1. \quad (8.3.28)$$

Из (28) для средней интенсивности второй гармоники с помощью замены переменных $\zeta_2 - \zeta_1 = \zeta$, $\zeta_2 + \zeta_1 = 2\zeta_0$ и преобразований, учитывающих четность функции $B_{10}(\tau)$, нетрудно получить

$$I_2(z) = 4\beta^2 \int_0^z (z - \zeta) B_{10}^2(v\zeta) \cos \Delta\zeta d\zeta. \quad (8.3.29)$$

Рассмотрим зависимость средней интенсивности гармоники от пройденного расстояния z , не конкретизируя пока вида $B_{10}(\tau)$. Пусть время группового запаздывания τ_v меньше времени корреляции основного излучения $\tau_{к1}$ ($\tau_v \ll \tau_{к1}$). Тогда в (29) корреляционную функцию $B_{10}(v\zeta)$ можно заменить на $B_{10}(0) = I_{10}$. Для средней интенсивности гармоники при этом имеем

$$I_2(z) = 2[\beta I_{10} z \operatorname{sinc}(\Delta z/2)]^2, \quad (8.3.30)$$

где $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$. Выражение (30) соответствует квазистатическому режиму генерации второй гармоники шумовой волны; в этом режиме зависимость интенсивности от z аналогична таковой для гармоники, возбуждаемой монохроматической волной. При фазовой расстройке $\Delta = 0$ (30) переходит в (19).

Если время группового запаздывания τ_v значительно превосходит время корреляции $\tau_{к1}$ ($\tau_v \gg \tau_{к1}$), то предел интегрирования в (29) можно заменить на бесконечность и средняя интенсивность гармоники оказывается равной

$$I_2(z) = 4\beta^2 z \int_0^\infty B_{10}^2(v\zeta) \cos \Delta\zeta d\zeta = 4\beta^2 I_{10}^2 G(l_{\text{кор}}, \Delta) z l_{\text{кор}}, \quad (8.3.31)$$

где

$$G(l_{\text{кор}}, \Delta) = \int_0^\infty b_{10}^2(x) \cos(l_{\text{кор}} \Delta x) dx, \quad l_{\text{кор}} = \tau_{к1}/v. \quad (8.3.32)$$

Таким образом, при $\tau_v \gg \tau_{к1}$ средняя интенсивность гармоники I_2 пропорциональна пройденному расстоянию независимо от фазовой расстройки Δ ($I_2 \sim z$). Такой режим принято называть *некогерентным взаимодействием*.

Нетрудно понять физический смысл полученного результата. Условие $\tau_v \gg \tau_{к1}$ можно переписать как $z \gg l_{\text{кор}}$. На таких расстояниях z полная интенсивность гармоники равна сумме интенсивностей гармоник, генерируемых слоями нелинейной среды длиной $z' \approx l_{\text{кор}}$. На длине $z > l_{\text{кор}}$ взаимодействующие волны некогерентны; процесс генерации гармоники — некогерентный.

Мы проанализировали предельные значения средней интенсивности второй гармоники I_2 для случая групповой расстройки $v \neq 0$. Для детального же исследования изменения I_2 возьмем корреляционную функцию $B_{10}(\tau)$ в виде (21). Подстановка формулы (21) в (29) приводит к следующему выражению для средней интенсивности гармоники:

$$I_2(z) = 4(\beta I_{10})^2 (a^2 + \Delta^2)^{-2} \{ (a^2 + \Delta^2) az - (a^2 - \Delta^2) + [(a^2 - \Delta^2) \cos \Delta z - 2a\Delta \sin \Delta z] e^{-az} \}, \quad (8.3.33)$$

где $a = (4 \ln 2)/l_{\text{кор}}$. При наличии фазового синхронизма ($\Delta = 0$) выражение (33) принимает вид

$$I_2(z) = 4(\beta I_{10})^2 a^{-2} \{ az - 1 + e^{-az} \}. \quad (8.3.34)$$

Отсюда нетрудно получить предельные выражения (19) и (31).

Графики функции (33) для различных когерентных длин приведены на рис. 8.4. Видно, что на расстояниях $z \approx l_{\text{кор}}$ пространственные биения в интенсивности гармоники I_2 заметно уменьшаются и при $z \gg l_{\text{кор}}$ интенсивность I_2 становится пропорциональной z , несмотря на то, что расстройка $\Delta \neq 0$, т. е. фазовые соотношения становятся несущественными.

Некогерентный режим удвоения частоты; уравнения для средних. Покажем, что на расстояниях $z \gg l_{\text{кор}}$ процесс удвоения частоты можно описывать уравнениями для средних. Перейдем от амплитудного уравнения (24) к уравнению для интенсивности $I_2 = |A_2|^2$:

$$\frac{\partial I_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial I_2}{\partial t} = -i\beta A_{10}^2(t - z/u_1) A_2^*(t, z) e^{-i\Delta z} + \text{к. с.} \quad (8.3.35)$$

В бегущих координатах $\zeta = z$, $\eta = t - z/u_2$ уравнение (35) принимает вид

$$\frac{\partial I_2}{\partial \zeta} = -i\beta A_{10}^2(\eta + v\zeta) A_2^*(\zeta, \eta) e^{-i\Delta\zeta} + \text{к. с.} \quad (8.3.36)$$

Произведем усреднение в уравнении (36). Для расчета среднего в правой части (36) воспользуемся методом, изложенным

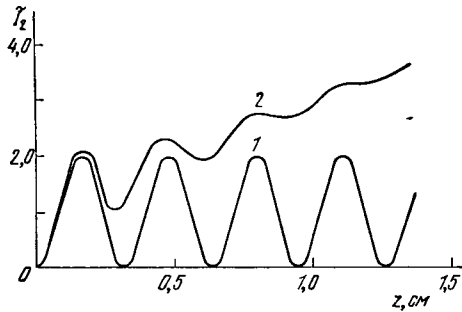


Рис. 8.4. Зависимость приведенной интенсивности второй гармоники $\bar{I}_2 = I_2/I_1$, возбуждаемой гауссовским излучением с экспоненциальной корреляционной функцией, от расстояния z для фазовой расстройки $\Delta = 20 \text{ см}^{-1}$ и различных когерентных длин:

1) $l_{\text{кор}} \rightarrow \infty$; 2) $l_{\text{кор}} = 2 \ln 2 \text{ см}$.

в § 7 гл. 1 (см. также § 2 гл. 7). Выделим в амплитуде гармоники $A_2^*(\zeta, \eta)$ части, которые коррелируют и не коррелируют с амплитудой $A_{10}^*(\eta + v\zeta)$:

$$A_2^*(\zeta, \eta) = (A_2^*(\zeta, \eta))^{(\text{к})} + (A_2^*(\zeta, \eta))^{(\text{нк})}.$$

Следовательно,

$$K = \langle A_{10}^*(\eta + v\zeta) A_2^*(\zeta, \eta) \rangle = \langle A_{10}^*(\eta + v\zeta) (A_2^*(\zeta, \eta))^{(\text{к})} \rangle.$$

Величину $(A_2^*(\zeta, \eta))^{(\text{к})}$ определим, пользуясь (24) ($\zeta_0 < \zeta$):

$$(A_2^*(\zeta, \eta))^{(\text{к})} = i\beta \int_{\zeta_0}^{\zeta} A_{10}^{*2}(\eta + v\zeta_1) e^{i\Delta\zeta_1} d\zeta_1.$$

Таким образом, корреляционная функция

$$\begin{aligned} K &= i\beta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \langle A_{10}^*(\eta + v\zeta) A_{10}^{*2}(\eta + v\zeta_1) \rangle e^{i\Delta\zeta_1} d\zeta_1 = \\ &= i2\beta \int_{\zeta_0}^{\zeta} B_{10}^*(v(\zeta - \zeta_1)) e^{i\Delta\zeta_1} d\zeta_1 = 2\beta e^{i\Delta\zeta} \int_0^{\zeta - \zeta_0} B_{10}^*(vx) e^{i\Delta x} dx. \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

Усредненное уравнение (36) с учетом (37) принимает вид

$$\frac{\partial I_2}{\partial \zeta} = 4\beta^2 \int_0^{\zeta - \zeta_0} B_{10}^*(vx) e^{i\Delta x} dx. \quad (8.3.38)$$

В области справедливости выражения (38) интенсивность гармоники определяется (31).

Таким образом, результат (31) нами получен двумя способами: 1) как предельное значение усредненного динамического решения (25) и 2) как следствие прямого усреднения уравнения (35). Последний способ применим только в области некогерентного рассеяния ($z \gg l_{\text{кор}}$) и соответствует приближению марковского случайного процесса (см. § 7 гл. 1). Именно эту методическую цель мы преследовали, излагая второй способ решения (24). То обстоятельство, что нелинейный оптический процесс на расстояниях $z \gg l_{\text{кор}}$ можно описывать как случайный марковский процесс, мы уже использовали в § 6 гл. 6 для анализа процессов параметрического усиления (см. также § 4 этой главы).

Проанализируем теперь спектр второй гармоники $G_2(\omega; z)$ в некогерентном режиме. Для его нахождения применим к соотношению (28) теорему Винера — Хинчина:

$$G_2(\omega; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau; z) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

$$B_2(\tau; z) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega; z) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Выполняя несложные преобразования (28), получим

$$G_2(\omega; z) = \text{sinc}^2[(\omega v - \Delta)z/2] G_{20}(\omega), \quad (8.3.39)$$

где $G_{20}(\omega)$ определяется сверткой:

$$G_{20}(\omega) = 2\beta^2 z^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{10}(\omega - \Omega) G_{10}(\Omega) d\Omega, \quad (8.3.40)$$

$G_{10}(\omega)$ — спектр основного излучения. Распределение $G_{10}(\omega)$ полностью определяет спектр второй гармоники только в когерентном режиме генерации. Как было показано выше, в этом случае корреляционные функции гармоники и основного излучения связаны между собой алгебраически (см. формулы (8), (15) и (18)).

В некогерентном режиме ($z \gg l_{\text{кор}}$) форма и ширина спектра гармоники зависят от групповой расстройки v и длины z . Изменение спектра гармоники иллюстрируется кривыми, изображенными на рис. 8.5. Видно, что с ростом длины z происходит сужение спектра гармоники. В существенно некогерентном режиме генерации ($z \gg l_{\text{кор}}$) спектр второй гармоники полностью определяется функцией $\text{sinc}^2[(\omega v - \Delta)z/2]$ (рис. 8.6). Ширина спектра гармоники по половинному уровню равна

$$\Delta\omega_2^{\text{нк}} = \frac{5,56}{\sqrt{z}}, \quad \text{или} \quad \Delta\lambda_2^{\text{нк}} = \frac{2,78}{\pi} \frac{\lambda_2^2}{cvz}, \quad (8.3.41)$$

λ_2 — длина волны второй гармоники. Таким образом, ширина спектра гармоники $\Delta\omega_2^{\text{нк}}$ оказывается обратно пропорциональной

времени группового запаздывания $\tau_v = vz$, т. е. она определяется исключительно дисперсионными свойствами среды.

Для произвольного соотношения между длинами z и $l_{\text{кор}}$ ширину $\Delta\omega_2$ при $\Delta=0$ можно найти приближенно, заменяя

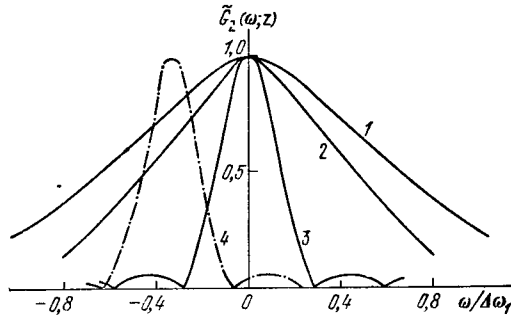


Рис. 8.5. Спектральное распределение второй гармоники, возбуждаемой в нестационарном режиме основным излучением с гауссовской формой спектра, на различных длинах z :

1) $z \ll l_{\text{кор}}$; 2) $z = l_{\text{кор}}$; 3) и 4) $z = 5l_{\text{кор}}$. Кривые 1—3 построены для $\Delta=0$, 4 — $\Delta l_{\text{кор}} = -1$.

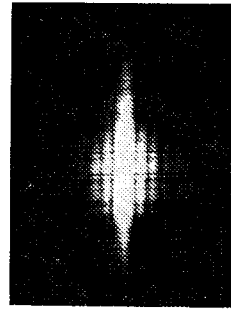


Рис. 8.6. Спектральное распределение второй гармоники, возбуждаемой в нестационарном режиме в кристалле KDP излучением лазера на неодимовом стекле [42].

в (39) $\text{sinc}^2 x \approx \exp\{-0,36x^2\}$. Если форма спектра основного излучения гауссовская (корреляционная функция (22)), то свертка (40) принимает вид

$$G_{20}(\omega) \approx \exp\{-\omega/\Delta\omega_2\}^2,$$

где $\Delta\omega_2$ определяется формулой (236). Тогда из (39) следует, что ширина спектра гармоники равна ($\Delta=0$)

$$\Delta\omega_2(z) = \{(\Delta\omega_2)^{-2} + (\Delta\omega_2^{\text{нк}})^{-2}\}^{-1/2} = \Delta\omega_2 \{1 + 2(z/l_{\text{кор}})^2\}^{-1/2}. \quad (8.3.42)$$

Иногда ширину спектра гармоники (35) в нестационарном режиме генерации удобно определять по первым нулевым значениям модулирующей функции $\text{sinc}^2 x$, когда аргумент $x = \pm \pi$. При этом (ср. с (41))

$$\Delta\omega_2^{0(\text{нк})} = 4\pi/vz.$$

Заметим, что при фазовой расстройке $\Delta \neq 0$ спектр гармоники имеет несимметричную форму (см. рис. 8.5), а его максимум приходится на частоту

$$\omega = -\frac{\Delta}{v} [1 + (\Delta\omega_2^{\text{нк}}/\Delta\omega_2)^2]^{-1}.$$

Напомним, что ω есть отклонение от удвоенной средней частоты основного излучения.

Законы распределения; статистика фотоотчетов. Помимо рассмотренных выше средней интенсивности и спектра (или корреляционной функции) второй оптической гармоники, определенный интерес может представить статистика поля гармоники, которая может быть измерена с помощью метода фотоотчетов (см. § 9 гл. 2).

В случае гауссовского основного излучения распределение интенсивности подчиняется закону (2.9.14) и ему соответствует бозе-эйнштейновское распределение фотоотчетов (2.9.15). Статистика же фотоотчетов гармоники зависит как от статистики основного излучения, так и от режима генерации. Мы будем считать, что время измерения T (время выборки) гораздо меньше времени корреляции гармоники τ_{k2} , и для нахождения распределения фотоотчетов используем упрощенную формулу Манделя (2.9.10).

В квазистатическом режиме возбуждения гармоники ($z < l_{\text{кор}}$) при малых коэффициентах преобразования ($z \ll l_{\text{нл}}$) согласно (12а) между мгновенными интенсивностями основного излучения $I_1 = I_{10}$ и второй гармоники I_2 имеет место соотношение

$$I_2 = \tilde{\beta}^2 I_1 \quad (\tilde{\beta} = \beta z). \quad (8.3.43)$$

Этим же соотношением в отсутствие эффектов насыщения можно описывать различные двухфотонные процессы (ионизацию, детектирование, люминесценцию и т. п., см. § 1 гл. 5). При этом параметр $\tilde{\beta}$ зависит от вероятности многофотонного процесса, а I_2 есть либо интенсивность излучения, либо ток фотоэмиссии. Поэтому проводимый ниже анализ одноквантовых фотоотчетов второй гармоники является в то же время анализом двухквантовых фотоотчетов основного излучения*). Пусть основное излучение имеет распределение интенсивности (2.9.14):

$$\omega(I_1) = I_0^{-1} \exp\{-I_1/I_0\},$$

I_0 — среднее значение интенсивности. Поскольку интенсивность второй гармоники определяется выражением (43), ее распределение дается формулой

$$\omega(I_2) = \omega\left(\sqrt{I_2/\tilde{\beta}}\right) \frac{dI_1}{dI_2} = \frac{1}{2} \frac{\exp\{-\sqrt{I_2/\tilde{\beta}}/I_0\}}{\sqrt{\tilde{\beta}} I_0^2}. \quad (8.3.44)$$

*) Следует отметить, что статистику двухквантовых фотоотчетов удобно измерять, используя именно генерацию второй гармоники. При использовании для этой цели двухквантовой фотоэмиссии встречаются с проблемой отделения двухквантового фотоэффекта от одноквантового. В случае генерации гармоник основное излучение можно надежно отфильтровать. Сделанное замечание распространяется и на генерацию гармоник и многоквантовые процессы более высокого порядка.

В формуле Манделя (2.9.10) обозначим квантовую эффективность детектора через α и припишем величинам α и P индекс 2, указывающий на то, что они относятся ко второй гармонике. Подставим в эту формулу распределение (44):

$$P_2(n) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha_2 T I_2}{2n! \sqrt{\beta I_0^2 I_2}} \exp\{-\alpha_2 T I_2 - \sqrt{I_2/\beta I_0^2}\} dI_2.$$

Для расчета интеграла произведем замену $I_2 = x^2$ и воспользуемся формулой 3.462 (ГР, с. 351). В результате для распределения фотоотсчетов второй гармоники получим выражение

$$P_2(n) = \frac{(2n)! \exp(1/4\bar{n}_2)}{n! 2^n \sqrt{\bar{n}_2}} D_{-(1+2n)}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{n}_2}}\right). \quad (8.3.45)$$

Здесь $\bar{n}_2 = 2\alpha_2 \beta T I_0^2$ — среднее число фотоотсчетов гармоники, которое в два раза больше, чем при возбуждении гармоники монохроматическим излучением с интенсивностью I_0 .

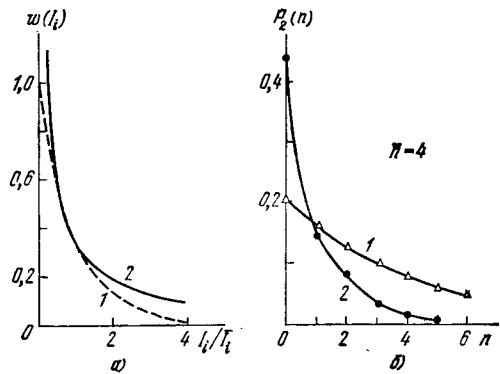


Рис. 8.7. Распределения интенсивности (а) и фотоотсчетов (б) для излучения с гауссовской статистикой (1) и его второй гармоники (2), построенные для одинакового среднего числа фотоотсчетов.

Распределение фотоотсчетов (45) (кривая 2 рис. 8.7, б) существенно отличается от распределения Бозе — Эйнштейна (2.9.15) (кривая 1 рис. 8.7, б). Чтобы убедиться в этом, рассчитаем факториальный момент второго порядка (7.5.35):

$$H_2 = \{\bar{n}_m^2 - \bar{n}_m - \bar{n}_m\} / \bar{n}_m^2,$$

который в случае пуассоновского распределения (2.9.12) равен нулю, а для распределения Бозе — Эйнштейна (2.9.15) — единице. Учитывая (2.9.7), запишем H_2 через моменты интенсивности гармоники:

$$H_2 = \{\bar{I}_2^2 - I_2^2\} / I_2^2. \quad (8.3.46)$$

Для распределения (44) значение $H_2 = 5$. Этот результат относится к квазистатическому режиму возбуждения гармоники. В нестационарном режиме генерации значение H_2 зависит от соотношения между расстоянием z и когерентной длиной $l_{\text{кор}}$ (см. [14]). Очевидно, что при $z \gg l_{\text{кор}}$ согласно формуле (25) и центральной предельной теореме $H_2 \rightarrow 1$, а распределение фотоотсчетов второй гармоники стремится к распределению Бозе — Эйнштейна.

В заключение отметим, что статистика фотоотсчетов второй гармоники, возбуждаемой излучением с несинхронизованными модами, изучена в [13, 14].

Пространственная статистика гармоники; генерация анизотропных оптических полей. Как влияет неполная пространственная когерентность основного излучения на процесс удвоения частоты? Естественно, чтобы ответить на этот вопрос, следует рассмотреть эффекты дифракции. Однако имеются ситуации, когда в геометрооптическом приближении случайная поперечная структура пучка основного излучения может сильно повлиять на к. п. д. удвоителя частоты и статистические свойства излучения второй гармоники.

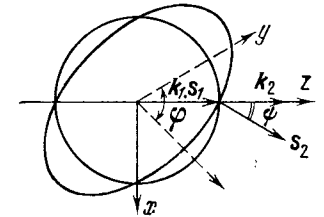


Рис. 8.8. Относительные ориентации волновых и лучевых векторов основной волны (k_1, s_1) и волны второй гармоники (k_2, s_2) для взаимодействия $\omega \rightarrow e$.

ψ — угол двулучепреломления для необыкновенной волны второй гармоники.

Ниже будет показано, что различие направлений лучевого и волнового векторов необыкновенной волны в анизотропной среде, приводящее к различию направлений лучевых векторов взаимодействующих волн (т. е. к сносу пучков), может, так же как и временная дисперсия среды, привести к некогерентному режиму удвоения частоты. Фактически речь будет идти об эффектах, во многом аналогичных эффектам группового запаздывания для плоских шумовых волн. Различие направлений лучевых векторов — это один из случаев групповой расстройки.

Процесс взаимодействия пространственно некогерентных волн описывается системой уравнений (8.1.24). Без учета дифракционных эффектов для процесса генерации второй гармоники в приближении заданного поля имеем

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} + \psi \frac{\partial A_2}{\partial x} = -i\beta A_1^2(r, z) \cdot e^{-i\Delta z}. \quad (8.3.47)$$

Напомним, что рассматривается случай, когда обыкновенная волна основного излучения возбуждает необыкновенную волну второй гармоники; ψ — угол двулучепреломления для волны гармоники (рис 8.8)

Граничные условия для системы (47):

$$A_1(r, z=0) = A_{10}(r), \quad A_2(r, z=0) = 0. \quad (8.3.48)$$

В рассматриваемом геометрооптическом приближении уравнения (47) аналогичны уравнениям (1) временной задачи при $\beta_1 = 0$, причем аналогом групповой расстройки ν (26) является угол $-\psi$. Поэтому, пользуясь (25), можно сразу написать решение уравнений (47) ($\Delta = 0$):

$$A_2(r, z) = -i\beta \int_0^z A_{10}^2(x - \psi\zeta, y) d\zeta \quad (8.3.49)$$

и выражение для поперечной корреляционной функции гармоники, аналогичное выражению для временной корреляционной функции (28).

Из сказанного следует, что в случае поперечной корреляционной функции основной волны гауссовского вида (4.5.41а) полученные выше результаты для временной задачи можно перенести на пространственную задачу. Так, вдоль оси y радиус корреляции гармоники определяется соотношением, аналогичным (23б):

$$r_{k2}^y = r_{k2}^0 = r_0 / \sqrt{2}. \quad (8.3.50)$$

Что касается радиуса корреляции гармоники r_{k2}^x вдоль оси x , то он равен (ср. с (42))

$$r_{k2}^x = r_{k2}^0 \{1 + 2(z/l_{\perp})^2\}^{1/2} \quad (8.3.51)$$

и существенно зависит от соотношения длины z и поперечной когерентной длины l_{\perp} :

$$l_{\perp} = r_0 / \psi. \quad (8.3.52)$$

Характерная длина l_{\perp} является аналогом когерентной длины $l_{\text{ког}}$ (32).

Таким образом, в условиях влияния на процесс генерации гармоники двулучепреломления кристалла ($\psi \neq 0$) значение радиуса корреляции второй гармоники зависит от направления, т. е. по-

ле второй гармоники является статистически неизотропным (рис. 8.9). Изменение формы такого пучка в процессе его распространения иллюстрируется рис. 8.10. На выходе нелинейного кристалла пучок гармоники имеет симметричную форму. При распространении радиус пучка и радиус корреляции изменяются таким образом, что их отношение $a(z)/r_k(z)$ остается постоянным (см. (4.5.56б)). Поэтому размер пучка становится больше в направлении оси y , где радиус корреляции в исходном пучке был

меньше. В дальнейшем поле значение радиуса корреляции гармоники не зависит от направления (кривая δ рис. 8.9), но форма самого пучка имеет веретенообразный вид (рис. 8.10, δ).

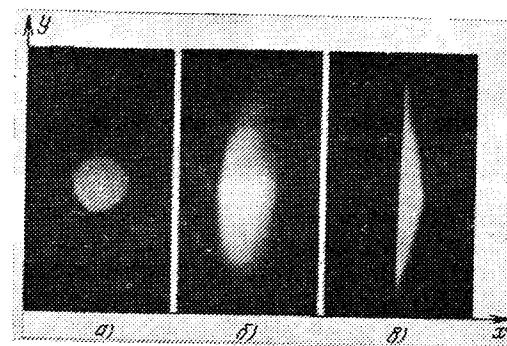


Рис. 8.10. Изменение формы пучка второй гармоники, возбуждаемой в нелинейном анизотропном кристалле частично когерентным симметричным основным пучком [15]:

а) непосредственно на выходе кристалла; б) на расстоянии 50 см от него; в) в фокальной плоскости линзы. Оси координат x и y совпадают с соответствующими координатами рис. 8.8

Дифракционные эффекты и эффекты дисперсионного расплывания. Отметим еще раз, что в этом параграфе мы ограничились анализом процесса генерации второй оптической гармоники в геометрооптическом приближении и в первом приближении теории дисперсии. Эффекты пространственно-временной некогерентности, выявленные нами на примере генерации гармоники, могут проявиться и в процессах генерации суммарных и разностных частот, в процессе параметрического усиления (§§ 5—7 гл. 6) и различных процессах смешения.

Более сложными оказываются задачи, связанные с одновременным учетом эффектов пространственной и временной некогерентности взаимодействующих волн [12, 42], и задачи, в которых учитываются эффекты дифракции и дисперсионного расплывания. В нелинейных взаимодействиях частично когерентных в пространстве волн дифракционные эффекты необходимо учитывать, когда длина среды превосходит продольную когерентную длину $l_{\parallel} = kr_0^2/2$ (см. книгу [4], в которой приведена соответствующая литература). Эффекты дисперсионного расплывания в нелинейных волновых процессах проявляются на расстояниях, превышающих когерентную длину $l_k^{(2)}$ (4.4.12). Анализ генерации второй гармоники во втором приближении теории дисперсии выполнен в работе [43].

На спектральном языке учет в процессе генерации гармоник эффектов, связанных с конечными значениями характерных длин $l_{||}$ и l_{\perp}^2 , означает, что при анализе, соответственно, учитываются векторные синхронные взаимодействия между угловыми спектральными компонентами пучков и синхронные процессы смешения между частотными спектральными компонентами.

§ 4. Вынужденное комбинационное рассеяние в поле шумовой накачки

В этом параграфе мы обратимся к анализу эффектов статистики поля для, пожалуй, одного из важнейших нелинейных волновых процессов — для процесса вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР). Физику этого явления можно пояснить, пользуясь простой классической моделью взаимодействия света с молекулами.

Эффект комбинационного рассеяния связан с зависимостью электронной поляризуемости молекулы α от ядерной конфигурации, задаваемой координатами ядер q :

$$\alpha(q) \approx \alpha_0 + \alpha'_0 q + \dots, \quad \alpha'_0 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)_{q=0}.$$

Член с $\partial \alpha_0 / \partial q$ описывает модуляцию света молекулярными колебаниями; при этом в спектре поляризации молекулы появляются новые частотные компоненты, сдвинутые на частоту ω_0 колебаний ядер:

$$p = \alpha(q) E \approx \alpha_0 E + \alpha'_0 q E. \quad (8.4.1)$$

В условиях, когда q определяется тепловыми движениями в среде, (1) описывает спонтанное комбинационное рассеяние. Если падающее световое поле имеет частоту ω' , а молекулярные колебания совершаются со средней частотой ω_0 , в силу (1) в рассеянном молекулой световом поле возникают стоксова ($\omega_c = \omega - \omega_0$) и антистоксова ($\omega_c = \omega' + \omega_0$) компоненты. Однако зависимость $\alpha = \alpha(q)$ приводит не только к модуляции света молекулярными колебаниями, но одновременно оказывается и причиной обратного воздействия световых волн на молекулярные колебания.

Действительно, энергия взаимодействия молекулы со световой волной выражается с помощью (1) в виде

$$W = -pE = -\alpha(q) E^2,$$

и, следовательно, при $\alpha'_0 \neq 0$ в световом поле возникает сила, действующая на молекулярные колебания:

$$f = - \frac{\partial W}{\partial q} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)_{q=0} E^2 = \alpha'_0 E^2. \quad (8.4.2)$$

Эта сила может привести к их резонансной раскачке, если поле содержит две спектральные компоненты с частотами ω_1, ω_2 , разность между которыми $\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_0$. В этих условиях на хаотические внутримолекулярные колебания, имеющие флуктуационный характер, накладываются регулярные вынужденные колебания, фазы которых определяются фазами световых полей.

Вынужденное комбинационное рассеяние — процесс, возникающий за счет оптического возбуждения внутримолекулярных колебаний; резонансный дублет возникает за счет стокасова рассеяния мощной лазерной волны (волны накачки).

Если внутримолекулярные колебания возбуждены светом, качественно меняется и картина рассеяния. На смену слабому нарастающему компоненту рассеянного света в спонтанном рассеянии приходит носящее характер неустойчивости экспоненциальное нарастание рассеянных компонент в вынужденном рассеянии. В нелинейной оптике этим обстоятельством пользуются для эффективного преобразования частоты.

С эффектами типа вынужденного комбинационного рассеяния приходится сталкиваться не только в нелинейной оптике, но и в физике плазмы [39], при распространении радиоволн в ионосфере и т. п.

Как изменяется процесс вынужденного рассеяния, если мощная рассеиваемая волна (накачка) не регулярная, а случайная?

Обсуждению этой проблемы и посвящен предлагаемый параграф. Надо сказать, что математически задача о вынужденном рассеянии случайных волн оказывается весьма сложной. Для ее решения в выполненных к настоящему времени работах был применен практически весь арсенал стохастических методов [10, 16, 18—24, 35, 36, 40, 64]. Ниже мы ограничимся только рассмотрением вынужденного рассеяния плоских шумовых волн («шумовая» накачка); мы убедимся, что даже эта задача оказывается весьма многообразной и сложной.

Говоря о практическом значении задач о шумовой накачке в вынужденном рассеянии, следует отметить два аспекта. С одной стороны, представляет интерес реализация условий, при которых эффективность шумовой накачки (а она, вообще говоря, снижается из-за эффектов инерционности среды) приближается к эффективности гармонической накачки той же мощности. Такая постановка вопроса типична для нелинейной оптики, в частности оптики ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов, где создание высокомонохроматических источников все еще наталкивается на значительные трудности.

С другой стороны, применительно к таким задачам, как лазерный нагрев плазмы, распространение радиоволн в ионосфере и т. п., вынужденное рассеяние является причиной вредных неустойчивостей мощной волны. В связи с этим представляет инте-

рес отыскание способов модуляции мощной волны, способствующих ее стабилизации; шумовая модуляция оказывается в этом смысле одним из перспективных методов. Оба эти аспекта отражены в настоящем параграфе.

Основные уравнения и параметры [38]. Пользуясь (2), уравнение для молекулярных колебаний (эффектами изменения плотности населенностей пренебрегаем) запишем в виде

$$\dot{q} + \frac{2}{T_2} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{2m} \alpha' E^2, \quad (8.4.3)$$

m — эффективная масса молекулы.

Рассмотрим взаимодействие волны накачки E_n и стоксовой волны E_c в среде, описываемой уравнением (3). В этом случае

$$E = E_n + E_c,$$

$$E_n = i \sqrt{2\pi/cn_n} A_n(t, z) \exp i(\omega_n t - k_n z) + \text{к.с.} \quad (8.4.4a)$$

$$E_c = \sqrt{2\pi/cn_c} A_c(t, z) \exp i(\omega_c t - k_c z) + \text{к.с.}, \quad (8.4.4b)$$

где $n_{n,c}$ — показатели преломления на частотах ω_n и $\omega_c = \omega_n - \omega_0$. Амплитуды волн (4) нормированы таким образом, что величина AA^* имеет размерность интенсивности световой волны. Уравнение (3) описывает действие поля на молекулярные колебания. В свою очередь колебания q создают в среде нелинейную поляризацию $P_{nl} = N\alpha' q E$ и, таким образом, оказывают обратное влияние на поле, что выражается уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{nl}}{\partial t^2}. \quad (8.4.5)$$

Согласно (1) резонансная кривая молекулярного осциллятора характеризуется шириной $\delta\omega_0 = 2/T_2$. Эту величину называют также шириной линии спонтанного комбинационного рассеяния и обычно выражают в см^{-1} :

$$\delta\nu_0 = \frac{\delta\omega_0}{2\pi c} = \frac{1}{\pi c T_2} [\text{см}^{-1}].$$

Рассматривая взаимодействие волн, близких к монохроматическим, запишем q в виде, аналогичном (4):

$$q = \gamma' Q(t, z) \exp i(\omega_0 t - k_0 z) + \text{к.с.}, \quad (8.4.6)$$

$$\gamma' = \frac{\omega_0 T_2 2\pi N \alpha_0'}{c \sqrt{n_c n_n}}, \quad k_0 = k_n - k_c,$$

считая амплитуды A_n , A_c и Q меняющимися относительно медленно во времени и пространстве.

Подставив (2) — (4) и (6) в основные уравнения (3) и (5), для комплексных амплитуд взаимодействующих волн получим

укороченные уравнения следующего вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial \theta}\right) A_c = \frac{1}{2} g A_n Q^* \quad \left(\nu = \frac{1}{u_c} - \frac{1}{u_n}\right), \quad (8.4.7a)$$

$$\left(T_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + 1\right) Q = A_n A_c^*, \quad \theta = t - \frac{z}{u_n}, \quad (8.4.7b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n = -\frac{1}{2} g \frac{\omega_n}{\omega_c} A_c Q. \quad (8.4.7в)$$

Параметрами этих уравнений являются: время релаксации T_2 , групповые скорости $u_{n,c} = u(\omega_{n,c})$, а также определяющая оптическую нелинейность среды постоянная

$$g = \frac{4\pi T_2 N \alpha_0' \omega_c}{c \sqrt{2\pi n_c n_n} \omega_0} \quad (8.4.8)$$

(табл. 8.1). При решении уравнений (7) должно быть учтено граничное условие

$$A_n(t, z=0) = A_{n0}(t), \quad (8.4.9)$$

где $A_{n0}(t)$ — комплексная амплитуда падающего на среду излучения накачки. Функция $A_{n0}(t)$ выбирается как регулярная или случайная функция времени, соответствующая модуляции, спектральным и статистическим свойствам накачки. Одного условия (9) для описания ВКР, однако, недостаточно: при этом мы имеем тривиальное решение $A_n(t, z) = A_{n0}(t - z/u_n)$, $A_c = Q = 0$, соответствующее отсутствию рассеяния.

Чтобы получить ненулевое решение, в правой части уравнений (7a) и (7b) нужно ввести сторонние силы, описывающие источники спонтанных флуктуаций полей A_c и Q [70]. Вместо этого

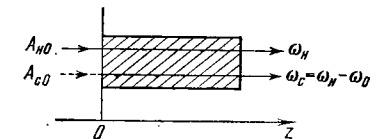


Рис. 8.11. Схема ВКР вперед. Заштрихована область, заполненная комбинационно-активным веществом

Таблица 8.1

Параметры комбинационно-активных сред ($\lambda_n = 0,69$ мкм, $\nu_n = 14\,400$ см^{-1})

Вещество	Агрегатное состояние	$\nu_0 = \omega_0/2\pi c$, см^{-1}	$\delta\nu_0$, см^{-1}	T_2 , нс	g , $\text{см}^2/\text{МВт}$
Водород	газ	4 161	$5 \cdot 10^{-3}$	2	$0,05 \cdot 10^{-2}$
	$p = 100$ атм	4 161	$100 \cdot 10^{-3}$	0,1	$0,15 \cdot 10^{-2}$
Сероуглерод	жидкость	656	$50 \cdot 10^{-3}$	0,2	10^{-2}
Азот	жидкость	2 326	$67 \cdot 10^{-1}$	0,16	$1,6 \cdot 10^{-2}$
Кальцит	твердое тело	1 086	1,1	0,01	$0,6 \cdot 10^{-2}$

представим, что на среду вместе с волной накачки падает слабая стоксова волна (показана на рис. 8.11 пунктиром), т. е. добавить к (9) второе граничное условие:

$$A_c(t, z=0) = A_{c0}(t). \quad (8.4.10)$$

Вынужденное рассеяние имеет характер усиления этой волны, которая играет как бы роль заправки, инициирующей процесс ВКР. Такая модель ВКР-усилителя и будет рассматриваться в дальнейшем*).

Анализ уравнения (7) показывает, что для интенсивностей волн

$$I_c = |A_c|^2, \quad I_n = |A_n|^2, \quad I_Q = |Q|^2$$

выполняются точные соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_c} \frac{\partial}{\partial t}\right) I_c + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_n} \frac{\partial}{\partial t}\right) I_n \frac{\omega_c}{\omega_n} = 0, \quad (8.4.11)$$

$$I_c(z) + \frac{\omega_c}{\omega_n} I_n(z) = \text{const}, \quad (8.4.12)$$

$$I'_c(z) = g I_Q(z), \quad I'_n(z) = -g \frac{\omega_n}{\omega_c} I_Q(z). \quad (8.4.13)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по z , а черта — усреднение (статистическое или по времени). Соотношения (12) и (13) относятся к установившемуся режиму ВКР, когда можно принять, что обращается в нуль среднее значение производной по времени от любой величины, характеризующей рассеяние. Как следует из (12) и (13), в установившемся режиме

$$I'_c > 0, \quad I'_n < 0,$$

т. е. рассеяние имеет необратимый характер: с увеличением длины z области рассеяния интенсивность стоксовой волны все время растет, изменяясь в пределах от $I_{c \min} = I_{c0}$ до $I_{c \max} = I_{c0} + \frac{\omega_c}{\omega_n} I_{n0}$, а интенсивность накачки, наоборот, монотонно уменьшается и в пределе стремится к нулю. Эффективность η (или к. п. д. = $\eta \cdot 100\%$) рассеяния для произвольного сечения z можно, таким образом, определить как

$$\eta = \frac{I_c(z)}{I_{c \max}} = \frac{\omega_n I_c(z) / \omega_c I_{n0}}{1 + \mu_0}, \quad \mu_0 = \frac{\omega_n I_{c0}}{\omega_c I_{n0}} \quad (8.4.14)$$

$$(0 < \eta < 1).$$

Форма пространственного распределения интенсивностей по длине рассеивающей области зависит от статистических и спектральных свойств накачки (см. далее рис. 8.13 — монохроматиче-

* Режим ВКР-усиления иногда фактически реализуется при эксперименте.

ская неслучайная накачка, рис. 8.15 — монохроматическая случайная накачка, рис. 8.16 — многомодовая накачка).

При $\mu_0 \ll 1$ в рассеивающем объеме можно выделить две области: 1) область слабого рассеяния $0 < \eta < 10^{-2}$, $z < l_{nl}$; 2) область сильного рассеяния или насыщения $10^{-2} < \eta < 1$, $z > l_{nl}$. В первой области в стоксову волну перекачивается лишь небольшая часть энергии накачки ($I_c \ll I_{n0}$), хотя усиление может быть очень большим ($I_c \gg I_{c0}$). Условие $I_c \ll I_{n0}$ позволяет вообще пренебречь изменением накачки за счет рассеяния. Подставив приближенное решение последнего из уравнений (7) $A_n(t, z) \approx A_{n0}(\theta)$, $\theta = t - z/u_n$ в два первых, получим для описания ВКР систему из двух уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial \theta}\right) A_c = \frac{1}{2} g A_{n0}(\theta) Q^*, \quad v = \frac{1}{u_c} - \frac{1}{u_n}, \quad (8.4.15)$$

$$TQ + Q = A_{n0}(\theta) A_c^*, \quad Q = \partial Q / \partial \theta.$$

Линейность уравнений (15) относительно A_c и Q , естественно, упрощает их решение. Описание ВКР в рамках (15) называется приближением заданного поля накачки.

В общем случае больших длин рассеяния пренебрегать изменением накачки нельзя, что делает всю задачу нелинейной. Некоторые оценки для характерной длины l_{nl} приводятся ниже (см. далее (27)).

Монохроматическая накачка. Слабое рассеяние. В области слабого рассеяния ВКР-усилитель можно рассматривать как линейную систему с «входом» $A_{c0}(t)$ и двумя «выходами» $A_c(t, z)$ и $Q(t, z)$ и, соответственно, описывать его двумя коэффициентами передачи $K_c(\omega, z)$ и $K_Q(\omega, z)$ (см. гл. 3). Полагая

$$A_{c0}(t) = A_{c0} e^{i\omega t}, \quad A_{n0} = \text{const}, \quad A_c = A_{c0} e^{i\omega t} K_c, \quad (8.4.15a)$$

$$Q = A_{c0} e^{-i\omega t} K_Q,$$

найдем

$$K_c(\omega, z) = \exp\left(\frac{\Gamma_0 z / 2}{1 + i\omega T_2} - i\omega v z\right), \quad \Gamma_0 = g I_{n0}, \quad (8.4.16)$$

$$K_Q(\omega, z) = \frac{A_{n0}}{1 - i\omega T_2} K_c(\omega, z). \quad (8.4.17)$$

Согласно (16) усиление максимально при резонансе ($\omega = 0$), причем рост интенсивности монохроматической стоксовой волны происходит по экспоненциальному закону

$$I_c(z) = I_{c0} e^{\Gamma_0 z} = I_{c0} e^{g I_{n0} z} \quad (8.4.17a)$$

с инкрементом $\Gamma_0 = g I_{n0}$, линейным относительно I_{n0} . При усилении немонохроматического стационарного стоксова излучения, имеющего при $z = 0$ спектральную плотность $G_{c0}(\omega)$,

спектральная плотность в сечении z будет

$$G_c(\omega, z) = G_{c0}(\omega) |K_c(\omega, z)|^2 = G_{c0}(\omega) \exp \frac{\Gamma_0 z}{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (8.4.18)$$

Рассеяние обычно наблюдается при достаточно большом усилении, когда $\Gamma_0 z \gg 1$, и (18) можно переписать в виде

$$G_c(\omega, z) = G_{c0}(\omega) e^{\Gamma_0 z} \exp(-\Gamma_0 z T_2^2 \omega^2). \quad (8.4.19)$$

Как следует из (19), вблизи точного резонанса ($\omega = 0$) частотный спектр стоксовой компоненты ВКР имеет форму гауссовской кривой. Ширину спектра можно оценить как

$$\Delta\omega_c = 2 \sqrt{\ln 2 / T_2} \sqrt{\Gamma_0 z} = \delta\omega_0 \sqrt{\ln 2 / \Gamma_0 z}, \quad (8.4.20)$$

где $\delta\omega_0$ — ширина линии спонтанного рассеяния, т. е. с увеличением z спектр ВКР сужается. При большом усилении ($\Gamma_0 z \gg 1$) спектр Q будет тоже гауссовским с шириной $\Delta\omega_Q = \Delta\omega_c$ (рис. 8.12, а).

Рис. 8.12. Спектры стоксовой волны (1) и молекулярных колебаний (2) при ВКР:

а) случай монохроматической накачки при $\Gamma_0 z \gg 1$; б) случай накачки с широким спектром

Согласно (17) при малом усилении спектр Q расширяется, принимает лоренцевскую форму и его ширина равна ширине линии спонтанного рассеяния: $\Delta\omega_Q = \delta\omega_0$.

Интегрируя (19) по ω , получим при $G_{c0}(\omega) = \text{const}$ и $\Gamma_0 z \gg 1$

$$I_c(z) = G_{c0} \Delta\omega_c \sqrt{\frac{\pi/4}{\ln 2}} e^{\Gamma_0 z} \approx G_{c0} \Delta\omega_c e^{\Gamma_0 z}, \quad (8.4.21)$$

$$I_Q(z) = I_n I_c(z).$$

Насыщение ВКР. Решение полной системы уравнений ВКР (7) при

$$A_{c0}(t) = A_{c0} e^{i\omega t}, \quad A_{n0} = \text{const}$$

ищем в виде

$$A_c(t, z) = e^{i\omega\theta} a_c(z, \omega), \quad Q(t, z) = e^{-i\omega\theta} q(z, \omega), \quad A_n(t, z) = a_n(z, \omega)$$

с не зависящими от времени a_c , q и a_n . Нетрудно получить следующие уравнения для амплитуд:

$$a_c' + i\omega a_c = \frac{1}{2} \frac{g I_n(z)}{1 + i\omega T_2} a_c, \quad a_n' = -\frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\omega_c} \frac{g I_c(z)}{1 - i\omega T_2} a_n \quad (8.4.22)$$

(штрих означает дифференцирование по z), из которых вытекают уравнения для интенсивностей

$$I_c' = \frac{g I_n I_c}{1 + \omega^2 T_2^2}, \quad I_n' = -\frac{\omega_n}{\omega_c} \frac{g I_n I_c}{1 + \omega^2 T_2^2}, \quad I_Q = \frac{I_n I_c}{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (8.4.23)$$

Используя закон сохранения (12), перейдем к уравнению, содержащему только одну из интенсивностей:

$$I_c' = \frac{g}{1 + \omega^2 T_2^2} \left(C - \frac{\omega_n}{\omega_c} I_c \right) I_c, \quad C = I_{n0} (1 + \mu_0).$$

Это нелинейное уравнение Бернулли, приводящееся к линейному подстановкой $v = 1/I_c$. Окончательное решение имеет вид

$$I_c(z, \omega) = I_{c0} \frac{(1 + \mu_0) e^x}{1 + \mu_0 e^x}, \quad I_n(z, \omega) = I_{n0} \frac{1 + \mu_0}{1 + \mu_0 e^x}, \quad (8.4.24)$$

$$I_Q(z, \omega) = \frac{I_{c0} I_{n0}}{1 + \omega^2 T_2^2} \left(\frac{1 + \mu_0}{1 + \mu_0 e^x} \right)^2 e^x,$$

где $x = \frac{(1 + \mu_0) g I_{n0} z}{1 + \omega^2 T_2^2}$. Подставив (24) в (14), получим выражение для к. п. д.:

$$\eta = \frac{\mu_0 e^x}{1 + \mu_0 e^x}. \quad (8.4.25)$$

Таким образом, эффект насыщения ВКР состоит в том, что при достаточно больших z экспоненциальный рост интенсивности стоксовой волны (17а) замедляется и $I_c(z)$ стремится к своему предельному значению $I_{c \text{ max}} =$

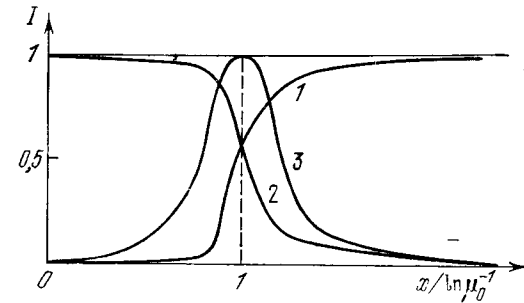


Рис. 8.13. Пространственное распределение интенсивностей при ВКР.

По вертикальной оси отложены относительные интенсивности стоксовой волны I_c (1), накачки I_n (2), молекулярных колебаний I_Q (3). По горизонтальной оси отложена величина $x/\ln \mu_0$, $x = (1 + \mu_0) g I_{n0} z (1 + \omega^2 T_2^2)^{-1}$, $\mu_0 = \omega_n I_{c0} / \omega_c I_{n0}$.

$= I_{c0} + \frac{\omega_c}{\omega_n} I_{n0}$. Одновременно уменьшается интенсивность волны накачки в соответствии с законом сохранения (12). Что касается молекулярных колебаний, то следует отметить, что, в отличие от монотонных распределений $I_c(z)$ и $I_n(z)$, распределение $I_Q(z)$ имеет максимум (рис. 8.13). Нетрудно показать, что максимальная интенсивность молекулярных колебаний равна

$$I_{Q \text{ max}} = \frac{I_{n0}^2 \omega_c (1 + \mu_0)^2}{\omega_n (1 + \omega^2 T_2^2)},$$

причем она приходится на $x = \ln 1/\mu_0$, т. е. согласно (25), соответствует к. п. д. = 50%.

Как следует из (25),

$$x = \frac{(1 + \mu_0) g I_{н0} z}{1 + \omega^2 T_2^2} = \ln \left(\frac{\eta}{1 - \eta} \frac{1}{\mu_0} \right). \quad (8.4.26)$$

Подставив сюда $\eta = 10^{-2}$ (к. п. д. = 1%), получим следующую оценку для границы области насыщения:

$$l_{нл} = \frac{1 + \omega_0^2 T_2^2}{g I_{н0}} \ln \frac{10^{-2}}{\mu_0}. \quad (8.4.27)$$

Например, при возбуждении ВКР в жидком азоте накачкой с длиной волны $\lambda_n = 0,69$ мкм ($g = 1,6 \cdot 10^{-2}$ см/МВт — см. табл. 8.1) и интенсивностью $I_{н0} = 100$ МВт/см² получим при $\omega = 0$ и $\mu_0 = 10^{-12}$, что $l_{нл} = 1$ см = $z_{1\%}$. По формуле (26) находим при тех же условиях возбуждения $z_{50\%} = 18$ см, $z_{90\%} = 19,5$ см.

Обозначим через $\Delta\omega_{ВКР}$ полосу пропускания ВКР-усилителя. Как следует из (24), резонансная кривая ВКР-усилителя при насыщении остается симметричной ($I_c(z, \omega)$ зависит от ω^2), причем наибольшее усиление соответствует нулевой расстройке ($\omega = 0$). Полагая в (26) $\eta = \eta_0/2$, $\eta_0 = \eta(\omega = 0)$ и $\omega = \Delta\omega_{ВКР}/2$, получаем

$$\Delta\omega_{ВКР} = \delta\omega_0 \sqrt{\frac{\Gamma_0 z}{\ln \frac{\eta_0/\mu_0}{(2 - \eta_0)}} - 1}. \quad (8.4.28)$$

При малых z , т. е. в области слабого рассеяния ($\eta_0 \approx I_0 e^{g I_{н0} z} \ll 1$), выражение (28) дает уменьшение полосы с ростом z :

$$\Delta\omega_{ВКР} \approx \delta\omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{g I_{н0} z - \ln 2}} \approx \delta\omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{g I_{н0} z}} \quad (8.4.29)$$

в соответствии с полученной раньше формулой (20). При больших z , когда $\eta_0 \approx 1$, из (28) следует, наоборот, увеличение полосы:

$$\Delta\omega_{ВКР} \approx \delta\omega_0 \sqrt{\frac{g I_{н0} z}{\ln(1/\mu_0)} - 1}. \quad (8.4.30)$$

Таким образом, полоса $\Delta\omega_{ВКР}$ как функция $g I_{н0} z$ имеет минимум (рис. 8.14). Можно приближенно определить, что

$$\Delta\omega_{ВКР \min} \approx \delta\omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{\ln(1/\mu_0) - \ln 2}}. \quad (8.4.31)$$

Например, если $\mu_0 = 10^{-12}$, то формула (31) дает максимальное сужение полосы $\Delta\omega_{ВКР}$ по сравнению с $\delta\omega_0$ в 4,4 раза.

Заканчивая рассмотрение случая монохроматической накачки, заметим, что полученные выше формулы применимы не только при постоянной, но и при медленно меняющейся величине $A_{н0}$, если эти изменения малы в масштабах времени релаксации молекулярных колебаний T_2 и времени запаздывания $\tau_v = z |1/u_n - 1/u_c|$, например, если накачка — гауссовский узкополосный случайный процесс с временем корреляции

$$\tau_k \gg T_2, \quad \tau_k \gg \tau_v. \quad (8.4.32)$$

Рассмотрим этот случай, предполагая, что время наблюдения ВКР значительно превосходит τ_k , т. е. выполняются условия эргодичности (см. § 4 гл. 1) и

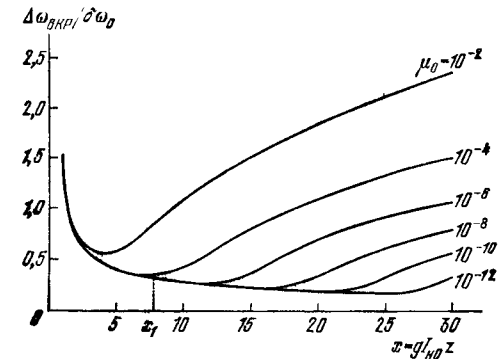


Рис. 8.14. Зависимость полосы пропускания (28) ВКР-усилителя от параметра $x = g I_{н0} z$ при различных значениях относительной интенсивности затравки μ_0 .

средние по времени значения какой-либо величины, характеризующей ВКР, можно вычислять как средние статистические.

Зная функцию распределения вероятностей интенсивности (см. (2.4.8)) и усредняя (17а), получим [18]

$$I_c(z) = \int_0^{\infty} \omega(I_{н0}) I_{н0} e^{g I_{н0} z} dI_{н0} = \frac{I_{с0}}{1 - g I_{н0} z}. \quad (8.4.33)$$

Из (33) следует, что усиление в поле случайной гауссовской накачки может существенно превысить усиление в поле неслучайной накачки той же средней интенсивности и, более того, $I_c(z) \rightarrow \infty$ при $g I_{н0} z \rightarrow 1$ (стохастическая неустойчивость). Эта расходимость исчезает, если усреднить полное выражение для $I_c(z)$ (24). Результат показан пунктиром на рис. 8.15. Для сравнения там же сплошной линией нанесена усредненная кривая $I_c(z)$, соответствующая эквивалентной неслучайной накачке. Ход кривых на рис. 8.15 показывает, что при случайной накачке насыщение ВКР наступает значительно раньше, т. е. при меньших длинах взаимодействия

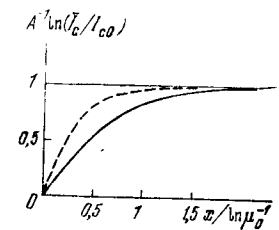


Рис. 8.15. Насыщение ВКР при неслучайной (сплошная линия, $x = g I_{н0} z$) и случайной гауссовской (пунктирная линия, $x = g I_{н0} z$) узкополосной накачке; $\mu_0 = 10^{-12}$ [18].

Немонохроматическая накачка; влияние молекулярной релаксации на вынужденное рассеяние. Как видно из основных уравнений ВКР (7), при немонахроматической накачке возникают эффекты, связанные с инерционностью молекулярных колебаний ($T_2 \neq 0$), а также с различием групповых скоростей ($u_n \neq u_c$,

$\nu \neq 0$). Рассмотрим сначала влияние первого из этих факторов, считая среду недиспергирующей ($\nu = 0$).

В области слабого рассеяния ВКР описывается уравнениями (15). Полагая в них $\nu = 0$, получим

$$A_c' = \frac{1}{2} g A_{n0}(\theta) Q^*, \quad T_2 Q + Q = A_{n0}^-(\theta) A_c^*. \quad (8.4.34a, б)$$

Даже не решая уравнений (34), можно сделать определенные заключения о виде частотных спектров A_c и Q при широком спектре накачки. Из вида левой части (34б) следует, что спектр молекулярных колебаний характеризуется шириной

$$\Delta\omega_Q \lesssim 2/T_2 = \delta\omega_0. \quad (8.4.35)$$

Переписав (34а) в виде

$$A_c(\theta, z) = A_{c0}(\theta) + \frac{1}{2} g A_{n0}(\theta) \int_0^z Q^* dz' \quad (8.4.36)$$

и учитывая (35), получим также оценку для ширины спектра стоксовой волны:

$$\Delta\omega_c \approx \Delta\omega_{c0} + \Delta\omega_n + \Delta\omega_Q. \quad (8.4.37)$$

Если усиление велико ($A_c \gg A_{c0}$) и спектр накачки широкий ($\Delta\omega_n \gg 2/T_2$), то согласно (35) — (37)

$$\Delta\omega_Q \ll \Delta\omega_n, \quad \Delta\omega_c \approx \Delta\omega_n,$$

причем, в отличие от случая монохроматической накачки, стоксово излучение имеет теперь широкий спектр, повторяющий по форме спектр накачки (ср. с рис. 8.12, а и б).

Для уравнений (34) можно получить точные решения [19, 66]

$$A_c = A_{c0}(\theta) + g T_2^{-1} z A_{n0}(\theta) \times \\ \times \int_0^\infty e^{-\theta/T_2} A_{c0}(\theta - \theta_1) A_{n0}(\theta - \theta_1) I_1(x) x^{-1} d\theta_1, \quad (8.4.38)$$

$$Q = T_2^{-1} \int_0^\infty e^{-\theta_1/T_2} A_{n0}(\theta - \theta_1) A_{c0}^*(\theta - \theta_1) I_0(x) d\theta_1. \quad (8.4.39)$$

Здесь $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — функции Бесселя,

$$x = \sqrt{2gz T_2^{-1} \int_0^{\theta_1} I_{n0}(\theta - \theta') d\theta'}. \quad (8.4.40)$$

Действительно, при

$$a_1 = A_c \sqrt{\alpha_2}, \quad a_2 = Q \sqrt{g/2}, \quad a_{30} = -A_{n0} \sqrt{g\alpha_2/2} \\ \alpha_2 \rightarrow \infty, \quad \mu_2 \rightarrow 0, \quad \alpha_2 \mu_2 \rightarrow T_2^{-1}, \quad \alpha_1 = 0$$

с (34) совпадают уравнения (6.6.41), решения которых (6.6.58), (6.6.59) принимают вид (38), (39).

Суммарную ширину спектра любого излучения можно оценить как

$$\Delta\omega \approx \Delta\omega_{\text{имп}} + \Delta\omega_{\text{мод}}, \quad (8.4.41)$$

где первый член связан с конечной длительностью $t_{\text{имп}}$ импульса излучения ($\Delta\omega_{\text{имп}} \sim t_{\text{имп}}^{-1}$), а второй — с наличием стационарной внутриимпульсной амплитудно-фазовой модуляции.

Рассмотрим случай мощной широкополосной накачки типа стационарного шума

$$g I_{n0} z \gg 1, \quad \Delta\omega_n \approx \Delta\omega_{n, \text{мод}} \gg 2/T_2. \quad (8.4.42)$$

Ниже будет показано, что при этом в аргументе функции Бесселя в (38), (39) флуктуациями интенсивности накачки можно пренебречь и положить

$$x \approx y = \sqrt{2gz I_{n0} z \theta_1 / T_2}. \quad (8.4.43)$$

Подставив (43) в (39), получим выражение

$$Q = T_2^{-1} \int_0^\infty e^{-\theta_1/T_2} A_{n0}(\theta - \theta_1) A_{c0}^*(\theta - \theta_1) I_0(\sqrt{2gz I_{n0} z \theta_1 / T_2}) d\theta_1, \quad (8.4.44)$$

приближенное для некогерентной накачки и граничных условий

$$A_n = A_{n0}(t), \quad A_c = A_{c0}(t), \quad z = 0, \quad (8.4.45a)$$

но точное для эквивалентной монохроматической накачки, если

$$A_{n0}^{\text{ЭКВ}} = I_{n0}^{1/2}, \quad A_c^{\text{ЭКВ}}(t) = A_{c0}(t) A_{n0}^*(t) I_{n0}^{-1/2}, \quad z = 0. \quad (8.4.45б)$$

Таким образом, оба случая (45а) и (45б) подобны в том смысле, что им соответствует одна и та же амплитуда молекулярных колебаний (44), интенсивность $I_Q(z) = \langle QQ^* \rangle$, а также интенсивность (но не спектр!) стоксовой волны $I_c(z)$ (7), поскольку $I_Q(z)$ и $I_c(z)$ однозначно связаны вытекающим из (13) соотношением

$$I_c(z) = I_{c0} + g \int_0^z I_Q(z) dz. \quad (8.4.46)$$

Из (45б) находим для корреляционных функций

$$B_c^{\text{ЭКВ}}(\tau) = B_{c0}(\tau) B_{n0}(\tau) I_{n0}^{-1}. \quad (8.4.47)$$

Если, в частности, процесс A_{c0} является δ -коррелированным, то, подставив $B_{c0}(\tau) = 2\pi G_{c0} \delta(\tau)$ в (47), получим, что процесс $A_c^{\text{ЭКВ}}$ тоже δ -коррелирован и имеет ту же спектральную плотность, что и A_{c0} . Отсюда следует, что формулы (21), полученные для монохроматической накачки, будут описывать и случай (45а), если

в них заменить I_{n0} на I_{n0} . Следовательно, на инкремент Γ_0 пространственного усиления при ВКР ширина спектра накачки $\Delta\omega_n$ не влияет; величина инкремента определяется интегральной средней интенсивностью накачки

$$\Gamma_0 = gI_{n0} = g \int_{-\infty}^{\infty} G_{n0}(\omega) d\omega, \quad (8.4.48)$$

Переход от x к y в (38), (39) обосновывается следующим образом. Учитывая условие (42) ($\Gamma_0 z \gg 1$), определим область, существенную при интегрировании (44). Предполагая, что в этой области $y \gg 1$ (см. (51)), и используя известную асимптотику функций Бесселя $I_n(y) \approx e^y / \sqrt{2\pi y}$, получим

$$F(\theta) = e^{-\theta/T_2} I_0(y) \approx \frac{e^{\varphi(\theta)}}{\sqrt{2\pi} (2\Gamma_0 z \theta / T_2)^{1/4}}, \quad \Gamma_0 = gI_{n0}. \quad (8.4.49)$$

Функция $\varphi(\theta) = -\theta/T_2 + \sqrt{2\Gamma_0 z \theta / T_2}$ в (49) при увеличении θ сначала растет, а затем уменьшается, принимая при $\theta = \theta_0 = \Gamma_0 z T_2 / 2$ максимальное значение $\varphi_{\max} = \Gamma_0 z / 2$. При отклонении θ от θ_0 функция $F(\theta)$ уменьшается тем быстрее, чем больше параметр $\Gamma_0 z$. Разлагая $\varphi(\theta)$ в ряд Тейлора по $\theta - \theta_0$ и ограничиваясь членами второго порядка, будем иметь

$$F(\theta) \approx \frac{T_2 e^{\Gamma_0 z / 2}}{\sqrt{2\pi} \alpha} \exp\left[-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\alpha^2}\right], \quad \alpha = T_2 \sqrt{\Gamma_0 z}. \quad (8.4.50)$$

Таким образом, для интегрирования в (44) существенна область, в которой величину y можно оценить как

$$y \approx y(\theta_0) = \sqrt{2gI_{n0} z \theta_0 / T_2} = \Gamma_0 z \gg 1, \quad (8.4.51)$$

что находится в соответствии со сделанным выше предположением о величине y .

Введем теперь функцию $\eta(t) = (I_{n0}(t) - I_{n0}) / I_{n0}$, описывающую относительные флуктуации интенсивности накачки. Отличие x от y определяется величиной усредненных за время θ_1 флуктуаций $\eta(t)$: согласно (40) и (43), если

$$\xi = \frac{1}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} \eta(\theta - \theta') d\theta', \quad \xi = 0, \quad (8.4.52)$$

то

$$x = y \sqrt{1 + \xi}. \quad (8.4.53)$$

Из (53) видно, что замена x на y возможна, если флуктуации ξ малы. Чтобы оценить $\langle \xi^2 \rangle$, предположим, что накачка — гауссовский оптический шум с лоренцевским спектром, т. е.

$$\langle A_{n0}(t) A_{n0}^*(t + \tau) \rangle = I_{n0} R(\tau),$$

где $R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$, $\beta = \Delta\omega_n/2$. При этом (см. (2))

$$\langle \eta \eta^* \rangle = R^2(\tau), \quad G_n(\omega) = \frac{2\beta/\pi}{(2\beta)^2 + \omega^2}. \quad (8.4.54)$$

Для $\langle \xi^2 \rangle$ согласно (1.4.6) имеем следующую оценку:

$$\langle \xi^2 \rangle \leq \frac{2\pi}{\theta_1} G_n(0).$$

Учитывая (50), время усреднения θ_1 в области, существенной для интегрирования в (38), (39), можно принять равным $\theta_1 = \theta_0 = \Gamma_0 z T_2 / 2$. Учитывая также (54) и (42), в результате получим

$$\langle \xi^2 \rangle \leq \frac{2\pi}{\theta_0} G_n(0) = \frac{2/T_2}{\Delta\omega_n} \frac{2}{\Gamma_0 z} \ll 1,$$

что и требовалось показать.

Насыщение ВКР при широкополосной накачке (многомодовая модель). Анализ ВКР удастся провести наиболее полно, если предположить, что спектры падающих волн имеют дискретный многомодовый характер, причем расстояние между модами превышает ширину спонтанной линии [20, 21]:

$$A_{n0}(t) = \sum_n A_{n0} e^{i\Omega_n t}, \quad A_{c0}(t) = \sum_n a_{n0} e^{i\Omega_n t}, \quad (8.4.55)$$

$$T_2 \Omega \gg 1. \quad (8.4.56)$$

Амплитуды волн в комбинационно-активной среде ищем в виде разложений, аналогичных (55), но с коэффициентами, зависящими от z :

$$A_n(\theta, z) = \sum_n A_n(z) e^{i\Omega_n \theta}, \quad A_c(\theta, z) = \sum_n a_n(z) e^{i\Omega_n \theta}. \quad (8.4.57)$$

Решение уравнения для Q (346) представим, используя интеграл Дюамеля (3.2.18а), в форме

$$Q = \frac{1}{T_2} \int_0^{\infty} e^{-\theta/T_2} A_n(\theta - \theta_1, z) A_c^*(\theta - \theta_1, z) d\theta_1 = \\ = \sum_n \frac{e^{i\Omega_n \theta}}{1 + i\Omega_n T_2} \sum_m A_m(z) a_{m-n}^*(z),$$

или, учитывая (56),

$$Q \approx \sum_m A_m(z) a_m^*(z). \quad (8.4.58)$$

Подставив (57) и (58) в (15) и приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим систему уравнений, которые определяют амплитуды мод накачки $A_n(z)$ и стоксовой

волны $a_n(z)$:

$$a_n' + i\mu_n a_n - \frac{1}{2} g A_n \sum_m a_m A_m^* = 0, \quad (8.4.59a)$$

$$A_n' + \frac{1}{2} g \frac{\omega_n}{\omega_c} a_n \sum_m a_m^* A_m = 0, \quad (8.4.59b)$$

$$\mu = \nu\Omega = \Omega (1/u_c - 1/u_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Интегрирование уравнений (59) при $\mu = 0$ (недиспергирующая среда) с учетом граничных условий $a_n(z=0) = a_{n0}$, $A_n(z=0) = A_{n0}$ дает

$$a_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(1+e^{-\beta x/\gamma})(1+1/\gamma)}} \times \left\{ a_{n0} \left(1 + \frac{1}{\gamma} e^{-\beta x/2} \right) + A_{n0} \sqrt{\frac{\omega_c Q_0}{\omega_n \gamma Q_0^*}} (1 - e^{-\beta x/2}) \right\}, \quad (8.4.60)$$

$$I_c(z) = \sum_n |a_n(z)|^2 = I_{c0} \frac{1+\mu_0}{2\alpha_0} \frac{(1+\beta)\gamma e^{\beta x} + (1-\beta)}{1+\gamma e^{\beta x}}, \quad (8.4.61)$$

$$I_n(z) = \sum_n |A_n(z)|^2 = I_{n0} \frac{1+\mu_0}{2} \frac{(1-\beta)\gamma e^{\beta x} + (1+\beta)}{1+\gamma e^{\beta x}}, \quad (8.4.62)$$

где $x = (1+\mu_0)gI_{n0}z$, $I_{n0} = \sum_n |A_{n0}|^2$,

$$I_{c0} = \sum_n |a_{n0}|^2, \quad \mu_0 = \omega_n I_{c0} / \omega_c I_{n0},$$

$$Q_0 = \sum_n A_{n0} a_{n0}^*, \quad \beta = \frac{\sqrt{(1-\mu_0)^2 + 4\mu_0 K}}{1+\mu_0}, \quad \gamma = \frac{\mu_0(1+\beta) - 1 + \beta}{1+\beta - \mu_0(1-\beta)} \quad (8.4.63)$$

и введен «коэффициент корреляции» спектров накачки и стоксовой затравки

$$K = \frac{|Q_0|^2}{I_{n0} I_{c0}} = \frac{\left| \sum_n A_{n0} a_{n0}^* \right|^2}{\left(\sum_n |A_{n0}|^2 \right) \left(\sum_n |a_{n0}|^2 \right)}, \quad 0 \leq K \leq 1. \quad (8.4.64)$$

При относительно большой начальной интенсивности накачки ($\mu_0 \ll 1$) согласно (63) и (64)

$$\beta \approx 1 - 2\mu_0(1-K) \approx 1, \quad \gamma \approx \mu_0 K [1 + \mu_0(1-K)] \approx \mu_0 K. \quad (8.4.65)$$

Выражение (60) показывает, что в режиме насыщения ВКР сохраняется свойство стоксовой волны воспроизводить частотный спектр широкополосной накачки:

$$a_n(z) \sim A_{n0}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Выявляется и новая особенность: сильная зависимость эффектив-

ности рассеяния от коэффициента корреляции спектров K . Например, если $K=0$, то рассеяния нет вообще:

$$I_n(z) = I_{n0}, \quad I_c(z) = I_{c0}.$$

В другом предельном случае $K=1$ выражения (61), (62) совпадают с (24), т. е. ВКР происходит так же интенсивно, как и при монохроматической накачке. Чтобы лучше показать зависимость рассеяния от параметра K , перепишем (61), (62) с учетом (65):

$$I_c(z) = I_{c0} \frac{1-K+Ke^x}{1+\mu_0 Ke^x}, \quad x = gI_{n0}z, \quad (8.4.66)$$

$$I_n(z) = \frac{I_{n0}}{1+\mu_0 Ke^x}. \quad (8.4.67)$$

Из (66) видно, что при любом сколь угодно малом, но не равном нулю K в стоксову волну перекачивается вся энергия накачки, но кривые насыщения сдвигаются по оси z на величину

$$\Delta z = \frac{1}{gI_{n0}} \ln \frac{1}{K},$$

и чем меньше K , тем большие длины рассеяния требуются для полной перекачки (рис. 8.16).

Величина K зависит от относительной фазировки мод накачки и затравки, т. е. от опыта к опыту она меняется случайно. Так

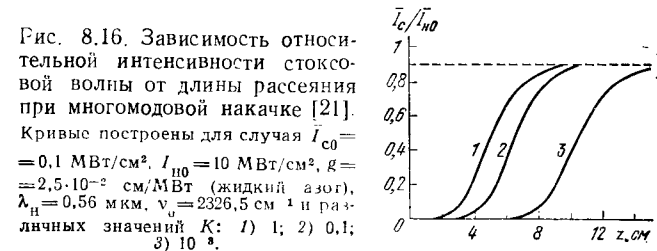


Рис. 8.16. Зависимость относительной интенсивности стоксовой волны от длины рассеяния при многомодовой накачке [21]. Кривые построены для случая $I_{c0} = 0.1$ МВт/см², $I_{n0} = 10$ МВт/см², $g = 2.5 \cdot 10^{-2}$ см/МВт (жидкий азот), $\lambda_n = 0.56$ мкм, $\nu = 2326.5$ см⁻¹ и различных значений K : 1) 1; 2) 0.1; 3) 10^{-3} .

как обычно в эксперименте величина z фиксирована (z — длина образца или кюветы), то неизбежные флуктуации параметра K при повторных возбуждениях ВКР могут привести к сильным флуктуациям интенсивности стоксовой волны, несмотря на стабильные значения средних начальных интенсивностей I_{n0} и I_{c0} . Ясно, что от этих флуктуаций, характерных именно для многомодовой накачки, можно избавиться, создав одномодовую затравку: как следует из (64), при $a_{m0} \neq 0$, $a_{n0} = 0$ ($n \neq m$, m — любое) величина K не флуктуирует: $K=1$.

Одновременное проявление молекулярной релаксации и дисперсии среды. Не учитывая дисперсии, мы тем самым предполагали, что в уравнениях (7a) член, пропорциональный $\nu = 1/u_c - 1/u_n$,

пренебрежимо мал:

$$\frac{\partial A_c}{\partial z} \gg v \frac{\partial A_c}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial I_c}{\partial z} \gg |v| \frac{\partial I_c}{\partial \theta}. \quad (8.4.68)$$

Чтобы оценить производные в (68), используем результаты, полученные в предыдущем разделе. Поскольку частотный спектр стоксовой волны повторяет частотный спектр накачки, то

$$\frac{\partial I_c}{\partial \theta} \sim I_c \Delta \omega_n.$$

Согласно (66) и (67) при не слишком малых K

$$\frac{\partial I_c}{\partial z} \sim I_c \frac{g I_{n0}}{1 + \alpha_0 K e^{g I_{n0} z}} = \bar{I}_c g I_n(z).$$

В результате (68) принимает вид

$$I_n(z) \gg I_{кр} = \frac{|v| \Delta \omega_n}{g}. \quad (8.4.69)$$

Таким образом, дисперсию групповых скоростей при ВКР можно не учитывать, если локальная интенсивность накачки превосходит некоторый характерный уровень — критическую интенсивность $I_{кр}$.

Введя относительную дисперсию $|v'| = |v|/c$ и выражая ширину спектра накачки в см^{-1} ($\Delta \nu_n = \Delta \omega_n / 2\pi c$), получим

$$I_{кр} = \frac{2\pi |v'| \Delta \nu_n}{g}. \quad (8.4.70)$$

Например, при рассеянии в CS_2 , $g = 0,02 \text{ см/МВт}$ (см. табл. 8.1) и $|v'| = 0,02$. Тогда при ширине спектра накачки $\Delta \nu_n = 10 \text{ см}^{-1}$ формула (70) дает $I_{кр} = 130 \text{ МВт/см}^2$.

При $I_n > I_{кр}$, когда дисперсия групповых скоростей несущественна, режим ВКР является *когерентным* (см. § 3). Основная особенность когерентного режима состоит в том, что, несмотря на широкий спектр накачки, инкремент усиления определяется ее интегральной интенсивностью ($\Gamma_0 = g I_{n0}$), т. е. в усилении каждой спектральной компоненты стоксовой волны принимает участие весь спектр накачки.

Условие (69) всегда нарушается при достаточно больших z , так как интенсивность накачки с ростом z монотонно уменьшается. Предположим, что при $z=0$ величина I_{n0} превосходит $I_{кр}$ в N раз. Нетрудно показать, что $I_n(z)$ упадет до уровня $I_{кр}$ на длинах, соответствующих эффективности перекачки:

$$\eta = \frac{N-1}{N}, \quad N = \frac{I_{n0}}{I_{кр}} > 1.$$

Уравнения для средних (фоккер-планковское приближение) [16, 22]. При

$$I_n < I_{кр} \quad (8.4.71)$$

происходит срыв когерентного режима рассеяния. Инкремент

пространственного усиления в этом случае меньше, чем Γ_0 . Режим ВКР, соответствующий (71), можно назвать *некогерентным*.

Предположим, что величина I_{n0} фиксирована. Тогда условие (71) будет выполняться тем лучше, чем шире частотный спектр накачки. Поэтому естественно попытаться рассмотреть некогерентный режим ВКР, используя модель δ -коррелированной накачки и полагая

$$\langle A_{n0}(t) A_{n0}^*(t + \tau) \rangle = 2\pi G_{n0} \delta(\tau). \quad (8.4.72)$$

Постоянная G_{n0} в (72) — спектральная плотность накачки — определяется условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{n0}(\tau) d\tau = 2\pi G_{n0}, \quad (8.4.73)$$

где $B_{n0}(\tau)$ — истинная корреляционная функция комплексной амплитуды накачки, не являющаяся, разумеется, δ -функцией.

Подход, основанный на приближении (72), удастся реализовать только для областей слабого рассеяния, и мы будем исходить из линейных уравнений ВКР (15), используя развитую в § 7 гл. 1 технику усреднения уравнений с δ -коррелированными коэффициентами. Предварительно необходимо перейти от уравнений в частных производных (15) к эквивалентным уравнениям в обыкновенных производных*). Это легко сделать, подставив в (15) комплексные амплитуды, записанные в виде пространственных интегралов Фурье:

$$A_c(\theta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\theta, k) e^{-ikz} dk, \quad Q^*(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\theta, k) e^{-ikz} dk. \quad (8.4.74)$$

В результате придем к уравнениям для фурье-амплитуд a и q :

$$-ika + \dot{v}a = \frac{1}{2}g A_n(\theta) q, \quad T_2 \dot{q} + q = A_n^*(\theta) a,$$

усреднив которые получим

$$-ika + \dot{v}a = \frac{1}{2}g \langle A_n q \rangle, \quad T_2 \dot{\bar{q}} + \bar{q} = \langle A_n^* a \rangle. \quad (8.4.75)$$

В фоккер-планковском приближении с амплитудой накачки коррелируют только главные компоненты флуктуаций a и q , равные

$$a^{(k)} = \frac{g}{2v} \bar{q} \int A_n(\theta_1) d\theta_1, \quad q^{(k)} = \frac{\bar{a}}{T_2} \int A_n(\theta_1) d\theta_1 \quad (8.4.76)$$

(см. (1.7.20)). Как следует из (72) и (76),

$$\langle A_n q \rangle = \langle A_n q^{(k)} \rangle = \frac{\bar{a}}{T_2} \pi G_{n0}, \quad \langle A_n^* a \rangle = \frac{g \pi G_{n0}}{2v} q. \quad (8.4.77)$$

*) Другой вариант вывода уравнений для средних описан в § 6 гл. 6.

Подстановка (77) в (75) дает

$$-ik\bar{a} + v\dot{\bar{a}} = \frac{\pi G_{н0}g}{2T_2} \bar{a}, \quad T_2\dot{\bar{q}} + \bar{q} = \frac{\pi G_{н0}g}{2\nu} \bar{q},$$

или согласно (74)

$$\frac{\partial \bar{A}_c}{\partial z} + v \frac{\partial \bar{A}_c}{\partial \theta} = \frac{\pi g G_{н0}}{2T_2} \bar{A}_c, \quad T_2\dot{\bar{Q}} + \left(1 - \frac{\pi G_{н0}g}{2\nu}\right) \bar{Q} = 0. \quad (8.4.78)$$

Тем же методом можно получить уравнения для средних интенсивностей:

$$\frac{\partial I_c}{\partial z} + v \frac{\partial I_c}{\partial \theta} - \frac{\pi g G_{н0}}{T_2} I_c = \frac{\pi g^2 G_{н0}}{2\nu} I_Q, \quad (8.4.79a)$$

$$T_2\dot{I}_Q + 2\left(1 - \frac{\pi g G_{н0}}{2\nu}\right) I_Q = \frac{2\pi G_{н0}}{T_2} I_c. \quad (8.4.79б)$$

Заметим, что в (78) и (79) параметр $G_{н0}$ (спектральная плотность накачки) может быть задан не только в виде постоянной, но и как некоторая функция времени (неслучайная) $G_{н0}(\theta)$, что соответствует нестационарному оптическому шуму, например накачке типа шумового импульса.

В стационарном режиме, когда параметры уравнений (78) и (79) от времени не зависят, нетрудно получить следующие решения:

$$\bar{A}_c(z) = \bar{A}_{c0} \exp\left(\frac{\pi g G_{н0}}{2T_2} z\right), \quad I_c(z) = I_{c0} \exp\left(\frac{\pi g G_{н0}/T_2}{1 - \pi g G_{н0}/2\nu} z\right). \quad (8.4.80)$$

Рассмотрим пример накачки с лоренцевским спектром (см. (1.3.31)). Подставив в (73)

$$B_{н0}(\tau) = I_{н0} e^{-h|\tau|}, \quad 2h = \Delta\omega_n,$$

получим

$$G_{н0} = \frac{I_{н0}}{\pi\alpha} = \frac{I_{н0}}{(\pi/2)\Delta\omega_n}. \quad (8.4.81)$$

Как следует из (69) и (81),

$$\frac{\pi g G_{н0}}{T_2} = g I_n \frac{\delta\omega_0}{\Delta\omega_n}, \quad \frac{\pi g G_{н0}}{2\nu} = \frac{I_n}{I_{кр}},$$

так что выражения (80) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{A}_c(z) = \bar{A}_{c0} \exp\frac{\varepsilon \Gamma_0 z}{2}, \quad I_c(z) = I_{c0} \exp\frac{\varepsilon \Gamma_0 z}{1 - I_n/I_{кр}}, \quad (8.4.82)$$

где $\Gamma_0 = g I_n$ — инкремент ВКР, соответствующий когерентному режиму, и

$$\varepsilon = \delta\omega_0/\Delta\omega_n = 2/T_0 \Delta\omega_n \ll 1$$

— малый параметр, равный отношению ширины спонтанной линии к ширине спектра накачки.

Выражения (82) показывают, что в некогерентном режиме широкополосная накачка рассеивается намного слабее, чем в когерентном. Создаваемый ею инкремент усиления стоксовой волны равен (см. (81) и (82))

$$\varepsilon \Gamma_0 = \frac{\delta\omega_0}{\Delta\omega_n} g I_{н0} = g \frac{\pi}{2} \delta\omega_0 G_{н0} \ll \Gamma_0,$$

т. е. можно сказать, что в усилении некоторой спектральной компоненты стоксовой волны на частоте ω принимает участие не весь спектр накачки, а лишь его небольшая область, приходящаяся примерно на интервал $\omega_0 + \omega \pm \delta\omega_0/2$ *).

Согласно (82) пространственное усиление интенсивности стоксовой волны происходит с инкрементом

$$\Gamma = \frac{\varepsilon \Gamma_0}{1 - I_{н0}/I_{кр}} = \frac{\varepsilon g I_{н0}}{1 - I_{н0}/I_{кр}}, \quad (8.4.83)$$

который является нелинейной функцией $I_{н0}$. Эта нелинейность проявляется тем сильнее, чем $I_{н0}$ ближе к $I_{кр}$. При $I_{н0} \rightarrow I_{кр}$

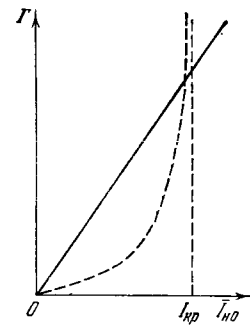


Рис. 8.17 Зависимость инкремента ВКР от интенсивности накачки в диспергирующей среде.

Сплошная прямая соответствует монохроматической накачке, пунктирная кривая — широкополосной шумовой накачке.

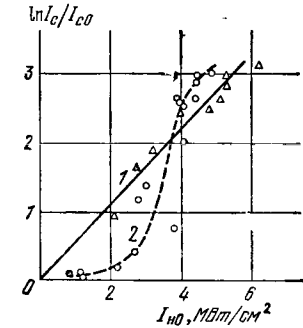


Рис. 8.18 Экспериментальная зависимость инкремента ВКР $\Gamma \sim \ln(I_c/I_{c0})$ от интенсивности узкополосной (1) и широкополосной (2) накачки [23].

инкремент Γ резко возрастает (рис. 8.17). Как следует из анализа когерентного режима, Γ стремится при этом к Γ_0 ; формула (83) описывает начальный этап этого перехода. Этот результат был подтвержден экспериментально (рис. 8.18). Согласно (79б) эффек-

*) Такой вывод подтверждается более детальным рассмотрением некогерентного режима на основе многомодовой модели — см. следующий раздел.

тивное время релаксации молекулярных колебаний

$$T_{2 \text{эфт}} = \frac{T_2}{1 - \pi g G_{n0}/2\nu} \approx \frac{T_2}{1 - I_{n0}/I_{кр}}$$

при $I_{n0}/I_{кр} \rightarrow 1$ стремится к ∞ .

Чтобы полностью проследить переход некогерентного режима в когерентный, нужно развить более общую теорию ВКР, применимую при произвольной интенсивности широкополосной накачки $I_n \leq I_{кр}$. Это может быть сделано также с помощью многомодовой модели (55), (56).

Общая теория ВКР широкополосной накачки в диспергирующей среде [24]. Будем исходить из уравнений (59), не пренебрегая теперь членом с μ , описывающим дисперсию. Ограничимся рассмотрением области слабого рассеяния ($\eta \ll 1$). Уравнение (59б) дает при этом $A_n = A_{n0}$, а (59а) принимает вид

$$a'_n + i\mu n a_n - \frac{1}{2} g A_{n0} \sum_m a_m A_{m0}^* = 0, \quad z \geq 0, \quad (8.4.84)$$

$$a_n(z=0) = a_{n0}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Как известно, решение системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид суммы экспоненциальных функций. Поэтому можно написать, что в (84)

$$a_n(z) = \sum_s a_{ns}(z), \quad a_{ns}(z) = B_{ns} e^{\gamma_s z}. \quad (8.4.85)$$

Согласно (58) амплитуда молекулярных колебаний при этом равна

$$Q^* = \sum_n a_n(z) A_{n0}^* = \sum_s R_s e^{\gamma_s z}, \quad R_s = \sum_m A_{m0}^* B_{ms}. \quad (8.4.86)$$

Подставив (85) в (84) и приравняв коэффициенты при одинаковых экспонентах, найдем зависимость постоянных B_{ns} от индекса n :

$$B_{ns} = \frac{g A_{n0}/2}{\gamma_s + i\mu n} R_s. \quad (8.4.87)$$

Если теперь подставить (86) в (87), домножить на A_{n0}^* и просуммировать по n , то, сократив на R_s , придем к уравнению, определяющему комплексные инкременты γ_s :

$$1 - \frac{g}{2} \sum_m \frac{I_m}{\gamma + i\mu m} = 0, \quad I_m = |A_{m0}|^2. \quad (8.4.88)$$

Число корней уравнения (88) равно числу мод накачки, т. е. матрица

$$[\alpha_{ns}] = \left[\frac{g A_{n0}/2}{\gamma_s + i\mu n} \right] \quad (8.4.89)$$

является квадратной. Таким образом, амплитуды мод стоксовой волны могут быть представлены как

$$a_n(z) = \sum_s \alpha_{ns} R_s e^{\gamma_s z}, \quad (8.4.90)$$

где неизвестными пока остаются постоянные R_s , определяющиеся граничными условиями. Полагая в (90) $z=0$, получим для R_s уравнения

$$a_{n0} = \sum_s \alpha_{ns} R_s, \quad (8.4.91)$$

откуда

$$R_s = \sum_n \beta_{sn} a_{n0}, \quad (8.4.92)$$

где β_{sn} — элементы матрицы, обратной (89).

При большом или даже бесконечном числе мод накачки применение обычных способов вычисления матрицы $[\beta_{sn}]$ представляется практически неосуществимой задачей. Интересно отметить, что в рассматриваемом случае все же могут быть получены точные выражения, определяющие в явном виде элементы β_{sn} обратной матрицы и постоянные R_s в (92).

Используя подход, развитый в § 1 гл. 6 для временных уравнений, перейдем в (84) к функциям $a_n^+(z) = a_n(z) I(z)$:

$$a_n^+(z)' + i\mu n a_n^+(z) - \frac{1}{2} g A_{n0} \sum_m a_m^+(z) A_{m0}^* = a_{n0} \delta(z). \quad (8.4.93)$$

Уравнения (93) отличаются от (84) наличием свободного члена, который учитывает граничные значения амплитуд. Подставив в (93) представление для a_n^+ в виде

$$a_n^+(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}_n(k) e^{-ikz} dk, \quad (8.4.94)$$

получим для фурье-амплитуд \tilde{a}_n уравнение

$$\tilde{a}_n = \frac{g A_{n0}/2}{-ik + i\mu n} \sum_m \tilde{a}_m A_{m0}^* + \frac{1}{2\pi} \frac{a_{n0}}{-ik + i\mu n},$$

из которого следует, что

$$\sum_m \tilde{a}_m A_{m0}^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\sum_n \frac{a_{n0} A_{n0}^*}{-ik + i\mu n}}{1 - \frac{g}{2} \sum_m \frac{I_m}{-ik + i\mu m}}. \quad (8.4.95)$$

Согласно (86) и (94)

$$I(z) Q^+(z) = \sum_m a_m^+(z) A_{m0}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m \tilde{a}_m A_{m0}^* e^{-ikz} dk. \quad (8.4.96)$$

Подстановка (95) в (96) дает

$$I(z) Q^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-ik) e^{-ikz} dk, \quad (8.4.97)$$

где

$$F(\gamma) = \frac{\varphi(\gamma)}{\psi(\gamma)} = \sum_s \frac{F_s}{\gamma - \gamma_s}, \quad (8.4.98)$$

$$\varphi(\gamma) = \sum_n \frac{a_{n0} A_{n0}^*}{\gamma + i\mu n}, \quad \psi(\gamma) = 1 - \frac{g}{2} \sum_m \frac{I_m}{\gamma + i\mu m}, \quad (8.4.99)$$

причем γ_s — корни уравнения (88) для инкрементов, которое можно написать как $\psi(\gamma_s) = 0$. Если умножить (98) на $(\gamma - \gamma_s)$ и перейти к пределу $\gamma \rightarrow \gamma_s$, то получим

$$F_s = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_s} (\gamma - \gamma_s) F(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_s} (\gamma - \gamma_s) \frac{\varphi(\gamma)}{\psi(\gamma) - \psi(\gamma_s)} = \frac{\varphi(\gamma_s)}{\psi'(\gamma_s)}, \quad (8.4.100)$$

где

$$\psi'(\gamma_s) = \left. \frac{\partial \psi(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma = \gamma_s} = \frac{g}{2} \sum_m \frac{I_m}{(\gamma_s + i\mu m)^2}. \quad (8.4.101)$$

Подставив теперь (98) в (97) и проинтегрировав по k , будем иметь

$$\begin{aligned} I(z) Q^*(z) &= \sum_n F_s \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{-ik + \gamma_s} dk = \\ &= \sum_s F_s e^{\gamma_s z} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{-ik} dk = I(z) \sum_s F_s e^{\gamma_s z}. \end{aligned} \quad (8.4.102)$$

Из сравнения (102) и (86) видно, что

$$R_s = F_s = \frac{\varphi(\gamma_s)}{\psi'(\gamma_s)} = \frac{\sum_n \frac{a_{n0} A_{n0}^*}{\gamma_s + i\mu n}}{g \sum_m \frac{I_m}{(\gamma_s + i\mu m)^2}}. \quad (8.4.103)$$

Из (92) и (102) также следует, что элементы матрицы, обратной (89), равны

$$\beta_{sn} = \frac{A_{n0}^*}{\gamma_s + i\mu n} \frac{1}{\psi'(\gamma_s)}.$$

Мы получили, таким образом, точное решение уравнений (84):

$$a_n(z) = \sum_s \alpha_{ns} \frac{\varphi(\gamma_s)}{\psi'(\gamma_s)} e^{\gamma_s z}. \quad (8.4.104)$$

Здесь α_{ns} , $\varphi(\gamma_s)$ и $\psi'(\gamma_s)$ определяются, соответственно, выражениями (89), (99) и (101); γ_s — корни уравнения (88), число которых равно, вообще говоря, числу мод накачки.

Если, например, интенсивность накачки мала:

$$\frac{1}{2} g I_s \ll |\mu|, \quad (8.4.105)$$

то из (88) находим

$$\gamma_s = \frac{1}{2} g I_s (1 + \delta_s) - i\mu s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8.4.106)$$

где $\delta_s = i\delta_{s1} + \delta_{s2}$ — малая комплексная поправка ($|\delta_s| \ll 1$), причем

$$\delta_{s1} = -\frac{g}{2\mu} \sum_{m \neq s} \frac{I_m}{m-s}, \quad \delta_{s2} = \left(\frac{g}{2\mu}\right)^2 I_s \sum_{m \neq s} \frac{I_m}{(m-s)^2}.$$

Чтобы выяснить смысл условия (105), будем считать, что интенсивности всех мод накачки одинаковы, а полное число мод равно $2N + 1$. Подставив в (105) $\Delta\omega_n = 2N\Omega$ и $I_{n0} = (2N + 1) I_s$, получим, учитывая (69) и (71),

$$I_{n0} \ll 2I_{кр},$$

т. е. инкременты (106) соответствуют некогерентному режиму. При этом

$$\alpha_{ns} \approx \alpha_{nn} = \frac{A_{n0}}{I_n}, \quad \varphi(\gamma_n) \approx \frac{2a_{n0} A_{n0}^*}{g I_n}, \quad \psi'(\gamma_n) \approx \frac{2}{g I_n}$$

и согласно (104)

$$a_n(z) \approx a_{n0} \exp\left(\frac{1}{2} g I_n - i\mu n\right) z. \quad (8.4.107)$$

Этот результат находится в соответствии с полученными другим методом выражениями (82) и говорит о том, что при $I_{n0} \ll I_{кр}$ в усилении каждой стоксовой моды принимает участие лишь одна, резонансная по отношению к ней, мода накачки.

Если переписать (88) в виде уравнения по степеням γ , то можно показать, что

$$\operatorname{Re} \gamma_s \geq 0, \quad \sum_s \gamma_s = \frac{1}{2} \Gamma_0, \quad (8.5.108a, б)$$

где $\Gamma_0 = g I_{n0} = g \sum_n I_n$ — инкремент (для интенсивности) при когерентном режиме. Непосредственно из (88) видно, что с ростом интенсивности накачки один из инкрементов — обозначим его γ_0 — растет и стремится к $\Gamma_0/2$. Это происходит при

$$\gamma_0 = \Gamma_0/2 \geq |\mu| n_{\max}. \quad (8.4.109)$$

Взяв опять накачку с одинаковыми интенсивностями мод, получим, что (109) эквивалентно условию $I_{n0} \gg I_{кр}$, т. е. соответствует когерентному режиму. Из (109) и (1086) следует, что при этом $\text{Re } \gamma_s \rightarrow 0$ ($s \neq 0$), т. е. в когерентном режиме усиление создается только за счет γ_0 . Учитывая это в (104), имеем

$$a_n(z) \approx \alpha_{n0} \frac{\varphi(\gamma_0)}{\psi'(\gamma_0)} e^{\gamma_0 z}, \quad \gamma_0 z \gg 1,$$

где

$$\alpha_{n0} = \frac{A_{n0}}{I_{n0}}, \quad \varphi(\gamma_0) \approx 2 \frac{\sum_m \alpha_{n0} A_{m0}^*}{g I_{n0}}, \quad \psi'(\gamma_0) \approx \frac{2}{g I_{n0}},$$

т. е.

$$a_n(z) \approx \frac{A_{n0}}{I_{n0}} \left(\sum_m \alpha_{m0} A_{m0}^* \right) e^{\Gamma_0 z/2}, \quad \Gamma_0 z/2 \gg 1.$$

Мы пришли к известному результату: при когерентном режиме усиление создается всеми модами накачки, так как $\Gamma_0 = g \sum I_n$.

Поскольку усиление при ВКР создается в основном за счет инкремента γ_0 (исключение составляет лишь некогерентный режим), то определение величины γ_0 во всем диапазоне изменения I_{n0} приобретает особый интерес. Эта задача упрощается, если спектр накачки симметричен ($I_{-n} = I_n$). Тогда (88) можно переписать:

$$1 = \frac{g I_0}{2\gamma} + g\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{\gamma^2 + m^2}. \quad (8.4.110)$$

При $I_0 \neq 0$ (110) имеет один вещественный корень $\gamma = \gamma_0$, величина которого меняется от $\gamma_0 = g I_0/2$ при слабой накачке (некогерентный режим) до $\gamma_{0, \max} = g \sum_n I_n/2 = \Gamma_0/2$ при сильной накачке (когерентный режим). Характер изменения γ_0 между этими крайними значениями зависит от формы спектра накачки (рис. 8.19, 8.20).

Таким образом, использование многомодовой модели позволяет дать полную картину ВКР в поле заданной шумовой накачки, детально проследить зависимость инкремента от ширины и даже формы спектра. Заметим, что точно к таким же результатам приводит и использование метода уравнений Дайсона для накачки со сплошным спектром [18, 64]. Сказанное лишним раз убеждает в плодотворности удачного выбора модели процесса.

Независимость коэффициента усиления от ширины спектра накачки в среде без дисперсии, впервые обнаруженная экспериментально в [67], была подтверждена в численных экспериментах [66], а также измерениями порога ВКР в водороде [68].

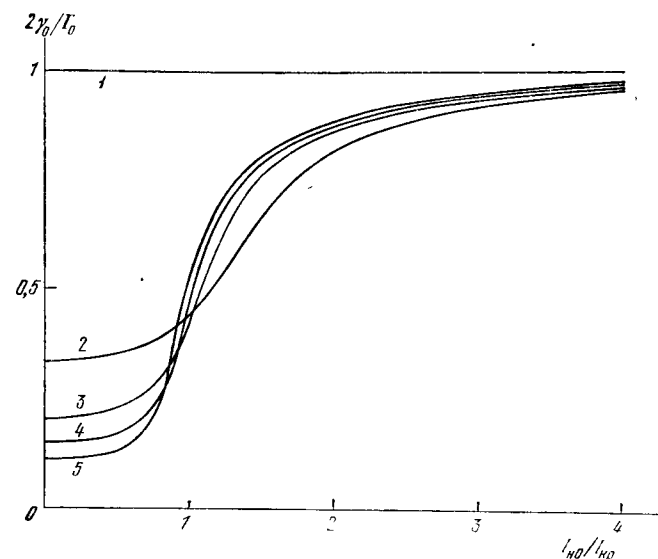


Рис. 8.19. Зависимость главного инкремента ВКР γ_0 от интенсивности многомодовой накачки, имеющей прямоугольный спектр.

$I_n = I_0$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$), $\bar{I}_{n0} = (1+2N)I_0$, $\Delta\omega_H = 2N\Omega$, $I_{кр} = 2N\nu\Omega/g$; значения N : 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

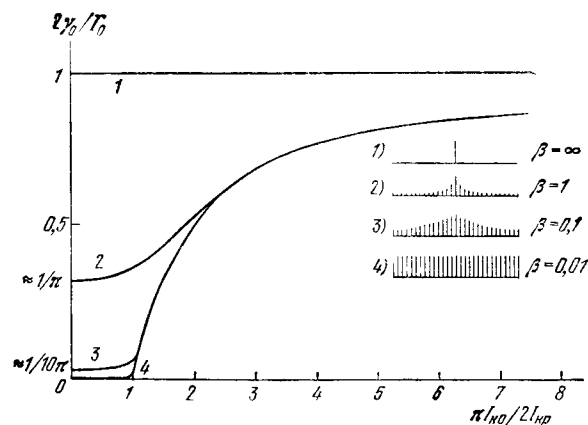


Рис. 8.20. Зависимость главного инкремента ВКР γ_0 от интенсивности многомодовой накачки, имеющей лоренцевский спектр.

$I_n = I_0 / (1 + \beta^2 n^2)$, $-\infty < n < \infty$; $\bar{I}_{n0} = f(\beta) I_0$, $\Delta\omega_H = f(\beta) \Omega$, $I_{кр} = f(\beta) \nu \Omega / g$. $f(\beta) = (\pi/\beta) \text{eth } \pi/\beta$. Кривым 1—4 соответствуют значения β , указанные на рисунке.

Как влияют поперечные корреляции накачки на процесс вынужденного рассеяния? Как преобразуются поперечные корреляции при вынужденном рассеянии? *) Эти вопросы стали особенно актуальными в самое последнее время в связи с работами по обращению волнового фронта. Сейчас еще преждевременно подводить какие-то итоги; интересующего читателя мы отсылаем к [65].

§ 5. Самовоздействие случайных волн. Самофокусировка и самомодуляция частично когерентных волн

В § 2 мы рассмотрели простейший случай самовоздействия плоской шумовой волны, связанного с нелинейностью коэффициента усиления лазерного усилителя. Фактически речь шла об эффекте, обусловленном мнимой частью кубической восприимчивости среды.

Широкий круг явлений обусловлен действительной частью кубической восприимчивости, т. е. зависимостью фазовой скорости от интенсивности волны. Для ограниченных световых пучков эта зависимость приводит к явлениям самофокусировки и самодефокусировки — за счет нелинейности распределение интенсивности по пучку влияет на поперечное распределение фазы [25 — 28]. В плоских амплитудно-модулированных волнах зависимость фазовой скорости от интенсивности приводит к эффекту фазовой самомодуляции световых волн — за счет нелинейности амплитудная модуляция трансформируется в фазовую (АМ — ФМ-конверсия).

На спектральном языке эффекты самофокусировки и самодефокусировки можно трактовать как нелинейные искажения частотного и углового спектров; при самофокусировке происходит сужение пучка, при самодефокусировке — расширение пучка. Эффекты самомодуляции приводят, очевидно, к уширению частотного спектра волны.

В настоящем параграфе мы рассмотрим особенности самофокусировки, самодефокусировки и самомодуляции случайных волн. Заметим сразу же, что, если задача о самомодуляции плоской шумовой волны в первом приближении теории дисперсии оказывается простой, задача о пространственном самовоздействии, особенно о самофокусировке, относится, пожалуй, к числу наиболее сложных задач статистической нелинейной оптики. Дело в том, что для самофокусировки принципиальным является учет дифракции. Поэтому в настоящем параграфе мы ограничимся лишь двумя задачами, для анализа которых будут сделаны довольно

*) Заметим, что данные о формировании поперечных корреляционных функций первой стоксовой компоненты вынужденного рассеяния можно найти в [63].

сильные предположения. Мы рассмотрим преобразование поперечной корреляционной функции случайных пучков в приосевом приближении, а также задачу о поведении слабых случайных возмущений интенсивной плоской волны в фокусирующей среде.

В квазистатистическом приближении нелинейная поляризация среды (8.1.8), ответственная за явление самовоздействия, имеет вид (ср. с (8.1.12))

$$P_i^{nl}(\omega) = \theta_{ijkl}(\omega, -\omega, \omega) E_j E_k^* E_l, \quad (8.5.1)$$

где E_j есть j -я компонента вектора электрического поля волны.

Полная поляризация среды на частоте ω равна

$$P(\omega) = P^l(\omega) + P^{nl}(\omega), \quad (8.5.2)$$

индукция электрического поля

$$D(\omega) = E(\omega) + 4\pi P(\omega) = \varepsilon(\omega) E(\omega), \quad (8.5.3)$$

где $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость среды.

Предположим, что для линейной поляризации $P^l(\omega)$ можно воспользоваться соотношением (ср. с (4.3.8)) $P^l(\omega) = \kappa(\omega) E(\omega)$; тогда в соответствии с (2) разложение диэлектрической проницаемости ε (3) по степеням поля имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E|^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |A|^2, \quad (8.5.4)$$

где A — комплексная амплитуда волны, ε_0 и ε_2 — линейная и нелинейная диэлектрические проницаемости среды, ε_2 определяется тензором θ_{ijkl} .

В общем случае параметры ε_0 и ε_2 представляют собой комплексные величины, мы же ограничимся рассмотрением случая, когда они являются действительными. Согласно (4) показатель преломления среды равен

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_2 |A|^2} \approx n_0 + n_2 |A|^2, \quad (8.5.5)$$

где $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$, $n_2 = n_0 \varepsilon_2 / 2\varepsilon_0$. Физические механизмы нелинейности ε_2 (или n_2) довольно разнообразны: электронная нелинейность, электрострикция, керр-эффект и т. п. Случай $\varepsilon_2 > 0$ соответствует так называемой фокусирующей среде, а $\varepsilon_2 < 0$ — дефокусирующей среде.

Решение уравнения (8.1.1) с нелинейной поляризацией (1) (с нелинейным показателем преломления (5)) ищем в виде

$$E(\mathbf{r}, t, z) = A(z, \mathbf{r}) e^{i(\omega t - k_0 z)}, \quad (8.5.6)$$

Пользуясь уравнением (8.1.23) и принимая во внимание соотношения (8.1.15), (4), (5), для амплитуды A получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp}\right) A = -i\beta |A|^2 A, \quad (8.5.7)$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n_0, \quad \beta = \frac{k_0 \epsilon_2}{2\epsilon_0}. \quad (8.5.8)$$

Уравнение (7) следует решать с граничным условием

$$A(r, z=0) = A_0(r),$$

где $A_0(r)$ представляет собой случайную функцию.

Прежде чем перейти к анализу уравнения (7) для частично когерентных пучков, рассмотрим явление самофокусировки качественно на примере полностью когерентных пучков.

Физика самофокусировки регулярных и случайно модулированных пучков; основные параметры. Элементарный анализ основных закономерностей явления самофокусировки можно провести, следуя работе Таунса и соавт. [27], в которой впервые был дан расчет самофокусировки когерентного светового пучка. Хотя этот анализ отнюдь не является строгим, но он наглядно характеризует физику явления и приводит к формулам, которые лишь коэффициентами отличаются от результатов последовательной теории.

Пусть в нелинейной среде с $\epsilon_2 > 0$ распространяется цилиндрический пучок радиуса a . Тогда в силу (5) вне пучка показатель преломления $n = n_0$, а внутри пучка

$$n' = n_0 + n_2 |A|^2. \quad (8.5.9)$$

Лучи, составляющие пучок, на границе его совершают переход из среды, оптически более плотной, в среду, оптически менее плотную. Следовательно, при углах падения φ , больших угла полного внутреннего отражения φ_0 ,

$$\sin \varphi_0 = \frac{n_0}{n'} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 |A|^2}, \quad (8.5.10)$$

лучи возвращаются внутрь пучка ($\varphi > \varphi_0$). Критический угол φ_0 соответствует лучу, наклон которого θ_0 к оси пучка равен (рис. 8.21)

$$\cos \theta_0 = \sin \varphi_0 = n_0 / (n_0 + n_2 |A|^2). \quad (8.5.11)$$

Лучи с углом $\theta > \theta_0$ ($\varphi < \varphi_0$) выходят наружу.

В пучке, фазовый фронт которого на входе в нелинейную среду плоский, максимальное значение угла θ_0 определяется дифракцией:

$$\theta_d = a / l_d^{(k)} = 2a / k_0 a^2 = \lambda / \pi n_0 a. \quad (8.5.12)$$

Относительный вклад нелинейной рефракции и дифракции в поведение пучка можно оценить, сравнивая углы θ_0 и θ_d . Можно выделить три случая.

1. При $\theta_0 < \theta_d$ пучок расплывается, однако темп этого расплывания меньше, чем в линейной среде.

2. При $\theta_0 = \theta_d$ нелинейная рефракция полностью компенсирует дифракционное расплывание, при этом размеры и форма пучка остаются неизменными при распространении. Пучок создает

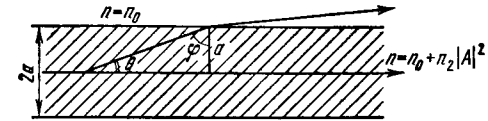


Рис. 8.21. К выводу формулы для критической мощности пучка $P_{кр}$ при самофокусировке в нелинейной среде.

для себя своеобразный оптический волновод, по которому распространяется без расходимости. Этот режим называют режимом самоканализации волнового пучка. Определим мощность, при которой он реализуется.

Для малых углов θ_0 выражение (11) можно представить в виде

$$1 - \theta_0^2/2 \approx n_0 / (n_0 + n_2 |A|^2).$$

Отсюда находим, что

$$\theta_0^2 \approx 2n_2 |A|^2 / n_0. \quad (8.5.13)$$

Из условия $\theta_0 = \theta_d$ определим критическую интенсивность пучка:

$$|A|_{кр}^2 = \frac{n_0}{n_2} \frac{\theta_d^2}{2}. \quad (8.5.14)$$

Критическая мощность самоканализирующегося пучка равна

$$P_{кpo} = \frac{cn_0}{8\pi} |A_{кр}|^2 \pi a^2 = \frac{\lambda^2 c}{16\pi^2 n_2}, \quad (8.5.15)$$

πa^2 — площадь поперечного сечения пучка. Видно, что $P_{кpo}$ зависит лишь от нелинейности среды n_2 и длины волны излучения.

3. При $\theta_0 > \theta_d$ (мощность пучка $P > P_{кpo}$) лучи отклоняются к оси пучка — происходит самофокусировка, нелинейная среда действует как положительная линза, эквивалентное фокусное расстояние которой нетрудно оценить. Пользуясь выражениями (12) и (14), равенство $\theta_0 = \theta_d$ можно представить как $l_d^{(k)} = l_{н.л.0}$, где введена длина самофокусировки

$$l_{н.л.0} = a \sqrt{n_0 / (2n_2 |A|^2)}. \quad (8.5.16)$$

Дифракционную расходимость можно трактовать как результат действия расфокусирующей линзы с фокусным расстоянием $l_d^{(k)}$. Тогда равенство $l_d^{(k)} = l_{нл0}$ соответствует обращению фокусного расстояния системы двух линз в бесконечность ($z_f^{-1} = l_{нл0}^{-1} - (l_d^{(k)})^{-1}$).

В пучках с мощностью $P \gg P_{кр}$ фокусное расстояние $z_f \approx l_{нл0}$, дифракционные эффекты почти не проявляются ($l_{нл0} \ll l_d^{(k)}$), а поведение пучка хорошо описывается приближением геометрической оптики.

Следует заметить, что к результатам (15) и (16) приводит также решение уравнения (7) для гауссовских пучков в квазиоптическом приближении [25].

Теперь воспользуемся изложенным здесь подходом для качественного анализа влияния неполной пространственной когерентности пучков на самофокусировку.

Для частично когерентных пучков, если $a \gg r_0$, «случайная» угловая расходимость определяется выражением (см. (4.2.35))

$$\theta_{сл} = 2/k_0 r_0 = \lambda/\pi r_0 n_0. \quad (8.5.17)$$

Для самоканализации рассматриваемого пучка следует потребовать выполнения условия $\theta_0 = \theta_{сл}$. Из этого равенства, проводя преобразования, подобные преобразованиям, примененным при выводе (15), получим значение критической мощности для самоканализации частично когерентного пучка:

$$P_{кp0}^{(нк)} = \frac{\lambda^2 c}{16\pi^2 n_2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 P_{кp0}. \quad (8.5.18)$$

Видно, что критическая мощность возрастает в $(a/r_0)^2$ раз. Интересно отметить, что во столько же раз уменьшается интенсивность в фокусе линзы при фокусировке частично когерентного пучка (см. формулу (4.5.87)).

Поперечная корреляционная функция самофокусирующихся случайных пучков. Предыдущее рассмотрение позволило оценить весьма важный параметр самофокусировки — его критическую мощность. Для более же полного анализа динамики самофокусировки случайно модулированных пучков необходимо исходить из уравнения (7).

Пользуясь обычной процедурой перехода от динамического уравнения к уравнению для корреляционной функции (см., например, § 5 гл. 4), в соответствии с (7) для поперечной корреляционной функции

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle \quad (8.5.19)$$

получаем уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} (\Delta_{11} - \Delta_{12}) \right] B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z) = -i\beta [\langle A_1^* A_1^* A_2^* \rangle - \langle A_2^* A_1 A_2 \rangle]. \quad (8.5.20)$$

Здесь введены обозначения

$$A_n = A(\mathbf{r}_n, z), \quad \Delta_{\perp n} = \partial^2/\partial x_n^2 + \partial^2/\partial y_n^2.$$

В правой части уравнения (20) фигурируют корреляционные функции поля четвертого порядка. Если записать уравнения для этих функций, то они оказываются зависящими от корреляционных функций поля шестого порядка, и т. д. Таким образом, в силу нелинейности уравнения (7) для корреляционных функций получается бесконечная цепочка связанных уравнений. Общепринятая методика приближенного решения подобной системы заключается в обрыве цепочки на основе определенных физических соображений.

Пусть на входе нелинейной среды случайное поле подчиняется гауссовской статистике, и предположим, что в нелинейной среде статистика поля слабо отличается от исходной. В связи с этим воспользуемся соотношениями (здесь $I = \langle I \rangle$)

$$\begin{aligned} \langle A_1^* A_1^* A_2^* \rangle &= 2I(\mathbf{r}_1, z) B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z), \\ \langle A_2 A_2^* A_1 \rangle &= 2I(\mathbf{r}_2, z) B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; z), \end{aligned} \quad (8.5.21)$$

строго выполняющимися лишь для гауссовских полей. В новых координатах $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ с учетом (21) уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{k_0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R} \partial \mathbf{r}} \right) B_{\perp}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z) = \\ = -i2\beta \left\{ I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, z\right) - I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, z\right) \right\} B_{\perp}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z). \end{aligned} \quad (8.5.22)$$

Предположим, что на границе линейной среды при $z=0$ корреляционная функция B_{\perp} определяется выражением (4.5.41б):

$$B_{\perp}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = I_0 \exp \left\{ -\frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - \frac{\mathbf{r}^2}{r_{эфф}^2} - i\alpha_0 \mathbf{R} \mathbf{r} \right\}, \quad (8.5.23)$$

где a — радиус пучка, r_0 — радиус корреляции и $r_{эфф}^2 = r_0^2 + (2a^2)^{-1}$. Решение уравнения (22) ищем в виде (4.5.42):

$$B_{\perp}(\mathbf{R}, \mathbf{r}, z) = I_0 f(z) \exp \left\{ -g(z) \frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - h(z) \frac{\mathbf{r}^2}{r_{эфф}^2} - i\alpha(z) \mathbf{R} \mathbf{r} \right\}. \quad (8.5.24)$$

Для приосевой части пучка ($R \ll a$) гауссовское распределение интенсивностей $I(\mathbf{R} \pm \mathbf{r}/2, z)$ можно заменить параболическим:

$$I(\mathbf{r}_{1,2}, z) = I_0 f(z) \exp \left\{ -g \frac{2r_{1,2}^2}{a^2} \right\} \approx I_0 f \left[1 - g \frac{2r_{1,2}^2}{a^2} \right].$$

При этом

$$I\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, z\right) - I\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, z\right) \approx -4fg I_0 \frac{\mathbf{R} \mathbf{r}}{a^2}. \quad (8.5.25)$$

Далее поступим так же, как в § 5 гл. 4: подставим (24) в уравнение (22), принимая во внимание (25). Приравнявая

нулю коэффициенты перед различными степенями $R^m r^n$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), получаем

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} = -\frac{2\alpha}{k_0}, \quad k_0 \alpha' = -\alpha^2 + \frac{8}{a^2 r_{\text{эфф}}^2} h g - \frac{8\beta k_0 I_0}{a^2} f g. \quad (8.5.26)$$

От системы (4.5.44) система (26) отличается тем, что в уравнении для функции α появился дополнительный член. Как и в линейной среде, имеют место равенства

$$f(z) \equiv g(z) \equiv h(z),$$

в силу которых указанные уравнения для α отличаются фактически лишь заменой

$$\frac{8}{a^2 r_{\text{эфф}}^2} \rightarrow \frac{8}{a^2 r_{\text{эфф}}^2} - \frac{8\beta k_0 I_0}{a^2}. \quad (8.5.27)$$

С учетом этого можно воспользоваться формулами § 5 гл. 4. В результате для функции $u^2 = f^{-1}$, определяющей изменение интенсивности и радиусов пучка $a(z)$ и корреляции r_k , имеем

$$u^2 = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 + (l_d)^{-2} - l_{\text{нл}}^{-2} \right] z^2 + 2 \left(\frac{\alpha_0}{k_0} \right) z + 1. \quad (8.5.28)$$

При этом

$$a(z) = u(z) a_0, \quad r_k = r_0 u(z), \quad l_d = \frac{1}{2\sqrt{2}} k_0 a r_{\text{эфф}}, \quad l_{\text{нл}} = a \left(\frac{k_0}{8\beta I_0} \right)^{1/2}. \quad (8.5.29)$$

Критическая мощность $P_{\text{кр}}^{(\text{нк})}$ для самофокусировки пучка определяется из условия $l_d = l_{\text{нл}}$, из которого получаем, что

$$P_{\text{кр}}^{(\text{нк})} = \frac{c n_0}{8\pi} (I_0)_{\text{кр}} \frac{\pi a^2}{2} = \frac{c n_0 \pi a^2}{8\pi} \frac{2\epsilon_0}{k_0^2 \epsilon_2 r_0^2} = N \frac{\lambda^2 c}{32\pi^2 n_2}, \quad (8.5.30)$$

где $N = a^2/2r_0^2$ — среднее число неоднородностей в пучке. При выводе (30) использованы соотношения (8) и (5). Для полностью когерентных пучков параметр $N = 1$. Для частично когерентных пучков критическая мощность самофокусировки возрастает, таким образом, в N раз.

Эволюция параметров пучка при самофокусировке показана на рис. 8.22. Если мощность пучка $P < P_{\text{кр}}$ ($l_d < l_{\text{нл}}$), то пучок ведет себя так же, как в линейной

среде. Дифракционное распыление лишь частично компенсируется эффектом самовоздействия (ср. (28) с (4.5.51)). При $P > P_{\text{кр}}$ ($l_d > l_{\text{нл}}$) на расстояниях, где $u^2(z) \rightarrow 0$, интенсивность в центре пучка $I(0, z) \rightarrow \infty$.

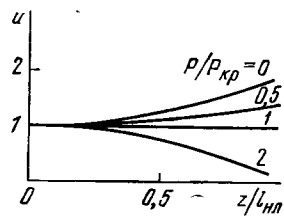


Рис. 8.22. Зависимость относительных радиусов пучка $a(z)/a_0 = u$ и корреляции $r_k(z)/r_0 = u$ частично когерентного пучка с $\alpha_0 = 0$ от приведенного расстояния $z/l_{\text{нл}}$ при самофокусировке для различных отношений мощностей $P/P_{\text{кр}}$.

В настоящем параграфе мы ограничились анализом самофокусировки частично когерентных пучков. Вместе с тем полученные формулы допускают рассмотрение и процесса самодефокусировки, если он может быть описан уравнением (7) с нелинейным коэффициентом $\beta < 0$ ($n_2 < 0$). С учетом этого вместо соотношения (28) имеем

$$u^2 = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k_0} \right)^2 + l_d^{-2} + l_{\text{нл}}^{-2} \right] z^2 + 2 \left(\frac{\alpha_0}{k_0} \right) z + 1, \quad (8.5.31)$$

где характерная длина $l_{\text{нл}}$ определяется формулой (29), в которой под коэффициентом β имеется в виду его модуль.

Из выражений (31) и (29) следует, что при самодефокусировке с ростом мощности частично когерентного пучка радиус корреляции и радиус пучка увеличиваются. Другими словами, нелинейная среда увеличивает эффективное дифракционное распыление пучка.

Неустойчивость плоской волны в фокусирующей среде; рассмотрение методом теории возмущений. При теоретическом анализе модели пучка со случайной поперечной структурой, рассмотренной в предыдущем разделе, пришлось сделать предположение о расцеплении высшей корреляционной функции, физическая оправданность которого не всегда ясна. Поэтому такой анализ не позволяет дать полную картину самофокусировки случайного пучка. В этом отношении представляют интерес другие модели, позволяющие анализировать физику самофокусировки случайных волн. К интересному результату приводит, в частности, исследование самовоздействия случайной волны, представляющей собой суперпозицию интенсивной регулярной плоской волны и слабой случайно модулированной волны. Анализ самовоздействия такого поля можно выполнить методом теории возмущений. Полученные таким образом результаты позволяют сделать определенное заключение о самофокусировке случайной волны: подчеркивание неоднородностей случайного поля [28, 29].

Итак, рассмотрим случай, когда комплексная амплитуда падающей на нелинейную среду волны равна

$$A(\mathbf{r}, z=0) = A_0 + \xi(\mathbf{r}), \quad \sqrt{\xi^2} \ll |A_0|, \quad (8.5.32)$$

где $\xi(\mathbf{r})$ — случайная функция. Распространение волны в нелинейной среде описывается уравнением (7), решение которого будем искать в виде

$$A(\mathbf{r}, z) = A(z) + \xi(\mathbf{r}, z). \quad (8.5.33)$$

Для амплитуды плоской волны имеем уравнение

$$\frac{dA}{dz} = -i\beta |A|^2 A,$$

согласно которому

$$A(z) = A_0 \exp\{-i\beta I_0 z\}, \quad I_0 = |A_0|^2. \quad (8.5.34)$$

Таким образом, вследствие самовоздействия фазовая скорость интенсивной волны отличается от таковой в линейной среде; появляющаяся добавка к волновому числу равна $\Delta^{nl} = \beta I_0$.

Поведение случайной модуляции волны в первом приближении подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} + i \frac{1}{z k_0} \Delta_{\perp} \xi = -i\beta I_0 [2\xi + \xi^* \exp\{-i2\Delta^{nl}z\}].$$

С помощью замены $\xi = \xi_1 \exp\{-i\Delta^{nl}z\}$ получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi_1 + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} \xi_1 = -i\beta I_0 [\xi_1 + \xi_1^*]. \quad (8.5.35)$$

Решение (35) ищем в виде разложения по плоским волнам (ср. с (4.7.30)):

$$\xi_1(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2\mathbf{k} = \int \xi_{k_x k_y} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y.$$

Для фурье-компонент $\xi_{\mathbf{k}}$ получаем

$$\xi_{\mathbf{k}}(z) = \left[\text{ch } \Gamma(\mathbf{k}) z - \frac{i}{\Gamma(\mathbf{k})} \left(\beta - \frac{\mathbf{k}^2}{2k_0^2} \right) \text{sh } \Gamma(\mathbf{k}) z \right] \xi_{\mathbf{k}}(0) - i \frac{\beta I_0}{\Gamma(\mathbf{k})} \text{sh } \Gamma(\mathbf{k}) z \xi_{\mathbf{k}}^*(0), \quad (8.5.36)$$

где $\xi_{\mathbf{k}}(0)$ — значения на входе нелинейной среды при $z=0$,

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{2k_0} (\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{k}^2)^{1/2}, \quad \mathbf{k}_0^2 = 4\beta k_0 I_0. \quad (8.5.37)$$

Предполагая случайный процесс $\xi(\mathbf{r}, z=0)$ изотропным и учитывая соотношения (1.8.5), (1.8.11), найдем угловое распределение, соответствующее (36):

$$G(\mathbf{k}, z) = \{1 + 2[\beta I_0 / \Gamma(\mathbf{k})]^2 \text{sh}^2 \Gamma(\mathbf{k}) z\} G_0(\mathbf{k}), \quad (8.5.38)$$

$G_0(\mathbf{k})$ — угловое распределение интенсивности на входе среды.

В фокусирующей среде угловые компоненты с $|\mathbf{k}| \leq k_0$ нарастают. При этом максимальный инкремент $\Gamma_{\max} = k_0^2 / 4k_0$ имеют угловые компоненты с $k_{\max}^{\pm} = \pm k_0 / \sqrt{2}$. На достаточно больших длинах z угловой спектр случайной волны становится двугорбым, сосредоточенным около значений k_{\max}^{\pm} с полушириной

$$\Delta k = [(k_0 k_0^2 / 2z) \ln 2]^{1/4},$$

которая уменьшается с ростом z . Таким образом, в случайной волне будут подчеркиваться неоднородности с поперечным размером

$$s_{\perp} \approx 1/k_{\max} = \sqrt{2}/k_0. \quad (8.5.39)$$

Расстояние, на котором этот эффект становится заметным, равно

$$l_{н.з.} \approx \Gamma_{\max}^{-1} = 4k_0 k_0^{-2} = (\beta I_0)^{-1}. \quad (8.5.40)$$

В дефокусирующей среде нарастающие угловые компоненты случайной волны сосредоточены около компоненты $\mathbf{k}=0$, которая, согласно (38), растет пропорционально z^2 . Полуширина спектра при этом равна

$$\Delta k = 2^{-1/2} \{[k_0^4 + (1,39k_0/z)^2]^{1/2} - k_0^2\}^{1/2} \quad (8.5.41)$$

и стремится к нулю при увеличении z . Таким образом, в дефокусирующей среде подчеркивается медленная модуляция.

В заключение следует отметить, что рассмотренный в фокусирующей среде эффект — нарастание возмущений плоской волны — может быть весьма важен для лазеров, где он приводит к мелко-масштабному разбиению лазерных пучков (см., например, [30, 31]).

Самомодуляция плоских шумовых волн. Как уже указывалось, распространение амплитудно-модулированной волны в среде с кубической нелинейностью приводит к амплитудно-фазовой конверсии и связанному с этим уширению спектра.

Каковы особенности этого процесса для шумовой волны? Мы рассмотрим данный вопрос в первом приближении теории дисперсии [34, 35]. В этом приближении эффект самомодуляции для случая плоской шумовой волны описывается уравнением (ср. с (8.2.3) и (7))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} = -i\beta A^* A^2, \quad (8.5.42)$$

где u — групповая скорость волны. Решение этого уравнения с граничным условием $A(t, z=0) = A_0(t)$ имеет вид

$$A(t, z) = A_0(t - z/u) \exp\{-i\beta |A_0(t - z/u)|^2 z\}. \quad (8.5.43)$$

Из (43) следует, что за счет нелинейности возникает случайная фазовая модуляция $\beta |A_0(t - z/u)|^2 z$. Для расчета временной корреляционной функции процесса (43) перейдем от комплексной амплитуды к огибающей и фазе ($A = \rho \exp i\varphi$). Тогда получим

$$B(\tau, z) = \langle \rho_0 \rho_{0\tau} \exp\{i[\beta z (\rho_{0\tau}^2 - \rho_0^2) + \varphi_0 - \varphi_{0\tau}]\} \rangle, \quad (8.5.44)$$

где $\rho_0 = \rho_0(t - z/u)$, $\rho_{0\tau} = \rho_0(t + \tau - z/u)$.

Предположим, что падающая на нелинейную среду волна представляет собой стационарный случайный гауссовский процесс. Четырехмерная функция распределения такого процесса $w(\rho_0, \rho_{0\tau}; \varphi_0, \varphi_{0\tau})$ дается формулой (8.3.6). Расчеты, связанные с нахождением корреляционной функции (44), аналогичны расчетам, проделанным при получении (8.3.15). Пользуясь функцией распределения (8.3.6) и интегрируя (44) по фазам, приходим к

выражению (ср. с (8.3.14))

$$B(\tau; z) = \frac{2\sigma^2}{1 - b_0^2(\tau)} \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^2 x_2^2 I_1[(D + D^*) b_0(\tau) x_1 x_2] \times \\ \times \exp\{-Dx_1^2 - D^*x_2^2\} dx_1 dx_2, \quad (8.5.45)$$

где $x_1 = \frac{\rho_0}{\sigma}$, $x_2 = \frac{\rho_0 \tau}{\sigma}$, $D = i\beta\sigma^2 z + \frac{1}{1 - b_0^2(\tau)}$, $b_0(\tau)$ — нормированная корреляционная функция случайного процесса на входе нелинейной среды. Проинтегрируем (45), тогда для нормированной корреляционной функции в среде получим

$$b(\tau, z) = \frac{B(\tau, z)}{B(0, z)} = \frac{b_0(\tau)}{[1 + (\beta\sigma^2 z)^2 (1 - b_0^2(\tau))^2]^{1/2}}. \quad (8.5.46)$$

Время корреляции τ_k шумовой волны в нелинейной среде удовлетворяет соотношению

$$1 + (\beta\sigma^2 z)^2 (1 - b_0^2(\tau_k))^2 = [2b_0(\tau_k)]^{1/2}. \quad (8.5.47)$$

Для наиболее интересного случая $\beta\sigma^2 z \gg 1$ из (47) имеем

$$b_0^2(\tau_k) = 1 - (\sqrt{2} - 1)^{1/2} (\beta\sigma^2 z)^{-1}.$$

Для определенности возьмем $b_0(\tau)$ в виде (8.3.22) и обозначим время корреляции исходной волны через τ_0 :

$$b_0(\tau) = \exp\{-4 \ln 2 (\tau/\tau_0)^2\}.$$

В этом случае значение τ_k равно

$$\tau_k = (\sqrt{2} - 1)^{1/4} (8\beta\sigma^2 z \ln 2)^{-1/2} \tau_0. \quad (8.5.48)$$

Таким образом, время корреляции уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из интенсивности волны $\sigma^2 = I_0$ и пройденного расстояния z . Соответственно ширина спектра волны увеличивается с ростом интенсивности и расстояния z . Заметим, что, в соответствии с выводами § 6 гл. 7, полученный результат можно использовать для интерпретации экспериментов, проводимых с многомодовыми лазерами.

Для анализа явления самомодуляции во втором приближении теории дисперсии можно применить метод, изложенный в начале данного параграфа, т. е. произвести расчет временной корреляционной функции, предполагая, что статистика шумовой волны в нелинейной среде остается гауссовской. Подобные расчеты для гауссовского шума были выполнены авторами работ [32, 33].

§ 6. Статистика акустических волн в нелинейной среде

Задачи статистической нелинейной акустики, рассматриваемые в этом параграфе, существенно отличаются от задач нелинейной оптики как по своей постановке, так и по методам их решения.

Физической причиной, лежащей в основе такого различия, является факт почти полного отсутствия дисперсии скорости звука в широком диапазоне частот [45—47]. Поэтому, даже если на входе в нелинейную среду задан узкополосный случайный процесс, в среде будет происходить синхронная генерация не только второй или третьей, но одновременно многих гармоник (их количество определяется величиной так называемого акустического числа Рейнольдса и в экспериментах может достигать нескольких десятков). Еще более сложная ситуация возникает при наличии источников интенсивного широкополосного шума, примерами которых могут служить реактивные двигатели, электрические разряды, взрывные устройства и др. Акустическая нелинейность приводит к весьма сложным процессам эволюции широких сплошных спектров [59, 60], которые, очевидно, в принципе нельзя описать конечным числом укороченных уравнений для комплексных амплитуд различных спектральных компонент.

Поэтому при изучении волновых взаимодействий в акустике используется другой подход. Он основан на предположении о медленности изменения формы бегущей звуковой волны с расстоянием при ее распространении в нелинейной среде [46, 47].

Рассмотрим уравнения динамики для сплошных идеальных (не обладающих вязкостью и теплопроводностью) сред. Система состоит из уравнения движения в форме Эйлера

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (8.6.1a)$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{u} = 0 \quad (8.6.1b)$$

и адиабатического уравнения состояния

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma. \quad (8.6.1в)$$

Здесь $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность среды, $p(\mathbf{r}, t)$ — давление, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — колебательная скорость возмущения. Для газов $\gamma = c_p/c_v$ (отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме), для конденсированных сред γ и равновесное внутреннее давление p_0 — эмпирические постоянные; ρ_0 — равновесное значение плотности среды.

При распространении даже очень интенсивных акустических сигналов отклонения плотности $\rho' = \rho - \rho_0$ и давления $p' = p - p_0$ в волне от своих равновесных значений малы. Малым является и отношение колебательной скорости u к скорости звука $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ — так называемое число Маха M ; его обычное экспериментальное значение $M \sim 10^{-4} - 10^{-2}$. Пользуясь тем, что

$$\rho'/\rho_0 \sim p'/p_0 \sim u/c_0 = M \sim \mu,$$

где μ — малый параметр, систему (1) можно упростить, сохранив в ней только линейные (по переменным ρ' , p' , u) и квадратично-нелинейные члены. Система (1) в одномерном случае примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial z} = -\rho' \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (8.6.2a)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} (\rho' u), \quad (8.6.2б)$$

$$\rho' = c_0^2 \rho_0' + \frac{\gamma-1}{2\rho_0} c_0^2 \rho_0'^2. \quad (8.6.2в)$$

Пользуясь стандартным подходом теории нелинейных недиспергирующих волн — методом медленно изменяющегося профиля, т. е. полагая

$$u = u(\eta = t - z/c_0, \mu z), \quad (8.6.3)$$

можно свести систему (2) к уравнению простых волн

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (8.6.4)$$

Здесь $\alpha = (\gamma + 1)/2c_0^2$, η — время в системе координат, движущейся вместе с волной («сопровождающая координата»). Решение уравнения (4), соответствующее произвольному движению границы $z = 0$ во времени

$$u(t, z = 0) = f(t), \quad (8.6.5)$$

имеет вид

$$u(\eta, z) = f(\eta + \alpha \mu z). \quad (8.6.6)$$

Для вязкой теплопроводящей среды аналогичный подход приводит к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (8.6.7)$$

Здесь коэффициент

$$\beta = b/2c_0^2 \rho_0 \quad (8.6.8)$$

описывает линейное затухание звука — высокочастотные потери в среде. Отношение нелинейного и диссипативного членов в уравнении (7) образует важный параметр подобия — акустическое число Рейнольдса:

$$\frac{\alpha u \partial u / \partial \eta}{\beta \partial^2 u / \partial \eta^2} \sim \text{Re} = \frac{c_0 \rho_0 A_0}{b \omega_0} \quad (8.6.9)$$

(где A_0 , ω_0 — амплитуда и частота исходного сигнала), от величины которого зависит протекание нелинейных процессов в среде. При $\text{Re} \gg 1$ нелинейные эффекты выражены сильно, возмущение среды искажается вплоть до образования крутых участков — ударных волн. При $\text{Re} \ll 1$ нелинейность выражена слабо и преобладают диссипативные процессы.

Распространение гармонических волн

$$f(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.6.10)$$

в соответствии с (7) для $\text{Re} \gg 1$ разбивается на следующие этапы:

1) искажение формы профиля волны, которое происходит по законам простой волны;

2) образование в волне разрывов и стабилизация профиля волны в результате конкуренции нелинейных и диссипативных эффектов, а также уменьшение амплитуды волны из-за нелинейных потерь;

3) вновь превращение волны в гармоническую волну, но с малой амплитудой, и распространение ее по законам линейной акустики.

На первом этапе распространения разложение решения (6) в спектр для случая первоначальной синусоидальной волны (10) приводит к формуле Бесселя — Фубини:

$$u = 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(n\zeta)/(n\zeta)] \sin n\omega_0 \eta, \quad (8.6.11)$$

где $\zeta = \alpha \omega_0 A_0 z$, или $\zeta = z/z_p$, z_p — длина образования разрыва:

$$z_p = (\alpha \omega_0 A_0)^{-1}. \quad (8.6.12)$$

Формула (11) справедлива на расстояниях $z \leq z_p$. В дальнейшем мы воспользуемся (11) для сравнения распространения регулярных и шумовых волн.

Случайные простые волны; усреднение риманова решения. Пусть на входе нелинейной среды при $z = 0$ задано случайное волновое поле $\xi(t)$, т. е. теперь в нелинейной среде вместо (6) имеем

$$u(\eta, z) = \xi(\eta + \alpha z u(\eta, z)). \quad (8.6.13)$$

Определить статистические характеристики функции $u(\eta, z)$, исходя непосредственно из неявного решения (13), не удастся. Поэтому выражение (13) следует преобразовать к явной форме, т. е. $u(\eta, z)$ представить как некую функцию от $\xi(\eta)$.

Пользуясь свойством δ -функции, запишем тождество

$$u(\eta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\eta', z) e^{i\omega(\eta - \eta')} d\omega d\eta'. \quad (8.6.14)$$

Принимая во внимание (13), получим

$$u(\eta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\eta' + \alpha z u(\eta', z)) e^{i\omega(\eta - \eta')} d\omega d\eta'. \quad (8.6.15)$$

Произведем замену переменной η' :

$$\eta' = \theta - \alpha z \xi(\theta), \quad (8.6.16)$$

тогда

$$\begin{aligned} u(\eta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) e^{i\omega[\eta - \theta + \alpha z \xi(\theta)]} [1 - \alpha z \xi(\theta)] d\theta d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \xi(\theta) e^{i\omega\eta} d\omega d\theta e^{-i\omega[\theta - \alpha z \xi(\theta)]}. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям последнего выражения дает

$$u(\eta, z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \dot{\xi}(\theta) e^{i\omega[\eta - \theta + \alpha z \xi(\theta)]} d\omega d\theta. \quad (8.6.17)$$

Выражение (17) можно еще упростить, представив его в виде

$$u(\eta, z) = \frac{1}{2\pi\alpha z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-2} \hat{L}(\theta, \omega) e^{i\omega[\eta - \theta + \alpha z \xi(\theta)]} d\theta d\omega, \quad (8.6.18)$$

где введен дифференциальный оператор

$$\hat{L}(\theta, \omega) = \frac{d}{d\theta} + i\omega. \quad (8.6.19)$$

Из (18) видно, что процесс нелинейного распространения акустических волн является инерционным: значение случайного поля $u(\eta, z)$ в момент времени η определяется значениями ξ , взятыми в предшествующие и последующие моменты времени. Полученная формула (18) удобна для расчета статистических характеристик процесса $u(\eta, z)$, так как она сводит нахождение его моментов и корреляционных функций к расчету характеристик исходного процесса $\xi(\theta)$ [48].

Вычислим корреляционную функцию процесса $u(\eta, z)$:

$$B(\tau, z) = \langle u(\eta + \tau, z) u(\eta, z) \rangle, \quad (8.6.20a)$$

или с учетом (18)

$$\begin{aligned} B(\tau, z) &= (2\pi\alpha z)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^{-2} \omega_2^{-2} \hat{L}(\theta_2, \omega_2) \hat{L}^*(\theta_1, \omega_1) \times \\ &\times \exp i[\omega_2\eta - \omega_1(\eta + \tau) - \omega_2\theta_2 + \omega_1\theta_1] \times \\ &\times C(\omega_2, -\omega_1) d\omega_2 d\omega_1 d\theta_2 d\theta_1. \end{aligned} \quad (8.6.20b)$$

Здесь через C обозначена двумерная характеристическая функция процесса $\xi(\eta)$:

$$C(\omega_2, -\omega_1) = \langle \exp i\alpha z [\omega_2 \xi(\theta_2) - \omega_1 \xi(\theta_1)] \rangle. \quad (8.6.21)$$

Будем считать, что $\xi(\eta)$ — стационарный случайный гауссовский процесс с нулевым средним значением ($\xi=0$) и корреляционной функцией

$$\langle \xi(\eta + \tau) \xi(\tau) \rangle = \sigma^2 R(\tau), \quad (8.6.22)$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции, σ^2 — интенсивность флуктуаций. Заметим, что, строго говоря, интенсивностью акустической волны является величина $\rho_0 c_0 \sigma^2$. Для стационарного гауссовского случайного процесса характеристическая функция (21) равна

$$C(\omega_2, -\omega_1) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha z)^2 [\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega_2\omega_1 R(\theta_2 - \theta_1)] \right\}. \quad (8.6.23)$$

Подставляя (23) в выражение (20b), получим

$$\begin{aligned} B(\tau, z) &= \\ &= (2\pi\alpha z)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_2\omega_1)^{-2} \exp \left\{ i[\omega_2\eta - \omega_1(\eta + \tau)] - \frac{1}{2} \kappa^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right\} \times \\ &\times F(\omega_2, \omega_1, \theta_2, \theta_1) d\omega_1 d\omega_2 d\theta_2 d\theta_1, \end{aligned} \quad (8.6.24)$$

где введены обозначения $\alpha z = \kappa$ и

$$\begin{aligned} F(\omega_2, \omega_1, \theta_2, \theta_1) &= \left[\omega_2\omega_1 + i\omega_2 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - i\omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta_1} \right] e^{g(\theta_2, \theta_1)}, \\ g(\theta_2, \theta_1) &= \kappa^2 \omega_2 \omega_1 R(\theta_2 - \theta_1) - i\omega_2 \theta_2 + i\omega_1 \theta_1. \end{aligned} \quad (8.6.25)$$

Расчет производных в (25) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta_1} e^{g(\theta_2, \theta_1)} &= \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} R(\theta_2 - \theta_1) + i\omega_1 \right] e^{g(\theta_2, \theta_1)}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta_2} e^{g(\theta_2, \theta_1)} &= \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_2} R(\theta_2 - \theta_1) - i\omega_2 \right] e^{g(\theta_2, \theta_1)}, \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta_2} e^{g(\theta_2, \theta_1)} &= \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left\{ \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} R(\theta_2 - \theta_1) + i\omega_1 \right] e^{g(\theta_2, \theta_1)} \right\} = \\ &= \left\{ \kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta_1} R(\theta_2 - \theta_1) + \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} R(\theta_2 - \theta_1) + i\omega_1 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_2} R(\theta_2 - \theta_1) - i\omega_2 \right] \right\} e^{g(\theta_2, \theta_1)}. \end{aligned}$$

В результате для функции (25) имеем выражение

$$\begin{aligned} F &= \left[\kappa^2 \omega_2 \omega_1 \frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta_1} R(\theta_2 - \theta_1) + (\kappa^2 \omega_2 \omega_1)^2 \frac{\partial R}{\partial\theta_2} \frac{\partial R}{\partial\theta_1} \right] e^{g(\theta_2, \theta_1)} = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta_1} e^{\kappa^2 \omega_2 \omega_1 R(\theta_2 - \theta_1)} \right] e^{-i\omega_2 \theta_2 + i\omega_1 \theta_1}. \end{aligned} \quad (8.6.26)$$

Таким образом, для корреляционной функции (24) получаем

выражение

$$B(\tau; z) = \sigma^2 (2\pi\kappa)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_2 \omega_1)^{-2} \times \\ \times \exp \left\{ i\omega_2 \eta - i\omega_1 (\eta + \tau) - i\omega_2 \theta_2 + i\omega_1 \theta_1 - \frac{1}{2} \kappa^2 (\omega_2^2 + \omega_1^2) \right\} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} e^{\kappa^2 \omega_2 \omega_1 R(\theta_2 - \theta_1)} d\theta_2 d\theta_1 d\omega_2 d\omega_1. \quad (8.6.27)$$

Проведем упрощения в (27), интегрируя по времени:

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 \theta_2 + i\omega_1 \theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} [e^{\kappa^2 \omega_2 \omega_1 R(\theta_2 - \theta_1)} - 1] d\theta_2 d\theta_1 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2 \omega_1 [e^{\kappa^2 \omega_2 \omega_1 R(\theta_2 - \theta_1)} - 1] e^{-i\omega_2 \theta_2 + i\omega_1 \theta_1} d\theta_2 d\theta_1. \quad (8.6.28)$$

Переходя в (28) к новым переменным

$$\theta = \theta_2 - \theta_1, \quad \theta_0 = (\theta_2 + \theta_1)/2$$

и учитывая, что интегрирование по θ_0 дает δ -функцию, для интеграла (28) получим

$$K_1 = \omega_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(\kappa \omega_2)^2 R(\theta)} - 1] e^{-i\omega_2 \theta} \delta(\omega_1 - \omega_2) d\theta. \quad (8.6.29)$$

Тогда выражение (27) принимает вид

$$B(\tau, z) = \\ = \frac{\sigma^2}{2\pi\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2} e^{-\kappa^2 \omega^2 + i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\theta} [e^{(\kappa\omega)^2 R(\theta)} - 1] d\theta. \quad (8.6.30)$$

Отсюда следует, что спектральная плотность случайного процесса определяется выражением [48, 49]

$$G(\omega, z) = \frac{\sigma^2}{2\pi(\kappa\omega)^2} e^{-(\kappa\omega)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(\kappa\omega)^2 R(\theta)} - 1] e^{-i\omega\theta} d\theta = \\ = \sigma^2 \frac{e^{-(\kappa\omega)^2}}{\pi(\kappa\omega)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(\kappa\omega)^2 R(\theta)} - 1] \cos \omega\theta d\theta. \quad (8.6.31)$$

В некоторых случаях более удобной может быть другая форма записи выражения (31), которая получается в результате интегрирования (31) по частям:

$$G(\omega, z) = -\frac{\sigma^2}{\pi\omega} e^{-(\kappa\omega)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(\theta) e^{(\kappa\omega)^2 R(\theta)} \sin \omega\theta d\theta. \quad (8.6.32)$$

Выражения (31) и (32) позволяют проследить за искажением спектра исходной волны с произвольной формой и шириной.

Пользуясь формулой (32), преобразуем выражение (30) для корреляционной функции:

$$B(\tau, z) = -i\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\omega} \dot{R}(\theta) e^{-\omega^2 p^2(\theta) - i(\theta - \tau)\omega} d\omega d\theta, \quad (8.6.33)$$

где $p^2(\theta) = \kappa^2 [1 - R(\theta)]$. Заменим в (33) $e^{-i(\theta - \tau)\omega}$ на $e^{-iq(\theta - \tau)\omega}$, тогда

$$\frac{dB(\tau, z, q)}{dq} = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \tau) \frac{1}{2\pi} \dot{R}(\theta) e^{-\omega^2 p^2(\theta) - iq(\theta - \tau)\omega} d\theta d\omega = \\ = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_{\pi}(\theta - \tau)}{2\pi p(\theta)} \dot{R}(\theta) e^{-q^2(\theta - \tau)^2/4p^2(\theta)} d\theta.$$

Интегрируя по q , а затем полагая $q = 1$, находим

$$B(\tau, z) = -\frac{1}{2} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{R}(\theta) \Phi \left[\frac{\theta - \tau}{2\kappa \sqrt{1 - R(\theta)}} \right] d\theta, \quad (8.6.34)$$

где $\Phi(x)$ — функция ошибок.

Интенсивность случайного процесса в нелинейной среде, очевидно, равна

$$I(z) = -\sigma^2 \int_0^{\infty} \dot{R}(\theta) \Phi \left[\frac{\theta}{2\kappa \sqrt{1 - R(\theta)}} \right] d\theta. \quad (8.6.35)$$

Для широкополосного исходного шума, используя приближение $1 - R(\theta) = \dot{R}(0) \theta^2/2$, можно принять

$$\Phi \left[\frac{\theta}{2\kappa \sqrt{1 - R(\theta)}} \right] \approx \Phi \left[\frac{1}{\kappa \sqrt{2\dot{R}(0)}} \right].$$

В рассматриваемом случае интенсивность (35) оказывается равной

$$I(z) \approx \sigma^2 \Phi \left[(2\kappa |\dot{R}(0)|)^{-1/2} \right]. \quad (8.6.36)$$

Величина $|\dot{R}(0)| \approx \Delta\omega^2$ ($\Delta\omega$ — ширина исходного спектра), и, следовательно, значение (36) определяется параметром $\kappa\Delta\omega = \alpha\sigma z \Delta\omega$. При $\kappa\Delta\omega < 1$ (условие применимости полученных результатов) интенсивность шума в нелинейной среде уменьшается как

$$I(z) \approx \sigma^2 (1 - 2\pi^{1/2} \kappa \Delta\omega \exp \{ -(2\kappa \Delta\omega)^{-1} \}). \quad (8.6.37)$$

В качестве примера применения полученных общих формул рассмотрим случай первоначально квазимонохроматической волны,

т. е. когда коэффициент корреляции равен

$$R(\tau) = b(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

ω_0 — средняя частота спектра, $b(\tau)$ — медленно меняющаяся функция на периоде $2\pi/\omega_0$. В данном случае удобна формула (31). При этом воспользуемся разложением

$$\exp\{(\kappa\omega)^2 b(\theta) \cos \omega_0 \theta\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n[\kappa^2 \omega^2 b(\theta)] \cos n\omega_0 \theta, \quad (8.6.38)$$

где $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$. Тогда формула (31) для спектра принимает вид

$$G(\omega, z) = \sigma^2 \frac{e^{-(\kappa\omega)^2}}{\pi(\kappa\omega)^2} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n[\kappa^2 \omega^2 b(\theta)] \cos n\omega_0 \theta - 1 \right\} \cos \omega \theta d\theta. \quad (8.6.39)$$

В области низких частот ($n=0$) спектр определяется выражением

$$G_{нч}(\omega, z) = \sigma^2 \frac{e^{-(\kappa\omega)^2}}{\pi(\kappa\omega)^2} \int_0^{\infty} \{I_0[\kappa^2 \omega^2 b(\theta)] - 1\} \cos \omega \theta d\theta. \quad (8.6.40)$$

Остальные члены в (39) определяют спектральную плотность на возбуждаемой частоте ω_0 и ее гармониках $n\omega_0$, т. е.

$$G(\omega, z) = G_{нч}(\omega, z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\omega, z), \quad (8.6.41)$$

$$G_n(\omega, z) = \frac{2e^{-(\kappa\omega)^2}}{\pi(\kappa\omega)^2} \sigma^2 \int_0^{\infty} I_n[\kappa^2 \omega^2 b(\theta)] \cos n\omega_0 \theta \cos \omega \theta d\theta.$$

Принимая во внимание узкополосность исходной волны, спектр на n -й гармонике можно представить в виде

$$G_n(\omega, z) = \frac{2e^{-\kappa(\omega_0)^2}}{\pi(\kappa\omega_0)^2} \int_0^{\infty} I_n[\kappa^2 \omega_0^2 b(\theta)] \cos n\omega_0 \theta \cos \omega \theta d\theta. \quad (8.6.42)$$

Поскольку спектральная плотность

$$G_n(\omega, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_n(\theta, z) \cos \omega \theta d\theta,$$

корреляционная функция n -й гармоники равна

$$B_n(\tau, z) = 2 \frac{\sigma^2 e^{-\kappa(\omega_0)^2}}{(\kappa\omega_0)^2} I_n[\kappa^2 \omega_0^2 b(\tau)] \cos n\omega_0 \tau. \quad (8.6.43)$$

Интенсивность шумовых гармоник определяется выражением

$$I_n(z) = 2\sigma^2 \frac{e^{-(\kappa\omega_0)^2}}{(\kappa\omega_0)^2} I_n[\kappa^2 \omega_0^2 b]. \quad (8.6.44)$$

На рис. 8.23 показана зависимость интенсивности шумовых и монохроматических гармоник от расстояния z вплоть до длин образования разрыва z_p в монохроматической волне; интенсивности первоначальных волн предполагались одинаковыми. Видно, что истощение основной шумовой волны происходит быстрее, чем монохроматической волны. На длинах $z < z_p$ возбуждаемые гармоники шума имеют большую интенсивность по сравнению с монохроматическими гармониками.

Согласно выражениям (44) и (11) отношение интенсивности n -й гармоники шума к интенсивности монохроматической гармоники при равных возбуждаемых интенсивностях ($\sigma^2 = A_0^2/2 = I_0$) определяется выражением

$$\eta_n = \frac{I_n(z)}{I_n^{\text{МОН}}(z)} = \frac{2e^{-(\alpha\omega_0 z)^2} I_n[(\alpha\omega_0 z)^2 I_0] (\alpha\omega_0 z)^2}{(\alpha\omega_0 z)^2 J_n^2(\alpha\omega_0 z \sqrt{2I_0})}. \quad (8.6.45)$$

На малых расстояниях ($(\alpha\omega_0 z)^2 I_0 < 1$), пользуясь разложением функций Бесселя, имеем $\eta_n \approx n!$, т. е. генерация шумовых гармоник в $n!$ раз эффективнее, чем монохроматических гармоник. Напомним, что подобное явление имеет место при генерации шумовых оптических гармоник в приближении заданного поля (см. § 3).

Обсудим кратко условия применимости полученных результатов. Для монохроматической волны уравнение простых волн (7) справедливо до расстояний $z < z_p$. Когда же речь идет о нелинейном распространении шума, в интенсивных выбросах (амплитуда больше среднего значения A) разрывы образуются на расстояниях, меньших z_p . Однако уменьшение амплитуды разрыва нельзя описывать уравнением простой волны. Поэтому условие применимости приведенных результатов можно определить, задавая вероятность разрывных выбросов. Возможно использование другого, энергетического способа. Он заключается в сравнении

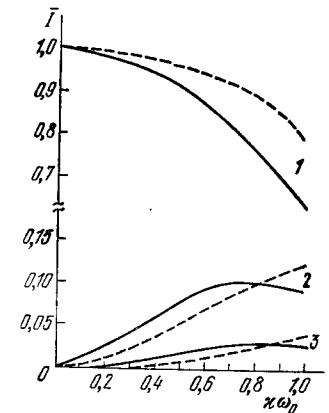


Рис. 8.23. Зависимость интенсивности первой (1), второй (2) и третьей (3) гармоники в недиспергирующей нелинейной среде от приведенного расстояния $\omega_0 z$ ($\kappa = \alpha\sigma z$) при одинаковых интенсивностях I_0 исходных волн.

Узкополосной шумовой волне соответствуют сплошные кривые, монохроматической волне — пунктирные.

с данными анализа, корректно учитывающего затухание выбросов после образования в них разрывов. Подобное сравнение с результатами численного расчета, выполненного в [50], показало, что для квазимонохроматических возмущений уравнением простых волн можно пользоваться вплоть до расстояний $z \approx 0,7z_p$.

Здесь мы ограничились рассмотрением случая исходной волны с гауссовской статистикой. Однако условие квазимонохроматичности исходного возмущения допускает анализ и для негауссовской статистики [52].

В настоящем разделе рассмотрено только поведение шумовых гармоник. В ряде случаев практический интерес представляет низкочастотная шумовая компонента, возникающая в результате эффекта детектирования в акустически нелинейной среде. Поведение низкочастотной компоненты для различных чисел Рейнольдса проанализировано, например, в [53—56].

Перейдем теперь к рассмотрению статистики шумовых волн в нелинейной среде.

Функция распределения шумовых волн. В общем случае для произвольных чисел Рейнольдса задача о нахождении функции распределения шумовых волн в нелинейной среде до сих пор не решена. Такую задачу можно решить для исходных квазимонохроматических волн и чисел $Re \rightarrow \infty$, пользуясь свойством эргодичности стационарных случайных процессов и тем обстоятельством, что в этом случае искажение волны на втором этапе (этапе образования разрыва и стабилизации его профиля) удобно описывать в параметрической форме (см. ниже (49)). Такой способ расчета функции распределения шумовых волн впервые предложен в работе [51], которой мы в основном будем следовать.

В соответствии с выражением (13) распространение исходной квазимонохроматической волны

$$u(\eta, z=0) = \xi(\eta) = A(\eta) \sin(\omega_0 \eta + \varphi(\eta)) \quad (8.6.46)$$

до момента образования разрыва описывается уравнением

$$u(\eta, z) = A(\theta) \sin(\theta + \varphi(\theta)), \quad (8.6.47)$$

где $\theta = \tau + \alpha \omega_0 z u(\eta, z)$, $\tau = \omega_0 \eta$.

В силу узкополосности первоначальной волны выражение (47) в квазистатистическом приближении можно записать в виде

$$u(\eta, z) = A(\tau) \sin(\tau + \alpha \omega_0 z u + \varphi(\tau)). \quad (8.6.48)$$

При графическом анализе (48) удобно представить в форме

$$\tau^{(n)} = \arcsin(u/A) - \alpha \omega_0 z u - \varphi \quad (8.6.49a)$$

для переднего склона волны и

$$\tau^{(s)} = \pi - \arcsin(u/A) - \alpha \omega_0 z u - \varphi \quad (8.6.49b)$$

для заднего склона волны. На периоде волны амплитуда A и фаза φ являются, по существу, постоянными величинами. Поэтому изменением начала отсчета времени в (49) можно выбрать $\varphi = 0$.

На рис. 8.24 приведены графики функции $\tau = \arcsin(u/A)$ и прямые линии $\tau = \alpha \omega_0 z u$. Очевидно, что до тех пор, пока $\arcsin(u/A) > \alpha \omega_0 z u_i$, разрыв в волне отсутствует. Разрывы в волне имеют место при $\alpha \omega_0 z u_i > \arcsin(u/A)$, причем впервые разрыв возникает при $\tau^{(n)} = 0$, т. е. когда

$$\arcsin(u_p/A) = \alpha \omega_0 z u_p. \quad (8.6.50)$$

При этом прямая $\tau = \alpha \omega_0 z u_p$ занимает положение 1. Если

$$\arcsin(u/A) < \alpha \omega_0 z u < \pi - \arcsin(u/A), \quad (8.6.51)$$

то разрыв претерпевает только передний склон волны. В этом случае прямая $\tau = \alpha \omega_0 z u$ находится между прямой 1 и прямой 2, задаваемой соотношением

$$\alpha \omega_0 z u_i = \pi/2. \quad (8.6.52)$$

Когда $\alpha \omega_0 z u_i > \pi/2$, на разрыв «наплывают» точки заднего склона волны.

Согласно свойству эргодичности стационарных случайных процессов (см. § 4 гл. 1) относительное время пребывания случайного процесса u в интервале $(u_i, u_i + \Delta u)$ сходится по вероятности к одномерной функции распределения

$$w(u_i) \Delta u = \langle T_{u_i, u_i + \Delta u} / T \rangle. \quad (8.6.53)$$

Поскольку мы рассматриваем полупериод волны, то в масштабе безразмерного времени $T = \pi$. Величина $T_{u_i, u_i + \Delta u}$ равна сумме времен $\Delta \tau^{(n)}$ и $\Delta \tau^{(s)}$ пребывания волны в интервале $(u_i, u_i + \Delta u)$ соответственно на переднем и заднем склоне волны. Таким образом, соотношение (53) можно переписать в виде

$$w(u_i) = \frac{1}{\pi \Delta u_i} \langle \Delta \tau^{(n)} + \Delta \tau^{(s)} \rangle = \frac{\langle F \rangle}{\pi}. \quad (8.6.54)$$

Пока на полупериоде не образовался разрыв, в соответствии с (49)

$$\frac{\Delta \tau^{(n)}}{\Delta u_i} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - u_i^2}} - \alpha \omega_0 z, \quad \frac{\Delta \tau^{(s)}}{\Delta u_i} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - u_i^2}} + \alpha \omega_0 z \quad (8.6.55a, б)$$

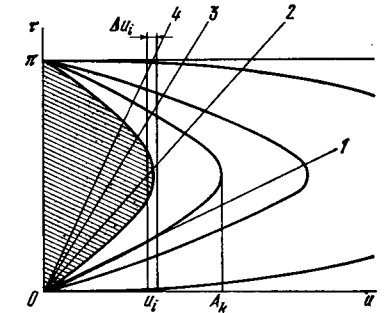


Рис. 8.24. К выводу закона преобразования Δt .

($u_i \leq A$). Если при заданном значении u_i образовался разрыв, например, на переднем склоне волны, то $\Delta\tau^{(n)} = 0$.

Можно показать, пользуясь (54) и (55), что для квазимонохроматической волны $\xi(\eta)$ с функциями распределения амплитуды A и фазы φ

$$w(A) = (A/\sigma^2) e^{-A^2/2\sigma^2}, \quad w(\varphi) = 1/2\pi, \quad -\pi < \varphi < \pi \quad (8.6.56a, б)$$

статистика шумовой волны не меняется, если разрывы в ней не образовались. В более общей форме этот вывод получен в [57, 58].

Вернемся к нашей основной задаче. Расчет функции распределения в нелинейной среде приходится производить по разным формулам в зависимости от того, какое положение занимает текущая прямая $\tau = \alpha\omega_0 z u_i$ (рис. 8.24). Если она расположена между осью u и прямой 2 (52), то для всех значений A из области ($u, v = u/\sin(\alpha\omega_0 z u)$) разрыв еще не образовался; в этом случае в соответствии с (55)

$$F_1(A) = \frac{\Delta\tau^{(n)} + \Delta\tau^{(s)}}{\Delta u} = 2(A^2 - u^2)^{-1/2}. \quad (8.6.57)$$

В области амплитуд (v, ∞) на разрыв «наплывают» точки переднего склона, при этом $\Delta\tau^{(n)} = 0$ и $F_2(A) = \frac{\Delta\tau^{(s)}}{\Delta u}$. Следовательно, в рассматриваемом случае функция распределения (54) равна

$$w(u) = \frac{1}{\pi} \{ \langle F_1(A) \rangle_{A, \varphi} + \langle F_2(A) \rangle_{A, \varphi} \} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_u^{\infty} (A^2 - u^2)^{-1/2} w(A) dA + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ [A^2 - u^2]^{-1/2} + \alpha\omega_0 z \} w(A) dA \right\}. \quad (8.6.58)$$

Для функции распределения (58) получаем формулу

$$w(u) = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} \sigma^{-1} \{ 1 + \Phi(q) + (2/\pi)^{1/2} (\alpha\omega_0 z \sigma) e^{-q^2} \} e^{-u^2/2\sigma^2}, \quad (8.6.59)$$

где $q = (u/\sqrt{2}\sigma) \operatorname{ctg}(\alpha\omega_0 z u)$ и $\Phi(q)$ — функция ошибок.

Теперь рассмотрим случай, когда текущая прямая $\tau = \alpha\omega_0 z u_i$ на рис. 8.24 занимает положение между прямыми 2 и 4. В этом случае точки всех передних склонов волны с амплитудами

$$A_k \geq v = u \sin^{-1}(\pi - \alpha\omega_0 z u_i) = u_i / \sin(\alpha\omega_0 z u_i)$$

«наплыли» на разрыв и для них согласно (55a) $\Delta\tau^{(n)} = 0$. Полупериоды волны с начальными амплитудами $A \leq A_k$ затухают так, что их амплитуды оказываются меньше значения u_i . В связи со сказанным функция $w(u_i)$ (54) находится из выражения

$$w(u_i) = \frac{1}{\pi} \frac{\langle \Delta\tau^{(s)} \rangle}{\Delta u_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ (A^2 - u^2)^{-1/2} + \alpha\omega_0 z \} w(A) dA,$$

которое можно преобразовать к виду, подобному (58). Выражение (58) справедливо также и для $u \leq 0$. Следовательно, область применимости формулы (58) $\alpha\omega_0 z |u| \leq \pi$.

Если $\alpha\omega_0 z |u_i| \geq \pi$, то из рис. 8.24 видно, что амплитуды всех полупериодов будут меньше значения u_i , и, следовательно, $w(u_i) \equiv 0$. Таким образом, оказывается, что в нелинейной среде функция распределения $w(u)$ ограничена со стороны больших значений u .

Изменение гауссовской функции распределения случайной волны в нелинейной среде, рассчитанной на основе (59), показано на рис. 8.25. Рост плотности вероятности малых значений u

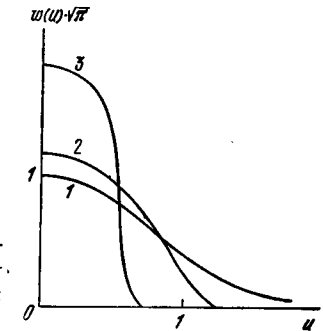


Рис. 8.25. Функция распределения узкополосной случайной волны в недиспергирующей среде на различных расстояниях $\tilde{z} = \alpha\sigma\omega_0 z \sqrt{2}$: 1) 0; 2) $\pi/2$; 3) π .

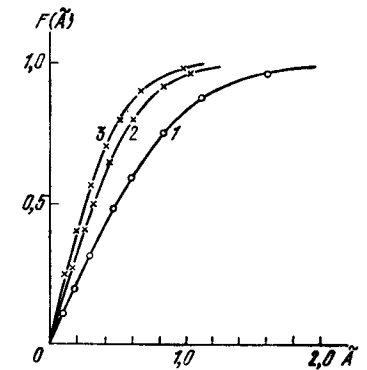


Рис. 8.26. Интегральная функция распределения узкополосного случайного процесса ($\tilde{A} = A/\sigma$ — приведенная амплитуда, $\sigma = 0,54$ В) в нелинейной распределенной линии типа фильтра нижних частот с малой дисперсией [69].

1) Исходное распределение; 2) на выходе линии из 50 ячеек; 3) на выходе линии из 100 ячеек. Кривые — теоретические значения, рассчитанные с использованием (59), точки — экспериментальные значения. Средняя частота сигнала 0,5 МГц, ширина спектра 0,1 МГц; частота отсечки линии 6,5 МГц. Коэффициенты поглощения равны: линейный — $0,4 \cdot 10^{-2}$, нелинейный — $0,4 \cdot 10^{-4}$ с/В на одну ячейку

поля волны обусловлен образованием разрывов и последующим их затуханием. На рис. 8.26 изображены интегральные функции распределения случайной волны в нелинейной среде. Видно, что согласно теоретических значений с экспериментальными хорошее.

В настоящем параграфе мы рассмотрели лишь две задачи, связанные с распространением квазимонохроматических шумовых волн в акустически нелинейных средах. В заключение отметим некоторые другие статистические задачи нелинейной акустики.

Особый интерес для акустики представляют задачи об эволюции широкополосных спектров. В таких спектрах в нелинейной среде происходит как перераспределение энергии в сторону более высоких частот, так и параметрическая подкачка низкочастотной части спектра. Тенденция к «растеканию» энергии по всем частотам приводит в конечном итоге к установлению квазистационарных спектральных распределений [60—62].

Если в шумовом поле распространяется слабый регулярный сигнал, происходит его затухание. Процесс отбора энергии при взаимодействии сигнала с тепловыми шумами является одной из основных причин затухания звука в твердых телах. В последнее время избыточное поглощение акустических волн из-за нелинейного взаимодействия с шумом внешних источников широко исследуется в гидро- и аэроакустике.

В другой ситуации, действуя на слабый широкополосный шум интенсивным гармоническим сигналом, можно добиться нескольких различных эффектов. Так, если спектры регулярной и шумовой компонент разнесены и шум сосредоточен в области низких частот, происходит перекачка части его энергии вверх по спектру. Хотя при включении сигнала полная энергия волнового процесса увеличивается, активное подавление шума в области низких частот может представлять определенный интерес.

Когда спектры регулярной и шумовой волн перекрываются, может происходить интенсивное развитие сплошной части спектра. Вначале генерируются гармоники исходного сигнала. Затем в результате взаимодействия сигнала с шумом шумовой спектр воспроизводится в виде «пьедестала» у подножия каждой гармоники. Эти спектральные комплексы сливаются, образуя белый шум [59].

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
2. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974—76, кн. 1—3.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
7. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
8. Венчиковский Л. Б. В сб.: Автомат. управление. — М.: Изд. АН СССР, 1960, с. 279.
9. Marcinkiewicz J. — Math. Z., 1938, V. 44, S. 612.
10. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.
11. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
12. Пантелл Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники: Пер. с англ./ Под ред. Ю. А. Ильинского. — М.: Мир, 1972.
13. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных системах автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1962.
14. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем. — М.: Машинное строение, 1974.
15. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
16. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М. и др. — УФН, 1970, т. 102, с. 3.
17. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 5.
18. Перина Я. Когерентность света: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
19. Ахманов С. А., Антонов Г. Ф. — Изв. вузов. Радиофиз., 1960, т. 3, с. 405.
20. Шерклиф У. Поляризованный свет: Пер. с англ./ Под ред. Н. Д. Жевандрова. — М.: Мир, 1965.
21. Поздняк С. И., Мелитицкий В. А. Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. — М.: Сов. радио, 1974.
22. Курашов В. Н., Новодержкин В. И., Хорошков Ю. В. — В сб.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Проблемы управления параметрами лазерного излучения». — Ташкент, 1978, ч. 2, с. 27.
23. Ахманов С. А. — Изв. вузов. Радиофиз., 1974, т. 17, с. 541.
24. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
25. Татарский В. И. — Изв. вузов. Радиофиз., 1974, т. 17, с. 570.
26. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
27. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.

28. *Потехин В. А., Татаринцов В. Н.* Теория когерентности электромагнитного поля. — М.: Связь, 1978.
29. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
30. *Казаков В. А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические процессы. — М.: Сов. радио, 1973.
31. *Аеровский Б. С., Воробьев В. В., Гурвич А. С. и др.* — Квант. электрон., 1980, т. 7, с. 59.

К главе 2

1. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
2. *Жодзишский А. И., Кий А. А.* — Радиотехн. и электрон., 1968, т. 13, с. 366.
3. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
Рытов С. М., Крайцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
4. *Blanc-Lapierre A., Savelle M., Forrat A.* — App. Telecom., 1954, v. 9, p. 237.
5. *Дьяков Ю. Е.* — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1979, № 5, с. 17.
6. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
7. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.
8. *Лоудон Р.* Квантовая теория света: Пер. с англ./ Под ред. Г. В. Скроцкого. — М.: Мир, 1976.
9. *Pearl P. R., Troop G. J.* — Opto-electron., 1969, v. 1, p. 151.
10. *Ареки Ф., Скалли М., Хакен Г. и др.* Квантовые флуктуации излучения лазера: Пер. с англ./ Под ред. А. П. Казанцева. — М.: Мир, 1974.
11. *Клаудер Дж., Сударишан Э.* Основы квантовой оптики: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1970.
12. *Перина Я.* Когерентность света: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
13. *Рэйлей (Стретт Дж. В.)* Теория звука: Пер. с англ./ Под ред. С. М. Рытова. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.
14. *Мандель Л., Вольф Э.* — УФН, 1965, т. 87, с. 491, ч. 1; 1966, т. 88, с. 347, ч. 2; с. 619, ч. 3.
15. *Гудзенко Л. И.* — Радиотехн. и электрон., 1959, т. 4, с. 1062.
16. *Бункин Ф. В., Гудзенко Л. И.* — Радиотехн. и электрон., 1958, т. 3, с. 968.
17. *Сверхкороткие световые импульсы/ Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.*
18. *Томов И. В., Чиркин А. С.* — В сб.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1971, вып. 1, с. 110.
19. *Grütter A. A., Weber H. P., Dändliker R.* — Phys. Rev., 1969, v. 185, p. 629.
20. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М., 1968.
21. *Собельман И. И.* Введение в теорию атомных спектров. — М.: Наука, 1977.
22. *Раутиан С. Г., Собельман И. И.* — УФН, 1966, т. 90, с. 209.
23. *Ахманов С. А., Коротев Н. И.* — УФН, 1977, т. 123, с. 405.
24. *Рытов С. М.* — ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 702.
25. *Шумы в электронных приборах/ Под ред. Л. Д. Смоллина и Г. Хауса. — М.: Энергия, 1964.*

К главе 3

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972.
2. *Солодов А. В., Петров С. Ф.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. — М.: Наука, 1971.
3. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
4. *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960.

5. *Харкевич А. А.* Борьба с помехами. — М.: Наука, 1965.
6. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.
7. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
8. *Горелик Г. С.* — УФН, 1951, т. 44, с. 33.
9. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1952, т. 46, с. 348.
10. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Изд. АН СССР, 1953.
11. *Левин М. Л., Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
12. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963.
13. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1, 2.
14. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1975, кн. 2.
15. *Лезин Ю. С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. — М.: Сов. радио, 1963.
16. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.

К главе 4

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ./ Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1973.
2. *Леонтович М. А.* — Изв. АН СССР. Физ., 1944, т. 8, с. 16.
3. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М., 1964.
4. *Хохлов Р. В.* — Радиотехн. и электрон., 1961, т. 6, с. 1116.
5. *Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1966, № 3, с. 95.
6. *Перина Я.* Когерентность света: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
7. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* — УФН, 1967, т. 93, с. 19.
8. *Литвак А. Г., Таланов В. И.* — Изв. вузов. Радиофиз., 1967, т. 10, с. 539.
9. *Ахманов С. А., Чиркин А. С.* Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
10. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М., 1979.
11. *Рытов С. М., Крайцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
12. *Danielmeyer H. G., Weber H. P.* — Phys. Rev. A, 1971, v. 3, p. 1708.
13. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику: Пер. с англ./ Под ред. Г. И. Косоурова. — М.: Мир, 1970.
14. *Курашов В. Н., Кисиль А. В., Хорошков Ю. В.* — Квант. электрон., 1976, т. 3, с. 5.
15. *Маркузе Д.* Оптические волноводы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
16. *Agrawal G. P., Ghatak A. K., Mehta C. L.* — Opt. comm., 1974, v. 12, p. 333.
17. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967.
18. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
19. *Лобкова Л. М.* Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот. — М.: Связь, 1975.
20. *Martienssen W., Spiller E.* — Amer. J. Phys., 1964, v. 32, p. 919.
21. *Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов/ Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ./ Под ред. Ф. В. Бункина. — М., 1978.*
22. *Кроссманьяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М.* Статистические свойства рассеянного света: Пер. с англ./ Под ред. Н. Л. Фабелинского. — М., 1980.
23. *Estes L., Narducci L., Tuft R.* — J. Opt. Soc. Amer., 1971, v. 61, p. 1301.

24. Аракелян С. М., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. — *Опт. и спектр.*, 1976, т. 40, с. 1055.
25. Ахманов С. А., Гришанин Б. А., Ляхов Г. А., Пономарев Ю. В. — *Вестн. МГУ. Физ. и астрон.*, 1980, т. 21, № 6, с. 31, 38.
26. Ляхов Г. А., Макаров В. А. — *Изв. вузов. Радиофиз.*, 1979, т. 22, с. 1453.
27. Takagi S. — *Acta Cryst.*, 1962, v. 15, p. 1311.
28. Пинскер Э. Г. Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. — М.: Наука, 1974.
29. Андреев А. В., Ильинский Ю. А. — *Письма в ЖЭТФ*, 1975, т. 22, с. 462.
30. Де Жен П. Физика жидких кристаллов: Пер. с англ./ Под ред. А. С. Соиняна. — М.: Мир, 1977.
31. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М., 1976, ч. 1.
32. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961.
33. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. — М.: Гостехиздат, 1951.
34. Шифрин К. С. — *Тр. Всесоюз. заочн. лесотехнич. ин-та*, 1956, № 2, с. 153.
35. Шифрин К. С., Колмаков Н. Б. — *Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана*, 1967, т. 3, с. 1271.
36. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
37. Введенский Б. С., Логгинов А. С., Сенаторов К. С. — *Квант. электрон.*, 1974, т. 1, с. 1232.
38. Долотко В. И., Кричевский В. И., Шевченко В. В. — *ПТЭ*, 1973, № 4, с. 211.
39. Арутюнян А. Г., Тункин В. Г., Чиркин А. С. — В сб.: *Квантовая электроника*/ Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1973, вып. 1, с. 111. Пахалов В. Б., Чиркин А. С., Юсупов Ф. М. — *Квант. электрон.*, 1979, т. 6, с. 57.
40. Аракелян С. М., Арутюнян А. Г., Ахманов С. А. и др. — *Квант. электрон.*, 1974, т. 1, с. 215.
41. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
42. Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. — *УФН*, 1975, т. 115, с. 239.
43. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И. — *УФН*, 1974, т. 114, с. 415.
44. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. — М.: Сов. радио, 1970.
45. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. — М., 1970.
46. Денисов Н. Г. — *Изв. вузов. Радиофиз.*, 1961, т. 4, с. 630.
47. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М., 1980.
48. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
49. Зверев В. А. Радиооптика. — М.: Сов. радио, 1975.
50. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Изд. АН СССР, 1953.
51. Рытов С. М., Левин М. Л. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
52. Вольф Э., Мандель Л. — *УФН*, 1965, т. 87, с. 492, ч. 1; 1966, т. 88, с. 347, ч. 2; т. 88, с. 619, ч. 3.
53. Bourret R. C. — *Nuovo Cim.*, 1960, v. 18, p. 347.
54. Kano Y., Wolf E. — *Proc. Phys. Soc.*, 1960, v. 80, p. 1273.
55. Mehta C. L., Wolf E. — *Phys. Rev.*, 1967, v. 161, p. 1328.
56. Конн Ж. — В сб.: *Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения*: Пер. с англ./ Под ред. Г. Н. Жижина. — М.: Мир, 1972, с. 201.
57. Каули Дж. Физика дифракции: Пер. с англ./ Под ред. Э. Г. Пинскера. — М.: Мир, 1979.
58. Иденбом В. Л. — *Кристаллография*, 1973, т. 18, с. 811.

К главе 5

1. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
2. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.
5. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
6. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1965.
7. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. — Минск: Наука и техника, 1977.
8. Пантел Р., Путьхоф Г. Основы квантовой электроники: Пер. с англ./ Под ред. Ю. А. Ильинского. — М.: Мир, 1972.
9. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
10. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы: Пер. с англ./ Под ред. В. Л. Стрижевского. — М.: Мир, 1978.
11. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. — М.: Наука, 1973.
12. Бонч-Бруевич А. М., Пржибельский С. Г., Ходовой В. А., Чигирь Н. А. — *ЖЭТФ*, 1976, т. 70, с. 445.
13. Делоне Н. Б., Зон Б. А., Крайнов В. П. и др. — *УФН*, 1976, т. 120, с. 3.
14. Дьяков Ю. Е., Искандеров Н. А. — В сб.: *Тез. докл. IX Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике*. — М.: ФИАН, 1978, ч. 2, с. 95.
15. Дьяков Ю. Е., Искандеров Н. А. — В сб.: *Тез. докл. 7-й Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике*. — М.: МГУ, 1974, с. 218.
16. Дьяков Ю. Е., Искандеров Н. А. — В сб.: *Тез. докл. конф. «Нелинейные резонансные преобразования частоты лазерного излучения»*. — Красноярск, 1977, с. 85.
17. Дьяков Ю. Е., Искандеров Н. А., Нехаенко В. А. — В сб.: *Тез. докл. конф. «Нелинейное резонансное преобразование частоты лазерного излучения»*. — Ташкент, 1979, с. 49.
18. Бурштейн А. И. — *ЖЭТФ*, 1965, т. 48, с. 850.
19. Бурштейн А. И. — *ЖЭТФ*, 1965, т. 49, с. 362.
20. Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л. Теория многофотонных процессов в атомах. — М.: Атомиздат, 1978.
21. Келдыш Л. В. — *ЖЭТФ*, 1964, т. 47, с. 1945.
22. Томов И. В., Чиркин А. С. — В сб.: *Квантовая электроника*/ Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1971, с. 110.
23. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М., 1978.
24. Sanchez F. — *Nuovo Cim. B.*, 1975, v. 27, p. 305.
25. Масалов А. В. — *Квант. электрон.*, 1976, т. 3, с. 1667.
26. Делоне Н. Б., Коварский В. А., Масалов А. В., Перельман Н. Ф. — *УФН*, 1980, т. 131, с. 617.
27. Смирнова Т. Н., Тихонов Е. А. — *Квант. электрон.*, 1977, т. 4, с. 1105.
28. Lecomte C., Mainfray G., Manus C. et al. — *Phys. Rev. A*, 1975, v. 99, p. 1691.
29. Forrester A., Gudmundsen R., Johnson P. — *Phys. Rev.*, 1955, v. 11, p. 1009.
30. Боровицкий С. И., Горелик Г. С. — *УФН*, 1956, т. 59, с. 543.
31. Горелик Г. С. — *ДАН СССР*, 1947, т. 58, с. 45.
32. Forrester A. T., Parkins W. E., Gerjuoy E. G. — *Phys. Rev.*, 1947, v. 72, p. 728.
33. Горелик Г. С. — *УФН*, 1948, т. 34, с. 321.
34. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов/ Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ./ Под ред. Ф. В. Бункина. — М., 1978.

35. Ринкевичюс Б. С. Лазерная анемометрия. — М.: Энергия, 1978.
36. Bourke P. J., Butteworth J., Drain L. E. et al. — J. Phys. A, 1970, v. 3, p. 216.
37. Brown H. R., Twiss R. Q. — Nature, 1956, v. 177, p. 27.
38. Браун Р. Х. — УФН, 1972, т. 108, с. 529.
39. Oliver C. J., Pike E. R., Vanghan J. M. Coherence and Quantum Optics. — N. Y.: Plenum Press, 1972, p. 457.
40. Арутюнян А. Г., Ахманов С. А. и др. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1511.
41. Арутюнян А. Г., Ахманов С. А., Тункин В. Г., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 70.
42. Ernst E. R. — J. Mag. Res., 1970, v. 3, p. 28.
43. Елютин П. В. — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1976, № 4, с. 496.
44. Бутылкин В. С., Хронополо Ю. Г., Якубович Е. И. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1712.
45. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
46. Auston D. H. — Appl. Phys. Lett., 1971, v. 18, p. 249.
47. Бенедек Дж. — УФН, 1972, т. 106, с. 481.
48. Барашев П. П. — Phys. Lett. A, 1970, v. 32, p. 291.
49. Сверхкороткие световые импульсы/ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
50. Дьяков Ю. Е. — В сб.: Тез. докл. конф. по нелинейной оптике. — Киев, 1980, с. 18.
51. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969, т. 1.
52. Greenhow R. C., Schmidt A. J. In: Advances Quantum Electronics/Ed. D. W. Goodwin. — London — N. Y.: Acad. Press, 1974, v. 2, p. 157.
53. Дабрович К. Н., Дубовик А. Н., Суrowегин А. Л. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1978, т. 42, с. 2580.

К главе 6

1. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972.
2. Харкевич А. А. Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. — М.: Гостехиздат, 1956.
3. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М., 1964.
4. Нелинейные системы гидродинамического типа/ Под ред. А. М. Обухова. — М.: Наука, 1974.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953.
7. Кравиов Ю. А. Теория стационарных колебаний в одноконтурных и двухконтурных параметрических генераторах и усилителях. — М.: Изд. АН СССР, 1963.
8. Льюиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
9. Эткин В. С., Гершензон Е. М. Параметрические системы СВЧ на полупроводниковых диодах. — М.: Сов. радио, 1964.
10. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
11. Лопухин В. М., Магалинский В. Б., Мартынов В. П. и др. Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. — М.: Наука, 1966.
12. Евланов Л. Г., Константинов В. М. Системы со случайными параметрами. — М.: Наука, 1976.
13. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
14. Дьяков Ю. Е. — Радиотехн. и электрон., 1963, т. 18, с. 1812; с. 2034.
15. Воляк К. И., Горшков А. С. — Радиотехн. и электрон., 1973, т. 18, с. 2075.

16. Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1979, т. 19, с. 3 и с. 38.
17. Бломбергелл Н. Нелинейная оптика: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова и Р. В. Хохлова. — М.: Мир, 1966.
18. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. — Радиотехн. и электрон., 1961, т. 6, с. 1813.
19. Дьяков Ю. Е. — В сб.: Докл. 3-го Всесоюзн. симп. по нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1967, с. 37.
20. Дьяков Ю. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, с. 489.
21. Sargent R., Wang C. et al. — Phys. Rev. A, 1970, v. 2, p. 60.
22. Дьяков Ю. Е. — Кратк. сообщ. по физ. ФИАН, 1971, № 12, с. 41.
23. Дьяков Ю. Е. — Кратк. сообщ. по физ. ФИАН, 1971, № 7, с. 49.
24. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. — УФН, 1966, т. 88, с. 439.
25. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 724.
26. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 351.
27. Суцук М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И. — Изв. вузов. Радиофиз., 1970, т. 13, с. 631.
28. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1976.
29. Ярис А. Квантовая электроника: Пер. с англ./ Под ред. Я. И. Ханина. — М.: Сов. радио, 1980.
30. Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
31. Дьяков Ю. Е., Павлов Л. И. — В сб.: Нелинейные процессы в оптике. — Новосибирск: Наука, 1972, с. 367.
32. Дьяков Ю. Е., Павлов Л. И., Томов И. В. — Квант. электрон., 1979, т. 6, с. 1819.
33. Дьяков Ю. Е., Ковригин А. И. — В сб.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1972, № 4, с. 85.
34. Дьяков Ю. Е., Ковригин А. И. — Квант. электрон., 1975, т. 2, с. 2243.
35. Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е. — Квант. электрон., 1977, т. 4, с. 2338.
36. Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е. — Квант. электрон., 1978, т. 5, с. 331.
37. Хаяси Т. Вынужденные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968.

К главе 7

1. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
2. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах/ Под ред. Ю. Л. Климонтовича. — М.: Наука, 1974.
3. Басов Н. Г., Летохов В. С. — УФН, 1968, т. 96, с. 585.
4. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М., 1968.
5. Летохов В. С., Чеботаев В. П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. — М.: Наука, 1975.
6. Летохов В. С., Маркин Е. П. — ЖЭТФ, 1965, т. 48, с. 770.
7. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
8. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М., 1977.
9. Брагинский В. Б., Вятчанин С. П. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 828.
10. Ахманов С. А., Рошаль А. С. — Изв. вузов. Радиофиз., 1961, т. 4, с. 203.
11. Антонов Г. Ф., Ахманов С. А. — Изв. вузов. Радиофиз., 1960, т. 3, с. 405.
12. Ахманов С. А., Комолов В. П. — Изв. вузов. Радиофиз., 1962, т. 5, с. 1175.
13. Ахманов С. А. — Изв. вузов. Радиофиз., 1961, т. 4, с. 769.
14. Комолов В. П., Трофименко И. Т. Квантование фазы при обнаружении радиосигналов. — М.: Сов. радио, 1976.
15. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. — Радиотехн. и электрон., 1961, т. 6, с. 1813.
16. Лэмб У. — В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика: Пер. с англ./ Под ред. О. В. Богданкевича и О. Н. Крохина. — М.: Мир, 1966, с. 281.

17. Казанцев А. И., Раутиан С. Г., Сурдутович Г. И. — ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1409.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: 1976, ч. 1.
19. Пантел Р., Пуххоф Г. Основы квантовой электроники: Пер. с англ./ Под ред. Ю. А. Ильинского. — М.: Мир, 1972, с. 218.
20. Schawlow A. L., Townes C. H. — Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 1940.
21. Зайцев Ю. И., Степанов Д. П. — Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 6, с. 733; ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1645.
22. Gerhardt H., Welling H., Güttner A. — Phys. Lett. A., 1972, v. 40, p. 191.
23. Güttner A., Welling H., Gericke K. H. et al. — Phys. Rev. A, 1976, v. 18, p. 1157.
24. Ареки Ф. Т., Скалли М., Хакен Г. и др. Квантовые флуктуации излучения лазера. — М.: Мир, 1974, с. 7.
25. Бакланов Е. В., Раутиан С. Г., Трошин Б. И., Чеботаев В. П. — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1120.
26. Arecchi F. T., Degiorgio V. — Phys. Rev. A, 1971, v. 3, p. 1108.
27. Arecchi F. T., Degiorgio V. — In: Laser Handbook. — Amsterdam: North Holland, 1972, v. 1, p. 191.
28. Зельдович Б. Я., Кузнецова Т. И. — УФН, 1972, т. 106, с. 47.
29. Сверхкороткие световые импульсы/ Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
30. Arimitsu T., Suzuki M. — Physica A, 1978, v. 93, p. 574.
31. Matieu E., Keller H. — J. Appl. Phys. 1970, v. 41, p. 1560.
32. Blount E. I., Klauder J. R. — J. Appl. Phys., 1969, v. 40, p. 2874.
33. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.
34. Сотский Б. А., Гончаренко А. М. — Опт. и спектр., 1965, т. 19, с. 788.
35. Арутюнян А. Г., Ахманов С. А. и др. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1511.
36. Стратонович Р. Л. — Квант. электрон., 1977, т. 4, с. 2141.
37. Чиркин А. С. — Матер. 8-й Всесоюзн. школы по голографии. — Л.: ЛФТИ, 1976, с. 260.
38. Чиркин А. С. — Квант. электрон., 1976, т. 3, с. 352.
39. Аракелян С. М., Ахманов С. А., Тункин В. Г., Чиркин А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 571.
40. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления: Пер. с англ./ Под ред. С. В. Вонсовского. — М.: Мир, 1973.
41. Graham R., Haken H. — Z. Phys., 1970, v. 237, p. 31.
42. Degiorgio V., Scully M. O. — Phys. Rev. A, 1970, v. 2, p. 1170.
43. Grossmann S., Richter P. H. — Z. Phys., 1971, v. 242, p. 458.
44. Лисицын В. Н., Чеботаев В. П. — Письма в ЖЭТФ, 1968, т. 7, с. 3; ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 419.
45. Corti M., Degiorgio V. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1173.
46. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. — In: Laser und ihre Anwendungen. 3. Intern. Tagung. — Dresden, 1977, K. 95, S. 275.
47. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 391; Квант. электрон., 1977, т. 4, с. 1298.
48. Haken H. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 67.
49. Horn P. M., Caruthess T., Long M. T. — Phys. Rev. A, 1976, v. 14, p. 833.
50. Eichler H. J., Kleinschmidt F., Avnon G. — Z. Phys. B, 1976, v. 23, p. 395.
51. Зайцев Ю. И. — ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 525.
52. Гоноровский И. С. — ДАН СССР, 1954, т. 94, с. 869.
53. Ярис А. Квантовая электроника: Пер. с англ./ Под ред. Я. И. Ханина. — М.: Сов. радио, 1980.
54. Коган Ш. М. — УФН, 1977, т. 123, с. 131.
55. Ахманов С. А., Голяев Ю. Д., Дмитриев В. Г. — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 132.
56. Ахманов С. А., Ляхов Г. А. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 96.
57. Тункин В. Г., Чиркин А. С. Дополн. к кн.: Перина Я. Когерентность света/ Пер. с англ. — М.: Мир, 1974, с. 324.

58. Суязов Н. В. — Квант. электрон., 1978, т. 5, с. 2445.
59. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Л. Климонтовича и С. М. Осовеца. — М.: Мир, 1980.
60. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. — М.: Наука, 1980.

К главе 8

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М., 1964.
2. Кляукач И. Л., Соколовский Р. И. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 424.
3. Абдуллин У. А., Горшков В. А., Кляукач И. Л. и др. — Квант. электрон., 1975, т. 2, с. 967.
4. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
5. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Чиркин А. С., Чунаев О. Н. — ЖЭТФ, 1966, т. 49, с. 829.
6. Discuing J., Bloembergen N. — Phys. Rev., 1964, v. 133, p. 1493.
7. Ахманов С. А., Чиркин А. С. — Радиотехн. и электрон., 1966, т. 11, с. 1915.
8. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. — Радиотехн. и электрон., 1961, т. 6, с. 1813.
9. Бломберген Н. Нелинейная оптика: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова и Р. В. Хохлова. — М.: Мир, 1966.
10. Ахманов С. А. — Изв. вузов. Радиофиз., 1974, т. 17, с. 541.
11. Discuing J., Armstrong J. A. — Electron. Quant. C. R. Conf. Intern. P. — N.Y., 1964.
12. Фрейдман Г. И. — Изв. вузов. Радиофиз., 1966, т. 9, с. 550.
13. Тункин В. Г., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 191.
14. Akhmanov S. A., Chirkin A. S., Tunkin V. G. — Opto-electron., 1969, v. 1, p. 196.
15. Ахманов С. А., Голяев Ю. Д., Тункин В. Г., Чиркин А. С. — Квант. электрон., 1975, т. 2, с. 1171.
16. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 724.
17. Беспалов В. И., Пасманик Г. А. — ДАН СССР, 1973, т. 210, с. 309.
18. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Павлов Л. И. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 520.
19. Дьяков Ю. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, с. 489; Докл. 3-го Всесоюзн. симпоз. по нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1967, с. 37.
20. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 519.
21. Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е. — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1977, т. 18, с. 70.
Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е., Зубарев И. Г. и др. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 822.
22. Дьяков Ю. Е. Кратк. сообщ. по физ., ФИАН, 1971, № 7, с. 49.
23. Грасюк А. З., Зубарев И. Г., Суязов Н. В. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 237.
24. Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е. — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1980, т. 21, № 5, с. 12.
25. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. — УФН, 1967, т. 93, с. 19.
26. Аскарьян Г. А. — ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 1567.
27. Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 1005.
28. Беспалов В. И., Таланов В. И. — Письма в ЖЭТФ, 1966, т. 3, с. 471.
29. Ляхов Г. А. — Опт. и спектр., 1972, т. 33, с. 969.
30. Розанов Н. И., Смирнов В. А. — ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 2060.
31. Campillo A. J., Shapiro S., Snydam B. — Appl. Phys. Lett., 1974, v. 24, p. 178.
32. Ахманов С. А., Ляхов Г. А. — В сб.: Тез. докл. 7-й Всесоюзн. конф. по когерентной и нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1974, с. 173.
33. Пасманик Г. А. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 490.

34. Бабенко В. А., Зельдович Б. Я., Малышев В. И. и др. — В сб.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1973, № 14, с. 19.
35. Ахманов С. А. — В кн.: Нелинейная спектроскопия/ Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ./ Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1979, с. 347.
36. Беспалов В. И., Пасманик Г. А. — Изв. вузов. Радиофиз., 1976, т. 19, с. 634.
37. Стрижевский В. Л. — Опт. и спектр., 1966, т. 20, с. 516.
38. Платоненко В. Т., Хохлов Р. В. — ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 555.
39. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
40. Ахманов С. А., Коротеев Н. И. — УФН, 1977, т. 123, с. 405.
41. Бирмонтас А., Куприс Р., Пискарскас А. — Квант. электрон., 1980, т. 7, с. 391.
42. Орлов Р. Ю., Усманов Т., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 1069.
43. Тагиев З. А., Чиркин А. С. — Ж. прикл. спектр., 1976, т. 24, с. 611.
44. Тагиев З. А., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1271.
45. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. — М.: Наука, 1966.
46. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
47. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1978.
48. Руденко О. В., Чиркин А. С. — ДАН СССР, 1974, т. 214, с. 1045.
49. Саичев А. И. — Изв. вузов, Радиофиз., 1974, т. 17, с. 1025.
50. Руденко О. В., Чиркин А. С. — Акустич. ж., 1974, т. 20, с. 297.
51. Руденко О. В., Чиркин А. С. — ДАН СССР, 1975, т. 225, с. 520.
52. Руденко О. В., Чиркин А. С. — Радиотехн. и электрон., 1974, т. 19, с. 2170.
53. Новиков Б. К., Руденко О. В., Чиркин А. С. — В сб.: 2-е Всесоюз. научнотехн. совещание «Нелинейная гидроакустика». — Таганрог, 1976, с. 15.
54. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н. — Акустич. ж., 1977, т. 23, с. 796.
55. Гурбатов С. Н., Шепелевич Л. Г. — Изв. вузов. Радиофиз., 1978, т. 21, с. 1627.
56. Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н. — ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 456.
57. Малахов А. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов. Радиофиз., 1974, т. 17, с. 699.
58. Webster D. A., Blackstock D. T. — J. Acoust. Soc. Amer., 1979, v. 65, p. 1053.
59. Руденко О. В., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1903.
60. Наугольных К. А., Рыбак С. А. — ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 78.
61. Павлов В. И. — Акустич. ж., 1974, т. 28, с. 580.
62. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР, 1973, т. 208, с. 494.
63. Арутюнян А. Г., Ахманов С. А. и др. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 1511.
64. Дьяков Ю. Е. — Кратк. сообщ. по физ. ФИАН, 1973, № 4, с. 23; № 5, с. 39.
65. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/ Под ред. В. И. Беспалова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.
66. Carpan R. L., Shimizu F., Wang C. S., Bloembergen N. — Phys. Rev., 1970, v. A2, p. 60.
67. Бочаров В. В., Грасюк А. З., Зубарев И. Г., Муликов В. Ф. — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 430.
68. Trutna W. R., Park Y. K., Byer R. L. — IEEE J. Quant. Electronics, v. QE-15, № 7, p. 648.
69. Горшков А. С., Марченко В. Ф. и др. — Изв. вузов. Радиофиз., 1978, т. 21, с. 450.
70. Луговой В. Н. Введение в теорию вынужденного комбинационного рассеяния. — М.: Наука, 1968.