

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
У ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ
ОПТИКА

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів



УДК 535(076)
ББК 22.34я7
Заг14

Автори:

В. Ф. Коваленко, І. М. Халімонова, Н. П. Харченко, В. М. Стецюк

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В. Н. Бержанський,
д-р техн. наук, проф. В. Г. Колобродов

*Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету
(протокол № 4 від 8 листопада 2010 року)*

Заг14 **Загальна** фізика у прикладах, запитаннях і відповідях. Оптика : навчальний посібник / В. Ф. Коваленко, І. М. Халімонова, Н. П. Харченко, В. М. Стецюк. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 447 с.

ISBN 978-966-439-456-4

Посібник містить запитання і відповіді, а також приклади розв'язування задач із розділу загальної фізики "Оптика". Він допоможе студентам під час самостійної роботи опанувати більш глибоко лекційний матеріал з уже частково вивчених певних розділів оптики, свідомо використовувати фізичні закони, знаходити відповіді на запитання, що виникли, і ті, що можуть виникнути, набути практичних навичок з розв'язування задач.

Призначено студентам фізичних факультетів університетів. Може бути корисним також для викладачів фізики в навчальних закладах третього-четвертого рівнів акредитації, учням і викладачам спеціалізованих шкіл і фізико-математичних ліцеїв.

УДК 535(076)
ББК 22.34я7

**Гриф надано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України
(лист № 1/11-1330 від 01.02.12)**

ISBN 978-966-439 456-4

© Коваленко В. Ф., Халімонова І. М., Харченко Н. П., Стецюк В. М., 2012
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2012

ВСТУП

Ідея написання цього навчального посібника виникла тому, що: по-перше, не цілком реалізована потреба в наданні методичної допомоги студентам для розвитку у них навичок у розв'язуванні задач із загальної фізики. На жаль, навчальні посібники подібного типу або являють собою бібліографічну рідкість, або видані за кордонами країни, або видані невеликим накладом для студентів окремих факультетів. По-друге, існує потреба у створенні такого посібника, який допоміг би студентам знаходити відповіді на запитання, які можуть виникнути до вже вивченого ними розділу фізики, а також для більш глибокого розуміння змісту розглянутих фізичних явищ. Усе це спонукало авторів до написання цього посібника з метою допомогти студентам в їх самостійній роботі з опанування та більш глибокого розуміння лекційного матеріалу і сталих навичок розв'язання задач із загальної фізики.

Кожна із розглянутих тем посібника містить такі підрозділи:

- "Короткі теоретичні відомості";
- "Методичні вказівки та поради";
- "Запитання та відповіді";
- "Приклади розв'язування задач".

Підрозділ "**Короткі теоретичні відомості**" містить інформацію, яку необхідно нагадати студентам перед тим, як почати застосовувати на практиці набуті під час вивчення лекційного матеріалу знання. Сподіватись на достатність наведеного в цьому підрозділі матеріалу для розв'язування задач і відповідей на відповідні запитання, безумовно, не можна. Однак значна кількість підручників з курсів загальної фізики, частина з яких наведена у списку **літератури**, має допомогти повною мірою вирішити цю проблему.

Матеріал підрозділу "**Методичні вказівки та поради**" спрямований на поради щодо практичного застосування теоретичних знань і використовується в тих розділах, де це доцільно, де необхідно розкрити деякі особливості застосування відомих теоретичних знань. Ці вказівки і поради мають авторський відтінок і можуть бути суттєво видозмінені та доповнені кожним, хто забажає розібратись у суті розглянутого матеріалу і почне творчо застосовувати ці знання для розв'язання конкретних задач і пошуку відповідей на поставлені запитання.

Підрозділ "**Запитання та відповіді**" фактично містить розв'язування задач якісного характеру. Запитання добирались так, щоб відповіді на них потребували не механічного запам'ятовування матеріалу, а його розуміння та вміння творчо використовувати. У відповідях автори намагались викласти основну ідею, на якій базується відповідь. Більш глибокі відповіді на запитання потрібно шукати в наведено-

му списку літератури. Запитання та відповіді можуть бути використані студентами під час підготовки до іспиту, а викладачами – під час іспиту.

У підрозділі **"Приклади розв'язування задач"** розглянуто найбільш типові задачі, які розв'язані методами, що дозволяють застосувати їх в подальшому як універсальні. Автори не ставили на меті зупинитись на розв'язанні задач підвищеної складності, хоча частину наведених задач можна вважати саме такими.

Окремо слід пояснити структуру і зміст розділу "Геометрична оптика". Деяка особливість подачі матеріалу цього розділу порівняно з іншими розділами посібника полягає в більш детальній і, мабуть, більш спрощеній подачі матеріалу. Це пов'язано з тим, що частину матеріалу із цього розділу не включено до програми лекційного курсу для університетів (напр., метод побудов у геометричній оптиці), оскільки він за традицією вивчається в середній школі. Різний і зазвичай недостатній рівень знань студентів цього важливого для оптики матеріалу спонукав авторів викласти його в навчальному посібнику для університетів. У підготовці розділу "Геометрична оптика" брав участь канд. фіз.-мат. наук, доцент В. М. Безручко, за що автори йому щиро вдячні.

Посібник призначено студентам факультетів фізичного профілю класичних університетів. Частково викладений матеріал доступний не тільки студентам вищих навчальних закладів, але й учням спеціалізованих шкіл і фізико-математичних ліцеїв. Він може бути корисним для викладачів фізики в навчальних закладах третього-четвертого рівнів акредитації.

1. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

1.1. Терміни, означення та закони геометричної оптики

Геометрична (променева) оптика – розділ оптики, який розглядає поширення світла у вигляді світлових променів, які на межі поділу середовищ можуть лише заломлюватись і відбиватись. У геометричній оптиці (ГО) нехтуються хвильові властивості світла, природа світла не розглядається. Геометрична оптика є граничним випадком хвильової оптики, який відповідає умові $\lambda \rightarrow 0$, і зазвичай розглядає параксіальні промені. Незважаючи на такі обмеження, геометрична оптика дає досить точну теорію оптичних систем і має безліч корисних практичних застосувань.

Промінь – лінія, уздовж якої поширюється світлова енергія. Якщо середовище однорідне, промінь представляє собою пряму лінію.

Кут падіння – кут між променем, що падає на заломлюючу або відбиваючу поверхню, і нормаллю до поверхні в точці падіння.

Площина падіння – площина, у якій лежать падаючий і відбитий промені, а також нормаль до поверхні в точці падіння.

Кут заломлення (відбиття) – кут між заломленим (відбитим) променем і нормаллю до поверхні в точці падіння.

Показник заломлення – відношення швидкості світла у вакуумі до швидкості світла в даному середовищі.

Кут відхилення – кут між двома променями або їх продовженнями: променем на вході оптичної системи та відповідним променем на її виході.

Закони геометричної оптики:

1) *закон прямолінійності поширення світла*: в однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно;

2) *закон незалежності світлових променів*: промені при перетині не збурюють один одного і поширюються далі незалежно;

3) *закон відбиття*: падаючий і відбитий промені, а також перпендикуляр, встановлений у точці відбиття, лежать в одній площині (площині падіння), і кут відбиття дорівнює куту падіння;

4) *закон заломлення*: падаючий і заломлений промені, а також перпендикуляр, встановлений у точці заломлення, лежать в одній площині; кут падіння φ і кут заломлення θ пов'язані співвідношенням $n_1 \cdot \sin \varphi = n_2 \cdot \sin \theta$ (закон Снеліуса), де n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ першого та другого, відповідно;

5) *закон оборотності*: якщо назустріч променю, який зазнав ряд відбиттів і заломлень, пустити інший промінь, то він повторить увесь шлях падаючого променя

всередині системи і вийде із неї вздовж падаючого променя, але у зворотному напрямку.

Параксіальний (приосьовий) промінь – промінь, що поширюється під малим кутом до головної оптичної осі та на малій відстані від неї.

Головна оптична вісь – пряма, яка проходить через центри кривини заломлюючих поверхонь, що складають центровану оптичну систему.

Побічна оптична вісь – довільна пряма, яка проходить через центр тонкої лінзи або вузлові точки товстої лінзи чи оптичної системи. Промінь, який поширюється вздовж побічної (як і головної) оптичної осі, проходячи лінзу або оптичну систему, не заломлюється.

Гомоцентричний пучок – пучок променів, що виходять з однієї точки і збираються в одній точці.

Стигматичне (безабераційне) зображення – зображення, яке утворюється гомоцентричними пучками.

Астигматичне (спотворене, абераційне) зображення – зображення, яке утворюється негомоцентричними пучками, коли точка зображається плямою розсіювання.

Аберації – спотворення зображення, викликані оптичною системою.

Збиральна (додатна) лінза – лінза, яка має дійсні фокуси.

Розсіювальна (від'ємна) лінза – лінза, яка має уявні фокуси.

Меніск – назва лінзи, одна поверхня якої – опукла, а друга – угнута.

Дійсне зображення – зображення, яке утворюється перетином променів.

Уявне зображення – зображення, яке лежить на перетині продовжень променів.

Спряжені точки (площини) – точки (площини), які є зображенням одна одної.

Простір предметів – частина простору, у якій розташований предмет і пучки променів, що падають на оптичну систему.

Простір зображень – частина простору, у якій поширюються промені після оптичної системи.

Оптична система – сукупність заломлюючих і відбиваючих поверхонь, призначена для формування світлових пучків.

Центрована система – оптична система, центри кривини поверхонь якої лежать на одній прямій – головній оптичній осі.

Головні фокуси оптичної системи (передній і задній) – точки на головній оптичній осі, у яких збираються промені або їх продовження після проходження крізь оптичну систему у випадку, коли промені падали на неї паралельно до головної оптичної осі.

Побічні фокуси оптичної системи – точки на побічній оптичній осі, у яких збираються промені або їх продовження після проходження крізь оптичну систему у випадку, коли промені падали на неї паралельно до побічної оптичної осі.

Фокальна площина (передня і задня) – площина, що перпендикулярна до головної оптичної осі і проходить через відповідний (передній або задній) головний фокус. Можна сказати, що фокальна площина – це геометричне місце точок усіх фокусів (побічних і головного).

Головні площини – дві перпендикулярні до головної оптичної осі спряжені площини, для яких лінійне (поперечне) збільшення дорівнює +1. Тобто спряжені точки на головних площинах лежать на однаковій відстані (висоті) від головної оптичної осі.

Головні точки (передня і задня) – точки перетину головних площин з головною оптичною віссю.

Вузлові точки (передня і задня) – спряжені точки на головній оптичній осі, для яких кутове збільшення дорівнює +1. Спряжені промені, що проходять через вузлові точки, паралельні між собою.

Вузлові площини – дві перпендикулярні до головної оптичної осі спряжені площини, які проходять через вузлові точки.

Кардинальні площини (точки) – фокальні, головні та вузлові площини (точки).

Фокусна відстань – відстань від головної точки до головного фокуса оптичної системи.

Оптична сила системи – відношення показника заломлення простору зображень до задньої фокусної відстані або відношення показника заломлення простору предметів до передньої фокусної відстані. Оптична сила вимірюється в діоптріях. *Діоптрія* – це оптична сила системи, яка має фокусну відстань 1 м у повітрі.

Апертурна діафрагма – діафрагма, яка максимально обмежує пучок променів, що виходять з осьової точки предмета, і таким чином визначає світловий потік через оптичну систему. Апертурною діафрагмою оптичної системи вважається та діафрагма, зображення якої видно з місця розташування предмета під найменшим кутом.

Вхідна зіниця – зображення апертурної діафрагми в просторі предметів.

Вихідна зіниця – зображення апертурної діафрагми в просторі зображень.

Апертурний кут у просторі предметів (зображень) – кут між головною оптичною віссю і променем, що виходить з осьової точки предмета (зображення) і йде на край вхідної зіниці.

Числова апертура – добуток показника заломлення середовища в просторі предметів на абсолютне значення синуса апертурного кута.

Польова діафрагма – діафрагма, яка максимально обмежує пучок променів, що проходить через центр апертурної діафрагми (т. зв. головні промені), і визначає лінійне поле зору оптичної системи. Польовою діафрагмою оптичної системи вважається та діафрагма, зображення якої видно із центра вхідної зіниці під найменшим кутом.

Вікно входу – зображення польової діафрагми в просторі предметів.

Вікно виходу – зображення польової діафрагми в просторі зображень.

Поле зору оптичної системи – частина простору предметів (або зображень), яку одночасно передає оптична система. Лінійні розміри поля зору визначаються як діаметр вікна входу або діаметр вікна виходу. Кутові розміри поля зору визнача-

ються як абсолютне значення подвоєного кута між головною оптичною віссю і променем, що проходить через центр апертурної діафрагми і край вхідного (або вихідного) вікна.

Поперечне збільшення оптичної системи – це відношення виміряного перпендикулярно до головної оптичної осі лінійного розміру зображення до відповідного розміру предмета.

Поздовжнє збільшення – це відношення виміряного вздовж головної оптичної осі розміру зображення до відповідного розміру предмета.

Кутове збільшення – це відношення тангенса кута, під яким з осьової точки зображення видно вихідну зіницю, до тангенса кута, під яким з осьової точки предмета видно вхідну зіницю.

Збільшення кута зору оптичної системи в сукупності з оком – це відношення тангенса кута, під яким ми бачимо зображення за допомогою оптичної системи, до тангенса кута бачення предмета неозброєним оком.

Телескопічна (афокальна система) – оптична система, фокуси, якої лежать у нескінченності. Паралельний пучок променів, проходячи через таку систему, залишається паралельним.

Зорова труба Кеплера – афокальна система, до складу якої входять дві збиральні лінзи, що створює дійсне перевернуте зображення і призначена для розглядання віддалених предметів під збільшеним кутом зору.

Зорова труба Галілея – афокальна система, до складу якої входить збиральна та розсіювальна лінзи, що створює уявне пряме зображення і призначена для розглядання віддалених предметів під збільшеним кутом зору.

Мікроскоп – оптична система, яка призначена для розглядання малих предметів, розташованих поблизу фокуса об'єктива, під великим кутом зору.

Габаритний розрахунок оптичної системи – такий розрахунок, який дозволяє підібрати необхідні компоненти системи, їх розміри та взаємне розташування і визначити характеристики системи.

Кришталик ока – природна двоопукла лінза, що створює зображення предметів на сітківці ока. Може завдяки м'язовим зусиллям змінювати свій радіус кривини (фокусну відстань) – здійснювати акомодацию ока, що дозволяє фокусувати зображення предметів, по-різному віддалених від ока, на його сітківку.

Сітківка – розгалуження зорового нерва, який вкриває задню внутрішню поверхню ока і перетворює світлову енергію на нервові імпульси, що передаються до головного мозку.

1.2. Метод графічних побудов у геометричній оптиці (хід променів у призмах, плоских і сферичних дзеркалах, лінзах та оптичних системах)

1.2.1. Методичні вказівки та поради

1. Для побудови зображення будь-якого предмета у плоскому дзеркалі будемо розглядати предмет як сукупність окремих світних точок. Застосуємо для них правило побудови зображення точки у плоскому дзеркалі (рис. 1.1).

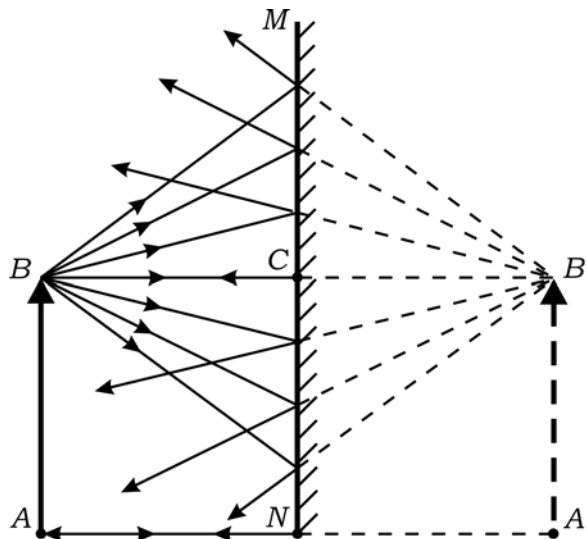


Рис. 1.1. Побудова зображення предмета у плоскому дзеркалі

Нехай предмет має вигляд стрілки AB . Побудуємо зображення точок A та B . Для цього відкладемо рівні відрізки $AN = NA'$ і $BC = CB'$. Так знаходимо точки A' і B' . Далі з'єднаємо їх прямою лінією і матимемо зображення всього предмета $A'B'$. Із побудови видно, що зображення уявне, пряме, стигматичне, розташоване відносно дзеркала симетрично до предмета.

2. Зображення довільної точки A предмета у сферичному угнутому дзеркалі можна побудувати за допомогою будь-якої пари стандартних променів. До стандартних променів належать промені з такими властивостями:

- промінь, що проходить через центр кривини угнутого сферичного дзеркала, відбиваючись від дзеркала, повертається тим самим шляхом (через центр кривини) – рис. 1.2;

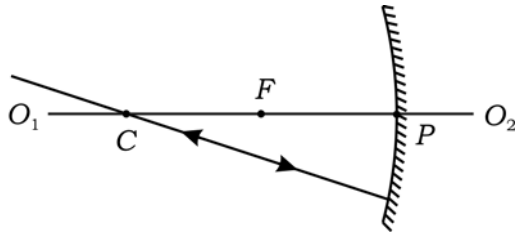


Рис. 1.2. Стандартний промінь, що проходить через центр кривини угнутого сферичного дзеркала

- промінь, що проходить через фокус угнутого сферичного дзеркала, відбиваючись від дзеркала, повертається паралельно до оптичної осі (рис. 1.3);

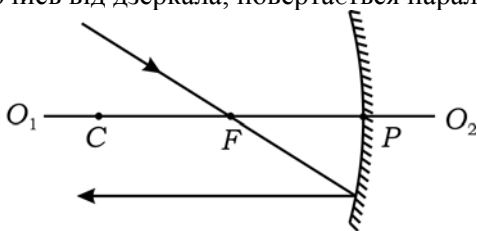


Рис. 1.3. Стандартний промінь, що проходить через фокус угнутого сферичного дзеркала

- Промінь, що проходить паралельно до оптичної осі угнутого сферичного дзеркала, відбиваючись від дзеркала, повертається через його фокус (рис. 1.4);

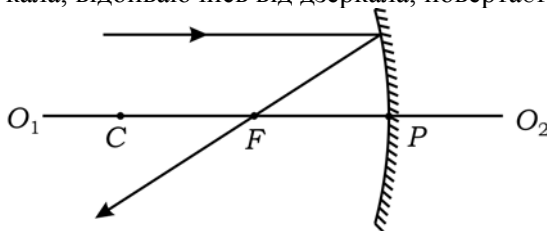


Рис. 1.4. Стандартний промінь, що проходить паралельно до головної оптичної осі угнутого сферичного дзеркала

- промінь, що потрапляє в полюс угнутого сферичного дзеркала складає з оптичною віссю O_1O_2 такий самий за величиною кут, як і промінь після відбиття ($\alpha_1 = \alpha_2$) – рис. 1.5;

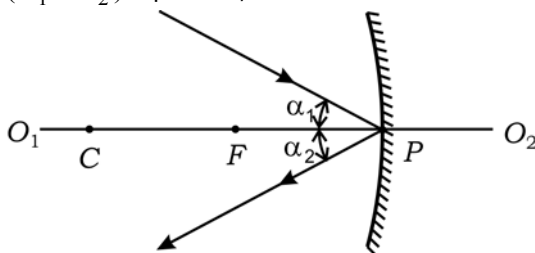


Рис. 1.5. Стандартний промінь, що потрапляє в полюс угнутого сферичного дзеркала

- бісектриса кута між довільним падаючим і відбитим променями в угнутому сферичному дзеркалі перпендикулярна до дотичної в цій точці дзеркала і проходить через центр його кривини (рис. 1.6). Ця властивість угнутого сферичного дзеркала є найбільш фундаментальною і попередні чотири його властивості можна розглядати як її наслідки (окремі випадки).

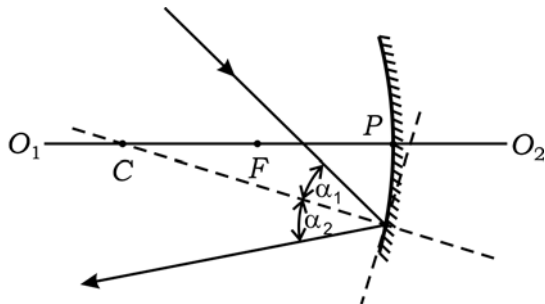


Рис. 1.6. Властивість бісектриси кута між довільним падаючим і відбитим променями в угнутому сферичному дзеркалі

3. На відміну від угнутих сферичних дзеркал графічні побудови в опуклих сферичних дзеркалах здійснюються так, що часто доводиться будувати не самі промені, а їх продовження. (Тут існує деяка аналогія з плоскими дзеркалами). Фокус і центр кривини опуклих сферичних дзеркал розташовані у "задзеркалі" і через них проходять не промені, а їх продовження, які позначають пунктирами.

4. Зображення довільної точки A предмета у сферичному опуклому дзеркалі можна побудувати за допомогою будь-якої пари стандартних променів, до яких належать такі:

- промінь, продовження якого проходить через центр кривини опуклого сферичного дзеркала, після відбиття повертається тим самим шляхом, що і падаючий промінь, тобто продовження відбитого променя також проходить через центр кривини (рис. 1.7);

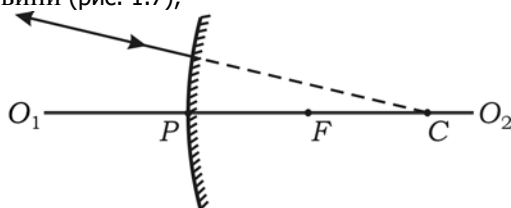


Рис. 1.7. Стандартний промінь, продовження якого проходить через центр кривини опуклого сферичного дзеркала

- промінь, продовження якого проходить через фокус опуклого сферичного дзеркала, відбиваючись від дзеркала, повертається паралельно до головної оптичної осі (рис. 1.8);

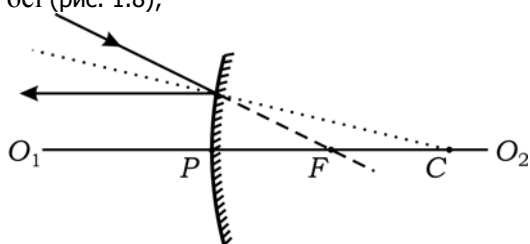


Рис. 1.8. Стандартний промінь, продовження якого проходить через фокус опуклого сферичного дзеркала

- промінь, який направлений паралельно до головної оптичної осі, падаючи на опукле сферичне дзеркало, відбивається так, що продовження відбитого променя проходить через фокус дзеркала (рис. 1.9). (Якщо порівняти це з попереднім визначенням стандартного променя, то легко побачити, що тут, фактично, використаний закон ГО про оборотність променів);

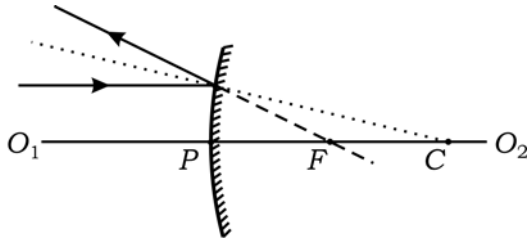


Рис. 1.9. Стандартний промінь, що направлений паралельно до головної оптичної осі, відбивається від опуклого сферичного дзеркала

- промінь, що потрапляє в полюс опуклого сферичного дзеркала, складає з оптичною віссю O_1O_2 такий самий за величиною кут, як і промінь після відбиття ($\alpha_1 = \alpha_2$) – рис. 1.10;

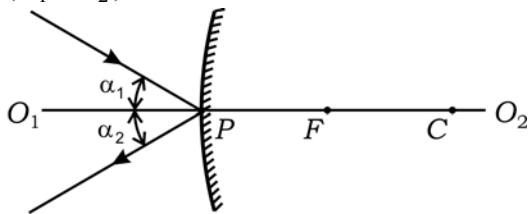


Рис. 1.10. Стандартний промінь, що потрапляє в полюс опуклого сферичного дзеркала

- бісектриса кута між променем, що потрапляє в будь-яку точку опуклого сферичного дзеркала, та відбитим променем перпендикулярна до дотичної в цій точці дзеркала і проходить через центр кривини дзеркала – рис. 1.11. Ця властивість сферичного дзеркала є, напевно, найбільш фундаментальною, і попередні властивості є її окремими випадками;

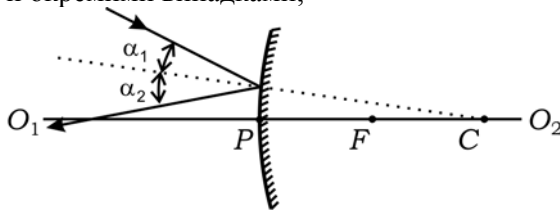


Рис. 1.11. Властивість бісектриси кута між променем, що потрапляє в будь-яку точку опуклого сферичного дзеркала

5. Вибір конкретної пари стандартних променів довільний. Формальних рекомендацій щодо їх вибору з ознакою якихось їх переваг ми дати не можемо. Однак, як на нашу думку, при графічних побудовах дуже продуктивним прийомом є застосування променя, який проходить через точку-предмет, зображення якої ми хочемо знайти, і проведений під довільним кутом до головної оптичної осі, а також одного із стандартних променів, який паралельний до першого. Після відбиття ці два промені перетинаються в одній точці, яка розташована у фокальній площині – побічному фокусі.

Вдалим також вважати прийом, що полягає в тому, що при розв'язуванні задачі пускають промінь уздовж предмета, якщо він являє собою відрізок прямої AB . Тоді відбитий від дзеркала промінь одразу ж містить інформацію про напрямок, уздовж якого лежить зображення $A'B'$.

6. Звернемо увагу на те, що під час побудови у сферичних дзеркалах сферичну поверхню фактично заміняють на плоску. Це справедливо для параксіального на-

ближення та у випадку використання дзеркал з великим радіусом кривини (див. [4], приклад 3.14).

7. Дано кілька загальних порад щодо застосування методу графічних побудов:

✓ при графічних побудовах ефективно використовувати кольорові олівці або фломастери. Це принаймні дозволить розрізнити промені, які задані умовою задачі, і промені, побудовані в ході розв'язування задачі;

✓ при розв'язуванні задачі методом графічних побудов слід детально пояснювати кожний наступний крок побудови. Це дозволить зрозуміти й оцінити правильність ходу розв'язування задачі;

✓ для визначення точки зображення, достатньо перетину двох променів, які виходять зі спряженої точки предмета. Один із цих променів може йти вздовж головної оптичної осі, що дозволяє стверджувати про перетин іншого променя з оптичною віссю. Введення до розгляду третього, четвертого або ще більшої кількості променів зайве і може бути виправданим лише як спосіб перевірки правильності первинної побудови;

✓ при розв'язуванні задач методом графічних побудов треба чітко усвідомлювати, у яких випадках треба працювати з променями, а в яких – з їх продовженнями. При цьому треба бути твердо переконаним у тому, що в першому випадку отримане зображення дійсне, а в другому уявне.

1.2.2. Запитання та відповіді

1.2.1. Побудуйте хід променів при формуванні зображення точки у плоскому дзеркалі.

Плоске дзеркало змінює не конфігурацію світлових пучків, а лише напрямок їх поширення внаслідок відбиття. Сумісна дія дзеркала й ока людини дає змогу бачити зображення предметів, від яких на дзеркало падають світлові пучки (рис. 1.12).

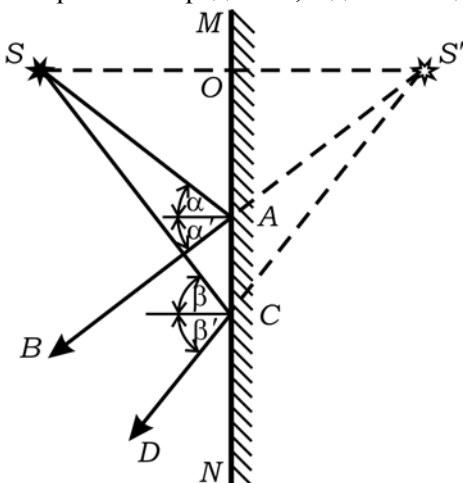


Рис. 1.12. Побудова зображення точки у плоскому дзеркалі

Нехай на дзеркало MN падає пучок світла від точкового джерела S . Оберемо два довільні промені, які падають на дзеркало під різними кутами α і β . Кути відбиття α' і β' за законом відбиття дорівнюють кутам падіння. Унаслідок цього від дзеркала поширюється пучок такої самої розбіжності. Якщо продовжити відбиті промені за дзеркало, то вони перетнуться в точці S' . З'єднавши прямою лінією точки S і S' , одержимо два рівні трикутники $\triangle SAO$ і $\triangle S'AO$ (або $\triangle SCO$ і $\triangle S'CO$). За умови рівності цих трикутників відрізки SO і $S'O$ рівні між собою. Отже, у плоскому дзеркалі предмет і його зображення симетричні відносно дзеркала.

1.2.2. Назвіть фізичні особливості методу отримання зображення у плоскому дзеркалі.

- Розмір зображення дорівнює розміру предмета;
- зображення уявне, оскільки утворюється перетином не самих відбитих променів, а їх продовжень у "задзеркаллі";
- унаслідок закону відбиття зображення предмета та сам предмет розташовані симетрично відносно дзеркальної поверхні;
- симетрія предмета та зображення, як кажуть, стає "дзеркальною": праве стає лівим;
- при відбитті від плоского дзеркала пучок світлових променів, що виходять з однієї точки, перетворюється на пучок, у якому продовження всіх світлових променів перетинаються (збираються) в одній точці: гомоцентричний пучок променів не втрачає своїх властивостей. Тобто зображення, яке дає плоске дзеркало, є стигматичним (непотвореним).

1.2.3. При виготовленні плоских дзеркал їх поверхні полірують. До якої міри слід зменшувати розміри мікронерівностей поверхні, щоб вони не шкодили плоскому дзеркалу виконувати своє призначення?

Плоским оптичним дзеркалом називається полірована поверхня, яка відбиває світлові промені згідно із законом відбиття і може створювати зображення предметів. Плоска поверхня може давати правильне (непотворене) зображення і називається дзеркальною, якщо розміри мікронерівностей на її поверхні не перевищують довжину хвилі λ падаючого світла. Якщо нерівності поверхні більші за λ , то спостерігається т. зв. дифузне розсіяння.

1.2.4. Які типи неплоских дзеркал ви знаєте?

Неплоскі дзеркала залежно від того, яким математичним законом описуються їх поверхні, можуть бути гіперболічними, параболічними, еліптичними тощо. Найбільш поширеними на практиці неплоскими дзеркалами є сферичні дзеркала, які мають дзеркально відбиваючу поверхню у вигляді сферичного сегмента.

Сферичні дзеркала бувають угнутими (рис. 1.13, а) й опуклими (рис. 1.13, б).

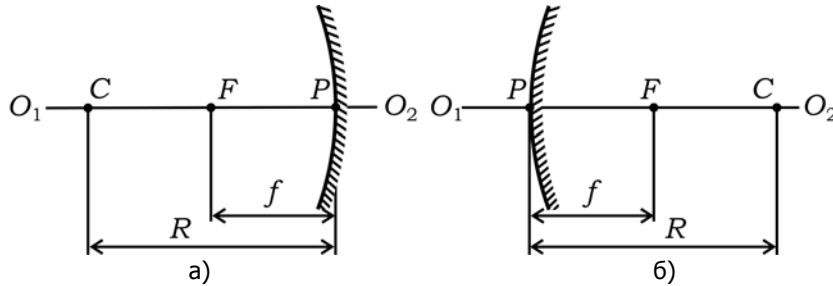


Рис. 1.13. Типи сферичних дзеркал: угнуте (а) та опукле (б):
 F – головний фокус дзеркала; C – центр кривини;
 P – полюс; O_1O_2 – головна оптична вісь

1.2.5. Дайте визначення основних характеристик (параметрів) сферичного дзеркала.

- Оптичним центром, або центром кривини сферичного дзеркала (точка C на рис. 1.13) називають центр сфери, з якої вирізаний сферичний сегмент, що утворює дзеркало;
- полюс сферичного дзеркала – вершина сферичного сегмента;
- головна оптична вісь сферичного дзеркала – пряма, яка проходить через оптичний центр і полюс дзеркала;
- головна оптична вісь виділена з усіх інших прямих, що проходять через оптичний центр, тільки тим, що вона є віссю симетрії дзеркала. Усі інші прямі, що проходять через оптичний центр, є побічними оптичними осями;
- головний фокус угнутого сферичного дзеркала – точка F , у якій збирається пучок паралельних до головної оптичної осі променів після їх відбиття від дзеркала (рис. 1.14). У вгнутого сферичного дзеркала головний фокус дійсний. Він утворений на перетині відбитих променів;
- фокусна відстань f угнутого сферичного дзеркала – відстань від фокуса F до полюса P дзеркала (рис. 1.14);

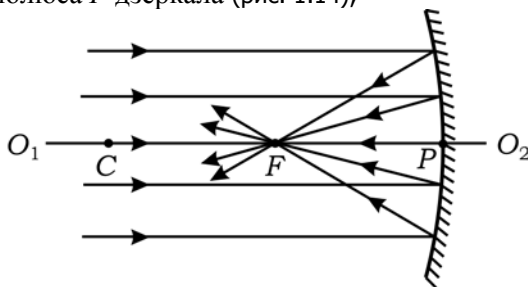


Рис. 1.14. Відбиття паралельного пучка променів від угнутого дзеркала

- головний фокус опуклого сферичного дзеркала – точка F , у якій збирається продовження пучка променів, паралельних до головної оптичної осі після їх від-

биття від дзеркала (рис. 1.15). У опуклого сферичного дзеркала головний фокус уявний. Він утворений на перетині продовжень відбитих променів.

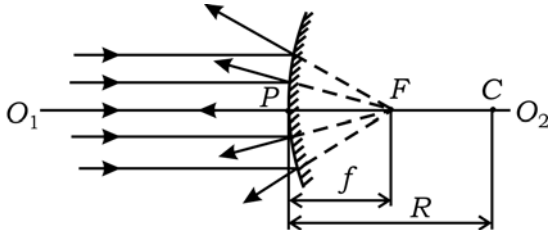


Рис. 1.15. Відбиття паралельного пучка променів від опуклого дзеркала

1.2.6. Як пов'язані між собою величини фокусних відстаней і радіусів кривини сферичних дзеркал? Чи однакове це співвідношення для вгнутого та опуклого дзеркала? У чому полягає їх відмінність?

Між фокусними відстанями f сферичних дзеркал та їх радіусами кривини R існує зв'язок $f = \frac{R}{2}$. Тобто і для угнутого, і для опуклого дзеркал їх фокуси розташовані посередині відстані між полюсом і центром кривини. Відмінність полягає в тому, що фокус угнутого дзеркала розташований по той самий бік від дзеркала, що і предмет (рис. 1.14). Фокус опуклого дзеркала розташований з протилежного щодо дзеркала боку від предмета, де розташовані не промені, а їх продовження, у "задзеркалі" (рис. 1.15).

1.2.7. У вгнуте дзеркало радіусом R , розміщене горизонтально, наливають воду. Як змінюється розташування фокусної точки на осі залежно від товщини шару води?

Із рис. 1.16 видно, що відбитий промінь заломлюється на виході з води і перетинає головну оптичну вісь на відстані, меншій від $R/2$. Зі збільшенням товщини шару води до $d = f = R/2$ точка перетину променем головної оптичної осі наближається до фокуса дзеркала, який розташований від полюса дзеркала на відстані $f = R/2$, і далі залишається незмінною.

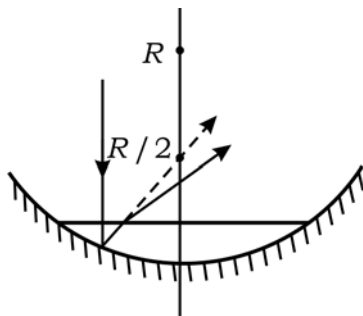


Рис. 1.16. До запитання 1.2.7

1.2.8. Чи можна використовувати в методі графічних побудов промені, які не проходять, наприклад, через лінзу або не потрапляють на сферичне дзеркало?

Так, можна. Хоча такі промені реально не беруть участі в утворенні зображення (див. рис. 1.17 та 1.18), вони можуть бути використані для побудов.

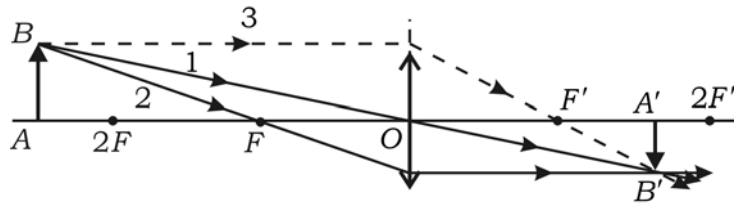


Рис. 1.17. Побудова зображення в тонкій збиральній лінзі

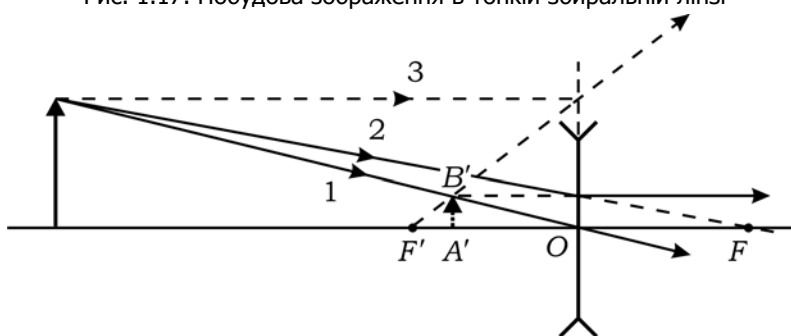


Рис. 1.18. Побудова зображення в тонкій розсіювальній лінзі

1.2.9. У чому полягає принципова відмінність фокусів збиральної та розсіювальної лінз?

Фокус F' для збиральної лінзи дійсний. Він побудований на перетині заломлених променів і розташований у просторі зображень. Фокус F' для розсіювальної лінзи уявний. Він побудований на перетині продовжень заломлених променів і розташований по один бік із предметом і зображенням (зліва від лінзи). Для розсіювальної лінзи передній F і задній F' головні фокуси начебто "міняються місцями", тобто F' стає зліва від лінзи, а F – справа (рис. 1.17 та 1.18).

1.2.10. Розгляньте на конкретному прикладі методику побудови зображень у товстій лінзі (в ідеальній центрованій оптичній системі).

Нехай є товста лінза (оптична система), яка задана головними площинами H та H' , головною оптичною віссю O_1O_2 і головними фокусами F та F' . Побудуємо зображення в цій системі предмета AB (рис. 1.19). Проведемо спочатку з точки B промінь BC , паралельний головній оптичній осі, до головної площини H . Отриману точку C перенесемо паралельно до головної оптичної осі на головну площину H' у точку C' . Далі промінь піде через задній головний фокус F' .

Другий промінь з точки B проведемо у вузлову точку Q . Цей промінь вийде із системи з точки Q' під тим самим кутом до головної оптичної осі, що й промінь BQ . Точка перетину двох променів, які виходять із системи, дає зображення B' . Можна було скористатися іншим променем, який йде з точки B через передній фокус F до головної площини H . Отриману точку D перенесемо паралельно на площину H' у точку D' і далі, паралельно головній оптичній осі, до зображення B' .

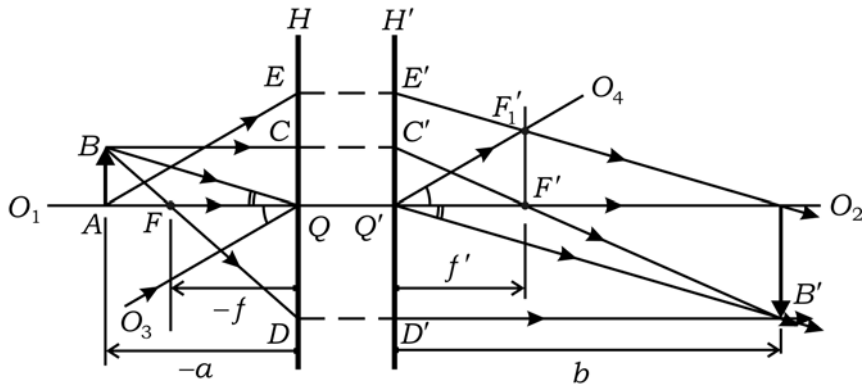


Рис. 1.19. Побудова зображення в оптичній системі (товстій лінзі)

Для знаходження зображення точки A проведемо довільний промінь AE і паралельний йому промінь O_3Q . Після проходження цього променя через оптичну систему він у вигляді променя $Q'O_4$ виходить із системи під тим самим кутом до головної оптичної осі, що й промінь O_3Q . Проведемо через фокус F' фокальну площину і знайдемо точку F'_1 – побічний фокус, через який пройде заломлений промінь $Q'O_4$. Точку E перенесемо паралельно головній осі до задньої головної площини в точку E' . Далі маємо заломлений промінь $E'F'_1A'$, який визначить зображення точки A – точку A' .

При визначенні відстаней відстані a та b і фокусних відстаней f та f' , їх вимірюють від головних площин (рис. 1.19). За правилом знаків величини a та f від'ємні, а b та f' додатні.

1.2.11. Повітряна кулька діаметром d розташована у склі з показником заломлення n . Яким здається діаметр цієї кульки при зовнішньому спостереженні?

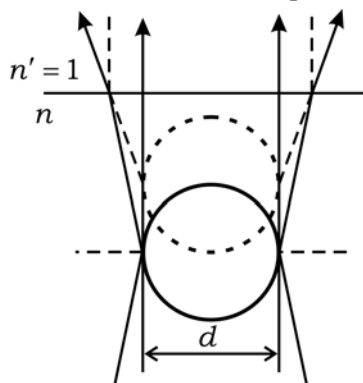


Рис. 1.20. До запитання 1.2.17

Як видно з рис. 1.20, у випадку плоскої поверхні скла видимий діаметр кульки дорівнює d , змінюється тільки уявна глибина розташування кульки під поверхнею скла.

1.2.12. Якими загальними характеристиками визначається будь-яке зображення, отримане за допомогою оптичної системи?

Зображення бувають прямими або перевернутими, дійсними або уявними, збільшеними або зменшеними.

1.2.13. Дайте визначення дійсного і уявного зображення. Що таке спряжені точки (лінії, площини)?

Зображенням точки-предмета S називається точка S' перетину принаймні двох променів, що вийшли з точки-предмета і пройшли через оптичну систему OC (рис. 1.19, а). Таке зображення називається дійсним.

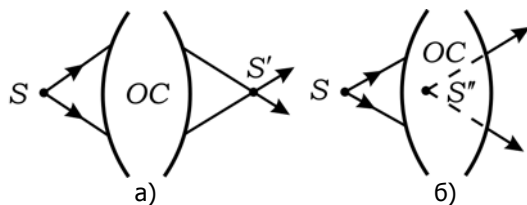


Рис. 1.21. До визначення зображення точки в ідеальній оптичній системі

Якщо перетинаються продовження променів, то зображення S'' уявне (рис. 1.21, б). Точки S і S' або S і S'' , називаються *спряженими*. Промені, що вийшли з однієї спряженої точки після проходження OC збираються в іншій спряженій точці. Якщо предмет протяжний, то будують зображення окремих його точок. Подібно до спряжених точок існують спряжені лінії та спряжені площини.

1.2.14. Що таке ідеальна оптична система і для яких променів її можна реалізувати?

В ідеальних оптичних системах зображення стигматичне, тобто неспотворене, геометрично подібне предмету. У таких системах зберігається гомоцентричність пучків. Ідеальну оптичну систему можна реалізувати з достатнім наближенням за допомогою центрованої оптичної системи, якщо обмежитись параксіальними променями.

1.2.15. Як формується зображення в оптичних системах, які складаються із двох або більшої кількості лінз?

У багатьох оптичних приладах світло послідовно проходить через дві або кілька лінз. Зображення предмета, що дає перша лінза, служить предметом для другої лінзи, яка, у свою чергу, формує зображення цього предмета і т. д. Якщо в оптичній системі утворюються проміжні зображення, то їх можна використовувати як об'єкт для наступних побудов, незалежно від того, вони дійсні чи уявні.

Загальне лінійне збільшення β системи, наприклад, із двох лінз дорівнює добутку лінійних збільшень обох лінз $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$.

1.2.16. Маємо випадок, коли розбіжний пучок променів, який виходить з точкового джерела S (рис. 1.22), після розбіжної лінзи ще дужче розходить, і продов-

ження цих променів перетинаються в точці S' , створюючи уявне зображення. Чи означає це, що ми маємо справу з неіснуючим, віртуальним зображенням S' , яке не можна зафіксувати на фотоплівці?

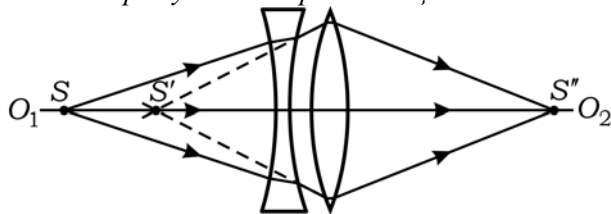


Рис. 1.22. Роль збиральної лінзи в перетворенні уявного зображення S' на дійсне S''

Цей розбіжний пучок може бути перетворений на збіжний, якщо на його шляху поставити збиральну лінзу з відповідними параметрами (рис. 1.22). Тоді можна отримати реальне (дійсне) зображення S'' предмета S , яке фіксується на екрані або фотоплівці. Одночасно уявне зображення S' можна розглядати і як предмет, зображенням якого є S'' . Тобто S'' є дійсним зображенням дійсного предмета S і водночас – дійсним зображенням уявного предмета S' . Таким чином, зображення S'' можна зафіксувати на фотоплівці.

Треба пам'ятати, що роль збиральної лінзи виконує також око людини, оскільки воно може утворити дійсне зображення уявного предмета, перетворити уявне зображення на дійсне.

1.2.17. У чому полягає закон оборотності оптичних променів? Що означає властивість оптичних систем, яка називається взаємністю (або невзаємністю)?

Якщо промінь падає з першого середовища на межу з другим середовищем під кутом φ , заломлюється на межі і переходить у друге середовище під кутом θ (рис. 1.25), то промінь, пущений у зворотному напрямку з другого середовища під кутом θ , вийде в першому середовищі під кутом φ . Аналогічно буде, якщо скористатись і відбитим променем. Принцип оборотності променів зберігається за будь-якої кількості заломлень і відбиттів на межах оптичних систем. Він справедливий завжди і може бути застосований для всіх задач побудови зображень в оптичних системах.

Взаємність оптичної системи полягає в тому, що знак і величина її оптичної сили не залежить від того, з якого боку оптичної системи на неї падає оптичний промінь. У випадку оптичної системи із взаємними властивостями обидва фокуси системи дійсні, або обидва уявні (більш докладно див. [28], приклад 6.8).

Зауважимо, що існують спеціально сконструйовані пристрої, які характеризуються невзаємним пропусканням світла: в одному (прямому) напрямку і мінімальним у зворотному. Такі пристрої називаються *оптичними вентилями*, або *невзаємними елементами* (див. запитання 10.2.6).

1.3. Геометрична оптика у формулах

1.3.1. Короткі теоретичні відомості

Для центрованої оптичної системи (позначення величин див. на рис. 1.23) справедливі такі визначення та формули:

- оптичні сили сферичної заломлюючої поверхні:

$$\Phi = \frac{n_n - n_{ст}}{R}, \quad (1.1)$$

де n_n – показник заломлення середовища, у яке промінь заломлюється ("нове" середовище); $n_{ст}$ – показник заломлення середовища, з якого промінь падає на заломлюючу поверхню ("старе" середовище); R – радіус сферичної заломлюючої поверхні (з урахуванням знака);

- рівняння Аббе для сферичної заломлюючої поверхні:

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \Phi; \quad (1.2)$$

- співвідношення між задньою f' і передньою f фокусними відстанями та оптичною силою Φ :

$$f' = \frac{n'}{\Phi}; \quad f = -\frac{n}{\Phi}; \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}; \quad (1.3)$$

- формула Гаусса:

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1; \quad (1.4)$$

- формула Ньютона

$$x \cdot x' = f \cdot f'; \quad (1.5)$$

- інваріант Лагранжа–Гельмгольца:

$$n' \cdot u' \cdot y' = n \cdot u \cdot y; \quad (1.6)$$

- умова синусів Аббе записується для великих апертур пучка, коли порушується параксіальність променів, і має вигляд

$$n' \cdot \sin u' \cdot y' = n \cdot \sin u \cdot y; \quad (1.7)$$

- оптична сила тонкої лінзи в середовищі з показником заломлення n дорівнює

$$\Phi = (n_0 - n) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \text{ де } n_0 - \text{показник заломлення лінзи}; \quad (1.8)$$

- оптична сила товстої лінзи товщиною d :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n_0} \Phi_1 \Phi_2. \quad (1.9)$$

Ця формула справедлива й для системи з двох тонких лінз, між якими розташоване середовище з показником заломлення n_0 ;

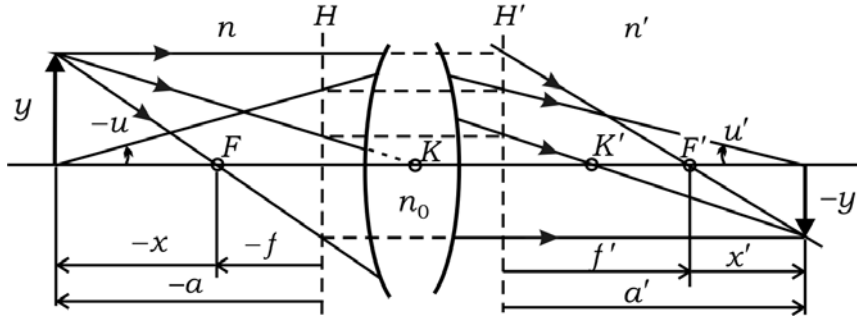


Рис. 1.23. До формул (1.1) – (1.9)

• головні площини H і H' розташовані від вершин поверхонь товстої лінзи (рис. 1.24) на відстанях:

$$S_H = \frac{d \Phi_2}{n_0 \Phi}; \quad S_{H'} = -\frac{d \Phi_1}{n_0 \Phi}; \quad (1.10)$$

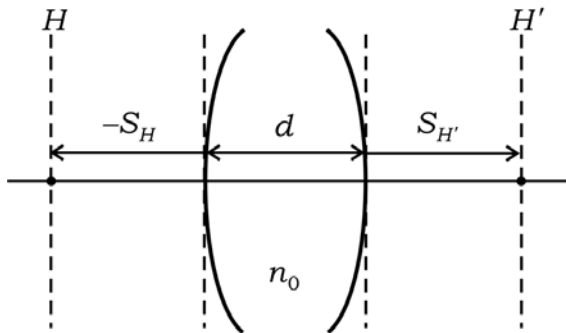


Рис. 1.24. До формули (1.10)

• Фокусна відстань сферичного дзеркала:

$$f = \frac{n}{\Phi} = \frac{R}{2}, \quad \text{де } R \text{ – радіус кривини дзеркала}; \quad (1.11)$$

• формула сферичного дзеркала:

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{2}{R} n, \quad (1.12)$$

де a та a' – відстані від дзеркала до предмета та його зображення, відповідно;
 $\frac{2}{R} n = \Phi$ – оптична сила дзеркала.

1.3.2. Запитання та відповіді

1.3.1. Сформулюйте закон відбиття світла.

Відбитий промінь лежить у площині падіння, яка проходить через промінь, що падає, і нормаль \vec{N} до поверхні, що відбиває, у точці падіння. Кут падіння φ дорівнює куту відбиття φ' (рис. 1.25).

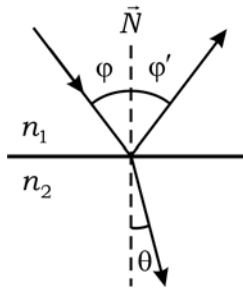


Рис. 1.25. До визначення законів відбиття та заломлення

1.3.2. Сформулюйте закон заломлення світла.

Заломлений промінь лежить у площині падіння. Кути падіння φ і заломлення θ зв'язані співвідношенням (законом Снеліуса):

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \theta, \quad (1.13)$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення першого й другого середовищ, відповідно.

1.3.3. У чому полягає явище повного внутрішнього відбиття (ПВВ)? Як визначити граничний кут ПВВ?

Повне внутрішнє відбиття спостерігається при падінні світла із середовища з більшою оптичною густиною на межу середовища з меншою оптичною густиною ($n_1 > n_2$). Граничний кут ПВВ, для якого $\theta = 90^\circ$, визначається за формулою

$$\varphi_{\text{ПВВ}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (1.14)$$

1.3.4. Чому дорівнює мінімальний кут відхилення променя, який проходить через призму паралельно її основі?

Кут відхилення променя (рис. 1.26), який проходить через призму паралельно її основі, є мінімальним кутом відхилення. Він дорівнює

$$\sigma_0 = 2 \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \frac{\theta}{2}\right) - \theta,$$

де n – показник заломлення матеріалу призми для певної довжини хвилі монохроматичного світла; n_0 – показник заломлення середовища, яке оточує призму; θ – заломлюючий кут призми.

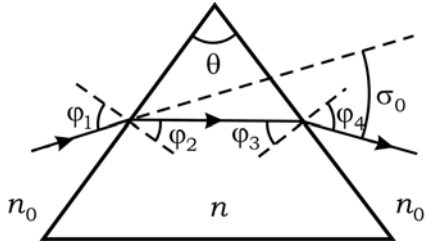


Рис. 1.26. Проходження променя через призму за мінімального кута відхилення

Звернемо увагу на те, що в цьому випадку промінь у призмі йде паралельно до її основи.

1.3.5. Чи можна передбачити хоча б приблизне розташування головних площин у різних типах товстих лінз?

Головні площини і головні точки можуть бути як усередині товстої лінзи, так і поза нею. Вони (як і головні фокуси) можуть бути розташовані несиметрично відносно крайніх поверхонь товстих лінз (рис. 1.27). Для товстої лінзи у формі кулі так само, як і для тонких лінз, обидві головні площини (точки) збігаються.

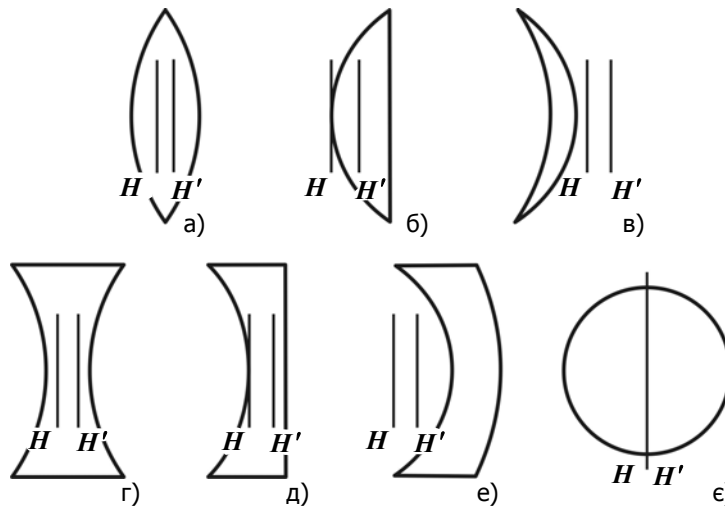


Рис. 1.27. Положення головних площин для основних типів товстих лінз. Типи лінз: а), г) – біформа; б), д) – планформа; в), е) – меніск; є) – куля

Доведіть правильність наведених тут відомостей про розташування головних площин для різних типів товстих лінз.

1.3.6. Які інваріанти ГО вам відомі?

Нагадаємо, що інваріантною в оптиці величиною називають величину, яка незмінна в різних середовищах (у середовищах з різним показником заломлення). До таких величин, безумовно, належать:

- інваріант Лагранжа – Гельмгольца:

$$n' \cdot u' \cdot y' = n \cdot u \cdot y ;$$

- умова синусів Аббе:

$$n' \cdot \sin u' \cdot y' = n \cdot \sin u \cdot y ;$$

- інваріант Аббе:

$$n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right) ; \quad (1.15)$$

- закон заломлення (закон Снеліуса):

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \theta .$$

1.3.7. Чи залежить фокусна відстань сферичного дзеркала від показника заломлення середовища, у якому розташоване це дзеркало, і чому?

Ні, фокусна відстань (f) сферичного дзеркала не залежить від показника заломлення (n) середовища, у якому воно розташоване, що має підтвердження у вигляді формули (1.11). Фізичне пояснення відсутності залежності f від n полягає в тому, що у сферичному дзеркалі відбувається відбиття світла, кут якого не залежить від показника заломлення середовища. На відміну від дзеркал, фокусна відстань лінз залежить від показника заломлення середовища тому, що в лінзі відбувається заломлення світлових променів на межі середовищ з різними показниками заломлення.

Вищенаведене щодо сферичних дзеркал справедливе й у випадку, коли предмет і зображення розташовані в однорідному середовищі, і несправдливе у випадку часткового заповнення простору предмета і зображення середовищем з неоднорідним показником заломлення (див. запитання 1.2.7), що буде враховано при розв'язуванні прикладу 1.7.

1.3.8. Які аберації, що властиві лінзам, відсутні у дзеркал?

Відсутність залежності фокусної відстані f від показника заломлення n середовища для сферичних дзеркал (див. формули (1.11) та (1.12)) викликає істотну перевагу останніх перед лінзами – відсутність у них хроматичної аберації.

1.3.9. Сформулюйте принцип Ферма та оцініть його значення в оптиці.

Принцип Ферма формулюється так: світло поширюється по такому шляху, для проходження якого йому необхідний екстремальний час: мінімальний, максимальний або стаціонарний. Останній випадок означає, що час проходження світла всіх можливих між двома точками шляхів однаковий. Промені з такими властивостями називають *тавтохронними*. Це є надзвичайно важливим наслідком принципу Ферма для оптики (див. запитання 1.3.10).

Принцип Ферма може бути сформульованим з наголосом не на екстремальність часу проходження світла, а на рівність оптичного шляху ($n \cdot ds$). Ці два підходи до формулювання принципу Ферма пов'язані між собою: ділянку шляху ds (рис. 1.28)

світло проходить за час $dt = \frac{ds}{v}$, де v – швидкість світла в даному місці шляху.

Оскільки $v = \frac{c}{n}$, то величина $dt = \frac{n \cdot ds}{c}$ і час проходження світла шляху між точками 1 і 2 дорівнює $t = \frac{1}{c} \int_1^2 n \cdot ds = \frac{S}{c}$, де S – оптична довжина шляху. В однорідному середовищі $S = n \cdot s$.

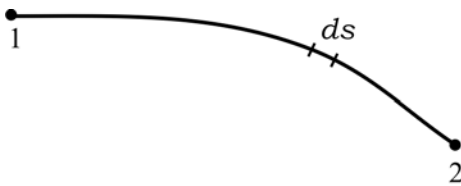


Рис. 1.28. До формулювання принципу Ферма

Із принципу Ферма випливають три закони геометричної оптики: заломлення, відбиття та прямолінійності поширення.

1.3.10. У чому полягають таутохронні властивості лінзи? Наскільки ці властивості лінзи принципово важливі в оптиці?

Згідно з принципом Ферма всі шляхи, які проходить світло між двома точками, потребують однакового часу, тобто вони таутохронні. Остання властивість є надзвичайно важливим наслідком принципу Ферма для оптики і, зокрема, для принципу дії лінзи – базового оптичного елемента. Лінза – таутохронна система. Усі оптичні шляхи від предмета до його зображення однакові. Саме тому всі хвилі від окремої точки предмета до відповідної точки зображення приходять в одній фазі, хоча йдуть через лінзу різними шляхами. Це дозволяє хвилям підсилювати одна одну, у результаті чого виникає (формується) зображення. Якби лінзи не мали б таутохронних властивостей, їх не можна було б застосовувати для формування зображень.

1.3.11. Скількима параметрами можна характеризувати збільшення оптичних систем?

Оптичні системи, як і окремі лінзи чи сферичні дзеркала, створюють зображення предметів або змінюють хід променів. Для порівняння розмірів зображення і предмета, а також для аналізу зміни кутів відхилення променів від головної оптичної осі, що впливає на розміри зображення на сітківці ока, вводяться поняття збільшення оптичної системи.

Збільшення бувають чотирьох типів: 1) поперечне (лінійне) збільшення; 2) поздовжнє збільшення; 3) кутове збільшення; 4) збільшення кута зору.

• Поперечним (лінійним) збільшенням називається відношення лінійного розміру зображення, виміряного перпендикулярно до головної оптичної осі, до відповідного розміру предмета (рис. 1.29):

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (1.16)$$

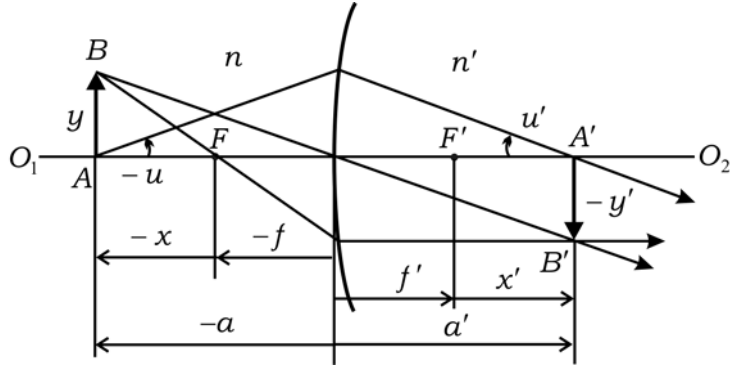


Рис. 1.29. До визначення поперечного (лінійного) і кутового збільшення

- Поздовжнє збільшення визначається відношенням розміру $\Delta x'$ малого елемента зображення вздовж головної оптичної осі до відповідного розміру Δx предмета (рис. 1.30):

$$\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x}. \quad (1.17)$$

Під $\Delta x'$ можна розуміти величину, на яку посувається зображення точки-предмета при її переміщенні на величину Δx (рис. 1.30).

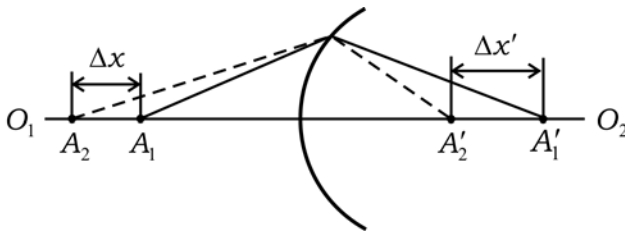


Рис. 1.30. До визначення поздовжнього збільшення

- Окрім лінійного збільшення, оптичну систему можна також характеризувати кутовим збільшенням:

$$\gamma = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} \approx \frac{u'}{u}, \quad (1.18)$$

де u та u' – кути відхилення від головної оптичної осі спряжених променів (рис. 1.29), проведених від осьової точки предмета до спряженої точки зображення.

Якщо з обох боків системи одне і те ж середовище, то

$$\beta \cdot \gamma = 1. \quad (1.19)$$

Таким чином, при збільшенні лінійних розмірів зображення промені, що його утворюють, сходяться під меншим кутом. Ця обставина важлива при деякому аналізі оптичних приладів.

- Збільшення кута зору характеризує оптичну систему в сукупності з оком. Збільшення кута зору – це відношення тангенса кута ϕ' , під яким ми бачимо зо-

бачення за допомогою оптичної системи, наприклад, лупи, до тангенса кута φ бачення предмета неозброєним оком (рис. 1.31):

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (1.20)$$

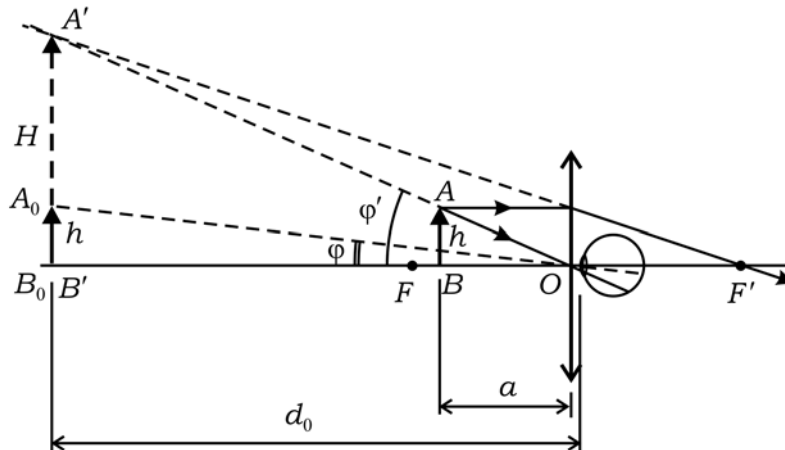


Рис. 1.31. Побудова зображення в лупі

На рис. 1.31: A_0B_0 – предмет, який спостерігач розглядає неозброєним оком, розташовуючи його на відстані найкращого зору $d_0 = 25$ см. Спостерігач бачить його під кутом φ ; AB – той самий предмет при спостереженні через лупу. Він розташований біля фокуса, але трохи ближче до лінзи; $A'B'$ – зображення предмета, яке дає лупа. Зазвичай воно розташоване також на відстані d_0 і спостерігач бачить його під кутом φ' , більшим за φ . Завдяки цьому збільшенню кута зору на сітківці ока спостерігача утворюється більше зображення, ніж при спостереженні неозброєним оком, і спостерігачу здається, що предмет неначе наблизився до нього. А це, у свою чергу, дозволяє розглядати дрібніші деталі предмета (збільшується роздільна здатність).

1.3.12. Чому у визначенні поздовжнього збільшення йдеться про "малі" елементи зображення $\Delta x'$ і предмета Δx ?

Оскільки поздовжнє збільшення сильно змінюється при переміщенні вздовж головної оптичної осі, воно вводиться для відрізка малої довжини елемента зображення $\Delta x'$ (і відповідно предмета Δx).

1.3.13. Як довести, що лише зображення, отримане в параксіальному наближенні, може бути стигматичним?

Нагадаємо, що стигматичним називають неспотворене (без аберацій) зображенням. Висновок щодо стигматичності зображень у параксіальному наближенні впливає з аналізу рівняння Аббе (1.2).

При заданому положенні об'єкта A , яке задається відрізком a (рис. 1.29), із формули (1.2) впливає відповідний відрізок a' , який не залежить від кута u . Тобто лише в параксіальному наближенні, для якого справедливе рівняння Аббе (1.2), усі промені, що виходять з однієї точки A на головній оптичній осі O_1O_2 , після заломлення на сферичній поверхні перетинаються хоча б наближено в одній точці A' , що також лежить на осі O_1O_2 . Точка A' буде зображенням точки A в параксіальному наближенні. Саме тому тільки в параксіальному наближенні можна казати про гомоцентричні промені і про стигматичні зображення.

1.3.14. Який знак має коефіцієнт поперечного збільшення β ?

За формулою (1.21) знак коефіцієнта β поперечного збільшення визначається знаком співвідношення $\frac{y'}{y}$. З урахуванням правил знаків поперечне збільшення для прямого зображення буде додатним, а для перевернутого – від'ємним.

Якщо предмет або його зображення перебувають у нескінченності, то лінійне збільшення втрачає сенс.

1.3.15. Чи існує зв'язок між лінійним і кутовим збільшеннями системи? Доведіть.

Лінійне збільшення може бути записане як $\beta = \frac{n \cdot u'}{n' \cdot u}$, а кутове як $\gamma = \frac{u}{u'}$. Тому їх добуток $\beta\gamma = \frac{n}{n'}$. Якщо предмет і зображення розташовані в одному й тому самому середовищі ($n = n'$), то

$$\gamma = \frac{1}{\beta}. \quad (1.21)$$

1.3.16. Як відомо, зв'язок між поздовжнім (α) і поперечним (β) збільшеннями для випадку, коли предмет і зображення розташовані в одному й тому самому середовищі, представляється у вигляді формули $\alpha = \beta^2$: поздовжнє збільшення пропорційне (дорівнює) квадрату поперечного збільшення. Які наслідки впливають із такої залежності для практики оптичних спостережень?

Така залежність вказує на те, що жодна, навіть ідеальна, оптична система не дає геометрично подібного просторового зображення об'ємного предмета. Завдяки цій властивості кажуть про перспективу – бачення в далечині об'ємних предметів. Перспектива, яка обумовлена ступенем віддаленості предмета від глядача, передбачає появу уявних змін у розмірах зображення (рис. 1.32).

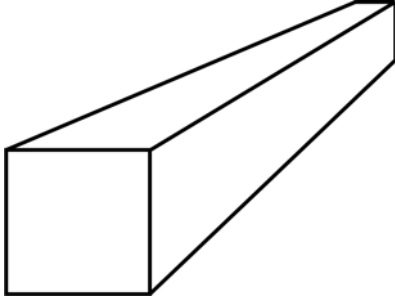


Рис. 1.32. Зображення довгого бруска у вигляді паралелепіпеда з урахуванням перспективи, яка є наслідком формули $\alpha = \beta^2$

1.3.17. Перед лінзою розміщено скляну кульку сферичної форми з центром на подвійній фокусній відстані від неї. Якої форми буде її зображення?

Відомо, що предмет, розмішений на відстані $a = -2f$ перед лінзою, дає зображення на відстані $a' = 2f'$ від лінзи з поперечним збільшенням $\beta = -1$ (рис. 1.33), де f та f' – передня і задня фокусні відстані лінзи.

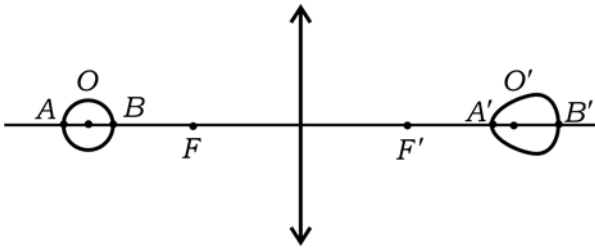


Рис. 1.33. До запитання 1.3.16

Однак поперечне збільшення α пов'язане з поздовжнім збільшенням β співвідношенням $\alpha = \beta^2$, тому зображення точки A буде в точці A' , що розташована від центра зображення на відстані $\Delta x' = \left(\frac{f+r}{f}\right)^2$, а відстань $B'O'$ дорівнюватиме $\left(\frac{f-r}{f}\right)^2$, де r – радіус скляної кульки. Це викличе деформацію зображення кульки, як показано на рис. 1.33.

1.3.18. Повздовжнє збільшення в загальному випадку не дорівнює поперечному збільшенню. Це призводить до того, що невеликий об'ємний об'єкт у центрованій оптичній системі не буде зображатися собі подібним. Проте існують випадки, коли така відповідність існує. Коли це можливо?

Це можливо, коли повздовжнє збільшення дорівнює поперечному. Нагадаємо, що повздовжнє збільшення дорівнює $\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x} = -\frac{ff'}{x^2} = -\frac{x'^2}{ff'}$, а поперечне збільшення – $\beta = \frac{f}{x}$.

Якщо $\alpha = \beta$, то $-\frac{ff'}{x^2} = \frac{f}{x}$, $\Rightarrow x = -f'$, тобто невеликий об'ємний об'єкт необхідно розмістити в точці подвоєної фокусної відстані. У цьому випадку об'єкт невеликих розмірів буде мати собі подібне зображення. Це пояснюється тим, що при існуванні співвідношення $\alpha = \beta^2$ рівність повздовжнього і поперечного збільшень може існувати тільки за умови, що $|\alpha| = |\beta| = 1$, а це здійснюється в точці подвійного фокусу.

1.3.19. За визначенням (1.16), лінійне (поперечне) збільшення $\beta = \frac{y'}{y}$, де y та y' –

лінійні (поперечні) розміри предмета та зображення, відповідно (рис. 1.30). Проте це визначення пов'язане, так би мовити, із "наслідками" використання лінзи, коли зображення вже сформоване. Чи можна визначити величину β ще не отримавши зображення, а тільки знаючи параметри лінзи та задавши положення предмета?

Із подібних трикутників зі спільною вершиною F (рис. 1.29) видно, що $|\beta| = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}$, де f – передня фокусна відстань; x – відстань від переднього фокуса до предмета. Таким чином, можна визначити величину β , ще не отримавши зображення, а тільки знаючи параметри лінзи (f) і задавши положення предмета (x).

1.3.20. Яку лінзу можна вважати тонкою?

Тонкою лінзою вважають лінзу, у якій відстань між заломлюючими поверхнями $d \ll R_1, R_2$. Цей критерій можна позбавити від необхідності визначати радіуси кривини R_1, R_2 сферичних поверхонь. Окрім того, бажано врахувати у визначенні тонкої лінзи вплив показника заломлення середовища, величина якого інколи може бути суттєвою для визначення типу лінзи.

Із загальної формули оптичної сили для товстої лінзи $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2$ випливає, що, коли $\Phi_1 + \Phi_2 \gg \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2$, то $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Остання формула придатна тільки для тонкої лінзи. Таким чином, умова $\Phi_1 + \Phi_2 \gg \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2$ є більш узагальненим критерієм тонкої лінзи.

1.3.21. У яких випадках до товстої лінзи можна застосовувати формули тонкої лінзи?

До товстої лінзи можна застосовувати формули тонкої лінзи, якщо всі відстані, включаючи і фокусні, будуть відраховуватись від відповідних головних площин.

1.3.22. У якому випадку головні точки (площини) оптичної системи збігаються з вузловими точками (площинами)?

Головні точки (площини) збігаються з вузловими точками (площинами) у тому випадку, коли оптична система розташована в однорідному середовищі. Дійсно, у випадку $n = n'$ із інваріанта Лагранжа – Гельмгольца $n' \cdot u' \cdot y' = n \cdot u \cdot y$ випливає, що, якщо $\frac{y'}{y} = +1$, то також і $\frac{u'}{u} = +1$.

1.3.23. У якому випадку товста лінза буде телескопічною системою?

Із формули оптичної сили для товстої лінзи $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$ випливає, що, коли $\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$, то $\Phi = 0$. Таким чином, лінза буде працювати як телескопічна система, якщо її оптична товщина $\frac{d}{n} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2}$.

1.3.24. Як розмістити дві збиральні лінзи, щоб паралельні промені, проходячи через систему, зберігали свою паралельність?

Світловий пучок зберігає свою паралельність при проходженні через систему з оптичною силою Φ , яка дорівнює нулю, тобто при виконанні умови

$$\frac{d}{n} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{\frac{n}{f_1'} - \frac{n}{f_2}}{-\frac{n}{f_1'} \cdot \frac{n}{f_2}} \Rightarrow d = f_1' - f_2.$$

Із рис. 1.34 видно, що умовою збереження паралельності пучка є така побудова системи, коли задній фокус першої лінзи збігається з переднім фокусом другої лінзи. Такі системи називають телескопічними, у них оптичний інтервал $\Delta = F_1' F_2 = 0$.

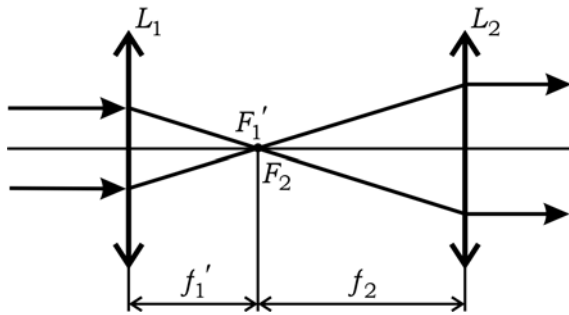


Рис. 1.34. До запитання 1.3.23

1.3.25. Опукло-опуклу лінзу виготовлено зі скла з показником заломлення n і радіусами кривини r_1 та r_2 . За якої товщини d ця лінза буде телескопічною? Яке збільшення кута зору вона буде давати? Буде вона зоровою трубою типу Кеплера чи Галілея?

Така лінза буде телескопічною за умови, що її оптична сила дорівнюватиме нулю. У цьому випадку $d = n \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{n}{n-1} (r_1 + r_2)$. Збільшення кута зору цієї системи

(рис. 1.35) дорівнюватиме $\Gamma = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{f_1'}{f_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Це буде телескопічна система типу

Кеплера, тому що окуляром слугує друга заломлююча поверхня з оптичною силою

$$\Phi_{ок} = \frac{n-1}{r_2} > 0$$

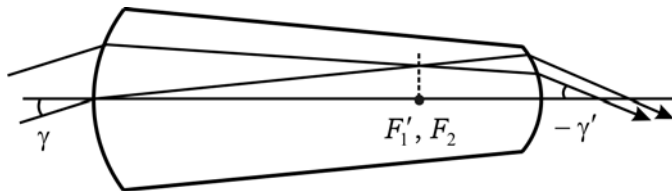


Рис. 1.35. До запитання 1.3.24

1.3.26. У якому випадку система двох тонких лінз буде збиральною незалежно від відстані між ними?

Оптична сила двох тонких лінз, відстань між якими дорівнює d , визначається формулою $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$. Якщо $\Phi > 0$, система буде збиральною.

Система двох лінз буде завжди збиральною, якщо $|\Phi_1| = |\Phi_2|$, але при цьому $\Phi_1 > 0$ та $\Phi_2 < 0$. Тобто незалежно від відстані між лінзами у випадку, коли одна з них збиральна, друга розсіювальна, але вони мають рівні за модулем оптичні сили, така система буде збиральною.

1.3.27. У якому випадку скляна товста лінза з двома опуклими поверхнями, розміщена в повітрі, буде розсіювальною?

Оптичні сили заломлюючих поверхонь лінзи $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1} > 0$; $\Phi_2 = \frac{n-1}{R_2} > 0$. Лінза

стає розсіювальною, коли оптична сила лінзи $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2 < 0$, а її тов-

щина $d > \frac{n(\Phi_1 + \Phi_2)}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{n}{n-1} (R_1 + R_2)$.

1.3.28. Система складається з двох тонких лінз. За яких умов оптична сила Φ системи задовольняє умови $\Phi > 0$, $\Phi = 0$, $\Phi < 0$, якщо: а) обидві лінзи збиральні, б) обидві лінзи розсіювальні, в) одна лінза – збиральна, друга – розсіювальна?

Оптична сила системи, що складається з двох тонких лінз, дорівнює $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - D \Phi_1 \Phi_2$. Тут Φ_1 і Φ_2 – оптичні сили першої та другої лінзи, D – зве-

дена відстань між центрами цих лінз $D = \frac{d}{n}$, де n – показник заломлення речовини, яка заповнює простір між лінзами.

Розглянемо випадок а):

а) оптична сила системи Φ більше нуля, якщо $D < \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2}$. Величина $\Phi = 0$,

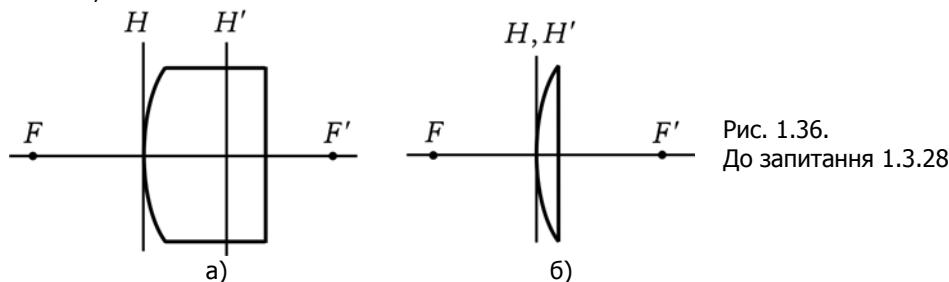
якщо попередня нерівність стає рівнянням. Така оптична система є телескопічною.

За умови $D > \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2}$ оптична сила системи стає від'ємною, а сама система – розсіювальною.

Аналогічно розгляньте випадки б) і в).

1.3.29. У яких випадках фокусна відстань товстої скляної лінзи не залежить від її товщини й точно збігається із фокусною відстанню тонкої лінзи, що має поверхню з такою самою кривиною?

Випадок, коли фокусна відстань товстої лінзи не залежить від її товщини й точно збігається із фокусною відстанню тонкої лінзи, що має поверхні з такою самою кривиною, має місце для товстих лінз, у яких оптична сила однієї з поверхонь дорівнює нулю (відповідна поверхня плоска). Приклад такої лінзи показано на рис. 1.36, а.



Оскільки $\Phi_2 = 0$, оптична сила Φ таких лінз дорівнює $\Phi = \Phi_1$, а фокусні відстані записуються у вигляді $f = -\frac{n}{\Phi} = -\frac{n}{\Phi_1} = f_1$; $f' = \frac{n'}{\Phi} = \frac{n'}{\Phi_1} = f'_1$. Фокусні відстані

відраховуються від головних площин. У товстій лінзі розташування передньої головної площини визначається як $S_H = \frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi} = 0$. Тому передня головна площина

проходить через вершину передньої заломлюючої поверхні, від якої й відраховується передня фокусна відстань, унаслідок чого передні фокуси товстої та тонкої лінз збігаються. Задня головна площина товстої лінзи від плоскої поверхні розташована на відстані $S_{H'} = -\frac{d}{n} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{d}{n}$. Тому положення заднього фокуса товстої

лінзи, яке відраховується від задньої головної площини H' , залежить від її товщи-

ни. Задні фокуси товстої та тонкої лінз відносно їх плоских поверхонь будуть розташовані в різних місцях.

1.3.30. Чи можливе існування оптичної системи з такою послідовністю кардинальних точок на оптичній осі: F, H, F', H' ?

Така оптична система, розташована в ізотропному середовищі, існувати не може. Із рис. 1.37 видно, що паралельний пучок, що падає на систему зліва направо, на виході із системи стає розбіжним. У свою чергу, паралельний пучок, що поширюється в протилежному напрямку, на виході із системи збирається в точці F . Але оптична система повинна мати взаємні властивості відносно напрямку поширення світла: знак оптичної сили Φ не повинен залежати від того, з якого боку на систему падає світло (див. запитання 1.2.16).

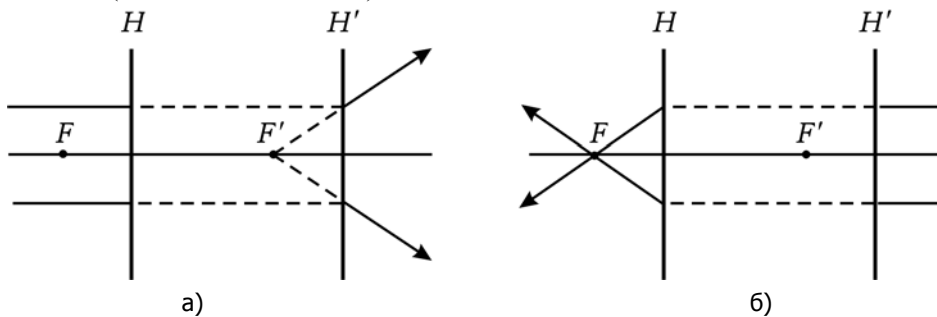


Рис. 1.37. До запитання 1.3.30

1.3.31. Скляну кулю розпиляли по діаметру на дві окремі лінзи (рис. 1.38, а, б). Чи залежить оптична сила та розташування фокусних точок від того, як скласти ці лінзи впритул (рис. 1.38, в-д)?

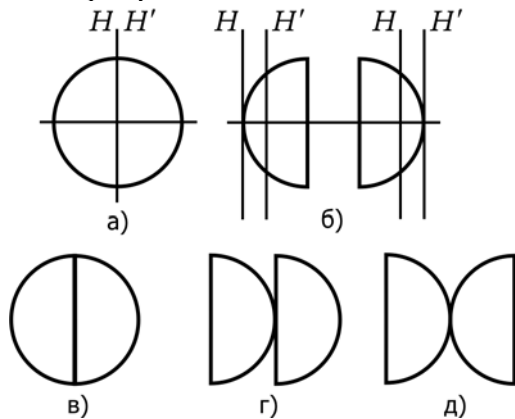


Рис. 1.38. До запитання 1.3.33

На рис. 1.38, б показано розташування головних площин в півкулялях. Очевидно, що від того, як їх скласти впритул, залежить відстань між головними площинами H та H' , яка впливає на величину оптичної сили Φ системи, а тому і на її фокусну відстань.

1.4. Матрична оптика

1.4.1. Запитання та відповіді

1.4.1. *Що таке узагальнений кут та зведена довжина?*

Поширення променя в середовищі з показником заломлення n можна характеризувати узагальненим кутом $V = n \cdot u$ та зведеною довжиною $T = d / n$, де u – геометричний кут; d – геометрична довжина.

1.4.2. *Що таке опорні площини в матричній оптиці, як вони обираються?*

Вхідна (ОП₁) і вихідна (ОП₂) опорні площини визначають оптичну систему. Опорна площина завжди перпендикулярна до головної оптичної осі. Опорна площина не обов'язково проходить через вершину заломлюючої поверхні. Вибір опорних площин довільний, але оптимальний. Це означає, що при виборі опорних площин слід (вкрай доцільно) обирати їх так, щоб деякі з коефіцієнтів матриці дорівнювали б нулю. Інші коефіцієнти при цьому набирають якісного фізичного змісту, що допомагає практичному розв'язанню задач. (Безумовно, не треба забувати, що всі елементи оптичної системи мають міститись у проміжку між опорними площинами.)

1.4.3. *За допомогою якої системи рівнянь задаються координати променя (V_2, y_2) на вихідній опорній площині через координати променя (V_1, y_1) на вхідній опорній площині?*

Система рівнянь, які задають координати променя (V_2, y_2) на вихідній опорній площині через координати променя (V_1, y_1) на вхідній опорній площині, складається із двох лінійних рівнянь: рівняння узагальненого кута променя $V_2 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \cdot y_1 + V_1$ і

рівняння зведеної висоти променя $y_2 = y_1 \left(1 - \frac{d}{n_2} \cdot \frac{n_2 - n_1}{R_1} \right) - \frac{d}{n_2} \cdot V_1$.

1.4.4. *Як за допомогою матриці оптичної системи можна записати координати променя (V_2, y_2) на вихідній опорній площині через координати променя (V_1, y_1) на вхідній опорній площині?*

Такий зв'язок описується виразом, що має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

де $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ – матриця оптичної системи; $\begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$ – вектори-стовпці, які описують промінь на 1-й та 2-й опорних площинах, відповідно.

1.4.5. *Які загальні характеристики оптичної системи визначають вигляд і величини елементів матриці оптичної системи?*

Елементи A, B, C, D матриці, яка описує оптичну систему, мають аналітичний вигляд або чисельні величини, що визначаються лише конструктивними параметрами оптичної системи (відстанями d , R і показником заломлення n), а також вибором положень опорних площин.

1.4.6. *Наведіть тип матриць перетворення параметрів променя, які відповідають: 1) сферичній заломлюючій поверхні; 2) оптичному проміжку; 3) сферичній відбиваючій поверхні; 4) плоскій відбиваючій поверхні.*

Матриця сферичної заломлюючої поверхні має вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{r} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення відповідних ("старого" і "нового") середовищ; r – радіус кривини поверхні; Φ – оптична сила сферичної заломлюючої поверхні.

Матриця оптичного проміжку описує проходження променем проміжку між двома межами поділу середовища має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

де n – показник заломлення середовища; d – геометричний розмір проміжку; $\frac{d}{n}$ – зведений розмір проміжку.

Матриця відбиваючої сферичної поверхні (сферичного дзеркала) має вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{r} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Матриця відбиваючої плоскої поверхні (плоского дзеркала) має вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Матриці такого типу (одиниці по одній із головних діагоналей, а решта елементів – нулі) називаються одиничними. Одинична матриця не змінює координати променя.

1.4.7. *Як знайти в просторі зображень площину Π_2 , спряжену із площиною Π_1 у просторі предметів, яка визначена?*

Для визначення в просторі зображень положення площини Π_2 , спряженої із заданою площиною Π_1 у просторі предметів, треба у площину Π_1 розмістити предмет

(напр., точковий, розташований на головній оптичній осі) і побудувати його зображення в заданій оптичній системі. Зображення предмета лежить у площині Π_2 .

1.4.8. *Що означає унімодулярність матриць в оптиці з математичної та фізичної точок зору?*

Оптичні матриці $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ заломлюючої поверхні, трансляції, плоского та сферичного дзеркал є унімодулярними матрицями, тобто їхній визначник (детермінант) дорівнює одиниці: $\det M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = 1$. Відомо, що добуток унімодулярних матриць також є унімодулярною матрицею. З математичної точки зору ця обставина дає змогу контролювати правильність перемноження матриць, тобто на кожному етапі детермінант матриці добутку таких матриць має дорівнювати одиниці.

Із фізичної точки зору унімодулярність матриці вказує на зворотність ходу променів. Зупинимось на цьому твердженні докладніше. Обернена матриця до M буде

$M^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$. Задамо таку задачу: промінь пройшов оптичну систему, а потім повернувся тим самим шляхом. Тоді матриця для такого ходу променя буде

$M_{\pm} = M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Як бачимо, $\det M_{\pm} = 1$, що підтверджує висловлену вище

думку про фізичне пояснення унімодулярності матриць в оптиці.

1.4.9. *Матричний метод в оптиці застосовується тільки для параксіальних променів чи також і для непараксіальних променів?*

Матричний метод в оптиці застосовується тільки для параксіальних променів.

1.4.10. *Запишіть матрицю M тонкої лінзи з опорними площинами на вхідній і вихідній поверхнях лінзи.*

Якщо M_1 і M_2 – матриці сферичних заломлюючих поверхонь лінзи, а Φ_1 і Φ_2 – їх оптичні сили, то матриця тонкої лінзи матиме такий вигляд:

$$M = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

1.4.11. *Запишіть матрицю M товстої лінзи з опорними площинами на вхідній і вихідній поверхнях лінзи.*

Якщо M_1 і M_2 – матриці сферичних заломлюючих поверхонь лінзи, Φ_1 і Φ_2 – їх оптичні сили, а d – товщина лінзи, то

$$\begin{aligned}
 M = M_2 T M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{n} \Phi_1 & \frac{d}{n} \\ -\left(\Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2\right) & 1 - \frac{d}{n} \Phi_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

1.4.12. Назвіть відомі вам оптичні системи, матриці яких містять елементи, що дорівнюють нулю?

Деякі елементи матриць типу $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, які описують оптичні системи, відповідним вибором опорних площин, можна прирівняти нулю. Інші елементи при цьому набувають ясного фізичного змісту, що допомагає розв'язанню конкретних практичних задач. Знайдемо ці умови.

1) Якщо вихідна опорна площина ОП₂ збігається із задньою фокальною площею оптичної системи (рис. 1.39, а), елемент A , який розташований на перетині 1-го рядка і 1-го стовпчика, дорівнює нулю $A = 0$.

Для виконання умови унімодулярності необхідно, щоб елемент B , який розташований на перетині 1-го рядка і 2-го стовпчика, дорівнював $B = -1/C$. Таким чином, матриця, яка описує таку оптичну систему (рис. 1.39, а), має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/C \\ C & D \end{pmatrix}.$$

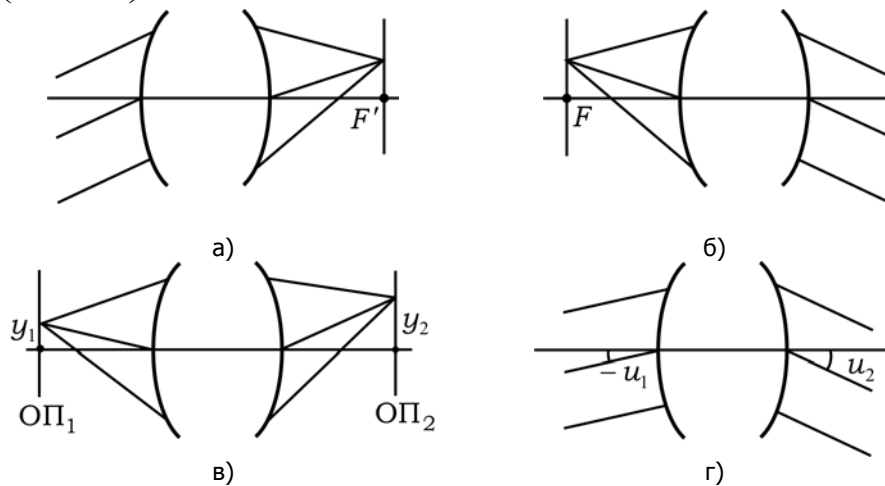


Рис. 1.39. Вибір опорних площин для оптичних систем, матриці яких містять елементи, що дорівнюють нулю

2) Якщо вхідна опорна площина ОП₁ збігається з передньою фокальною площею оптичної системи (рис. 1.39, б), то нулю дорівнює елемент D , який розташований на перетині 2-го рядка і 2-го стовпчика: $D = 0$. При цьому елемент $B = -1/C$. Таким чином, матриця, яка описує таку оптичну систему (рис. 1.39, б) має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} A & -1/C \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Якщо опорні площини ОП₁ та ОП₂ збігаються із площинами, у яких розташований відповідно предмет та його зображення (рис. 1.39, в), тобто є спряженими площинами, то нулю дорівнює елемент B , який розташований на перетині 1-го рядка і 2-го стовпчика: $B = 0$. При цьому елемент $D = 1/A$. Таким чином матриця, яка

описує таку оптичну систему (рис. 1.39, в), має вигляд $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1/A \end{pmatrix}$. При цьому

можна враховувати, що елемент A чисельно дорівнює величині поперечного (лінійного) збільшення $A = y_2 / y_1 = \beta$, а у випадку, коли предмет і його зображення розташовані в середовищі з однаковим показником заломлення, то елемент D чисельно дорівнює величині кутового збільшення $D = 1/\beta = \gamma$.

4) Для афокальної оптичної системи, яка перетворює паралельний пучок променів також на паралельний, але з іншим нахилом променів (рис. 1.39, г), то нулю дорівнює елемент C , який розташований на перетині 2-го рядка і 1-го стовпчика: $C = 0$. При цьому елемент $A = 1/D$ і матриця, яка описує таку оптичну систему

(рис. 1.39, г), має вигляд $M = \begin{pmatrix} 1/D & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Якщо така система розташована в одно-

рідному середовищі ($n_1 = n_2$), то елемент D набуває змісту кутового збільшення

оптичної системи: $D = \frac{\text{tg} u'}{\text{tg} u} = \gamma$.

Таким чином, властивості самої оптичної системи, а також відповідний вибір опорних площин можуть визначити матрицю оптичної системи, значно спростити її вигляд, привівши один із її елементів до нуля.

1.4.13. *Затїть матрицю M тонкої лінзи з опорними площинами, що спряжені.*

Схему оптичної системи, що розглядається, зображено на рис. 1.40.

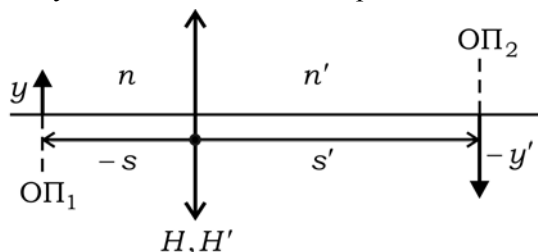


Рис. 1.40. До запитання 1.4.13

Позначимо через $S = \frac{s}{n}$ і $S' = \frac{s'}{n'}$ зведені довжини (зведені проміжки) між лінзою та предметом і зображенням, відповідно; ОП₁ та ОП₂ – спряжені площини. Матриця такої оптичної системи має вигляд

$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & S' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ -\Phi & 1-S\Phi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1-S'\Phi & S+S'-SS'\Phi \\ -\Phi & 1-S\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{s'}{n'}\Phi & \frac{s}{n} + \frac{s'}{n'} - \frac{s}{n}\frac{s'}{n'}\Phi \\ -\Phi & 1-\frac{s}{n}\Phi \end{pmatrix}.$$

Для оптичних систем, у яких опорні площини спряжені, матриця має вигляд $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1/A \end{pmatrix}$, тобто елемент B , який розташований на перетині 1-го рядка і 2-го стовпчика дорівнює нулю $B = 0$. Елемент $D = 1/A$, а елемент A чисельно дорівнює величині поперечного (лінійного) збільшення $A = y_2 / y_1 = \beta$. Таким чином, $B = S + S' - SS'\Phi = 0$, звідки $S' = -\frac{S}{1-S\Phi}$.

1.4.14. *Є оптична система, яка складається із k заломлюючих поверхонь, розділених відповідними проміжками. Із добутку якої кількості матриць окремих елементів складається матриця всієї оптичної системи? У якій послідовності ці матриці множаться?*

Оптичну систему доцільно ще до початку розгляду її дії в процесі формування зображення характеризувати опорними площинами, що збігаються з крайньою зліва і крайньою справа (фронтальними) поверхнями оптичної системи. У цьому випадку матриця оптичної системи, яка дає перетворення променя від входу оптичної системи до її виходу, дорівнює добутку матриць окремих елементів системи та проміжків між ними, починаючи з останнього: $M = M_{2k-1} \cdot M_{2k-2} \dots M_1$. Кількості матриць, що перемножуються при цьому, дорівнює $2k - 1$.

1.4.15. *Відомо, що площини, у яких розташований предмет і його зображення, спряжені. Як математична умова спряженості площин формулюється в матричній оптиці?*

Умовою спряженості двох площин в оптиці є умова рівності елемента матриці $B = 0$, яку отримують при обчисленні оптичної системи.

1.4.16. *Який вигляд має матриця оптичної системи відносно фокальних площин (рис. 1.41)? (Система розташована в повітрі).*

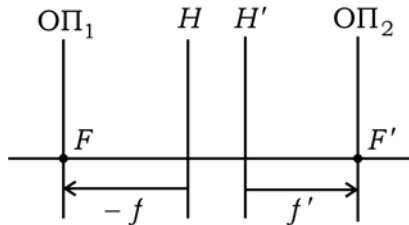


Рис. 1.41. До запитання 1.4.16?

Оберемо опорні площини OP_1 і OP_2 , які збігаються із фокусами оптичної системи (рис. 1.41). Така матриця (M_F) визначається як добуток матриці (T_1) трансляції від F до H , матриці оптичної системи (M_1) і матриці (T_2) трансляції від H' до F' :

$$M_F = T_2 \cdot M_1 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\Phi \\ -\Phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю можна записати, виходячи з логічних міркувань. Елемент матриці A має дорівнювати нулю, як і елемент D , тому що обрані опорні площини цього разу проходять через фокальні точки. Елемент C дає оптичну силу системи, а елемент B знаходимо із правила для унімодулярної системи $AD - BC = 1$.

1.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. За допомогою геометричних побудов знайдіть зображення точкового джерела світла, що спостерігається крізь скляну плоско-паралельну пластинку.

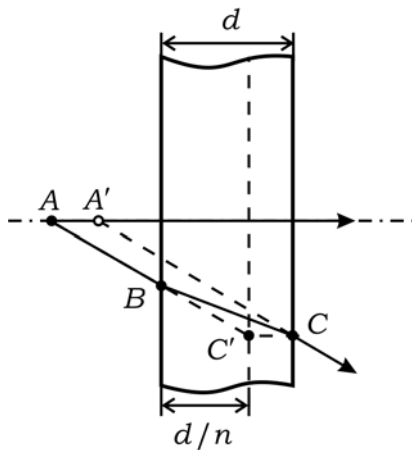


Рис. 1.42. До прикладу 1.1

Розв'язання. Щоб побудувати зображення A' точки A цілком достатньо використати два промені, що виходять з неї (рис. 1.42). Один з променів, що виходить з точки A , пустимо на передню грань пластинки нормально, такий промінь пройде

її без заломлення. Щоб визначити, як пройде крізь пластинку другий промінь AB , використаємо метод редукування. Він дозволяє спростити побудову променів за малих кутів падіння. У цьому методі товщина скляної пластинки з показником заломлення n (зазвичай для скла в задачах приймають $n = 3/2$) характеризується зведеною товщиною d/n (рис. 1.42). Падаючий промінь проводять без заломлення до зустрічі з вихідною гранню пластинки зведеної товщини в точці C' . Далі точку виходу променя C' проєктують на вихідну грань скляної пластинки й отримують точку C . Хід променя у склі визначається прямою BC . За межами пластинки промінь поширюється паралельно до вхідного променя AB . Зображення джерела A' отримують на перетині першого променя та продовження другого, після його виходу з пластинки. Таким чином, джерело A під час його спостереження крізь скляну плоско-паралельну пластинку буде здаватися розташованим ближче до пластинки.

Приклад 1.2. За допомогою сферичного дзеркала одержано зображення $A'B'$ предмета AB (рис. 1.43). Побудовою визначте положення дзеркала та його фокуса. Встановіть тип дзеркала.

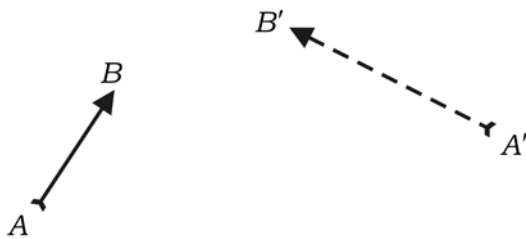


Рис. 1.43. До умови прикладу 1.2

Розв'язання:

1. Аналіз. Збільшене зображення можливе лише для вгнутого дзеркала (опуклі дзеркала дають завжди зменшене зображення). Зображення пряме, отже, предмет розташований між дзеркалом і його фокальною площиною. Таке зображення має бути уявним (рис. 1.44).

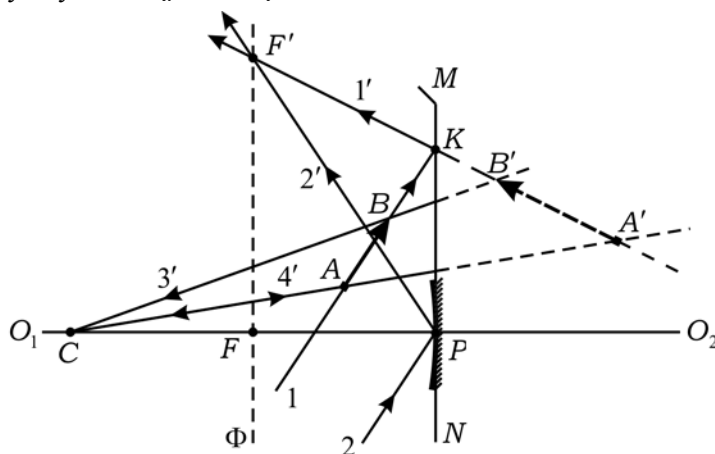


Рис. 1.44. Аналіз умови прикладу 1.2

2. Пряма побудова. Нехай задано вгнуте дзеркало, його оптична вісь O_1O_2 , головний фокус F і центр кривини C (рис. 1.45). Предмет AB розташований між дзеркалом і його фокальною площиною Φ , як визначено з аналізу умови задачі. Проведемо промінь 1 уздовж предмета AB до дзеркала (точка K). Відбитий промінь $1'$ визначатиме пряму, на якій буде лежати зображення $A'B'$. Щоб знайти відбитий промінь, проведемо в полюс P промінь 2, паралельний до променя 1. Він відіб'ється в точці P під таким самим кутом, під яким падав. Відбиті промені $2'$ та $1'$ мають перетнутись у фокальній площині дзеркала Φ . Таким чином, перетин фокальної площини Φ і променя $2'$ визначає точку (побічний фокус F_1), куди з точки K слід направити відбитий промінь $1'$.

Для визначення зображень точок A та B скористаємось променями 3 і 4, проведеними вздовж радіусів дзеркала. Оскільки радіус сфери є нормаллю до її поверхні, то після відбиття промені $3'$ і $4'$ також будуть поширюватись уздовж радіусів у зворотний бік, проходячи через центр кривини C . Перетин продовжень променів $3'$ і $4'$ з продовженням променя $1'$ визначить положення точок зображення A' та B' , відповідно.

Тепер розглянемо хід променя 5 (рис. 1.45), спрямованого від точки A у напрямку B' . Відбитий промінь $5'$ знайдемо вже знайомим нам способом за допомогою допоміжного променя 6, який після відбиття ($6'$) перетне фокальну площину в побічному фокусі F_1 . У цю саму точку прийде і промінь $5'$. Відрізок AB' перетинає площину дзеркала в точці D . Разом з тим, відбившись від дзеркала в цій самій точці, світловий пучок іде шляхом променя $5'$, який проходить через точку B , а його продовження – через точку A' . Тобто відрізок BA' також перетинає площину дзеркала в точці D .

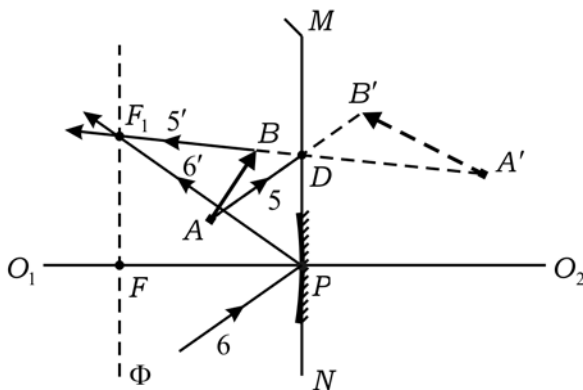


Рис. 1.45. Пряма побудова (до прикладу 1.2)

Отже, відрізки AB' та BA' перетинаються в точці, яка лежить у площині дзеркала. Цей важливий факт допоможе нам розв'язати задачу.

3. Синтез. Тепер, знаючи властивості точок K і D , легко розв'яжемо задачу. Для цього виконаємо такі дії (рис. 1.46):

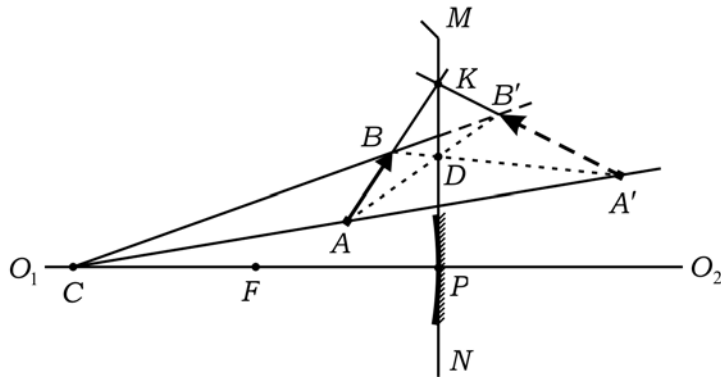


Рис. 1.46. Синтез побудови (до прикладу 1.2)

- маючи предмет і зображення, пустимо вздовж них промені до їх перетину в точці K ;
- з'єднаємо протилежні точки предмета і зображення та одержимо другу точку дзеркала D ;
- через точки K і D проведемо площину дзеркала MN ;
- з'єднаємо спряжені точки A з A' і B з B' , і в точці перетину їх продовжень одержимо центр кривини дзеркала C ;
- опустимо перпендикуляр з точки C до площини дзеркала MN (це головна оптична вісь дзеркала, а точка її перетину з MN – полюс P);
- відрізок CP ділимо навпіл і отримуємо головний фокус F .

Приклад 1.3. Розгляньте особливості проходження світлових променів через збиральну лінзу, по обидва боки від якої розташовані середовища з різними показниками заломлення, на прикладі такої задачі: як піде після збиральної лінзи промінь 1, якщо відомий його напрямок до лінзи (рис. 1.47)? Положення фокусів лінзи на головній оптичній осі відомі. Вважати, що показник заломлення лінзи (n_l) більший за показники заломлення середовищ у просторі предмета (n_1) і в просторі зображення (n_2).

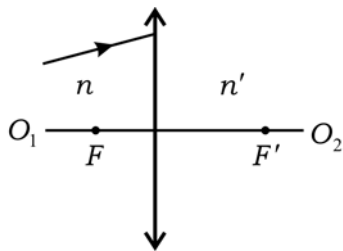


Рис. 1.47. До умови прикладу 1.3

Розв'язання. Аналіз рис. 1.47 показує, що фокусні відстані у цієї додатної лінзи різні. Це може бути наслідком тільки однієї причини: по обидва боки від лінзи розташовані середовища з різними показниками заломлення n_1 і n_2 , причому, $n_1 < n_2$.

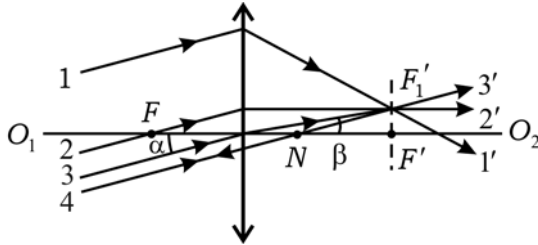


Рис. 1.48. До розв'язання прикладу 1.3

Для розв'язання прикладу проведемо паралельно до падаючого променя 1 промінь 2, який проходить через фокус F (рис. 1.48). Заломлений у лінзі промінь $2'$ піде паралельно до головної оптичної осі O_1O_2 . Перетин цього променя $2'$ із фокальною площиною дасть побічний фокус F_1' і визначить хід заломленого в лінзі променя $1'$. Як ми побачили, методика побудови ходу променя після лінзи у випадку, коли $n_1 \neq n_2$, нічим не відрізняється від того, як це робиться у випадку, коли $n_1 = n_2$

Проте існують декілька цікавих особливостей у подальшому аналізі побудови. По-перше, якщо провести ще один паралельний до променя 1 промінь 3, який проходить через побічний фокус F_1' , то напрямком заломленого променя $3'$ буде такий самий, як і напрямком променя 3. Ця властивість для випадку $n_1 = n_2$ була притаманна для променя, який проходив через оптичний центр лінзи (рис. 1.48). У даному випадку можна казати про зміщення реального оптичного центра лінзи в точку N – віртуальний центр лінзи. Точка N має незвичайну властивість: промені, що проходять через цю точку, у лінзі не заломлюються. Окрім того, точка N є вузловою точкою. По-друге, промінь 4, який проходить через центр лінзи – точку O , заломлюється в лінзі. Між променем 4 і заломленим променем $4'$ існує зв'язок у вигляді закону Снеліуса $n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$.

Приклад 1.4. Доведіть за допомогою принципу Ферма закони відбиття та заломлення світла на плоскій межі поділу двох середовищ.

Розв'язання. За принципом Ферма світло поширюється в просторі між двома точками таким шляхом, уздовж якого час його проходження менший, ніж уздовж будь-якого іншого шляху, що з'єднує ці точки. Розглянемо відбиття променя, який виходить з точки A , відбивається від плоскої межі двох середовищ у точці B і потрапляє в точку C (рис. 1.49).

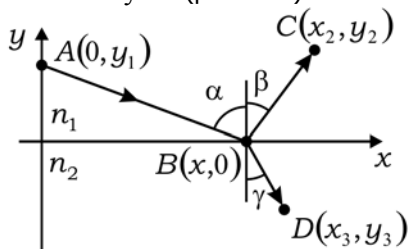


Рис. 1.49. Відбиття та заломлення променя на межі двох середовищ (до прикладу 1.4)

Час поширення такого променя $t(x) = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_1}$, де $v_1 = \frac{c}{n_1}$ – швидкість поширення світла в середовищі з показником заломлення n_1 . З урахуванням координат вказаних точок $t(x) = \frac{n_1 \sqrt{x^2 + y_1^2}}{c} + \frac{n_1 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{c}$. Мінімальний час проходження знайдемо з умови $\frac{dt}{dx} = 0$, тобто $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0$. Беручи до уваги, що $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \sin(\alpha)$, а $\frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = \sin(\beta)$, отримаємо закон відбиття світла, згідно з яким $\alpha = \beta$.

Подібним чином можна довести і закон заломлення. Час поширення променя з точки A в точку D : $t(x) = \frac{AB}{v_1} + \frac{BD}{v_2}$. З умови $\frac{dt}{dx} = 0$ отримаємо

$n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - n_2 \frac{x_3 - x}{\sqrt{(x_3 - x)^2 + y_3^2}} = 0$, тобто $n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\gamma)$ – закон заломлення світла.

Приклад 1.5. Доведіть формулу тонкої лінзи за допомогою принципу Ферма, не використовуючи закон заломлення.

Розв'язання. Розглянемо двоопуклу лінзу із сферичними поверхнями, радіуси яких R_1 і R_2 , з показником заломлення матеріалу лінзи n (рис. 1.50). Нехай лінза дає дійсне зображення S_2 точкового джерела S_1 . Обидві точки лежать на головній оптичній осі лінзи і всі промені, що вийшли з S_1 і пройшли через лінзу, збираються в S_2 (пучки гомоцентричні).

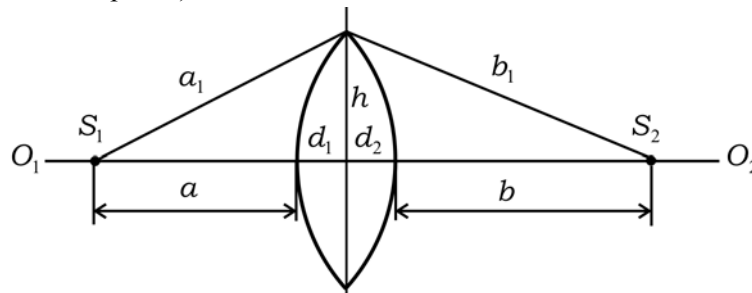


Рис. 1.50. Формування зображення S_2 точкового джерела S_1 двоопуклою лінзою (до прикладу 1.5)

За принципом Ферма оптичні шляхи всіх променів від S_1 до S_2 однакові. Запишемо шляхи двох променів: центрального, що йде по осі лінзи, і бокового, який проходить через край лінзи:

$$a + n(d_1 + d_2) + b = a_1 + b_1. \quad (1.29)$$

За теоремою Піфагора

$$a_1 = \sqrt{(a + d_1)^2 + h^2} = (a + d_1) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(a + d_1)^2}}.$$

Згадаємо наближену формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, яка справедлива за $x \ll 1$ з точністю до членів порядку x^2 . Вважаючи h малим порівняно з a_1 , маємо

$$a_1 \approx (a + d_1) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{(a + d_1)^2} \right) = a + d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{a + d_1}. \quad (1.30)$$

Аналогічно для b_1 маємо

$$b_1 \approx b + d_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{b + d_2}. \quad (1.31)$$

Підставимо (1.30) та (1.31) у рівняння (1.29) і приведемо подібні члени:

$$a + n(d_1 + d_2) + b = a + d_1 + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{a + d_1} + b + d_2 + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{b + d_2},$$

$$(n-1)(d_1 + d_2) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{a + d_1} + \frac{1}{b + d_2} \right). \quad (1.32)$$

Якщо лінза тонка, то можна в знаменнику правої частини знехтувати величинами d_1 і d_2 порівняно з a і b . У лівій частині величиною $(d_1 + d_2)$ нехтувати не можна, оскільки вона є множником. За теоремою Піфагора (рис. 1.51) можна записати

$$d_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} \approx \frac{h^2}{2R_1}; \quad d_2 \approx \frac{h^2}{2R_2}.$$

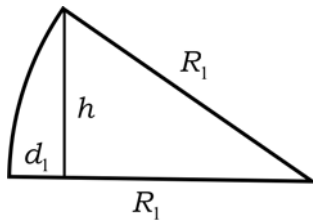


Рис. 1.51. До розв'язування прикладу 1.4

Тепер залишилося лише підставити ці величини в (1.32) і, скоротивши на $\frac{h^2}{2}$, маємо

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (1.33)$$

Ліва частина для даної лінзи є константою. Позначимо її Φ і називається вона оптичною силою лінзи:

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Праву частину (1.33) перепишемо таким чином:

$$\Phi = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

де f – фокусна відстань, тобто відстань від лінзи до точки, у якій збирається паралельний пучок променів після проходження через лінзу (за $a \rightarrow \infty$; $b \rightarrow f$).

Приклад 1.6. Паралельний пучок світла падає з вакууму на поверхню, яка обмежує область з показником заломлення n (рис. 1.52). Знайдіть форму цієї поверхні – рівняння $y(x)$, за якої пучок буде сфокусований у точці F на відстані f від вершини O . Пучок якого максимального радіуса може бути сфокусований такою поверхнею? Якими позитивними властивостями буде характеризуватись лінза, побудована з використанням такої поверхні?

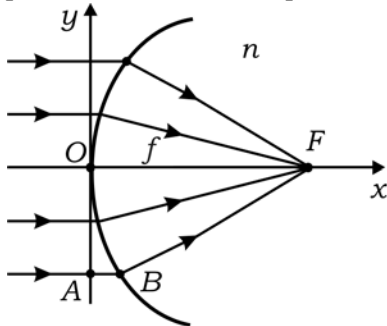


Рис. 1.52. До умови прикладу 1.6

Розв'язання. За принципом Ферма промені витрачають на проходження від площини OA до точки F час, однаковий по всьому перерізу пучка, зокрема, $n \cdot OF = AB + n \cdot BF$. Цей запис дає нам рівняння шуканої поверхні в заданій координатній площині $nf = x + n\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$. Піднесемо обидві частини виразу до квадрата і зберемо коефіцієнти за відповідних степенів x : $(n^2 - 1)x^2 - 2nf(n-1)x + n^2y^2 = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 - 2\frac{nf}{n+1}x + \frac{n^2y^2}{n^2-1} = 0$ і доповнимо його до повного

квадрата: $\left(x - \frac{nf}{n+1}\right)^2 + \frac{n^2 y^2}{n^2 - 1} = \frac{n^2 f^2}{(n+1)^2}$. Після введення позначень $\frac{n^2 f^2}{(n+1)^2} = b^2$ і

$\frac{n-1}{n+1} f^2 = a^2$ отримаємо рівняння еліпса: $\frac{(x-b)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Максимальний радіус пучка, сфокусованого такою поверхнею, не може перевищувати меншої півосі еліпса

$$a = f \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Отриманий вираз є рівнянням поверхні, для якої не властива сферична аберація (така поверхня називається анабераційною). Щоб побудувати лінзу з такою властивістю, слід обмежити середовище з показником n ще однією поверхнею. Оскільки при цьому хід променів, заломлених на першій поверхні, не повинен змінюватись, то як другу заломлюючу поверхню лінзи оберемо сферу із центром у точці F (рис. 1.53). Промені будуть поширюватись уздовж радіальних ліній сфери. На жаль, така лінза з позитивними властивостями, зазначеними вище, буде фокусувати тільки промені, що йдуть паралельно до її головної оптичної осі.

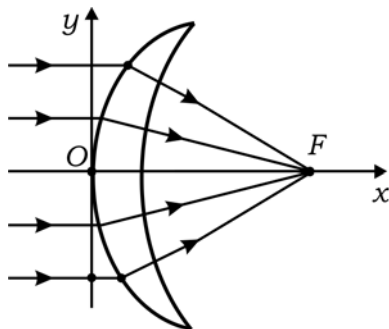


Рис. 1.53. До розв'язування прикладу 1.6

Приклад 1.7. Угнуте дзеркало дає дійсне зображення предмета на екрані на відстані $s'_1 = 54$ см від дзеркала. Це дзеркало покляли горизонтально і налили в нього невелику кількість води. При цьому зображення з'являється на екрані, що розташований на відстані $s'_2 = 36$ см від дзеркала. Визначте радіус кривини дзеркала R і відстань s предмета до нього, якщо показник заломлення води $n = 4/3$.

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що в умові прикладу йдеться про "невелику кількість води". Особливості такої самої системи, але вже зі змінною i , у тому числі, "великою" кількістю води в просторі предмета та його зображення у сферичному дзеркалі, розглянуті в запитанні 1.2.16. Схему експерименту, яка показує хід променів за відсутності води (а) і з водою, наливою у сферичне дзеркало (б), наведено на рис. 1.54.

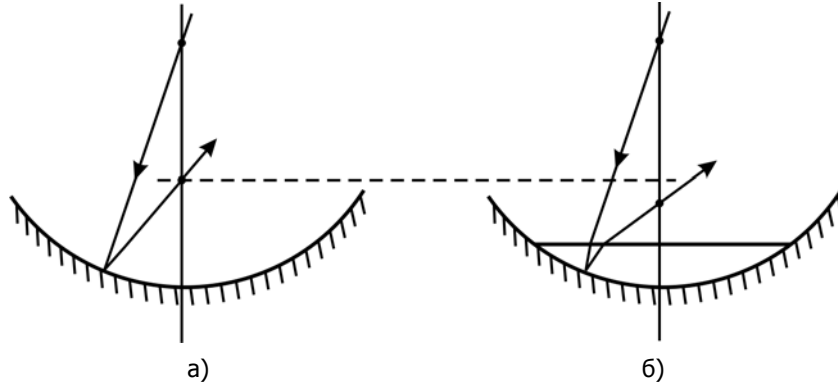


Рис. 1.54. До прикладу 1.7

Сферичне дзеркало до того, як в нього налили воду, описується формулою (1.12):

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{1}{a'}, \quad (1.34)$$

де s і s'_1 – відстані від полюса дзеркала до предмета та зображення, відповідно; R – радіус кривини дзеркала.

Після того, як у дзеркало налили воду, система описується рівнянням

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s} = \frac{2n}{R}, \quad (1.35)$$

де s'_2 – нова відстань від полюса дзеркала до його зображення.

Якщо (1.34) \rightarrow (1.35), то $\frac{1}{s'_2} + \frac{2}{R} - \frac{1}{s'_1} = \frac{2n}{R}$ або $\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s'_1} = 2\frac{n}{R} - \frac{2}{R} \equiv \frac{2}{R}(n-1)$. З

останнього рівняння маємо

$$R = \frac{2(n-1)s'_2s'_1}{s'_1 - s'_2} \quad (1.36)$$

$$R = \frac{2(1,33-1) \cdot 0,36 \cdot 0,54}{0,54 - 0,36} = 71,2 \text{ см.}$$

Відстань s предмета до дзеркала, яка визначена з (1.34) з урахуванням (1.36) дорівнює

$$s = \frac{R \cdot s'_1}{2s'_1 - R} = \frac{(n-1)s'_2s'_1}{s'_1 - ns'_2}.$$

$$s = \frac{36 \cdot 54 \cdot 0,33}{54 - 1,33 \cdot 36} \text{ см} = 108 \text{ см.}$$

Приклад 1.8. Людині без окулярів зручно читати книгу, розміщуючи її перед собою на відстані $a = 12,5$ см. Якої оптичної сили окуляри можна рекомендувати в цьому випадку?

Розв'язання. Ця людина має ваду зору – короткозорість. Якщо це було б не так, то без окулярів зручно читати книгу, розміщуючи її перед собою на відстані найкращого зору $d_0 = 25$ см (рис. 1.55, а). У людини з нормальним зором при цьому зображення предмета проєктується на сітківці ока.

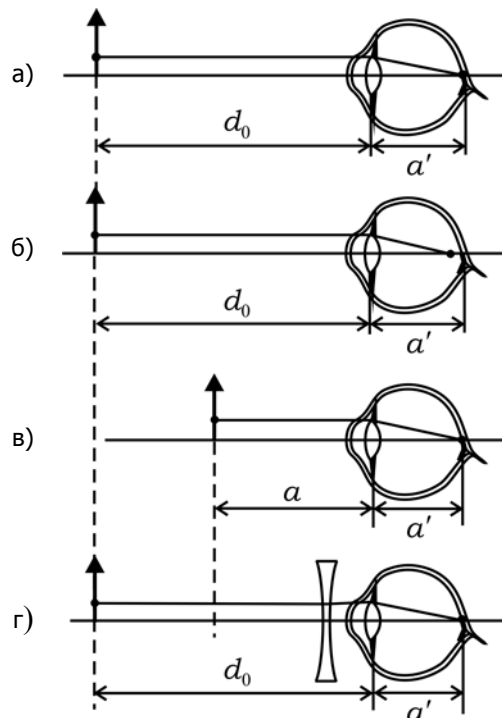


Рис. 1.55. До прикладу 1.8

У короткозорі людини зображення предмета утворюється перед сітківкою, а на сітківку проєктується розмите, "не сфокусоване" зображення (рис. 1.55, б). Як короткозора людина "виправляє" дефект свого зору і покращує якість зображення, не застосовуючи окулярів? Вона наближає книгу до ока і зручно читає книгу, розміщуючи її перед собою на відстані $a = 12,5$ см (рис. 1.55, в). У цьому випадку для зіниці ока, як для лінзи, можна записати рівняння

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{a'} = \Phi, \quad (1.37)$$

де a' – відстань від зіниці до сітківки; n – показник заломлення речовини, яка заповнює око; Φ – оптична сила зіниці ока.

Як короткозоре око "виправляє" якість зображення за допомогою окулярів? Окуляри "підправляють" заломлення променів у зіниці, і це приводить до того, що

зображення проектується на сітківку і в тому випадку, коли предмет розташований на відстані найкращого зору $d_0 = 25$ см (рис. 1.55, г). Цей випадок описується рівнянням

$$\frac{1}{d_0} + \frac{n}{a'} = \Phi + \Phi_{\text{ок}}. \quad (1.38)$$

Віднявши (1.37) від (1.38), отримуємо

$$\frac{1}{d_0} + \frac{n}{a'} - \frac{1}{a} - \frac{n}{a'} = \Phi + \Phi_{\text{ок}} - \Phi.$$

Звідси

$$\Phi_{\text{ок}} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{a} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,125} = 4 - 8 = -4 \text{ дптр}$$

Таким чином, цій людині слід рекомендувати окуляри з оптичною силою $\Phi_{\text{ок}} = -4$ дптр.

Приклад 1.9. Предмет розташований на відстані l від екрана. Тонка збиральна лінза, що розташована між предметом та екраном, дає його чітке зображення у двох положеннях. Визначте фокусну відстань лінзи, якщо:

а) відстань між обома положеннями лінзи $\Delta l = 30$ см ;

б) поперечні розміри зображення в одному положенні лінзи в $\eta = 4$ рази більше, ніж у другому.

Розв'язання: а) при заданих спряжених площинах, у яких розташовані предмет і зображення, положення лінзи можна визначити, скориставшись формулою тонкої лінзи $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{f}$ (позначення відповідають рис. 1.56).

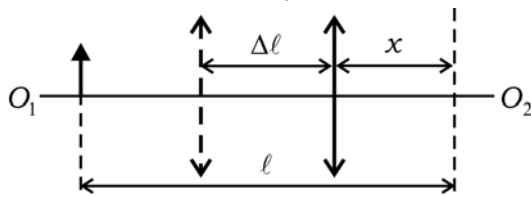


Рис. 1.56. До умови прикладу 1.9

Отримуємо квадратне рівняння $x^2 - lx + lf = 0$ з розв'язками $x_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$.

Наявність двох коренів саме і підтверджує те, що зображення можна отримати при двох положеннях лінзи. Відстань між цими положеннями $\Delta l = x_1 - x_2 = \sqrt{l^2 - 4lf}$.

Звідси отримуємо фокусну відстань $f = \frac{l^2 - \Delta l^2}{4l} = 20$ см ;

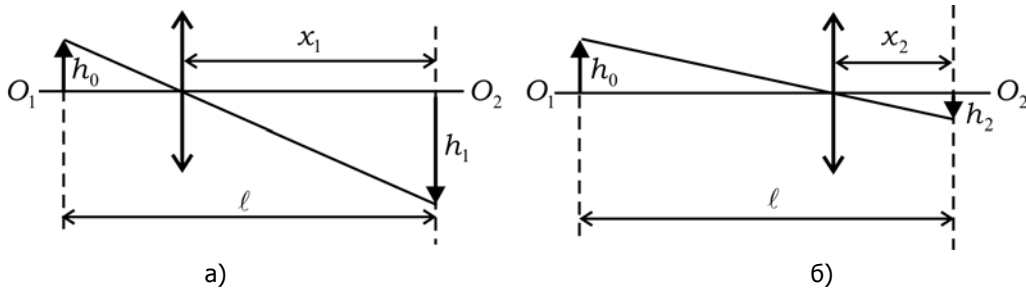


Рис. 1.57. До розв'язування прикладу 1.9

б) за рис. 1.57, а, б, на якому показано положення лінзи при утворенні збільшеного та зменшеного зображень, можна скласти пропорції $\frac{h_0}{l-x_1} = \frac{h_1}{x_1}$ та $\frac{h_0}{l-x_2} = \frac{h_2}{x_2}$. За умовою задачі $\eta = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l-x_2}{l-x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}$. Положення лінз при утворенні зображень ми отримали в першій частині розв'язання. Скористаємось цим результатом:

$$\frac{(l + \sqrt{l^2 - 4lf})^2}{(l - \sqrt{l^2 - 4lf})^2} = \eta.$$

Добудемо корінь з лівої та правої частин рівняння $(\sqrt{\eta} + 1)\sqrt{l^2 - 4lf} = (\sqrt{\eta} - 1)l$.

$$\text{Розв'язком рівняння буде } f = \frac{l}{4} \left(1 - \frac{(\sqrt{\eta} - 1)^2}{(\sqrt{\eta} + 1)^2} \right) = \frac{l\sqrt{\eta}}{(\sqrt{\eta} + 1)^2} = 20 \text{ см.}$$

Зауважимо, що обидва методи легко реалізуються в умовах фізичного практикуму і можуть бути запропоновані студентам як один із способів визначення фокусних відстаней тонких лінз.

Приклад 1.10. Знайдіть за допомогою побудов положення фокусів і головних площин товстої опукло-вгнутої скляної лінзи ($d = 4 \text{ см}$; $n = 1,5$; $\Phi_1 = +50 \text{ дптр}$; $\Phi_2 = -50 \text{ дптр}$), рис. 1.58.

Розв'язання. Для визначення фокусів оптичної системи потрібно розглянути проходження через неї променя, який на вході оптичної системи поширюється паралельно до її оптичної осі, і знайти точку перетину вихідного променя (або його продовження) з оптичною віссю системи. У випадку товстої лінзи таку побудову виконати досить складно. Тут немає стандартних променів, спираючись на властивості яких можна знайти хід довільного променя. Тому змоделюємо товсту лінзу,

замінивши її системою двох тонких лінз з оптичними силами Φ_1 і Φ_2 , простір між якими заповнений середовищем з показником заломлення $n = 1,5$ (рис. 1.58).

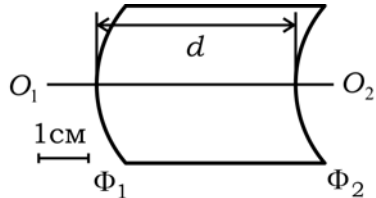


Рис. 1.58. До умови прикладу 1.10

Наявність середовища з показником заломлення, відмінним від одиниці, призведе до зміни фокусних відстаней першої й другої лінз, $f_1' = \frac{n}{\Phi_1} = 3$ см, $f_2 = -\frac{n}{\Phi_2} = 3$ см, відповідно. У вибраному на рис. 1.58 масштабі задній фокус F_1' лінзи 1 і передній фокус F_2 лінзи 2 займуть положення на оптичній осі, як показано на рис. 1.59. За формулами $f_1 = -\frac{n}{\Phi_1} = -2$ см та $f_2' = \frac{n}{\Phi_2} = 2$ см можна розрахувати фокусні відстані та відмітити положення переднього фокуса F_1 лінзи 1 і заднього фокуса F_2' лінзи 2 (рис. 1.59).

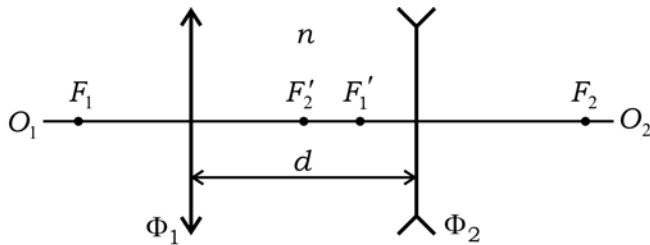


Рис. 1.59. До прикладу 1.10

Для визначення заднього головного фокуса оптичної системи розглянемо хід променя, який падає на товсту лінзу зліва направо паралельно до головної оптичної осі (рис. 1.60).

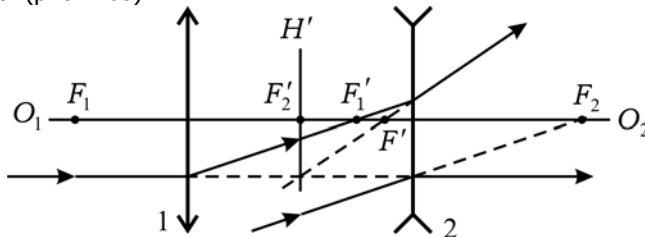


Рис. 1.60. Визначення заднього головного фокуса оптичної системи (до прикладу 1.10)

Після лінзи 1 заломлений промінь поширюється в напрямку її головного фокуса F_1' . Для того, щоб провести цей промінь через лінзу 2, використаємо стандартний

промінь, спрямований у фокус другої лінзи F_2 . Такий промінь після лінзи піде паралельно до її оптичної осі, а перетин його продовження із фокальною площиною лінзи 2 дасть положення побічного фокуса, через який також має пройти продовження шуканого променя (рис. 1.60). Зауважимо, що використання стандартного променя, який проходить через оптичний центр лінзи недоцільне: зліва і справа від лінзи розташовані різні середовища, і промінь, спрямований у оптичний центр, буде заломлюватись за законом Снеліуса.

Таким чином, на виході з оптичної системи отримуємо промінь, який на її вході поширювався паралельно до оптичної осі. За означенням точка перетину такого променя (або його продовження, як у нашому випадку) з головною оптичною віссю оптичної системи дасть положення її головного фокуса F' . Точка перетину такого променя (або його продовження) з продовженням вхідного променя визначає положення задньої головної площини системи H' . У нашому випадку вона збігається із фокальною площиною лінзи 2.

Виконавши аналогічну побудову променя, який падає на товсту лінзу паралельно до її оптичної осі справа наліво, отримаємо положення її головного фокуса F і передньої головної площини H (рис. 1.61).

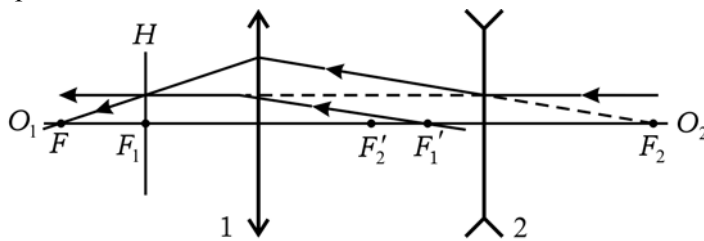


Рис. 1.61. Визначення положення головного фокуса F і передньої головної площини H (до прикладу 1.10)

Тепер, маючи положення головних площин товстої лінзи та її головних фокусів, можемо виконувати графічні побудови в такій системі, замінивши реальну оптичну систему на її еквівалент (рис. 1.62).

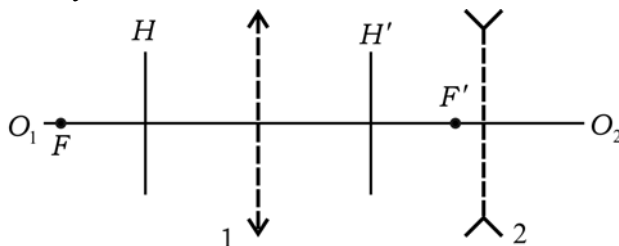


Рис. 1.62. Реальна та еквівалентна схеми оптичної системи, яка складається з двох лінз (до прикладу 1.10)

Приклад 1.11. Знайдіть за допомогою матричного методу положення фокусів і головних площин товстої опукло-вгнутої скляної лінзи ($d = 4$ см; $n = 1,5$; $\Phi_1 = +50$ дптр; $\Phi_2 = -50$ дптр), рис. 1.58.

Розв'язання. Проходження променя через будь-яку оптичну систему можна описати за допомогою її оптичної матриці, яка в загальному вигляді складається із

чотирьох елементів $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Знаючи матрицю оптичної системи, обмеженої опорними площинами (рис. 1.63), можна розрахувати положення її кардинальних елементів (головних фокусів, головних площин), а також, задавши координати променя на вході системи (висоту входження відносно оптичної осі y_1 і кут u_1), отримати рівняння для вихідного променя:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

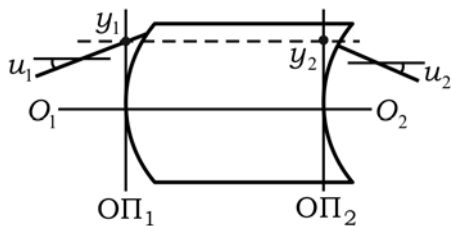


Рис. 1.63. До прикладу 1.11

Елементи матриці товстої лінзи (1.28) розраховуються за формулами:

$$A = 1 - \frac{d}{n} \Phi_1 = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{d}{n} = \frac{8}{3} \text{ см},$$

$$C = -\Phi = -\left(\Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2 \right) = -\frac{2}{3} \text{ см}^{-1}, \quad D = 1 - \frac{d}{n} \Phi_2 = \frac{7}{3}.$$

Таким чином, матриця товстої лінзи набуває вигляду $M = \begin{pmatrix} -1/3 & 8/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ (обрані

розмірності коефіцієнтів і запис їх у вигляді дроби, на наш погляд, роблять розрахунки більш зручними та наочними).

Однією із властивостей оптичної матриці є рівність її детермінанта одиниці. Цією властивістю варто користуватися для перевірки правильності отриманого результату. У нашому випадку $\det M = -7/9 + 16/9 = 1$. Тепер знайдемо положення головних площин і головних фокусів:

$$X_H = \frac{D-1}{C} = -2 \text{ см}, \quad X_F = \frac{D}{C} = -3,5 \text{ см},$$

$$X_{H'} = \frac{1-A}{C} = -2 \text{ см}, \quad X_{F'} = -\frac{A}{C} = -0,5 \text{ см}.$$

При цьому координати вхідної головної площини H і переднього фокуса системи F відраховуються від опорної площини $ОП_1$ (знак "-" свідчить про те, що відкласти ці відстані слід ліворуч від $ОП_1$), а вихідної головної площини H' і заднього фокуса системи F' – від опорної площини $ОП_2$.

Зверніть увагу на те, що розрахунки, виконані методами матричної оптики, повністю відповідають результатам, отриманим у прикладі 1.10.

Приклад 1.12. Для товстої лінзи з параметрами, наведеними у прикладах 1.10 та 1.11, знайдіть положення зображення та лінійний коефіцієнт збільшення, якщо предмет розташований перед лінзою на відстані $a = 5$ см від її передньої поверхні. Задачу розв'язати графічно. Правильність побудови перевірити матричним методом.

Розв'язання. Графічно задачу можна розв'язати прямою побудовою, змодельовавши товсту лінзу системою з двох тонких лінз, як це зроблено на рис. 1.59, або виконати побудову з використанням головних площин і фокусів системи, замінивши товсту лінзу на її еквівалент (рис. 1.62). Застосуємо останній метод.

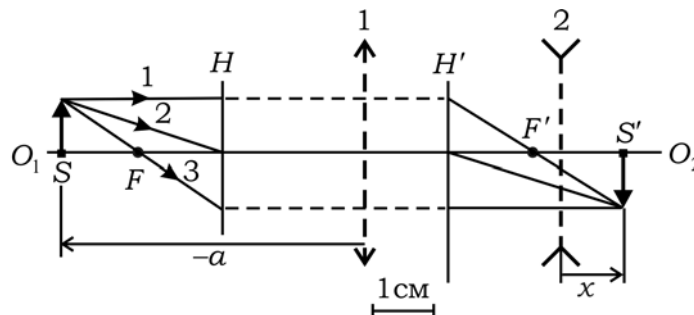


Рис. 1.64. До прикладу 1.12

Для побудови зображення точки S достатньо будь-яких двох променів із вказаних на рис. 1.64, але для кращого розуміння побудови пояснимо хід всіх трьох точок. Промінь 1 падає на вхідну головну площину H паралельно до головної оптичної осі. Його слід транслюється на вихідну (задню) площину H' і промінь виходить з неї, проходячи через задній фокус системи F' . Промінь 3 запускається в систему через головний фокус F . Після трансляції точки входу цього променя на вихідну головну площину H' промінь піде паралельно до головної оптичної осі системи. Промінь 2 проходить через передню головну точку (точку перетину головної площини з оптичною віссю). Точка входу транслюється на вихідну головну площину H' , і промінь на виході із системи піде паралельно до вхідного променя. Останнє справедливо тоді, коли середовища в просторі предметів і просторі зображень мають однаковий показник заломлення. У протилежному випадку промінь заломиться відповідно до закону заломлення світла. Усі три промені на виході із системи сходяться, утворюючи зображення S' .

Використаємо масштаб рисунка для визначення положення зображення. Воно розташоване на відстані 1 см від лінзи 2 (задньої поверхні товстої лінзи), і його розмір дорівнює розміру предмета.

Перевіримо отриманий результат, використовуючи матричний метод. Для цього розмістимо опорну площину OP_1 у площині предмета (на відстані $a = 5$ см від пе-

редньої поверхні товстої лінзи), а площину ОП₂ – у площині зображення (її положення щодо задньої поверхні лінзи поки що невідоме). Проходження променя між двома опорними площинами характеризується трьома матрицями:

$$1) T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця трансляції, яка описує поширення променя від площини предмета до лінзи;}$$

ни предмета до лінзи;

$$2) M = \begin{pmatrix} -1/3 & 8/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix} - \text{матриця лінзи, яка описує проходження променя через лінзу;}$$

$$3) T_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця трансляції, яка описує поширення променя від лінзи до площини зображення.}$$

площини зображення.

Загальна матриця є добутком матриць окремих елементів, вміщених між опорними площинами. За правилами матричної оптики множення матриць відбувається у зворотному по відношенню до ходу променя порядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 8/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умовою спряження, коли кожній точці предмета відповідає точка зображення, є рівність елемента B загальної матриці нулю, отже, $B = \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}a\right)x - \frac{1}{3}a + \frac{8}{3} = 0$.

Звідси отримаємо $x = \frac{a-8}{7-2a} = 1$ см, що відповідає результату, отриманому графічним способом (рис. 1.64).

Якщо виконується умова спряження (тобто в першій опорній площині розташовано предмет, а в другій – його зображення), елемент A загальної матриці дорівнює лінійному поперечному збільшенню системи. У нашому випадку $A = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x = -1$, що знову ж таки підтверджує виконану побудову. Знак "-" свідчить, що отримане зображення обернене.

Приклад 1.13. За допомогою тонкої лінзи з оптичною силою $\Phi = 5$ дптр отримали зображення предмета, який розташований на відстані $s = 30$ см від лінзи. На яку відстань зміститься зображення, якщо між лінзою і предметом розмістити скляну пластинку товщиною $t = 15$ см? Приклад розв'яжіть матричним методом.

Розв'язання. Зробимо якісний рисунок, побудуємо хід променів (рис. 1.65, а) і проведемо аналіз:

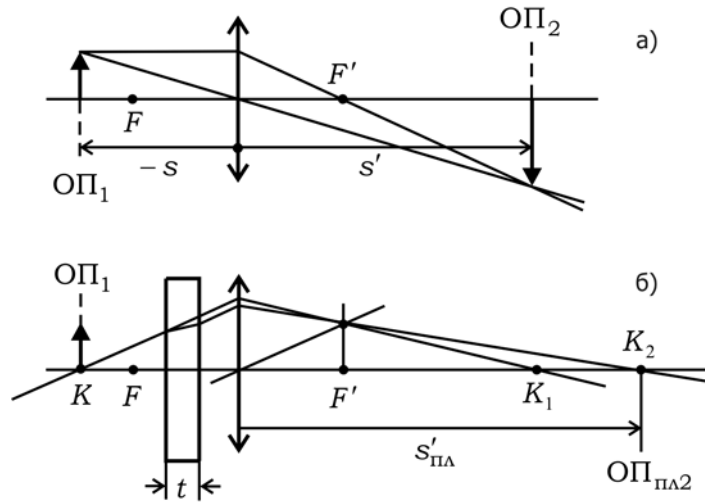


Рис. 1.65. До прикладу 1.13

Фокусна відстань для лінзи, яка розташована в повітрі, дорівнює $f' = \frac{1}{\Phi} = 20$ см, тобто предмет розташований посередині між фокусом F і подвійним фокусом $2F$. Зображення – дійсне, збільшене, обернене.

Що буде із зображенням, якщо використати скляну пластинку, як показано на рис. 1.65, б)? Побудова ходу променів показує, що зображення із точки K_1 на головній оптичній осі (випадок – без пластинки) переміститься в точку K_2 (випадок з пластинкою), тобто якісно можна стверджувати, що зображення віддалиться від лінзи.

Розв'яжемо задачу матричним методом.

Оберемо опорні площини $ОП_1$ і $ОП_2$ таким чином, щоб вони збіглися із площиною предмета і площиною зображення, відповідно. Оскільки $ОП_1$ і $ОП_2$ спряжені, то, виходячи з теорії матричної оптики, у матриці $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ оптичної системи нулю дорівнює елемент, який розташований на перетині 1-го рядка і 2-го стовпчика $B = 0$:

а) розглянемо випадок оптичної системи без пластинки. Загальна матриця системи

$$M = \begin{pmatrix} 1 & S' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для випадку $B=0$ маємо $B = S + S' - S \cdot S' \cdot \Phi = 0$, де $S = \frac{s}{n}$, $S' = \frac{s'}{n'}$. Величини s і s' – геометричні відстані від лінзи до предмета та зображення, відповідно; S і S' – зведені відстані від лінзи до предмета та зображення, відповідно; n і n' – показники заломлення середовищ у просторі предмета та в просторі зображення, відповідно. Таким чином, $S' = -\frac{S}{1 - S\Phi}$.

Якщо предмет, лінза і зображення розташовані в повітрі, то розрахунок дає значення відстані від лінзи до зображення:

$$s' = -\frac{0,3}{1 - 0,3 \cdot 5} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6 \text{ м};$$

б) для оптичної системи з пластинкою з урахуванням її товщини зведена відстань від лінзи до предмета дорівнює

$$S_{\text{пл}} = \sum^2 S = \frac{s-t}{n_{\text{пов}}} + \frac{t}{n_{\text{скл}}} = \frac{(0,3-0,15)}{1} + \frac{0,15}{1,5} = 0,25 \text{ м}.$$

Для зведеної відстані $S'_{\text{пл}}$ від лінзи до зображення з урахуванням пластинки маємо

$$S'_{\text{пл}} = -\frac{S_{\text{пл}}}{1 - S_{\text{пл}}\Phi} \Rightarrow S'_{\text{пл}} = -\frac{0,25}{1 - 0,25 \cdot 5} = 1 \text{ м}.$$

Відстань K_2K_1 , яку треба визначити, дорівнює

$$K_2K_1 = S'_{\text{пл}} - S' \Rightarrow K_2K_1 = 1 \text{ м} - 0,6 \text{ м} = 0,4 \text{ м}.$$

Приклад 1.14. Скляна півкуля лежить своєю плоскою поверхнею на аркуші паперу. Знайдіть розташування зображення і збільшення літери, що розміщена в центрі кола, якщо розміри літери набагато менші від радіуса півкулі. Проілюструйте відповідь побудовою.

Розв'язання. Уявімо, що папір знизу освітлюється. Тоді літеру представляємо як об'єкт, що розташований на відстані $(-R)$ від сферичної поверхні, оптична сила якої $\Phi_2 = \frac{n_0 - 1}{R} = \frac{1}{2R}$, де $n_0 = 1,5$ – показник заломлення скла (рис. 1.66). Оптична сила передньої плоскої поверхні лінзи $\Phi_1 = 0$. Тоді оптична сила товстої лінзи у вигляді півкулі дорівнює $\Phi = \Phi_2 = \frac{1}{2R}$. За допомогою формули (1.10) можна показати, що передня головна площина H розташована від плоскої поверхні лінзи на відстані $S_H = \frac{2}{3}R$, а задня головна площина H' дотична до сферичної поверхні лінзи (рис. 1.66, а).

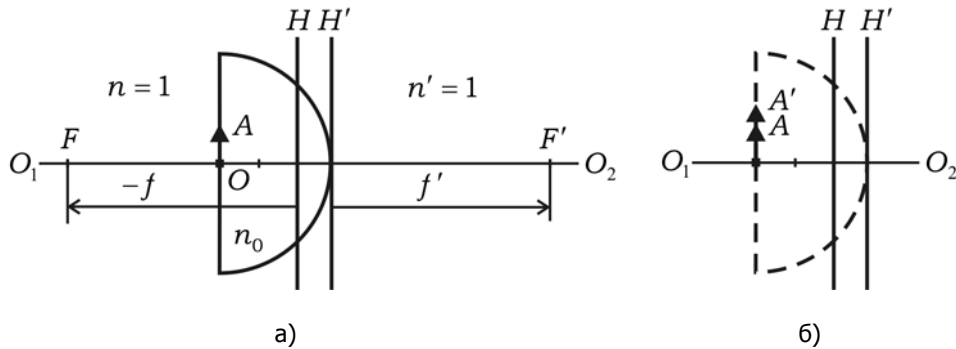


Рис. 1.66. До прикладу 1.14

Замінивши реальну оптичну систему на еквівалентну, яка задається головними площинами і головними фокусами, можна замість матриці товстої лінзи використовувати матрицю тонкої лінзи. У цьому випадку слід користуватись матрицею тонкої лінзи $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$, а відстані відраховувати від відповідних головних площин.

Оберемо опорні площини ОП₁ і ОП₂ у місцях, де розташовані предмет (на плоскій поверхні півкулі) і зображення (у точці, положення якої нам ще необхідно визначити). Матриця такої оптичної системи матиме вигляд

$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де через a та a' позначені відстані від H і H' до предмета та зображення, відповідно. Звернемо увагу на те, що при записі матриць трансляції використовувались геометричні відстані a та a' , а не зведені відстані $L = \frac{2}{3} \frac{R}{n_0}$ та $L' = \frac{a'}{n'}$, як того, на-

чебто, вимагає теорія матричної оптики. Насправді, введення головних площин і початок роботи з ними, а не з реальною товстою лінзою, змушує нас не робити ніяких подальших урахувань показників заломлення лінзи. Це пов'язано з тим, що перехід до еквівалентної системи (до задачі оптичної системи через її головні площини і головні фокуси) означає врахування в цих параметрах всієї інформації про показники заломлення. Таким чином, шукана матриця набуває вигляду

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{3} \\ -\frac{1}{2R} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a'}{2R} & \frac{2R}{3} + \frac{2a'}{3} \\ -\frac{1}{2R} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Визначення елемента $B = \frac{2R}{3} + \frac{2a'}{3}$ матриці M , який дорівнює нулю, дає $a' = -R$. Таким чином, зображення буде розташоване на відстані $(-R)$ від площини H' , тобто зображення і предмет перебуватимуть в одній площині, як представлено на рис. 1.66, б. Матриця системи з урахуванням знайденої величини $a' = -R$ набуде вигляду

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2R} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Відомо (див. запитання 1.4.12), що елемент A матриці зі спряженими опорними площинами, як у обраному нами випадку, чисельно дорівнює величині поперечного (лінійного) збільшення $A = 3/2 = \beta$. Таким чином, зображення буде уявним, прямим і збільшеним у $\beta = 1,5$ рази.

Визначимо положення головних фокусів системи. Із матричної оптики відомі формули для передньої (f) і задньої (f') фокусних відстаней, відрахованих від ОП₁ та ОП₂, відповідно: $f = n \frac{D}{C}$ та $f' = -n' \frac{A}{C}$, де n та n' – показники заломлення простору предмета та зображення, відповідно; A, C, D – елементи матриці.

Як було з'ясовано вище, значення показників заломлення $n' = n = 1$. Виходячи зі значень елементів матриці (1.39), маємо

$$f = -\frac{2/3}{-1/2R} = \frac{4R}{3}, \quad f' = \frac{3/2}{-1/2R} = -3R.$$

Поставимо положення головних фокусів F і F' на рис. 1.66, а. Метод побудов (рис. 1.67) підтверджує результати отримані вище.

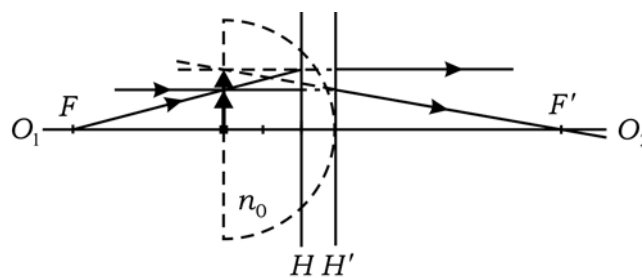


Рис. 1.67. Застосування методу побудов до прикладу 1.14

Дайте відповідь, яку роль у розв'язанні цього прикладу відіграє згадування в умові про те, що "розміри літери набагато менші від радіуса півкулі"?

Приклад 1.15. Розгляньте характеристики лінзи у вигляді сферичної кулі.

Розв'язання. Куля – товста лінза (рис. 1.68), оптична сила якої визначається за формулою $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2$. Для скляної кулі, яка розташована в повітрі, а показник заломлення матеріалу якої n , оптична сила дорівнює

$$\Phi = \frac{n-1}{R} + \frac{1-n}{-R} - \frac{2R}{n} \left(\frac{n-1}{R} \right) \left(\frac{1-n}{-R} \right) = \frac{2(n-1)}{nR}.$$

Головні площини H і H' розташовані від вершин поверхонь товстої лінзи на відстанях (1.10) $S_H = \frac{d \Phi_2}{n \Phi}$, $S_{H'} = -\frac{d \Phi_1}{n \Phi}$. Для кулі ці відстані дорівнюють

$$S_H = \frac{2R}{n} \cdot \frac{n-1}{R} \cdot \frac{Rn}{2(n-1)} = R; \quad S_{H'} = -R, \text{ тобто головні площини кулі проходять через її центр.}$$

Усі відстані, включаючи і фокусні, відраховуються від центра кулі, де розташовані головні точки. У цьому разі до кулі можна застосовувати формули для тонкої лінзи.

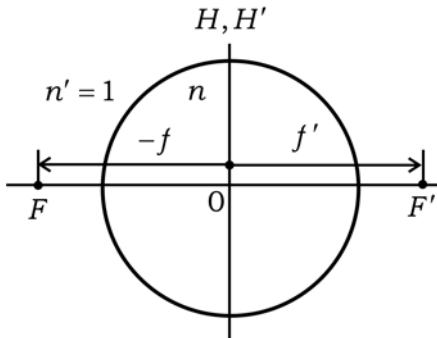


Рис. 1.68. До запитання 1.3.31

Фокусні відстані визначаються за формулами $f' = \frac{n'}{\Phi}$ та $f = -\frac{n'}{\Phi}$. Для кулі в повітрі ($n' = 1$) задня фокусна відстань становить $f' = \frac{Rn}{2(n-1)}$, передня фокусна відстань – $f = -\frac{Rn}{2(n-1)}$. Для кулі зі скла ($n = 1,5$) величини будуть такі: $f' = 1,5R$, $f = -1,5R$.

Приклад 1.16. Безпосередньо перед повітряною кулькою з радіусом кривини R у склі розміщено невеличкий предмет. Де буде утворюватись його зображення? Яким воно буде?

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, сферична порожнина у склі представляє собою товсту лінзу, оптична сила якої $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2 = 2n \frac{(1-n)}{R}$.

Наведені координати головних площин знайдемо за формулами (1.10):

$$S_H = \frac{s_H}{n} = 2R \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad S_{H'} = \frac{s_{H'}}{n'} = -2R \frac{\Phi_1}{\Phi},$$

де s_H і $s_{H'}$ – геометричні координати головних площин відносно вершин поверхонь сферичної порожнини; n і n' – показники заломлення простору предметів і простору зображень, відповідно (у даному прикладі вони рівні між собою і дорівнюють показнику заломлення скла). Використовуючи вирази для оптичних сил, отримаємо $s_H = R$, $s_{H'} = -R$. Тобто для сферичної порожнини у склі, як і для скляної кульки в повітрі, головні площини H і H' збігаються і проходять через її центр.

Положення головних фокусів знайдемо, використавши зв'язок між оптичною силою лінзи і фокусними відстанями: $f = -\frac{n}{\Phi} = R$, $f' = \frac{n'}{\Phi} = -R$. Ці відстані відра-

ховуються від відповідних головних площин. На рис. 1.69 представлено еквівалентну схему, задану головними площинами та фокусами. Таке представлення дозволяє розв'язати задачу, наприклад, методом геометричних побудов. Можна довести, що для показника заломлення скла $n = 1,5$, зображення розташоване на відстані $R/2$ від центра кулі, а лінійне збільшення $\beta = 0,5$.

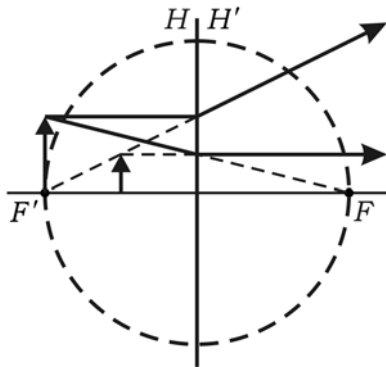


Рис. 1.69. До прикладу 1.16

Дайте відповідь, яке навантаження в запитанні несе інформація про те, що предмет "невеличкий".

Приклад 1.17. Отримайте формулу Гаусса (1.4) матричним методом.

Розв'язання. Вважатимемо, що зліва від системи, яка характеризується головними площинами H і H' , розташоване середовище з показником заломлення n , а справа – середовище з n' . Через спряжені площини, у яких розташовані предмет і зображення, проводимо опорні площини ОП₁ та ОП₂ (рис. 1.70). Матриця щодо спряжених площин має вигляд

$$M = T_2 \cdot M_H \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & L' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - L'\Phi & L + L' - LL'\Phi \\ -\Phi & 1 - L\Phi \end{pmatrix}.$$

Зведені відстані дорівнюватимуть $L = \frac{a}{n}$ і $L' = \frac{a'}{n'}$, відповідно.

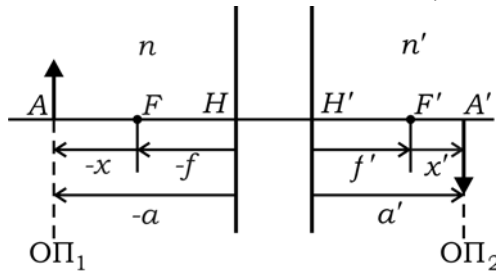


Рис. 1.70. До прикладу 1.17

Умовою спряженості є рівність нулю елемента матриці B , тобто $L + L' - LL'\Phi = 0$, звідси $\frac{a}{n} - \frac{a'}{n'} = \frac{a'a}{n'n}\Phi$. Ураховуючи зв'язок між фокусними відстанями лінзи $\left(\frac{n'}{n} = \frac{f'}{f}\right)$, отримаємо $\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1$.

Приклад 1.18. Отримайте формулу Ньютона (1.5) матричним методом.

Розв'язання. У цьому випадку зручно скористатись матрицею M_F оптичної системи щодо фокальних площин, отриманою в запитанні 1.4.16. Для спряжених точок A та A' матриця набуде вигляду

$$M = T_2 \cdot M_F \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\Phi \\ -\Phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X'\Phi & 1/\Phi - XX'\Phi \\ -\Phi & -X\Phi \end{pmatrix}.$$

Тут $X = \frac{x}{n}$ – трансляція (зведена відстань) від точки A до переднього фокуса;

$X' = \frac{x'}{n'}$ – трансляція від F' до A' (рис. 1.70). За умовою отримана матриця належить спряженим площинам, проведеним через точки A та A' . Тому елемент B системи має дорівнювати нулю:

$$1/\Phi - XX'\Phi = 0 \Rightarrow \frac{x}{n} \cdot \frac{x'}{n'} = \frac{1}{\Phi^2} \Rightarrow x \cdot x' = \frac{n}{\Phi} \cdot \frac{n'}{\Phi} = f \cdot f'.$$

Приклад 1.19. Матричним методом доведіть, що відстань між предметом і його зображенням, утвореним тонкою додатною лінзою, не може бути меншою від $4f'$, де f' – фокусна відстань цієї лінзи (рис. 1.19).

Розв'язання. Як було показано вище (див. приклад 1.15), матриця лінзи щодо спряжених площин OP_1 та OP_2 (рис. 1.70) має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L'\Phi & L + L' - LL'\Phi \\ -\Phi & 1 - L\Phi \end{pmatrix}.$$

Тут зведені відстані дорівнюють $L = \frac{a}{n}$, $L' = \frac{a'}{n'}$. Очевидно, що повна трансляція для тонкої лінзи $T = L + L'$. Виходячи з того, що в матриці M елемент B для випадку спряжених площин дорівнює нулю (див. запитання 1.4.12), знаходимо зв'язок між L та L' :

$$L + L' - LL'\Phi = 0 \Rightarrow L' = \frac{L}{L\Phi - 1} \Rightarrow T = L + L' = L + \frac{L}{L\Phi - 1} = \frac{L^2\Phi}{L\Phi - 1}.$$

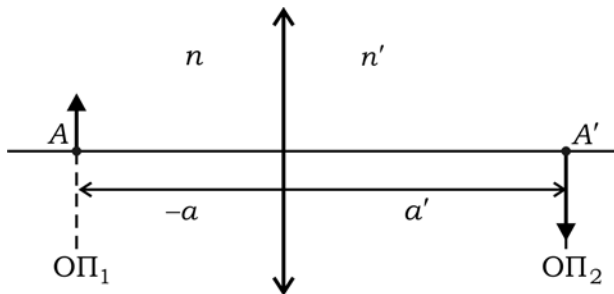


Рис. 1.71. До прикладу 1.19

Дослідимо повну трансляцію $T = \frac{L^2\Phi}{L\Phi - 1}$ на екстремум $\frac{dT}{dL} = 0$. Це дає мінімальне значення зведеної відстані $L_0 = \frac{2}{\Phi}$. Мінімальна трансляція $T_0 = \frac{4}{\Phi} = 4f'$, що й потрібно було довести.

Зауважимо, що як для товстої лінзи, так і для будь-якої додатної оптичної системи ця відстань дорівнює $4f' + h$, де h – відстань між головними площинами.

2. ФОТОМЕТРІЯ

2.1. Короткі теоретичні відомості

- Під оптичним випромінюванням розуміють електромагнітне випромінювання, довжина хвилі якого міститься в діапазоні з умовними межами від 10 нм до 1 мм. До оптичного випромінювання належить видиме випромінювання (світло у вузькому значенні слова), що займає діапазон довжин хвиль від 380–400 нм до 760–780 нм. Саме таке випромінювання викликає зорове відчуття у людини. Щодо довгохвильового випромінювання в цьому діапазоні аж до $\lambda \approx 1$ мм розташована область інфрачервоного (ІЧ) випромінювання, а щодо короткохвильового – області ультрафіолетового (УФ) випромінювання, а ще далі – ультрам'якого рентгенівського випромінювання (аж до $\lambda \approx 1$ нм).

Для світла (оптичного випромінювання видимого діапазону) історично першими були введені величини, що кількісно його описують, а також одиниці вимірювання цих величин. Пізніше, на основі вже побудованої системи світлових (фотометричних) величин та їх одиниць вимірювання була створена система енергетичних величин та їх одиниць для вимірювання оптичного випромінювання, яке крім видимої ділянки спектра ("світла"), містить і суміжні ділянки невидимого людським оком випромінювання – "ультрафіолетового" та "інфрачервоного".

- Базовою характеристикою, що використовується при вимірюванні світлових та енергетичних величин, є світловий потік (Φ) та енергетичним потік (Φ_e), відповідно. *Потік енергії випромінювання* – це кількість енергії, що переноситься випромінюванням за одиницю часу крізь поверхню. Тривалість перенесення енергії при цьому має значно перевищувати період світлових коливань.

Якщо виміряний у видимій ділянці спектра потік пов'язують зі спектральною чутливістю людського ока, то застосовують термін *світловий потік*, на відміну від вимірювання потоку за допомогою об'єктивних приладів, коли йдеться про *енергетичний потік*. Відповідно, у позначеннях потоків використовують індекси: "v" (від англ. *visual* – видимий, світловий) і "e" (від англ. *energy* – енергетичний¹).

Якщо випромінювання складається з кількох монохроматичних складових, то повний енергетичний потік такого випромінювання складається із суми монохро-

¹ Нижній індекс "v" можна опускати, маючи на увазі при цьому, що величини без нижнього індексу – фотометричні (світлові) величини; з нижнім індексом "e" – енергетичні величини.

матичних енергетичних потоків. У випадку суцільного спектра в діапазоні від λ_1 до λ_2 повний енергетичний потік визначиться, як

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u_e(\lambda) d\lambda, \quad (2.1)$$

де $u_e(\lambda)$ – величина, яка називається *спектральною густиною енергії*:

$$u_e(\lambda) = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \quad (2.2)$$

де $d\Phi_e$ – потік енергії оптичного випромінювання, довжини хвиль якого лежать у діапазоні довжин хвиль від λ до $\lambda + d\lambda$.

Система фотометричних величин. Дія світла на око людини залежить від довжини хвилі світла. Чутливість середньостатистичного адаптованого людського ока до світла з різними довжинами хвиль відображається кривою спектральної чутливості ока (рис. 2.1). Величина $V(\lambda)$ – відносна спектральна світлова ефективність монохроматичного випромінювання.

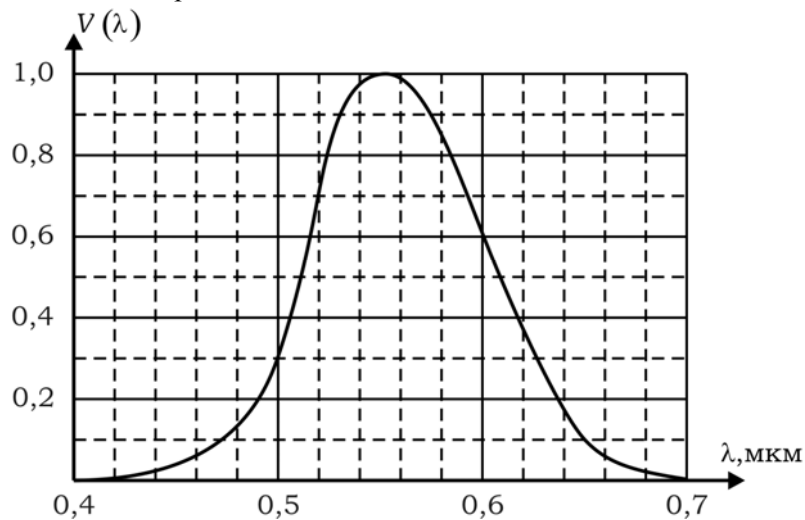


Рис. 2.1. Крива відносної спектральної чутливості ока

Око людини найбільш чутливе до випромінювання з $\lambda = 0,55$ мкм (зелене світло). Функція V для цієї довжини хвилі дорівнює 1. Дія такого самого потоку енергії світла з іншими довжинами хвиль оцінюється оком як менша інтенсивність. Відповідно для інших, окрім $\lambda = 0,55$ мкм, довжин хвиль значення функції V будуть менші від 1. Поза інтервалом довжин хвиль видимого світла $V = 0$.

- *Світловий потік* Φ_v – це потужність випромінювання, яка оцінюється за його дією на середньостатистичне людське око. Одиницею вимірювання світлового потоку є *люмен* (лм). За $\lambda = 0,55$ мкм світловий потік у 1 лм відповідає енергетичному потоку в (1/680) Вт. Світловий та енергетичний потоки в інтервалі довжин хвиль $d\lambda$ пов'язані між собою співвідношенням

$$d\Phi_v = K_m \cdot V(\lambda) \cdot d\Phi_e, \quad \text{де} \quad K_m = 680 \text{ лм/Вт}^1. \quad (2.3)$$

Якщо підставити (2.1) у (2.3), то отримаємо

$$d\Phi_v = K_m \cdot V(\lambda) \cdot u_e(\lambda) \cdot d\lambda. \quad (2.4)$$

Повний світловий потік Φ дорівнює

$$\Phi_v = K_m \cdot \int_0^{\infty} V(\lambda) \cdot u_e(\lambda) \cdot d\lambda.$$

- *Сила світла* – це характеристика точкового джерела світла, яка вимірюється відношенням світлового потоку, що поширюється від джерела в деякому заданому напрямку всередині елементарного тілесного кута з центральною віссю вздовж цього напрямку, до величини цього елементарного тілесного кута:

$$I = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{d\Omega}. \quad (2.5)$$

Для ізотропних джерел (коли сила світла I не залежить від напрямку вимірювання):

$$I = \frac{\Phi_{\text{випр}}}{4\pi}, \quad (2.6)$$

де $\Phi_{\text{випр}}$ – повний світловий потік, який випромінюється джерелом у всіх напрямках (у тілесному куті 4π стерадіан (ср)). Одиницею сили світла в системі СІ є кандела (кд).

- *Освітленість* – це відношення світлового потоку, що падає на елемент поверхні, до площі цього елемента поверхні:

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dA}. \quad (2.7)$$

Одиницею освітленості є люкс (лк). Освітленість в 1 лк створюється світловим потоком у 1 лм, який рівномірно розподілений по поверхні в 1 м^2 :

$$1 \text{ лк} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2}. \quad (2.8)$$

¹ Величина K_m у формулі (2.3) у різних літературних джерелах має значення, яке може помітно відрізнятись. Це пов'язано з емпіричним характером визначення K_m .

Освітленість E , що створюється точковим джерелом, можна виразити через силу світла I джерела, відстань r від поверхні до джерела та кут α між нормаллю до поверхні \vec{n} і напрямком на джерело (рис. 2.2):

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha . \quad (2.9)$$

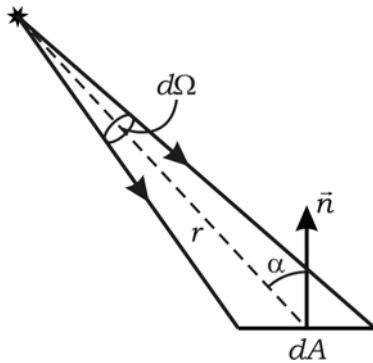


Рис. 2.2. До визначення освітленості

- *Світність M* характеризує поверхні, які випромінюють або відбивають світло. Під світністю M розуміють світловий потік, який виходить з одиниці поверхні джерела випромінювання в усіх напрямках (у межах значень кута θ від 0 до $\pm\pi/2$; θ – кут, який утворений напрямком вимірювання із зовнішньою нормаллю до поверхні):

$$M = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{dA}, \quad (2.10)$$

де $\Phi_{\text{випр}}$ – світловий потік, що випромінюється за всіма напрямками поверхнею джерела площею dA .

Світність M вимірюється в $\text{лм}/\text{м}^2$. (Формально розмірності одиниць вимірювання світності ($\text{лм}/\text{м}^2$) та освітленості ($\text{лк} = \text{лм}/\text{м}^2$) схожі (збігаються)).

- *Яскравість L* характеризує поверхні, які випромінюють або відбивають світло в заданому напрямку. Яскравість визначається як відношення сили світла dI , що випромінюється з елемента поверхні площею dA в обраному напрямку, до проекції площі dA на площину, що перпендикулярна до цього напрямку (рис. 2.3):

$$L = \frac{dI}{dA \cdot \cos \theta} = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{d\Omega \cdot dA \cdot \cos \theta}. \quad (2.11)$$

- У загальному випадку яскравість, виміряна в різних напрямках, різна. Джерела, яскравість яких у всіх напрямках однакова, називаються *ламбертівськими* або *косинусними*. Для ламбертівських джерел світність M та яскравість L пов'язані простим співвідношенням

$$M = \pi L . \quad (2.12)$$

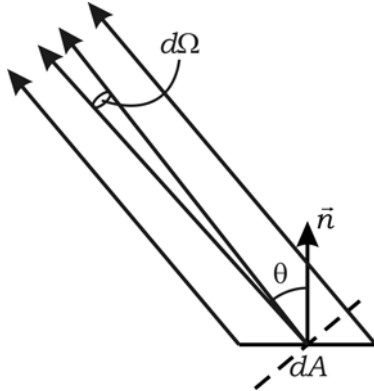


Рис. 2.3. До визначення яскравості

2.2. Запитання та відповіді

2.2.1. Чому виникла необхідність введення в оптиці для вимірювання характеристик випромінювання двох систем величин: енергетичних і світлових? Чому одну з них інколи характеризують як об'єктивну, а другу – як суб'єктивну?

Довгий період часу за оптичне випромінювання вчені приймали видиме світло. Однак експерименти О. Р. Люммера і П. Принсгейма (1899), проведення яких стало можливим після появи можливості об'єктивного вимірювання потужності оптичного випромінювання за допомогою термопар, показали, що далеко за межами видимого діапазону, як із боку його короткохвильового краю, так і з боку довгохвильового краю існує випромінювання. Його відповідно назвали ультрафіолетовим (УФ) та інфрачервоним (ІЧ) випромінюванням.

Окрім того, з'ясувалось, що показання приладів і сприйняття випромінювання видимого діапазону суттєво відрізняються: людське око дуже по-різному реагує на світлові хвилі різних довжин. Найбільш чутливе воно для зеленого ($\lambda = 0,55$ мкм) світла і перестає бачити світло з довжинами хвиль $\lambda < 0,4$ мкм і $\lambda > 0,78$ мкм. Ось чому виникла необхідність введення для вимірювання деяких характеристик в оптиці двох систем величин: енергетичних і світлових. Вимірювання енергетичних величин пов'язують з об'єктивними вимірюваннями, в основі яких лежить вимірювання за допомогою приладів такої величини, як енергія, а світлових – із суб'єктивними, оскільки їх вимірювання базуються на сприйнятті інтенсивності світла людським оком.

2.2.2. Назвіть величини, які можна визначати в одних випадках як енергетичні величини, а в інших випадках, як світлові?

Основна величина, яку можна визначати в одних випадках як енергетичну, а в інших випадках, як світлову, є потік: енергетичний – Φ_e і світловий – Φ_v . Усі похідні від потоку величини – спектральна густина потоку $\varphi(\lambda)$, сила світла I , освітленість E , світність M , яскравість L також можуть набувати характеру енергетичних або світлових величин.

2.2.3. Студенти інколи плутаються у визначеннях потоку енергії; густини потоку енергії та середнього значення густини потоку енергії, а також об'ємної густини енергії та спектральної густини енергії. Дайте визначення цим величинам.

- Потік енергії (Φ_e) – це енергія dE , що переноситься випромінюванням за одиницю часу через деяку поверхню

$$\Phi_e = \frac{dE}{dt}. \quad (2.13)$$

Потік енергії – це скалярна величина, розмірність якої збігається з розмірністю потужності. Одиницею вимірювання потоку енергії є ват (Вт).

Якщо нормаль до поверхні площею dA утворює з напрямком поширення випромінювання кут θ , то потік енергії випромінювання в тілесному куті $d\Omega$ (рис. 2.4) дорівнює $d\Phi_e = I dA d\Omega \cos\theta$. З останньої рівності видно, що величина I чисельно дорівнює потоку енергії випромінювання, який поширюється через одиницю площі поверхні в нормальному до неї напрямку в одиниці тілесного кута. Ця величина (I) називається *енергетичною інтенсивністю випромінювання*. Величину $dA \cos\theta$ називають *видимою величиною поверхні dA* .

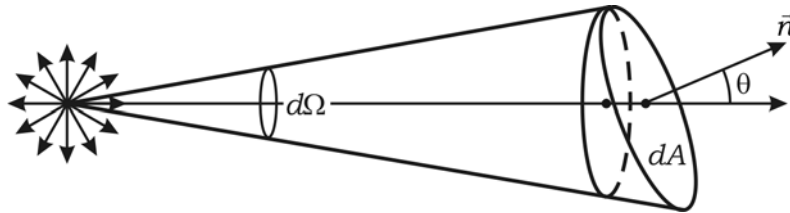


Рис. 2.4. До визначення потоку енергії

- *Густина потоку енергії* – це енергія, що переноситься випромінюванням за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення випромінювання.

Густина потоку енергії дорівнює модулю вектора Умова–Пойнтінга (див. розд. 3).

- *Середня густина потоку енергії за час T* – це середнє значення густини потоку енергії $\Phi_e(t)$ за час T :

$$\langle \Phi_e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_e(t) dt. \quad (2.14)$$

Нагадаємо, що за визначенням середнє значення будь-якої функції $\langle \Phi(t) \rangle$ за проміжок часу $(t_2 - t_1)$ відповідає висоті прямокутника, площа якого дорівнює площі між кривою $\Phi(t)$ і віссю t на інтервалі між t_1 та t_2 (рис. 2.25).

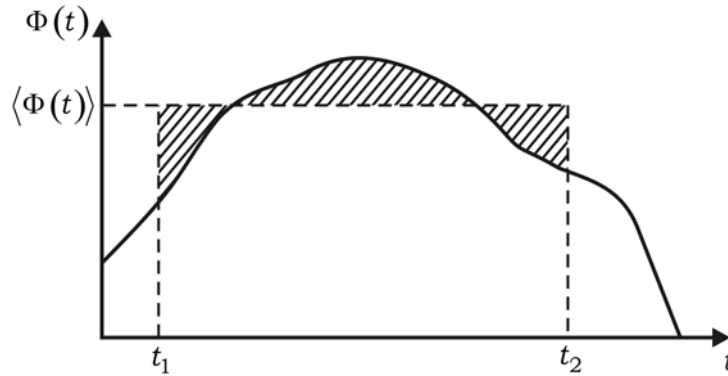


Рис. 2.5. До визначення середнього значення функції $\langle \Phi(t) \rangle$ за проміжок часу $(t_2 - t_1)$

Середня густина потоку енергії дорівнює інтенсивності випромінювання (див. розд. 3).

- *Об'ємна густина енергії випромінювання* u_e – це кількість енергії, що припадає на одиницю об'єму простору, у якому поширюється випромінювання

$$u_e = \frac{dE}{dV}. \quad (2.15)$$

- Об'ємну густину енергії (2.15) можна виразити таким чином:

$$u_e = \int_0^{\infty} u_\nu d\nu = \int_0^{\infty} u_\lambda d\lambda, \quad (2.16)$$

де коефіцієнти u_ν та u_λ називаються *спектральними густинами енергії випромінювання*, що припадає на інтервал частот $\nu, \nu + d\nu$ або інтервал довжин хвиль $\lambda, \lambda + d\lambda$. Величини $u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda$ мають зміст об'ємної густини енергії випромінювання, що припадає на відповідний інтервал частот або інтервал довжин хвиль. Спектральну густину енергії можна визначити через потік енергії випромінювання, як у (2.2).

Не слід забувати, що паралельно з енергетичними величинами існують їх світлові аналоги: *світловий потік*, *густина світлового потоку* та *середня у часі густина світлового потоку*.

2.2.4. Доведіть, що потік енергії $\Phi_e = u_e \cdot S \cdot \nu$, де u_e – об'ємна густина енергії; S – площа поверхні; ν – швидкість переносу енергії випромінювання.

За визначенням $\Phi_e = \frac{dE}{dt}$, тут dE – повна енергія випромінювання в просторі, який характеризується об'ємом $dV = S \cdot d\ell$. Далі

$$\Phi_e = \frac{dE}{dt} = \frac{u_e \cdot dV}{dt} = \frac{u_e \cdot S \cdot d\ell}{dt} = u_e \cdot S \cdot v. \quad (2.17)$$

2.2.5. Як пов'язані між собою світловий та енергетичний потоки?

Світловий та енергетичний потоки пов'язані між собою співвідношенням $d\Phi_v = K_m \cdot V(\lambda) \cdot d\Phi$, де $K_m = 680$ лк/Вт; $V(\lambda)$ – відносна спектральна світлова ефективність монохроматичного випромінювання, яка визначається за графіком рис. 2.1.

2.2.6. Чому дорівнює світловий потік у спектрі сонячного світла з довжиною хвилі поблизу 0,85 мкм?

Для випромінювання будь-якого походження, у тому числі і для сонячного світла в невидимому людським оком діапазоні з довжиною хвилі $\lambda = 0,85$ мкм величина $V(\lambda) = 0$. Це означає, що світловий потік для випромінювання з такою довжиною хвилі дорівнює нулю $\Phi_v = 0$.

2.2.7. Чи можна застосувати характеристику "сила світла" для неточкового (протяжного) джерела світла?

Сила світла – це характеристика точкового джерела світла (див. пояснення до формули (2.5)). Проте характеристику "сила світла" можна використовувати і для протяжного джерела, якщо йдеться про силу світла елемента його поверхні dA . Тоді під $d\Phi_{\text{випр}}$ у (2.5) розуміють світловий потік, який випромінює елемент поверхні dA у межах тілесного кута $d\Omega$.

2.2.8. Яскравість і світність об'єднує те, що ці величини характеризують поверхні, що випромінюють (відбивають). Чим відрізняються ці поверхні?

Світність M характеризує світловий потік, який виходить з одиниці поверхні в усіх напрямках у межах просторового кута від 0 до 2π ср. Через таку залежність від просторових кутів світність – характеристика інтегральна.

Яскравість L характеризує світловий потік, який виходить з одиниці поверхні в заданому напрямку. Яскравість – кутова характеристика випромінювання (відбиття) світлового потоку поверхнею.

2.2.9. Чи збігаються одиниці вимірювання яскравості і світності?

Ні, не збігаються. Одиницею вимірювання яскравості є $\text{кд}/\text{м}^2$, світність вимірюється в одиницях $\text{лм}/\text{м}^2$. Виходячи із формули (2.12), зв'язок між цими одиницями здійснюється через одиницю вимірювання тілесного кута – стерadian (ср).

2.2.10. Що називають ламбертовим (ламбертівським) джерелом?

У загальному випадку яскравість джерел для різних напрямків різна $L = L(\theta)$. Проте існують джерела, яскравість яких у всіх напрямках однакова: $L \neq L(\theta)$, або $L = \text{const}$ (рис. 2.6, а). Такі джерела називаються ламбертовими (ламбертівськими) або косинусними. До них належить поруватий сніг, диск Сонця тощо. Поняття ламбертівського джерела відносне. Для ламбертівських джерел світність і яскравість пов'язані простим співвідношенням $M = \pi L$.

2.2.11. Чому ламбертові джерела інколи називають косинусними?

Для ламбертівських джерел яскравість $L = \text{const}$, а світловий потік $d\Phi_{\text{випр}}(\theta)$, що випромінюється, пропорційний величині $\cos \theta$ (рис. 2.6, б):

$$d\Phi_{\text{випр}}(\theta) = L \cdot \cos \theta \cdot dS \cdot d\Omega. \quad (2.18)$$

Тому ламбертові джерела ще називають косинусними.

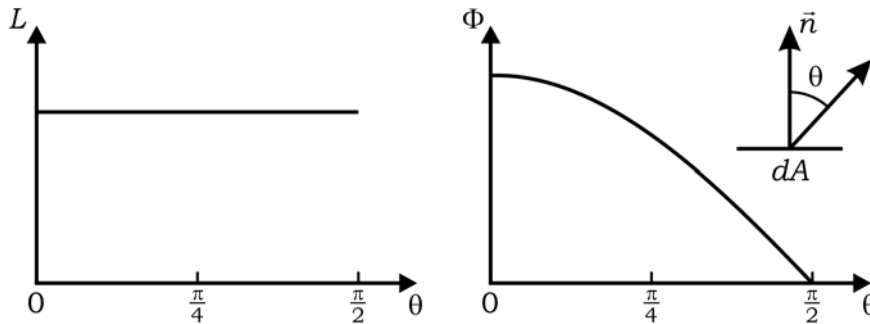


Рис. 2.6. Залежність яскравості (L) і потоку (Φ) від кута θ між напрямком спостереження і нормаллю до поверхні (до запитання 2.11)

2.2.12. Чи можна за допомогою лінзових оптичних систем збільшити яскравість зображення джерела світла порівняно з яскравістю самого джерела світла?

Ні, не можна. Світловий потік від джерела ($d\Phi_{\text{випр}}$) потрапляє на екран із зображенням джерела у вигляді світлового потоку, який характеризується величиною $d\Phi_{\text{пад}}$. Для оптичної системи, яка не має втрат, виконується рівність $d\Phi_{\text{випр}} = d\Phi_{\text{пад}}$. З урахуванням умови синусів Аббе (1.7) можна довести, що за умови нехтування втратами виконується співвідношення $L = L'$ (див. приклад 2.8, а також запитання 2.2.17), тобто яскравість зображення дорівнює яскравості предмета. У реальних оптичних системах існують втрати, тому $d\Phi_{\text{випр}} > d\Phi_{\text{пад}}$. У цьому випадку $L > L'$.

2.2.13. Чи можна світністю характеризувати поверхню, що не випромінює, а відбиває світло, яке падає на неї?

Так, світність може характеризувати не тільки поверхню, що випромінює світло, але й ту, що недзеркально (дифузно) відбиває світло, яке падає на неї. Тоді під $\Phi_{\text{випр}}$ у (2.10) розуміють світловий потік, що відбивається поверхнею з площею dA в усіх напрямках.

2.2.14. Людина стоїть перед світлофором. У скільки разів відрізняються потоки світлової енергії при ввімкненні червоного і зеленого світла, якщо людина при цьому сприймає інтенсивності світла при зміні кольорів світлофора як рівні?

Відносна спектральна світлова ефективність монохроматичного випромінювання $V(\lambda)$ для зеленого світла ($\lambda_1 = 0,55$ мкм) дорівнює $V_1 = 1$. Для червоного світла ($\lambda_2 = 0,63$ мкм) величина $V_2 = 0,2$.

Світловий (Φ_v) та енергетичний (Φ_e) потоки для визначеної довжини хвилі в інтервалі $d\lambda$ пов'язані між собою співвідношенням (2.3):

$$d\Phi_v = K_m \cdot V(\lambda) \cdot d\Phi_e, \text{ де } K_m = 680 \text{ лм/Вт}.$$

За умовою необхідно знайти відношення Φ_{e1} / Φ_{e2} , якщо $\Phi_{v1} = \Phi_{v2}$. Таким чином, $\frac{\Phi_{e1}}{\Phi_{e2}} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{5}$.

2.2.15. *Визначення і розмірності світності та освітленості, як впливає із формул (2.10) і (2.7), збігаються або дуже схожі. У чому полягає фізична відмінність між ними?*

Освітленість визначається як світловий потік $d\Phi_{\text{пад}}$, що падає на поверхню, стосується величини площі dA цієї поверхні $E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dA}$. Світність визначається через світловий потік $d\Phi_{\text{випр}}$, що випромінюється або дифузно відбивається поверхнею, яка має площу dA : $M = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{dA}$. Розмірність цих величин різна: освітленості – лк, світності – лм/м².

2.2.16. *Якою буде залежність яскравості L і сили світла I , яку створює невелика ламбертівська поверхня, від кута θ між нормаллю до цієї поверхні та напрямком випромінювання світла?*

Яскравість джерела у вигляді невеликої ламбертівської поверхні може бути записана таким чином (2.11):

$$L = \frac{dI}{dA \cdot \cos \theta} = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{d\Omega \cdot dA \cdot \cos \theta} = \frac{M}{d\Omega \cdot \cos \theta}.$$

У свою чергу, сила світла такого джерела дорівнює

$$I = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{d\Omega} = \frac{M \cdot dA}{d\Omega}. \quad (2.19)$$

Тобто за постійних значень M , $d\Omega$ і dA яскравість спадає обернено пропорційно до $\cos \theta$, а сила світла залишається сталою для всіх значень θ .

2.2.17. *Як змінюється освітленість фотоплівки та яскравість зображення у фотоапараті, якщо змінюється діаметр діафрагми, розташованої в об'єктиві?*

Діафрагма в об'єктиві фотоапарата є апертурною і визначає світловий потік, що проходить через прилад $\Phi_{\text{пад}} = M \cdot A_d = M \pi r^2$, тут M – світність у площині діафра-

гми, радіус якої r , а площа $A_d = \pi r^2$. Освітленість E фотоплівки в місці розташування зображення визначається як $E = \frac{\Phi_{\text{пад}}}{A_{\text{зобр}}} = \frac{M \cdot A_d}{A_{\text{зобр}}} = \frac{M \pi r^2}{A_{\text{зобр}}}$, тут $A_{\text{зобр}}$ – площа зображення на фотоплівці.

Яскравість зображення $L_{\text{зобр}} = \frac{\Phi_{\text{зобр}}}{A_{\text{зобр}} \cdot d\Omega \cdot \cos\theta}$, тут $\Phi_{\text{зобр}} = \rho \cdot \Phi_{\text{пад}}$, ρ – коефіцієнт відбиття фотоплівки, $d\Omega$ – тілесний кут, у якому падає світловий потік на фотоплівку і який залежить від площі діафрагми через співвідношення $d\Omega = \frac{\pi r^2}{a^2}$, де a – відстань між об'єктивом і фотоплівкою, як показано на рис. 2.7. Тому остаточно маємо $L_{\text{зобр}} = \frac{\rho M a^2}{A_{\text{зобр}}}$.

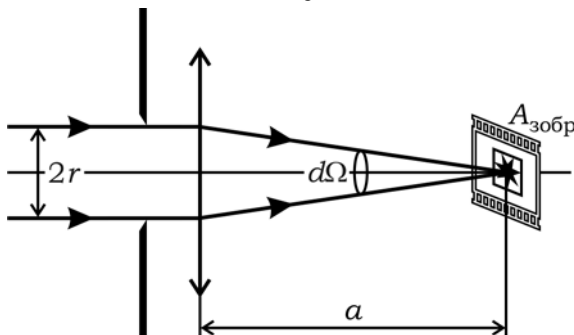


Рис. 2.7. До запитання 2.17

Висновок: освітленість фотоплівки зростає пропорційно квадрату діаметра апертурної діафрагми, а яскравість зображення від зміни розмірів отвору діафрагми не залежить.

2.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Знайдіть за допомогою кривої відносної спектральної чутливості ока (рис. 2.1) потік енергії, який відповідає світловому потоку в 1,0 лм з довжинами хвиль 0,51 та 0,64 мкм.

Розв'язання. Із рис. 2.1 знаходимо значення функції V для двох довжин хвиль:

$$V(0,51 \text{ мкм}) = 0,45; \quad V(0,64 \text{ мкм}) = 0,15.$$

Користуючись (2.4), знаходимо, що $\Phi_e(\lambda) = \frac{\Phi}{V(\lambda) \cdot K_m}$. Таким чином, маємо

$$\Phi_e(0,51 \text{ мкм}) = \frac{1 \text{ лм}}{0,45 \cdot 680 \text{ лм/Вт}} = 3,26 \text{ мВт},$$

$$\Phi_e(0,64\text{мкм}) = \frac{1\text{лм}}{0,15 \cdot 680\text{лм/Вт}} = 9,8\text{мВт}.$$

Із результату випливає, що, незважаючи на однаковість світлових потоків з різною довжиною хвилі (однаковість сприйняття їх інтенсивностей оком), "об'єктивні" характеристики цих джерел світла – енергетичні потоки відрізняються в 3 рази.

Приклад 2.2. Над центром круглого стола радіуса $R=1,0\text{м}$ підвішений невеликий світильник у вигляді плоского горизонтального диска площею $A=100\text{см}^2$. Яскравість світильника не залежить від напрямку й дорівнює $L=1,6 \cdot 10^4\text{кд/м}^2$. На якій висоті від поверхні стола треба розмістити світильник, щоб освітленість периферійних точок стола була максимальною? Якою при цьому буде освітленість стола на периферії?

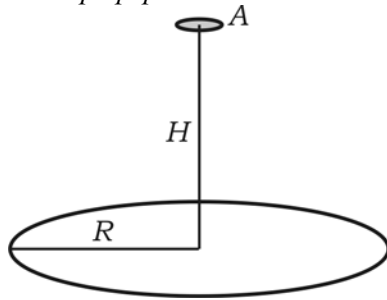


Рис. 2.8. До умови прикладу 2.2

Розв'язання. Позначимо на рис. 2.8. величини, які наведені в умові прикладу. Виділимо із площі світильника елемент dA , а з площі стола елемент dA' . Відстань між ними позначимо як r , кут між вектором \vec{r} і нормаллю до однієї з цих елементарних площин – θ (рис. 2.9).

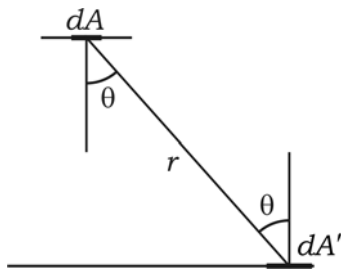


Рис. 2.9. До розв'язування прикладу 2.2

Для випадку, коли розглядаються точки на периферії стола (як в умові)

$$r = \sqrt{R^2 + H^2}. \quad (2.20)$$

Із точки розташування елементарної ділянки світильника площею dA елементарну ділянку поверхні стола площею dA' видно в тілесному куті $d\Omega'$ і навпаки, із точки розташування елементарної ділянки dA' елементарну ділянку dA видно в тілесному куті $d\Omega$ (рис. 2.10).

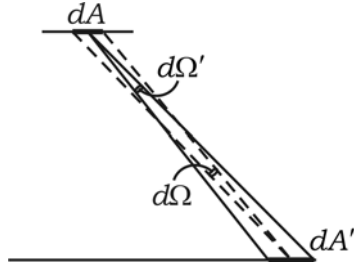


Рис. 2.10. До прикладів 2.2 і 2.7

За визначенням тілесного кута маємо

$$d\Omega = \frac{dA \cdot \cos \theta}{r^2}, \quad (2.21)$$

$$d\Omega' = \frac{dA' \cdot \cos \theta}{r^2}. \quad (2.22)$$

Елементарний світловий потік із ділянки джерела dA за визначенням яскравості (2.11) дорівнює

$$d\Phi_{\text{випр}} = L \cdot d\Omega' \cdot dA \cdot \cos \theta. \quad (2.23)$$

Підставляючи (2.22) у (2.23), маємо

$$d\Phi_{\text{випр}} = L \cdot \frac{dA' \cdot \cos \theta}{r^2} \cdot dA \cdot \cos \theta. \quad (2.24)$$

За визначенням освітленості E (2.7) і з урахуванням того, що система розглядається як така, що не має втрат ($d\Phi_{\text{випр}} = d\Phi_{\text{пад}}$), застосувавши (2.20), маємо

$$dE = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dA'} = L \frac{dA' \cos \theta}{r^2} \cdot dA \cos \theta \cdot \frac{1}{dA'} = L \frac{\cos \theta}{(R^2 + H^2)} \cdot dA \cos \theta. \quad (2.25)$$

Із рис. 2.8 та 2.9 видно, що $\cos \theta = \frac{H}{r} = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}$. Урахувавши це в (2.25), маємо

$$dE = L \cdot \frac{\cos^2 \theta}{(R^2 + H^2)} \cdot dA = L \cdot \frac{H^2}{(R^2 + H^2)^2} \cdot dA. \quad (2.26)$$

Визначення оптимальної висоти підвісу світильника над поверхнею стола для того, щоб освітленість периферійних точок стола була максимальною, зводиться до задачі на визначення екстремуму функції (2.26). Математично це означає, що треба шукати першу частинну похідну від освітленості за висотою та прирівняти її до нуля:

$$\frac{\partial(dE)}{\partial H} = 0,$$

$$\frac{\partial(dE)}{\partial H} = L \cdot dA \cdot \frac{2H(H^2 + R^2)^2 - H^2 \cdot 2(H^2 + R^2) \cdot 2H}{(R^2 + H^2)^4} = 0,$$

$$2H(H^2 + R^2)^2 - H^2 2(H^2 + R^2) \cdot 2H = 0 \Rightarrow H = R. \quad (2.27)$$

Таким чином, оптимальною висотою підвісу світильника над поверхнею стола, коли освітленість периферійних точок стола максимальна, є висота H , що дорівнює радіусу R стола. Якою при цьому буде освітленість стола на периферії? Підставимо (2.27) у (2.26):

$$dE_{\max} = L \cdot \frac{R^2}{(R^2 + R^2)^2} \cdot dA = \frac{L \cdot dA}{4R^2}. \quad (2.28)$$

Проінтегруємо (2.28), урахувавши, що джерело ламбертівське, про що свідчить вираз із умови прикладу: "яскравість світильника не залежить від напрямку"

$$E_{\max} = \frac{L \cdot A}{4R^2},$$

$$E_{\max} = \frac{1.6 \cdot 10^4 \cdot 100}{4 \cdot 1} \text{ лк} = 40 \text{ лк}.$$

Приклад 2.3. За допомогою лінзи з оптичною силою 2 дптр і діаметром 2 см отримують зображення об'єкта, яке розташоване на відстані 5 м від лінзи. Визначте освітленість зображення, якщо яскравість об'єкта дорівнює 100 кд/м². Коефіцієнт пропускання лінзи $\tau = 0,5$.

Розв'язання. Чи можна в загальному вигляді встановити зв'язок між яскравістю предмета та освітленістю зображення через параметри установки? Спробуємо це зробити. Світловий потік, що випромінює елемент площі dA предмета, за визначенням (2.11) дорівнює

$$d\Phi_{\text{випр}} = L \cdot dA \cdot \Omega, \quad (2.29)$$

де L – яскравість предмета; Ω – тілесний кут, під яким з точки вимірювання видно елемент площі предмета, що випромінює. Кут Ω за визначенням дорівнює

$$\Omega = \frac{A}{a^2}, \quad \text{де } A \text{ – діюча площа лінзи.} \quad (2.30)$$

Освітленість зображення за визначенням (2.7), урахуваючи формули (2.29) і (2.30), а також коефіцієнт пропускання $\tau = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{d\Phi_{\text{випр}}}$, дорівнює

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dA'} = \frac{\tau \cdot d\Phi_{\text{випр}}}{dA'} = \frac{\tau \cdot L \cdot dA \cdot A}{dA' \cdot a^2}. \quad (2.31)$$

Із теорії оптичних систем відомо, що лінійне збільшення β дорівнює $\beta = \frac{a}{a'}$, де a та a' – відстані від предмета і його зображення до лінзи, відповідно. Це означає, що для спряжених площин справедливе таке співвідношення:

$$\frac{dA}{dA'} = \frac{a^2}{a'^2}. \quad (2.32)$$

Якщо підставити (2.32) у (2.31), отримаємо

$$E = \frac{\tau \cdot L \cdot dA \cdot A}{dA' \cdot a^2} = \frac{\tau \cdot L \cdot a^2 \cdot A}{a'^2 \cdot a^2} = \frac{\tau \cdot L \cdot A}{a'^2}. \quad (2.33)$$

Проте $\frac{A}{a'^2} = \Omega'$, Ω' – тілесний кут, під яким з точки розташування зображення видно всю площу лінзи. Таким чином,

$$E = \tau \cdot L \cdot \Omega'. \quad (2.34)$$

Як бачимо, освітленість зображення без урахування втрат випромінювання дорівнює добутку яскравості предмета на тілесний кут, у якому з осьової точки зображення видно діючу площу лінзи.

Для умови нашого прикладу з (2.33)

$$E = \frac{0,5 \cdot 100 \text{ кд} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2}{\text{м}^2 \cdot 4 \cdot 25 \text{ м}^2} \approx 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ лк}.$$

Примітка: отримана в цьому прикладі формула (2.34) має універсальний характер і широко застосовується при розв'язуванні визначеного класу задач. Її можна застосовувати як готовий продукт без повторного доведення, що ми і зробимо, наприклад, у прикладі 2.5.

Приклад 2.4. Лампа освітлення має колбу сферичної форми діаметром 6 см, зроблену з матового скла. Усередині колби розташовано точкове тіло розжарювання з силою світла $I = 85$ кд. Знайдіть яскравість лампи.

Розв'язання. Світловий потік Φ на поверхні колби лампи за формулою (2.6) за умови нехтування втрат світла при його проходженні через скло колби дорівнює

$$\Phi = 4\pi I, \quad (2.35)$$

світність M за формулою (2.10) дорівнює

$$M = \frac{\Phi}{A}, \quad (2.36)$$

де A – площа сферичної з радіусом r поверхні колби лампи ($A = 4\pi r^2$). Якщо підставити (2.35) у (2.36), то

$$M = \frac{4\pi I}{4\pi r^2} = \frac{I}{r^2}.$$

Колба лампи зроблена із матового скла, а це означає, що джерело можна вважати ламбертівським. Яскравість L такого джерела за формулою (2.13) дорівнює

$$L = \frac{M}{\pi} = \frac{I}{\pi r^2}.$$

За умови цього прикладу $L = \frac{85 \text{кД}}{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \text{м}^2} = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2}$.

Приклад 2.5. Тонка збиральна лінза з відносним отвором D : $f' = 1:3,5$ (D – діаметр лінзи, f' – її фокусна відстань) дає зображення достатньо віддаленого предмета на фотопластинці. Яскравість предмета $L = 260 \text{кД/м}^2$. Втрати світла в лінзі становлять $\alpha = 0,10$. Знайдіть освітленість зображення.

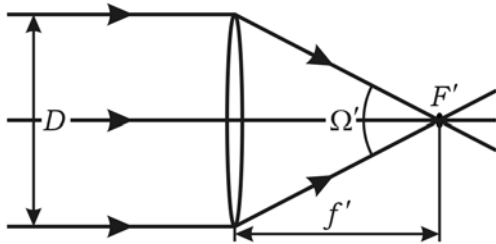


Рис. 2.11. До прикладу 2.5

Розв'язання. На рис. 2.11 представлено позначення, введені відповідно до умови прикладу. Урахуємо, що у прикладі 2.3 (формула (2.34)) було показано, що освітленість зображення дорівнює яскравості предмета, помноженій на тілесний кут, у якому з осевої точки зображення видно діючу площу лінзи. З урахуванням коефіцієнта втрат α , який пов'язаний з коефіцієнтом пропускання τ співвідношенням $\alpha + \tau = 1$, формула (2.34) набуде вигляду

$$E = (1 - \alpha) \cdot L \cdot \Omega' . \quad (2.37)$$

Тілесний кут Ω' , під яким з точки зображення видно всю площу лінзи, дорівнює

$$\Omega' = \frac{A}{a'^2} , \quad (2.38)$$

де A – діюча площа лінзи; a' – відстань від лінзи до зображення. У нашому випадку $a' = f'$, де f' – фокусна відстань лінзи. Діюча площа лінзи

$$A = \frac{\pi D^2}{4} . \quad (2.39)$$

Таким чином, вираз (2.37) з урахуванням (2.38) та (2.39) набуде вигляду

$$E = (1 - \alpha) \cdot L \cdot \frac{\pi D^2}{4 f'^2}$$

Підставимо числові дані з умови прикладу

$$E = (1 - 0,1) \cdot 260 \frac{\text{кД}}{\text{м}^2} \cdot \frac{3,14}{4 \cdot (3,5)^2} = 15 \text{лк} .$$

Приклад 2.6. Вертикальний промінь прожектора освітлює центр стелі круглої кімнати радіуса $R = 2,0 \text{м}$. При цьому на стелі утворюється невелика пляма

("зайчик") площею $A=100\text{см}^2$. Освітленість "зайчика" $E_0=10^3$ лк. Коефіцієнт відбиття стелі $\rho=0,80$. Знайдіть найбільшу освітленість стіни кімнати, яка утворюється світлом, що відбивається від стелі. Вважати, що відбиття відбувається за законом Ламберта.

Розв'язання. Оберемо позначення, як на рис. 2.12.

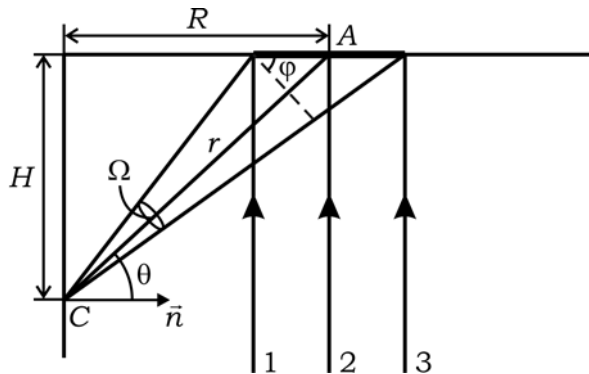


Рис. 2.12. До прикладу 2.6

Умовно виділені з широкого променя від прожектора промені 1, 2, 3 відповідають краям (1, 3) і центру (2) "зайчика". Відбиваючись дифузно від стелі, ці промені дають свій внесок в освітлення всієї стіни, у т. ч., і довільної точки C , у якій вимірюється освітленість. Висота H визначає відстань від точки C , яка розміщена на стіні, до стелі. Відстань між точкою C і центром "зайчика" характеризується відрізком AC довжиною r .

Потік, що випромінюється "зайчиком", будемо характеризувати кутом φ між відрізком AC і поверхнею стелі. Потік, що падає на стіну, будемо характеризувати кутом θ між відрізком AC і нормаллю до стіни \vec{n} (рис. 2.12). Сума кутів φ та θ незалежно від величини H становить 90° . Із точки C на стіні "зайчик" на стелі видно в розхилі тілесного кута Ω , який дорівнює

$$\Omega = \frac{A \cdot \cos \varphi}{r^2}.$$

Світність M поверхні стелі з "зайчиком" та освітленість E_0 цієї ділянки стелі пов'язані співвідношенням

$$M = \rho E_0, \quad (2.40)$$

де ρ – коефіцієнт відбиття. Співвідношення (2.40) впливає з того, що за визначенням світність – це поверхнева густина світлового потоку, який випромінюється, а освітленість – це поверхнева густина світлового потоку, що падає. Як відомо, світність M ламбертівської поверхні пов'язана з її яскравістю L співвідношенням (2.12). З урахуванням (2.40) для яскравості L ділянки стелі із "зайчиком" маємо

$$L = \frac{M}{\pi} = \frac{\rho E_0}{\pi}.$$

Елементарний світловий потік $d\Phi$, що випромінюється ділянкою стелі з "зайчиком", площа якої dA , дорівнює

$$d\Phi = L \cdot dA \cdot \cos\theta \cdot \Omega = \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot dA \cdot \cos\theta \cdot \frac{A \cdot \cos\varphi}{r^2}. \quad (2.41)$$

Аналізуючи (2.41), бачимо, що за $\varphi \rightarrow 90^\circ$ величина $d\Phi \rightarrow 0$. За $\theta \rightarrow 90^\circ$ знову $d\Phi \rightarrow 0$. Тобто на стіні є точка, у якій величина потоку $d\Phi$ буде проходити через максимум. Знайдемо висоту (H_m), за якої освітленість (E_m) стіни буде максимальною. Освітленість у точці C за визначенням (2.7) дорівнює

$$E = \frac{d\Phi}{dA'} = \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot \cos\theta \cdot \frac{A \cdot \cos\varphi}{r^2}. \quad (2.42)$$

Із рис. 2.8 видно, що

$$r^2 = H^2 + R^2, \text{ а } \cos\varphi = \frac{H}{r} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \quad \text{та} \quad \cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Тоді (2.42) перепишеться у вигляді

$$E = \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot \frac{A}{r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{r} = \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot A \cdot H \cdot R \cdot \frac{1}{(H^2 + R^2)^2}. \quad (2.43)$$

Дослідимо функцію $E(H, R, A, E_0, \rho)$ на екстремум залежно від H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial H} &= \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot A \cdot R \left[\frac{(H^2 + R^2)^2 - H \cdot 2(H^2 + R^2) \cdot 2H}{(H^2 + R^2)^4} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow H^2 + R^2 = 4H^2 \quad \Rightarrow R^2 = 3H^2 \quad \Rightarrow H = H_m = \frac{R}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Таким чином, максимальна освітленість стіни буде на висоті $H_m = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Якою буде при цьому величина освітленості E_m ? Для визначення E_m підставимо у (2.43) знайдене значення H_m :

$$E_m = \frac{\rho E_0}{\pi} \cdot A \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot R \cdot \frac{1}{\left(\frac{R^2}{3} + R^2\right)^2} = \frac{9\rho E_0}{16\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{R^2}.$$

Підставимо числові дані з умови прикладу:

$$E_m = \frac{9 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot 10^3 \text{ лк}}{16 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \text{ м}^2} = 0,21 \text{ лк}.$$

Приклад 2.7. Над столом розташовано світильник – плоский горизонтальний диск радіуса $R = 25$ см. Відстань від світильника до поверхні стола $H = 75$ см. Освітленість стола під центром світильника $E_0 = 70$ лк. Знайдіть світність цього джерела, вважаючи його ламбертівським.

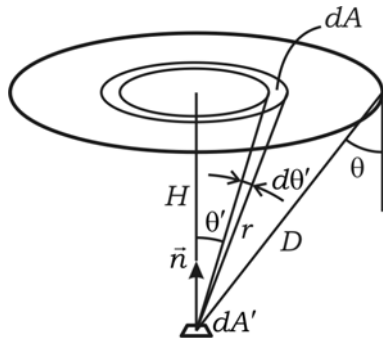


Рис. 2.13. До прикладу 2.7

Розв'язання. Введемо позначення, як на рис. 2.13. Виділимо із площі світильника елемент у вигляді концентричної смужки площею dA , а з площі стола виділимо елемент довільної форми в центрі стола площею dA' . Обраний елемент dA' настільки малий, що він може служити вершиною конусів з віссю, яка збігається з напрямком нормалі \vec{n} . Твірна поверхня одного конуса складає з нормаллю \vec{n} кут θ' , а другого – кут $(\theta' + d\theta')$.

Взаємне положення елементів dA та dA' будемо характеризувати відстанню r і кутом θ' . Кут між відрізком D , який з'єднує центр стола з периферією світильника, і нормаллю до поверхні стола позначимо через θ . Із точки розташування елемента площею dA елементарну ділянку dA' видно в тілесному куті $d\Omega'$ і навпаки, із точки розташування елемента площею dA' елементарну ділянку dA видно в тілесному куті $d\Omega$ (рис. 2.10). За визначенням тілесного кута маємо

$$d\Omega = \frac{dA \cdot \cos \theta'}{r^2}, \quad (2.44)$$

$$d\Omega' = \frac{dA' \cdot \cos \theta'}{r^2}. \quad (2.45)$$

(Виділення із площі світильника елемента у вигляді концентричної смужки, яка симетрична відносно центра диска, вимагає трактування тілесного кута $d\Omega$ у формулі (2.44) як такого, що утворений двома конічними поверхнями з різницею кутів $d\theta'$ при вершинах конусів. Коректність такого розгляду пов'язана із симетричністю концентричної смужки відносно центра стола).

Світловий потік з елемента світильника площею dA (світловий потік, який поширюється між конічними поверхнями) за визначенням яскравості L (2.11) дорівнює

$$d\Phi_{\text{випр}} = L \cdot d\Omega' \cdot dA \cdot \cos\theta' . \quad (2.46)$$

Підставляючи (2.45) у (2.46), маємо

$$d\Phi_{\text{випр}} = L \cdot \frac{dA' \cdot \cos\theta'}{r^2} \cdot dA \cdot \cos\theta' \equiv L \cdot \frac{dA \cdot \cos\theta'}{r^2} \cdot dA' \cdot \cos\theta' = L \cdot d\Omega \cdot dA' \cdot \cos\theta' . \quad (2.47)$$

Тілесний кут $d\Omega$ між конічними поверхнями за визначенням дорівнює

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin\theta' \cdot d\theta' . \quad (2.48)$$

Нехтуючи втратами світла при поширенні та відбитті ($d\Phi_{\text{випр}} = d\Phi_{\text{пад}}$), визначаємо освітленість у центрі стола, утворену ділянкою світильника площею dA , урахувавши (2.47), маємо

$$dE_0 = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dA'} = \frac{L \cdot d\Omega \cdot dA'}{dA'} \cos\theta' . \quad (2.49)$$

Освітленість у центрі стола (E_0) знаходимо шляхом інтегрування (2.49) за θ' від 0 до θ . Підставляючи (2.48) у (2.49), маємо

$$E_0 = 2\pi L \int_0^\theta \cos\theta' \cdot \sin\theta' \cdot d\theta' = 2\pi L \int_0^\theta \sin\theta' \cdot d(\sin\theta') = \pi L \sin^2\theta . \quad (2.50)$$

Із (2.50) яскравість поверхні світильника дорівнює

$$L = \frac{E_0}{\pi \sin^2\theta} . \quad (2.51)$$

Оскільки світильник – ламбертове джерело, за формулою (2.12) світність M поверхні світильника з урахуванням (2.51) дорівнює

$$M = \pi L = \frac{E_0}{\sin^2\theta} . \quad (2.52)$$

Із рис. 2.13 видно, що

$$\sin\theta = \frac{R}{D} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{R^2}{D^2} = \frac{R^2}{R^2 + H^2} . \quad (2.53)$$

Об'єднуючи (2.52) і (2.53), маємо

$$M = E_0 \left(1 + \frac{H^2}{R^2} \right) .$$

Підставимо числові дані з умови прикладу

$$M = 70 \text{ лк} \left[1 + \left(\frac{0,75}{0,25} \right)^2 \right] = 700 \text{ лм/м}^2 .$$

Приклад 2.8. Чи залежить яскравість зображення від діаметра лінзи, за допомогою якої це зображення отримане? Розгляньте два випадки: 1) центрована оптична система, на оптичній осі якої розміщено предмет, лінза, що утворює дійсне зображення цього предмета, та око, яким розглядають це зображення; 2) за допомогою тієї самої лінзи зображення утворюється на екрані, з якого спостерігається оком. Відстань від зображення до ока в обох випадках однакова.

Розв'язання. Розглянемо хід променів у першому випадку (рис. 2.14).

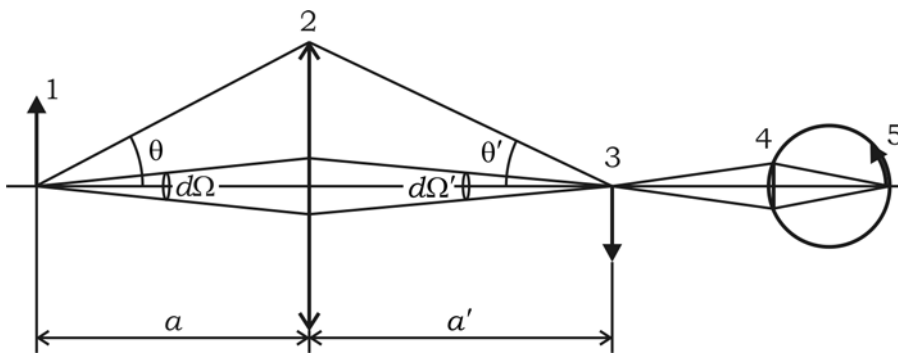


Рис. 2.14. До прикладу 2.8 (1-й випадок)

Світло від предмета 1 проходить через лінзу 2 і утворює дійсне зображення 3, яке за допомогою зіниці 4 ока спостерігача проектується на сітківці ока у вигляді зображення 5. Для простоти розрахунків знехтуємо втратами на відбиття та поглинання світла в лінзі. Будемо вважати також, що лінза 2 тонка.

Оберемо елемент поверхні на осевій частині предмета площею dA і визначимо яскравість зображення площею dA' , яка спряжена з dA . За відсутності втрат світловий потік $d\Phi$ з поверхні dA дорівнює світловому потоку $d\Phi'$ з поверхні dA' : $d\Phi = d\Phi'$ або $L \cdot dA \cdot d\Omega \cdot \cos\theta = L' \cdot dA' \cdot d\Omega' \cdot \cos\theta'$, де L та L' – яскравості предмета та зображення, відповідно. У сферичній системі координат тілесний кут

$$d\Omega = \frac{R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{R^2}.$$

Отже, отримаємо $L \cdot dA \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta d\varphi = L' \cdot dA' \cdot \cos\theta' \cdot \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. Проінтегруємо останній вираз за кутом Ω від 0 до 2π , а потім за кутом θ від 0 до апертурного кута $\theta_a = \theta'$. Отримаємо $L \cdot dA \cdot \sin^2\theta = L' \cdot dA' \cdot \sin^2\theta'$. Порівнюючи цю рівність з умовою синусів Аббе $n \cdot a \cdot \sin\theta = n' \cdot a' \cdot \sin\theta'$, піднесеною у квадрат, отримуємо

$$L' = L \left(\frac{n'}{n} \right)^2. \quad (2.54)$$

При цьому враховано, що квадрат лінійного збільшення $\beta^2 = \left(\frac{l'}{l} \right)^2 = \frac{dA'}{dA} = \left(\frac{a}{a'} \right)^2$.

Якщо по обидва боки від лінзи міститься повітря, то з (2.54) можна зробити висновок, що у першому випадку яскравість зображення 3 не залежить від параметрів лінзи 2. Повторюючи такі ж міркування для зображення 5, отримаємо такий самий висновок про незалежність яскравості зображення 5, отриманого на сітківці ока, від параметрів лінзи 2.

Перейдемо до другого випадку. На рис. 2.15 зображення предмета 1 лінзою 2 утворюється не в повітрі, а на екрані 3. Відстань від ока до зображення 3 така сама, як і в попередньому випадку.

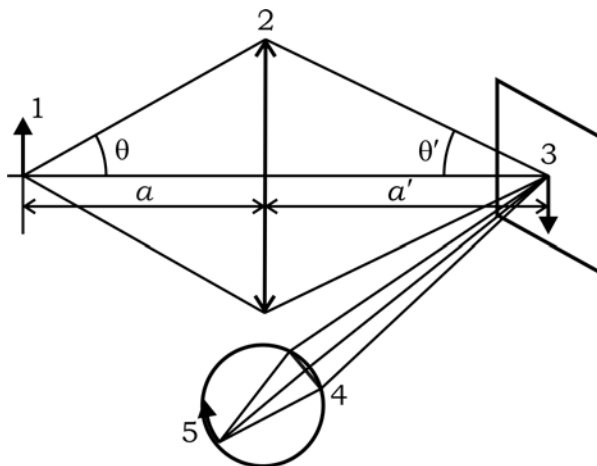


Рис. 2.15. До прикладу 2.8 (2-й випадок)

Яскравість зображення на сітківці ока залежить від світлового потоку, що відбивається від екрана. Тому спочатку визначимо його фотометричні характеристики. Освітленість екрана дорівнює

$$E' = \frac{d\Phi'}{dA'} = \frac{L'd\Omega'dA'}{dA'} = L'd\Omega' = L \frac{\pi d_{\text{л}}^2}{4a'^2}, \quad (2.55)$$

адже вище ми показали, що $L' = L^1$. На відміну від яскравості, освітленість екрана прямо пропорційна квадрату діаметра лінзи. Світність екрана $M_3 = \rho E' = \frac{\pi \rho L d_{\text{л}}^2}{4a'^2}$, де

¹ Результат формули (2.55) $E' = L' \cdot d\Omega'$ збігається з висновками, отриманими в прикладі 2.3.

враховано коефіцієнт відбиття екрана $\rho \leq 1$. Якщо поверхня ламбертівська, то яскравість зображення на екрані дорівнює $L_3 = \frac{M_3}{\pi} = \frac{\rho L d_l^2}{4a'^2}$. У випадку неламбертівської поверхні вираз буде залежати від розташування ока, але залежність яскравості зображення від d_l^2 при цьому не зміниться.

Далі, як і в першій частині, можна отримати, що $L_5 = L_3$, тобто яскравість зображення на сітківці ока спостерігача дорівнює яскравості зображення на екрані, і вона прямо пропорційна квадрату діаметра лінзи (d_l^2).

Таким чином, яскравість зображення не залежить від діаметра лінзи у випадку безпосереднього отримання зображення в оці спостерігача (1-й випадок) і залежить у випадку, коли зображення предмета попередньо проектується на екрані (2-й випадок). Дайте відповідь, як цей висновок можна практично застосовувати в технічних розробках і враховувати у повсякденній практиці.

3. КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

3.1. Короткі теоретичні відомості

• *Класична теорія оптичного випромінювання* базується на моделі класичного лінійного гармонічного осцилятора (електричного диполя), де як гармонічний осцилятор виступає ізольований атом, у якому осцилює електрон, а ядро атома залишається нерухомим. Відбувається одновимірний рух електрона $x(t)$. Рівняння руху електрона, на який діє квазіпружна сила, має вигляд

$$m\ddot{x} = -\alpha x, \quad (3.1)$$

де m – маса електрона; α – коефіцієнт пружності.

Розв'язок рівняння (3.1) шукаємо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t}, \quad (3.2)$$

де $\omega_0^2 = \frac{\alpha}{m}$ – власна частота гармонічних коливань електрона.

• Зміщення електрона в атомі з зарядом q відносно положення рівноваги створює *дипольний момент* $\vec{p}(t) = q \cdot \vec{x}(t)$. Якщо зміщення $x(t)$ електрона відбувається за гармонічним законом (3.2), то дипольний момент осцилятора також змінюється за гармонічним законом: $p(t) = p_0 \cdot \sin \omega_0 t$, де p_0 – амплітуда дипольного моменту.

Розв'язок електродинамічної задачі про випромінювання електричного диполя \vec{p} показує, що на великій відстані від диполя (у т. зв. *хвильовій зоні*) він є джерелом сферичної електромагнітної хвилі, у якій вектори напруженості \vec{E} та \vec{B} взаємно перпендикулярні, а їх модулі у вакуумі однакові:

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{\left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|}{c^2 r} \sin \theta, \quad (\text{у системі Гаусса}), \quad (3.3)$$

де r – відстань від диполя до точки вимірювання напруженості поля; θ – кут між віссю диполя \vec{p} та обраним напрямком поширення хвилі; $\ddot{\vec{p}}$ – друга похідна за часом від електричного моменту диполя.

• З урахуванням згасання коливань електрона в (3.1) вводиться ще один доданок, який характеризує силу опору:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{де } \beta - \text{ коефіцієнт опору.} \quad (3.4)$$

У разі дії на електрон змущувальної сили, яка виникає, наприклад, під дією електричної складової світлової хвилі, рух електрона відносно ядра атома описується класичним рівнянням:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E, \quad (3.5)$$

де q, m – заряд і маса електрона, відповідно; \vec{E} – напруженість зовнішнього електричного поля. x – зміщення електрона відносно положення рівноваги, ω_0 і τ – частота і час згасання вільних коливань електрона, відповідно.

3.2. Запитання та відповіді

3.2.1. Яким співвідношенням пов'язані величини електричної (\vec{E}) і магнітної (\vec{H}) складових світлового поля, яке створює диполь з моментом \vec{p} ?

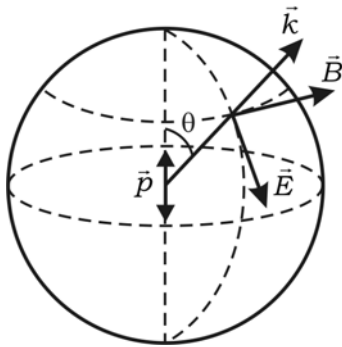


Рис. 3.1. До визначення характеристик електричного диполя

Нагадаємо, що класичний осцилятор – це диполь, що міститься у вакуумі й здійснює гармонійні коливання з власною частотою ω_0 , дипольний момент якого дорівнює $\vec{p}(t) = q \cdot \vec{x}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega_0 t$. Напруженості електричної (E) і магнітної (H) складових поля, яке створює цей диполь, за модулем пов'язані між собою співвід-

ношенням (3.3): $|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{\left| \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|}{c^2 r} \sin \theta$, де r – відстань від диполя до точки визначення E та H , θ – кут між віссю диполя та напрямком поширення хвилі з хвильовим вектором \vec{k} (рис. 3.1).

3.2.2. Що означає поняття хвильової зони, яке часто використовують при розгляді фізичних процесів, що відбуваються з диполем?

Хвильова зона, або дальня зона – це область випромінювання диполя, для характерного розміру R якої виконується співвідношення $R \gg a$, де a – розмір диполя. У класичній теорії оптичного випромінювання a – це характерний розмір атома або молекули, які відіграють роль осцилятора. У свою чергу, величина $a \ll \lambda$, де λ – довжина хвилі оптичного випромінювання $\lambda \sim 10^{-4}$ см; $a \sim 10^{-8}$ см; $R \sim 1$ см.

3.2.3. Які фізичні висновки можна зробити зі співвідношення (3.3)

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{\left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|}{c^2 r} \sin \theta ?$$

Фізичний аналіз співвідношення (3.3) свідчить про те, що:

- електромагнітні (світлові) хвилі випромінюються при прискореному русі електричних зарядів. Це впливає з того, що $E \sim \ddot{p} = q^2 \ddot{r}^2$;

- за $\theta = 0$ (уздовж \vec{p}) величини $H = E = 0$, тобто диполь не випромінює електромагнітну енергію в напрямку своєї осі;

- за $\theta = \pi / 2$ (у напрямку, перпендикулярному до \vec{p}) величини E та H набувають максимальних значень, а саме: $E = E_{\max}$ та $H = H_{\max} \Rightarrow$ максимальне випромінювання електромагнітної енергії диполем відбувається в напрямку, перпендикулярному до осі диполя;

- за $\theta = \text{const}$ величина $E = cB \sim \frac{1}{r} \Rightarrow$ диполем випромінюється сферична хвиля;

- той факт, що $E \sim \frac{1}{r}$ вказує на те, що в області хвильової зони можна знехтувати впливом статичного (стаціонарного) електричного поля, яке утворює диполь, оскільки $E_{\text{стат}} \sim \frac{1}{r^3}$;

- у вираз для напруженості електричної (\vec{E}) і магнітної (\vec{H}) складових світлового поля, яке створює диполь на великій відстані r від нього (в області хвильової зони), коли величина моменту $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega_0 \left(t - \frac{r}{c} \right)$, входить величина другої похідної від $\vec{p}(t)$ за часом $\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos \omega_0 \left(t - \frac{r}{c} \right)$. Як бачимо, напрямки світлового вектора \vec{E} і вектора дипольного моменту \vec{p} у фіксований момент часу протилежні (коливання векторів \vec{E} та \vec{p} зсунуті по фазі на π);

• величини напруженості поля, які визначаються в момент часу t , залежать від величини $\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$, яку визначають у більш ранній момент часу $\left(t - \frac{r}{c}\right)$. У цьому випадку кажуть про *ефект запізнювання*.

3.2.4. Як залежить інтенсивність випромінювання диполя від амплітуди та частоти його коливань?

Модуль вектора Умова–Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]$ (у системі Гаусса), визначається формулою

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{\dot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta = \frac{p_0^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} \cos^2 \left[\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (3.6)$$

Отримане значення модуля вектора Умова–Пойнтінга (S) відповідає значенню миттєвого потоку енергії електромагнітного випромінювання електричного диполя в напрямку θ . В оптичному діапазоні період коливань має порядок $10^{-14} - 10^{-15}$ с, унаслідок чого в оптиці завжди спостерігаються середні значення величин. Після усереднення величини S за час, що дорівнює періоду коливань, отримуємо

$$\langle S \rangle = \frac{p_0^2 \omega_0^4 \sin^2 \theta}{8\pi c^3 r^2}. \quad (3.7)$$

Якщо проінтегрувати вираз (3.7) по замкненій сферичній поверхні σ радіуса r , що оточує диполь, то одержимо (див. приклад 3.1) формулу для інтенсивності випромінювання диполя

$$I = \iint_{\sigma} \langle S \rangle d\sigma = \frac{p_0^2 \omega_0^4}{3c^3}. \quad (3.8)$$

Висновок: інтенсивність випромінювання диполя прямо пропорційна квадрату амплітуди коливань та їх частоті в четвертому степені.

3.2.5. Як залежать густина потоку та повний потік енергії класичного осцилятора від відстані до джерела та напрямку випромінювання?

Розглянемо формулу (3.6) для миттєвого значення потоку енергії випромінювання диполя. З неї видно, що потік S зменшується як r^{-2} , що зрозуміло з фізичних міркувань, а саме: повна енергія випромінювання розподіляється по поверхні, площа якої зростає як r^2 , тому для величини потоку, що припадає на одиницю поверхні, залежність буде саме такою.

Залежність S від напрямку випромінювання визначається через кут θ і показана на рис. 3.2, з якого видно, що диполь не випромінює в напрямку своєї осі, максимальна густина потоку випромінювання спостерігається в напрямку, перпендику-

лярному до осі диполя. Аналіз формули (3.8) свідчить, що величина інтенсивності випромінювання не залежить ні від відстані r , ні від кута θ .

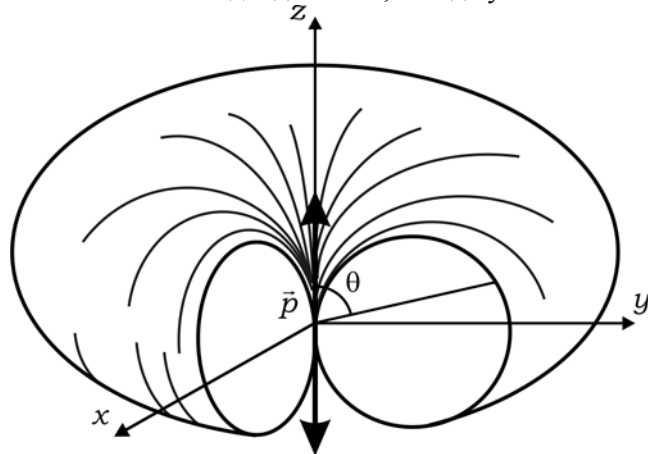


Рис. 3.2. До пояснення властивостей випромінювання електричним диполем

3.2.6. Чому, кажучи навіть про монохроматичне світло, ідеалізоване при його опису гармонічною функцією, ми кажемо про його спектр випромінювання у вигляді функції, що описує смугу (лінію) скінченної ширини?

Оскільки кожне джерело світла випромінює певну кількість енергії за обмежений час Δt згідно з властивостями фур'є-аналізу, спектр неперіодичної функції має бути представлений неперервною функцією зі скінченною шириною $\Delta \nu$ смуги частот. Зв'язок між цими величинами в класичному випадку здійснюється простим співвідношенням $\Delta t \cdot \Delta \nu \sim 1$.

Якщо вийти за межі класичної моделі випромінювання і звернутись до уявлень про квантову природу випромінювання, то слід послатись на одне із базових положень квантової механіки – принцип невизначеності Гейзенберга $\Delta t \cdot \Delta E \leq h$, де Δt – час життя збудженого атома, ΔE – розкид (невизначеність) величини енергії квантового переходу, h – стала Планка.

Із квантової механіки відомо, що $\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h}$. Як бачимо, висновки класичної та квантової теорій щодо скінченної ширини лінії (смуги) випромінювання збігаються. Зауважимо, що у зв'язку з вищенаведеним слід мати на увазі, що, кажучи про монохроматичне випромінювання, ми повинні розуміти ступінь достовірності його часового представлення у вигляді необмеженої у часі функції $a(t) = A_0 \sin \omega t$. Саме тому введено поняття про квазімонохроматичне випромінювання. У природі не існує й не може існувати джерела "абсолютно монохроматичного" випромінювання, а можна лише шукати або штучно створювати (приклад – лазер) джерела ще з меншою за існуючі шириною смуги $\Delta \nu$ випромінювання. Однак, як бачимо з наведеного вище, взагалі не може існувати джерело з $\Delta \nu = 0$.

3.2.7. Яку форму має спектр смуги випромінювання осцилятора, що випромінює цюг монохроматичних хвиль?

Кожне джерело світла випромінює певну кількість енергії за обмежений час. Виберемо просту модель, коли класичний осцилятор випромінює з постійною амплітудою E_0 упродовж відрізка часу τ . Форму такого імпульсу показано на рис. 3.3, а. Його можна записати у вигляді

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } |t| > \tau/2 \\ E_0 \exp(-i\omega_0 t) & \text{за } |t| \leq \tau/2 \end{cases}$$

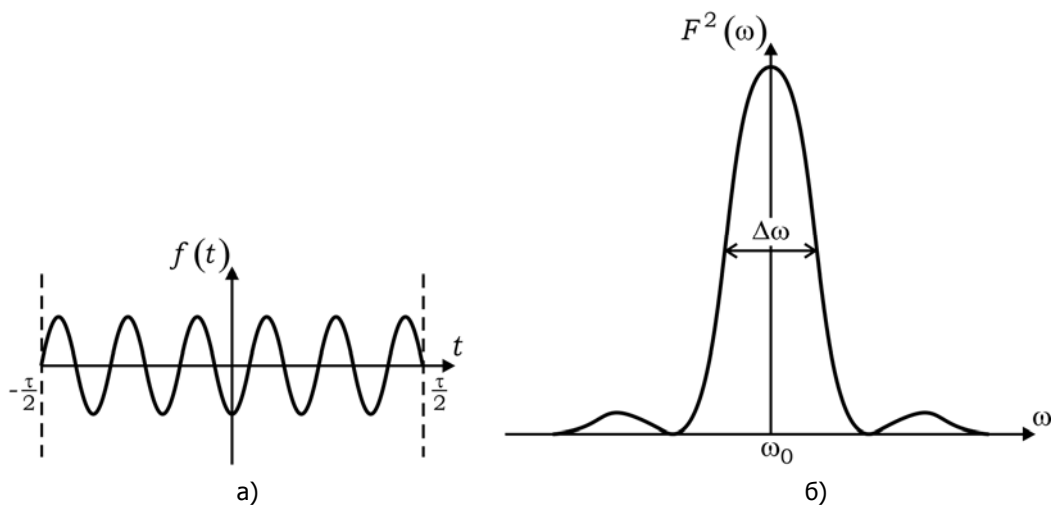


Рис. 3.3. До запитання 3.2.7

Із теорії перетворень Фур'є відомо, що обмежену в часі періодичну функцію можна представити набором гармонічних функцій у певному інтервалі частот $\Delta\omega$. Виконавши перетворення Фур'є, можна знайти розподіл цих функцій за амплітудами:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt = E_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt = E_0 \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau\right)}{\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau} \\ &= E_0 \tau \frac{\sin(\pi(\nu - \nu_0)\tau)}{\pi(\nu - \nu_0)\tau} \end{aligned}$$

Розподіл потоку енергії випромінювання за частотами для такого джерела дає функція $[F(\omega)]^2$, графік якої подано на рис. 3.3, б. Цей розподіл називають *спектром випромінювання джерела*. Як бачимо, спектр у цьому випадку має форму

$\sin \alpha$ -функції типу $(\sin \alpha / \alpha)^2$. Важливою характеристикою спектра є його напівширина – ширина розподілу за частотами для ординат $F^2(\omega) = 1/2 F_{\max}^2(\omega)$, яку позначають через $\Delta\omega_{1/2}$ або $\Delta\nu_{1/2}$.

3.2.8. Як ширина смуги випромінювання $\Delta\nu_{1/2}$ збудженого атома, що випромінює цуг монохроматичних хвиль, пов'язана з тривалістю τ цього цугу хвиль? Доведіть.

Визначимо напівширину спектра випромінювання, виходячи з міркувань, наведених у запитанні 3.2.7. Для функції типу $(\sin \alpha / \alpha)^2$ значення напівширини чисельно збігається з інтервалом частот при зміні ординати від $F_{\max}^2(\omega)$ до 0. Значення

$F^2(\omega) = 0$ досягається за виконання умови $\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} = \pi$, тобто

$\omega - \omega_0 = \Delta\omega_{1/2} = \frac{2\pi}{\tau}$ або $\Delta\nu_{1/2} = \nu - \nu_0 = \frac{1}{\tau}$. Відповідно час випромінювання ста-

новить $\tau = \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{1/2}}$.

3.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Як залежить від частоти коливань електричного диполя інтенсивність його випромінювання?

Розв'язання. У гауссовій системі одиниць модуль вектора Умова–Пойнтінга $|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta = \frac{q^2 \cdot \ddot{i}^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta$. Величина $|\vec{S}|$ визначає миттєве значення потоку електромагнітної енергії в напрямку θ . Миттєвим значенням потоку енергії за всіма напрямками є миттєва інтенсивність світла $I = \int_{\sigma} |\vec{S}| d\sigma$. Інтегрування ведеться по всій поверхні, що оточує осцилятор.

У сферичній системі координат $d\sigma = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, тоді

$$I = \int_{\sigma} |\vec{S}| d\sigma = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}.$$

Оскільки частота світлових коливань $\nu = 10^{14} - 10^{15} \text{ c}^{-1}$, фотоприймач (око) не може реагувати на зміну потоку енергії з такою частотою, а реагує на усереднене за часом значення потоку. Усереднимо величину I за час, що дорівнює періоду T світлових коливань

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle.$$

Ураховуючи, що $p = p_0 \cdot \cos \omega_0 t \Rightarrow \ddot{p} = -\omega_0^2 p_0 \cdot \cos \omega_0 t$, маємо

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{2\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle.$$

Ураховуючи, що $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$, маємо

$$\langle I \rangle = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3}. \quad (3.9)$$

Бачимо, що $\langle I \rangle \sim \omega_0^4$ або $\langle I \rangle \sim \frac{1}{\lambda_0^4}$. Це важливий висновок: усереднена в часі за

період коливань (та, що візуально нами спостерігається й експериментально вимірюється) інтенсивність електромагнітного випромінювання, джерелом якого є електричний диполь, істотно (як ω_0^4) залежить від частоти його коливань. Ось чому потужні радіостанції вимушені працювати з електромагнітними хвилями високих частот, а випромінюванням від ліній передач промислової частоти (50 Гц) незначне.

Приклад 3.2. Розглядаючи електрон в атомі як гармонічний осцилятор, оцініть, від чого залежить добротність такої коливальної системи. Оцініть порядок цієї величини при коливаннях електрона в атомі на оптичних частотах.

Розв'язання. Середнє значення повної енергії $\langle W_{\text{повн}} \rangle$ осцилятора складається із суми середніх значень потенціальної $\langle W_{\text{п}} \rangle$ і кінетичної $\langle W_{\text{к}} \rangle$ енергій:

$$\langle W_{\text{повн}} \rangle = \langle W_{\text{п}} \rangle + \langle W_{\text{к}} \rangle = \left\langle \frac{\alpha r^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{m \dot{r}^2}{2} \right\rangle, \text{ де } \alpha \text{ – коефіцієнт пружності.}$$

Для гармонічного осцилятора середнє значення потенціальної $\langle W_{\text{п}} \rangle$ енергії дорівнює середньому значенню кінетичної $\langle W_{\text{к}} \rangle$ енергії:

$$\langle W_{\text{п}} \rangle = \langle W_{\text{к}} \rangle = \left\langle \frac{\alpha r^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{m \dot{r}^2}{2} \right\rangle \Rightarrow \langle W_{\text{повн}} \rangle = 2 \langle W_{\text{п}} \rangle = 2 \langle W_{\text{к}} \rangle = \langle \alpha r^2 \rangle = \langle m \dot{r}^2 \rangle.$$

Ураховуючи, що

$$r(t) = r_m \cdot \sin \omega_0 t \Rightarrow \dot{r}(t) = \omega_0 r_m \cdot \cos \omega_0 t \Rightarrow [\dot{r}(t)]^2 = \omega_0^2 \cdot r_m^2 \cdot \cos^2 \omega_0 t.$$

Середнє значення останньої величини дорівнює: $\langle [\dot{r}(t)]^2 \rangle = \omega_0^2 \cdot r_m^2 \cdot \frac{1}{2}$. Ураховуючи це, а також те, що амплітуда дипольного моменту осцилятора дорівнює $p_0 = q \cdot r_m$, маємо

$$\langle W_{\text{повн}} \rangle = \langle m\dot{r}^2 \rangle = \frac{m\omega_0^2}{2} r_m^2 = \frac{m\omega_0^2}{2q^2} p_0^2. \quad (3.10)$$

Енергія, що випромінює осцилятор за період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, з урахуванням (3.9) дорівнює

$$W_{\text{випр}_T} = \langle I \rangle \cdot T = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\omega_0^3 p_0^2}{3c^3}. \quad (3.11)$$

Добротність коливальної системи за визначенням дорівнює

$$Q = 2\pi \frac{\langle W_{\text{повн}} \rangle}{W_{\text{випр}_T}}.$$

З урахуванням (3.10) і (3.11) маємо

$$Q = 2\pi \frac{\langle W_{\text{повн}} \rangle}{W_{\text{випр}_T}} = 2\pi \frac{m\omega_0^2}{2q^2} p_0^2 \frac{3c^3}{2\pi\omega_0^3 p_0^2} = \frac{3mc^3}{2q^2\omega_0}$$

Для $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, урахувавши відомі величини маси m і заряду q електрона, а також швидкість світла c , отримуємо значення $Q \approx 10^7$. Це дуже велика для добротності величина.

Приклад 3.3. Оцініть порядок величини, що характеризує тривалість випромінювання збудженого електрона в атомі на оптичних частотах.

Розв'язання. Усереднене за період коливань значення світлового потоку (потужності випромінювання) за визначенням дорівнює інтенсивності випромінювання, утвореного, у т. ч., загасаючими коливаннями осцилятора, дорівнює

$$\langle I \rangle = -\frac{dW_{\text{повн}}}{dt}.$$

З іншого боку,

$$\langle I \rangle = \frac{W_{\text{випр}_T}}{T} = 2\pi \frac{W_{\text{повн}}}{T \cdot Q} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2q^2\omega_0}{3mc^3} W_{\text{повн}} = \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3} W_{\text{повн}}.$$

Таким чином,

$$-\frac{dW_{\text{повн}}}{dt} = \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3} W_{\text{повн}} \Rightarrow \frac{dW_{\text{повн}}}{W_{\text{повн}}} = -\frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3} dt. \quad (3.12)$$

Відомо, що для загасаючих коливань справедливі співвідношення:

$$\frac{dW_{\text{повн}}}{W_{\text{повн}}} = -\gamma dt \quad \text{та} \quad W_{\text{повн}} = W_0 e^{-\gamma t}, \quad (3.13)$$

де γ – коефіцієнт згасання. Поведінку енергії загасаючих коливань осцилятора можна зобразити на рис. 3.4.

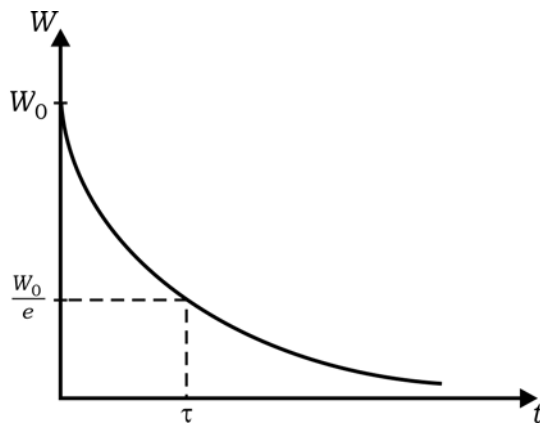


Рис. 3.4. До визначення часу релаксації збудженого атома

Порівнюючи отримані вище вирази (3.12) та (3.13), маємо $\gamma = \frac{2q^2\omega_0^2}{3mc^3}$. Однак, як відомо, коефіцієнт згасання γ пов'язаний із часом релаксації (часом випромінювання) τ співвідношенням $\gamma = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$

$$\tau = \frac{3mc^3}{2q^2\omega_0^2}. \quad (3.14)$$

Значення всіх величин, наведених в останній формулі, відомі, можна отримати значення часу релаксації збудженого атома $\tau \approx 10^{-8}$ с. За цей час осцилятор (атом), який коливається із частотою $\nu \sim 10^{15}$ с⁻¹, здійснює $\sim 10^7$ коливань.

4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ТЕОРІЯ СВІТЛА

4.1. Короткі теоретичні відомості

• *Світло має електромагнітну природу. Електромагнітне поле – це особлива форма матерії, завдяки якій здійснюється взаємодія між зарядженими частинками. Електромагнітне поле у вакуумі характеризується векторами напруженостей електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів. Ці вектори визначають сили, що діють з боку поля на рухомі та нерухомі заряджені частинки.*

У електромагнітному полі електричні й магнітні поля не існують незалежно один від одного. Зв'язок між параметрами електричного й магнітного полів у середовищі залежить від розподілу зарядів і струмів й визначається системою рівнянь Максвелла (табл. 4.1).

Таблиця 4.1. Рівняння Максвелла в різних системах одиниць

Система Гаусса	Система СІ
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$
$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{j} = \sigma\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}, \vec{j} = \sigma\vec{E}$

Використані такі позначення: \vec{E} – вектор напруженості електричного поля; \vec{D} – вектор індукції електричного поля; \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля; \vec{B} – вектор магнітної індукції; \vec{j} – вектор густини струму; σ – питома електрична провідність; ε – діелектрична проникність; μ – магнітна проникність; ε_0 – електрична стала ($\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м); μ_0 – магнітна стала ($\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м); c – швидкість світла у вакуумі (або електродинамічна стала $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с).

- Одиниці вимірювання та числові співвідношення між величинами E, D, H, B для різних систем одиниць представлені в табл. 4.2.

Система Гаусса (СГСЕ)	Система СІ	Формула переходу
$E_{\Gamma}, \left[\frac{\sqrt{\Gamma}}{c \cdot \sqrt{\text{см}}} \right]$	$E_{\text{СІ}}, \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$	$E_{\text{СІ}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} E_{\Gamma}$
$D_{\Gamma}, \left[\frac{\sqrt{\Gamma}}{c \cdot \sqrt{\text{см}}} \right]$	$D_{\text{СІ}}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$	$D_{\text{СІ}} = \sqrt{4\pi/\epsilon_0} D_{\Gamma}$
$H_{\Gamma}, \left[\frac{\sqrt{\Gamma}}{c \cdot \sqrt{\text{см}}} \right],$ (ерстед [Е])	$H_{\text{СІ}}, \left[\frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$	$H_{\text{СІ}} = \sqrt{4\pi\mu_0} H_{\Gamma}$
$B_{\Gamma}, \left[\frac{\sqrt{\Gamma}}{c \cdot \sqrt{\text{см}}} \right],$ (гаус [Гс])	$B_{\text{СІ}},$ (тесла [Тл])	$B_{\text{СІ}} = \sqrt{4\pi/\mu_0} B_{\Gamma}$

Примітка: для того, щоб відрізнити величини в різних системах у таблиці вони позначені відповідними індексами "Г" і "СІ" для системи Гаусса та СІ, відповідно.

- У випадку однорідного та ізотропного середовища на відстані від зарядів і струмів, які створюють електромагнітне поле, рівняння Максвелла можна привести до хвильових рівнянь у вигляді (у системі Гаусса):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

Одним із розв'язків цих диференціальних рівнянь є гармонічні коливання векторів \vec{E} і \vec{H} , для монохроматичних лінійно поляризованих хвиль у вигляді

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0); \quad (4.3)$$

$$H(x,t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (4.4)$$

де E_0 і H_0 – амплітуди напруженостей електричного й магнітного полів; $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота цих коливань; φ_0 – початкова фаза; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

- Зі співвідношень (4.3) і (4.4) випливає, що електричний $\vec{E}(x,t)$ і магнітний $\vec{H}(x,t)$ вектори змінюються в просторі та часі синфазно. Між проєкціями цих векторів на відповідні ортогональні напрямки існує зв'язок

$$E_y \sqrt{\varepsilon} = H_x \sqrt{\mu} \quad \text{— у системі Гаусса,} \quad (4.5)$$

$$(E_y \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_x \sqrt{\mu_0 \mu} \quad \text{— у системі СИ}).$$

• Якщо електромагнітна хвиля поширюється в середовищі, що має відмінні від одиниці значення діелектричної ε і магнітної μ проникностей, то її швидкість v зменшується порівняно зі швидкістю світла у вакуумі (c) за законом (у гауссовій системі одиниць):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}, \quad (4.6)$$

де показник заломлення середовища

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (4.7)$$

Формула (4.6) визначає швидкість поширення визначеного значення фази світлової хвилі – величини $\omega t - kx = \text{const}$. *Фазову швидкість* v можна також записати у вигляді

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = \lambda v, \quad \text{де } v \text{ — частота коливань.} \quad (4.8)$$

Якщо світлове поле утворене з багатьох монохроматичних хвиль, які мають довжини хвиль у діапазоні від λ до $\lambda + d\lambda$, то швидкість поширення такого хвильового пакета називається *груповою швидкістю* і визначається за формулою

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.9)$$

• *Формула Релея* встановлює зв'язок між груповою u і фазовою v швидкостями:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (4.10)$$

• *Оптична довжина шляху* світла в середовищі з показником заломлення n визначається як

$$s = nd, \quad (4.11)$$

де d – геометрична довжина шляху променя в середовищі.

• Якщо *плоска світлова хвиля* поширюється в напрямку, що визначається хвильовим вектором $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{v}$, то така хвиля описується рівнянням, яке в комплексній формі має вигляд

$$E(x, y, z; t) = E(\vec{r}, t) = E_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\right], \quad (4.12)$$

де $\vec{r} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$ – радіус-вектор точки P хвильової поверхні з координатами x, y, z ; \vec{k} – хвильовий вектор, який дорівнює

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos \alpha \cdot \vec{x}_0 + \cos \beta \cdot \vec{y}_0 + \cos \gamma \cdot \vec{z}_0), \quad (4.13)$$

де $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – одиничні вектори (орти) декартової системи координат; α, β, γ – кути, які утворює вектор \vec{k} з осями декартової системи координат.

- Сферична світлова хвиля описується рівнянням

$$E(x, y, z; t) = E(r, t) = \frac{E_0}{r} \exp[j(\omega t - kr + \varphi_0)], \quad (4.14)$$

де E_0 – амплітуда сферичної хвилі за $r = 1$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – відстань від джерела випромінювання, яке розташоване в початку декартової системи координат, до довільної точки P хвильової поверхні з координатами x, y, z .

- Зв'язок між інтенсивністю (I) світла та амплітудою (E_0) світлової хвилі здійснюється через визначення інтенсивності світла як середньої у часі густини енергії, що переноситься світловою хвилею:

$$I = \frac{cn}{8\pi} E_0^2 \text{ (у системі Гаусса)}, \quad I = \frac{\varepsilon_0 cn}{2} E_0^2 \text{ (у системі СІ)}, \quad (4.15)$$

де c – швидкість світла у вакуумі; n – показник заломлення середовища, у якому поширюється хвиля.

4.2. Запитання та відповіді

4.2.1. Укажіть, яких довжин електромагнітні хвилі (ЕМХ) належать до оптичного діапазону і до видимого діапазону.

Оптичний діапазон ЕМХ лежить в області довжин хвиль $\lambda = 12 \text{ нм} \div 1 \text{ мм}$; видимий діапазон – в області $\lambda = 400 \div 760 \text{ нм}$. Електромагнітні хвилі видимого діапазону часто називають світловими хвилями (світлом). Таким чином, видимий діапазон приблизно в 30 разів менший від усього оптичного діапазону (див. рис. 4.1).

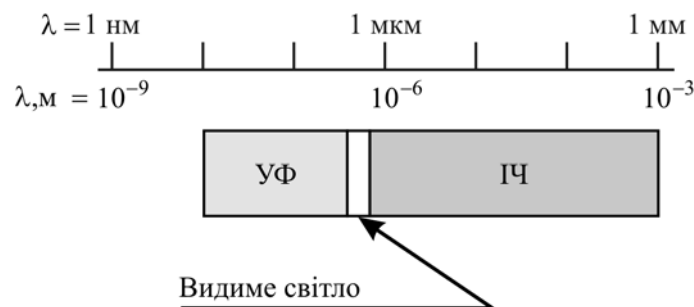


Рис. 4.1. Розподіл оптичного випромінювання по діапазону ЕМХ

4.2.2. *Що спільного між радіохвилями, світлом і рентгенівським випромінюванням? Що їх розрізняє?*

Радіохвилі, світло та рентгенівське випромінювання об'єднує те, що всі вони є електромагнітними хвилями з різними довжинами хвиль: $\lambda \sim 1\text{ м} - 1000\text{ км}$; $\lambda \sim 0,1 - 1\text{ мкм}$ і $\lambda \sim 10^{-2} - 10\text{ нм}$, відповідно.

Відмінність у довжинах хвиль для ЕМХ різних діапазонів викликає відмінність (інколи суттєву) їх властивостей. Серед відмінностей у їх характеристиках існують, наприклад, такі, як: спектри поглинання та відбиття, дисперсія, оптична активність тощо.

4.2.3. *Які властивості електромагнітних хвиль впливають із розгляду рівнянь Максвелла?*

Аналіз рівнянь Максвелла дозволяє зробити такі висновки про властивості електромагнітного поля:

- електромагнітні хвилі (ЕМХ) поперечні, мають дві складові – електричну (E) і магнітну (H), які коливаються синфазно і пов'язані між собою співвідношенням $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$;

- електромагнітні хвилі поперечні, тобто електричний і магнітний вектори коливаються у площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі;

- електромагнітне поле поширюється в середовищі у вигляді хвиль, що називаються електромагнітними, зі швидкістю $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. У вакуумі $\epsilon = \mu = 1$ і $v = c$ (у системі Гаусса);

- вектори \vec{E} та \vec{H} в електромагнітній хвилі перпендикулярні одне одному, вони разом з вектором швидкості \vec{v} створюють праву систему взаємно перпендикулярних векторів;

- вектори \vec{E} та \vec{H} у монохроматичній хвилі, що поширюється, коливаються синфазно, тобто вони одночасно й в одних і тих самих точках простору досягають максимального чи мінімального значення.

4.2.4. *Відомо, що у світловій електромагнітній хвилі вектори \vec{E} , \vec{H} і \vec{v} утворюють праву трійку векторів. Що таке права трійка векторів?*

У декартовій системі координат правою трійкою векторів (у даному випадку \vec{E} , \vec{H} , \vec{v}) називають таку трійку векторів, у якій поворот вектора \vec{E} до вектора \vec{H} , якщо дивитись уздовж вектора \vec{v} , здійснюється за годинниковою стрілкою.

4.2.5. *Як пов'язані між собою амплітуди електричної та магнітної складових електромагнітної хвилі у разі поширення хвилі вздовж напрямку осі OZ?*

Такий зв'язок здійснюється співвідношенням у гауссовій системі одиниць $\sqrt{\mu} \cdot H_x = \sqrt{\epsilon} \cdot E_y$ у разі поширення хвилі вздовж напрямку осі OZ.

4.2.6. *Який вектор \vec{E} чи \vec{H} називають світловим, і чому?*

Низка дослідів (напр., дослід Вінера зі стоячою світловою хвилею) дозволяють зробити висновок про те, що значна більшість проявів дії світла обумовлена саме електричною складовою світлової хвилі. Тому в оптиці вектор \vec{E} називають світловим вектором.

4.2.7. Одним із висновків, які випливають з розгляду рівнянь Максвелла, є висновок про синфазність векторів \vec{E} та \vec{H} . Чи існують випадки, коли вектори \vec{E} та \vec{H} в електромагнітній хвилі не синфазні?

Умови, коли вектори \vec{E} та \vec{H} в електромагнітній хвилі не синфазні, можна створити у стоячій хвилі, утвореній в результаті суперпозиції двох зустрічних хвиль (див., наприклад, дослід Вінера). Стояча ЕМХ утворена при складанні падаючої та зсунутої відносно неї за фазою на кут π відбитої від межі поділу двох діелектриків хвиль. Вона складається із двох стоячих хвиль – електричної та магнітної. У цій хвилі коливання векторів \vec{E} та \vec{H} зсунуті за фазою на $\pi/2$ як у просторі, так і часі. У процесі коливань електричне поле постійно переходить у магнітне, і навпаки.

Оскільки коливання векторів \vec{E} та \vec{H} відбуваються не у фазі, співвідношення (4.5) виявляється справедливим тільки для амплітудних значень E_0 та H_0 стоячої хвилі $E_0\sqrt{\epsilon} = H_0\sqrt{\mu}$.

4.2.8. Що таке хвильова поверхня і хвильовий фронт (фронт хвилі)? Чим відрізняються ці поняття?

Хвильова поверхня – геометричне місце точок, які коливаються з однаковою фазою. Фронт хвилі – геометричне місце точок, до яких у даний момент часу дійшла хвиля і викликала коливання. Для однорідних ізотропних середовищ хвильова поверхня і фронт хвилі збігаються, а для анізотропних середовищ – ні.

4.2.9. Яких форм можуть набувати хвильові поверхні?

Хвильові поверхні можуть бути будь-якими, але зазвичай плоскими, сферичними, циліндричними, мати форму поверхні еліпсоїда обертання.

4.2.10. У яких випадках сферична та циліндрична хвилі можуть розглядатися як плоскі?

Електрична складова монохроматичної електромагнітної хвилі записується в загальному випадку як $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Для сферичної хвилі цей вираз

набуває вигляду $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{|\vec{r}|} \exp(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, а для циліндричної –

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{|\vec{r}|}} \exp(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Очевидно, ці хвилі можна розглядати як плоскі (хвилі з

постійною амплітудою), якщо зміною напруженості ЕМХ при зміні відстані до джерела випромінювання $|\vec{r}|$ можна знехтувати, то $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \exp(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Якщо

джерело розташоване достатньо далеко від поверхні, на яку падає хвиля, то невелику ділянку хвильової поверхні наближено можна розглядати як плоску хвилю і застосувати до неї результати, отримані для необмежених плоских хвиль.

4.2.11. *Запишіть граничні умови, яким має задовольняти електромагнітна хвиля на межі поділу двох середовищ.*

У будь-який момент часу в кожній точці межі поділу залишаються неперервними тангенціальні складові напруженостей електричного і магнітного полів $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ і $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Зберігаються також і нормальні складові векторів електричної та магнітної індукції: $D_{1n} = D_{2n}$ і $B_{1n} = B_{2n}$.

У середовищі з провідністю та електричними зарядами для електричної індукції виконується умова $D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma$, а для магнітної напруженості – умова $[\vec{n} \times \vec{H}_2] - [\vec{n} \times \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, де \vec{j} і σ – лінійна густина струму провідності та поверхнева густина сторонніх зарядів на межі поділу двох середовищ, відповідно.

4.2.12. *Доведіть хвильові рівняння для векторів \vec{E} та \vec{H} .*

Із рівняння Максвелла можна отримати таке співвідношення:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Із лінійної алгебри відомо, що для будь-якого вектора \vec{A} справедливе співвідношення $\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$, де $\nabla \equiv \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – оператор "набла", який на-

зивають градієнтом; $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор, який називають лапласіаном.

Оскільки $\text{div } \vec{E} = 0$, маємо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \Delta \vec{E}(x,t).$$

Це й є хвильове рівняння (4.1) для електричної складової ЕМХ.

Аналогічно хвильове рівняння можна отримати і для вектора \vec{H} :

$$\frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial x^2}.$$

4.2.13. *Проаналізуйте хвильові рівняння, зробіть висновки про фазову швидкість плоскої ЕМХ.*

Те, що електричне і магнітне поля описуються однаковими диференціальними рівняннями (хвильовими рівняннями), свідчить про поширення в просторі єдиної електромагнітної хвилі. Хвильове рівняння показує, що зміни напруженості полів у

часі $\left(\frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial t^2}\right)$ супроводжуються їх змінами в просторі $\left(\frac{\partial^2 \vec{H}(x,t)}{\partial x^2}\right)$ у вигляді електромагнітної хвилі.

Хвильове рівняння дозволяє обчислити швидкість поширення ЕМХ.

Такий самий вигляд, як отримані із рівнянь Максвелла хвильові рівняння (4.1) і (4.2), мають і рівняння, що описують хвилі будь-якої іншої природи і, зокрема, вздовжню звукову хвилю $\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \xi(x,t)$, де ξ – змінний у просторі та часі параметр; v – швидкість хвилі. За аналогією можна зробити висновок про те, що фазова швидкість плоскої ЕМХ дорівнює $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$.

В оптиці для прозорих "немагнітних" діелектриків величина $\mu \approx 1$. Тому $v \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n}$.

4.2.14. *Запишіть вираз для вектора густини потоку електромагнітної енергії (вектор Умова–Пойнтінга \vec{S}). Яку розмірність має вектор \vec{S} ?*

Енергія, що переноситься світловою хвилею в напрямку її поширення, характеризується вектором потоку, який називається вектором Умова–Пойнтінга, і він дорівнює

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (\text{у системі Гаусса}) \quad \text{або} \quad \vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (\text{у системі СІ}).$$

Модуль вектора Умова–Пойнтінга $|\vec{S}|$ – це густина енергії світлової хвилі, що проходить за одиницю часу через одиницю площі поверхні, яка перпендикулярна вектору \vec{S} .

Розмірність вектора \vec{S} у гауссовій системі одиниць: $\frac{\text{ерг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} = \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{с} \cdot \text{см}^2} = \frac{\text{г}}{\text{с}^3 \cdot \text{см}}$, у системі СІ: $\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Існує позасистемна одиниця вимірювання вектора \vec{S} – $\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$.

Зазвичай саме в цих одиницях вимірюється інтенсивність світла.

4.2.15. *Діелектрик характеризується значеннями магнітної проникності $\mu = 1$. Запишіть напруженість вектора електричної складової хвилі E через модуль вектора Умова–Пойнтінга S .*

Як відомо, потік енергії електромагнітного випромінювання визначається вектором Умова–Пойнтінга, модуль якого $S = EH$. Зв'язок між напруженостями електричної та магнітної складовими хвилі для діелектрика має вигляд (4.5)

$$E\sqrt{\epsilon_0\epsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E.$$

З урахуванням цього модуль вектора Умова–Пойнтінга набуде вигляду $S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2 \omega t$. Звідси з урахуванням того, що $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, маємо

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}. \text{ Ураховуючи, що } \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c, \text{ де } c \text{ – швидкість світла у вакуумі,}$$

останній вираз можна записати у вигляді $\langle S \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$. Залежність амплітуди напруженості вектора електричної складової хвилі через модуль вектора Умова–

$$\text{Пойнтінга має вигляд } E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S \rangle}{\epsilon_0 c}}.$$

4.2.16. Що розуміють під терміном "інтенсивність світла"?

Під інтенсивністю I світла розуміють усереднену за часом густину потоку енергії, що чисельно дорівнює енергії, яка переноситься світловою хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної напрямку поширення енергії.. Інтенсивність світла пов'язана з модулем вектора Умова–Пойнтінга операцією усереднення його модуля за часом спостереження, що дорівнює періоду коливань T :

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt.$$

Інтенсивність I світла (у системі Гаусса) дорівнює $I = \frac{cn}{8\pi} E_0^2$, де c – швидкість світла у вакуумі; n – показник заломлення діелектрика, у якому поширюється хвиля; E_0 – амплітуда світлової хвилі. Аналізуючи останню формулу, завжди відзначають, що $I \sim E_0^2$.

Слід звернути увагу на залежність інтенсивності I від показника заломлення n . Ця залежність дуже важлива, вона має враховуватись при розв'язуванні багатьох задач, зокрема, тих, які пов'язані з проходженням хвилі через межу між двома середовищами.

4.2.17. Світлова хвиля характеризується своєю інтенсивністю. Чи є інтенсивність світла осцилюючою у просторі і часі величиною?

Ні, інтенсивність за незмінних значень амплітуди хвилі і показника заломлення середовища – величина стала. Вона вводиться в результаті усереднення осцилюючої у часі та просторі величини – густини потоку електромагнітного випромінювання.

4.2.18. Світлова хвиля з довжиною $\lambda = 550$ нм переходить із повітря в немагнітне прозоре середовище з діелектричною проникністю $\epsilon = 4$. Визначте зміну $\Delta\lambda$ довжини хвилі, яка при цьому відбувається.

Довжина хвилі в повітрі $\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{c}{n_1 \nu} \approx \frac{c}{\nu}$ при переході хвилі в середовище з діелектричною проникністю ϵ стає $\lambda_2 = \frac{c}{\nu \sqrt{\epsilon}}$. Зміна довжини хвилі

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{c}{\nu} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right) = 0,5\lambda .$$

4.2.19. Чи змінюється кольорове сприйняття світла оком людини, яка дивиться з води?

Дійсно, довжина хвилі світла в повітрі та воді різна. Проте око людини сприймає кванти світлової енергії, величина яких пропорційні частоті світла, а не довжині хвилі. Незалежно від того, у якому середовищі розташоване око, частота світла залишається незмінною. Тому кольорове сприйняття світла оком людини, яка дивиться з води, залишиться тією самою.

4.2.20. У чому полягає фізичний зміст принципу суперпозиції?

Фізичний зміст принципу суперпозиції можна розкрити двома твердженнями, а саме:

- напруженість поля \vec{E} , яке створюється в даній точці простору дією різних джерел світла, дорівнює векторній сумі напруженостей полів $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, які створюють ці джерела окремо;
- різні світлові хвилі поширюються і взаємодіють із середовищем незалежно одна від одної. Прикладом, який ілюструє цю властивість світлових хвиль, є, зокрема, той факт, що спостерігач бачить крізь отвір в екрані два різних об'єкти без впливу одного на інший;

4.2.21. Які властивості рівнянь Максвелла забезпечують виконання принципу суперпозиції?

Принцип суперпозиції є наслідком лінійності хвильового рівняння, матеріальних рівнянь і рівнянь Максвелла. Лінійні рівняння, як відомо, характеризуються тим, що будь-яка суперпозиція їх розв'язків також є розв'язком.

4.2.22. Назвіть приклади, коли порушується принцип суперпозиції.

- Принцип суперпозиції порушується при інтерференції світла: $I \neq I_1 + I_2$.
- У потужних світлових полях (в основному у випадках використання потужного лазерного випромінювання) існує багато прикладів суттєвих порушень принципу суперпозиції для світлових хвиль, які поширюються в матеріальних середовищах.
- Існує розроблена за допомогою квантової електродинаміки теорія, згідно з якою за надвеликих навіть для сучасних джерел світла інтенсивностях принцип суперпозиції порушується й у вакуумі: має спостерігатись розсіювання світла на світлі. Експериментальних підтверджень цьому на сьогодні досі не існує.

4.2.23. Які принципові наслідки для спектрального аналізу світла має підпорядкування світлових хвиль принципу суперпозиції?

Принцип суперпозиції дозволяє досліджувати світлову хвилю із складним спектральним складом, замінюючи її сумою монохроматичних складових. Із математичної точки зору така заміна здійснюється розкладанням функції в ряд або інтеграл Фур'є. У зв'язку із цим кажуть, що довільне хвильове збурення завжди можна представити у вигляді суперпозиції гармонічних хвиль, тобто розкласти його у спектр, виконати спектральний аналіз. Такий розклад є не тільки зручною математичною операцією, він фактично (фізично) здійснюється в реальних оптичних експериментах, наприклад, розкладання світла у спектр за допомогою скляної призми (дослід Ньютона).

Завдячуючи спектральному підходу, будь-яке світлове поле можна представити у вигляді сукупності плоских монохроматичних хвиль. Якщо середовище лінійне, то кожна із цих хвиль поширюється в ньому незалежно від інших.

Спектральний аналіз застосовується і для хвильових пакетів – просторово модульованих хвиль. Хвильовий пакет також можна представити у вигляді суперпозиції плоских хвиль, але тепер уже буде йтися про розкладання в просторовий (кутовий) спектр по хвилях, які поширюються в різні напрямки. Просторовий спектр світлового пучка визначається розподілом освітленості екрана, розташованого у фокальній площині лінзи. Остання виконує таку саму операцію фур'є-розкладу щодо просторового спектра, що і призма щодо частотного спектра.

4.2.24. Чи може свідчити справедливості принципу суперпозиції для світла на користь корпускулярної або хвильової природи світла?

Майже тривіальний для хвильової (електромагнітної) теорії світла принцип суперпозиції створював істотні проблеми для корпускулярної теорії світла. Дійсно, корпускули, які належать різним світловим пучкам, так чи інакше мали б взаємодіяти й розсіюватись одна на одній. Проте в оптиці такого не спостерігається. Як бачимо, саме хвильова (електромагнітна) теорія світла адекватно описує його властивості.

4.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоско-паралельного шару товщиною ℓ з немагнітної речовини, діелектрична проникність якого експоненційно зменшується від значення ϵ_1 на передній поверхні до ϵ_2 на задній. Знайдіть час поширення фази хвилі крізь цей шар.

Розв'язання. Швидкість поширення фази хвилі згідно з (4.6) дорівнює $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Оскільки середовище немагнітне, величина $\mu = 1$. За умовою прикладу

діелектрична проникність – змінна величина, яка залежить від відстані до поверхні шару, через це фазова швидкість також не буде сталою величиною. Якщо сумістити передню поверхню плоско-паралельного шару з початком координат, то залежність діелектричної проникності від координати x набуде вигляду

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 e^{-\frac{kx}{\ell}}. \quad (4.16)$$

Як бачимо з (4.16), за $x=0$ величина $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$, за $x=\ell$ величина $\varepsilon(\ell) = \varepsilon_2$. Із (4.16) випливає, що величина коефіцієнта поглинання становить $k = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Швид-

кість поширення хвилі в заданому середовищі залежить від координати x :

$$v(x) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(x)}}.$$

Якщо поділити шар на проміжки, де швидкість можна вважати сталою величиною, то час, потрібний світлу для проходження елементарного проміжку шириною Δx_i , що розташований від поверхні шару на відстані x , дорівнює

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{v(x_i)} = \frac{\Delta x_i}{c} \sqrt{\varepsilon(x)} = \frac{\Delta x_i}{c} \sqrt{\varepsilon_1 e^{-\frac{kx}{\ell}}}.$$

Час, потрібний світлу, щоб подолати шар товщиною ℓ , складається із суми проміжків часу, які світло витрачає на подолання кожного із елементарних проміжків:

$$t = \sum_i \Delta t_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \int_0^\ell e^{-\frac{kx}{\ell}} dx = \frac{-2\ell\sqrt{\varepsilon_1}}{ck} e^{-\frac{kx}{2\ell}} \Big|_0^\ell = 2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\ell}{c} \frac{1}{\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

Приклад 4.2. У вакуумі поширюється плоска світлова хвиля $\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$, де \vec{y}_0 – орт осі OY , амплітуда хвилі $E_0 = 160 \text{ В/м}$, хвильове число $k = 0,51 \text{ м}^{-1}$. Знайдіть вектор \vec{H} у точці з координатою $x = 7,7 \text{ м}$ у момент часу t : а) $t = 0$; б) $t = 33 \text{ нс}$.

Розв'язання. Відповідно до рівняння Максвелла в немагнітному середовищі $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (система СІ). Згідно з умовою прикладу коливання вектора \vec{H} відбуваються паралельно осі z , а хвиля поширюється по осі x . Ураховуючи це, розкриємо $\text{rot } \vec{H}$: $\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$. Таким чином, рівняння Максвелла спростилося до вигляду

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (4.15)$$

де $\vec{E}_y = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$. Тоді $\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx)$. Згідно з (4.15)

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\varepsilon_0 \cdot \omega \cdot E_0 \sin(\omega t - kx), \\ H_z &= -\int \omega \varepsilon_0 E_0 \sin(\omega t - kx) dx = \frac{\omega \varepsilon_0 E_0}{k} \cos(\omega t - kx) = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_0 E_0}{\omega / c} \cos(\omega t - kx) = \varepsilon_0 c E_0 \cos(\omega t - kx).\end{aligned}$$

Знайдемо значення амплітуди магнітної складової хвилі в певній точці простору і відповідний момент часу:

а) $H(7, 7; 0) = \varepsilon_0 c E_0 \cos(\omega t - kx) = -0,30 \text{ А/м};$

б) $H(7, 7; 33 \cdot 10^{-9}) = 0,18 \text{ А/м}.$

Приклад 4.3. Знайдіть середнє значення вектора Умова–Пойнтінга $\langle \vec{S} \rangle$ для плоскої електромагнітної хвилі $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, якщо хвиля поширюється у вакуумі.

Розв'язання. За визначенням (4.12) у системі СІ $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$, $|\vec{S}| = E \cdot H$. Якщо $E = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$; $H = H_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$, а зв'язок між компонентами поля з (4.5) $H_0 = E_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}$, маємо

$$\begin{aligned}|\vec{S}| &= H_0 E_0 \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = E_0^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} \cos^2\left[2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = \\ &= E_0^2 \varepsilon_0 c \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = \frac{E_m^2 \varepsilon_0 c}{2} \left\{1 + \cos\left[2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Усереднимо (4.16) за час спостереження, який дорівнює періоду T коливань:

$$\begin{aligned}\langle |\vec{S}| \rangle &= \frac{E_m^2 \varepsilon_0 c}{2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left\{1 + \cos\left[2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\right\} dt = \\ &= \frac{E_0^2 \varepsilon_0 c}{2} \cdot \frac{1}{T} \cdot T + \frac{E_0^2 \varepsilon_0 c}{2} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos\left[2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] dt.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Більшість приймачів (людське око, фотоелемент, болометр, термоелемент тощо) не можуть унаслідок своєї інерційності реєструвати коливання потужності зі світловою частотою. Вони реєструють середню за часом потужність, яка визначається першим доданком виразу (4.17), оскільки другий доданок, через рівність нулю се-

реднього за період значення косинуса дорівнює нулю. Тому $\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 c$. Цей результат збігається з результатами розгляду, виконаному в запитанні 4.15.

Приклад 4.4. Частота електромагнітного випромінювання (світла) $\nu = 6,91 \cdot 10^{14}$ Гц. Чому дорівнює довжина хвилі цього світла в повітрі? Який колір має світло?

Розв'язання. Довжина хвилі λ світла і частота коливань ν пов'язані між собою згідно з (4.9) співвідношенням

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}, \quad (4.18)$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі; $n = 1$ – показник заломлення повітря. Після підстановки числових значень у формулу (4.18) отримаємо

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 6,91 \cdot 10^{14}} = 434,1 \text{ нм}.$$

Частоті випромінювання $\nu = 6,91 \cdot 10^{14}$ Гц відповідає світло синього кольору з довжиною хвилі $\lambda = 434,1$ нм.

Приклад 4.6. В однорідному та ізотропному середовищі з $\varepsilon = 3$ і $\mu = 1$ поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 10$ В/м. Знайдіть амплітуду напруженості магнітного поля і фазову швидкість хвилі.

Розв'язання. Зв'язок між амплітудами електричного і магнітного полів світлової хвилі в системі одиниць СІ встановлюється формулою (4.5):

$$E_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0},$$

де $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнітна стала; E_0 – напруженість електричного поля, [В/м]; H_0 – напруженість магнітного поля, [А/м]. Після підстановки всіх вихідних даних у формулу (4.5) отримаємо

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}}} \cdot 10 = 0,046 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

При отриманні розмірності було враховано, що $\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$, $\Gamma_{\text{н}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}$. Фазову швидкість хвилі розрахуємо за формулою

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 1,73 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Приклад 4.9. За якої густини потоку енергії плоскої електромагнітної хвилі в повітрі можлива іонізація повітря? Урахуйте, що повітря починає іонізуватись (починається електричний пробій) за напруженості електричного поля $E \approx 30$ кВ/см.

Розв'язання. За формулою Умова–Пойнтінга густина потоку енергії плоскої електромагнітної хвилі, усередненого за період коливань у системі одиниць СІ дорівнює

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_0 H_0. \quad (4.19)$$

Скориставшись (4.19) і врахувавши, що для повітря $\varepsilon = \mu = 1$, а $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, отримуємо (див. приклад 4.3):

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 c,$$

де $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; E_0 – напруженість електричного поля, [В/м], c – швидкість світла. Умовою іонізації вважатимемо рівність амплітуди хвилі електричній напруженості іонізації. Тоді, густина потоку енергії дорівнюватиме

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \cdot (30 \cdot 10^5)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2.$$

5. ВІДБИТТЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ СВІТЛА НА МЕЖІ ДВОХ ДІЕЛЕКТРИКІВ. ФОРМУЛИ ФРЕНЕЛЯ

5.1. Короткі теоретичні відомості

• При падінні світлової хвилі на межу двох діелектриків з показниками заломлення n_1 і n_2 за умови нехтування енергетичними втратами за рахунок розсіювання та поглинання, інтенсивності світла в променях, які падають (I_0), відбиваються (I_R) і заломлюються (I_D) згідно із законом збереження енергії пов'язані співвідношенням

$$I_0 = I_R + I_D. \quad (5.1)$$

• *Коефіцієнт відбиття*

$$R = \frac{I_R}{I_0} \quad (5.2)$$

і *коефіцієнт пропускання*

$$T = \frac{I_D}{I_0} \quad (5.3)$$

на межі двох діелектриків відповідно до (5.1) пов'язані співвідношенням

$$R + T = 1. \quad (5.4)$$

• При нормальному падінні ($\varphi = 0$) променя світла на межу двох діелектриків коефіцієнти відбиття і пропускання визначаються за формулами

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; \quad (5.5)$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (5.6)$$

• Під час використання *природного світла* інтенсивності обох ("p" та "s") компонентів однакові і дорівнюють половині інтенсивності падаючого променя:

$$I_p = I_s = 0,5 I_n. \quad (5.7)$$

• Виходячи з граничних умов для електромагнітної хвилі на межі двох діелектриків з показниками заломлення n_1 та n_2 і закону заломлення світла, отримано формули Френеля (рис. 5.1):

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^r &= E_{\parallel}^i \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \theta)}; & E_{\parallel}^d &= E_{\parallel}^i \cdot \frac{2 \sin \theta \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta) \cdot \cos(\varphi - \theta)} \\ E_{\perp}^r &= -E_{\perp}^i \cdot \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)}; & E_{\perp}^d &= E_{\perp}^i \cdot \frac{2 \sin \theta \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

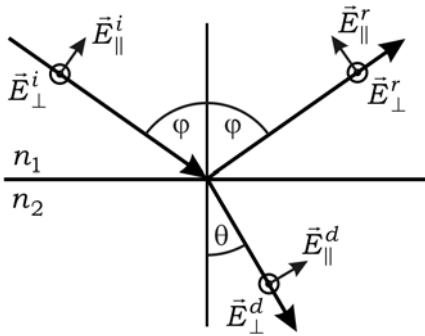


Рис. 5.1. До формул Френеля

• Коефіцієнти відбиття для "p" і "s" компонентів (інколи їх називають частковими коефіцієнтами відбиття) визначаються за формулами Френеля, відповідно, як:

$$R_p = \frac{I_{Rp}}{I_{0p}} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \theta)}; \quad (5.9)$$

$$R_s = \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} = \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)}; \quad (5.10)$$

де φ і θ – кути падіння і заломлення, які пов'язані між собою законом Снеліуса (1.13); I_{0p} та I_{0s} – інтенсивності "p" та "s" компонентів природного світла, що падає на межу поділу двох діелектриків; I_{Rp} та I_{Rs} – інтенсивності "p" та "s" компонентів природного світла, що відбивається від межі поділу двох діелектриків.

• Повний коефіцієнт відбиття природного світла, яке містить обидва ("p" і "s") компоненти, що за інтенсивністю рівні, розраховується за частковими коефіцієнтами відбиття:

$$R = \frac{I_R}{I_0} = \frac{I_{Rp} + I_{Rs}}{I_0} = \frac{1}{2}(R_p + R_s) = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \theta)} + \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \right], \quad (5.11)$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на межу поділу двох діелектриків ($I_0 = 2I_{0p} = 2I_{0s}$).

- Аналіз формули (5.8) свідчить про те, що при виконанні умови $\varphi + \theta = 90^\circ$ величина $R_p = 0$, тобто відбитий промінь буде лінійно поляризованим у площині, що перпендикулярна до площини падіння (містить тільки "s" компонент). Кут падіння, для якого виконується умова $\varphi + \theta = 90^\circ$, називається *кутом Брюстера*, він визначається за формулою

$$\varphi_B = \arctg \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.12)$$

- На межі поділу двох середовищ за умови, що $n_1 > n_2$, спостерігається *явище повного внутрішнього відбиття* (ПВВ), яке виявляється в тому, що, починаючи з деякого граничного кута падіння $\varphi_{гр}$ (для $\varphi \geq \varphi_{гр}$), світловий потік повністю відбивається від межі поділу (відбувається перехід від часткового відбиття до повного), а заломлений промінь відсутній.

Граничний кут падіння $\varphi_{гр}$, за якого спостерігається ПВВ, дорівнює

$$\varphi_{гр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{21}. \quad (5.13)$$

- Відбиття світла на поверхнях оптичних деталей є причиною значних енергетичних втрат в оптичних системах. Коефіцієнт пропускання оптичної системи, яка має M заломлюючих поверхонь (без урахування втрат на поглинання світла), визначається за формулою

$$T_\Sigma = \prod_{i=1}^M T_i = \prod_{i=1}^M (1 - R_i), \quad (5.14)$$

де R_i – коефіцієнт відбиття на i -й заломлюючій поверхні $R_i = \left(\frac{n_{i-1} - n_i}{n_{i-1} + n_i} \right)^2$.

- Частка втрат на відбиття визначається сумою коефіцієнтів відбиття на всіх поверхнях заломлення і дорівнює

$$R_\Sigma = 1 - T_\Sigma, \quad (5.15)$$

де T_i – коефіцієнт пропускання i -ї поверхні.

5.2. Методичні вказівки та поради

1. Коефіцієнти відбиття і пропускання у випадку нормального падіння світла на межу двох діелектриків не залежить від того, поляризоване світло чи ні, а також від азимута поляризації.

2. Зазвичай на практиці спочатку розраховують коефіцієнт відбиття за формулою (5.5), а потім коефіцієнт пропускання за формулою $T = 1 - R$.

3. Формули Френеля (5.8) можна застосовувати для прозорих, ізотропних, непровідних і зазвичай немагнітних (з магнітною проникливістю $\mu = 1$) середовищ.

4. При падінні на межу двох діелектриків променя природного (хаотично поляризованого або неполяризованого) світла під відмінним від нуля кутом задачу визначення коефіцієнта відбиття поділяють на дві окремі. Падаючий промінь, наприклад, природного світла або лінійно поляризованого світла з азимутом поляризації, відмінним від 0 та $\pi/2$, умовно замінюють двома променями лінійно поляризованими у взаємно перпендикулярних площинах: один промінь поляризований у площині падіння (I_{\parallel}), або (I_p), а другий – у площині, яка перпендикулярна до площини падіння (I_{\perp}), або (I_s). У цьому випадку формули Френеля, які записані окремо для двох ("p" і "s") компонентів світла, застосовують для отриманих штучно складових світла, а потім на їх основі синтезують кінцевий результат.

5. Із формул (5.5) і (5.11) випливає, що коефіцієнти відбиття на межі діелектриків однакові: як при прямому проходженні світлом межі ($n_1 \rightarrow n_2$), так і при оберненому ($n_2 \rightarrow n_1$), тобто

$$R_{12} = R_{21}. \quad (5.16)$$

5.3. Запитання та відповіді

5.3.1. Що таке азимут поляризації? Як він розраховується?

Азимут поляризації – це кут (α) нахилу вектора \vec{E} до площини падіння. Фактично розрізняють азимут поляризації падаючого (α), відбитого (α_r) і заломленого (α_d) світла:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}; \quad (5.17)$$

$$\alpha_r = \operatorname{arctg} \frac{E'_{\perp}}{E'_{\parallel}}; \quad (5.18)$$

$$\alpha_d = \operatorname{arctg} \frac{E_{\perp}^d}{E_{\parallel}^d}. \quad (5.19)$$

Якщо вектор \vec{E} перпендикулярний до площини падіння (існує лише "s"-компонент) азимут поляризації дорівнює $\pi/2$, якщо вектор \vec{E} лежить у площині падіння (існує лише "s"-компонент) азимут поляризації дорівнює нулю.

5.3.2. *Азимут падаючого лінійно поляризованого світла дорівнює 45° . Чи зміниться азимут лінійно поляризованого світла при відбитті?*

Однозначно зміниться, оскільки коефіцієнти відбиття для "p"- та "s"-компонентів відмінні: $R_{\parallel} \neq R_{\perp} \Rightarrow E_{\perp}^r \neq E_{\parallel}^r$, тому $\operatorname{tg} \alpha_r \neq 1$, тобто $\alpha_r \neq 45^\circ$

5.3.3. *Чи однакові коефіцієнти відбиття на межі діелектриків при прямому ($n_1 \rightarrow n_2$) та оберненому ($n_2 \rightarrow n_1$) проходженні світлом межі? Доведіть.*

Із формул (5.5) і (5.11) випливає, що коефіцієнти відбиття на межі діелектриків однакові, як при прямому ($n_1 \rightarrow n_2$), так і при оберненому ($n_2 \rightarrow n_1$) проходженні світлом межі, тобто $R_{12} = R_{21}$

5.3.4. *Чи може коефіцієнт відбиття на межі повітря–діелектрик дорівнювати нулю?*

Використавши формули Френеля, для природного світла, отримуємо (5.11)

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \theta)} + \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \right].$$

Аналіз цієї формули показує, що за можливих значень φ і θ вона не дає нульового відбиття. Однак, якщо падаюче світло лінійно поляризоване, то амплітуди E_{\parallel}^i і E_{\perp}^i набувають значень $E_{\parallel}^i = E_0 \cos \alpha$ і $E_{\perp}^i = E_0 \sin \alpha$; тут α – азимут поляризації падаючого світла (кут між площиною падіння та напрямком вектора \vec{E} падаючої хвилі). У цьому випадку коефіцієнт відбиття набуває вигляду

$$R = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \theta)} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \sin^2 \alpha. \quad (5.20)$$

При поляризації падаючого світла у площині падіння ($\alpha = 0$) наведена вище формула спрощується, а саме

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \theta)} \right)^2.$$

Якщо сума кутів $(\varphi + \theta)$ проходить через значення $\pi/2$ і $\text{tg}(\varphi + \theta) = \infty$, інтенсивність відбитого світла падає до нуля. Такий кут падіння, якщо $\varphi = \pi/2 - \theta$, називають *кутом Брюстера*.

Висновок: коефіцієнт відбиття R дорівнює нулю за одночасного виконання трьох умов: 1) падаюче світло лінійно поляризоване; 2) поляризація падаючого випромінювання спеціально орієнтована, тобто містить тільки "р"-компонент; 3) кут падіння променів світла на межу дорівнює куту Брюстера.

5.3.5. У чому полягає фізичний зміст закону Брюстера? (Скористайтесь моделлю класичного осцилятора).

Розглянемо випадок, коли на межу поділу двох діелектриків падає світло, лінійно поляризоване у площині падіння. Коли на поверхневий шар другої речовини падає електромагнітна хвиля, у молекулах цієї речовини виникають наведені диполі, які можна розглядати як класичні осцилятори. Вторинне випромінювання цих осциляторів інтерферує, у результаті чого виникають заломлена та відбита хвилі. Розрахунок інтенсивності відбитої хвилі в межах такої моделі досить складний, але у випадку падіння під кутом Брюстера якісно результат можна отримати графічно.

На рис. 5.2 світло падає під кутом Брюстера на межу розподілу двох діелектриків. Через \vec{p}^i і \vec{p}^d позначимо наведені світлом дипольні моменти в першому та другому середовищах. Унаслідок того, що $\varphi + \theta = \pi/2$, напрямок осі дипольного моменту \vec{p}^d збігається з напрямком поширення відбитої хвилі \vec{k}^r . Якщо подивитись на рис. 3.2, який подає кутовий розподіл густини потоку, то стає очевидним, що в напрямку своєї осі диполі не випромінюють. Якщо використати цей факт у рис. 5.2, то можна дійти висновку, що в напрямку \vec{k}^r за такої поляризації відбита хвиля відсутня. За перпендикулярної поляризації наведені диполі орієнтовані перпендикулярно до площини рисунка і випромінювання не зникає.

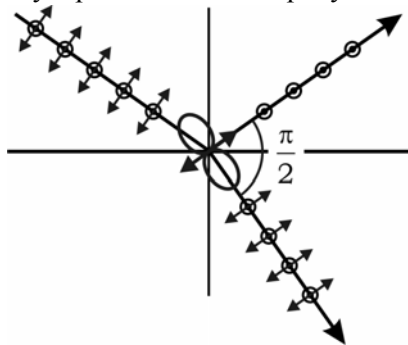


Рис. 5.2. До запитання 5.3.5

5.3.6. Який вигляд мають формули Френеля у випадку нормального падіння?

Якщо кут падіння хвилі, що падає на межу поділу двох діелектриків, наближається до нуля, у формулах Френеля (5.8) значення $\sin \varphi$ та $\sin \theta$ можна замінити значеннями самих кутів і прийняти $\cos \varphi \rightarrow 1$, $\cos \theta \rightarrow 1$. Після перетворень з урахуванням закону заломлення світла $n_1 \cdot \varphi = n_2 \cdot \theta$ отримуємо формули Френеля для випадку нормального падіння:

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^r &= E_{\parallel}^i \cdot \frac{\varphi - \theta}{\varphi + \theta} = E_{\parallel}^i \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}; \\ E_{\perp}^r &= E_{\perp}^i \cdot \frac{\theta - \varphi}{\theta + \varphi} = E_{\perp}^i \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \\ E_{\parallel}^d &= E_{\parallel}^r \cdot \frac{2\varphi}{\varphi + \theta} = E_{\parallel}^r \cdot \frac{2n_1}{n_2 + n_1}; \\ E_{\perp}^d &= E_{\perp}^i \cdot \frac{2\varphi}{\theta + \varphi} = E_{\perp}^i \cdot \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Зауважимо, що за модулем амплітуди паралельної та перпендикулярної складових відбитої хвилі рівні. Це закономірно, адже при нормальному падінні не можна визначити площину падіння. Паралельна і перпендикулярна електричні складові світлової хвилі для відбитої хвилі мають протилежні знаки. Це пояснюється тим, що при виведенні формул Френеля було обрано протилежний напрямок коливань E_{\parallel}^r і E_{\parallel}^i (рис. 5.1).

5.3.7. *Світло падає на межу поділу між середовищами 1 і 2 під певним кутом з першої речовини. Доведіть, що коефіцієнт відбиття не зміниться, якщо світло буде поширюватись у протилежному напрямку (доведіть формулу (5.15)).*

Якщо змінюється напрямок поширення світла, то кут падіння стає кутом заломлення, і навпаки. Проаналізувавши вираз для коефіцієнта відбиття (5.20):

$$R = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \theta)} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \sin^2 \alpha, \text{ бачимо, що всі тригонометричні функції}$$

містяться у формулі у квадратичному вигляді, тому заміна φ на θ і навпаки, не призведе до зміни величини R .

5.3.8. *Для яких кутів падіння природного світла на межу двох середовищ ($n_1 < n_2$) інтенсивність відбитого світла перевищує інтенсивність заломленого світла?*

Розглянемо залежність коефіцієнта відбиття (R) від кута падіння (φ) для природного світла, випадок $n_{21} > 1$, втратами світла нехтуємо (рис. 5.3).

Проведемо на рівні $R = 50\%$ горизонтальну пряму до її перетину з кривою 3. Через цю точку перетину проведемо вертикальну пряму, яка визначить кут $\varphi_{1/2}$,

починаючи з якого $R > 50\%$. Коефіцієнт відбиття (R) і коефіцієнт пропускання (T), який характеризує світловий потік заломлених променів, пов'язані співвідношенням $R + T = 1$. Таким чином, у діапазоні кутів падіння ($\varphi_{1/2} \div \pi/2$) величина $R > T$ (потік відбитої світлової енергії перевищує потік заломленої).

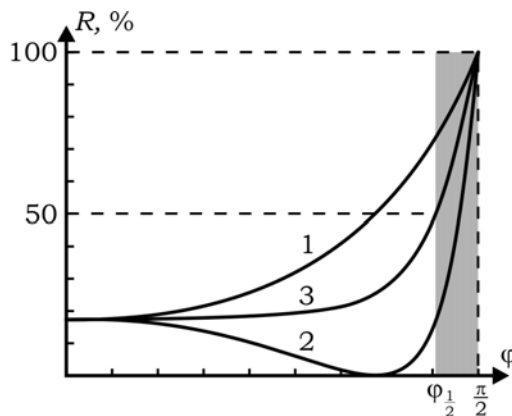


Рис. 5.3. Графічне визначення діапазону кутів падіння, для якого світловий потік відбитих променів перевищує світловий потік заломлених променів (випадок $n_1 < n_2$)

5.3.9. За допомогою формул Френеля доведіть, що лінійно поляризоване світло після відбиття від межі двох діелектриків залишається лінійно поляризованим, окрім випадку $n_1 > n_2$, ($\varphi < \theta$), коли кут падіння стає меншим від граничного (кута повного внутрішнього відбиття) $\varphi > \varphi_{\text{гр}}$.

При доведенні формул Френеля для відбитої хвилі ми розбиваємо лінійно поляризовану падаючу хвилю на два компоненти, поляризовані у двох взаємно перпендикулярних площинах. Отримані формули мають вигляд (5.8):

$$E_{\parallel}^r = E_{\parallel}^i \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \theta)} \quad \text{та} \quad E_{\perp}^r = -E_{\perp}^i \cdot \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Ці формули дають зв'язок між амплітудами відбитої і падаючої хвиль відповідної поляризації.

Якщо $n_1 < n_2$ ($\varphi > \theta$), то при всіх значеннях кута падіння коефіцієнти у формулах (5.8) є дійсними числами, які дають тільки зміну амплітуди, а не фази відбитої хвилі. Але перша із наведених формул змінює знак при переході через кут Брюстера і обидві – якщо $n_1 > n_2$ ($\varphi < \theta$). Зміна знака на протилежний еквівалентна зсуву фази відбитого компонента відносно падаючої на величину $\delta = \pi$. Відомо, що додавання двох лінійно поляризованих хвиль з різницею фаз $\delta = 0$ дає лінійно поляризовану хвилю з тією самою орієнтацією, що падаюча хвиля. Зміна фази $\delta = \pi$ дає також лінійно поляризовану хвилю, азимут якої змінюється на кут 2α . Виняток з цього правила спостерігається лише при відбитті світла від середовища з меншим

показником заломлення $n_1 > n_2$, ($\varphi < \theta$), коли кут падіння сягає значення граничного кута падіння (див. запитання 5.3.9 та 5.3.12).

5.3.10. Покажіть, що відбувається із фазою відбитої від межі двох середовищ хвилі у випадку $n_1 > n_2$? До яких змін у поляризації це призводить?

Розглянемо, що відбувається із фазою відбитої хвилі при повному внутрішньому відбитті ($\varphi > \varphi_{\text{гр}}$). Якщо скористатись співвідношенням

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi\right)^2 - 1},$$

де використаний закон Снеліуса $\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi$ і властивості умовної одиниці

$i = \sqrt{-1}$, то для відбитого світла у випадку $\frac{n_1}{n_2} < 1$ у формулах Френеля компоненти

E_{\parallel}^r і E_{\perp}^r , відповідно, можна запастати у вигляді:

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^r &= E_{\parallel}^i \cdot \frac{n_2^2 \cdot \cos \varphi - i \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cdot \cos \varphi + i \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}, \\ E_{\perp}^r &= E_{\perp}^i \cdot \frac{n_1 \cdot \cos \varphi - i \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_1 \cdot \cos \varphi + i \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Із цих формул видно, що за $\varphi > \varphi_{\text{гр}}$ коефіцієнти Френеля стають комплексними, тобто між E_{\parallel}^r і E_{\parallel}^i та E_{\perp}^r і E_{\perp}^i виникає різниця фаз δ_{\parallel} і δ_{\perp} . Зміна фази при відбитті світла обумовлює зміну поляризації відбитого світла: лінійно поляризоване падаюче світло при відбитті стає еліптично поляризованим.

5.3.11. Яку залежність від кута падіння має коефіцієнт відбиття світла від межі двох середовищ у випадку, коли для їх показників заломлення виконується нерівність $n_1 > n_2$?

Залежності коефіцієнтів відбиття $R_{\parallel} = \left(\frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i}\right)^2$ та $R_{\perp} = \left(\frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i}\right)^2$ від кута падіння

для випадку $n_1 > n_2$, що визначаються співвідношеннями (5.22), представлені кривими на рис. 5.4. За $\varphi = 0^0$, як і для випадку $n_1 < n_2$ (рис. 5.3), незмінний для світла довільної поляризації та для межі скло–повітря становить величину $R_{\perp} = R_{\parallel} \approx 4\%$. За $\varphi = \varphi_{\text{Б}}$ коефіцієнт відбиття $R_{\parallel} = 0$, тобто відбивається лише хвиля, у якій вектор

\vec{E} коливається перпендикулярно площині падіння $R_{\perp} \neq 0$. За $\varphi \rightarrow \varphi_{\text{Гр}}$, а не за $\varphi \rightarrow \pi/2$, як було при $n_1 < n_2$, потік світлової енергії відбивається повністю й відбувається явище ПВВ, коли $R_{\perp} = R_{\parallel} \rightarrow 100\%$.

Для аналізу залежності коефіцієнта відбиття R від кута падіння φ за $n_1 > n_2$ розглянемо випадок, що часто трапляється, – випадок переходу світла зі скла в повітря. Кут Брюстера, отриманий з умови (5.12) з урахуванням того, що $n_1 = 1,5$ і $n_2 = 1$, становить кут $\varphi_{\text{Б}} \approx 33^\circ$. Граничний кут ПВВ для розглянутого випадку дорівнює $\varphi_{\text{Гр}} \approx 42^\circ$.

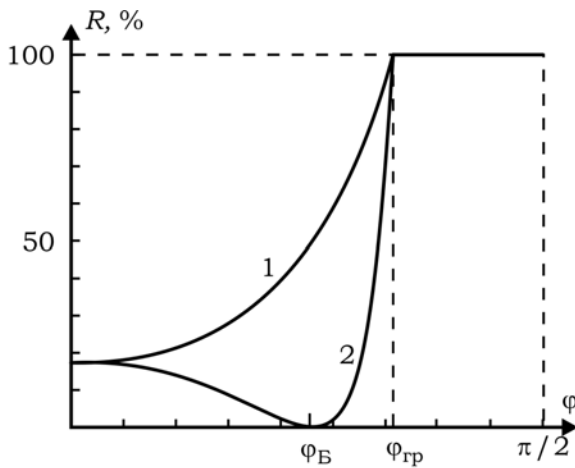


Рис. 5.4. Залежність коефіцієнта відбиття від кутів падіння для випадку $n_1 > n_2$. Крива 1 та 2 відповідають величинам R_{\perp} та R_{\parallel} , відповідно

Зауважимо, що за $\varphi \rightarrow \varphi_{\text{Гр}}$ коефіцієнт відбиття R дуже швидко зростає. Тому, використовуючи явище ПВВ і вимірюючи $\varphi_{\text{Гр}}$, можна з достатньо високою точністю визначати показник заломлення будь-яких речовин, що широко застосовується на практиці.

5.3.12. Як змінюються фаза відбитої хвилі від кута падіння для випадку $n_1 < n_2$?

Розглянемо, як змінюється фаза відбитої хвилі окремо для p - та s -компонентів. Фаза s -компонента відбитої хвилі порівняно із фазою падаючої хвилі для випадку $n_1 < n_2$ змінюється на π , тобто відбувається втрата півхвилі в усьому діапазоні кутів падіння від 0 до $\varphi = \pi/2$ (рис. 5.5, а). Фаза p -компонента відбитої хвилі порівняно із фазою падаючої хвилі для випадку $n_1 < n_2$ у межах кута падіння φ від 0 до кута Брюстера $\varphi_{\text{Б}}$ змінюється на π , а за $\varphi = \varphi_{\text{Б}}$ стрибком змінюється до 0 і зберігається такою аж до $\varphi = \pi/2$ (рис. 5.5, б). Різниця фаз між перпендикулярною та паралельною складовими відбитої хвилі показана на рис. 5.5, в.

5.3.13. Як змінюється фаза відбитої хвилі від кута падіння для випадку $n_1 > n_2$?

Залежності зміни фаз при відбитті від речовини оптично менш щільної для коливань, перпендикулярних площині падіння (δ_{\perp}) – рис. 5.5, г, для коливань, паралельних площині падіння (δ_{\parallel}) – рис. 5.5, д, і різниці фаз між паралельною та перпендикулярною складовими відбитої хвилі ($\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$) – рис. 5.5, е від кута падіння.

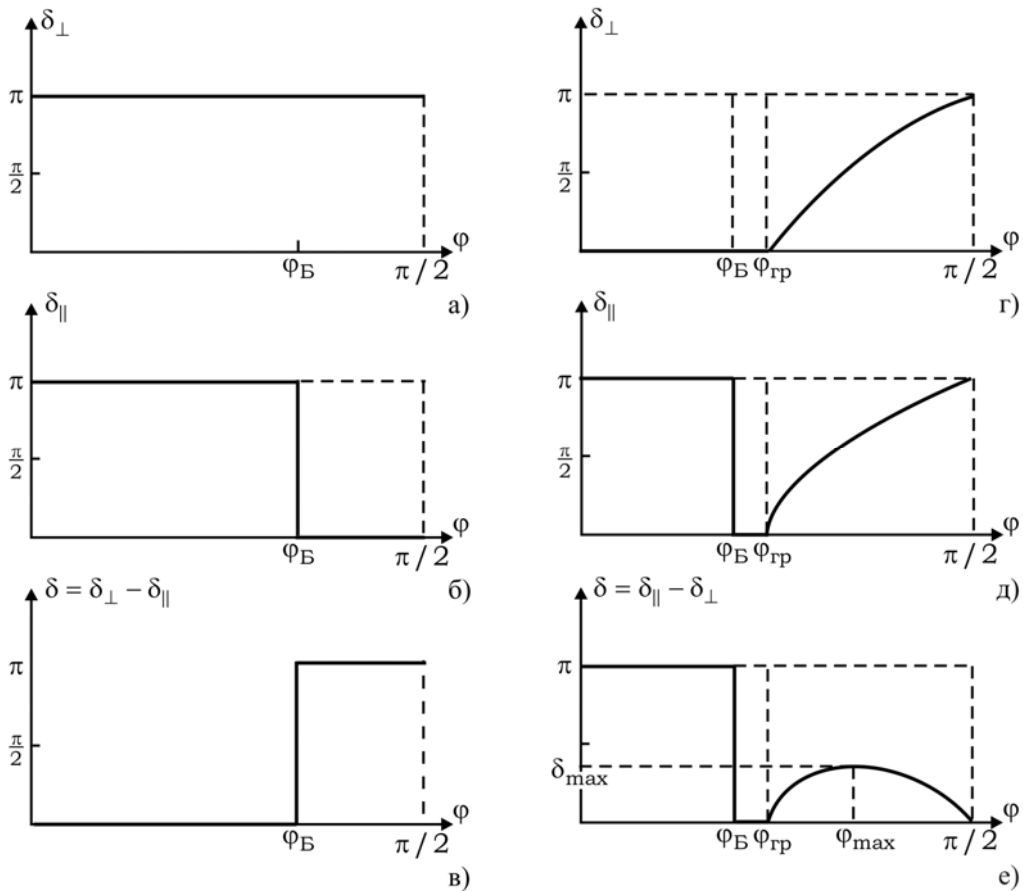


Рис. 5.5. Залежність зсуву фази хвиль при відбитті від більш оптично щільного ($n_1 < n_2$) – (а-в) і від менш оптично щільного ($n_1 > n_2$) – (г-е) середовищ для лінійно поляризованих у площині падіння – а) та г), перпендикулярно площині падіння – б) та д), а також різниці фаз між паралельною та перпендикулярною складовими відбитої хвилі в) та е) від кута падіння

5.3.14. Проаналізуйте фазові співвідношення між падаючою та відбитою хвилями для випадку $n_1 > n_2$.

Перед початком аналізу фазових співвідношень нагадаємо деякі відомості з векторного аналізу та теорії комплексних чисел, які будуть потрібні нам для подальшого розгляду. Будь-яке комплексне число $C = a + ib$ можна представити у вигляді $C = C_0 e^{i\varphi}$, де C_0 – дійсне число, а $\operatorname{tg} \delta = b/a$. Окрім того, врахуємо таке: якщо $z = \frac{a + ib}{a - ib}$, то $|z| = 1$. Висновком розгляду запитання 5.3.8 було твердження про те, що явище ПВВ супроводжується зміною не тільки фази при відбитті світла, але й зміною поляризації відбитого світла: лінійно поляризоване падаюче світло при відбитті стає еліптично поляризованим. Це відбувається за умови, коли кут падіння $\varphi > \varphi_{\text{Гр}}$.

Користуючись наведеними вище відомостями з теорії комплексних чисел, можна записати

$$\frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}^i} = \frac{A_{\parallel} \exp\left(-i \frac{\delta_{\parallel}}{2}\right)}{A_{\parallel} \exp\left(i \frac{\delta_{\parallel}}{2}\right)} = \exp(-i\delta_{\parallel}); \quad \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{A_{\perp} \exp\left(-i \frac{\delta_{\perp}}{2}\right)}{A_{\perp} \exp\left(i \frac{\delta_{\perp}}{2}\right)} = \exp(-i\delta_{\perp}). \quad (5.23)$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cos \varphi}; \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_1 \cos \varphi}. \quad (5.24)$$

Із (5.23) видно, що $\delta_{\perp} \neq \delta_{\parallel}$. Це означає, що стрибки фаз при переході світла через межу середовищ неоднакові, і відбита хвиля буде еліптично поляризованою.

Проведемо кількісну оцінку ступеня еліптичності. Відповідно різниця фаз між паралельною та перпендикулярною складовими відбитої хвилі $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ визначається з (5.23):

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_1 \sin^2 \varphi}. \quad (5.25)$$

Ця різниця фаз (δ) обертається на нуль двічі:

- 1) за $\varphi = \varphi_{\text{Гр}}$, оскільки $\sin \varphi_{\text{Гр}} = n_2/n_1$;
- 2) за $\varphi = \pi/2$, оскільки $\cos(\pi/2) = 0$ (ковзне падіння світла).

Різниця фаз δ більша за нуль для кутів падіння $\varphi_{\text{Гр}} \leq \varphi \leq \pi/2$ і набуває екстремального значення δ_{max} при значенні кута падіння φ_{max} . Знайдемо величини δ_{max} та φ_{max} .

Диференціюючи (5.25) за φ і прирівнюючи $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) = 0$, отримаємо умову екстремуму

$$\sin^2 \varphi_{\max} = \frac{2n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \Rightarrow \varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{2n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^{1/2}. \quad (5.26)$$

Підставляючи знайдене значення φ_{\max} у (5.23), маємо

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\max}}{2} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1n_2}. \quad (5.27)$$

5.3.15. *За яких умов лінійно поляризована хвиля після відбиття від межі двох середовищ буде поляризована по колу?*

Щоб відбите світло було поляризоване по колу, необхідне виконання декількох умов:

- 1) межа двох середовищ має задовольняти умову $n_1 > n_2$;
- 2) кут падіння $\varphi > \varphi_{\text{Гр}}$, тобто світло відбивається повністю (ПВВ);
- 3) амплітуди паралельної та перпендикулярної складових падаючої хвилі мають бути однаковими, що можливо, якщо азимут поляризації падаючої хвилі $\alpha = 45^\circ$;
- 4) різниця фаз δ між паралельною та перпендикулярною складовими відбитої хвилі має дорівнювати $\pi/2$, тобто вираз (5.25) повинен перейти в

$$\frac{\cos \varphi \sqrt{(n_1 \sin \varphi)^2 - n_2^2}}{n_1 \sin^2 \varphi} = 1.$$

Якщо вибрати кут падіння, за якого різниця фаз буде максимальною (5.27), то переходимо до умови $\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1n_2} = 1$.

5.3.16. *Лінійно поляризована хвиля повністю відбивається від речовини. За яких умов відбите світло залишається лінійно поляризованим?*

Із першої частини запитання стає зрозуміло, що розглядається випадок повного внутрішнього відбиття ($n_1 > n_2$, $\varphi > \varphi_{\text{Гр}}$). Досягти лінійної поляризації при цьому за рахунок відповідної різниці фаз ($\delta = \pi$) між паралельною та перпендикулярною складовими хвилі не можна, адже, виходячи із формули (5.27), виконати умову

$$\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1n_2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty \text{ фізично неможливо.}$$

Можна було б розглянути випадок падіння світла на межу двох середовищ під кутом Брюстера незалежно від співвідношення між показниками заломлення середовищ $n_1 > n_2$ та $n_1 < n_2$, але при цьому відбувається лише часткове відбиття світла.

Можна розглянути відбиття світла з азимутом поляризації падаючої хвилі α , що дорівнює або 0° , або 90° . Поляризація відбитого світла при цьому залишається незмінною, при відбитті виникає лише один компонент, який зберігає лінійну поляризацію. Однак і в цьому разі можна казати лише про часткове відбиття світла.

5.3.17. Користуючись формулами (5.26) і (5.27), покажіть, чи можна на межі скло–повітря у відбитому світлі отримати кругову поляризацію?

Відомо, якщо на межу двох середовищ ($n_1 > n_2$) під кутом $\varphi > \varphi_{\text{Гр}}$ падає лінійно поляризоване світло з азимутом поляризації, відмінним від 0 та $\pi/2$, то у відбитому світлі міститься як p - та s -складові з амплітудами E_p^r та E_s^r , відповідно. Оскільки обидва коливання у відбитому промені виникають з одного і того самого коливання, то вони будуть когерентними. Водночас відомо, що при додаванні взаємно перпендикулярних коливань виникають коливання по еліпсу. Таким чином, світловий промінь при його ПВВ стає еліптично поляризованим. В окремому випадку, коли складові p - та s -складові мають однакові амплітуди E_p^r та E_s^r , а різниця фаз між ними дорівнює $\pi/2$ або $3\pi/2$, еліпс перетворюється на коло, то ми маємо справу з циркулярно поляризованим світлом.

Розрахунки, проведені за формулами (5.26) і (5.27), показали, що для межі скло–повітря ($n_1 = 1; n_2 = 1,5$) за кута падіння $\varphi = 54^\circ 37'$ різниця фаз між p - та s -складовими $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = \pi/4$, тобто двократне відбиття під таким кутом дає різницю фаз у $\pi/2$, що приводить до кругової поляризації хвиль.

Таким чином, О. Френель запропонував призму (рис. 5.6), у якій зі світлом відбуваються послідовно два повних внутрішніх відбиття під кутом $\varphi = 54^\circ 37'$. У цьому разі, якщо падаючий світловий промінь був лінійно поляризованим, то промінь, що виходить із призми, – поляризований по колу.

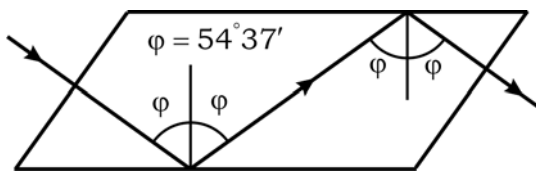


Рис. 5.6. Призма Френеля – оптичний елемент для отримання циркулярно поляризованого світла

5.3.18. Чи існують матеріали, на межі яких з повітрям можна при одноразовому відбитті у відбитому світлі отримати кругову поляризацію?

Користуючись формулами (5.26) і (5.27) можна пересвідчитись, що для межі скло–повітря значення кута $\varphi_{\text{max}} \approx 51^\circ$ і $\text{tg} \frac{\delta_{\text{max}}}{2} \approx 0,42$, тобто при одноразовому відбитті у відбитому світлі отримати кругову поляризацію ніяк не можна. Тому Френель і запропонував ідею дворазового відбиття (див. запитання 5.3.16).

Однак, аналіз формули (5.27) показує, що для отримання кругової поляризації, для якої $\delta_{\max} = \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\delta_{\max}}{2} = 1$, необхідно обирати матеріал з показником заломлення $n_1 = 2,4$, який на межі з повітрям ($n_2 = 1$) створить такі умови. Єдиним матеріалом, який задовольняє такі умови, є алмаз.

5.3.19. Якими методами можна визначити коефіцієнти пропускання та відбиття світла на межі двох середовищ?

Коефіцієнти пропускання (T) і відбиття (R) світла на межі двох середовищ можна визначити експериментально (за допомогою вимірювань) і розрахувати за формулами Френеля. Спосіб за допомогою розрахунків потребує врахування стану поляризації падаючого на межу поділу світла та знання кутів падіння, заломлення та відбиття. Інформацію про кут заломлення можна замінити на інформацію про показники заломлення двох середовищ, і за законом Снеліуса розрахувати кут заломлення.

При експериментальному визначенні коефіцієнтів пропускання (T) і відбиття (R) світла не слід забувати про можливе поглинання світла в середовищі. У разі, коли втрати на поглинання можна знехтувати, зв'язок між R і T задається співвідношенням $T + R = 1$. У разі нормального падіння світла на межу двох середовищ розрахунок значень T і R зводиться до використання формул (5.5) та (5.6).

5.3.20. Які способи визначення кута Брюстера можна запропонувати?

Можна запропонувати такі способи визначення кута Брюстера:

1) досліджуючи залежність коефіцієнта відбиття R_p для лінійно поляризованого світла, яке містить лише p -компонент, від кута падіння, фіксуємо кут, за якого величина R має мінімальне значення. Це і буде кут Брюстера;

2) знаючи відносний показник заломлення $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, можна розрахувати кут

Брюстера $\varphi_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1}$;

3) розробивши методику вимірювання кута ($\varphi + \theta$) між відбитим і заломленим променями, наприклад, за допомогою гоніометра, добираємо такий кут падіння (i), за якого $\varphi + \theta = \pi/2$ (відбитий і заломлений промені стають ортогональними). Такий кут буде відповідати куту Брюстера φ_B ;

4) зважаючи на кутові залежності фази відбитої хвилі (рис. 5.5 та рис. 5.6), можна з них визначити кут Брюстера φ_B . Наприклад, за кута падіння $\varphi = \varphi_B$ для p -компонента відбувається стрибок фази хвилі на π .

5.3.21. Запропонуйте способи визначення граничного кута ($\varphi_{\text{гр}}$) падіння для повного внутрішнього відбиття (ПВВ)?

Граничний кут для ПВВ можна визначити експериментально, вимірюючи кут падіння, за якого кут заломлення стає рівним $\pi/2$. Окрім того, граничний кут для ПВВ можна розрахувати за формулою (5.13) $\varphi_{\text{гр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{21}$.

5.3.22. Як можна змінити фазу світлової хвилі на величину $\Delta\varphi = \pi$?

Стрибком, на величину $\Delta\varphi = \pi$ фазу світлової хвилі можна змінити, примусивши хвилю відбитись при нормальному падінні або під кутом $i < i_B$ від межі з оптично більш густим діелектриком.

Плавню фазу світлової хвилі можна змінити, примусивши її проходити через пластинку змінної товщини (клин).

5.3.23. Як можна пояснити, що природне (неполяризоване) світло на межі поділу двох діелектриків поляризується?

Фізична модель механізмів, що викликають поляризацію світла на межі поділу двох діелектриків, базується на електронній моделі взаємодії світла з речовиною, яку розробив Г. А. Лоренц наприкінці XIX – початку XX ст.

Для спрощення розгляду вважатимемо, що відбиття та заломлення світла відбувається на межі поділу діелектрика і вакууму. Хвиля, що падає з вакууму на межу, проникає в діелектрик і змушує електричні заряди (електрони), що входять до складу атомів, здійснювати вимушені коливання. Заряди, що коливаються, випромінюють електромагнітні хвилі, які належать до вторинних хвиль.

У першому середовищі (у вакуумі) вторинні хвилі, інтерферуючи між собою, дають відбиту хвилю. Усередині другого середовища (у діелектрику) вторинні хвилі інтерферують з первинною (падаючою) хвилею. Результуюча вторинної та первинної хвиль дають заломлену хвилю. Вимушені коливання зарядів здійснюються в напрямку вектора \vec{E} цієї результуючої хвилі.

5.3.24. Проілюструйте поведінку заломленого і відбитого променів на межі двох діелектриків ($n_{21} < 1$) для різних значень кута падіння¹.

Пустимо на межу поділу промені під різними кутами падіння φ і будемо спостерігати за заломленими променями (рис. 5.7, а). Промінь 0 падає на межу поділу перпендикулярно до неї ($\varphi = 0$) і проходить, не заломлюючись (промінь 0"). Заломлений промінь 1" відхиляється від перпендикуляра ($\theta > \varphi$), промінь 2" ще більше відхиляється. Промінь 3 заломлюється під кутом $\theta = 90^\circ$, тобто промінь 3" поширюється вздовж межі поділу. Усі перелічені промені частково відбиваються (промені 1', 2', 3'), а промені 4 і 5 відбиваються повністю.

¹ Запитання 5.3.24–5.3.26 упорядкував В. М. Безручко.

Кут $\varphi_{\text{гр}}$, за якого відбувається перехід від часткового відбиття до повного, називається *граничним кутом повного внутрішнього відбиття* (рис. 5.7, б). Для цього кута закон Снеліуса має вигляд

$$\frac{\sin \varphi_{\text{гр}}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

де n_{21} – відносний показник заломлення.

З останнього співвідношення маємо $\varphi_{\text{гр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin n_{21}$. Для межі скло–повітря ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$; $n_{21} = 2/3$) $\alpha_{\text{гр}} = 41,8^\circ \approx 42^\circ$.

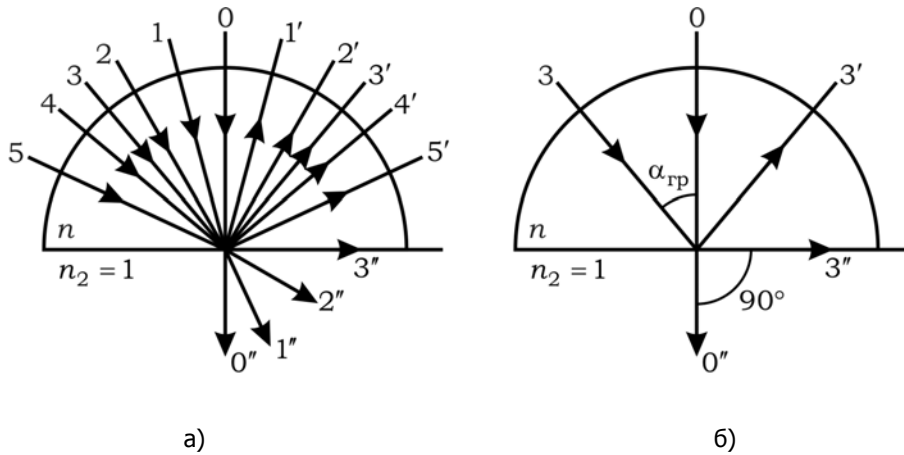


Рис. 5.7. Поведінка заломленого і відбитого променів при падінні променя на межу двох діелектриків для випадку $n_{21} < 1$

Явище, пов'язане з тим, що, починаючи з деякого кута падіння, світловий потік повністю відбивається від межі поділу, називається *повним внутрішнім відбиттям* (ПВВ). (Часто це явище називають повним відбиттям).

Ще раз підкреслимо, що необхідною умовою існування ПВВ є виконання умови $n_{21} < 1$.

5.3.25. Де в повсякденному житті проявляється і де в техніці використовується явище повного внутрішнього відбиття?

Прояви явища повного внутрішнього відбиття спостерігаються в природі. Наприклад, пухирці повітря у воді здаються "срібними" за рахунок повного внутрішнього відбиття. Однією із причин існування веселки та міражів також є явище ПВВ.

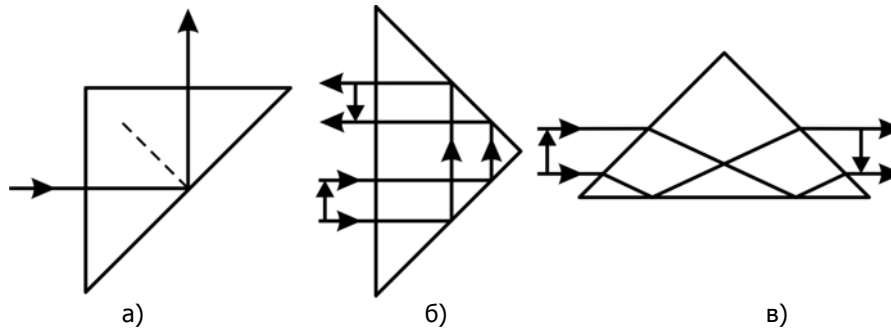


Рис. 5.8. Використання явища ПВВ у поворотних призмах

Явище повного внутрішнього відбиття використовується в оптичних елементах, наприклад, у призмах повного відбиття (рис. 5.8). У скляній рівнобедреній прямокутній призмі промінь падає нормально на першу грань (рис. 5.8, а) і не заломлюється, а на другу грань він падає під кутом 45° , що більше за граничний кут (для межі поділу скло–повітря $i_{\text{гр}} \approx 42^\circ$), і тому відбувається повне внутрішнє відбиття. Може бути кілька повних внутрішніх відбиттів, наприклад два (рис. 5.8, б), коли промінь повертається назад, або заломлення і одне повне внутрішнє відбиття (рис. 5.8, в). В останньому випадку призма називається *призмою Дове*.

5.3.26. Розгляньте проходження променя через середовище, у якому показник заломлення змінюється в напрямку, перпендикулярному до межі пластинки, уздовж осі x (рис. 5.9).

Середовище можна розбити на тонкі шари з різними показниками заломлення n , але всередині шарів можна вважати значення n сталим. При переході від одного шару до іншого величина n дискретно змінюється в один бік.

При поширенні світла в напрямку зростання n промінь буде все більше заломлюватися (рис. 5.9, а). На межах шарів виконується співвідношення Снеліуса: $n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1 = \dots = n_k \sin \alpha_k$. Тут кут заломлення в кожному шарі є кутом падіння в наступному. Тобто вздовж обраного напрямку виконується співвідношення

$$n(x) \cdot \sin \alpha(x) = \text{const}.$$

Цей важливий закон (його ще називають *узагальненим законом Снеліуса*) вказує на те, що наявність проміжних шарів не впливає на зв'язок між кутом входу в перший шар і кутом виходу з останнього.

Якщо промінь поширюється в бік зменшення показника заломлення, то він поступово відхиляється від перпендикуляра (рис. 5.9, б) і кут падіння на черговий шар може досягти значення, більшого за граничний кут повного внутрішнього відбиття. У цьому випадку промінь повністю відіб'ється (неначе від дзеркала) і повернеться в перше середовище.

Отже, маємо важливий висновок: при розрахунку оптичних систем можна не враховувати проміжні тонкі шари (шари клею або стінки посудин, у які налита рі-

дина тощо) і записати $n_0 \sin \alpha_0 = n_k \sin \alpha_k$. Однак це не означає, що зміна показника заломлення всередині, наприклад, плоско-паралельної пластинки, ніяк не виявляється в параметрах променя на виході з неї. Це не так. Якщо після проходження променя через плоско-паралельну пластинку з однорідним розподілом показника заломлення $\left(\frac{\Delta n}{\Delta x} = \text{const}\right)$ він зміщується, але не змінює напрямку поширення (див.

рис. 1.42), то при неоднорідній зміні показника заломлення $\left(\frac{\Delta n}{\Delta x} \neq \text{const}\right)$ промінь на виході з пластинки змінює свій напрямок (рис. 5.9, а). Це можна навіть використувати, як індикатор (критерій) однорідності розподілу показника заломлення середовища.

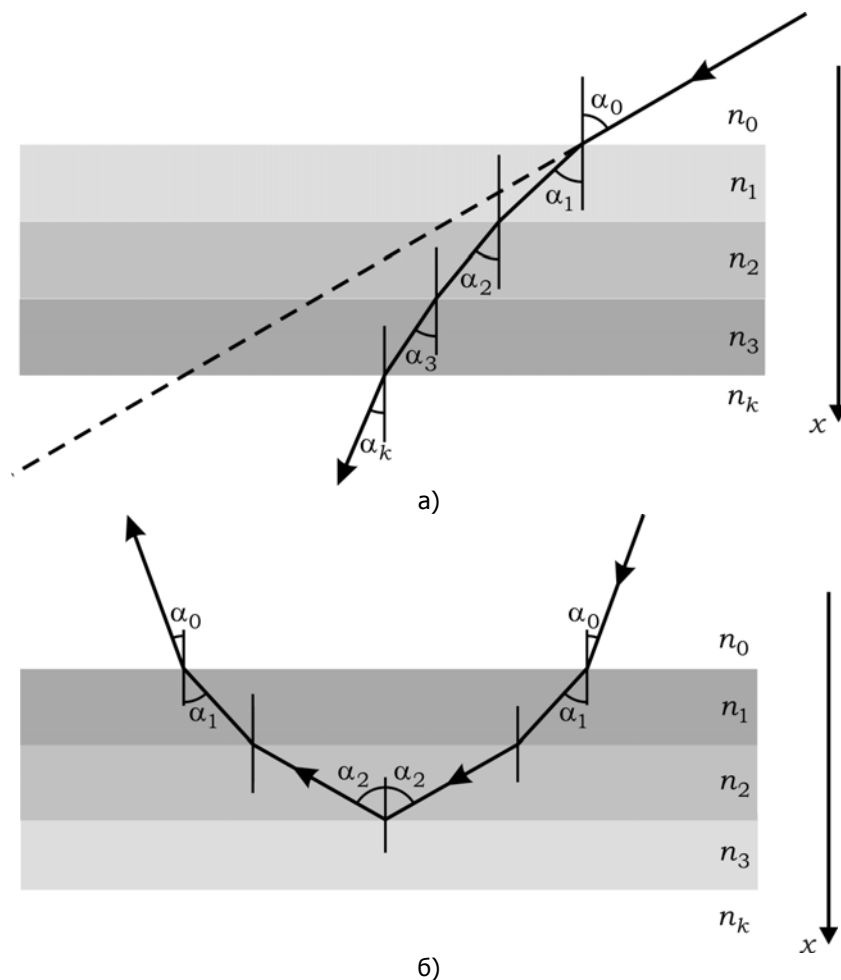


Рис. 5.9. До запитання 5.3.26

5.3.27. Що таке стопа Столетова?

Стопа Столетова – це лінійний поляризатор, принцип роботи якого заснований на використанні ефекту Брюстера. Коефіцієнт пропускання стопи Столетова теоретично становить 50 %, ступінь поляризації ~ 95–98 %. Стопа Столетова складається з 8–10 пластинок зі скла для видимого діапазону, з германію чи селену для ІЧ діапазону або пластинок з AgCl для УФ діапазону. Світло має падати на стопу під кутом Брюстера. Недоліки такого поляризатора – це громіздкість, зсув напрямку променя на виході зі стопи порівняно із вхідним променем, невеликий коефіцієнт пропускання, малі значення апертури.

5.3.28. На скляну пластинку падає циркулярно поляризоване світло. Чи зміниться поляризація світла при проходженні через пластинку, якщо світло падає під кутом, меншим кута Брюстера?

Так, зміниться. Світло з циркулярно поляризованого стане еліптично поляризованим, оскільки зміниться співвідношення між амплітудами взаємно перпендикулярних хвиль, що створюють циркулярно поляризоване світло. Різниця фаз δ при цьому залишиться незмінною й дорівнюватиме $\pi/2$.

5.3.29. На поверхню скла падає правоциркулярно поляризоване світло. Який тип поляризації має відбите світло, якщо світло падає: а) нормально; б) під кутом $\varphi < \varphi_B$; в) під кутом $\varphi = \varphi_B$; г) під кутом $\varphi > \varphi_B$?

Щоб відповісти на ці запитання треба проаналізувати фазові співвідношення між p - та s -компонентами для відбитої хвилі (див. запитання 5.3.12). При нормальному падінні ($\varphi = 0$), як відомо, між падаючою та відбитою хвилями виникає різниця фаз $\delta = \pi$. Це призводить до зміни напрямку циркуляції вектора \vec{E} . Таким чином правоциркулярно поляризоване світло перетворюється на лівоциркулярно поляризоване світло

За кутів $\varphi < \varphi_B$ для випадку $n_2 > n_1$ різниця фаз між падаючою та відбитою хвилями $\delta = \pi$, тому циркулярно поляризоване світло перейде в еліптичне (див. запитання 6.3.28) зі зміною напрямку обертання вектора \vec{E} . Якщо $\varphi = \varphi_B$, то циркулярно поляризоване світло перетворюється на лінійне, оскільки за $\varphi = \varphi_B$ значення $R_p = 0$.

За кутів $\varphi > \varphi_B$ для випадку $n_2 > n_1$ різниця фаз між падаючою та відбитою хвилями зникає ($\delta = 0$), тому правоциркулярно поляризоване світло перетворюється на еліптично поляризоване світло зі збереженням напрямку обертання вектора.

5.3.30. Що може свідчити про зсув фаз у відбитій хвилі відносно падаючої хвилі?

Знак "мінус" в одній із формул Френеля (5.8) (для s -компонента відбитої хвилі) свідчить про існування зсуву фаз на π між s -компонентом падаючої і відбитої хвиль ("втрату півхвилі") для випадку $n_2 > n_1$. Для p -компонента зсув фаз між відбитою і падаючою хвилями дорівнює нулю в межах кутів падіння φ від 0 до φ_B .

Про зсув фаз у відбитій хвилі свідчить також наявність уявної частини у виразі для амплітуди хвилі, як у формулах (5.23).

5.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. Переконайтесь, що формули Френеля відповідають закону збереження енергії.

Розв'язання. Розглянемо проходження світла через елементарну площадку $d\sigma$ на межі двох прозорих діелектриків з показниками заломлення $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ та $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ (рис. 5.10).

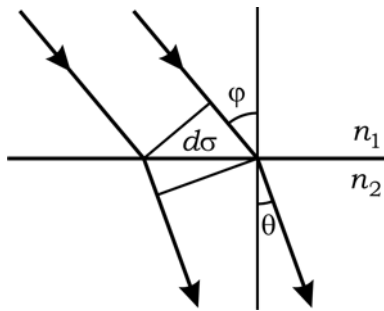


Рис. 5.10. До прикладу 5.1

За законом збереження енергії падаючої на таку межу хвилі дорівнює сумі енергій відбитої та заломленої хвиль $W_0 = W_1 + W_2$. Енергію, яка переноситься світловою хвилею, можна характеризувати за допомогою вектора Умова–Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$. Модуль цієї величини кількісно дорівнює енергії, яка за одиницю часу переноситься через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення. Ураховуючи зв'язок $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$ і те, що для оптичного діапазону $\mu \approx 1$, отримаємо, що модуль вектора Умова–Пойнтінга $S = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2$.

Запишемо закон збереження енергії для межі двох діелектриків:

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_1} (E_0)^2 \cdot dS \cos \varphi = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_1} (E_1)^2 \cdot dS \cos \varphi + \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon_2} (E_2)^2 \cdot dS \cos \theta,$$

де E_0, E_1, E_2 – амплітуди падаючої, відбитої та заломленої хвиль, відповідно. Перепишемо цей вираз у вигляді

$$1 = \left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_2}{E_0} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}.$$

Неполяризоване світло можна представити у вигляді двох складових: s - та p -компонентів. Формули Френеля встановлюють зв'язок між амплітудами падаючої (E_0), відбитої (E_1) і заломленої (E_2) хвиль. Для s -компонента закон збереження

енергії запишеться у вигляді $1 = r_s^2 + d_s^2 \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi}$, де $r_s \equiv \frac{E_{1s}}{E_{0s}}$ і $d_s \equiv \frac{E_{2s}}{E_{0s}}$ – коефіцієнти Френеля для s -компонентів відбитої та заломленої хвиль, відповідно.

За формулами Френеля $r_s = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \theta}$, а $d_s = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \theta}$. Не важко

пересвідчитись, що підстановка цих виразів у закон збереження енергії перетворює його на тотожність.

Аналогічно можна показати, що і для p -компонента світлової хвилі закон збереження енергії також виконується.

Виконання закону збереження енергії окремо для s - і p -компонентів свідчить про незалежність s - та p -поляризацій (s -компонент не переходить у p -компонент, і навпаки).

Через коефіцієнти Френеля визначаються коефіцієнт відбиття $R = r^2$ і коефіцієнт пропускання $T = \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \varphi} d^2$. Тоді закон збереження енергії записується у вигляді $R + T = 1$.

Доведення закону збереження енергії значно спрощується для випадку нормального падіння ($\varphi = \theta = 0$). У цьому випадку коефіцієнти відбиття та пропускання не залежать від стану поляризації падаючого випромінювання й визначаються як

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \text{ та } T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}, \text{ відповідно. При цьому } R \text{ інколи називають відби-}$$

ваючою здатністю, а T – поверхневою прозорістю. Підставивши вирази для R і T у вираз $R + T = 1$, не важко переконатись у його справедливості.

Приклад 5.2. *На поверхню води під кутом Брюстера падає промінь плоскополяризованого світла. Площина коливань світлового вектора становить кут 45° з площиною падіння. Знайдіть коефіцієнт відбиття.*

Розв'язання. У загальному випадку коефіцієнт відбиття R визначається за формулою $R = \frac{I_R}{I_0}$. Для випадку, який відповідає умові прикладу (кут падіння до-

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_0}.$$

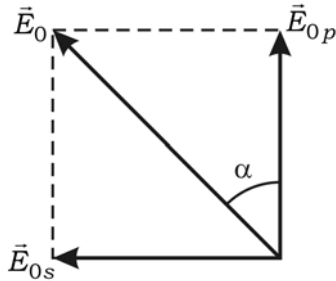


Рис. 5.11. До прикладу 5.2

Щоб скористатись формулами Френеля, з урахуванням кута α – азимута поляризації падаючого світла, який пов'язує амплітуди падаючої хвилі (E_0) та її s -компонента (E_{0s}) (рис. 5.11) через співвідношення $E_{0s} = E_0 \cdot \sin \alpha$, запишемо робочу формулу для коефіцієнта відбиття у вигляді

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (5.29)$$

Скористаємось (5.10):

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha (\sin \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \theta)^2}{(\sin \varphi \cdot \cos \theta + \cos \varphi \cdot \sin \theta)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)^2}{(\sin^2 \varphi + \sin^2 \theta)^2} = \sin^2 \alpha \left[\frac{\sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} - 1 \right)}{\sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} + 1 \right)} \right]^2 = \sin^2 \alpha \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Для значень величин, наведених в умові цього прикладу,

$$R = \left[\frac{(1,33)^2 - 1}{(1,33)^2 + 1} \right]^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,038.$$

Приклад 5.3. Вузкий пучок природного світла інтенсивністю I_0 падає під кутом Брюстера на поверхню товстої плоско-паралельної прозорої пластинки. При цьому від верхньої поверхні відбивається $\rho = 0,080$ світлового променя. Знайдіть інтенсивності променів 1, 2, 3, 4 (рис. 5.12).

Розв'язання. Насамперед покажемо, якщо умова Брюстера виконується для променя 0, що падає на першу грань пластинки, то вона виконується й для променя 2, який падає на другу грань пластинки.

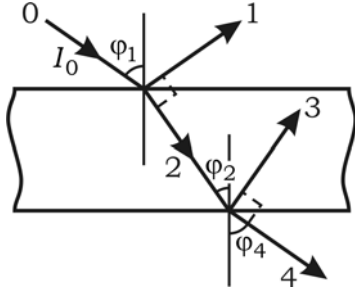


Рис. 5.12. До умови прикладу 5.3

За умовою прикладу: $\operatorname{tg} \varphi_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$, де n_1 і n_2 – показники заломлення середовища, з якого промінь падає на пластинку, і самої пластинки, відповідно. Якщо скористатись законом Снеліуса $n_1 \sin \varphi_{1B} = n_2 \sin \varphi_2$ та об'єднати його із законом Брюстера для першої межі поділу:

$$\operatorname{tg} \varphi_{1B} = \frac{\sin \varphi_{1B}}{\cos \varphi_{1B}} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2}{\cos \varphi_{1B}} = \frac{n_2}{n_1},$$

то можна дійти висновку, що $\frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_{1B}} = 1 \Rightarrow \sin \varphi_2 = \cos \varphi_{1B}$. Із цього та з рівності кутів φ_4 і φ_{1B} випливає, що $\sin \varphi_2 = \cos \varphi_4$. Останнє свідчить про те, що $\varphi_2 + \varphi_4 = \pi / 2$, тобто падаючий на другу межу промінь і заломлений на ній промінь становлять прямий кут, а це й є необхідною та достатньою умовою закону Брюстера $\varphi_2 = \varphi_{2B}$, що й необхідно було довести.

Падаючий промінь природного світла можна замінити його енергетичним еквівалентом – двома лінійно поляризованими у взаємно перпендикулярних площинах променями з інтенсивностями $I_{\parallel} \equiv I_p$ та $I_{\perp} \equiv I_s$. Іntenсивності обох променів однакові й дорівнюють половині інтенсивності падаючого променя природного світла $I_p = I_s = I_0 / 2$. Таким чином будемо розв'язувати приклад, розбивши його на дві частини: для p - та s -компонентів окремо (рис. 5.13).

1. Для p -компонента (рис. 5.13, а). Оскільки промінь падає на поверхню пластинки під кутом Брюстера, p -компонента променя не відбивається (коефіцієнт відбиття для p -компонента $R_p = 0$), а тільки заломлюється: інтенсивність p -компонента променя 1 дорівнює $I_{1p} = 0$.

За умовою прикладу пластинка прозора, світло при поширенні в ній не поглинається. Якщо немає відбиття і поглинання, то інтенсивність променя не буде змінюватись $I_{2p} = \frac{I_0}{2}$. Але попереднє доведення того, що кут φ_2 є кутом Брюстера, при-

водить до того, що і промінь 2 у цьому випадку не відбивається від другої межі поділу, а лише заломлюється, тобто $I_{4p} = I_0 / 2$. Отже, інтенсивність p -компонента променя не змінюється на всьому шляху поширення променя.

2. Для s -компонента (рис. 5.13, б). Інтенсивність s -компонента променя 1: $I_{1s} = \frac{I_0}{2} \cdot R_s$, де R_s – коефіцієнт відбиття від першої межі поділу для s -компонента.

Скористаємось тим, що при виконанні умови Брюстера коефіцієнт відбиття для s -компонента $R_s = 2R$, де R – коефіцієнт відбиття для природного світла. Тоді

$$I_{1s} = \frac{I_0}{2} \cdot 2R = I_0 \cdot R.$$

Інтенсивність s -компонента променя 2: $I_{2s} = \frac{I_0}{2} \cdot T_s$. Коефіцієнт пропускання T_s розраховують через R_s за формулою (5.4): $T_s = 1 - R_s$. Тоді

$$I_{2s} = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - R_s) = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R).$$

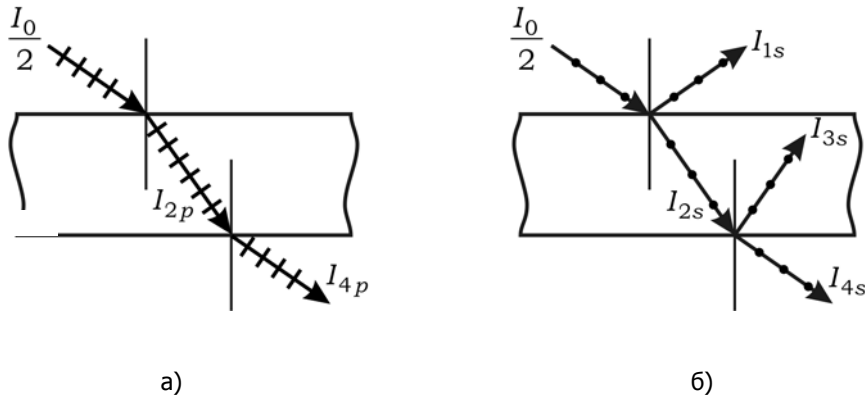


Рис. 5.13. Хід променів p (а) і s (б) складових поляризації: до прикладу 5.3

Інтенсивність s -компонента променя 3:

$$I_{3s} = I_{2s} \cdot 2R = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R) \cdot 2R = I_0 \cdot R(1 - 2R)$$

Інтенсивність s -компонента променя 4:

$$\begin{aligned} I_{4s} &= I_{2s} - I_{3s} = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R) - I_0 \cdot R(1 - 2R) = \\ &= \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R)(1 - 2R) = \frac{I_0}{2} \cdot (1 - 2R)^2. \end{aligned}$$

Розглянувши поведінку окремих частин (s - і p - компонентів) променів 1, 2, 3, 4, повернемось до розгляду "синтезованих" променів 1, 2, 3, 4.

$$\text{Інтенсивність променя 1: } I_1 = I_{1s} + I_{1p} = I_0 \cdot R = 0,080 I_0.$$

$$\text{Інтенсивність променя 2: } I_2 = I_{2s} + I_{2p} = I_0(1 - R) = 0,920 I_0.$$

$$\text{Інтенсивність променя 3: } I_3 = I_{3s} + I_{3p} = I_0(1 - 2R)R = 0,067 \cdot I_0.$$

$$\text{Інтенсивність променя 4: } I_4 = I_{4s} + I_{4p} = I_0(1 + 2R^2 - 2R) = 0,827 \cdot I_0.$$

Приклад 5.4. Об'єктив складається з двоопуклої ($n_1 = 1,52$) і вгнуто-плоскої ($n_2 = 1,60$) лінз з однаковими радіусами сферичних поверхонь, які розділені повітряним проміжком. Визначте коефіцієнт пропускання об'єктива. Як зміняться втрати на відбиття об'єктива, якщо між лінзами відсутній повітряний проміжок (має місце оптичний контакт)?

Розв'язання. Об'єктив має чотири заломлюючі поверхні. Його коефіцієнт пропускання згідно із формулою (5.13) визначається таким співвідношенням:

$$T_{\Sigma} = (1 - R_1)^2 (1 - R_2)^2, \text{ де коефіцієнт відбиття на одній поверхні першої лінзи}$$

$$R_1 = \left(\frac{1 - n_1}{1 + n_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,52}{1 + 1,52} \right)^2 = 0,0426,$$

а коефіцієнт відбиття на одній поверхні другої лінзи

$$R_2 = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6} \right)^2 = 0,0532.$$

Тоді $T_{\Sigma} = (1 - 0,0426)^2 (1 - 0,0532)^2 = 0,8217$. Втрати на відбиття в об'єктиві $R_{\Sigma} = 1 - T_{\Sigma} = 0,1783$.

Якщо між лінзами існує оптичний контакт, то такий об'єктив має три заломлюючі поверхні, і коефіцієнт пропускання на межі двох лінз дорівнює

$$R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1,52 - 1,6}{1,52 + 1,6} \right)^2 = 0,0006.$$

Сумарний коефіцієнт пропускання об'єктива визначається за формулою

$$T_{\Sigma}' = (1 - R_1)(1 - R_{12})(1 - R_2).$$

Тоді $T_{\Sigma}' = (1 - 0,0426)(1 - 0,0006)(1 - 0,0532) = 0,9059$.

Отже, втрати на відбиття в такого об'єктива будуть меншими на величину $\Delta T_{\Sigma} = T_{\Sigma}' - T_{\Sigma} = 0,9059 - 0,8217 = 0,0842$, тобто $\approx 8,4\%$.

6. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

6.1. Когерентне випромінювання

6.1.1. Короткі теоретичні відомості

- Інтерференція світла – явище підсилення або послаблення інтенсивності результуючої світлової хвилі в результаті просторового перерозподілу енергії оптичного випромінювання при накладанні двох або більшої кількості світлових хвиль, яке залежить від співвідношення фаз когерентних світлових хвиль, що складаються.

- Когерентність світла – взаємна узгодженість у часі світлових коливань у різних точках простору або часу, яка характеризує їх здатність до інтерференції. Щоб зареєструвати інтерференційну картину, необхідна стабільність різниці фаз ($\delta = \text{const}$) інтерферуючих хвиль за час, необхідний для реєстрації інтерференції.

У зв'язку з тим, що в оптичному діапазоні всі датчики квадратичні та інерційніші, ніж період світлових коливань ($T \approx 10^{-15} \text{с}$), вони реєструють усереднену в часі

інтенсивність $\langle I \rangle \approx \langle E \rangle \cdot \langle E \rangle^*$. Якщо $\langle I \rangle = \Sigma I_i$, то виконується закон незалежності світлових пучків. Якщо закон незалежності світлових пучків порушується, то виникає регулярна картина у вигляді максимумів і мінімумів інтенсивності світла або регулярне різнокольорове забарвлення, тобто виникає інтерференційна картина.

Необхідною умовою для існування інтерференції є вимога, щоб хвилі, що додаються, були когерентними. Вимога, щоб амплітуди цих хвиль були однаковими, а їх площини поляризації – паралельними, не є необхідною, а лише бажаною. Вимога, що поляризації хвиль не мають бути ортогональними, також строга.

- При складанні світлових хвиль від двох джерел з інтенсивністю світла I_1 і I_2 на екрані в точці спостереження P результуюча інтенсивність I_p описується формулою

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (6.1)$$

де $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз між хвилями, що додаються, у точці спостереження. Якщо різниця фаз δ залишається сталою, то хвилі називаються *когерентними*. Доданок у (6.1), що враховує взаємодію хвиль, називається *інтерференційним членом*:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (6.2)$$

Щодо некогерентних джерел світла, то різниця фаз коливань у цьому випадку хаотично змінюється, тому середнє в часі значення $\cos \delta$ дорівнює нулю, а інтенсив-

ність у (6.1) результуючої хвилі всюди однакова: за $I_1 = I_2 = I$ інтенсивність $I_p = 2I$.

Щодо когерентних джерел світла $I_p \neq I_1 + I_2$: якщо коливання синфазні (фази φ_1 і φ_2 однакові або відрізняються на парне число π), то інтенсивність у точці спостереження P буде максимальною:

$$I_{p \max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2. \quad (6.3)$$

Якщо коливання протифазні (фази φ_1 і φ_2 відрізняються на непарне число π), то інтенсивність у точці P буде мінімальною:

$$I_{p \min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \quad (6.4)$$

Для когерентних хвиль у разі виконання умови максимуму інтенсивність результуючої хвилі за $I_1 = I_2 = I$ дорівнює $I_p = 4I$, а в мінімумі $I_p = 0$.

За рівності амплітуд, а отже й інтенсивності інтерферуючих хвиль розподіл інтенсивності по інтерференційній картині визначається виразом

$$I_p = 4I \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad (6.5)$$

- Оптичний шлях $\Delta = l \cdot n$, де l – геометричний шлях; n – показник заломлення. *Оптична різниця ходу* між променями, що інтерферують становить $\Delta = l_2 n_2 - l_1 n_1$. Між різницею фаз δ променів, що складаються, та їх оптичною різницею ходу Δ існує зв'язок:

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (6.6)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ – хвильове число; λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Умови максимуму і мінімуму можна сформулювати через оптичну різницю ходу між променями, що інтерферують:

- якщо оптична різниця ходу дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі:

$$\Delta = \pm m \lambda_0, \quad (6.7)$$

де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, а $\delta = \pm 2m\pi$, то коливання, які збуджуються в точці P обома хвилями, перебувають в однаковій фазі й виникає умова для інтерференційного максимуму;

- якщо оптична різниця ходу дорівнює непарній кількості півхвиль у вакуумі

$$\Delta = \pm (2m + 1) \lambda_0 / 2, \quad (6.8)$$

де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, а $\delta = \pm (2m + 1)\pi$, то коливання, які збуджуються в точці P обома хвилями, перебувають у протифазі й виникає умова для інтерференційного мінімуму.

- Часова когерентність. Фаза хвилі $\varphi(r, t)$ залежить від відстані від джерела до точки спостереження і частоти ω . Якщо в точці спостереження P різниця фаз

$\delta = \varphi_1(r_1, t_1) - \varphi_2(r_1, t_2)$ для двох різних моментів часу залишається сталою, то кажуть, що випромінювання має часову когерентність. Найбільший проміжок часу $\Delta t = \tau_k$ у межах якого різниця фаз змінюється менше, ніж на π називається *часом когерентності*. Час когерентності пов'язаний із шириною спектральної лінії за формулою

$$\tau_k = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (6.9)$$

Відстань $L_k = c \cdot \tau_k$ називається *довжиною когерентності*. Час життя ($\sim 10^{-8}$ с) збудженого атома це – тривалість цугу хвиль, яка за фізикою оптичних процесів дорівнює часу когерентності τ_k . Довжина когерентності $L_k = c \cdot \tau_k$ показує шлях, який проходить цуг хвиль за час τ_k . *Порядок інтерференції* – відношення різниці ходу до довжини хвилі $m = \frac{\Delta}{\lambda}$. Максимальний порядок інтерференції, який існує в інтерференційній картині, дорівнює

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (6.10)$$

де $\Delta\lambda$ – ширина спектральної лінії випромінювання (величина, яка характеризує ступінь монохроматичності випромінювання). Максимальний порядок інтерференції m_{\max} пов'язаний з максимальною оптичною різницею ходу

$$\Delta_{\max} = m_{\max} \cdot \lambda. \quad (6.11)$$

Об'єднавши (6.10) і (6.11), отримуємо

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (6.12)$$

Максимальна оптична різниця ходу дорівнює довжині когерентності

$$\Delta_{\max} = L_k. \quad (6.13)$$

- Просторова когерентність характеризує зміну фази або зміну різниці фаз у просторі, обумовлену насамперед скінченними розмірами джерела світла. Якщо різниця фаз $\delta = \varphi_1(P_1, t_0) - \varphi_2(P_2, t_0)$ для хвиль у різних точках P_1 і P_2 простору в певний момент часу t_0 залишається сталою і не залежить від часу, то таке випромінювання називається *просторово когерентним*. Радіус поперечного розміру пучка світла в межах якого виконується просторова когерентність називається *радіусом когерентності*. Частина простору, у якій хвиля зберігається когерентною, визначає об'єм когерентності.

Видність інтерференційної картини визначається співвідношенням

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (6.14)$$

і характеризує контрастність інтерференційної картини, яка істотно залежить від ступеня когерентності світла і співвідношення амплітуд інтерферуючих пучків.

6.1.2. Запитання та відповіді

6.1.1. *Що називають інтерференцією світлових хвиль, інтерференційною картиною, шириною інтерференційної смуги?*

Складання хвиль, при якому порушується та частина принципу суперпозиції, яка стосується незалежності хвиль: інтенсивність результуючої хвилі стає залежною від різниці фаз вихідних хвиль, у результаті чого виникає інтерференційна картина, називають інтерференцією.

Інтерференційною картиною називають просторовий перерозподіл інтенсивності у вигляді регулярного послаблення та підсилення результуючої хвилі, яка утворилась у результаті додавання когерентних або частково когерентних двох чи більшої кількості хвиль.

Ширина інтерференційної смуги (або просторовий період інтерференційної картини) – лінійна відстань між двома сусідніми інтерференційними максимумами. Ширина інтерференційної смуги може бути задана і в кутових одиницях.

6.1.2. *Яке світло вважається когерентним?*

Під когерентністю розуміють узгоджений перебіг у часі декількох коливальних або хвильових процесів. Когерентними хвилями називають хвилі (дві або більше), які зберігають постійну різницю фаз δ між ними. Найбільш загальне визначення когерентності світла пов'язане з його здатністю утворювати інтерференційну картину.

Когерентними властивостями у фізиці може характеризуватись не лише випромінювання (світло).

6.1.3. *Яке світло вважається монохроматичним?*

Найкоротше визначення монохроматичного світла – це визначення, пов'язане з їх описом за допомогою гармонічних хвиль. Однак деталізація цього визначення потребує доповнення його такими деталями, як вимога необмеженості в просторі та часі гармонічної хвилі, яка має сталі в часі частоту, амплітуду та початкову фазу. Ці характеристики для монохроматичних хвиль зберігаються сталими нескінченно довго, інакше тільки розкладання прямокутного імпульсу світла в ряд Фур'є дозволяє твердити/казати про гармонічні складові такого світла. Звичайно, випадок з нескінченно тривалим процесом випромінювання існувати в природі не може й є ідеалізованим. Окрім того, існує низка фізичних механізмів, які приводять до уширення лінії випромінювання. Більшість із цих механізмів можна лише зменшувати, принципово позбавитись них неможливо. Наприклад, т. зв. природне уширення пов'язане з квантово-механічним принципом невизначеності, який взагалі заперечує можливість існування випромінювання із шириною смуги $\Delta\nu = 0$. Тому монохроматичних хвиль (хвиль із шириною смуги випромінювання $\Delta\nu = 0$) у природі не існує, можуть існувати квазімонохроматичні хвилі зі смугою випромінювання ма-

лої, але скінченної величини ($\Delta\nu \rightarrow 0$). Усе це не заважає тому, що такою ідеалізацією, як монохроматичні хвилі користуються при розгляді багатьох фізичних моделей.

6.1.4. Які параметри випромінювання визначають ступінь когерентності світла?

Якщо випромінюють атоми одного типу, частоти випромінювання будуть близькими, але не тотожними, адже час випромінювання атомів обмежений. У цьому випадку збуджений атом випромінює світло протягом часу, який для кожного атома свій, індивідуальний. Атоми випромінюють у частотному діапазоні $\Delta\nu$ електромагнітні хвилі, що утворюють хвильові пакети, тривалість яких $\tau = 1/\Delta\nu$. Таке світло має часткову часову когерентність.

Друга причина, що порушує умови когерентності – це певні розміри джерела світла, яке тільки з більшим чи меншим наближенням можна вважати точковим. Тому світло від такого джерела має часткову просторову когерентність.

Таким чином, реальне джерело світла завжди дає частково когерентне світло як в часі, так і просторі. У кожній конкретній схемі забезпечують необхідну міру часової та просторової когерентності (або однієї з них).

6.1.5. Що таке часова когерентність і просторова когерентність? Що їх різнить, а що об'єднує?

Як відомо, існують два види когерентності: часова і просторова. Щоб визначити, яке світло утворює інтерференційну картину в часовій когерентності, необхідно ввести такі поняття, як час когерентності τ_k ; довжину когерентності L_k (це дві "внутрішні" характеристики джерела світла) та оптичну різницю ходу Δ двох променів (це "зовнішня" характеристика умов спостереження інтерференційної картини, характеристика експериментальної установки). Існує максимальне значення оптичної різниці ходу Δ_{\max} , яке обмежує спостереження інтерференційної картини. Якщо $\Delta < \Delta_{\max}$, інтерференційну картину отримати вдається. Якщо $\Delta > \Delta_{\max}$, інтерференційної картини немає. З розгляду інтерференції світла від когерентних джерел випливає, що $L_k = \Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Таким чином, світло вважається когерентним, якщо для нього виконується умова $\Delta < L_k$, і навпаки: світло вважається некогерентним, якщо для нього $\Delta > L_k$. Як бачимо, поняття когерентності світла є величиною умовною. Воно залежить не тільки від параметрів джерела (ступеня його монохроматичності – ширини лінії випромінювання $\Delta\lambda$), але й від величини Δ .

Щоб визначити, що таке просторова когерентність, необхідно врахувати, що в плоских хвилях фаза може змінюватися не тільки в напрямку їх поширення, але й у площині, перпендикулярній цьому напрямку. Випадкові зміни різниці фаз у двох точках, розташованих у цій площині, збільшується зі збільшенням відстані між ними. Когерентність коливань у цих точках послаблюється і зникає на деякій відстані, коли випадкові зміни різниці фаз стають порівнянними з π . Величина r_k у цьому випадку називається радіусом когерентності.

Таким чином, увесь простір, що займає хвиля, можна розбити на області, в кожній з яких хвиля зберігає когерентність. Об'єм такої області простору називається об'ємом когерентності. Цей об'єм приблизно дорівнює добутку довжини когерентності L_k на площу кола радіусом r_k .

6.1.6. Чи вимагається у визначенні когерентних хвиль абсолютне збереження незмінності різниці їх фаз δ або існує деякий "люфт" у величині δ , при якому інтерференція ще спостерігається? За якого значення δ хвилі вважаються некогерентними й інтерференційна картина не спостерігається?

Одне із визначень когерентних хвиль стосується вимоги збереження сталості величини різниці їх фаз δ . Проте величина δ у реальних випадках не залишається абсолютно незмінною. Вважається, що випадкові зміни різниці фаз δ для когерентного світла за деякий час не мають перевищувати величину π . Цей час визначається як час когерентності τ_k .

6.1.7. Два когерентні світлові промені інтерферують у деякій точці з оптичною різницею ходу $\Delta = 3\lambda_0$, де λ_0 – довжина хвилі світла у вакуумі. Максимум чи мінімум спостерігається в цій точці інтерференційної картини?

Ціле числа m (у цьому випадку $m = 3$) довжин хвиль, що вкладаються в оптичну різницю ходу Δ , відповідає умові максимуму, спостерігається світла смуга.

6.1.8. Визначте, які експериментальні умови необхідно виконати для спостереження інтерференції світла.

Для підвищення контрасту інтерференційної картини бажано, щоб інтенсивності інтерферуючих хвиль були однаковими. Поляризація хвиль має бути лінійною й бажано однаковою (виключається випадок інтерференції ортогонально поляризованих хвиль).

Максимальна різниця ходу в інтерференційних схемах Δ має бути меншою від довжини когерентності випромінювання $\Delta < c\tau_k = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Розмір ($2b$) джерела світла має задовольняти умову $2b < \frac{\lambda}{\Omega}$, де Ω – кут сходження променів від джерела світла (див. запитання 6.1.35).

6.1.9. Чи можна спостерігати інтерференцію від немонохроматичних джерел? У яких випадках?

Інтерференція може відбуватись і у випадку складання немонохроматичних (негармонічних) коливань, коли фази φ_1 і φ_2 кожного коливання є будь-якою функцією часу, але при цьому їх різниця залишається сталою $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ і $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, але $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \text{const}$. Цей факт використовують для спостереження інтерференції від одного некогерентного джерела, світлова хвиля від якого відомими методами (напр., метод дзеркала Ллойда тощо) ділиться на дві когерентних між собою хвилі. Так можна спостерігати інтерференцію на тонких плівках у природному світлі (див.

запитання 6.2.8. Однак кореляція фаз при цьому залишається необхідною умовою інтерференції.

6.1.10. Чи можна вважати інтерференцією утворення стоячої хвилі?

Утворення стоячих хвиль можна розглядати як результат інтерференції падаючої та відбитої хвиль. Інтерференційна картина при цьому також залежить від співвідношення фаз обох хвиль і збереження сталою різниці їх фаз. Істотним є та обставина, що в процесі відбиття може відбуватися зміна фази хвилі. (Більш детально про властивості світлових стоячих хвиль див., напр., у [1, гл. V, § 23]).

6.1.11. Від яких факторів залежить контрастність інтерференційної картини? Якою величиною прийнято характеризувати контрастність інтерференційної картини?

Контрастність інтерференційної картини залежить від величини оптичної різниці ходу (Δ), розмірів джерела світла, ступеня монохроматичності випромінювання, відстані між джерелом та екраном.

Кількісно контрастність інтерференційної картини характеризується величиною видності (6.14): $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, де I_{\max} – інтенсивність світла у світлій смугі; I_{\min} – інтенсивність світла в темній смугі.

6.1.12. Чим визначається кількість смуг в інтерференційній картині? Порівняйте те випадки, коли джерело випромінює: біле світло; квазімонохроматичне світло, отримане за допомогою світлофільтра; монохроматичне світло, виділене із лінійчастого спектра газорозрядної лампи; лазерне світло.

Якщо вважати джерела точковими, то кількість m_{\max} інтерференційних смуг визначається ступенем монохроматичності джерела світла $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta_{\max}}{\lambda} \equiv \frac{L_{\text{к}}}{\lambda}$ (6.10) – (6.13). Для більш монохроматичного світла і для джерел з більшою довжиною когерентності отримують більшу кількість інтерференційних смуг. Для білого світла вдається отримати всього декілька смуг. Для променя лазера можна спостерігати інтерференційну картину, яка складається з більш ніж 10^8 смуг. Два промені, отримані з одного лазера, залишаються когерентними та інтерферують при різниці ходу Δ_{\max} , яка вимірюється кілометрами.

Кількість інтерференційних смуг на практиці буде значно меншою у випадку неточкового (протяжного) джерела світла: два промені навіть з достатньо високим ступенем монохроматичності, які вийшли з різних точок джерела, можуть виявитись некогерентними. У такому випадку кажуть про невиконання умов просторової когерентності для цих променів. Інтерференція тут не спостерігається, оскільки інтерференційні смуги від різних точок джерела приходять у точку спостереження з різницею оптичного ходу, більшою за радіус когерентності.

6.1.13. Експериментально спостерігається, що в деяких випадках при використанні монохроматичного світла, виділеного із лінійчастого спектра газорозрядної

лампи, інтерференційна картина має періодичні просторові погіршення контрасту (видності). Поясніть фізику цього явища та визначте найменший порядок інтерференції, за якого контраст (видність) інтерференційної картини буде найгіршою.

Періодичні просторові погіршення контрасту (видності) інтерференційної картини при використанні таких джерел світла пов'язані з тим, що монохроматичне світло від них містить лінію, яка складається з декількох (напр., двох) компонентів. Розподіл інтенсивності світла у фактично двох інтерференційних картинах, отриманих начебто від двох джерел світла з різними довжинами хвиль λ_1 та λ_2 (лінія випромінювання – дублет), показано на рис. 6.1.



Рис. 6.1. До запитання 6.1.13

Через залежність ширини інтерференційної смуги від λ в інтерференційних картинах спостерігається просторовий зсув однієї картини відносно другої, який поступово збільшується. У міру збільшення цього зсуву видність сумарної інтерференційної картини, що отримується внаслідок суперпозиції двох первинних картин, погіршується і за деякого порядку інтерференції m відбувається збіжність максимуму однієї інтерференційної картини з мінімумом іншої. Це місце на сумарній картині матиме найгіршу ("нульову") видність. На рис. 6.1 це місце відмічено вертикальною рисою. Формально умова збіжності максимуму однієї інтерференційної картини з мінімумом іншої записується як

$$m\lambda_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda_1. \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1 / 2.$$

Із цього випливає значення інтерференційного порядку, за якого відбувається погіршення чіткості інтерференційної картини, її "нульова" видність

$$m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda_{\text{сер}}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad \text{де} \quad \lambda_{\text{сер}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

6.1.14. У чому полягають особливості реєстрації світлової картини при спостереженні інтерференції світла?

Особливості спостереження інтерференції світла пов'язані з тим, що час реєстрації світлової картини будь-яким приймачем світла (оком, фотоелектронним помножувачем тощо) на багато порядків перевищує період світлових коливань. Тому завжди при спостереженні інтерференції фіксують усереднену в часі зміну розподілу густини потоку енергії світлових хвиль. Це можливо, якщо різниця фаз не зале-

жить від часу (тобто, коли частоти випромінювання та початкові фази протягом часу спостереження інтерференційної картини залишаються сталими). Отже, для спостереження інтерференції випромінювання має бути когерентним протягом часу, не меншого за час спостереження.

6.1.15. Виходячи із формули $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, дайте визначення, які два джерела світла називаються когерентними. Покажіть (доведіть), що при зміні в часі різниці фаз δ між двома хвилями, що додаються, інтерференція не спостерігається.

Інтенсивність I_p світла в точці спостереження P інтерференційної картини, яка утворюється від двох хвиль інтенсивністю I_1 та I_2 , як відомо, дорівнює $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, де δ – зсув фаз між хвилями. Оскільки приймачів світлової енергії, які б реєстрували світлову хвилю із частотою коливань $10^{14} - 10^{15}$ Гц, не існує, наведений вираз для I_p необхідно усереднити за час спостереження:

$$\langle I_p \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cdot \langle \cos \delta \rangle.$$

Якщо різниця фаз $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ змінюється в часі й протягом часу усереднення (спостереження) величина $\langle \cos \delta \rangle = 0$, то інтерференція не спостерігається. Тобто два джерела світла будуть когерентними в часі (будуть утворювати інтерференційну картину), якщо $\langle \cos \delta \rangle = \text{const} \neq 0$, тобто різниця фаз зберігає своє значення протягом всього часу усереднення.

6.1.16. Як пов'язані між собою довжина когерентності та час когерентності?

Якщо визначений час когерентності $\tau_k = 1/\Delta\nu$, який дорівнює тривалості хвильового цугу, то можна визначити і його довжину в просторі $L_k = c\tau_k = c/\Delta\nu$. Зауважимо, що довжина когерентності L_k , як і час когерентності τ_k , є мірою часової когерентності.

6.1.17. Як співвідносяться між собою довжина когерентності та довжина хвилі?

Довжина когерентності L_k і час когерентності τ_k пов'язані співвідношенням $L_k = c\tau_k$, де c – швидкість світла. Відомо, що $\tau_k = \frac{1}{\Delta\nu}$, тоді $L_k = \frac{c}{\Delta\nu}$.

Перейшовши через співвідношення $\nu = c/\lambda$ від шкали частот до шкали довжин хвиль і прийнявши, що $\Delta\nu = \left| \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \right|$, отримуємо довжину когерентності, виражену через довжину хвилі $L_k = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. Тут $\Delta\lambda$ – ширина спектра випромінювання. Як і $\Delta\nu$, величина $\Delta\lambda$ є мірою монохроматичності випромінювання.

6.1.18. *Усі наведені в попередніх відповідях характеристики когерентності стосувались її феноменологічного, описового аспекту. Які мікроскопічні механізми когерентності, що пов'язані з конкретними фізичними процесами, які відбуваються на атомному рівні, можна назвати? Що таке цуг хвиль? Чому кажуть, що довжина цугу хвиль дорівнює довжині когерентності? Розгляд проведіть на прикладі теплового джерела світла.*

Світло, що випромінюється тепловим джерелом, не може бути монохроматичним. Його можна розглядати як хаотичну послідовність окремих актів випромінювання синусоїдальних хвиль збудженими атомами. Водночас ізольований збуджений атом протягом деякого обмеженого часу випромінює цуг хвиль – хвилі, що зберігають сталими свої амплітуду і фазу. Цей час дорівнює тривалості одного акту випромінювання, який прийнято вважати часом когерентності τ_k . Він набагато менший від часу спостереження оком або фотоприймачем. (Мінімальний час між подіями, які око фіксує як окремі, $\sim 0,2$ с).

Протягом часу когерентності τ_k квазімонохроматична хвиля, що випромінюється точковим джерелом, зберігає незмінними свої амплітуду і фазу. За цей час хвиля встигає поширитись на відстань $c \cdot \tau_k$, що дорівнює довжині когерентності L_k . Оскільки цуги хвиль, що випромінюються одним і тим самим атомом у різні моменти часу, взаємно не корельовані, то інтерференція відбувається тільки при зустрічі хвиль (при повному або частковому їх перекритті), які утворені з одного цугу.

Окрім того, слід урахувувати, що одночасно випромінює весь ансамбль некорельованих атомів. Тому при накладанні світлових хвиль від різних елементарних джерел фазові співвідношення між світловими коливаннями змінюються випадково: хвилі – некогерентні, стійкої інтерференційної картини не виникає. Щоб усунути цей недолік теплових джерел світла, застосовують прийом, який полягає в поділі амплітуди хвилі або хвильового фронту навпіл і роботі з цими хвилями, які отримані таким способом, як з когерентними (з невеликою довжиною когерентності) хвилями (див. запитання 6.1.21). (Більш детально див. [15, § 4.2]).

6.1.19. *Визначте порядок довжини цугу хвиль для теплового джерела.*

Час когерентності τ_k для теплових (нелазерних) джерел за порядком величини дорівнює $10^{-9} - 10^{-10}$ с. Довжина цугу хвиль дорівнює довжині когерентності $L_k = c \tau_k \approx 3 - 30$ см. За сприятливих умов значення L_k може досягати величини ~ 1 м.

6.1.20. *Чим визначається час когерентності квазімонохроматичного точкового джерела?*

Час когерентності τ_k квазімонохроматичного точкового джерела визначається ступенем монохроматичності випромінювання, який характеризується спектральною шириною $\Delta\lambda$ лінії випромінювання. Механізми, що визначають величину $\Delta\lambda$, пов'язані з радіаційним згасанням, тепловим рухом атомів, який викликає ефект

Доплера, зіткненнями атомів між собою тощо. (Більш детально про механізми, які впливають на ширину спектральної лінії та згасання випромінювання див. у [1, § 158]).

6.1.21. Лампи розжарювання, як відомо, є джерелами немонохроматичного і некогерентного світла. Як при застосуванні немонохроматичних, некогерентних (не лазерних) джерел світла отримують інтерференційні картини?

Загальний принцип отримання інтерференційних картин від немонохроматичних, некогерентних (не лазерних) джерел світла полягає в тому, що хвилю, що випромінює одне джерело світла, (амплітуду або фронт хвилі) різними відомими способами поділяють на дві частини, а потім використовують ці два промені з невеликою довжиною когерентності для отримання інтерференції.

6.1.22. Які хвилі (навіть якщо вони когерентні) ніколи не можуть утворити інтерференційної картини?

Дві хвилі ніколи не інтерферують між собою, якщо вони лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах.

6.1.23. Зобразіть схему досліду Юнга для спостереження інтерференції. Знайдіть вираз для розподілу інтенсивності світла $I(x)$ по інтерференційній картині, якщо смуги напрямлені вздовж осі OY . Визначте ширину інтерференційної смуги.

Схему досліду Юнга зображено на рис. 6.2.

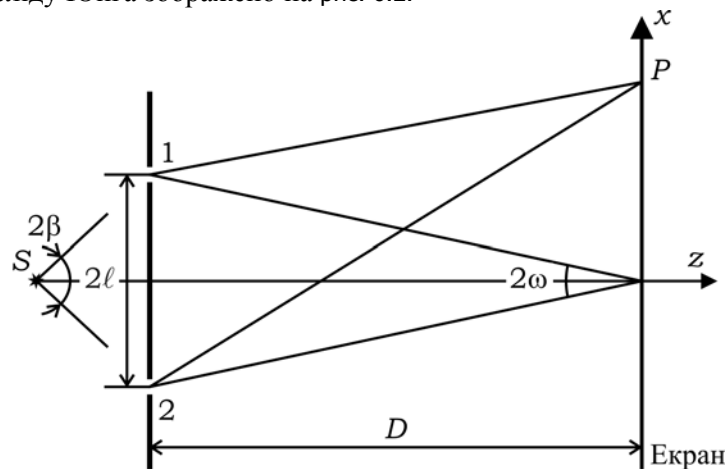


Рис. 6.2. Схема досліду Юнга

Будемо вважати, що отвори або щілини 1 та 2 є джерелами S_1 та S_2 когерентного випромінювання рівної інтенсивності I_0 (рис. 6.3). При інтерференції монохроматичних плоских хвиль від двох когерентних джерел на екрані спостерігаються інтерференційні смуги, ширина яких δh . Оптична різниця ходу між променями, що додаються в точці P , дорівнює Δ .

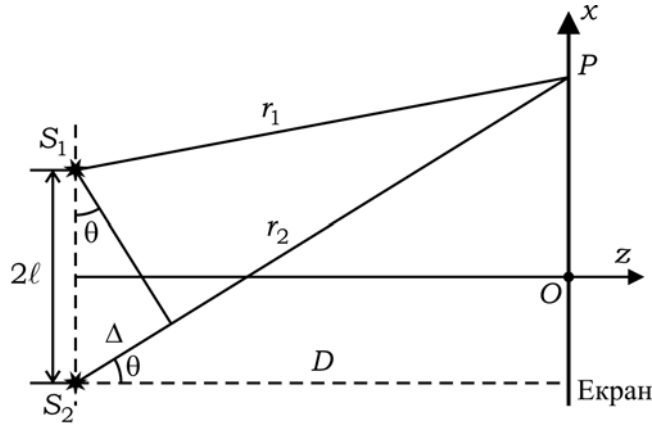


Рис. 6.3. До інтерференції двох монохроматичних хвиль, які випромінюються когерентними джерелами

Відстань від точки P спостереження до осі симетрії $OP = x$. Необхідно знайти розподіл інтенсивності $I(x)$ світла по інтерференційній картині вздовж осі OX . Якщо D – відстань від площини, у якій розташовані джерела, до екрана з інтерференційною картиною, і величина D набагато більша за відстань 2ℓ між джерелами ($D \gg 2\ell$), то з подібності трикутників S_2S_1K та S_2PO на рис. 6.3 випливає, що

$$\frac{\Delta}{2\ell} = \frac{x}{D} \Rightarrow \Delta = \frac{x}{D} 2\ell, \quad (6.15)$$

де $\Delta = (r_2 - r_1)$ – різниця ходу між променями, що виходять із джерел S_1 та S_2 . На екрані в точці спостереження P результуюча інтенсивність I_p описується формулою (6.1):

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

де $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз між хвилями, що додаються, у точці спостереження.

Якщо інтенсивності світла від джерел однакові ($I_1 = I_2 = I_0$), то їх напруженості дорівнюють $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kr_1)$ та $E_2 = E_0 \cos(\omega t - kr_2)$, відповідно. Напруженість результуючої хвилі в точці спостереження P дорівнює

$$E_p = E_1 + E_2 = 2E_0 \cdot \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{k(r_2 + r_1)}{2} \right), \quad (6.16)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Як бачимо з (6.16), амплітуда результуючого коливання $E_{0P} = 2E_0 \cdot \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = 2E_0 \cdot \cos \frac{k \cdot \Delta}{2}$, а інтенсивність світла в точці P з урахуванням тригонометричної формули $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ дорівнює

$$I_P \sim (E_{0P})^2 = 4E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{k \cdot \Delta}{2} = 2E_0^2 [1 + \cos(k \cdot \Delta)]. \quad (6.17)$$

Якщо в (6.17) урахувати (6.15), то

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi\ell}{\lambda D} x \right) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi\ell}{\lambda D} x \right) \right]. \quad (6.18)$$

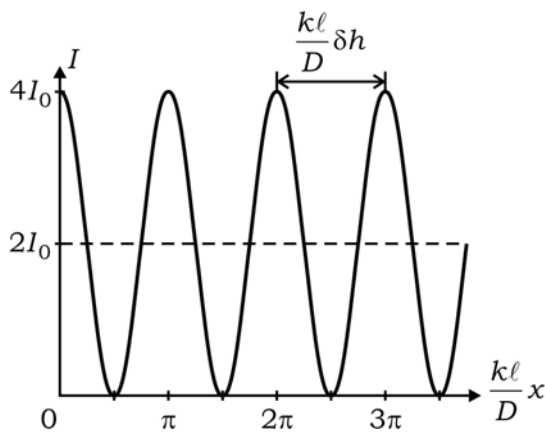


Рис. 6.4. Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині, яка отримана від інтерференції світла двох монохроматичних когерентних хвиль

залежно від величини $\frac{\pi \cdot 2\ell}{\lambda D} x$

Таким чином, зміна інтенсивності в інтерференційній картині, відбувається за законом "квадрата косинуса" (рис. 6.4). Фактично доведена формула (6.5). Як бачимо з (6.18), у максимумах інтенсивності інтерференційної картини в 4 рази перевищує інтенсивність інтерферуючих хвиль. У мінімумах інтенсивність дорівнює нулю. Середнє значення розподілу інтенсивності $2I_0$ на інтерференційній картині дорівнює сумі інтенсивностей інтерферуючих хвиль. За $x = 0$ (у центрі інтерференційної картини) спостерігається максимум.

Ширина інтерференційної смуги δh визначається як відстань між центрами сусідніх темних або світлих смуг інтерференційної картини. Із рис. 6.4 видно, що

$$\frac{k \cdot \ell}{D} \delta h = \pi \Rightarrow \delta h = \frac{\pi \cdot D}{k\ell} = \frac{D \cdot \lambda}{2\ell}. \quad (6.19)$$

Вираз (6.18) для розподілу інтенсивності в інтерференційній картині з урахуванням величини δh (6.19) можна записати як

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \left(\pi \frac{x}{\delta h} \right). \quad (6.20)$$

6.1.24. Доведіть, що видність V інтерференційної картини залежить від ступеня монохроматичності джерела світла, і ця залежність має вигляд $\sin c$ -функції

$$V(u) = \left| \frac{\sin u}{u} \right|.$$

Розглянемо точкове джерело квазімонохроматичного світла, лінія випромінювання якого характеризується спектральною шириною $2\Delta\omega$ і має контур, зображений на рис. 6.5, а. Замінімо таку наближену до реальної лінію випромінювання уявною лінією з прямокутним контуром, але з такою самою шириною $2\Delta\omega$ (рис. 6.5, б).

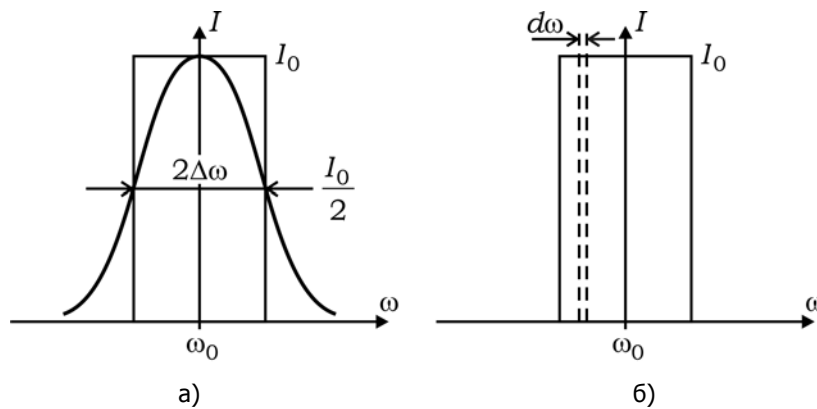


Рис. 6.5. Конттури спектральної лінії випромінювання

Інтенсивність джерела, яке має лінію випромінювання у вигляді прямокутника, у смузї частот $d\omega$ дорівнює

$$dI_0 = \frac{I_0}{2\Delta\omega_0} d\omega. \quad (6.21)$$

Якщо хвилю від такого джерела розділити на дві когерентні хвилі й додати їх, то можна отримати інтерференційну картину. Результуюча інтенсивність, отримана в результаті двопроменевої інтерференції, як відомо, описується виразом (6.1):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad \text{де різниця фаз} \quad \delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1). \quad (6.22)$$

Значення інтенсивності залежно від оптичної різниці ходу має вигляд (6.17): $I(\Delta) = 2I_0(1 + \cos k\Delta)$. Аналогічно випромінювання у смузї частот $d\omega$ буде характеризуватись результуючою інтенсивністю, що дорівнює

$$dI(\Delta) = 2 \cdot dI_0 (1 + \cos k\Delta). \quad (6.23)$$

(6.22) \rightarrow (6.23):

$$dI(\Delta) = \frac{2I_0}{2\Delta\omega} d\omega (1 + \cos k \cdot \Delta), \quad \text{де хвильове число} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.24)$$

Урахувавши, що $k = \frac{\omega}{c}$, а $\frac{\Delta}{c} = \tau$ (τ – відносний час затримки хвиль, що інтерферують), перепишемо формулу (6.24) у вигляді

$$dI(\Delta) = \frac{2I_0}{2\Delta\omega} \left(1 + \cos \frac{\omega}{c} \cdot \Delta \right) d\omega = \frac{2I_0}{2\Delta\omega} (1 + \cos \omega \cdot \tau) d\omega. \quad (6.25)$$

Після інтегрування (6.25) отримуємо

$$\begin{aligned} I &= \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \frac{2I_0}{2\Delta\omega} (1 + \cos \omega \cdot \tau) d\omega = 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega} \frac{1}{\tau} \sin \omega \tau \Big|_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} = \\ &= 2I_0 + \frac{I_0}{\tau \cdot \Delta\omega} [\sin(\omega_0 + \Delta\omega)\tau - \sin(\omega_0 - \Delta\omega)\tau] = \\ &= 2I_0 \left(1 + \frac{2}{2\tau \cdot \Delta\omega} \sin(\Delta\omega \cdot \tau) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \right) = 2I_0 \left(1 + \frac{\sin(\Delta\omega \cdot \tau)}{\Delta\omega \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \right) = \\ &= 2I_0 \left(1 + \frac{\sin u}{u} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \right), \quad \text{де } u = \Delta\omega \cdot \tau = \frac{\Delta}{c} \cdot \Delta\omega. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано залежність інтенсивності світла в інтерференційній картині від ширини лінії випромінювання $2\Delta\omega$ і різниці ходу Δ . Аналізуючи цю залежність, бачимо що

$$I_{\max} = 2I_0 \left(1 + \frac{\sin u}{u} \right) \quad \text{та} \quad I_{\min} = 2I_0 \left(1 - \frac{\sin u}{u} \right). \quad (6.26)$$

Видність інтерференційної картини в цьому випадку дорівнює

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{\sin u}{u} \right|. \quad (6.27)$$

Нагадаємо, що відношення $\frac{\sin u}{u} = \text{sinc } u$. Графік залежності модуля sinc -функції від аргументу Δ представлений на рис. 6.6.

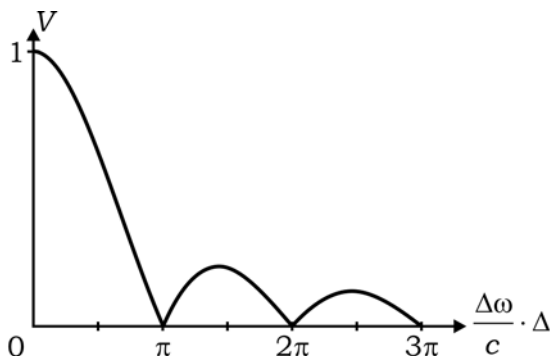


Рис. 6.6. Видність інтерференційної картини у випадку використання квазімонохроматичного точкового джерела як функція величини $\frac{\Delta\omega}{c} \cdot \Delta$

Перше зникнення інтерференційної картини виникає, якщо $\frac{\Delta}{c} \cdot \Delta\omega = \pi$. Для оптичної різниці ходу це відбувається за $\Delta = \frac{\pi c}{\Delta\omega}$. Отримане значення оптичної різниці ходу

дає його максимальну величину, яка дорівнює довжині когерентності $\Delta_{\max} = L_k = \frac{\pi c}{\Delta\omega}$.

Як бачимо $L_k \sim \frac{1}{\Delta\omega}$. Такий висновок має принципове фізичне значення.

6.1.25. Як мають співвідноситись відстань $2l$ між отворами в досліді Юнга та апертури інтерференції – кута 2ω , під яким отвори видно з точки перетину осі симетрії з екраном (рис. 6.2), щоб виконувалась умова спостереження інтерференційної картини? Оцініть, як впливає зміна відстані між отворами в екрані у досліді Юнга на видність інтерференційної картини.

Можна показати, що видність (6.14) V інтерференційної картини залежить від відстані між отворами в екрані у досліді Юнга $V(u) = \left| \frac{\sin u}{u} \right|$, де $u = \pi \frac{2l}{\delta h}$ ($2l$ – відстань між отворами в екрані; δh – ширина смуги інтерференційної картини). Графік цієї залежності представлений на рис. 6.7.

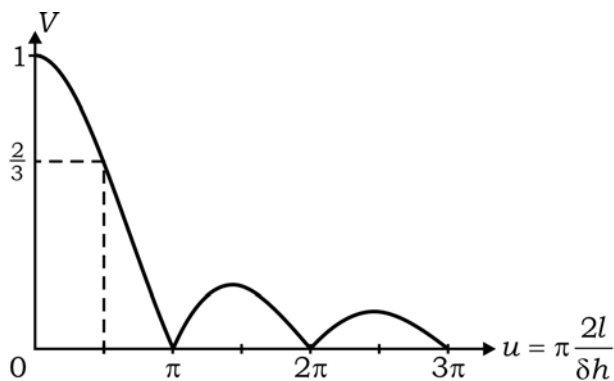


Рис. 6.7. Залежність відності інтерференційної картини від параметра $u = \pi \frac{2l}{\delta h}$ у досліді Юнга

Перше розмиття ($V = 0$) інтерференційної картини настає, коли виконується умова $u = \pi \Rightarrow \pi \frac{2l}{\delta h} = \pi \Rightarrow 2l = \delta h$. Таким чином, перше розмиття інтерференційної картини в досліді Юнга відбувається за виконання умови: ширина δh інтерференційної смуги стає рівною відстані між отворами в екрані.

За $2l = \frac{\delta h}{2}$ величина відності $V = \frac{2}{3}$. Інтерференційна картина вважається контрастною, якщо $V > \frac{2}{3}$. Це реалізується за виконання умови

$$2l < \frac{\delta h}{2}. \quad (6.28)$$

Це означає, що для впевненого спостереження інтерференційної картини необхідно, щоб відстань $2l$ між отворами була не більша за половину ширини інтерференційної смуги.

Кутова відстань між отворами (апертура інтерференції) на рис. 6.2 з урахуванням малих кутів визначається як $2\omega \approx \frac{2l}{D}$.

Відомо (див. (6.19)), що ширина інтерференційної смуги дорівнює $\delta h = \frac{D \cdot \lambda}{2l} \approx \frac{\lambda}{2\omega}$. Якщо (6.19) → (6.28), то умова впевненого спостереження інтерференційної картини набуває вигляду

$$2l < \frac{\lambda}{2\omega \cdot 2} \Rightarrow 2l \cdot 2\omega < \frac{\lambda}{2}. \quad (6.29)$$

Таким чином, добуток лінійної та кутової відстаней між отворами в досліді Юнга не має перевищувати величини $\lambda/2$. Вважається, що у випадку, якщо нерівність (6.22) не виконується, видність інтерференційної картини буде недостатньою для того, щоб впевнено її реєструвати.

Висновки з (6.29):

- 1) чим менше відстань D між екранами в досліді Юнга, тим меншою має бути відстань $2l$ між отворами в екрані;
- 2) чим менша апертура інтерференції 2ω , тим більша припустима відстань $2l$ між отворами (щілинами) у досліді Юнга;
- 3) обираючи в досліді Юнга світло з більшою довжиною хвилі λ , можна збільшувати і відстань між отворами в екрані.

6.1.26. *Що зміниться в інтерференційній картині, яка утворюється в досліді Юнга при інтерференції двох когерентних хвиль з довжиною хвилі λ , якщо від випадку, коли ширини щілин в екрані однакові (амплітуди E_{01} та E_{02} коливань від щілин рівні), перейти до випадку, коли ширини щілин різні (амплітуди коливань від них різні $E_{01} \neq E_{02}$)? Яким виразом буде описуватись розподіл інтенсивності світла $I(x)$ у цьому випадку?*

Зміни в інтерференційній картині будуть проявлятися у тому, що від видності $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2E_{01}E_{02}}{E_{01}^2 + E_{02}^2}$, яка за $E_{01} = E_{02}$ дорівнює $V = 1$, слід перейти за $E_{01} \neq E_{02}$ до значення видності $V < 1$. Вираз, який описує розподіл інтенсивності світла в цьому випадку має вигляд

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2E_{01}E_{02} \cos\left(\frac{2\pi}{\delta h}x\right). \quad (6.30)$$

Графік $I(x)$ цієї функції зображений на рис. 6.8.

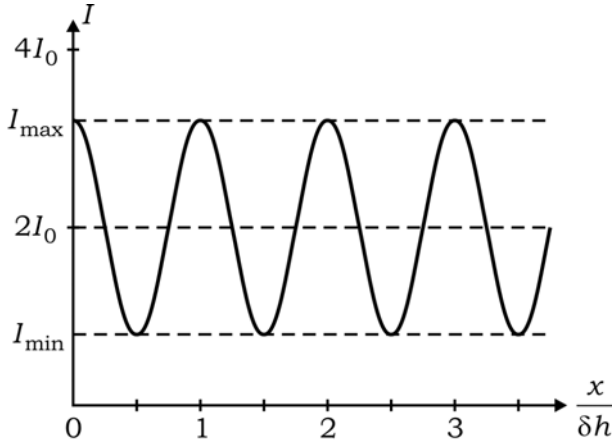


Рис. 6.8. До запитання 6.1.25

6.1.27. У схемі Юнга спостерігають інтерференційну картину від двох щілин. Ширину однієї із щілин збільшили вдвічі. Як при цьому зміниться картина на екрані?

Припустимо, що у схемі Юнга (рис. 6.2) щілини залишаються достатньо вузькими, щоб виконувались умови просторової когерентності. Очевидно, що інтенсивності світла, яке проходить через кожен із щілин, пропорційні до їх площ. Тоді інтенсивності від кожної зі щілин у випадку, коли щілини однакові, також однакові $I_1 = I_2 = I_0$. У другому випадку, коли ширини щілин різні, ширина другої щілини в 2 рази більше за ширину першої щілини: інтенсивність світла від першої щілини $I_1 = I_0$, від другої щілини – $I_2 = 2I_0$. Розподіл інтенсивності на екрані згідно з (6.23) у випадку, коли щілини однакові, мав вигляд $I_1 = 2I_0(1 + \cos \delta)$, після збільшення площі однієї щілини вдвічі розподіл інтенсивності набуває вигляду $I_2 = I_0(3 + 2\sqrt{2} \cos \delta)$.

Картина стає інтенсивнішою, але внаслідок зростання інтенсивності в мінімумах падає видність V інтерференційної картини: якщо в першому випадку $V_1 = \frac{I_{1\max} - I_{1\min}}{I_{1\max} + I_{1\min}} = 1$, то в другому випадку $V_2 = \frac{I_{2\max} - I_{2\min}}{I_{2\max} + I_{2\min}} \approx 0,9$. Дійсно, $I_{2\max} = 2I_0(3 + 2\sqrt{2})$ та $I_{2\min} = 2I_0(3 - 2\sqrt{2})$ і, якщо продовжити розрахунки, то можна переконатись, що $V_2 \approx 0,9$. Зробіть це.

6.1.28. Зобразіть залежність $I(x)$ розподілу інтенсивності в інтерференційній картині від координати вздовж осі, яка перпендикулярна до інтерференційних смуг для трьох значень видності $V = 1$ (а); $V = 0,5$ (б); $V = 0$ (в).

Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині у випадку когерентного світла ($V = 1$) показаний на рис. 6.9, а.

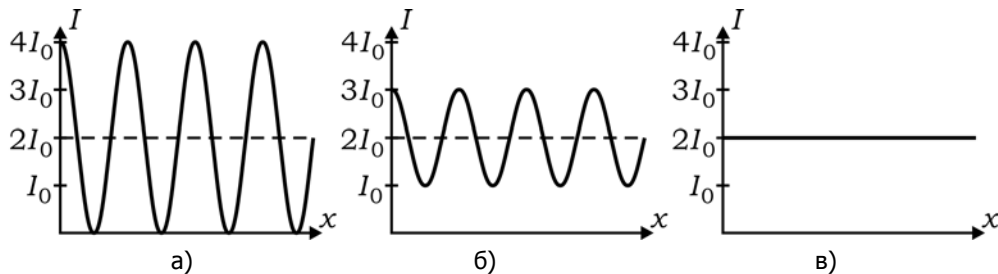


Рис. 6.9. До запитання 6.1.27

Випадки для частково когерентного ($V = 0,5$) і некогерентного світла ($V = 0$) показані на рис. 6.9, б, в, відповідно. Для випадків, зображених на рис. 6.9, а та б, розподіл інтенсивності $I(x)$ відбувається за законом (6.20) $I(x) \sim \cos^2 x$.

6.1.29. Порівняйте, як розподіляються інтенсивності світла $I(x)$ інтерференційної картини, яка отримана в досліді Юнга, для точкового джерела у випадку: а) монохроматичних хвиль; б) квазімонохроматичних хвиль з відомою шириною $2\Delta\omega$ "прямокутного" спектра випромінювання. Інтенсивність світла інтерферуючих пучків однакова.

Як відомо (див. запитання 6.1.23), у випадку складання когерентних монохроматичних хвиль від точкового джерела видність V інтерференційної картини вздовж осі, що перпендикулярна до напрямку смуг, є величиною сталою. Тобто для точкового джерела величина V не залежить від різниці ходу Δ .

Видність інтерференційної картини у випадку квазімонохроматичного точкового джерела як функції оптичної різниці ходу Δ і ширини $\Delta\omega$ спектра (див. запитання 6.1.24) має вигляд

$$V(\Delta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{c}\Delta\right)}{\frac{\Delta\omega}{c}\Delta} \right|, \quad (6.31)$$

де c – швидкість світла. Графік цієї функції зображений на рис. 6.6.

Величина максимальної оптичної різниці ходу $\Delta_{\max} = L_{\kappa} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \sqrt{a^2 + b^2}$. Розподіл інтенсивності світла $I(x)$ для квазімонохроматичного точкового джерела за аналогією з (6.17) описується виразом

$$I(x) = 2I_0 \cdot \left(1 + V(x) \cdot \cos \frac{2\pi}{\delta h} x \right),$$

де $V(x)$ – видність інтерференційної картини

$$V(x) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{c}x\right)}{\frac{\Delta\omega}{c}x} \right|;$$

δh – ширина смуги в інтерференційній картині. Графік цієї функції зображений на рис. 6.10. Як видно з нього, розподіл контрастності інтерференційної картини по екрану нерівномірний. Найбільша контрастність досягається в центрі інтерференційної картини.

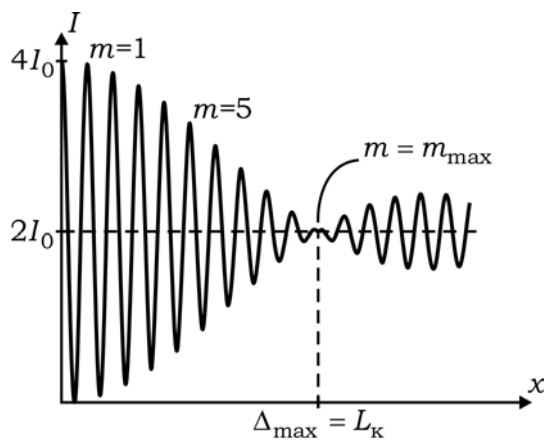


Рис. 6.10. Розподіл інтенсивності світла по інтерференційній картині для точкового джерела квазімонохроматичного світла

6.1.30. Порівняйте, чим відрізняються інтерференційні картини, які отримані при використанні: а) точкового і б) реального (протяжного) джерел монохроматичного випромінювання.

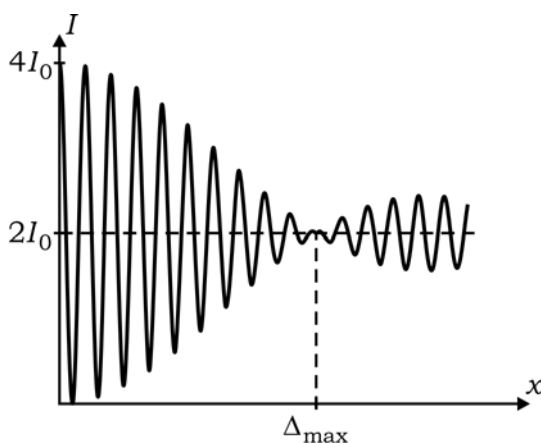


Рис. 6.11. Розподіл інтенсивності світла по інтерференційній картині для реального (протяжного) джерела монохроматичного світла

Для монохроматичного реального (протяжного) джерела розподіл інтенсивності $I(x)$ по інтерференційній картині такий, як на рис. 6.11. На відміну від випадку, коли використовувалось точкове джерело (рис. 6.10), у даному випадку в максимумах інтерференційної картини інтенсивність зменшується, а в мінімумах – збільшується.

Порівняння якісних залежностей контрастності інтерференційних картин від точкового (1) і протяжного (2) джерел монохроматичного світла (рис. 6.12) показує, що для протяжного джерела зменшуються видність інтерференційної картини. Це пов'язане із частковою просторовою когерентністю випромінювання від протяжного джерела.

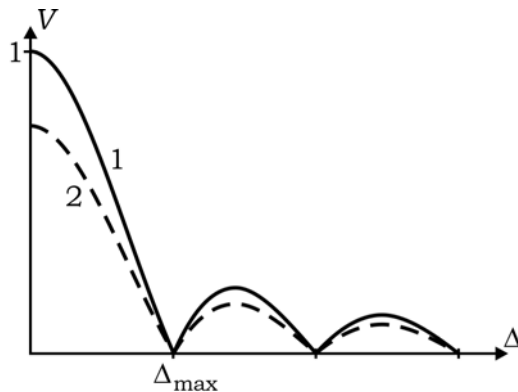


Рис. 6.12. Видність інтерференційних картин для точкового (1) і протяжного (2) джерел монохроматичного світла

6.1.31. За яким законом відбувається розподіл інтенсивності світла $I(x)$ в інтерференційній картині при складанні хвиль від монохроматичного протяжного джерела в досліді Юнга? Протяжність (ширина) джерела дорівнює $2b$, довжина хвилі світла λ .

На рис. 6.13 зображена схема інтерферометра Юнга з протяжним монохроматичним джерелом світла, розмір якого дорівнює $2b$. Джерело освітлює екран із щілинами (отворами), який розташований на відстані R_0 від джерела. Відстань між щілинами дорівнює 2ℓ . Площина спостереження інтерференційної картини (екран) розташований на відстані D від екрана з отворами. Позначимо через I_0 інтенсивність світла від одиниці довжини протяжного джерела. Можна довести, що розподіл інтенсивності світла $I(x)$ у цьому випадку має вигляд (6.20):

$$I(x) = 2I_0 \cdot \left(1 + V(b) \cdot \cos \frac{2\pi}{\delta h} x \right), \text{ де}$$

$$V(b) = \left| \frac{\sin \left(\frac{2\pi b}{\delta h} \right)}{\frac{2\pi b}{\delta h}} \right|$$

– видність інтерференційної картини; δh – ширина інтерференційної смуги. Як бачимо, видність інтерференційної картини в цьому випадку є величиною, що залежить, зокрема, від протяжності (ширини) $2b$ монохроматичного джерела.

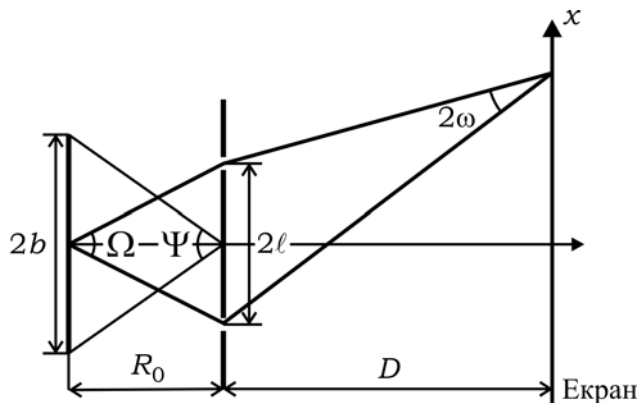


Рис. 6.13. Схема інтерферометра Юнга з протяжним монохроматичним джерелом світла (до запитання 6.1.31)

Існує величина $2b^*$ – критична протяжність (ширина) монохроматичного джерела в досліді Юнга, за якої виникає перше зникнення інтерференційної картини. Екран при цьому буде рівномірно засвіченим світлом з інтенсивністю $2I_0$. Критичний розмір $2b^*$ джерела визначається з умови рівності аргументу sinc -функції величині π : $\frac{2\pi b^*}{\delta h} = \pi$. Таким чином, інтерференція спостерігається за умови, що розмір (довжина) джерела $2b < 2b^* = \delta h$. Зазвичай вважають, що інтерференційна картина спостерігається з достатньою видністю ($V \geq 2/3$) за виконання умови

$$2b \leq 2b^* = \frac{\delta h}{2}. \quad (6.32)$$

Як бачимо, для збільшення видності інтерференційної картини за фіксованого розміру джерела $2b_0$ необхідно збільшувати його критичний розмір $2b^*$: віддаляти джерело від щілин (збільшувати R_0) і зменшувати відстань $2b$ між щілинами. Можна також рекомендувати для збільшення видності працювати з випромінюванням із більшою довжиною хвилі λ .

6.1.32. Яке джерело в досліді Юнга можна вважати точковим? Від яких параметрів оптичної системи цей критерій залежить?

Часто на це запитання дають таку відповідь: точковим джерелом вважається таке джерело, розмір якого набагато менший від відстані до екрана ($2b \ll R_0$). Така відповідь частково правильна, але не повна, у ній якісний критерій переважає над кількісною оцінкою. Покажемо це.

Розгляд в запитанні 6.1.31 умов створення інтерференційної картини показав, що вона зникає ($V = 0$) за виконання умови $\frac{2b^* \cdot 2\ell}{R_0} = \lambda$, де $2b^*$ – критичний розмір джерела (ширина щілини); 2ℓ – відстань між щілинами; R_0 – відстань від джерела до отворів.

Таким чином, інтерференція можлива за виконання умови

$$\frac{2b \cdot 2\ell}{R_0} < \lambda. \quad (6.33)$$

Ця нерівність фактично дає відповідь на запитання, наскільки великим може бути "точкове джерело", щоб за його допомогою спостерігати інтерференцію.

Реальне джерело можна вважати точковим, якщо виконується умова $\frac{2b \cdot 2\ell}{R_0} \ll \lambda$.

Як бачимо, критерієм точкового джерела є нерівність

$$2b \ll \frac{\lambda \cdot R_0}{2\ell}. \quad (6.34)$$

Критерій точкового джерела, який інколи називають умовою когерентності, легше запам'ятати у вигляді формули

$$2\ell \cdot 2b \ll R_0 \cdot \lambda, \quad (6.35)$$

тобто добуток двох поперечних довжин 2ℓ і $2b$ має бути малим порівняно з добутком двох поздовжніх довжин R_0 та λ .

6.1.33. У схемі Юнга монохроматичне неточкове джерело S має вигляд щілини шириною $2b$ в екрані E_1 (рис. 6.14). Відстань між щілинами, зробленими в екрані E_2 , становить 2ℓ . За яких умов на екрані E_3 ще спостерігається інтерференційна картина?

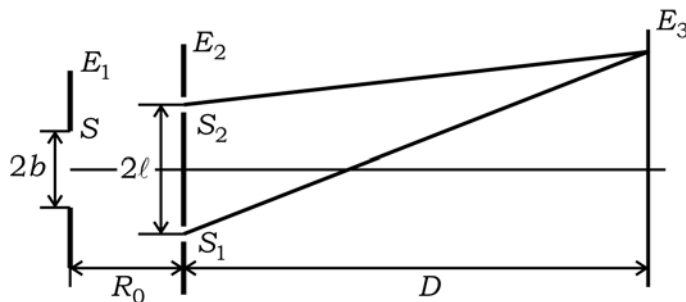


Рис. 6.14. До запитання 6.1.33

У розглянутому випадку (рис. 6.14) умови спостереження інтерференції на екрані E_3 залежать не тільки від параметрів оптичної схеми для спостереження інтерференції – відстані між екранами E_2 та E_3 , але й від того, чи будуть когерентними джерела S_1 і S_2 . Якщо щілина S нескінченно вузька, то до щілин S_1 і S_2 доходить одночасно циліндрична хвиля з визначеною фазою δ . Саме тому ці щілини можуть

розглядатися як такі, з яких виходять просторово когерентні хвилі. Якщо ж вхідна щілина S має певну ширину $2b$, то від крайніх точок цієї щілини до S_1 (як і до S_2) світло приходить з різними фазами. Коли запізнення по фазі досягає значення π , середнє значення сумарної амплітуди світла, яке прийшло від всіх ділянок вхідної щілини S , стає рівним нулю. Таке джерело перестає бути когерентним: випромінювання від нього стає просторово не когерентним.

Для проведення підрахунків і визначення умов, коли різниця фаз δ залишається менше π , а різниця ходу $\Delta \leq \lambda / 2$, розглянемо рис. 6.15.

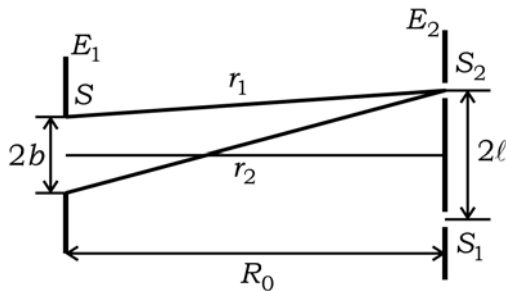


Рис. 6.15. Врахування залежності когерентності променів від розмірів неточкового джерела. До запитання 6.1.33

Відстані від крайніх точок джерела S до щілини S_1 в екрані E_2 є r_1 та r_2 , відповідно. Ці відстані пов'язані між собою співвідношенням

$$r_2 = r_1 + \Delta. \quad (6.36)$$

З іншого боку (рис. 6.15), величини $r_2^2 = R_0^2 + (\ell + b)^2$ та $r_1^2 = R_0^2 + (\ell - b)^2$, тоді $r_2^2 - r_1^2 = 2\ell \cdot 2b$. З урахуванням (6.36) маємо $r_2^2 - r_1^2 = (r_1 + \Delta)^2 - r_1^2 = 2r_1\Delta + \Delta^2$. Таким чином, $2r_1\Delta + \Delta^2 = 2\ell \cdot 2b$. Знехтувавши Δ^2 , як набагато меншою від першого доданка величиною, прийнявши $r_1 \approx R_0$ і врахувавши, що $\Delta < \lambda$ (див. запитання 6.1.37), отримуємо

$$b < \frac{R_0 \cdot \lambda}{\ell}. \quad (6.37)$$

Отриманий важливий результат, проаналізувати який доручається вам. Лише зауважимо, що для забезпечення достатньої світлосили оптичної системи, у реальних установках ширину щілини b намагаються збільшити. Тому R_0 намагаються зробити ~ 1 м, а $\ell \sim 1$ мм.

6.1.34. У чому полягають особливості інтерференції від двох когерентних джерел (напр., від двох щілин у досліді Юнга) у випадку, коли для відстані $2b$ між ними виконується умова $2b < \lambda / 2$ (λ – довжина хвилі)?

У цьому випадку не можна знайти точок, у яких інтенсивність світла в інтерференційній картині дорівнювала б нулю. Дійсно, якщо спробувати знайти для різниці ходу між двома променями (рис. 6.3) умову мінімуму інтенсивності $\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$,

то можна побачити, що навіть мінімальна різниця ходу, яка відповідає значенню $m = 0$ і дорівнює $\Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2}$, за умови $2l < \lambda / 2$ досягнута бути не може. Тим більше, не можуть бути виконані умови мінімумів для $m = 1, 2, 3, \dots$, величина $\Delta = r_2 - r_1$ завжди менша від величини $2l$, тобто і від $\frac{\lambda}{2}$. Ніде не виконується умова обернення в нуль інтенсивності результуючих коливань $I_p \neq 0$. Водночас умова максимумів $\Delta = m\lambda$ за $m = 0$ реалізується для всіх точок, які розташовані на осі z (рис. 6.3). Це означає, що в усіх точках на цій осі інтенсивність досягає величини $I_p = 4I_0$.

Таким чином, начебто не виконується компенсація мінімумів та максимумів і ставиться під сумнів закон збереження енергії. Дійсно, розв'язання відповідної задачі (див., напр., [13], С. 204) показує, що, коли відстань між когерентними джерелами $2b < \lambda / 2$, потужність їх сумісного (когерентного) випромінювання не дорівнює сумі потужностей випромінювання цих джерел окремо, коли їх випромінювання некогерентне. Джерела в цьому випадку впливають одне на одне, їх випромінювання є колективним. Коли відстань між джерелами $2b \gg \lambda / 2$, їх взаємний вплив нехтовно малий. Проте це не вказує на порушення закону збереження енергії. Справді, відбувається збільшення потужності випромінювання від пари когерентних джерел завдяки їх взаємодії, яка здійснюється через поле випромінювання в результаті інтерференції. Енергія ця береться із запасів, з яких живляться ці джерела. Якщо ці запаси обмежені і за своїми внутрішніми можливостями джерела не в змозі збільшити потужність випромінювання, то джерела вичерпують свій ресурс за більш короткий термін або повна інтенсивність інтерференційної картини відповідним чином зменшується.

Випадок інтерференції від двох джерел, коли відстані b між ними $2b < \lambda / 2$ легко реалізувати з радіохвилями. Устаткування з такими властивостями дозволяє поліпшити випромінюючі характеристики антени і сконцентрувати максимум випромінювання вздовж визначених напрямків. Це підтверджується при дослідженні та в роботі т. зв. фазованих антенних ґраток. (Більш детально про уявні парадокси при інтерференції хвиль (див., напр., у [1], гл. IV, § 19).

6.1.35. *За якого кута сходження променів (Ω) у досліді Юнга при використанні віддаленого протяжного джерела ще можна спостерігати інтерференційну картину? (Кут сходження променів Ω – кут, під яким у досліді Юнга з точки джерела, яка розташована на осі симетрії, видно отвори в екрані, рис. 6.13).*

Нехай (рис. 6.13) протяжне монохроматичне джерело має фіксований лінійний розмір $2b$. Відстань від екрана з отворами до джерела становить R_0 . Умовою спостереження інтерференції є виконання нерівності (6.32):

$$2b < \frac{\lambda R_0}{2\ell} = \frac{\lambda}{\Omega} \Rightarrow \Omega < \frac{\lambda}{2b}.$$

Таким чином, існує максимальний кут сходження променів від протяжного джерела $\Omega_{\max} = \frac{\lambda}{2b}$, який характеризується тим, що інтерференція фіксується, коли $\Omega \leq \Omega_{\max}$.

З іншого боку, з рис. 6.13 видно, що $\Omega = \frac{2\ell}{R_0}$, тобто, якщо існує Ω_{\max} , то можна ввести максимальну відстань між щілинами $2\ell_{\max} = \Omega_{\max} \cdot R_0$, за якої ще може спостерігатись інтерференційна картина. Величину $2\ell_{\max}/2 = r_k$ називають *радіусом просторової когерентності* (або *радіусом когерентності*), який для схеми досліду Юнга (рис. 6.13) визначається за формулою

$$r_k = \frac{2\ell_{\max}}{2} = \frac{\Omega_{\max} \cdot R_0}{2} = \frac{\lambda R_0}{4b} = \frac{\lambda}{2\Psi}, \quad (6.38)$$

де Ψ – кутовий розмір джерела відносно місця, у якому визначається когерентність хвиль (у схемі Юнга це кут, під яким джерело видно з місця розташування отворів).

Таким чином, радіус когерентності r_k прямо пропорційний довжині хвилі випромінювання й обернено пропорційний кутовому розміру джерела.

Інколи, окрім радіуса когерентності, вводять поняття *об'єм когерентності*:

$$V_k \sim r_k^3 \Rightarrow V_k \sim \frac{\lambda^3}{\Psi^3}.$$

6.1.36. На екран з двома вузькими паралельними щілинами падають промені безпосередньо від Сонця. За якої відстані d між щілинами може спостерігатись інтерференційна картина? Кутовий розмір Сонця $\Psi \approx 0,005$ рад.

Як відомо (6.35), радіус когерентності для інтерференції за схемою Юнга $r_k = \frac{\lambda R_0}{4b} = \frac{\lambda}{2\Psi}$, де R_0 – відстань від джерела світла до екрана з отворами; $2b$ – характерний розмір джерела; λ – довжина світлової хвилі. Кутовий розмір джерела $\Psi = \frac{2b}{R_0}$.

Таким чином, максимальна відстань між щілинами, за якої може спостерігатись інтерференційна картина від Сонця, дорівнює

$$d_{\max} = 2r_k = \frac{\lambda}{\Psi} \approx \frac{0,5 \text{ мкм}}{0,005} = 0,1 \text{ мм}.$$

Витримати відстань між отворами такої величини практично важко, і навіть неможливо.

6.1.37. Яку фізичну інформацію містить величина радіуса просторової когерентності?

Радіус когерентності вводився нами (6.38) для інтерференції за схемою Юнга. Зробимо це, не прив'язуючись до конкретної схеми спостереження інтерференції.

Для знаходження параметрів просторової когерентності світлового пучка розглянемо узагальнену схему двопроменевої інтерференції світла від протяжного джерела (рис. 6.16).

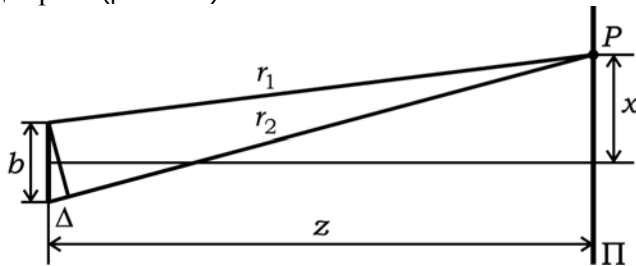


Рис. 6.16. До запитання 6.1.37

Світло від монохроматичного джерела, діаметр якого $2b$, падає на екран Π , розташований на відстані z від джерела. Будемо вважати, що $2b \ll z$, як це буває в реальних схемах. Яку частину екрана Π можна вважати освітленою когерентним світлом?

У довільну точку P екрана Π , яка розташована від осі на відстані x , приходять світло від усіх точок джерела. Якщо різниця фаз між світлом від крайніх точок джерела менша π , у точці P можна отримати усереднене в часі значення амплітуди $\langle E \rangle > 0$. У протилежному випадку середнє значення амплітуди $\langle E \rangle = 0$, тому ніякої інтерференційної картини спостерігатись не буде. Спробуємо оцінити максимальну відстань від центра екрана до точки P , коли пучок світла ще можна вважати когерентним. Із рис. 6.16 видно, що

$$\begin{aligned} r_2^2 &= z^2 + (x+b)^2 \\ r_1^2 &= z^2 + (x-b)^2 \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{z \cdot \Delta}{2b}, \text{ якщо } r_2 - r_1 = \Delta; \quad r_2 + r_1 = 2z.$$

Щоб зберігалась просторова когерентність пучка, необхідне виконання умови $\langle E \rangle \neq 0$, що можливе за виконання умов для зсуву фаз δ між хвилями та їх оптичної різниці ходу Δ : $\delta < \pi$ та $\Delta < \lambda$.

Максимальне значення величини x на екрані, за якого ще спостерігається інтерференційна картина, що пов'язане з розміром джерела світла ($2b$), відстанню z від джерела до екрана та довжиною хвилі світла λ співвідношенням

$$r_k = \frac{z \cdot \lambda}{2b}, \tag{6.39}$$

називають *радіусом когерентності*. Наприклад, для зеленого світла з довжиною хвилі $\lambda = 500 \text{ нм}$, за ширини щілини, що відіграє роль джерела світла, $2b = 0,1 \text{ мм}$ і

відстані від джерела до екрана, на якому спостерігають інтерференцію $z = 2\text{ м}$, радіус когерентності $r_k = 1\text{ мм}$.

Таким чином, радіус когерентності, що характеризує просторову когерентність, визначається (6.35) кутовим розміром джерела світла, на відміну від довжини когерентності, яка характеризує часову когерентність і залежить від ширини $\Delta\omega$ спектральної смуги випромінювання. Проте стани і часової, і просторової когерентностей однозначно визначають видність (контрастність) інтерференційної картини.

6.1.38. Як можна виміряти величини радіуса когерентності та довжини когерентності?

Величину радіуса когерентності монохроматичного світла, яке випромінює протяжне джерело, можна виміряти, користуючись схемою досліду Юнга. Максимальна відстань між щілинами $2\ell_{\text{max}}$, за якої, використовуючи протяжне джерело світла, ще можна спостерігати інтерференційну картину, буде пов'язана з радіусом когерентності r_k співвідношенням $2\ell_{\text{max}} = 2r_k \Rightarrow r_k = \ell_{\text{max}}/2$.

Величину довжини когерентності квазімонохроматичного світла, яке випромінює точкове джерело, можна виміряти, користуючись інтерферометром Майкельсона (рис. 6.17).

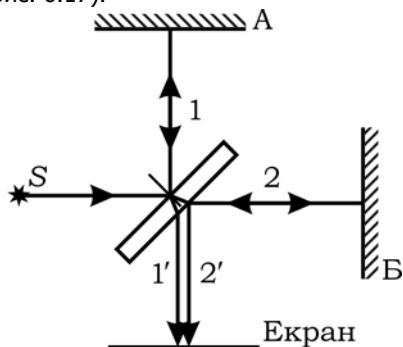


Рис. 6.17. Інтерферометр Майкельсона

В інтерферометрі Майкельсона спочатку виставляють оптичні довжини плечей 1 та 2 однаковими $\ell_1 = \ell_2$. При цьому видність інтерференційної картини максимальна і становить $V = 1$. Потім починають рухати одним із дзеркал (напр., дзеркалом Б) незалежно в який бік. При русі дзеркала Б видність інтерференційної картини погіршується і за деякого значення довжини плеча ℓ_2 інтерференційна картина зникає. Це відбувається, коли $\Delta = 2(\ell_1 - \ell_2)n = L_k$. Так вимірюють величину L_k .

Можна піти далі і за формулою $L_k = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, знаючи робочу довжину світла λ , знайти ширину лінії випромінювання $\Delta\lambda$.

6.1.39. В інтерференційній схемі з просторовим поділом світлового пучка джерелом є лампа розжарювання і світлофільтр з максимумом пропускання на довжині хвилі λ та шириною смуги пропускання $\Delta\lambda$. Яку максимальну кількість ін-

терференційних смуг можна зафіксувати в такій схемі, якщо просторова когерентність висока?

Відомо, що ширина інтерференційної смуги залежить від довжини хвилі. Якщо часова когерентність джерела часткова, то інтерференційні смуги для різних довжин хвиль накладаються одна на одну. На рис. 6.18 показано розподіл інтенсивності для двох хвиль з близькими значеннями довжин λ і $\lambda + \Delta\lambda$, що ілюструє спадання видимості картини при накладанні двох інтерференційних картин (див. запитання 6.1.13).

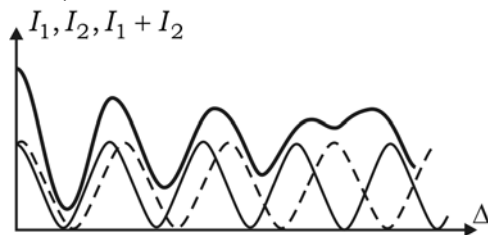


Рис. 6.18. До запитання 6.1.39

Використане джерело має неперервний набір хвиль від λ до $\lambda + \Delta\lambda$. У цьому випадку інтерференційна картина зникає, коли m -й максимум для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ збігається з $(m + 1)$ максимумом для довжини хвилі λ . Тому максимальний порядок інтерференції $m_{\max} = \lambda / \Delta\lambda$, а максимальна різниця ходу $\Delta_{\max} = m_{\max} \lambda = \lambda^2 / \Delta\lambda$. Величину Δ_{\max} визначили як довжину когерентності. Отже, максимальна різниця ходу не може перевищувати довжину когерентності. На практиці оком інтерференційну картину перестають сприймати раніше: коли її видність спадає не до нуля, а приблизно до 0,3.

6.1.40. Що таке спекл-структура випромінювання і чим вона обумовлена?

Образ монохроматичного просторово неоднорідного світлового поля дає картину спеклів (плям), яку можна спостерігати на екрані, пропускаючи промінь лазера через матову пластинку (рис. 6.19).



Рис. 6.19. До запитання 6.1.40

Проходячи через матову пластинку, лазерний промінь набуває мілкомасштабної поперечної неоднорідності. При цьому його кутлова розбіжність помітно збільшується. Картина, яку спостерігають на екрані, має вигляд сталого у часі плямистого поля. Така картина і називається картиною спеклів.

Спекли мають інтерференційну природу. Вони свідчать про просторову когерентність вихідного лазерного променя. При просвічуванні матової пластинки некогерентним променем (напр., від теплового джерела із фільтром) спекли не утворюються й екран виглядає рівномірно освітленим.

6.1.41. Яку інформацію можна отримати із картини спеклів?

Оцінюючи розмір окремого спеклу або усереднений розмір спеклів, густину їх розташування в перерізі світлового пучка, можна зробити висновки про такий параметр просторової когерентності променя, як радіус когерентності r_k . Цей параметр характеризує розмір простору, у межах якого світло має структуру когерентного світла. Бачимо, що світловий пучок складається з окремих областей когерентності. Для некогерентного світла ці області дуже малі, їх лінійні розміри $\sim \lambda$.

6.1.42. Порівняйте когерентні властивості світла від нелазерних джерел і від лазера.

Світло від газорозрядної лампи, заповненої парами кадмію, має червону лінію з шириною спектра $\Delta\lambda = 0,001\text{нм}$ і довжиною хвилі $\lambda = 0,63\text{мкм}$. Таке світло, як доводиться в прикладі 6.1, має довжину когерентності $L_k = 40\text{см}$. Час когерентності

$$\tau_k = \frac{L_k}{c} = \frac{0,4\text{м}}{3 \cdot 10^8\text{м/с}} \approx 10^{-9}\text{с}.$$

Для лазера з $\lambda = 0,63\text{мкм}$ і $\Delta\nu = 10\text{Гц}$ довжина когерентності $L_k = 30000\text{км}$,

$$\text{час когерентності } \tau_k = \frac{L_k}{c} = \frac{3 \cdot 10^7\text{м} \cdot \text{с}}{3 \cdot 10^8\text{м}} \approx 0,1\text{с}.$$

6.1.43. Поняття когерентності часто вживають, кажучи про одне коливання або хвилю. Наприклад, можна зустріти твердження про те, що біле світло некогерентне, а лазер – джерело когерентного світла. Чому такі твердження не завжди мають абсолютно правильний характер, а є відносними і потребують додаткових досліджень та уточнень?

Такі твердження мають відносний характер, оскільки більш коректно можна сказати, що лазерне випромінювання має помітно більшу часову і просторову когерентність порівняно з білим світлом. Водночас для променів білого світла можна створити умови, коли два промені, які отримані від одного джерела і прийшли в точку спостереження, набувши різницю ходу Δ , меншу від довжини когерентності L_k , є когерентними. І навпаки, випромінювання лазера повністю втрачає свої когерентні властивості вже через час затримки між двома променями навіть одного лазера $t > \tau_k \sim 0,1\text{с}$ (час когерентності).

Світло, що випромінює лазер, відрізняється від білого світла помітно більш високим ступенем монохроматичності. Смуга довжин хвиль, що займає лінія випромінювання лазера в 10^{14} разів меншу (див. приклад 6.1) від смуги довжин хвиль, що займає "біле" світло, для якого $\Delta\lambda \sim 0,1\text{мкм}$. (Вважаємо, що спектральна ділянка, яка характеризує немонохроматичне "біле" випромінювання, має центральну довжину хвилі $\lambda_{\text{сер}} = 0,5\text{мкм}$ і значення ширини спектра $\Delta\lambda \sim 0,1\text{мкм}$. Обрані значення $\lambda_{\text{сер}}$ і $\Delta\lambda$ відповідають кривій видності спектральної чутливості ока (рис. 2.1). Відмінність має переважно кількісний характер, хоча він настільки суттєвий, що

лазерне випромінювання називають монохроматичним. Причина суттєвої різниці у величинах $\Delta\lambda$ для лазера і "білого" світла теплового джерела полягає в різних природі випромінювання та механізмах уширення спектральних ліній випромінювання.

Проте висока монохроматичність лазерного випромінювання, як і світло від будь-якого іншого джерела, яке ще може бути отримане в майбутньому, на практиці не може характеризуватись як абсолютна монохроматичність: немає і ніколи не буде створено джерел зі смугою випромінювання $\Delta\lambda = 0$. Таке твердження може мати декілька пояснень (див. запитання 3.2.6).

6.1.44. *Які промені називаються таутохронними? Які властивості лінзи мають на увазі, коли кажуть, що лінза характеризується таутохронізмом? Яке значення для утворення інтерференційної картини має той факт, що промені після проходження лінзи залишаються таутохронними?*

Принцип Ферма вимагає, щоб світло поширювалось таким чином, щоб оптична довжина його була мінімальною. Отже, треба казати про те, що оптична довжина має бути екстремальною, тобто або мінімальною, або максимальною, або стаціонарною – однаковою для всіх можливих випадків. Останній випадок означає, що всі шляхи між двома просторовими точками такі, які потребують однакового часу проходження, хоча їх геометричні довжини шляхів різні. Промені з такими властивостями називаються таутохронними.

Кажучи про таутохронізм лінзи, мають на увазі те, що лінза не вносить додаткової різниці ходу для променів, що проходять крізь неї. При проходженні променів крізь лінзу спостерігається стаціонарність оптичного шляху.

Умову таутохронізму задовольняють всі шляхи променів, які проходять через будь-яку оптичну систему, яка утворює зображення S' джерела S . Дійсно, якби окремі промені не були б таутохронними, то частини світлового пучка, що поширюються різними шляхами, мали б деяку різницю фаз і взаємно послаблювали б одна одну при зустрічі в S' . Більше того, отримання інтенсивного максимуму в S' , який і є зображенням джерела, обумовлюється взаємним підсиленням окремих частин світлового пучка, які прийшли в точку S' без різниці фаз (таутохронними шляхами). Шляхи, які ведуть від S до будь-якої іншої точки простору, не будуть оптично рівними, і в усіх інших точках, окрім S' , взаємна інтерференція призведе до послаблення світла. Таким чином, отримання зображення в лінзі є інтерференційним ефектом. Це стосується також будь-якої оптичної системи, яка створює зображення джерела.

Якщо б лінзи не мали таутохронних властивостей, їх не можна було б застосовувати, наприклад, у схемах зі спостереження і використання інтерференції та дифракції.

6.1.45. *Відомо, що інтерференція хвиль як фізичне явище розглядається і пояснюється в межах уявлень класичної фізики. Чи існують в інтерференції питання які торкаються проблем квантової механіки?*

Умова мінімумів інтенсивності результуючих коливань при інтерференції двох хвиль, яка має вигляд (6.8), свідчить про те, що вздовж визначених напрямків ні-

якого потоку енергії в напрямку екрана від джерела немає, тобто весь потік повертається до джерела, на екрані фіксується інтенсивність $I_p = 0$.

Якщо виконується умова (6.9) для інтерференційних максимумів, то інтенсивність світла на екрані $I_p = 4I_0$, тобто вся енергія від джерела, потрапляє на екран і немає потоку енергії, який повертається в напрямку джерела. Таким чином, потік енергії від джерела до екрана в різних точках простору залежить від зсуву фаз δ між хвилями. Це можна зрозуміти лише, якщо розглядати все хвильове поле як ціле. Утворення інтерференційної картини не можна розглядати як результат послідовності подій, які відбуваються на променях. Поняття фази та амплітуди не можуть стосуватися променя, це характеристики хвилі і хвильового поля. Подібний до цього розгляд використовують у квантовій механіці у зв'язку з парадоксом Ейнштейна–Подольського–Розена. Існує прямий зв'язок між класичним розглядом співвідношення між шириною лінії випромінювання $\Delta\nu$ і часом когерентності, який виконується в межах класичної теорії випромінювання, і висновками з розгляду принципу невизначеності Гейзенберга (див. запитання 3.2.6).

Таким чином, деякі проблеми інтерпретації класичної фізики, зокрема в оптиці, містять більш складні елементи, які потребують залучень уявлень квантової механіки.

6.2. Двопроменева інтерференція. Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона

6.2.1. Короткі теоретичні відомості

- До схем формування інтерференційної картини за допомогою двох світлових когерентних хвиль (променів), отриманих *методами "поділу хвильового фронту"* (інтерференція Френеля) належить дослід Юнга; бідзеркало Френеля; біпризма Френеля; білінза Бйє; дзеркало Ллойда; метод Лінника.

- *Ширина Δx інтерференційної смуги* в усіх схемах двопроменевої інтерференції визначається за формулою

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\Omega}, \quad (6.40)$$

де λ – довжина хвилі світла; Ω – кутова відстань між уявними джерелами з центра інтерференційної картини у схемах двопроменевої інтерференції.

У схемі інтерферометра Юнга ширина Δx інтерференційної смуги на екрані визначається виразом

$$\Delta x = \frac{L \cdot \lambda}{2l}, \quad (6.41)$$

де L – відстань від джерел світла до екрана спостереження; $2l$ – відстань між когерентними джерелами світла (отворами або щілинами в екрані).

- До схем формування інтерференційної картини за допомогою двох світлових когерентних хвиль (променів), отриманими *методами "поділу амплітуди хвилі"* (інтерференція Ньютона), належить відбиття світла від верхньої та нижньої поверхонь тонких плівок (рис. 6.19). У цьому випадку йдеться про *смуги рівного нахилу* (СРН), з яких складається інтерференційна картина. Смуги рівного нахилу нелокалізовані, для їх спостереження необхідно застосовувати лінзу (об'єктив). У разі застосування сферичної лінзи СРН спостерігаються у вигляді кілець.

Інтерферувати можуть промені відбиті (1 та 2 на рис. 6.20) і ті, що пройшли крізь плівку (1' та 2' на рис. 6.20).

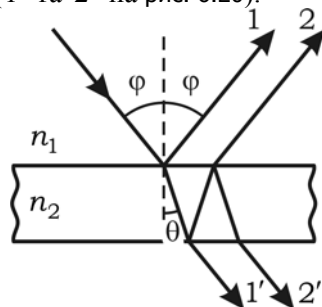


Рис. 6.20. Двопроменева інтерференція: смуги рівного нахилу

Оптична різниця ходу між променями, що інтерферують, для світла, яке відбивається або проходить, дорівнює

$$\Delta_{21} = 2d n_2 \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \sin \varphi \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (6.42)$$

де d і n_2 – товщина і показник заломлення плівки; φ і θ – кути падіння й заломлення, відповідно; n_1 – показник заломлення середовища, з якого падає промінь. Доданок $\frac{\lambda}{2}$ у (6.42) з'являється при відбитті оптичного променя від середовища з більшою оптичною густиною.

- Якщо поверхні плівки утворюють малий кут α , то інтерференційна картина являє собою *смуги рівної товщини*, що локалізовані на поверхні плівки або біля неї. Смуги рівної товщини виникають у тому випадку, коли когерентні пучки після інтерференційної схеми реально або уявно перетинаються. Вони завжди локалізовані, можуть мати різний вигляд – смуги, кільця, квадрати тощо.

Параметри інтерференційної картини дозволяють визначити кут α за формулою

$$\alpha = \frac{\lambda m}{2x_m n_2} = \frac{\lambda}{2\Delta x \cdot n_2}, \quad (6.43)$$

де m – кількість смуг, що містить відрізок інтерференційної картини довжиною x_m ; Δx – ширина інтерференційної смуги; n_2 – показник заломлення плівки.

- Двопроменева інтерференційна картина у вигляді концентричних кільцевих смуг (*кільця Ньютона*) може бути утворена за допомогою установки, схему якої представлено на рис. 6.21.

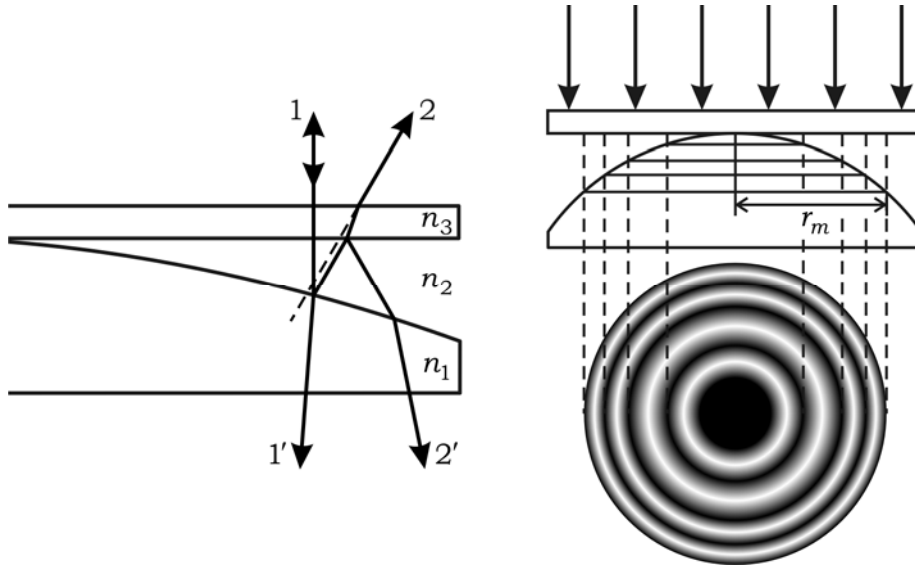


Рис. 6.21. Схема формування кілець Ньютона

Радіуси світлих r_m^l і темних r_m^d кілець Ньютона визначаються за такими формулами:

- у світлі, що відбивається:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2} (2m-1) \frac{\lambda}{2}} \quad (6.44)$$

$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2} m \lambda} ; \quad (6.45)$$

- у світлі, що проходить:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2} m \lambda} ; \quad (6.46)$$

$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2} (2m-1) \frac{\lambda}{2}} , \quad (6.47)$$

де R – радіус кривини поверхні лінзи; n_2 – показник заломлення середовища в проміжку між лінзою і пластинкою; $m = 1, 2, \dots$ – порядковий номер кільця; λ – довжина хвилі монохроматичного світла.

6.2.2. Запитання та відповіді

6.2.1. Інтерференція монохроматичного світла відбувається в тонкій плівці. Відбите від плівки світло спрямовується лінзою на екран. Як треба встановити

лінзу, щоб на екрані спостерігались інтерференційні смуги рівного нахилу (СРН)?
 За яких умов можна спостерігати інтерференційні смуги рівної товщини (СРТ)?
 Чому СРН і СРТ отримали відповідні назви?

Інтерференція в тонкій плівці відбувається між променями, відбитими від першої та другої поверхонь плівки (або заломленими на них). Різниця ходу між променями (6.42) $\Delta_{21} = 2d n_2 \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2}$ залежить від товщини шару d , кута падіння φ (або кута заломлення θ) і показника заломлення плівки n_2 . В умовах експерименту зазвичай змінюють один параметр – кут або товщину.

Схему спостереження інтерференції на плоско-паралельній пластинці (інтерференційних смуг рівного нахилу) подано на рис. 6.22.

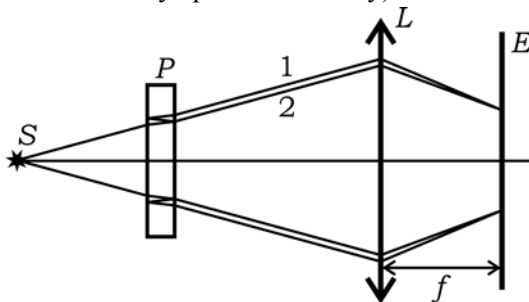


Рис. 6.22. Схема спостереження СРН у заломленому світлі

Когерентні промені 1 та 2, заломлені і відбиті у пластинці P , збираються у фокальній площині лінзи L на екрані E у місцях, які залежать тільки від їх напрямку поширення. Тому отримані інтерференційні смуги називають *смугами рівного нахилу*. Форма смуг залежить від типу лінзи. Лінза зі сферичними поверхнями утворить смуги рівного нахилу у вигляді концентричних кілець, циліндрична лінза – у вигляді прямих ліній.

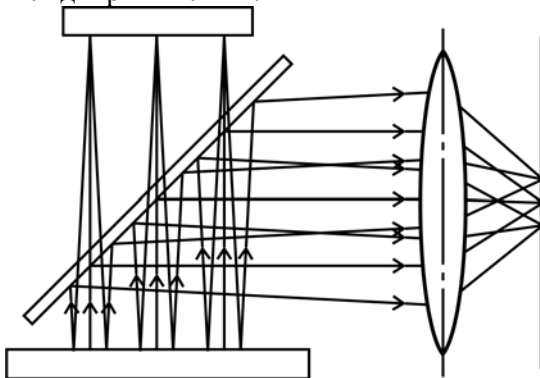


Рис. 6.23. Схема спостереження СРН у відбитому світлі

Ураховуючи, що у заломленому світлі видність інтерференційної картини набагато нижча, ніж у відбитому світлі, картину частіше спостерігають саме у відбитому світлі. Для цього між джерелом S і пластинкою P під кутом 45° до оптичної осі розміщують напівпрозоре дзеркало, а вже за ними – лінзу та екран (рис. 6.23).

Для спостереження смуг рівної товщини необхідно забезпечити постійний кут падіння на пластинку, тоді отримана картина залежатиме лише від зміни товщини. Така інтерференційна картина локалізована біля поверхні пластівки. Тому для спостереження смуг рівної товщини необхідно поставити лінзу L_1 між джерелом і пластівкою так, щоб джерело знаходилось у фокусі лінзи L_1 (рис. 6.24). Тоді над поверхнею пластинки буде спостерігатись інтерференційна картина, товщина смуг якої залежить лише від того, за яким законом змінюється товщина пластинки. Для того, щоб спостерігати картину на екрані, потрібно другою лінзою L_2 спроектувати картину на екран.

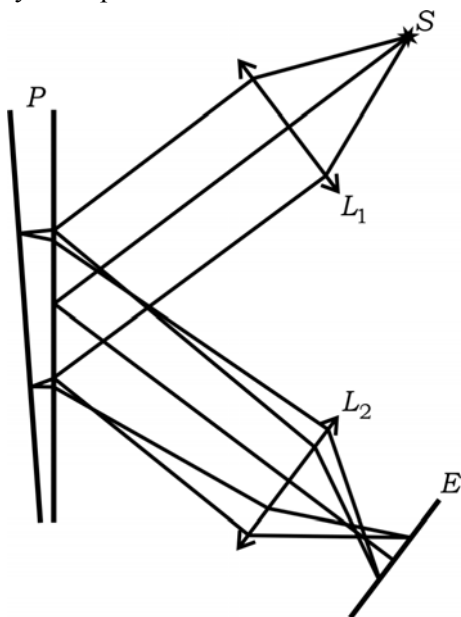


Рис. 6.24. Схема спостереження СРТ у відбитому світлі. До запитання 6.2.1

6.2.2. Чи однакові вимоги до розмірів джерела світла у схемах отримання когерентних променів у двопробеневій інтерференції за методом поділу хвильового фронту (інтерференція Френеля) і за методом поділу амплітуди (інтерференція Ньютона)?

Ні, вимоги до розмірів джерела світла у схемах цих двох методів різні. Схеми спостереження інтерференції методом поділу хвильового фронту (напр., дослід Юнга) придатні лише для спостереження інтерференції від достатньо малих джерел світла, які наближено можна вважати точковими. На відміну від цього, схеми спостереження інтерференції методом поділу амплітуди (інтерферометр Майкельсона, тонкі плівки тощо) придатні для використання як точкових джерел світла, так і джерел скінченних розмірів.

6.2.3. Чи однакові вимоги до просторової та часової когерентності випромінювання у випадках спостереження ліній рівного нахилу та рівної товщини?

Часова когерентність визначається часом або довжиною когерентності. Необхідна умова часової когерентності така: різниця ходу Δ має бути меншою від довжини когерентності $\Delta < L_k = \lambda^2 / \Delta\lambda$, тут $\Delta\lambda$ – спектральна ширина смуги випромінювання. Чим більша монохроматичність спектра випромінювання, тим вищі порядки інтерференції ми зможемо спостерігати. Очевидно, ці умови залежать лише від природи випромінювання і не залежать від геометричних параметрів схеми, тому вони однакові як для ліній рівної товщини, так і для ліній рівного нахилу.

Просторова когерентність залежить від параметрів установки. Розглядаючи умови спостереження ліній рівного нахилу, слід зазначити, що точки, у яких збираються промені з однакою різницею ходу, визначаються лише кутом їх падіння на пластинку. Тому розміри джерела не впливають на якість картини. Це ілюструє рис. 6.25. Інтерференція від різних точок джерела накладається точно одна на одну, підвищуючи інтенсивність картини і не погіршуючи її видність.

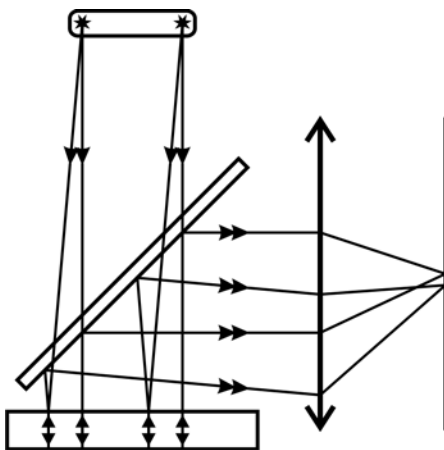


Рис. 6.25. Схема формування смуг рівного нахилу променями світла від різних точок джерела

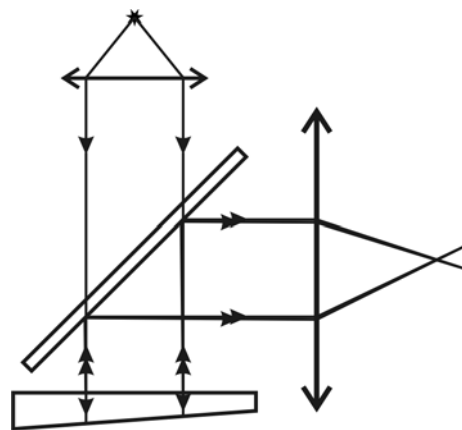


Рис. 6.26. Схема формування смуг рівної товщини у відбитому світлі

Лінії рівної товщини утворюються паралельними променями, тому джерело (рис. 6.26), яке розташоване у фокусі коліматора, має бути точковим. Ширина чи діаметр джерела d мають бути на кілька порядків менші від фокусної відстані коліматора $f_{\text{кол}}$.

6.2.4. У чому полягає метод спостереження інтерференції Лінника? У чому полягає специфіка цього методу?

Прозорий (напр., скляний) екран у вигляді пластинки E_1 з невеликим отвором S_1 у центрі (рис. 6.27). Точкове джерело S утворює сферичну хвилю, яка частково проходить крізь екран, частково – крізь отвір S_1 .

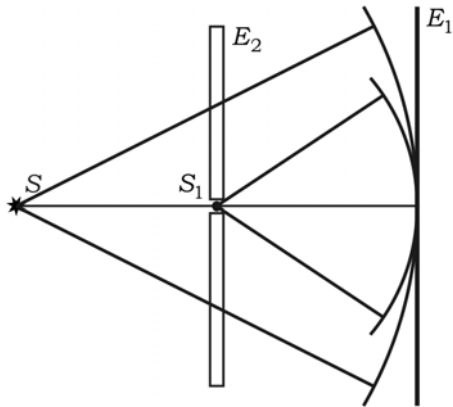


Рис. 6.27. Схема спостереження інтерференції методом Лінника

Отвір S_1 згідно з принципом Гюйгенса є джерелом вторинних хвиль. Друга хвиля приходить на екран, пройшовши через пластинку. Обидва фронти хвиль від когерентних джерел S і S_1 додаючись, дають інтерференційну картину.

Розглянемо специфіку методу Лінника:

- когерентні джерела розташовані на прямій, що перпендикулярна до екрана E_2 на відміну від, наприклад, досліду Юнга, у якому когерентні джерела розташовані на прямій, що паралельна до екрана з інтерференційною картиною;
- інтерференційна картина має вигляд концентричних кілець. Якщо замість точкових джерел S і S_1 взяти джерела у вигляді вузьких щілин, то інтерференційна картина матиме вигляд прямих смуг;
- переміщуючи екран E_2 паралельно самому собі, можна постійно спостерігати інтерференційну картину. У такому випадку кажуть, що інтерференційна картина нелокалізована.

6.2.5. Дві плоскі електромагнітні хвилі з однаковими амплітудами поширюються під кутом θ одна до одної й інтерферують. Запишіть, за яким законом залежно від координати y , відбувається розподіл інтенсивності на екрані.

У загальному випадку інтенсивність світла в точці інтерференційної картини з різницею фаз $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ між хвилями має вигляд $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, де Δ – різниця ходу. Оберемо з двох пучків по парі променів, які зустрічаються на екрані на такій відстані Δy , що між ними утворюється різниця ходу Δ (рис. 6.28).

В інтерференційних схемах, виходячи з умов когерентності, кути між променями θ (кути сходження) рідко перевищують $1^\circ \div 2^\circ$, тому наближено можна вважати, що оптична різниця ходу дорівнює

$$\Delta = \Delta y \cdot \theta . \quad (6.48)$$

Для різниці фаз між хвилями це означає, що $\delta = (2\pi/\lambda) \cdot \Delta y \cdot \theta$. Тому розподіл інтенсивності в напрямку y , перпендикулярному до інтерференційних смуг, набуває вигляду

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} y \cdot \theta\right).$$

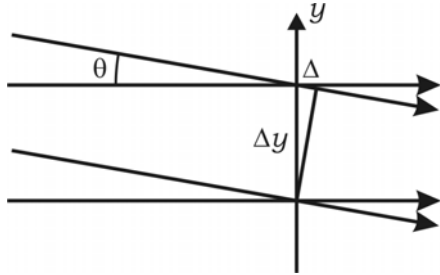


Рис. 6.28. До запитання 6.2.6

6.2.6. Доведіть, за якої різниці ходу (фаз) між двома променями спостерігається максимум інтерференції, за якої – мінімум?

Аналізуючи розподіл інтенсивності в інтерференційній картині $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, отримуємо умову максимумів:

$$\cos \delta = 1 \Rightarrow \delta = (2\pi/\lambda)\Delta = 0, 2\pi, \dots, 2m\pi, \dots \Rightarrow \Delta = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \text{ де } m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

та умову мінімумів:

$$\cos \delta = -1 \Rightarrow \delta = (2\pi/\lambda)\Delta = \pi, 3\pi, \dots, (m + 1/2)2\pi, \dots \Rightarrow$$

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = (m + 1/2)\lambda, \text{ де } m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

6.2.7. Два когерентні світлові промені з оптичною різницею ходу $\Delta = 3\lambda_0$, де λ_0 – довжина хвилі світла у вакуумі, інтерферують у деякій точці. Максимум чи мінімум спостерігається в цій точці?

Оскільки $\Delta = 3\lambda_0 \equiv 6 \frac{\lambda_0}{2}$, то спостерігається виконання умови максимумів

$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}$, у точці спостереження буде максимум інтенсивності.

Якщо б у різниці ходу Δ вкладалось півціле число довжин хвиль λ , наприклад, $\Delta = 1,5\lambda_0 \equiv 3 \frac{\lambda_0}{2}$, то це означало б, що наявність у цій точці картини мінімуму.

6.2.8. Яка припустима товщина тонкої плівки для візуального спостереження інтерференції при використанні немонохроматичного, "білого" світла щодо когерентних властивостей світла?

Вважатимемо, що спектральна ділянка, яка характеризує немонохроматичне "біле" випромінювання, має центральну довжину хвилі $\lambda_{\text{сер}} = 0,5 \mu\text{м}$ і значення ширини спектра $\Delta\lambda = 0,1 \mu\text{м}$. (Обрані значення $\lambda_{\text{сер}}$ і $\Delta\lambda$ відповідають кривій видимості спектральної чутливості ока (рис. 2.1)). Максимальний порядок інтерференції

в цьому випадку дорівнює $m_{\max} = \frac{\lambda_{\text{сер}}}{\Delta\lambda} \sim 5$. Ця величина визначає максимально припустиму оптичну різницю ходу $\Delta_{\max} = m_{\max} \cdot \lambda \approx 2,5 \text{ мкм}$, яка дорівнює довжині когерентності L_k . За формулою (6.38) вона пов'язана із товщиною плівки співвідношенням

$$\Delta_{\max} = 2d n_2 \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{\Delta_{\max} + \frac{\lambda}{2}}{2 n_2 \cos \varphi}.$$

Зважаючи на те, що $\Delta_{\max} \sim 5\lambda$, отримуємо припустиму товщину плівки $d_{\max} \approx \frac{5\lambda}{2n_2 \cos \varphi}$. Якщо вважати плівку утвореною з води ($n=1,33$) або скла ($n=1,5$) і покласти $\cos \varphi \approx 1$, то $d_{\max} \approx \lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$. Ця величина добре корелює з порядком товщин плівок, на яких експериментально спостерігається інтерференція в білому світлі.

6.2.9. *Інтерференційна картина спостерігається за умов просторового поділу амплітуди. У якому випадку ширина інтерференційних смуг не залежить від відстані джерел до екрана, на якому спостерігається інтерференція?*

Ширина інтерференційних смуг не залежить від відстані до екрана у випадку інтерференції двох паралельних пучків світла. Доведемо це.

Розглянемо результат, отриманий у запитанні 6.2.5: зі зміною координати (y) різниця ходу (Δ) зростає за законом $\Delta = \theta \cdot \Delta y$, де θ – кут сходження; Δy – відстань між точками інтерференційної картини, які характеризуються тим, що промені в цих точках мають різницю ходу Δ (рис. 6.24). Для переходу від одного максимуму інтерференції до іншого необхідне зростання різниці ходу Δ_0 на величину λ , тому ширина Δy_0 інтерференційної смуги дорівнюватиме $\Delta y_0 = \Delta_0 / \theta = \lambda / \theta$.

Як бачимо, у цьому випадку ширина інтерференційної смуги залежить тільки від кута θ , під яким зустрічаються промені, і не залежить від відстані до екрана.

6.2.10. *Інтерференційна картина спостерігається за схемою дзеркала Ллойда (рис. 6.29). На екрані спостерігаються інтерференційні смуги, паралельні до вхідної щілини S . Доведіть, що ширина інтерференційної смуги на екрані пропорційна довжині хвилі λ .*

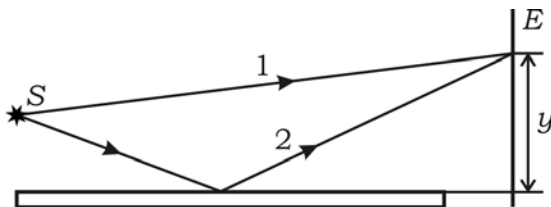


Рис. 6.29. Утворення інтерференції за схемою дзеркала Ллойда

Для переходу від максимуму до сусіднього мінімуму інтерференційної картини різниця ходу між інтерферуючими променями повинна змінитись на $\lambda/2$. Тобто, чим більша довжина хвилі λ , тим ширшою буде інтерференційна смуга на екрані.

6.2.11. *Інтерференція спостерігається за схемою дзеркала Ллойда. Темна чи світла смуга в інтерференційній картині спостерігається на рівні поверхні дзеркала?*

Схема Ллойда має таку особливість: якщо використати джерело з відомою довжиною хвилі λ і визначити ширину інтерференційних смуг Δu_0 , то, відрахувавши від початку координат (який розташований на рівні поверхні дзеркала) відстань у m смуг, ми потрапимо не в максимум, а в мінімум інтерференційної смуги. Це пояснюється тим, що другий промінь відбивається від дзеркала і при цьому відбувається зсув по фазі на π , що призводить до появи додаткової різниці ходу $\Delta = \lambda/2$. Тому теоретично смуга нульового порядку мала б бути темною, мінімумом, а не максимумом.

Експериментально опустити щілину на рівень дзеркала й отримати $L_1 = L_2$ неможливо, тому для спостереження нульової смуги на шляху обох пучків розміщують дві скляні пластинки різної товщини d_1 і d_2 . Ці товщини підбирають так, щоб у центрі інтерференційного поля спостерігалась смуга нульового порядку. При використанні білого світла дійсно спостерігається центральна чорна смуга, в обидва боки від якої утворюються світлі максимуми, з подальшим більш сильним забарвленням для смуг вищих порядків.

6.2.12. *У схемі Юнга (рис. 6.2) спостерігають інтерференційну картину від двох нескінченно вузьких щілин. На екрані утворюється система паралельних інтерференційних смуг із максимумом I_0 у центрі картини. Одну із щілин перекривають тоненькою скляною пластинкою, товщина якої d , а показник заломлення n . Запишіть закон, за яким змінюється інтенсивність у центрі картини залежно від товщини пластинки d . За яких значень d інтенсивність у центрі картини мінімальна?*

Розміщення скляної пластинки вказує на появу додаткової різниці ходу $\Delta' = d(n-1)$. Це призводить до зміщення інтерференційної картини на m інтерференційних смуг, де $m = d(n-1)/\lambda$. Закон, за яким змінюється інтенсивність по інтерференційній картині, набуває вигляду (6.17):

$$I = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta + d(n-1)] \right\}.$$

У геометричному центрі інтерференційної картини оптична різниця ходу між променями $\Delta = 0$. Умовою мінімуму є вираз

$$d(n-1) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow d = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{n-1}.$$

6.2.13. Відомо, що інтенсивність в інтерференційній картині, яка отримується при складанні когерентних хвиль від двох джерел з однаковими амплітудами $E_1 = E_2 = E_0$, характеризується просторовим розподілом від нуля в мінімумах до $4I_0$ у максимумах (напр., у досліді Юнга). Це можна підтвердити об'єктивними вимірюваннями. Як розподіляється інтенсивність в інтерференційній картині у випадку, коли одне із джерел уявне, а друге – дійсне (реальне), наприклад, у досліді із дзеркалом Ллойда? Інтенсивність світла дійсного джерела – I_0 .

Виходячи із закону збереження енергії, можна показати, що інтенсивність світла в мінімумі інтерференційної картини дорівнює 0, а в максимумі – $2I_0$. У цьому випадку середнє значення інтенсивності по інтерференційній картині дорівнює $\bar{I} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} = I_0$. Об'єктивні вимірювання можуть підтвердити це.

Для того, щоб скористатись відомими співвідношеннями (напр., $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$) і не створити протиріччя із законом збереження енергії, необхідно приписати кожному із джерел (одне – уявне, друге – дійсне) інтенсивність світла $0,5I_0$.

6.2.14. Як впливатиме інтерференція на зміну світлового потоку монохроматичного світла, відбитого від тонкої плівки, залежно від кута падіння?

Як відомо, між променями, відбитими від верхньої та нижньої поверхонь плівки, виникає різниця ходу (6.38), див. рис. 6.19:

$$\Delta_{21} = 2d n_2 \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi} \pm \frac{\lambda}{2},$$

де φ та θ – кути падіння і заломлення, відповідно; n_1 та n_2 – показники заломлення середовища та плівки, відповідно.

Як бачимо, при збільшенні кута падіння φ від 0 до $\pi/2$ різниця ходу Δ_{12} зменшується. (Урахуйте, що зі збільшенням кута φ збільшується і кут θ). Якщо, наприклад, при нормальному падінні $\varphi = 0$ різниця ходу Δ_{12} відповідала максимуму інтерференції, то при зміні (збільшенні) кута падіння φ інтенсивність буде поступово падати за рахунок інтерференції світла. На око цей ефект буває важко помітити, адже за формулами Френеля зі збільшенням кута падіння φ зростає коефіцієнт відбиття.

Якщо ж за $\varphi = 0$ виконується умова мінімуму, то при збільшенні кута падіння буде стрімке збільшення інтенсивності за рахунок обох факторів. За товщини плівки в декілька λ при збільшенні кута падіння від 0° до козного кута різниця ходу Δ_{12} встигає кілька разів пройти через максимум і мінімум. Такі осциляції інтенсивності легко помітити оком.

6.2.15. Інтерференційна картина спостерігається в повітряному клині, утвореному двома скляними плоско-паралельними пластинками. Яким чином зміниться

інтерференційна картина, якщо простір між пластинками заповнити водою? Чому дорівнюватиме ширина інтерференційної смуги в цьому разі?

Для повітряного клина між двома скляними пластинками показники заломлення $n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$ і кут α при вершині клина. Проаналізуємо формулу, яка дає розподіл інтерференційних максимумів і мінімумів на клині $\Delta_{21} = 2d n_2 \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2}$. За умов нормального падіння світла на першу межу скло–повітря частина світла відбивається без втрати фази, другий відбитий промінь на межі повітря–скло втрачає по фазі кут $\delta = \pi$. Тому різниця ходу між цими променями дорівнюватиме $\Delta_1 = 2d_1 n_2 + \frac{\lambda}{2}$ для монохроматичного світла з довжиною хвилі λ . Через d_1 позначено товщину клина в цьому місці (рис. 6.30).

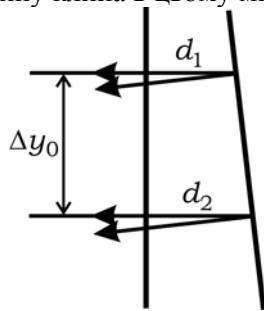


Рис. 6.30. Схема отримання інтерференційної картини в клині

Якщо $\Delta = m\lambda$, у цьому місці на клині буде видно смугу з максимальною інтенсивністю. Зі зміною товщини d на поверхні клина утворюється система паралельних інтерференційних смуг шириною Δy_0 . Для переходу від одного максимуму до іншого необхідно, щоб оптична довжина шляху змінилась на λ : $2n_2(d_2 - d_1) = \lambda$. Якщо кут α при вершині малий, то ширина смуги дорівнюватиме $\Delta y_0 = \frac{d_2 - d_1}{\alpha} = \frac{\lambda}{2n_2 \cdot \alpha}$. Щоб ширина інтерференційної смуги була порядку 1 мм,

кут α не повинен перевищувати 10^{-4} рад.

Заповнення клину водою збільшує оптичну довжину шляху між пластинками (для води $n_2 = 1,33$), різниця ходу набігає швидше, ширина інтерференційних смуг стає меншою, інтерференційні смуги стають більш щільними.

Треба врахувати ще один фактор. Коефіцієнт відбиття R світла на межі двох середовищ при кутах, близьких до нуля, дорівнює $R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$. При заміні повітря

водою коефіцієнт R зменшується на порядок (від 0,04 до 0,004). Тому умови спостереження інтерференційної картини після зміни середовища між поверхнями

клина на воду суттєво погіршуються внаслідок спадання загальної інтенсивності відбитого світла.

6.2.16. Чому шар речовини з оптичною товщиною $\lambda/4$, нанесений на одну речовину, призводить до різкого зменшення відбиття нормально падаючого світла, а на іншу – до значного збільшення відбиття?

Схему, за якою розглянемо це питання, представлено на рис. 6.31.

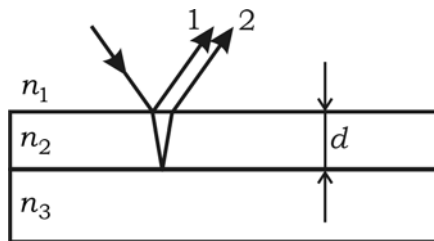


Рис. 6.31. До запитання 6.2.16

Формула для оптичної різниці ходу між двома відбитими променями в цьому випадку записується у вигляді $\Delta 2dn_2 \cos\theta + p\frac{\lambda}{2}$. Параметр p у формулі може набувати значень $-1, 0, +1$ залежно від того, які значення мають показники заломлення n_1, n_2 та n_3 : є втрата $\lambda/2$ при відбитті чи нема. Якщо взяти послідовність $n_1 < n_2 < n_3$ (напр., повітря, шар олії, скло), то при відбитті і перший, і другий промені втрачають по фазі півхвилі, тому $p = 0$: додаткового зсуву фаз за рахунок відбиття немає. Відповідно до заданої в умові прикладу оптичній товщині шару $d = \lambda/4$ між променями 1 та 2 (рис. 6.31) існує різниця ходу $\Delta = 2d = \lambda/2$. Тому буде спостерігатись мінімум відбиття світла. За $n_1 < n_2 > n_3$ (напр., повітря, скло, шар олії) втрату по фазі має тільки промінь 1, величина $p = +1$, різниця ходу $\Delta = 2d + \lambda/2 = \lambda$, отримуємо максимум відбиття світла.

6.2.17. Чи може спостерігатись інтерференція світла не тільки в тонких плівках, але й у відносно товстих пластинах? Чим обмежується товщина плівки (пластини)?

Плівка для спостереження інтерференції в ній має бути тонкою тому, що різниця ходу променів, які інтерферують, має бути меншою від довжини когерентності. При спостереженні в білому світлі довжина когерентності є величиною порядку λ (див. запитання 6.2.8), а при використанні лазера можна спостерігати інтерференцію на скляній пластині товщиною в сантиметри.

Таким чином, максимальна товщина плівки (пластини) визначається довжиною когерентності світла, яке використовується для спостереження інтерференції.

6.2.18. Незначні зміни кута спостереження мало змінюють інтерференційну картину в тонких плівках, а в товстих шарах це призводить до суттєвих змін. Чому?

У формулі для різниці ходу $\Delta_{21} = 2d n_2 \cos\theta \pm \frac{\lambda}{2}$ оптична довжина шляху ($d \cdot n_2$) множиться на косинус кута заломлення. Тому за однакового збільшення кута θ

зміни в різниці ходу тим більші, чим більша товщина шару, у якому відбувається інтерференція.

6.2.19. *Кільця Ньютона спостерігаються внаслідок інтерференції в тонкому шарі повітря між плоскою поверхнею скляної пластинки і сферичною поверхнею скляної лінзи. Чому інтерференційну картину найчастіше спостерігають у відбитому світлі?*

Ця особливість загальна для інтерференції в тонких шарах. Розглянемо промені 1, 2 та 1', 2' на рис. 6.20. Для пояснення підрахуємо видність інтерференційної картини для випадку, коли $n_1 = n_3 = 1,5$; $n_2 = 1$. Якщо взяти кути падіння та заломлення (φ і θ , відповідно) малими, як це найчастіше буває на практиці, то коефіцієнти від-

биття на першій і другій поверхнях однакові й дорівнюють $R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 0,04$,

коефіцієнт пропускання $T = 1 - R = 0,96$. Якщо інтенсивність падаючого променя I_0 , то інтенсивність променя 1 дорівнює RI_0 , променя 2 – RT^2I_0 . Видність ін-

терференційної картини у відбитому світлі дорівнюватиме $V_r = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2T}{1 + T^2} \approx 1$,

якщо використати формули для максимуму і мінімуму інтерференційної картини у відбитому світлі $I'_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$; $I'_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$.

Інтенсивність променя 1' дорівнюватиме $I_3 = T^2I_0$, променя 2' – $I_4 = R^2T^2I_0$. Відповідно, видність інтерференційної картини для світла, що пройшло, дорівню-

ватиме $V_\tau = \frac{2\sqrt{I_3I_4}}{I_3 + I_4} = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \approx 0,08$. За такої видності для світла, що пройшло, оком

спостерігати картину практично неможливо, а фотографії мають дуже низький контраст.

6.2.20. *Кільця Ньютона спостерігають у монохроматичному світлі. Скляну пластинку починають поступово відсувати від лінзи так, що вона залишається перпендикулярною до оптичної осі системи. Як змінюватиметься при цьому інтерференційна картина?*

Відсування пластинки призводить до появи додаткової різниці ходу. За звичайних умов при спостереженні інтерференційної картини у відбитому світлі в місці контакту лінзи і пластинки спостерігається темна цятка внаслідок втрати фази $\delta = \pi$ нижнім променем (рис. 6.21). При відсуванні скляної пластинки темна цятка поступово стає меншою і, коли зазор сягає значення $\lambda / 4$, центр картини стає світлим. Чергування світлих і темних цяток у центрі повторюється при подальшому збільшенні зазору. Візуально створюється враження, що картина стягується в центр. Самі інтерференційні кола стають густішими.

6.2.21. У схемі спостереження кілець Ньютона нижню скляну пластинку замієно пластинкою, яка складається із двох частин, як показано на рис. 6.32. Показник заломлення лівої частини, як і лінзи, $n_1 = 1,5$. Показник заломлення правої частини $n_3 = 1,7$. Проміжок між лінзою та пластинками заповнено рідиною з показником заломлення $n_2 = 1,6$. Опишіть вигляд інтерференційної картини.

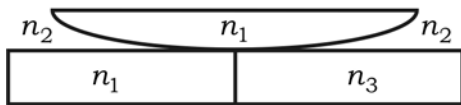


Рис. 6.32. До умови запитання 6.2.21

Різниця ходу для лівої та правої частин установки однакова, але різні умови відбиття: ліворуч на межі лінза–рідина є втрата фази, а на межі рідина–пластинка її немає, тоді як праворуч зміна фази на π відбувається на обох поверхнях (і лінза–рідина, і рідина–пластинка). Унаслідок цього радіуси світлих кілець ліворуч дорівнюють $r_m = \sqrt{\frac{R}{n_2}(2m-1)\frac{\lambda}{2}}$, а праворуч $r_m = \sqrt{\frac{mR\lambda}{n_2}}$. На інтерференційній картині світлі півкола межують з темними по лінії дотику скляних пластинок, і навпаки (рис. 6.33).

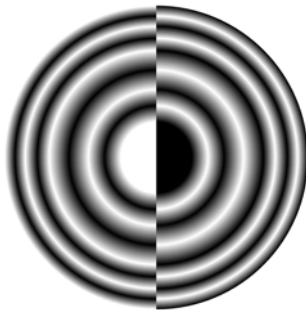


Рис. 6.33. Вигляд інтерференційної картини (до запитання 6.2.21)

6.2.22. Кільця Ньютона спостерігають у повітряному прошарку між двома сферичними поверхнями з радіусами кривини R_1 і R_2 . Як змінюється інтерференційна картина, якщо знак кривини однієї поверхні змінюється на протилежний?

Із рис. 6.34, а видно, що у випадку двох опуклих поверхонь сумарна різниця ходу становить $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{r_m^2}{R_1} + \frac{r_m^2}{R_2}$.

Якщо нижня поверхня вгнута (рис. 6.34, б), то $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{r_m^2}{R_1} - \frac{r_m^2}{R_2}$. У другому випадку різниця ходу набігає повільніше, тому радіуси кілець будуть більшими.

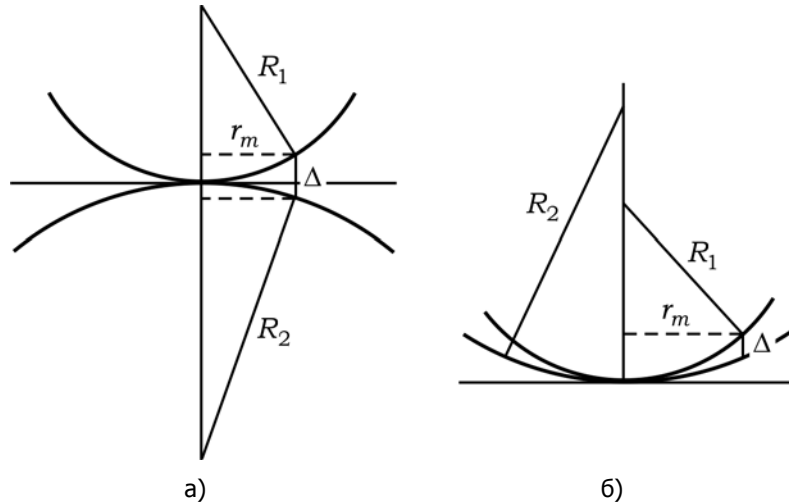


Рис. 6.34. До запитання 6.2.22

6.2.23. *Зобразіть схему спостереження смуг рівної товщини в інтерферометрі Майкельсона. Як треба змінити цю схему для спостереження смуг рівного нахилу?*

Для спостереження смуг рівної товщини (рис. 6.35, а) в інтерферометрі Майкельсона необхідно використати точкове джерело світла S , розташоване у фокусі коліматора L . Дзеркала M_1 та M_2 розміщуються на однаковій відстані від точки поділу пучка O . На екрані E зустрічаються два паралельних пучка світла з нульовою різницею ходу. Якщо дзеркала ідеально плоскі, то екран рівномірно освітлюється. Якщо одне із дзеркал має нерівності, то на екрані спостерігаються лінії рівної товщини.

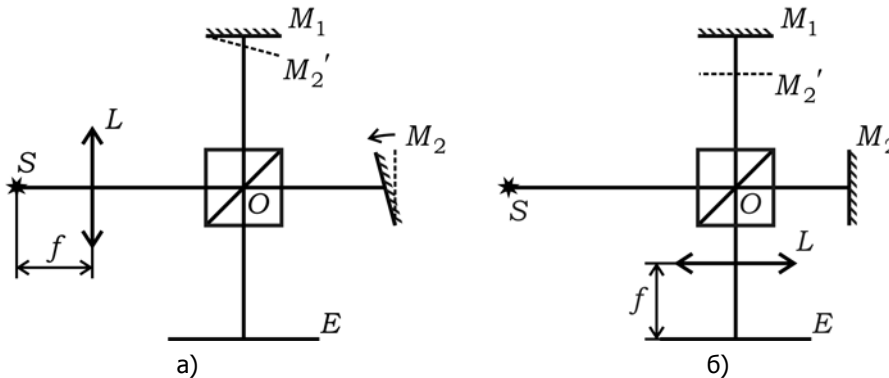


Рис. 6.35. Схема утворення смуг рівної товщини (а) і смуг рівного нахилу (б) в інтерферометрі Майкельсона

Для спостереження смуг рівного нахилу (рис. 6.35, б) можна взяти об'ємне джерело світла, дзеркала M_1 та M_2 розміщуються перпендикулярно до оптичної осі інтерферометра, але на різній відстані d_1 та d_2 від точки поділу пучка O . Відста-

вання по осі одного пучка відносно другого дорівнюватиме $\Delta_0 = 2(d_2 - d_1)$. На екрані E в центрі спостерігатиметься максимум або мінімум залежно від різниці ходу по осі. За $\Delta_0 = m\lambda$ у центрі буде максимум. Смоги рівного нахилу у вигляді концентричних кілець утворюються у фокальній площині об'єктива L .

6.2.24. *Оптичні довжини плечей інтерферометра Майкельсона рівні, тобто оптична різниця ходу $\Delta = 0$. Чи означає це, що буде спостерігатись інтерференційна картина з максимумом інтенсивності світла в центрі картини, як того вимагає умова максимумів, що задається співвідношенням $\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$)?*

Ні, у цьому випадку інтерференційна картина спостерігатись не буде, хоча, дійсно, при спостереженні інтерференційної картини, у точці, для якої оптична різниця ходу $\Delta = 0$ (інтерференційний порядок $m = 0$), тобто в центрі картини завжди спостерігається максимум інтенсивності.

Розглянемо спочатку випадок, коли в інтерферометрі Майкельсона спостерігаються інтерференційні смуги рівної товщини (рис. 6.35, а). Для цього одне дзеркало, припустимо M_1 , нахилиють на деякий кут α . У центрі картини утворюється максимум, що відповідає умові $\Delta = 0$. Якщо кут α поступово зменшувати, центральна смуга буде ставати все ширше, доки не охопить все поле зору за $\alpha = 0$. Тепер чергування максимумів і мінімумів немає, але інтерференція існує, тому що по всьому полю зору маємо максимум з інтенсивністю $I = 4I_0$. У цьому випадку на межі розподілу пучків створюються умови, коли обидва пучки, і від дзеркала M_1 і від дзеркала M_2 проходять на екран, а в бік джерела світло не проходить.

Якщо дзеркало M_1 відсунути по осі на відстань $\Delta x = \lambda / 4$, залишаючи його перпендикулярним до оптичної осі, граничні умови на розподільчому кубуку зміняться на протилежні, унаслідок чого все світло пройде в бік джерела S , а весь екран стане темним.

6.2.25. *У схемі інтерферометра Майкельсона для спостереження смуг рівної товщини змінюють кут нахилу одного із дзеркал відносно оптичної осі. Як при цьому змінюється вигляд інтерференційної картини?*

Якщо відносно оптичної осі трохи нахилити дзеркало M_2 (рис. 6.35, а) на невеликий кут θ , то на екрані E зустрічаються дві плоскі хвилі під кутом 2θ .

Як було показано у формулах (6.17) і (6.48) для двох паралельних пучків, інтенсивність світла на екрані змінюється за законом $I = 2I_0 [1 + \cos(2k\theta y)]$, коли дзеркало нахилиється відносно осі X . У центрі екрана ($y = 0$), для якого відстань до обох дзеркал залишилась однаковою, буде розташована смуга нульового порядку. При використанні білого світла вона залишатиметься незабарвленою. Із наведеної формули видно, що чим більше кут нахилу, тим щільнішими стають інтерференційні смуги. Зауважимо, що в цьому випадку інтерференційна картина не локалізується.

вана, і екран можна піднімати і опускати в тих межах, у яких перекриваються світлові пучки від дзеркал M_1 та M_2 .

6.2.26. У схемі інтерферометра Майкельсона для спостереження смуг рівної товщини одне плоске дзеркало залишають, а друге замінюють сферичним, розташованим так, що відстані від точки O до плоского дзеркала і до вершини сферичного дзеркала по осі – однакові (інтерферометр Тваймана) – рис. 6.36. Який вигляд матиме інтерференційна картина? Чи залежить її вигляд від того, яке дзеркало: опукле чи вгнуте? Як змінюватиметься інтерференційна картина, якщо дзеркало наближати до (чи віддаляти від) центра поділу пучків – точки O ?

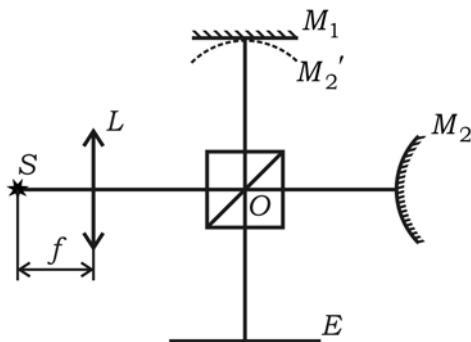


Рис. 6.36. Схема інтерферометра Тваймана: M_1, M_2 – дзеркала; M_2' – зображення дзеркала M_2

В інтерферометрі Тваймана картина буде аналогічною до кілець Ньютона з радіусами $r_m^2 = 2m\lambda R$. Відмінність полягає в тому, що для обох дзеркал втрати фази при відбитті однакові й у центрі інтерференційної картини завжди спостерігатиметься максимум. Для вгнутого дзеркала результат буде таким самим.

Якщо опукле дзеркало M_2 почати рухати вперед, до точки поділу променів O , то нульова смуга ($m = 0$) віддалятиметься від центра, як і лінія перетину дзеркала M_1 із зображенням M_2' дзеркала M_2 . З віддаленням від кільця нульового порядку як на периферії, так і в центрі картини кільця будуть ставати щільнішими.

З наближенням вгнутого дзеркала до точки поділу O зображення вгнутого дзеркала опускається відносно дзеркала M_1 , різниця ходу поступово збільшується по всьому полю. Візуально картина стягується до центра, де чергуються мінімуми та максимуми, кільця стають щільнішими.

6.3. Багатопроменева інтерференція. Інтерферометр Фабрі–Перо

6.3.1. Короткі теоретичні відомості

Формування інтерференційної картини за допомогою багатьох світлових хвиль (променів) називається *багатопроменевою інтерференцією*. Така інтерференція

формується, наприклад, в інтерферометрі Фабрі–Перо (рис. 6.37), де робочим середовищем є повітряний проміжок ($n_2 = 1$) між двома паралельними пластинами, зробленими із прозорого діелектрика (напр., скла або кварцу), внутрішні поверхні яких посріблені до високого значення коефіцієнта відбиття ($R = 0,9 - 0,95$).

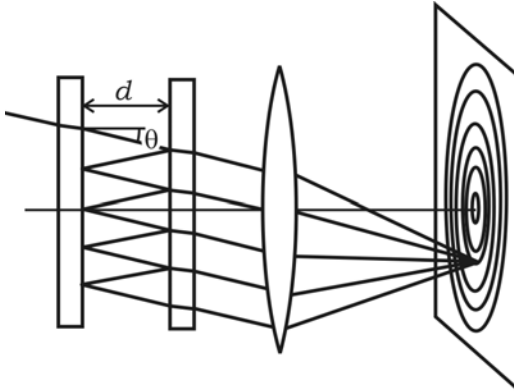


Рис. 6.37. Інтерферометр Фабрі–Перо

• *Розподіл інтенсивності* світла в багатопроменевій інтерференційній картині на виході інтерферометра Фабрі–Перо у світлі, що проходить, описується виразом у вигляді формули Ейрі:

$$I_{np} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{I_0}{1 + F \cdot \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}, \quad (6.48)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла; R – коефіцієнт відбиття посріблених поверхонь пластин інтерферометра; δ – різниця фаз між сусідніми променями: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cdot n_2 \cos \theta$; d – відстань між пластинами; λ – довжина хвилі; n_2 – показник заломлення середовища між двома паралельними пластинами; θ – кут заломлення.

• *Фактор різкості* визначається співвідношенням

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}. \quad (6.49)$$

• *Інтерференційні максимуми* $I_{\max}(\delta) = I_0$ виникають за умови, коли

$$\delta = 2\pi m, \text{ або } 2d \cdot n_2 \cos \theta = m\lambda, \text{ де } m - \text{порядок інтерференції.} \quad (6.50)$$

• *Роздільна здатність* інтерферометра Фабрі – Перо:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{R}}{1-R} \quad (6.51)$$

• *Ширина багатопроменевої інтерференційної смуги*, яка отримана із формули Ейрі (6.48), на рівні піввисоти її максимуму залежно $I(\delta)/I_0$ від зсуву фаз δ між

двома сусідніми променями визначається коефіцієнтом відбиття R дзеркальних пластин

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}. \quad (6.52)$$

6.3.2. Методичні вказівки та поради

Звернемо увагу на те, що при розгляді багатопроменевої інтерференції картину смуг характеризують двома величинами, схожими за назвами, але суттєво різними за змістом, який вони мають, і за порядком їх значення, а саме, розглядаються:

- фактор різкості (6.49) $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$, який входить у формулу Ейрі (6.48);

- різкість

$$\tilde{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (6.53)$$

6.3.3. Запитання та відповіді

6.3.1. Зобразіть графік функції Ейрі за різних коефіцієнтів відбиття.

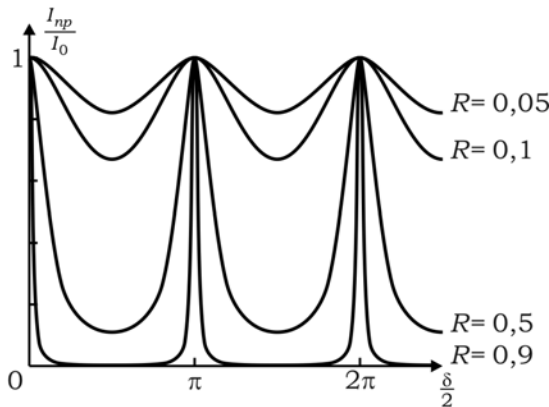


Рис. 6.38. Графік функції Ейрі за різних значень коефіцієнта відбиття R

Графік функції (6.48) для різних значень коефіцієнта відбиття показано на рис. 6.38. Відношення $\left(\frac{I_{np}}{I_0}\right)$ має максимальне значення за $\sin \delta/2 = \sin m\pi = 0$ і мінімальне – за $\sin \delta/2 = 1$. Як бачимо, залежність $\left(\frac{I_{np}}{I_0}\right)$ від δ має вигляд системи

максимумів, форма яких істотно залежить від R . За $R = 0,05$ (поверхня скляної пластинки без спеціального покриття) вигляд інтерференційної картини відповідає розподілу інтенсивності по екрану у випадку інтерференції двох променів світла (рис. 6.4). Чим більший коефіцієнт R , тим вузькими стають максимуми, які розділені широкими мінімумами.

6.3.2. *Маємо дві інтерференційні картини: одна отримана за схемою двопроменевої інтерференції, а друга – за схемою багатопроменевої інтерференції. За якими зовнішніми ознаками цих інтерференційних картин, спостерігаючи їх тільки візуально, можна їх розрізнити й однозначно визначити, до якої конкретної схеми інтерференції вони належать?*

При суперпозиції двох плоских когерентних світлових хвиль утворюються інтерференційні смуги з розподілом інтенсивності $I \sim \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Тобто в цьому випадку світлі й темні смуги однакові за шириною, видність інтерференційних смуг незмінна по всій картині.

Аналіз формули Ейрі (6.48) показує що залежність $I\left(\frac{\delta}{2}\right)$ має систему максимумів, форма яких помітно відрізняється від кривих вигляду $\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, що виражають картину двопроменевої інтерференції. При суперпозиції великої кількості хвиль розподіл інтенсивності в інтерференційній картині у світлі на прохід істотно змінюється: утворюються вузькі контрастні світлі інтерференційні смуги на широкому майже темному фоні. Зі збільшенням радіуса кільця розташовуються все ближче одне до одного.

6.3.3. *Чим багатопроменева інтерференція відрізняється від двопроменевої?*

Якщо інтерферує N променів з амплітудою E_0 , то інтенсивність у максимумах зростає до $I_{\max} = (NE_0)^2$, а перехід до мінімумів відбувається швидше.

Розглянемо випадок, коли кількість інтерферуючих променів $N = 4$, амплітуди всіх пучків однакові й дорівнюють E_0 . У центрі картини, коли і різниця ходу Δ , і різниця фаз δ дорівнюють нулю, результуюча амплітуда $E_{\text{рез}} = 4E_0$, що графічно представлено на рис. 6.39, на якому подано відповідний розподіл інтенсивності при інтерференції чотирьох когерентних пучків. Результуюча інтенсивність у максимумі $I_{\text{рез}} = 16I_0$. Для порівняння там же подано розподіл інтенсивності при інтерференції двох променів.

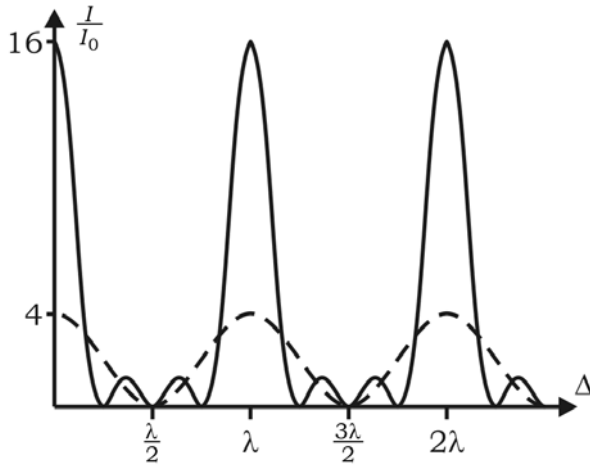


Рис. 6.39. Розподіл інтенсивності по інтерференційній картині залежно від різниці ходу між сусідніми променями: результат взаємодії чотирьох променів з однаковими амплітудами (суцільна крива) і двох променів (штрихова крива)

Рухаючись від центра картини (рис. 6.40, а), поступово збільшуємо різницю ходу і різницю фаз між пучками. У двопроменевої інтерференції наступний екстремум (мінімум) отримували за $\Delta = \lambda / 2$, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pi$, коли амплітуди обох пучків мали протилежний знак. Тепер (у чотирипроменевої інтерференції) перший мінімум отримуємо раніше, за $\Delta = \frac{\lambda}{4}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$. Амплітуда кожного пучка запізнюється щодо попереднього на 90° , а всі разом утворюють квадрат з нульовою результуючою амплітудою (рис. 6.40, б).

Подальше збільшення і різниці ходу Δ , і різниці фаз δ дає величину амплітуди поля $E_{3\text{рез}} = E_0$, коли $\Delta = \frac{\lambda}{3}$, $\delta = \frac{2\pi}{3}$, а кожний вектор повертається відносно попереднього на 120° (рис. 6.40, в). За $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ та $\delta = \pi$ по два пучки приходять на екран у протифазі, що дає $E_{4\text{рез}} = 0$ (рис. 6.40, г).

При подальшому збільшенні різниці ходу до величини $\Delta = \frac{2\lambda}{3}$, $\delta = \frac{4\pi}{3}$, графічно сума амплітуд знову дає трикутник, $E_{5\text{рез}} = E_0$ (рис. 6.40, д). За $\Delta = \frac{3\lambda}{4}$, $\delta = \frac{3\pi}{2}$ амплітуди хвиль від кожного променя відстають на 90° від попередньої, усі разом утворюють квадрат амплітуди результуючої хвилі $E_{6\text{рез}} = 0$, спостерігаємо мінімум (рис. 6.40, е).

Нарешті, при зміні різниці ходу на λ і різниці ходу на 2π усі чотири пучки приходять у фазі і дають максимум $E_{7\text{рез}} = 4E_0 \Rightarrow I_{7\text{рез}} = 16I_0$ (рис. 6.40, є). Очеви-

дно, що подальше збільшення різниці ходу Δ і різниці фаз δ приведе до повторення отриманої картини.

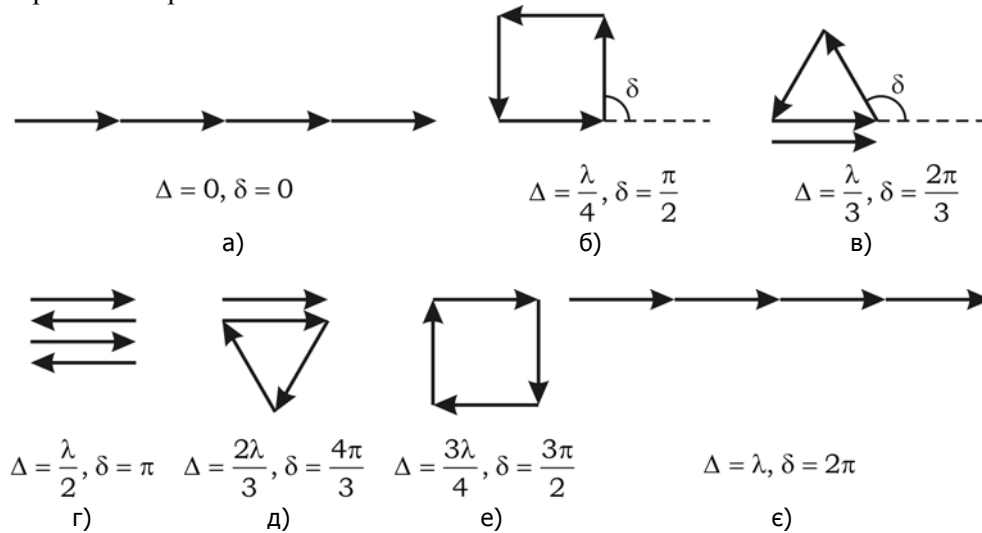


Рис. 6.40. Схема виникнення інтерференції в результаті додавання чотирьох променів з відповідною різницею фаз (δ) і різницею ходу (Δ)

Якщо у вирази для різниці ходу Δ і різниці фаз δ ввести замість чотирьох променів довільну (N) кількість променів, отримаємо загальний вираз для мінімумів:

$$\Delta = \frac{m\lambda}{N}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad m \neq N. \quad \text{За } m = N \text{ замість мінімуму отримаємо максимум з інтенсивністю } N^2 I_0.$$

Такі максимуми називають *головними*. Між цими максимумами утворюється $(N-1)$ мінімумів. Так звані вторинні максимуми спостерігаються за

$$\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{N}, \quad m \neq N, N-1, \quad \text{тому що ці, найближчі до головних, значення } \Delta \text{ не дають екстремумів.}$$

Із тієї самої причини головні максимуми мають кутові розміри вдвічі більші, ніж вторинні.

Зауважимо, що кількість вторинних максимумів між сусідніми головними максимумами є $(N-2)$, а інтенсивність приблизно в N^2 разів менша. Перший мінімум тепер утворюється при різниці ходу Δ між кожним із них $\Delta = \lambda/4$, картина стає значно контрастнішою.

При інтерференції N променів інтенсивність зростає пропорційно N^2 , а перший мінімум виникає за різниці ходу $\Delta = \lambda/N$. За великих значень N вторинні максимуми стають непомітними, інтерференційна картина виглядає як різкі смуги на темному фоні.

6.3.4. Зобразіть, як розподіляється інтенсивність при інтерференції багатьох променів: $N = 2, 3, 4, 5$.

У випадку інтерференції двох променів ($N = 2$) розподіл інтенсивності по інтерференційній картині відбувається за законом (6.17)

$$I_P \sim (E_{0P})^2 = 4E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{k \cdot \Delta}{2} = 2E_0^2 [1 + \cos(k \cdot \Delta)], \quad (\text{рис. 6.41, а}). \quad \text{За } k \cdot \Delta = \delta = 2\pi m,$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$, інтенсивність набуває максимальних значень $I_{\max} = 4E_0^2$, а за $\delta = (2m + 1)\pi/2$ інтенсивність набуває мінімальних значень $I_{\min} = 0$. Смуги при цьому мають розмитий вигляд, і тому важко зафіксувати положення максимуму або мінімуму, що невигідно для практичного використання інтерференції. Для отримання вузьких інтерференційних смуг, розділених чіткими проміжками, необхідно реалізувати інтерференцію багатьох світлових променів.

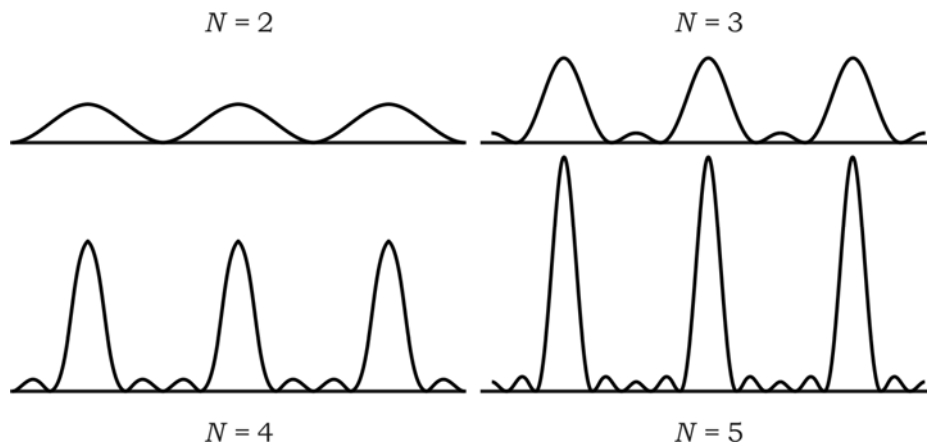


Рис. 6.41. Розподіл інтенсивності при інтерференції багатьох променів: $N = 2, 3, 4, 5$.

(На рисунку не дотримана пропорція в інтенсивностях у максимумах: при інтерференції N променів інтенсивність зростає пропорційно N^2)

Для того, щоб скористатись багатопрменевою інтерферометрією, використовують випадки, коли коефіцієнти відбиття великі. Це досягається або завдяки нанесенню на відбиваючі поверхні тонкої плівки речовини з великим коефіцієнтом відбиття, або завдяки великим кутам падіння. При інтерференції $N = 3, 4, 5, \dots$ променів однакової амплітуди виникає ряд однакових за інтенсивністю головних максимумів з $I_{\max} = N^2 E_0^2$. Між сусідніми головними максимумами існують $(N - 1)$ мінімумів і $(N - 2)$ вторинних максимумів (рис. 6.41, а-г). При збільшенні кількості N променів, що інтерферують, головні максимуми стають більш різкими, а між ними розташовується все більша кількість слабких вторинних максимумів. За вели-

кого значення N вторинні максимуми практично зливаються і дають лише фон між головними максимумами.

6.3.5. Від чого залежать різкість (контрастність) і ширина інтерференційних смуг, утворених за допомогою інтерферометра Фабрі–Перо?

Різкість (контрастність), і ширина інтерференційних смуг в інтерферометрі Фабрі–Перо суттєво залежать від коефіцієнта відбиття пластин інтерферометра. Максимуми інтерференційної картини тим вужчі і тим контрастніші, чим більша відбиваюча здатність поверхонь пластин інтерферометра. Коефіцієнт відбиття R може досягати величини (95–98) %.

Для характеристики форми контуру інтерференційної смуги, отриманої від інтерферометра Фабрі–Перо, а також її контрастності, введено величину (6.49), яка

називається фактором різкості $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$, і величину (6.53), яка називається рі-

зкістю $\tilde{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

6.3.6. Чим відрізняються результати багатопроменевої інтерференції у випадку спостереження інтерференційної картини у світлі, що проходить, та у випадку світла, що відбивається?

У світлі, що проходить, утворюються контрастні світлі смуги на широкому майже темному фоні (рис. 6.42, а). У відбитому світлі інтерференційна картина має вигляд чітких темних смуг на широкому світлому фоні (рис. 6.42, б).

Розподіл інтенсивності по інтерференційній картині істотно залежить від коефіцієнта відбиття R поверхонь пластинки.

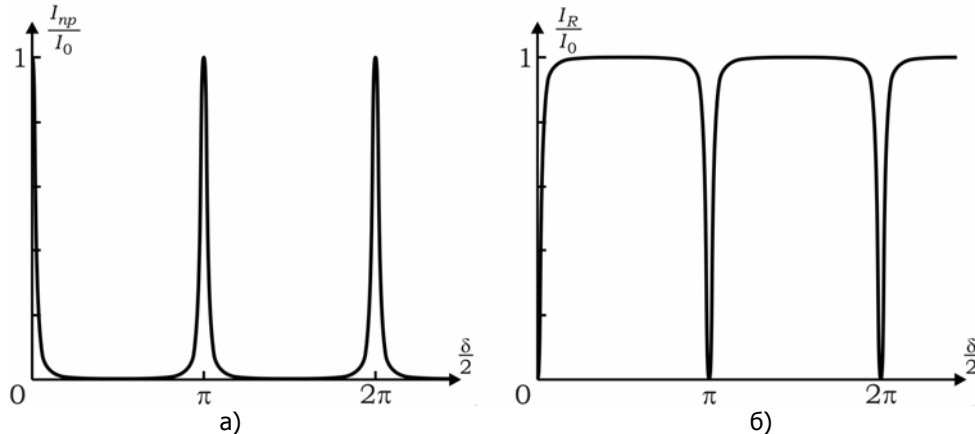


Рис. 6.42. Залежності відношення сумарних інтенсивностей пучків світла, що проходить (I_{np}) (а) і відбивається (I_R) (б) до інтенсивності I_0 світлового пучка, який падає на пластину багатопроменевого інтерферометра, від зсуву фаз δ між двома сусідніми променями

6.3.7. Який фізичний зміст має характеристика інтерференційних смуг у багатопроменевої інтерференції – різкість \tilde{F} ?

Різкість (6.53) $\tilde{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ інтерференційної смуги характеризує її форму. Вона визначається як відношення відстані між двома сусідніми максимумами інтерференції до їх ширини ε , тобто ширини максимуму на половині його висоти, де $\frac{I_{np}}{I_0} = 0,5$ (рис. 6.43).

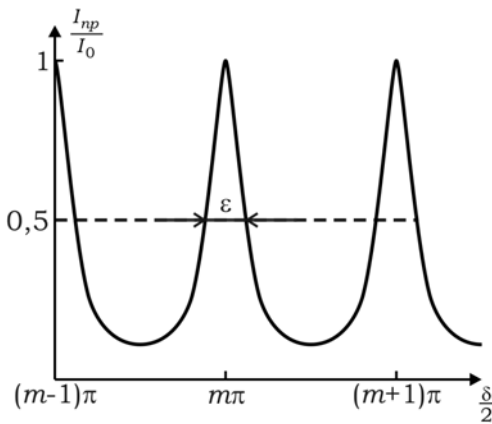


Рис. 6.43. Розподіл інтенсивності світла, що проходить, на інтерференційній картині, залежно від різниці фаз δ між сусідніми променями в багатопроменевої інтерференції

За формулою (6.48) $\frac{I_{np}}{I_0} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$. Це відношення набуває значення 0,5

за $\frac{\delta}{2} = m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2}$, де m – ціле число. Оскільки ε мале, то можна вважати, що

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2. \text{ Таким чином, } \sqrt{F} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

Оскільки відстань між сусідніми смугами відповідає зміні величини $\delta/2$ на π , для різкості виконується співвідношення (6.53): $\tilde{F} = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$. Як бачимо, різкість \tilde{F} , яка характеризує форму контуру інтерференційної смуги, повністю визначається величиною коефіцієнта відбиття R . За $R \rightarrow 1$ величина $\tilde{F} \rightarrow \infty$.

Для дзеркал, які використовуються в реальних багатопроменевих інтерферометрах, величина $R \approx 0,9$, тоді величина $\tilde{F} \approx 30$ (рис. 6.44). Це означає, що відстань між двома сусідніми максимумами в цьому випадку ($R \approx 0,9$) приблизно в 30 разів більша за ширину ε кожної із них.

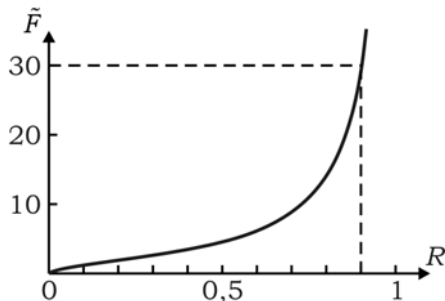


Рис. 6.44. Залежність різкості \tilde{F} інтерференційної смуги від коефіцієнта відбиття R

6.3.8. І у схемі спостереження кілець Ньютона, і в інтерферометрі Фабрі–Перо спостерігають картину у вигляді концентричних кілець. Чим відрізняються вони між собою? Обидві картини спостерігаються в монохроматичному світлі з однаковою довжиною хвилі.

По-перше, у схемі спостереження кілець Ньютона спостерігаються смуги рівної товщини, у центрі утворюється пляма нульового порядку. Зі збільшенням порядку інтерференції кільця стають щільнішими на периферії. В інтерферометрі Фабрі–Перо спостерігаються смуги рівного нахилу, де в центрі утворюється пляма з максимальним порядком інтерференції. Зі збільшенням кута падіння променів на інтерферометр різниця ходу $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ зменшується, а діаметри інтерференційних кілець збільшуються майже рівномірно.

По-друге, вимоги до когерентності променів для цих двох схем різні. Для кілець Ньютона обов'язкова висока просторова когерентність – пучок світла має бути паралельним, тоді як до часової когерентності вимоги низькі, адже працюємо з близькими до нуля порядками інтерференції. В інтерферометрі Фабрі–Перо застосовують потужні джерела випромінювання (адже через високі коефіцієнти відбиття він пропускає кілька процентів падаючого світла) великих розмірів. А різниця ходу в центрі інтерференційної картини сягає міліметрів чи сантиметрів. Тому порядки інтерференції тут $\sim 10^5$, а монохроматичність сягає значень $\Delta\lambda = 10^{-5}\lambda$. Зазначимо, що наведені вище різні умови спостереження загальні для смуг рівної товщини та рівного нахилу.

Окрім того, необхідно окремо зупинитись на такому випадку: у кілець Ньютона інтенсивність змінюється за законом $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, поступово спадаючи від $(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ до $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$, а в інтерферометрі Фабрі–Перо інтенсивність змінюється за законом $I = \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$, де I_0 – інтенсивність падаючого світла, а

$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ – фактор різкості, R – коефіцієнт відбиття дзеркал. Зазвичай в інтер-

ферометрі Фабрі–Перо $R > 0,9$, а $F \approx 10^2 \div 10^3$. Тому за дуже малої зміни різниці ходу інтенсивність швидко спадає від I_0 до нуля, інтерференційні кільця стають дуже різкими, розділеними широкими темними проміжками. Зокрема, це дозволяє використовувати інтерферометр Фабрі–Перо як спектральний прилад надвисокої роздільної здатності: висока різкість інтерференційних ліній дозволяє зафіксувати окремо дуже близькі за довжиною хвилі λ спектральні лінії.

6.4. Застосування інтерференції. Інтерферометри

6.4.1. Короткі теоретичні відомості

- *Просвітлювальні покриття* наносять на поверхню оптичних елементів (лінз, пластинок) з метою збільшення їх коефіцієнтів пропускання. В основі роботи просвітлювального покриття лежить багатопроренева інтерференція, у результаті якої відбита від покриття амплітуда результуючої хвилі зменшується (наближається до нуля). Це призводить до зменшення коефіцієнта відбиття, тобто до збільшення коефіцієнта пропускання. Багатошарові покриття складається з декількох шарів із різними показниками заломлення n_i і товщинами d_i , близькими до довжини світлової хвилі.

Якщо розглянути інтерференцію двох хвиль, які відбиваються від лівої й правої меж i -го шару, то оптична різниця ходу визначається таким чином:

$$\Delta_i = 2n_i d_i, \quad (6.54)$$

а фазовий зсув відбитої від правої межі хвилі дорівнює

$$2\delta_i = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_i = \frac{4\pi}{\lambda} n_i d_i. \quad (6.55)$$

Формули (6.52) і (6.53) справедливі за умові, якщо $n_{i-1} < n_i < n_{i+1}$. Якщо ця умова не виконується, то необхідно враховувати втрату $\lambda/2$ при відбитті хвилі від оптично більш щільного середовища.

- *Амплітудний коефіцієнт відбиття* одношарового просвітлювального покриття в загальному випадку визначається як

$$r = \frac{(n_0 - n_2) \cos \delta_1 + i(n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1) \sin \delta_1}{(n_0 + n_2) \cos \delta_1 + i(n_0 n_2 n_1^{-1} + n_1) \sin \delta_1}, \quad (6.56)$$

де n_0, n_1, n_2 – показники заломлення середовища, просвітлювального покриття і скла, відповідно; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; δ_1 – зсув фаз між хвилями променів, що інтерферують.

На рис. 6.45 промені $1', 2'$ – відбиті на першій і другій межі поділу середовищ, це промені, які інтерферують.

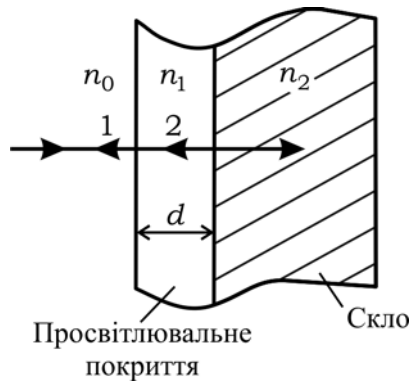


Рис. 6.45. Одношарове просвітлювальне покриття

- Для того, щоб амплітудний коефіцієнт відбиття $r = 0$, як випливає з (6.56), показник заломлення покриття, яке наноситься на поверхні оптичного елемента, має відповідати величині, яка визначається за формулою

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}; \quad (6.57)$$

а товщина просвітлювального покриття згідно з умовою мінімуму для інтерферуючих променів визначається за формулою

$$d = \frac{(2m + 1) \lambda_0}{4 n_1}, \quad (6.58)$$

де λ_0 – робоча довжина хвилі, яка відповідає середині робочого спектрального діапазону оптичного елемента, що просвітлюється; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

- *Енергетичний коефіцієнт відбиття* одношарового просвітлювального покриття визначається за формулою

$$R = |r|^2 = r \cdot r^* = \frac{(n_0 - n_2)^2 \cos^2 \delta_1 + (n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1)^2 \sin^2 \delta_1}{(n_0 + n_2)^2 \cos^2 \delta_1 + (n_0 n_2 n_1^{-1} + n_1)^2 \sin^2 \delta_1}. \quad (6.59)$$

Поряд із необхідністю зменшувати коефіцієнт відбиття на практиці існує і протилежне завдання – необхідність отримувати сильно відбиваючі інтерференційні покриття (інтерференційні дзеркала). Такі дзеркала широко використовуються, наприклад, у лазерах.

6.4.2. Запитання та відповіді

6.4.1. *Сформулюйте фізичний принцип, на якому засноване просвітлення оптики.*

Просвітлення оптики засноване на використанні інтерференції. Тонкий діелектричний шар (просвітлювальну плівку) з показником заломлення n_1 наносять на поверхню оптичного елемента (зазвичай це скло) з показником заломлення n_2 , відбиття світла від якого прагнуть зменшити (рис. 6.45). Оптична система розташована

в середовищі з показником заломлення n_0 . Зазвичай середовище – повітря ($n_0 = 1$). Співвідношення між показниками заломлення обирають таким: $n_0 < n_1 < n_2$.

Промінь 1, відбитий від межі повітря – діелектричний шар (просвітлювальна плівка), і промінь 2, відбитий від межі діелектричний шар – скло, когерентні й мають інтерферувати. Якщо оптична різниця ходу між ними дорівнює $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$, тобто виконується умова мінімуму, то результуючий відбитий промінь буде відсутнім.

Розрахунок ведеться для нормального падіння світла, тобто для інтерференційного максимуму з $m = 0$.

6.4.2. Відомо, що показник заломлення n_1 просвітлювального шару визначають за формулою $n_1 = \sqrt{n_0 \cdot n_2}$. Доведіть це.

Амплітуди променів 1' та 2' мають бути однаковими. Для цього треба, щоб виконувалась рівність коефіцієнтів відбиття від меж поділу діелектриків $R_{12} = R_{23}$, які для нормального падіння променя дорівнюють

$$R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \right)^2 \text{ та } R_{23} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \Rightarrow n_1 = \sqrt{n_0 \cdot n_2}.$$

6.4.3. Відомо, що мінімальну товщину d просвітлювального шару визначають за формулою $d = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_0 n_2}}$. Доведіть це.

Для нормального падіння променів оптична різниця ходу між променями 1 та 2 (рис. 6.45) з урахуванням умови мінімуму інтенсивності інтерферуючих променів та отриманої вище формули (6.57) дорівнює

$$\Delta_{21} = 2d n_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_0 n_2}}.$$

6.4.4. З якою метою для просвітлення оптики на її поверхню наносять не один, а 3–5 шарів?

Один шар просвітлює оптику для світла однієї довжини хвилі. Проте зазвичай оптичний елемент працює з білим світлом, у якому наявний широкий спектр довжин хвиль. Для різних λ відповідно різні товщини d просвітлювального шару і різні значення показників заломлення через існування їх дисперсій. Тому просвітлення, зазвичай, роблять для жовто-зеленого діапазону спектра у вигляді 3–5 шарів.

6.4.5. Що треба змінити в схемі побудови просвітлювальної оптики, щоб перейти до схеми дзеркала?

Для цього треба створити структуру, подібну до випадку просвітлювального шару (рис. 6.45), а саме: на підкладку зі скла нанести діелектричну плівку, але з показником заломлення $n_1 > n_0$, а не $n_1 < n_0$, як раніше. Якщо раніше втрата півхвилі відбувалась на обох поверхнях (повітря–плівка і плівка–скло), то тепер втрата півхвилі

відбудеться лише на зовнішній поверхні півки й оптична різниця ходу між відбитими хвилями 1' та 2' відповідатиме умові максимуму $m\lambda$. На жаль, таким способом вдається отримати коефіцієнт відбиття не більше за 30%. Цього недоліку позбавлені діелектричні дзеркала, які використовують багатопроменеву інтерференцію.

6.4.6. Сформулюйте фізичні принципи, на яких заснована робота інтерференційних (діелектричних) дзеркал.

Робота інтерференційних (діелектричних) дзеркал, які характеризуються вузькою смугою спектра відбитих променів і великим коефіцієнтом відбиття (до 99%) заснована на використанні багатопроменевої інтерференції. Принцип дії інтерференційних (діелектричних) дзеркал подібний до дії інтерферометра Фабрі–Перо з дуже малою відстанню між пластинками ($d \sim$ декількох λ).

Для того, щоб створити інтерференційне дзеркало (рис. 6.46), на поверхню підкладки прозорого діелектрика з показником заломлення n_0 (напр., скло) наносять тонкий діелектричний шар 1 з показником заломлення n_1 , а потім – шар 2 з показником заломлення n_2 , потім ще один шар 3 з показником заломлення n_1 і т. д., всього 7–11, а інколи 20–25 шарів. Співвідношення між показниками заломлення обирають таким, щоб $n_1 > n_2$ (напр., сульфід цинку з $n_1 = 2,3$ і кріоліту (Na_3AlF_6) або фториду літію (LiF) з $n_2 = 1,3$).

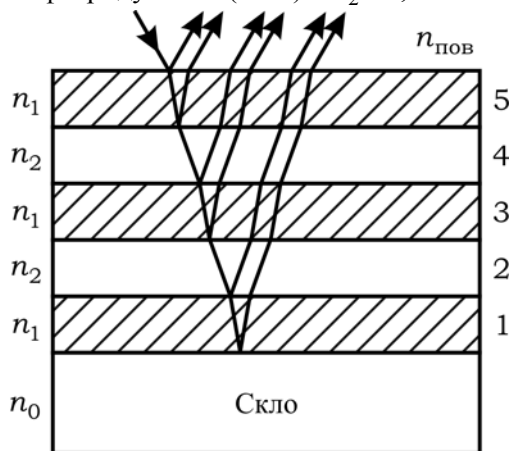


Рис. 6.46. Приклад п'ятишарового інтерференційного дзеркала (до запитання 6.4.7)

Розглянемо принцип роботи діелектричних дзеркал. На діелектричний шар із середовища з показником заломлення $n_{\text{пов}}$ падає пучок оптичних променів, які на відповідних межах середовищ відбивається і заломлюється, у результаті чого з поверхні дзеркала на межі виходять промені: 1 – відбитий від межі "повітря–шар 5"; 2 – відбитий від межі шарів 5 і 4; 3 – відбитий від межі шарів 4 і 3 тощо. Ці промені когерентні і мають інтерферувати. Якщо оптична різниця ходу між ними $\Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, тобто, якщо виконується умова мінімуму, то відбитий пучок буде відсутнім і отримаємо провітлену оптику. Якщо оптична різниця ходу між проме-

нями $\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$, тобто, якщо виконується умова максимуму, то спостерігається дзеркальне відбиття променів. Як бачимо, при створенні діелектричних дзеркал розв'язується задача, протилежна тій, яка використовується при просвітленні оптики.

При виборі речовин для шарів необхідно враховувати, що вони повинні не тільки мати максимально різні показники заломлення, а також бути прозорими на потрібній спектральній ділянці та утворювати однорідні шари речовин, які міцно сполучаються між собою. При послідовності шарів на пластинці, показаній на рис. 6.47, товщина непарних шарів (1,3,5,..) $d_1 = \frac{(m+1/2)\lambda}{2n_1}$, а парних – $d_2 = \frac{(m-1/2)\lambda}{2n_2}$, якщо врахувати зміни фази при відбитті від середовища з більшим показником заломлення ($n_1 > n_2$).

6.4.7. *З якою метою для створення діелектричних дзеркал наносять багато (10–20) шарів?*

Ураховуючи, що для прозорих діелектриків показник заломлення набуває значень від 1 до 2, за умови одноразового відбиття отримати велике значення коефіцієнта відбиття неможливо. Тому на прозору пластинку (припустимо, скляну) наносяться по чергово кілька шарів діелектриків (приблизно $10 \div 20$).

Окрім того, застосування великої кількості шарів робить інтерференцію із двопрменевою багатопрменевою, для якої коефіцієнт відбиття R визначає спектральну ширину лінії відбитого світла (див. запитання 6.3.6 та 6.3.7).

6.4.8. *Чим за властивостями відрізняються діелектричні інтерференційні дзеркала від металевих дзеркал? Де використовуються інтерференційні дзеркала?*

Одна із основних особливостей діелектричних дзеркал порівняно з металевими дзеркалами полягає в тому, що вони селективні. Ця особливість може виявитись як їх недоліком, так і перевагою залежно від покладеної на них функції. Проте діелектричні дзеркала мають і беззаперечні переваги: для обраної довжини хвилі для них можна досягти значення коефіцієнта відбиття $R \approx 0,99$, тоді як для металевих досягають максимум $R = 0,96$. Решта (4 %) поглинається металом, тоді як діелектричне дзеркало відбиває 99 %, а 1% пропускає. Саме тому для лазерів використовують майже виключно діелектричні, а не металеві дзеркала: адже добротність резонатора залежить від коефіцієнтів відбиття дзеркал на торцях. Окрім того, треба пам'ятати, що навіть 4 % поглинутої енергії виділяється у вигляді теплової енергії, нагрівають дзеркало, у результаті чого його параметри змінюються ("пливуть"), а при роботі з потужними лазерами вони здатні навіть зруйнувати металеву поверхню дзеркала.

6.4.9. *Сформулюйте фізичні принципи, на яких заснована робота інтерференційних (діелектричних) світлофільтрів.*

Існують декілька принципів побудови інтерференційних світлофільтрів. Окрім того, вони бувають двох типів – "на прохід" і "на відбиття". Розглянемо один із

найпоширеніших принципів побудови інтерференційних світлофільтрів – "на прохід". Він заснований на принципі застосування інтерферометра (еталона) Фабрі–Перо з використанням діелектричних дзеркал як напівпрозорих пластин.

Беруть два діелектричних дзеркала з максимумом відбиття на певній довжині хвилі λ_0 і з'єднують їх між собою тонким шаром діелектрика з показником заломлення n_0 , що вносить різницю ходу, кратну λ_0 ($2n_0d_0 = m\lambda_0$). Ця структура буде еталоном Фабрі–Перо з оптичною різницею ходу променя між дзеркалами $2n_0d_0$ (рис. 6.37) з вузькою шириною інтерференційного максимуму, яка залежить від величини різкості (див. запитання 6.3.7).

Для обраної довжини хвилі λ_0 пропускання в максимумі може бути близьким до 100%. Однак умова максимумів буде виконуватись і для інших довжин хвиль, для яких m буде цілим числом. Наприклад, для $2n_0d_0 = 2\text{мкм}$ умова максимумів виконується для $\lambda = 2\text{мкм}$ ($m = 1$); $\lambda = 1\text{мкм}$ ($m = 2$); $\lambda = 0,66\text{мкм}$ ($m = 3$); $\lambda = 0,5\text{мкм}$ ($m = 4$) і т. д. Тому шари, які утворюють інтерференційний світлофільтр, наносять не на прозоре скло, а на забарвлену пластинку (червону, зелену і т. д.), що поглинає світло з довжинами хвиль інших інтерференційних максимумів.

Ширина смуги пропускання інтерференційного світлофільтра визначається через роздільну здатність інтерферометра Фабрі–Перо:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} = \frac{2\pi d_0 \sqrt{R}}{\lambda_0(1-R)},$$

тут R – коефіцієнт відбиття діелектричних дзеркал на довжині хвилі λ_0 . Для не дуже великих коефіцієнтів відбиття $R = 0,9$ і $n_0d_0 = 1\text{мкм}$ для інтерференційного світлофільтра з максимумом пропускання на довжині хвилі $\lambda_0 = 500\text{нм}$ отримаємо ширину смуги пропускання $\Delta\lambda_{1/2} \approx 5\text{нм}$.

6.4.10. Порівняйте основні характеристики (смуги $\Delta\lambda$ і коефіцієнти T пропускання) інтерференційних фільтрів і фільтрів із кольорового скла.

За допомогою звичайного кольорового скла або зафарбованих желатинових плівок (адсорбційних світлофільтрів) можна виділити спектральну ділянку $\sim 50\text{нм}$. Їх пропускання в максимумі становить від 50% до 90%. Інтерференційні фільтри можуть давати смугу пропускання спектра $\Delta\lambda \sim 0,1\text{нм}$. Тому переваги інтерференційного світлофільтра очевидні: можна отримати світлофільтр з максимумом пропускання для будь-якої довжини хвилі з наперед визначеною шириною смуги пропускання. Це дозволяє в певних експериментах замінити призмові монохроматори набором інтерференційних світлофільтрів з наперед заданим кроком для довжин хвиль, адже така заміна дає суттєвий вигреш у світлосилі та зменшенні габаритів установки.

6.4.11. Як можна виміряти кутовий розмір зірки?

Виміряти кутовий розмір зірки можна за допомогою досліду з двома щілинами (метод Фізо) або за допомогою зоряного інтерферометра Майкельсона. Як побудовані зоряні інтерферометри та за якими принципами вони функціонують можна прочитати в [2] п. 60.

6.4.12. Розкажіть про застосування інтерференції світла в різних галузях науки і техніки.

До застосувань інтерференції в практичних дослідженнях слід віднести вимірювання: якості поверхні; малих довжин; малих товщин; малих кутів методом смуг рівної товщини; малих кутів методом зоряного інтерферометра, а також інтерференційну рефрактометрія, спектроскопію високої роздільної здатності тощо. Докладніші відомості про таке застосування, викладені в підручниках [7, розд. 4, § 5]; [1, гл. VII, § 28–32]; [12, гл. III, § 20]; [11, гл. V, § 4]; [14, гл. 6, § 6.1–6.4; гл. 7, § 7.1–7.4]; [9, § 3.6].

6.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. Для порівняння когерентних властивостей нелазерних джерел світла та лазерів визначте, за якої максимальної оптичної різниці ходу буде спостерігатись інтерференційна картина від:

а) газорозрядної лампи (червоної лінії парів кадмію із шириною лінії $\Delta\lambda = 0,001\text{нм}$ і довжиною хвилі $\lambda = 0,63\text{мкм}$);

б) лазера з довжиною хвилі $\lambda = 0,63\text{мкм}$ і шириною лінії випромінювання $\Delta\nu = 10\text{Гц}$.

Розв'язання: а) ступінь когерентності джерела можна визначити, ввівши до розгляду, наприклад, m_{\max} – максимальний порядок інтерференції, який визначається за формулою $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Для кадмієвої лампи

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0,63 \cdot 10^{-6}\text{ м}}{10^{-12}\text{ м}} = 6,3 \cdot 10^5.$$

Ця величина пов'язана з максимальної різницею ходу променів, за якої ще буде спостерігатись інтерференційна картина $\Delta_{\max} = m_{\max} \lambda = 6,3 \cdot 10^5 \cdot 0,63 \cdot 10^{-6}\text{ м} \approx 40\text{см}$.

Часова когерентність джерела характеризується довжиною когерентності $L_{\text{к}} = \Delta_{\max}$ або часом когерентності $\tau_{\text{к}} = \frac{L_{\text{к}}}{c} = \frac{0,4\text{м}}{3 \cdot 10^8\text{ м/с}} \approx 10^{-9}\text{ с}$;

б) оцінімо аналогічні величини для лазера. Спочатку визначимо $\Delta\lambda$ для лазера $\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$. Отже, $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \cdot \Delta\nu}{c} = \frac{(0,63)^2 \cdot 10^{-12} \cdot 10}{3 \cdot 10^8}\text{ м} = 0,13 \cdot 10^{-10}\text{ нм}$. Як

бачимо, величина $\Delta\lambda$ для лазера майже в 10^8 разів менша від такої самої величини для кадмієвої лампи.

Таким чином, для лазера

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{0,13 \cdot 10^{-19} \text{ м}} = 5 \cdot 10^{13};$$

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = m_{\max} \cdot \lambda = 5 \cdot 10^{13} \cdot 0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 30000 \text{ км} = L_{\text{к}}.$$

Час когерентності

$$\tau_{\text{к}} = \frac{L_{\text{к}}}{c} = \frac{3 \cdot 10^7 \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 0,1 \text{ с}.$$

Ось чому лазер часто називають джерелом когерентного монохроматичного випромінювання.

Приклад 6.2. *Наявність частки некогерентного світла у випромінюванні джерела світла призводить до зменшення видимості інтерференційної картини. Оцініть, чому дорівнює видність двопроменевої інтерференційної картини, якщо γ – частка когерентного світла, однакова для обох променів. (Відповідно, частка некогерентного світла дорівнює $(1 - \gamma)$).*

Розв'язання. Нехай промені, що інтерферують, мають інтенсивність $I_1 = I_2 = I_0$. Інтенсивність кожного пучка буде складатися з когерентної та некогерентної частин $I_1 = \gamma I_0 + (1 - \gamma) I_0$. Сумарна інтенсивність некогерентної частини буде додаватися (не інтерферуючи) і дорівнюватиме $2(1 - \gamma) I_0$. Для когерентної частини світла буде спостерігатися інтерференція $I_{\text{інт}} = 4I_0 \gamma \cos^2 \frac{\delta}{2}$. Загальна інтенсивність у точці спостереження дорівнює $I = 2I_0(1 - \gamma) + 4I_0 \gamma \cos^2 \frac{\delta}{2}$, або після невеликих перетворень $I = 2I_0(1 + \gamma \cos \delta)$.

Урахуємо, що видність інтерференційної картини V дорівнює

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad \text{тоді} \quad V = \frac{2I_0(1 + \gamma) - 2I_0(1 - \gamma)}{2I_0(1 + \gamma) + 2I_0(1 - \gamma)} = \gamma.$$

Таким чином, видність інтерференційної картини є мірою ступеня когерентності випромінювання. Якщо $\gamma = 1$, то $V = 1$ (за умови, що $I_1 = I_2$).

Приклад 6.3. *Як залежить видність інтерференційної картини когерентних хвиль від співвідношення їх інтенсивностей $\frac{I_1}{I_2} = n$, де $n = 1, 2, 3 \dots 10$?*

Розв'язання. Урахуємо, що видність V дорівнює $V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$, а відношення

інтенсивностей $\frac{I_1}{I_2} = n$. Тоді можна одержати, що $V = 2\sqrt{n} / (n + 1)$. Підставивши

значення $n = 1, 2, 3 \dots 10$, легко підрахувати, що видність спадає від 1 до 0,57.

Приклад 6.4. У двопробеному інтерферометрі використовується жовто-гаряча лінія ртуті, яка складається з двох спектральних компонентів: $\lambda_1 = 576,97 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 579,03 \text{ нм}$. У якому найменшому порядку інтерференції видність (контраст) інтерференційної картини буде найгіршою?

Розв'язання. Як випливає із відповіді до запитання 6.1.13, причиною періодичного просторового погіршення інтерференційної картини є збіг максимуму інтерференції від однієї лінії з мінімумом інтерференції від іншої: $m\lambda_2 = (2m + 1)\frac{\lambda_1}{2}$.

Найменший порядок інтерференції, за якого видність інтерференційної картини буде найгіршою для дублету ліній з наведеними в умові параметрами буде

$$m = \frac{\lambda_{\text{сер}}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 140.$$

Приклад 6.5 Паралельний пучок променів з довжиною хвилі $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$ падає нормально на поверхню скляного клина, кут між гранями якого $\alpha = 3'$. У відбитому світлі спостерігається система інтерференційних смуг. Знайдіть:

а) відстань Δx між сусідніми максимумами інтерференційної картини;

б) ступінь монохроматичності світла $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, якщо зникнення інтерференційних

смуг спостерігається на відстані $l \approx 1,5 \text{ см}$ від вершини клина.

Розв'язання. На рис. 6.47 наведена схема інтерференції світла на клині, у результаті якої отримуються смуги рівної товщини:

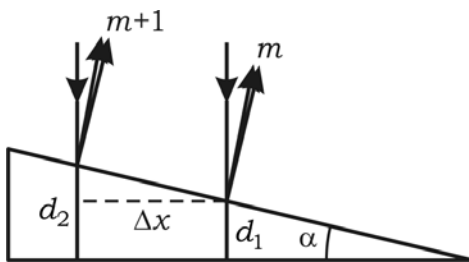


Рис. 6.47. До прикладу 6.5

а) інтерференція в даній схемі спостерігається завдяки накладанню променів, відбитих від різних поверхонь клина. Різниця ходу між інтерферуючими променями, якщо врахувати мализну кута між гранями клина, записується у вигляді

$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}$. Доданок $\frac{\lambda}{2}$ з'являється тому, що один із променів відбивається від межі з оптично більш густим середовищем.

Запишемо умову для двох послідовних максимумів інтерференції:

$$\begin{cases} 2d_2n + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda, \\ 2d_1n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \end{cases}$$

Звідси $2n(d_2 - d_1) = \lambda$. Із геометричних міркувань (рис. 6.47) випливає, що $\frac{d_2 - d_1}{\Delta x} \approx \alpha$. Об'єднуючи два останні вирази, отримуємо вираз для ширини інтерфе-

ренційної смуги $\Delta x \approx \frac{\lambda}{2n\alpha} \approx 0,21 \text{ мм}$;

б) якщо в інтерференції бере участь немонохроматичне світло, то відповідну інтерференційну картину можна представити як ряд максимумів, кожен з яких відповідає своїй довжині хвилі в діапазоні від λ до $\lambda + \Delta\lambda$ (рис. 6.48). Максимум інтенсивності 0-го порядку є загальним для всіх довжин хвиль. Зі збільшенням порядку інтерференції максимуми, які відповідають різним довжинам хвиль, будуть зміщуватись один відносно одного і накладатися, що призведе до розмиття інтерференційної картини. Зникнення картини відбудеться при накладанні максимуму $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ на максимум m -го порядку для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ (рис. 6.48). Справді, при цьому між максимумами m -го та $(m+1)$ -го порядку для довжини хвилі λ розташуються послідовно максимуми m -го порядку для всього інтервалу довжин хвиль.

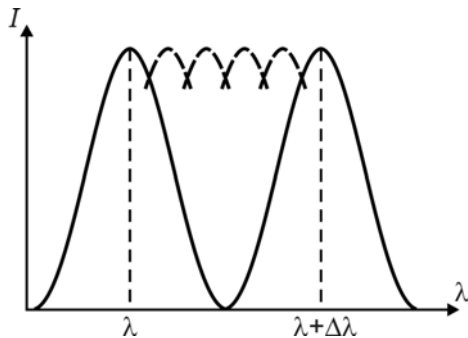


Рис. 6.48. До прикладу 6.5

Умову зникнення інтерференційної картини можна записати як $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$ (порівняйте цей вираз з умовою погіршення видимості інтерференційної картини з прикладу 6.4). Ця умова дозволяє отримати можливу макси-

мальну кількість видимих інтерференційних смуг $m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, яка обумовлюється часовою когерентністю схеми. З іншого боку, цю саму кількість можна отримати, знаючи з умови прикладу, що інтерференційна картина з періодом Δx зникає на відстані l від вершини клина $l = m_{\max} \cdot \Delta x \Rightarrow m_{\max} = \frac{l}{\Delta x}$.

Прирівнюючи обидва вирази для m_{\max} , отримаємо ступінь монохроматичності світла $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta x}{l} = \frac{\lambda}{2n\alpha \cdot l} = 0,014$.

Приклад 6.6. Відстані від біпризми Френеля до джерела світла у вигляді вузької щілини і до екрана з інтерференційною картиною дорівнюють $a = 25\text{ см}$ та $b = 25\text{ см}$, відповідно. Біпризма скляна із заломлюючим кутом $\theta = 20'$. Знайдіть довжину хвилі світла, якщо ширина інтерференційної смуги на екрані становить $\Delta x = 0,55\text{ мм}$.

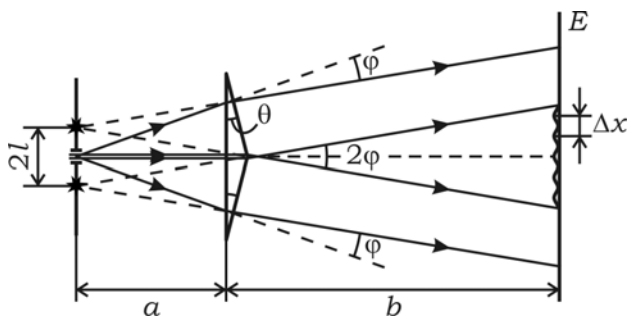


Рис. 6.49. До прикладу 6.6

Розв'язання. Ширина інтерференційної смуги для схем двопробеневої інтерференції визначається виразом (6.49) $\Delta x = \frac{\lambda}{\Omega}$, де λ – довжина хвилі світла в інтерферуючих пучках, Ω – кутова відстань між уявними джерелами, виміряна з центра інтерференційної картини у схемах двопробеневої інтерференції. Для схеми з біпризмою Френеля (рис. 6.49) величина $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2l}$. Тут через $2l$ позначено відстань між уявними джерелами світла, які утворюються в результаті відхилення променів на кут φ при проходженні світла крізь біпризму. Для призм з малим заломлюючим кутом θ кут відхилення $\varphi = (n-1)\theta$. Із рис. 6.49 видно, що $2l = 2\varphi \cdot a = 2a(n-1)\theta$.

Тепер можемо записати вираз для ширини інтерференційної смуги $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}$. Звідси можна визначити довжину хвилі світла в інтерферуючих пучках:

$$\lambda = \frac{2a(n-1)\theta}{(a+b)} \Delta x = 0,6 \text{ мкм}.$$

Насамкінець зазначимо, що метод дослідження інтерференції історично був першим, який дозволив експериментально визначити довжину хвилі світла.

Приклад 6.7. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$ падає нормально на основу скляної біпризми ($n = 1,52$) із заломлюючим кутом $\theta = 5^\circ$. За біпризмою (рис. 6.50) розташована плоско-паралельна скляна пластинка того самого типу скла, що і біпризма, а простір між ними заповнено бензолом ($n' = 1,50$). Знайдіть ширину інтерференційної смуги на екрані, розташованому за цією системою.

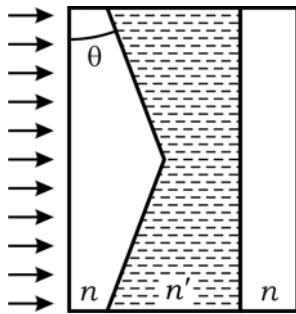


Рис. 6.50. До прикладу 6.7

Розв'язання. Розглянемо проходження окремого променя світла через таку систему. Промінь відхиляється в результаті заломлення на задній поверхні біпризми (рис. 6.51). Враховуючи мализну кутів, закон Снеліуса можна записати як $n\theta = n'\theta'$. Тоді кут відхилення $\varphi = \theta' - \theta = \left(\frac{n}{n'} - 1\right)\theta$.

Плоско-паралельна пластинка не вносить змін у напрямок поширення променів після біпризми, але за рахунок того, що вона розділяє два середовища з різними показниками заломлення (бензол і повітря), спостерігатиметься заломлення вихідного променя. Остаточний кут відхилення $\alpha = n'\varphi = \theta(n - n')$.

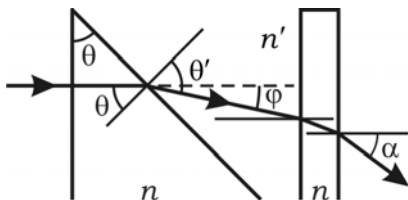


Рис. 6.51. До прикладу 6.7

Таким чином, на екрані інтерферуючі промені сходяться під кутом 2α . Відповідно, ширина інтерференційної смуги становить $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2(n-n')\theta} = 0,2 \text{ мм}$.

Для чого потрібен такий складний метод реалізації інтерференційної схеми з біпризмою Френеля? У попередньому прикладі 6.6 ми розглянули більш просту, традиційну схему з біпризмою Френеля. Оцінімо величину заломлюючого кута біпризми, необхідного для отримання інтерференційної картини з таким самим періодом,

як у даному прикладі. Формула $\Delta x = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}$ (див. приклад 6.6) з урахуванням

паралельності падаючого пучка ($a \rightarrow \infty$) перетворюється на $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\theta}$. Звідси

$\theta = \frac{\lambda}{2(n-1)\Delta x} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \approx 0,19^\circ$. Виготовлення біпризми з таким малим заломлю-

ючим кутом викликає значні технічні труднощі. Водночас для схеми, описаної в цьому прикладі, величина $\theta = 5^\circ$ має цілком прийнятне значення.

Приклад 6.8. Плоско-опукла скляна лінза з радіусом кривини сферичної поверхні $R = 12,5 \text{ м}$ притиснута до скляної пластини. Діаметри 10-го та 15-го темних кілець Ньютона у відбитому світлі дорівнюють $d_{10} = 1,0 \text{ см}$ і $d_{15} = 1,5 \text{ см}$. Визначте довжину хвилі світла.

Розв'язання. Зазначимо, що в умові задачі лінза до пластини притиснута. Це означає, що місце стикування цих елементів установки вже не є математичною точкою, тому в результаті деформації отримаємо область контакту з реальними фізичними розмірами.

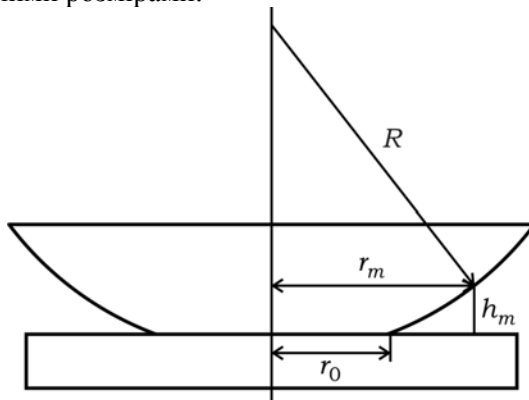


Рис. 6.52. До прикладу 6.8

Розглянемо рис. 6.52. Інтерференційні смуги рівної товщини локалізуються на поверхні повітряного клина між сферичною поверхнею лінзи і пластинною. Темні кільця утворюються в місцях, де товщина клина h_m відповідає умові інтерферен-

ційного мінімуму: $2h_m + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Додаткова різниця ходу $\frac{\lambda}{2}$ між інтерферуючими променями з'являється за рахунок відбиття одного з них від оптично більш густого середовища.

Виходячи з геометричних міркувань, запишемо товщину повітряного клина, яка відповідає певному кільцю радіуса r_m : $h_m = \left(R - \sqrt{R^2 - r_m^2}\right) - \left(R - \sqrt{R^2 - r_0^2}\right)$. Тут r_0 – радіус області фізичного контакту між лінзою та пластиною. Скористаємось тим, що $R \gg r_m, r_0$. За такої умови підкореневі вирази можна привести до вигляду

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha \ll 1). \text{ Тоді вираз для } h_m \text{ набуде вигляду } h_m \approx \frac{r_m^2}{2R} - \frac{r_0^2}{2R}.$$

Запишемо умови мінімумів для двох темних кілець:

$$\frac{r_m^2 - r_0^2}{R} = m\lambda, \quad \frac{r_k^2 - r_0^2}{R} = k\lambda.$$

Звідси $r_m^2 - r_k^2 = (m-k)\lambda R$. Перейдемо від радіусів кілець до їх діаметрів і запишемо

$$\text{вираз для довжини хвилі світла } \lambda = \frac{d_m^2 - d_k^2}{4R(m-k)};$$

$$\lambda = \frac{(2,25-1) \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 12,5(15-10)} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,5 \text{ мкм}.$$

Зверніть увагу на те, що розв'язок задачі не залежить від розмірів області контакту r_0 . Це означає, що експериментальне визначення довжини хвилі світла у схемі кілець Ньютона дає правильний результат, незалежно від деформації лінзи та пластини в області їх контакту.

Приклад 6.9. Знайдіть для еталона Фабрі–Перо, товщина якого $d = 2,5$ см : а) максимальний порядок інтерференції світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,50$ мкм ; б) дисперсійну ділянку $\Delta\lambda$, якщо дослідження проводити поблизу $\lambda = 0,50$ мкм .

Розв'язання: а) максимальний порядок інтерференційної картини (m_{\max}) можна визначити, застосувавши формулу (6.11): $m_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\lambda}$. Якщо простір між пластинами заповнений повітрям ($n_2 \approx 1$), то у визначенні оптичної різниці ходу $\Delta = 2d \cos\theta$ її значення буде максимальне, якщо величина $\cos\theta = 1$. Тоді $m_{\max} = \frac{2d}{\lambda}$. Для даних з умови цього прикладу $m_{\max} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{0,5} = 10^5$;

б) дисперсійна ділянка (її ще називають ділянкою (областю) вільної дисперсії) G , якою характеризується будь-який спектральний прилад, у тому числі й інтерфе-

рометр Фабрі – Перо, – це певної ширини спектральний діапазон $\Delta\lambda$, у межах якого ще не перекриваються спектри сусідніх порядків.

Визначимо, чому дорівнює G . Перекриття спектрів сусідніх (m -го з $(m+1)$ -м) порядків вказує на те, що під одним кутом θ спостерігаються (накладаються) два максимуми. Умова цього така:

$$2d \cos \theta = (m+1)\lambda \quad \text{та} \quad 2d \cos \theta = (\lambda + \Delta\lambda)m. \quad (6.58)$$

Прирівнюючи праві частини виразів з (6.58), маємо

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \lambda = m \cdot \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Тобто, якщо при роботі зі спектральним приладом (зокрема, інтерферометром Фабрі–Перо) є намагання працювати з найвищим порядком інтерференції (при цьому отримується максимальна роздільна здатність), дисперсійна ділянка дорівнює

$$G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}}. \quad (6.59)$$

Як бачимо, величина дисперсійної ділянки обернено пропорційно залежить від максимального значення інтерференційного порядку. Чим більше значення m_{\max} , тим менша величина G . Вимоги розширення дисперсійної ділянки та підвищення роздільної здатності суперечать одна одній. Оскільки в інтерферометрі Фабрі–Перо зазвичай використовують спектри високих порядків, то величина G мала. Для інтерферометра Фабрі–Перо, для якого визначено, що $m_{\max} = 10^5$, параметр G становить величину

$$G = \frac{0,5 \text{ мкм}}{10^5} = 0,05 \text{ \AA}.$$

Примітка: продовжуючи розгляд (6.59), отримаємо величину частотної дисперсійної ділянки (через діапазон частот):

$$G_v = \Delta\nu = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda^2} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{m\lambda} = \frac{c}{2d}. \quad (6.60)$$

Як видно з (6.60), частотна дисперсійна ділянка є сталою величиною, однозначно пов'язаною лише з товщиною d інтерферометра і не залежить від порядку інтерференції m . Завдяки цій властивості інтерферометр Фабрі–Перо можна використовувати як еталон частоти. У цьому разі його називають еталоном Фабрі–Перо.

Приклад 6.10. Дослід проводиться на інтерферометрі Майкельсона зі світлом, яке складається з випромінювання двох близько розташованих спектральних ліній. Для зміщення інтерференційної картини на 100 смуг від її початкового положення, яке спостерігається за рівних плечей приладу, необхідно перемістити рухоме дзеркало на відстань $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. При переміщенні дзеркала на відстань $d_2 = 14,4 \cdot 10^{-3}$ см від його початкового положення інтерференційна карти-

на зникає. Знайдіть різницю довжин хвиль спектральних ліній світла, що використовується в досліді.

Розв'язання. Інтерферометр Майкельсона належить до приладів, робота яких заснована на використанні двопрменевої інтерференції. Його схему наведено на рис. 6.17. Почнемо з умови, пов'язаної з розмиттям інтерференційної картини.

Якщо спектральний склад випромінювання містить дві близько розташовані спектральні лінії, то видність інтерференційної картини, яку дає інтерферометр Майкельсона залежно від величини оптичної різниці ходу між двома променями буде змінюватись за законом $V = \left| \cos \frac{\Delta \cdot \delta k}{2} \right|$, показаним на рис. 6.53.

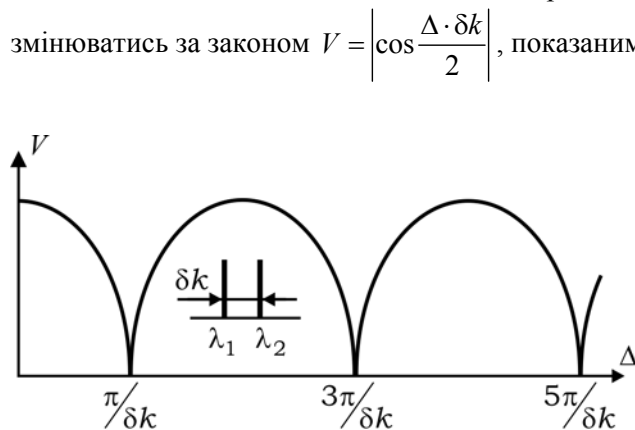


Рис. 6.53. Залежність величини видності V інтерференційної картини від різниці ходу Δ променів. (Відстань між спектральними лініями з довжинами хвиль λ_1 та λ_2 записана у вигляді величини $\delta k = k_2 - k_1 = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$, де k – хвильовий вектор)

Перше розмиття інтерференційної картини буде спостерігатись у разі збігу максимуму інтерференційної картини, яка утворюється від першої спектральної лінії з довжиною хвилі λ_1 , з мінімумом інтерференційної картини від другої спектральної лінії з довжиною хвилі λ_2 . Умова такої збіжності записується у вигляді рівностей

$$\Delta_2 = 2d_2 = m_2 \lambda_1 = (m_2 + 1/2) \lambda_2. \quad (6.61)$$

Із (6.61) знаходимо, що розмиття інтерференційної картини відбувається в порядку інтерференції з числом m_2 :

$$m_2 = \frac{2d_2}{\lambda_1}. \quad (6.62)$$

Окрім того, із (6.61), маємо

$$(m_2 + 1/2) \lambda_2 = m_2 \lambda_1 \Rightarrow m_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_2 / 2 \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{\lambda_2}{2m_2}. \quad (6.63)$$

Підставимо (6.62) у (6.63):

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{4d_2} \approx \frac{\lambda_{cp}^2}{4d_2}, \quad (6.64)$$

де $\lambda_{\text{сер}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Заміна добутку $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ на значення $\lambda_{\text{сер}}$ припустима тому, що спектральні лінії розташовані одна від одної порівняно з відстанню d_2 дуже близько. Значення $\lambda_{\text{сер}}$ залишається поки невідомим.

Перейдемо до умови, пов'язаної з переміщенням інтерференційної картини на смуги. Цьому переміщенню відповідає додаткова різниця ходу $\Delta_1 = 2d_1$, де $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. Умова інтерференційного максимуму для цього випадку має вигляд $\Delta_1 = 2d_1 = m_1 \lambda_{\text{сер}}$, де $m_1 = 100$ (з умови прикладу). Таким чином, маємо

$$\lambda_{\text{сер}} = \frac{2d_1}{m_1}. \quad (6.65)$$

Підставивши (6.65) у (6.64), отримуємо

$$\Delta\lambda = \frac{4d_1^2}{m_1^2 \cdot 4d_2} = \frac{(2,9)^2 \cdot 10^{-6}}{14,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} \text{ см} = 5,83 \text{ \AA}.$$

За формулою (6.62) знайдемо величину періоду інтерференції m_2 , за якої інтерференційний максимум для λ_1 збігається з інтерференційним мінімумом для λ_2 :

$$m_2 = \frac{2 \cdot 14,4 \cdot 10^{-3}}{0,58 \cdot 10^{-4}} \approx 500.$$

Приклад 6.11. Чому дорівнює радіус m -го кільця ($m = 10$) в інтерферометрі Фабрі–Перо, якщо відстань між дзеркалами інтерферометра, заповненого повітрям, дорівнює $d = 5$ см, а кільця спостерігаються на екрані, який розташований у фокальній площині лінзи із фокусною відстанню $f = 1$ м. Довжина хвилі світла становить $\lambda = 500$ нм.

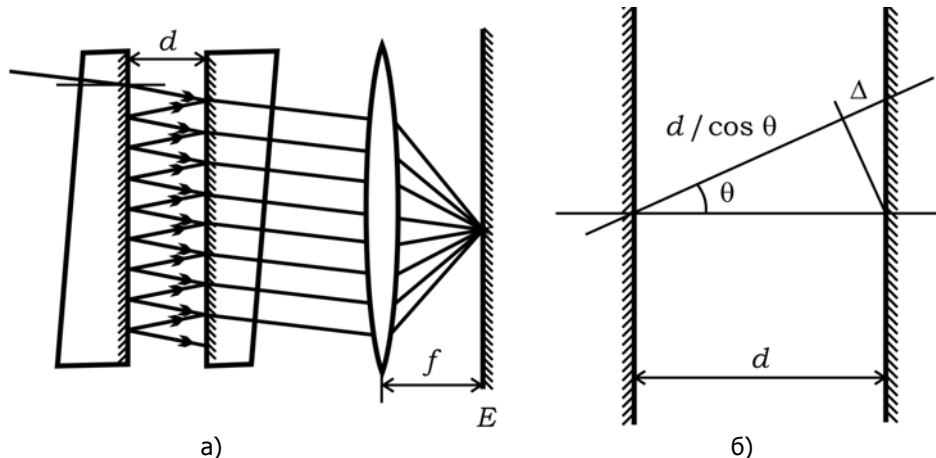


Рис. 6.54. Схема інтерферометра Фабрі–Перо (а); до прикладу 6.12 (б)

Розв'язання. Схема інтерферометра Фабрі–Перо зображена на рис. 6.54, а. Інтерферометр складається із двох однакових пластин з паралельними відбиваючими поверхнями, розділеними повітряним проміжком товщиною d . Екран, на якому спостерігається інтерференційна картина, розташований у фокальній площині лінзи.

На рис. 6.54, б видно, що різниця ходу Δ , яка відповідає напрямку на інтерференційне кільце, порядок якого m , що для смуг рівного нахилу задається кутом θ , дорівнює

$$\Delta = \frac{d}{\cos \theta} - d = \frac{d}{\cos \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{2d}{\cos \theta} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

або, враховуючи, що кут θ малий, маємо

$$\Delta \approx d \cdot \frac{\theta^2}{2}.$$

У відрізок інтерференційної картини, якому відповідає оптична різниця ходу Δ , вміщуються m інтерференційних смуг загальною довжиною $m\lambda$, тобто

$$d \cdot \frac{\theta^2}{2} \approx m\lambda \Rightarrow \theta \approx \sqrt{\frac{2m\lambda}{d}}. \quad (6.66)$$

Радіус m -го кільця дорівнює $r_m = f \cdot \theta$. З урахуванням (6.66) отримаємо

$$r_m = f \sqrt{\frac{2m\lambda}{d}} = 1 \text{ м} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}}} \approx 1,4 \text{ см}.$$

Максимальний порядок інтерференції для інтерферометра Фабрі–Перо спостерігається в центрі інтерференційної картини і може становити величину 10^5 . Тому розмір кільця $r_m \approx 1,4$ см з порядком $m = 10$ виглядає правдоподібним.

Приклад 6.12. Визначте показник заломлення та найменшу товщину просвітлювального покриття для лінзи зі скла марки Ф6 ($n_2 = 1,6$), яка працює у видимій області спектра. На скільки відсотків знизяться втрати світла в лінзі за рахунок відбиття після просвітлення? (Середня довжина хвилі видимого діапазону $\langle \lambda \rangle = 0,55$ мкм).

Розв'язання. Показник заломлення матеріалу просвітлювального покриття визначається за формулою (6.55): $n_1 = \sqrt{1,6} = 1,265$, а його мінімальна товщина – за формулою (6.56) за умови, що $m = 0$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{0,55}{4 \cdot 1,265} = 0,11 \text{ мкм}.$$

Коефіцієнт пропускання лінзи до просвітлення визначається за формулою (4.13):

$$T_1 = (1 - R_{02})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,8964.$$

При цьому втрати на відбиття становлять $R_1 = 1 - T_1 = 0,1036$. Коефіцієнт пропускання лінзи після просвітлення дорівнює

$$\begin{aligned} T_1' &= (1 - R_{01})^2 (1 - R_{12})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \\ &= \left[1 - \left(\frac{1 - 1,265}{1 + 1,265} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{1,265 - 1,6}{1,265 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,9437. \end{aligned}$$

При цьому втрати на відбиття становлять $R_1' = 1 - T_1' = 0,0537$.

Втрати світла в лінзі за рахунок відбиття після просвітлення знизились на $\Delta R_1 = R_1 - R_1' = 0,0499$ ($\approx 5\%$). До просвітлення коефіцієнт відбиття дорівнював $R_1 = 1 - T_1 \approx 0,10$ ($\approx 10\%$). Зменшення втрат на відбиття вдвічі вважається суттєвим.

7. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

7.1. Дифракція Френеля

7.1.1. Короткі теоретичні відомості

• *Дифракція світла* – це відхилення світла від прямолінійного поширення, яке неможливо пояснити законами геометричної оптики, тому що воно має хвильову природу. У результаті дифракції відбувається просторовий перерозподіл інтенсивності у вигляді дифракційної картини – набору темних і світлих смуг (кілець) або дифракційної розбіжності пучка променів у дальній зоні дифракції.

Величина відхилення продифрагованих хвиль залежить від відношення розмірів перешкоди до довжини хвилі. Дифракція спостерігається добре, якщо розміри перешкоди і довжина хвилі є величинами одного порядку.

• *Метод зон Френеля* дозволяє виразити амплітуду результуючого світлового поля $A(P)$ (рис. 7.1) у довільній точці спостереження P через амплітуди $A_i(P)$, які створюють у цій точці окремі зони Френеля ($i = 1, 2, 3, \dots, m$):

$$A(P) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (7.1)$$

За великої кількості зон Френеля (m) ряд (7.1) має наближене значення

$$A(P) \approx \frac{1}{2} A_1 \pm \frac{1}{2} A_m, \quad (7.2)$$

де знак "+" використовується для непарної кількості зон Френеля m , а знак "-" для парного значення m .

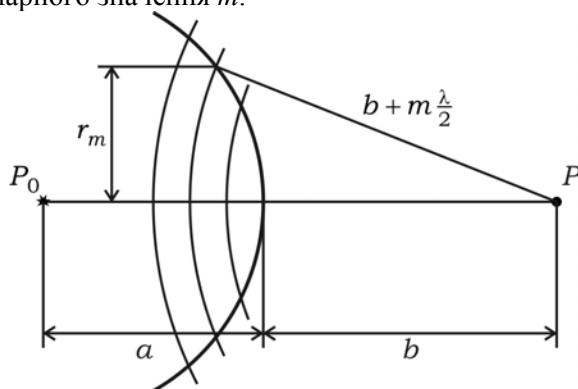


Рис. 7.1. Метод зон Френеля

Якщо хвильова поверхня S повністю відкрита (за вільного поширення світла), то ряд (7.1) має вигляд

$$A(P) = \frac{1}{2} A_1. \quad (7.3)$$

Інтенсивність світла в цьому випадку дорівнює

$$I(P) = I_0 \text{ та } I(P) \sim |A(P)|^2 = \frac{1}{4} |A_1|^2 = \frac{1}{4} I_1, \quad (7.4)$$

де I_1 – інтенсивність світла, яка утворюється першою зоною Френеля в точці спостереження P .

- Радіус m -ї зони Френеля для сферичної хвилі дорівнює

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda, \quad (7.5)$$

де a, b – відстані, відповідно, від точки P_0 , де розташоване точкове джерело, і від точки спостереження P до отвору (перешкоди) у точці O (рис. 7.1); λ – довжина хвилі. Якщо джерело випромінювання розташоване в нескінченності ($a \rightarrow \infty$) – випадок плоскої хвилі, то формула (7.5) набуває вигляду

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}. \quad (7.6)$$

- Зонна пластинка діє як фокусуєча лінза, фокусна відстань якої визначається за формулою

$$f = \frac{r_m^2}{\lambda}. \quad (7.7)$$

7.1.2. Запитання та відповіді

7.1.1. У чому полягає принцип Гюйгенса–Френеля? У чому полягає внесок Френеля в цей принцип?

За Гюйгенсом, кожна точка хвильового фронту, наприклад, сферичної хвилі, яка виходить з точкового джерела, є джерелом вторинних хвиль. Базуючись на цьому, Х. Гюйгенс запропонував метод геометричної побудови фронтів вторинних хвиль. У побудові Гюйгенса виступають не реальні хвилі, а допоміжні сфери, які використовуються для побудови обгинаючих, які і визначають положення хвильового фронту. Питання про те, чому при поширенні хвилі не виникає зворотна хвиля, у Гюйгенса залишається не з'ясованим.

Продовжуючи розробку принципу Х. Гюйгенса, О. Френель запропонував враховувати взаємодію вторинних хвиль. Він замінив штучну ідею про обгинаючу вторинних хвиль на фізично зрозуміле положення, а саме: вторинні хвилі інтерферують між собою. За Френелем, вторинні хвилі приходять з однаковими фазами в точки простору, які відповідають обгинаючій хвильового фронту. Інтерференція вторинних хвиль у цих точках дає максимуми інтенсивності, а результуюча хвиля максимально підсилюється в напрямках, які відповідають напрямкам нормалі до хви-

льового фронту. Можна сказати, що Френель вклав у принцип Гюйгенса фізичний зміст і кількісно розв'язав ряд конкретних задач дифракції.

7.1.2. *За допомогою принципу Гюйгенса–Френеля якісно пояснить причину відсутності поширення хвилі у зворотному напрямку.*

Користуючись тільки принципом Гюйгенса пояснити причину відсутності поширення хвилі у зворотному напрямку не можна. На основі уявлень Френеля вторинні хвилі, що передують хвильовому фронту, поширюються в просторі, де відсутні хвильові збурення. Вони інтерферують одна з одною. Вторинні хвилі, що поширюються у зворотному напрямку, поширюються в просторі, де вже існують хвильові збурення, зумовлені прямою хвилею. При інтерференції прямих і вторинних хвиль вони гасять одна одну.

7.1.3. *Наведіть математичне формулювання принципу Гюйгенса–Френеля. Що таке інтеграл Френеля? У чому полягає його фізичний зміст?*

За Гюйгенсом, джерело світла S (рис. 7.2) утворює хвильовий фронт у вигляді замкненої поверхні, кожна точка якої випромінює вторинні хвилі. Ця поверхня, оточуючи джерело, "замінює" його. Замкнену поверхню навколо джерела можна обрати довільною, а не лише сферичною. Але, як правило, її обирають так, щоб розв'язок конкретної задачі був найпростішим. У більшості випадків ця хвильова поверхня збігається з фронтом хвилі. У цьому випадку всі вторинні джерела мають однакові фази коливань.

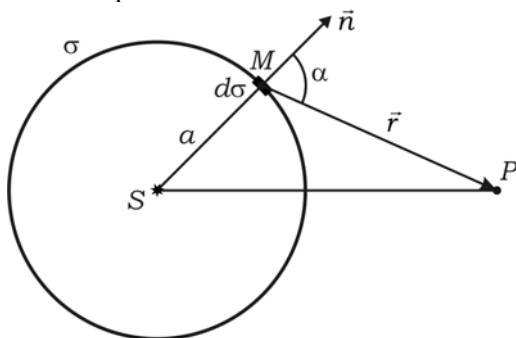


Рис. 7.2. До пояснення принципу Гюйгенса–Френеля

На рис. 7.2 сферична замкнена поверхня радіуса a має площу σ , елементарна ділянка $d\sigma$ якої випромінює вторинні хвилі, що мають однакову початкову фазу коливань. Світлове поле в просторі за межами хвильової поверхні σ виникає внаслідок інтерференції вторинних хвиль і для сферичної хвилі в точці спостереження P визначається інтегралом Френеля:

$$E(P) = \iint_{\sigma} E(M) \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-ikr} d\sigma = \iint_{\sigma} E_0 \frac{e^{-ika}}{a} \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-ikr} d\sigma, \quad (7.8)$$

де $E(P)$ та $E(M)$ – комплексні амплітуди поля в точках P і M , відповідно; r – відстань від елемента $d\sigma$ до точки P . Хвильове число дорівнює $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Мно-

жник $\frac{1}{r}e^{-ikr}$ описує розподіл елементарної вторинної сферичної хвилі; $A(\alpha)$ – коефіцієнт нахилу.

Коефіцієнт нахилу $A(\alpha)$ враховує той факт, що внесок елемента хвильової поверхні $d\sigma$ у результуюче поле в точці P залежить від орієнтації цього елемента відносно напрямку на точку P . У теорії Френеля величина $A(\alpha)$ змінюється в межах від 1 до 0 при зміні α від 0 до $\pi/2$: $A(0)=1$ та $A(\pi/2)=0$ (див рис. 7.3, а).

Побудовану в 1818 р. О. Френелем теорію продовжив у 1882 р. Г. Кірхгоф. Зокрема, він уточнив вид функції $A(\alpha)$, яка в його теорії має вигляд $A(\alpha) = \frac{i}{\lambda} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)$. Графік цієї функції зображений на рис. 7.3, б. (Більш детально про дифракційні теорії Френеля та Кірхгофа див. у [5, лекція 13]).

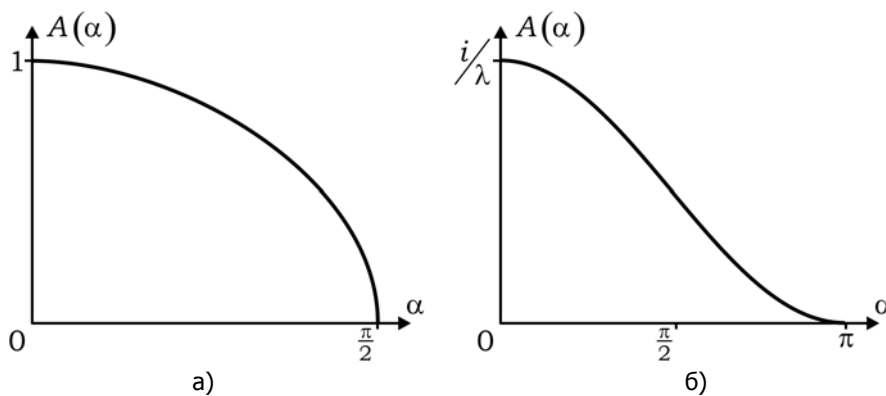


Рис. 7.3. Вигляд функції $A(\alpha)$ – коефіцієнта нахилу в теорії Френеля (а) і в теорії Кірхгофа (б)

Інтеграл (7.8) ураховує фази вторинних хвиль, які приходять в точку P від різних елементів поверхні σ . Елемент $d\sigma$ обирається досить малим, тому його можна вважати точковим джерелом. Усі такі коливання когерентні і вони інтерферують. Наприклад, через інтерференцію вторинних хвиль враховується внесок усіх елементарних ділянок хвильового фронту з відповідними амплітудами і фазами коливань. Математично результат такої суперпозиції записується у вигляді інтеграла Френеля (7.8).

7.1.4. Як відомо, за допомогою принципу Гюйгенса можна пояснити прямолінійне поширення світла, закони заломлення та відбиття. Яке відношення має принцип Гюйгенса–Френеля до пояснення дифракції світла?

Згідно з Френелем вторинні хвилі когерентні й при визначенні результуючої інтенсивності необхідно враховувати інтерференцію цих вторинних хвиль. Цей підхід Френель використав для пояснення та опису дифракції світла, розбивши хви-

львий фронт на відповідні зони. Основна властивість зон Френеля полягає в тому, що дві сусідні зони Френеля випромінюють хвилі в протифазі.

7.1.5. Наведіть основні властивості зон Френеля.

Основні властивості зон Френеля:

- сусідні відстані від меж зон Френеля до точки P спостереження відрізняються на однакову величину $\lambda / 2$;
- кожен зону Френеля розглядають як джерело вторинних хвиль. Хвилі від сусідніх зон Френеля мають протилежні фази ($\Delta\phi = \pi$);
- радіуси зон Френеля, які визначаються за відомою формулою (7.6), залежать від номера зони: радіус m -ї зони Френеля $r_m \sim \sqrt{m}$;
- площа m -ї зони Френеля дорівнює $S_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi \frac{\lambda ab}{a+b} \neq f(m)$, тобто

площі всіх зон Френеля з точністю до λ^2 однакові.

7.1.6. Як співвідносяться амплітуда хвилі від усього хвильового фронту та амплітуда хвилі, яка прийшла від першої зони Френеля? Поясніть за допомогою спіралі Френеля та формули (7.1).

Зі спіралі Френеля, яка зображена на рис. 7.4, видно, що амплітуда A_0 хвилі від усього хвильового фронту в 2 рази менша за амплітуду A_1 , коли відкрита лише перша зона Френеля. Враховуючи, що амплітуда (A) та інтенсивність (I) пов'язані співвідношенням $I \sim A^2$, інтенсивності в розглянутому прикладі відрізняються в 4 рази $I_1 = 4I_0$.

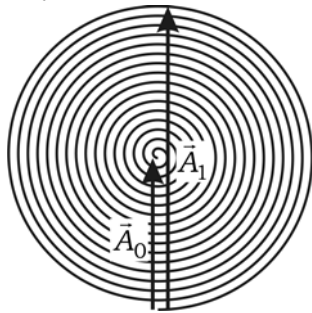


Рис. 7.4. Спіраль Френеля

Такий самий результат можна отримати формально, не використовуючи спіраль Френеля. Як впливає із формул (7.1) і (7.2), у випадку, коли світло приходило з усіх зон Френеля, у точці спостереження P сумарна амплітуда від усіх зон дорівнює $A(P) = A_1 - A_2 + \dots = A_1/2$, а результуюча інтенсивність $I(P) = A_1^2/4 = I_0$, де I_0 – інтенсивність падаючого світла. Якщо діє світло лише від першої зони, то результуюча інтенсивність буде $I(P) = A_1^2 = 4I_0$. Зауважимо, що цей результат стосується точки P на осі.

7.1.7. Користуючись спіраллю Френеля, визначте амплітуду хвилі в точці спостереження P від дифракції на круглому отворі, у якому розміщуються 1,5 зони Френеля.

Нехтуючи зменшенням радіуса витка спіралі Френеля на одному оберті, апроксимуємо перший виток спіралі колом (рис. 7.5), з якого можна побачити, що амплітуда $A_{1,5}$ світлової хвилі в точці спостереження P у цьому випадку в $\sqrt{2} \approx 1,4$ раза більша за амплітуду A_0 падаючої хвилі. Інтенсивність світла в точці P від відкритих 1,5 зони Френеля дорівнює $I_{1,5} = 2I_0$.

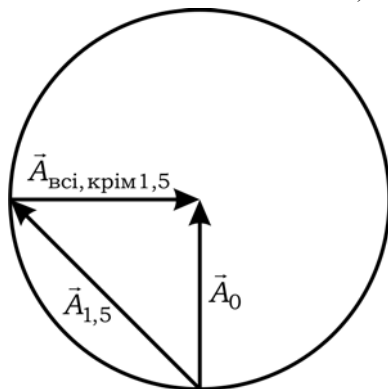


Рис. 7.5. До запитання 7.1.7

Амплітуда $\vec{A}_{\text{всі, крім 1,5}}$ хвилі в точці P від усіх відкритих, окрім перших 1,5, зон Френеля дорівнює $\vec{A}_{\text{всі, окрім 1,5}} = \vec{A}_0 - \vec{A}_{1,5}$.

7.1.8. Непрозорий диск закриває для точки P спостереження 1,5 зони Френеля, при відкритих інших. Чому дорівнює інтенсивність світла в точці P , якщо інтенсивність падаючого на диск світла дорівнює I_0 ?

Амплітуда $\vec{A}_{\text{всі, крім 1,5}}$ хвилі в точці P у цьому випадку, як видно зі спіралі Френеля (див. рис. 7.5), приблизно дорівнює амплітуді A_0 хвилі, що падає на диск. Для інтенсивностей це означає, що $I_{\text{всі, крім 1,5}} \approx I_0$.

7.1.9. Який мінімальний радіус отвору при дифракції Френеля відповідає умові, коли інтенсивність світла в точці спостереження P на осі дорівнює інтенсивності падаючого на отвір світла?

Знехтуємо зменшенням радіуса витка спіралі Френеля на одному оберті й апроксимуємо перший виток спіралі колом (рис. 7.6). Рівність інтенсивностей світла означає рівність амплітуд хвиль. З геометричних міркувань випливає, що довжина вектора $\vec{A}_{0,33}$, який відповідає амплітуді світлової хвилі в точці спостереження P у випадку, коли відкриті 0,33 площі 1-ї зони Френеля, дорівнює довжині вектора, що відповідає амплітуді A_0 хвилі, яка падає на екран з отвором (коли відкриті всі зони

Френеля). Цей випадок спостерігається, якщо розглянути на ньому трикутники рівносторонні (рис. 7.6).

Таким чином, мінімальний радіус отвору, за якого виконуються задані умови, має бути таким, щоб було відкрито $(1/3) \approx 0,33$ першої зони Френеля. Наступне значення радіуса отвору з такими самими властивостями буде відповідати відкритим всієї 1-ї та 0,67 частини площі 2-ї зони Френеля.

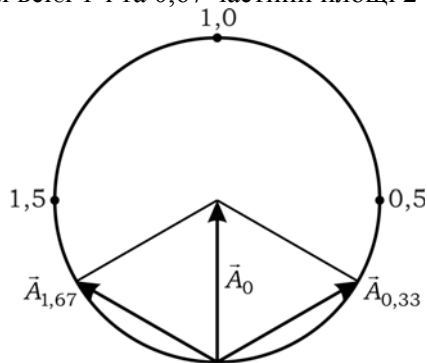


Рис. 7.6. До запитання 7.1.9

7.1.10. Поясніть, що таке пляма Пуассона і який фізичний механізм її виникнення. Від чого залежить інтенсивність світла в плямі Пуассона?

Світла пляма в центрі тіні від круглого непрозорого диска, розташованого симетрично на шляху світлового потоку, що виходить з точкового джерела, називається плямою Пуассона. Незалежно від кількості закритих зон Френеля в центрі темної плями в цьому випадку завжди розташована світла пляма Пуассона.

Інтенсивність світла у плямі Пуассона $I_{\text{пл.П}}$ за закритих кількох перших зонах Френеля дорівнює $I_{\text{пл.П}} \approx I_0$. У міру того, як кількість закритих зон Френеля збільшується, інтенсивність світла у плямі Пуассона поступово зменшується (рис. 7.7).

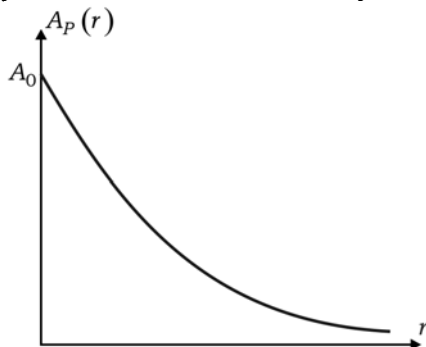


Рис. 7.7. Залежність амплітуди A_p хвилі в центрі плями Пуассона від радіуса r непрозорого диска: до запитання 7.1.10

Дійсно, якщо непрозорий диск закриває собою m зон Френеля, то амплітуда результуючих коливань $\bar{A}_{\text{всі, крім } m}(P) \equiv \bar{A}_{\text{пл.П}}$ у точці спостереження являє собою суму коливань від $(m+1)$ -ї, $(m+2)$ -ї і т. д. зон Френеля. Результат сумування, зважаючи на фазові властивості зон Френеля для n відкритих зон, зводиться до суми

$A(P) = \frac{1}{2}(A_{m+1} \pm A_{m+n})$. Амплітуда від останньої зони Френеля за $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля ($A_{m+n} \rightarrow 0$), тому остання зона Френеля внесок в інтенсивність у точці спостереження не дає. Таким чином, амплітуда $A(P) \approx \frac{1}{2}A_{m+1}$, а інтенсивність $I(P) \approx \frac{1}{4}I_{m+1}$, тобто незалежно від кількості закритих диском зон у точці P завжди спостерігається світла пляма, інтенсивність якої залежить від кількості m закритих зон.

До таких самих висновків можна дійти, користуючись на спіралі Френеля вектором $A_{\text{всі,крім відкр}} \equiv A_{\text{закр}}$ (рис. 7.4 та 7.5). (З історією походження назви "пляма Пуассона" можна ознайомитись, наприклад, у [11, С. 132]).

7.1.11. Чому дорівнює число Френеля? Яку інформацію несе в собі число Френеля?

Щоб характеризувати умови дифракції плоскої хвилі на перешкоді (круглому отворі, щілині, диску тощо), розрізняти різні види дифракції, а також з метою розробки критерію переходу від хвильової оптики до геометричної оптики, вводять

величину, яку називають числом Френеля $N_F = \frac{r^2}{\lambda \cdot z}$, де λ – довжина плоскої хвилі, що падає на перешкоду із характерним розміром r (у випадку непрозорого диска або отвору r – їх радіус); z – відстань від перешкоди до точки спостереження P . Число Френеля для непрозорого диска або отвору при нормальному падінні плоскої хвилі на перешкоду показує кількість закритих (у випадку дифракції на непрозорому диску) або відкритих (у випадку дифракції на отворі) зон Френеля.

Якщо $N_F \geq 1$, то маємо справу з дифракцією Френеля; якщо $N_F < 1$ – із дифракцією Фраунгофера. Якщо $N_F \gg 1$, то маємо справу з геометричною оптикою. Випадок, коли $N_F = 1$, відповідає переходу від дифракції Френеля до дифракції Фраунгофера.

7.1.12. *Зобразіть (якісно) графік залежності інтенсивності світла $I(z)$ у точці спостереження P при дифракції на круглому отворі паралельного пучка світла. Точка спостереження P розташована на осі отвору і зміщується вздовж OZ від круглого отвору ($z = 0$) на нескінченність.*

Якщо зафіксувати радіус r отвору, то зі збільшенням відстані z периферійні зони Френеля одна за одною будуть виходити за межі отвору. У точці з координатою $z = 0$ інтенсивність $I_p(0)$ світла дорівнюватиме інтенсивності I_0 світла, що падає на екран (рис. 7.8). У міру збільшення z інтенсивність $I_p(z)$ буде осцилювати від мінімуму до максимуму з різними амплітудами. За деякого значення $z = z_d$, коли в межах отвору залишиться лише одна центральна зона Френеля, інтенсив-

ність світла I_p досягне максимуму $I_p(z_d) = 4I_0$, після чого монотонно почне зменшуватись у міру збільшення z (рис. 7.8).

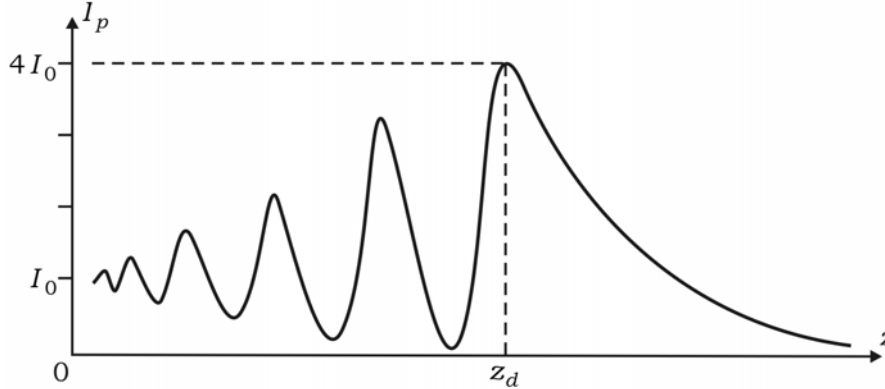


Рис. 7.8. Залежність інтенсивності світла на осі отвору від відстані до екрана спостереження (z_d – дифракційна довжина світлового променя): до запитання 7.1.12

7.1.13. Чому дорівнює дифракційна довжина z_d світлового пучка? Який фізичний зміст має ця величина?

Як видно з графіка на рис. 7.6 $I(z)$, за $z = z_d$ у межах отвору залишиться лише одна центральна зона Френеля. Величину z_d називають дифракційною довжиною світлового променя. Для плоскої хвилі $z_d = \frac{r^2}{\lambda}$, де r – радіус отвору (характерний розмір світлового пучка).

За $z \ll z_d$ кажуть про ближню зону дифракції. У цій зоні:

- спостерігається дифракція Френеля;
- в межах отвору вміщується більше ніж одна зона Френеля;
- середнє значення інтенсивності світла по осі світлового пучка дорівнює інтенсивності падаючої світлової хвилі;
- завдяки інтерференції елементарних вторинних хвиль, які йдуть від різних зон Френеля, поперечний переріз світлового пучка підтримується постійним;
- вигляд дифракційної картини визначається формою перешкоди: наприклад, при дифракції на отворі спостерігаються кільця, при дифракції на щілині – смуги, які паралельні щілині.

За $z \gg z_d$ кажуть про дальню зону дифракції. У цій зоні:

- спостерігається дифракція Фраунгофера;
- у межах отвору вміщується частина першої зони Френеля;
- інтенсивність світла на осі світлового пучка менша від інтенсивності I_0 світлового пучка на поверхні перешкоди. Тобто світловий пучок розширюється. Інтерференція елементарних вторинних хвиль, які йдуть від різних зон Френеля, вира-

жена слабше, вона не може підтримати сталим поперечний профіль вихідного світлового пучка, пучок стає розбіжним;

- вигляд дифракційної картини визначається формою джерела і може не повторювати форму перешкоди: наприклад, періодична смугаста структура (дифракційна ґратка) дає дифракційну картину у вигляді розташованих у ряд світлових плям.

Дифракційна довжина z_d пов'язана з числом Френеля N_F таким чином:

$N_F = \frac{z_d}{z}$, тобто в ближній зоні дифракції величина $N_F > 1$, у дальній зоні дифракції $N_F < 1$.

7.1.14. Чи має метод зон Френеля свої недоліки?

Метод зон Френеля дає неправильну фазу хвилі. Дійсно, за визначенням фаза хвилі у вільному просторі приймається за нуль, а амплітуда хвилі, яка падає на екран, має задаватись вектором \vec{A} (рис. 7.9). Від цього вектора починається відлік фази хвилі, яка проходить через отвір в екрані в міру його відкриття. Величину отвору характеризують кількістю відкритих зон Френеля. Із рис. 7.9 видно, що у випадку, коли відкрито m зон Френеля, амплітуда хвилі, що пройшла через отвір у точці спостереження дорівнює \vec{A}_m , зсув фаз відносно вихідної хвилі дорівнює φ_m . Водночас амплітуда хвилі при всіх відкритих зонах Френеля задається вектором \vec{A}_0 . Як бачимо, обчислена методом зон Френеля фаза хвилі відрізняється від фактичної фази хвилі на $\pi/2$. Хоча для багатьох практичних застосувань, які потребують знання модуля амплітуди, ця різниця несуттєва. Проте з теоретичної точки зору і для явищ, які залежать від фази хвилі, цей факт має принципове значення. Ця невідповідність була пояснена в більш строгій теорії дифракції, яка заснована на використанні інтеграла Кірхгофа (див. запитання 7.1.3).

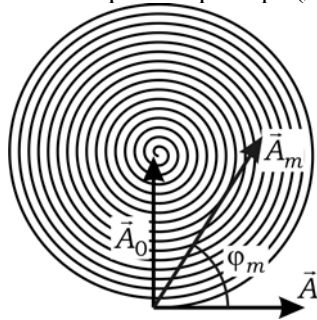


Рис. 7.9. Відмінність розрахованої за методом Френеля фази хвилі від реальної фази

7.1.15. Що таке зонна пластинка? Що таке амплітудна і фазова зонні пластинки?

Зонна пластинка – це виготовлений екран із деякої кількості кілець (у сучасних зонних пластинках вона може сягати 250), радіуси яких визначають із формул (7.5) або (7.6). Кільця з непарними індексами в зонній пластинці зроблені прозорими, з парними індексами – непрозорими, чи навпаки.

Якщо розмістити зонну пластинку у відповідному місці сферичної хвилі (обрати значення a та b у формулі (7.5)), то для світла довжиною хвилі λ така пластинка

закриває або всі парні, або всі непарні зони Френеля. Крізь таку зонну пластинку пройдуть когерентні коливання, які в точці P матимуть однакову фазу. Результуюча амплітуда при закритих парних зонах буде дорівнювати $A(P) = A_1 + A_3 + A_5 + \dots + A_{2m+1}$.

Таким чином, амплітуда, а отже, інтенсивність світла в точці P , будуть значно більші, ніж при повністю відкритому фронті. Зонна пластинка концентрує світлову енергію в точці на оптичній осі, діє подібно до лінзи, яка концентрує світлову енергію у фокусі. Побудовані на цих фізичних принципах зонні пластинки називають амплітудними зонними пластинками.

Окрім амплітудних зонних пластинок існують фазові зонні пластинки. Принцип дії фазових зонних пластинок заснований на тому, що збиральна здатність зонної пластинки може бути збільшена, якщо не затримувати коливання, які приходять у точку P від парних зон, а змінити їх фазу на π . Фазові зонні пластинки виготовляють так, що оптична товщина ($d \cdot n$) непарних (або парних) зон відрізняється від оптичної товщини парних (або непарних) зон на величину, що кратна $\lambda / 2$.

Таким способом вдається досягти того, що за зонною пластинкою утворюється складне хвильове поле з множиною точок (фокусів зонної пластинки), у яких інтенсивність світла помітно збільшується порівняно з інтенсивністю хвиль, що поширюються від усіх зон Френеля. (Ідея фазової зонної пластинки належить Дж. Релею, перше експериментальне виготовлення шляхом травлення скляної пластинки – Р. Вуду). За допомогою зонної пластинки можна отримувати оптичні зображення, але порівняно з лінзою досить низької якості. Для зонних пластинок властива сильно хроматична аберация.

Із (7.7) випливає, що для зонної пластинки $f \sim \frac{1}{\lambda}$, у той час як для лінзи $f \sim \lambda$.

Останнє співвідношення є результатом нормальної дисперсії для матеріалів (напр., скла), з яких зроблені лінзи. Це суттєва відмінність зонної пластинки та лінзи, як фокусуєчих елементів для оптики. (Більш детально про властивості зонних і фазових зонних пластинок можна прочитати, наприклад, у [1, § 34]).

Зауваження: не слід плутати розглянуті тут фазові зонні пластинки із фазовими пластинками, про які йтиметься в розд. 8 та 9. Ці оптичні елементи за своїм призначенням та змістом принципово відрізняються.

7.1.16. *Як розрахувати положення фокусів зонної пластинки? Чому зонна пластинка має декілька фокусів і який із них вважати головним?*

Вважатимемо, що зонна пластинка містить певну кількість зон Френеля. Нехай номер останньої відкритої зони – m , її радіус знаходять за формулою (7.6). Відстань b від зонної пластинки до точки спостереження $b = \frac{r_m^2}{m\lambda}$ фактично відіграє роль фокусної відстані.

Як бачимо, кожна відкрита зона пластинки з номером $n < m$ має своє значення відстані b_n , на якій формується n -й фокус зонної пластинки. Таким чином, на відміну від лінзи, зонна пластинка має декілька фокусів (фокусів вищих порядків). У міру збільшення номера фокуса n кожний наступний фокус буде характеризуватись більшою величиною інтенсивності світла в ньому. Це пов'язане з тим, що кількість зон, від яких буде здійснюватись внесок в інтенсивність світла, залежить від індексу n . Максимальна інтенсивність буде в найбільш віддаленому від зонної пластинки (m -му) фокусі, тому на практиці саме він вважається головним фокусом зонної пластинки.

Значення відстаней до фокусів вищих порядків визначається за формулою $f_n = \frac{f}{2n+1}$, де f – відстань до головного фокуса, n – цілі числа, які можуть бути як додатними, так і від'ємними. Від'ємним значенням n відповідають уявні фокуси і розбіжні хвилі.

7.1.17. Якими методами виготовляють зонні пластинки?

Фазову зонну пластинку можна виготовити на склі з протравленими ортофосфорною кислотою рівчачками або навпаки, нарощеними за допомогою лакового покриття підвищеннями. Заглиблення або підвищення при цьому повинні мати величину $\frac{\lambda}{2}(2m+1)$.

Для виготовлення зонної пластинки спочатку виготовляють рисунок у великому масштабі на аркуші креслярського паперу, розміри зон Френеля на якому відповідають розрахункам за відомими формулами (7.5) або (7.6). Потім із цього рисунка знімають фотографічну копію зменшених розмірів, яка може служити амплітудною зонною пластинкою або трафаретом для фазової зонної пластинки. Окрім цих методів виготовлення зонних пластинок застосовують також методи штамповки, голографії тощо.

7.1.18. Що таке спіраль Корню?

Спіраль Корню (рис. 7.10) дає можливість знайти графічним способом освітленість у точці спостереження P , якщо падаюча плоска хвиля дифрагує на півплощині – перешкоді, обмеженій прямим краєм екрана.

Спіраль Корню будується таким чином. На площину наносять точки з декартовими координатами, що визначаються інтегралами Френеля:

$$C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \quad S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Числа на спіралі – параметр α , який для плоскої хвилі дорівнює

$$\alpha = x \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}, \quad (7.9)$$

де b – відстань від точки спостереження P до півплощини; x – відстань від елемента dS хвильової поверхні до точки, яка отримана при побудові перпендикуляра з краю перешкоди на екран з дифракційною картиною. Параметр α пропорційний довжині дуги спіралі, яка починається в точці O на рис. 7.10.

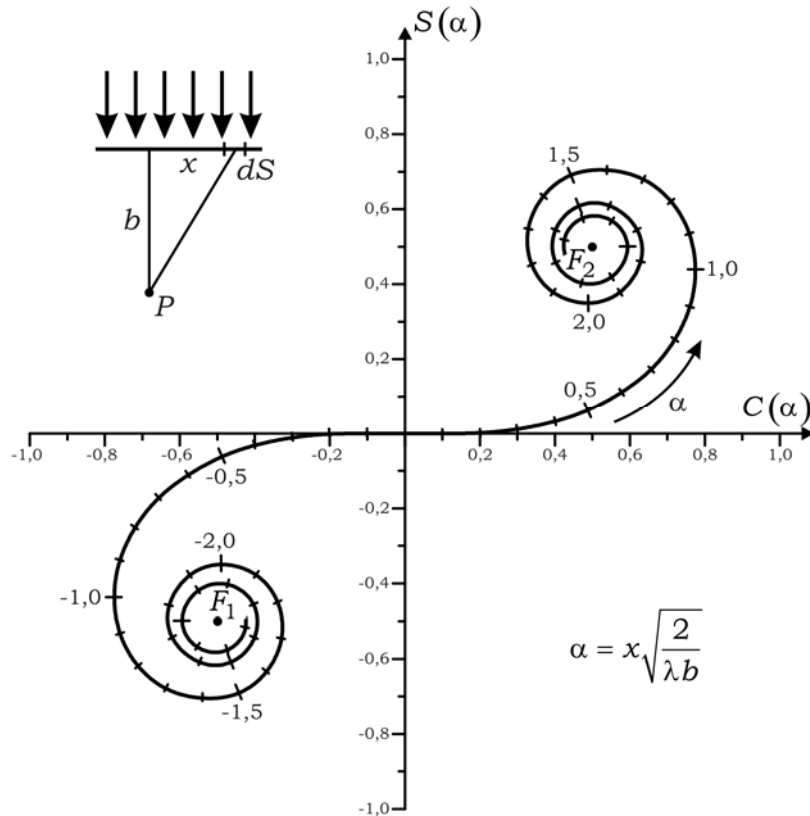


Рис. 7.10. Спіраль Корню

7.1.19. За допомогою спіралі Корню визначте відстань Δx між першими двома максимумами та відносну інтенсивність першого максимуму на екрані з дифракційною картиною, яка отримана при падінні плоскої хвилі на півплощину. Вважайте відомими відстань від екрана до півплощини $b = 100$ см, довжину хвилі $\lambda = 500$ нм та інтенсивність I_0 падаючого світла.

Враховуючи, що $x = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\lambda b}{2}}$, як випливає з (7.9), маємо

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \sqrt{\frac{\lambda b}{2}}.$$

На спіралі Корню (рис. 7.10) знаходимо значення параметра α для перших двох максимумів $\alpha_2 = 2,35$ та $\alpha_1 = 1,25$. Таким чином,

$$\Delta x = (2,36 - 1,26) \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{2}} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,55 \text{ мм}.$$

Користуючись спіраллю Корню (рис. 7.10), знайдемо відношення η амплітуди 1-го максимуму A_1 до амплітуди падаючого світла A_0 . Для цього за допомогою лінійки знаходимо відстань між точкою G , отриманою при перетині прямої F_1F_2 з першим витком спіралі, і полюсом спіралі F_2 , а також довжину відрізка F_1F_2 . Їх відношення $\eta = \frac{GF_2}{F_1F_2}$ для конкретного масштабу, за яким побудована спіраль Кор-

ню на рис. 7.10, дорівнює $\eta = \frac{82}{70} \approx 1,17$. Величина

$$\eta = \frac{A_1}{A_0} \Rightarrow A_1 = \eta A_0 \Rightarrow I_1 = \eta^2 I_0 \approx 1,37 I_0.$$

Із цього можна зробити важливий і універсальний висновок, що інтенсивність першого максимуму в дифракційній картині, яка отримана при падінні плоскої хвилі на півплощину, на 37 % перевищує інтенсивність світла I_0 на поверхні півплощини.

7.2. Дифракція Фраунгофера

7.2.1. Короткі теоретичні відомості

- Дифракція Фраунгофера на вузькій прямокутній щілині. Розподіл інтенсивності монохроматичного світла, продифрагованого на одній щілині, має вигляд

$$I(u) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad (7.10)$$

де $u = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda}$; b – ширина щілини; φ – кут, який характеризує напрямок на точку спостереження; λ – довжина хвилі падаючого світла.

Кутове положення мінімумів інтенсивності при дифракції Фраунгофера на щілині, на яку нормально падає плоска монохроматична хвиля, визначається умовою

$$b \sin \varphi_m = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.11)$$

де φ_m – кут дифракції, у напрямку якого інтенсивність дифракційної картини мінімальна; m – порядок дифракційного мінімуму; λ – довжина хвилі падаючого світла.

- Дифракція Фраунгофера на круглому отворі представляє великий практичний інтерес, оскільки в оптичних приладах оправи лінз і об'єктивів, а також діафрагми

мають круглу форму. Розподіл інтенсивності продифрагованого на круглому отворі світла у випадку дифракції Фраунгофера описується за законом

$$I(u) = I_0 \left(\frac{J_1(u)}{u} \right)^2, \quad (7.12)$$

де $J_1(u)$ – функція Бесселя першого роду; $u = \frac{\pi \cdot D}{\lambda} \sin \varphi$. Графік цієї функції показаний на рис. 7.11.

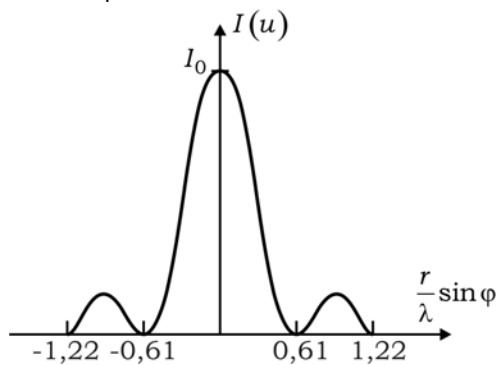


Рис. 7.11. Розподіл інтенсивності $I(\varphi)$ світла у випадку дифракції Фраунгофера, яка отримана на круглому отворі радіуса r

Напрямок на 1-й мінімум у випадку дифракції Фраунгофера на круглому отворі визначається з умови

$$\sin \varphi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{r}. \quad (7.13)$$

У зв'язку з тим, що кут φ_1 зазвичай малий, вираз (7.13) у цьому випадку перетворюється на вираз $\varphi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{r}$. Розміри центральної світлої плями тим більші, чим більше відношення λ / r , тобто, чим більше довжина хвилі λ і чим менше діаметр отвору.

7.2.2. Запитання та відповіді

7.2.1. *Що у твердженні про відсутність принципів відмінностей і різкої межі між дифракцією Фраунгофера та дифракцією Френеля, справедливо, а що викликає пересторогу?*

Найголовніше, що об'єднує дифракцію Фраунгофера та дифракцію Френеля, є те, що вони обидві є проявом одного явища – дифракції світла, тобто відхилення його поширення від прямолінійного, яке відбувається на перешкоді. Обидва види дифракції є проявом хвильових властивостей світла і зазвичай потрібні додаткові дослідження для того, щоб за зовнішніми ознаками проявів дифракції вважати її до одним із цих двох видів.

Не існує між видами дифракції і чіткої (принаймні експериментальної) межі. Не можна однозначно стверджувати, що випадок, коли, наприклад, в отвір потрапляє 1,1 частина зони Френзеля, експериментально відрізняється від випадку, коли в отвір потрапляє 0,9 зони.

Для дифракції Фраунгофера існують, безумовно, і відмінності, наприклад, такі:

- у центрі дифракційної картини Фраунгофера від круглого отвору і від щілини завжди утворюється максимум, на відміну від дифракції Френеля, в якій у центрі картини може утворюватись як максимум, так і мінімум;
- продифраговані промені приходять у точку спостереження у вигляді плоскої хвилі (кажуть, що вони "локалізовані в нескінченності"). Застосування збиральної лінзи дозволяє спостерігати дифракційну картину в таких променях на скінченних відстанях;
- існування дифракції Фраунгофера в дальній зоні супроводжується дифракційною розбіжністю світлового пучка;
- опис дифракції Фраунгофера застосовує інший, ніж для дифракції Френеля, математичний апарат;

Про деякі інші особливості двох видів дифракції див. запитання 7.2.2 та 7.2.11.

7.2.2. Розподіл інтенсивності монохроматичного світла після його проходження крізь щілину можна описати законами: а) дифракції Френеля; б) дифракції Фраунгофера; в) геометричної оптики. Від яких параметрів це залежить?

За характерних розмірів щілини $b \geq \sqrt{z\lambda}$ спостерігається дифракція Френеля і результат залежить від кількості зон Френеля, які розміщуються в межах щілини. За характерних розмірів щілини $b < \sqrt{z\lambda}$, якщо в її межах розміщується менше однієї зони Френеля, відбувається дифракція Фраунгофера (z – відстань від щілини до точки спостереження, λ – довжина хвилі падаючого світла). Спостереження дифракції від щілини спостерігається на нескінченності або у фокальній площині об'єктива, розташованого за щілиною.

Якщо ж ширина щілини набагато більша характерного розміру зони Френеля $b \gg \sqrt{z\lambda}$, дифракція проявляється лише в розмиванні геометричної межі між світлом і тінню, а хід променів описується законами геометричної оптики.

Таким чином, приналежність розподілу інтенсивності світла після його проходження через перешкоду (неоднорідність) до дифракції Френеля, дифракції Фраунгофера або геометричної оптики за фіксованої довжини хвилі залежить від співвідношення між шириною щілини b і відстанню z від щілини до точки спостереження.

7.2.3. Чому, описуючи дифракцію Фраунгофера на круглому отворі, найчастіше обмежуються визначенням розмірів центральної світлої плями і мало цікавляться першим, другим та іншими максимумами і мінімумами?

Розподіл інтенсивності світла по максимумах у цьому випадку дифракції Фраунгофера відбувається в пропорції $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,0175 : 0,0042 : \dots$, тобто основна частина (84 %) інтенсивності продифрагованого світла зосереджена в головному

(нульовому) максимумі. Це дозволяє при описі дифракції Фраунгофера на круглому отворі обмежитися визначенням розмірів центральної світлої плями і мало цікавитись першим, другим та іншими максимумами.

Центральна світла пляма в дифракційній картині Фраунгофера на круглому отворі називається плямою Ейрі на честь Дж. Ейрі, який детально її дослідив у 1835 р.

7.2.4. *Що таке пляма Ейрі, і чому дорівнює її розмір?*

Як можна побачити з (7.13), кутовий розмір діаметра першого темного кільця дорівнює $\Delta\varphi = 2 \cdot 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{r}$, де D і r – діаметр і радіус отвору, відповідно.

Усередині цього темного кільця лежить центральна світла пляма (пляма Ейрі).

Діаметр центральної світлої плями (плями Ейрі) тим менше, чим більше діаметр отвору. Лінійні розміри першого темного кільця (його діаметр) наближено дорівнює $D = \Delta\varphi \cdot F = 1,22 \frac{\lambda}{r} \cdot F$, де F – фокусна відстань лінзи, за допомогою якої спостерігається дифракція Фраунгофера.

Освітленість від центра дифракційної картини до місця розташування першого темного кільця падає монотонно. Це призводить до того, що при візуальному спостереженні за контрастом пляма Ейрі здається меншою від діаметра D першого темного кільця. Тому діаметри D_E плями Ейрі наближено можна покласти рівними радіусу першого темного кільця, тобто вважати, що:

$$D_E = 1,22 \frac{\lambda}{D} F. \quad (7.14)$$

7.2.5. *На щілину шириною b нормально падає плоска світлова хвиля з довжиною хвилі λ так, що спостерігається дифракція Фраунгофера. Як знайти положення дифракційних максимумів і мінімумів першого, другого та третього порядків?*

Положення дифракційних мінімумів будемо характеризувати кутами φ_m між напрямком на відповідний (m -й) мінімум і напрямком у центр центрального (нульового) максимуму дифракційної картини. Останній визначається зі співвідношення

$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 1$. Тобто центральний (нульовий) максимум спостерігається

при виконанні умови $u = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Мінімуми інтенсивності спостерігаються за виконання умови для кутів дифракції, коли виконується співвідношення

(7.11): $\sin \varphi_m = \pm \frac{\lambda}{b} m$, де $m = 1, 2, 3, \dots$

Між мінімумами дифракційної картини розміщені максимуми інтенсивності, кути дифракції яких (φ'_1 та φ'_2 – кути на перший і другий максимуми, відповідно)

знаходять при розв'язанні трансцендентного рівняння $\operatorname{tg} u = u$, де $u = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda}$. Ці кути задовольняють умови $\sin \varphi'_1 = \pm 1,43 \frac{\lambda}{b}$ та $\sin \varphi'_2 = \pm 2,46 \frac{\lambda}{b}$.

7.2.6. Дифракція Фраунгофера на щілині шириною b спостерігається на віддаленому екрані або на екрані, розташованому у фокальній площині збиральної лінзи. За яким законом відбувається розподіл інтенсивності $I(\varphi)$ світла на екрані в напрямку, перпендикулярному до щілини залежно від кута φ між напрямком вимірювання та напрямком у центр головного (нульового) максимуму дифракції в цьому випадку? Вважати довжину хвилі світла λ заданою.

Схема спостереження дифракції Фраунгофера на щілині наведена на рис. 7.12.

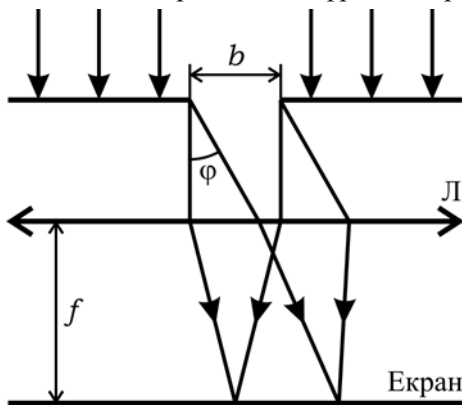


Рис. 7.12. До запитання 7.2.6

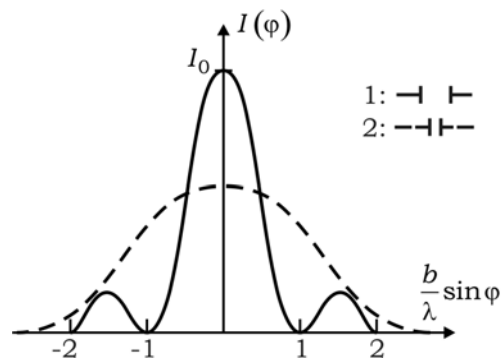


Рис. 7.13 . До запитань 7.2.8 та 7.2.9

Розподіл інтенсивності $I(\varphi)$ світла в напрямку кута φ на екрані у випадку дифракції Фраунгофера на щілині відбувається за законом

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \cdot \sin \varphi} \right)^2. \quad (7.15)$$

Фактично, $I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 u$, де sinc -функція від u дорівнює $\left(\frac{\sin u}{u} \right)$, де $u = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda}$. Залежність функції $I(\varphi)$ показана на рис. 7.13. Доведення цього закону (розподілу інтенсивності в дифракційній картині) виконане в прикладі 7.6.

7.2.7. Які фізичні висновки можна зробити з аналізу формули розподілу інтенсивності світла $I(\varphi)$ на екрані у випадку дифракції Фраунгофера на щілині?

Аналіз формули $I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \cdot \sin \varphi} \right)^2$ і висновки з нього:

- дифракційна картина симетрична відносно головної оптичної осі лінзи через те, що $I(\varphi) = I(-\varphi)$;

- відома границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ свідчить, що для кута $\varphi = 0$ буде максимум інтенсивності (центральный максимум);

- відсутність залежності від довжини хвилі λ для центрального максимуму означає, що при дифракції білого світла головний максимум буде не забарвлений, на відміну від максимумів більш високих порядків, в умові існування яких залишається залежність від кута φ та λ ;

- мінімуми інтенсивності в дифракційній картині спостерігаються при виконанні умови

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \varphi\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \varphi = \pm m\pi, \text{ де } m = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow b \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda.$$

Цей вираз (7.11) називається умовою мінімумів для дифракції Фраунгофера на прямокутній щілині;

- між мінімумами дифракційної картини розміщені максимуми інтенсивності, кути дифракції, на які (φ_1 – кут на перший максимум; φ_2 – кут на другий максимум; φ_m – кут на m -й максимум) задовольняють умови $\sin \varphi_1 = \pm 1,43 \frac{\lambda}{b}$ та

$$\sin \varphi_2 = \pm 2,46 \frac{\lambda}{b} \text{ (див. запитання 7.2.5);}$$

- розподіл інтенсивності світла по максимумах відбувається в пропорції $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots$. Основна частина інтенсивності продифрагованого світла зосереджена в головному (нульовому) максимумі. Тільки 4,5 % інтенсивності продифрагованого світла припадає на два перших ($m = \pm 1$) максимуми і ~2 % – на два других ($m = \pm 2$) максимуми.

7.2.8. Від яких параметрів залежить ширина дифракційної смуги у випадку дифракції Фраунгофера на щілині?

Із формули (7.15) $I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \cdot \sin \varphi} \right)^2$ і рис. 7.13 видно, що ширина дифракційної смуги залежить від довжини хвилі λ і ширини щілини b . При збіль-

шенні b та/або зменшенні λ кут φ зменшується, тобто зменшується і ширина дифракційної смуги. До такого самого результату можна дійти, розглядаючи умову дифракційних мінімумів $b \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda$, з якої випливає, що кутова ширина дифракційних смуг дорівнює $\Delta\varphi = 2 \arcsin(\lambda/b)$. Таким чином, при збільшенні λ та/або зменшенні b ширина дифракційних смуг збільшується.

До речі, у дифракції Френеля ширина дифракційних смуг зі збільшенням довжини хвилі також зростає, але повільніше.

7.2.9. Як залежить ширина дифракційної смуги у випадку дифракції Фраунгофера монохроматичного світла на щілині в екрані від ширини щілини b ?

У запитанні 7.2.8 було з'ясовано, що при збільшенні ширини щілини b ширина дифракційної смуги зменшується. На рис. 7.13 зображений розподіл інтенсивності в дифракційній картині для двох значень ширини щілини: 1 – широка щілина; 2 – вузька щілина. Площі під кривими 1 і 2 мають бути однаковими.

Цікавим для розуміння фізики дифракції світла на щілині є випадок, якщо $b = \lambda$. Тоді кутова ширина дифракційних смуг $\Delta\varphi = \pi/2$, тобто головний максимум дифракційної картини охоплює всю область екрана, дифракційна картина фактично зникає, хоча сама дифракція набуває свого максимального вияву щодо зміни напрямку поширення променів.

Для $b > \lambda$ кутова ширина дифракційних смуг зменшується, а самі вони стають більш інтенсивними. Для випадку $b \gg \lambda$ спостерігаємо дифракційну картину, у центрі якої спостерігатиметься чітке зображення джерела, що відповідає прямолінійному поширенню світла. Цей випадок відповідає тим умовам, за яких працює камера-обскура (див. запитання 7.4.17). Для $b < \lambda$ спостереження дифракції неможливе, хоча б тому, що формально неможливе виконання умови $\sin \varphi_1 = (\lambda/b) > 1$.

7.2.10. Відомо, що при використанні білого світла нульовий максимум при дифракції Фраунгофера на щілині не забарвлений (білий), а максимуми з $|m|=1, 2, 3, \dots$ – кольорові: для кожної довжини хвилі λ свій кут φ дифракції. Як розподілені кольори в максимумах?

У максимумів з $|m|=1, 2, 3, \dots$ фіолетова частина спектра розміщена ближче до "нульового" максимуму, червона – далі. Це випливає, наприклад, із формули (7.11).

7.2.11. Порівняйте дифракцію Фраунгофера на одній і двох щілинах.

Перехід від дифракції на одній щілині до дифракції на двох щілинах відбувається паралельним перенесенням щілини шириною b на відстань a . Результуюча дифракційна картина може бути визначена шляхом додавання хвиль, які йдуть від обох щілин, з урахуванням їх інтерференції.

Розподіл амплітуди від однієї щілини можна записати як $E_1 = E_0 \operatorname{sinc}(u)$, де $u = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda}$ (див. запитання 7.2.6). Від другої щілини світло буде давати такий са-

мий розподіл, але із запізненням по фазі на $\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$, де $\Delta = (a + b) \cdot \sin \varphi$
 (рис. 7.14): $E_2 = E_0 \operatorname{sinc}(u) \cdot e^{i\delta}$.

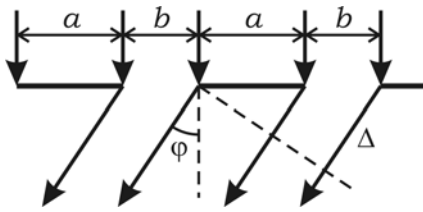


Рис. 7.14. Дифракція Фраунгофера на двох щілинах

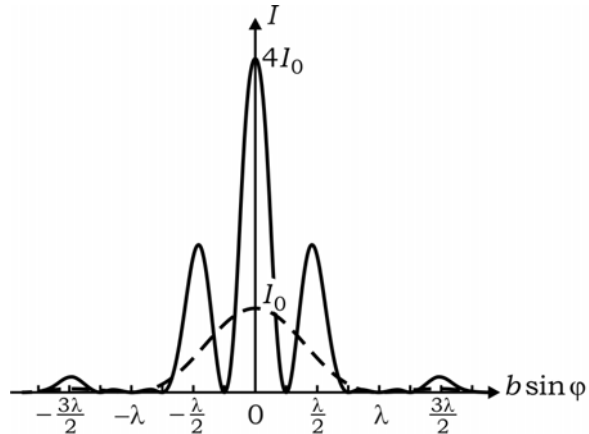


Рис. 7.15. Розподіл інтенсивності світла в дифракції Фраунгофера на першій щілині шириною b (пунктирна крива) і на двох щілинах з періодом $d = 2b$ (суцільна крива). На графіку не витримане співвідношення за інтенсивностями для двох кривих

Результуюча амплітуда $E_{\text{рез}} = E_1 + E_2 = E_0 \operatorname{sinc}(u) \cdot (1 + e^{i\delta})$. Відповідно результуюча інтенсивність $I_{\text{рез}}$ дорівнює

$$I_{\text{рез}} = E_{\text{рез}} \cdot E_{\text{рез}}^* = I_0 \operatorname{sinc}^2(u) \cdot (1 + e^{i\delta})(1 + e^{-i\delta}) = 4I_0 \operatorname{sinc}^2(u) \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Інтенсивність у головному максимумі дифракції на двох щілинах порівняно з інтенсивністю світла I_0 у головному максимумі дифракції на першій щілині збільшується в 4 рази ($4I_0$). Множник $\operatorname{sinc}^2(u)$ дає додаткові максимуми і мінімуми, аналіз яких наведено нижче (рис. 7.15). Мінімуми для однієї щілини шириною b спостерігаються в напрямках, які задовольняє умова $b \cdot \sin \varphi = m\lambda$. У тих напрямках, у яких ні від однієї із щілин не поширюється світло, також будуть спостерігатись мінімуми. Інший випадок з максимумами – вони вже не будуть спостерігатись у тих самих напрямках, що й у разі однієї щілини. Це пов'язано з інтерференцією хвиль від двох щілин. У деяких напрямках вони будуть давати додаткові мінімуми, а в деяких напрямках – максимуми.

Умова головних максимумів (рис. 7.15) така: $\Delta = (a + b) \cdot \sin \varphi = m\lambda$. Між ними розташуються додаткові мінімуми у напрямках, які відповідають умові

$$\Delta = (a + b) \cdot \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Величина $a + b = d$ називається *періодом структури*.

7.2.11. На прикладі дифракції Фраунгофера, яка відбувається на трьох і чотирьох щілинах, покажіть, як у дифракційній картині проявляються головні максимуми, а також додаткові мінімуми та додаткові максимуми.

Кількість додаткових мінімумів і максимумів залежить від кількості N щілин $N - 1$ та $N - 2$, відповідно.

Дифракція Фраунгофера на трьох щілинах. Для трьох щілин між двома головними максимумами існують два додаткових мінімуми та один додатковий максимум (рис. 7.16).

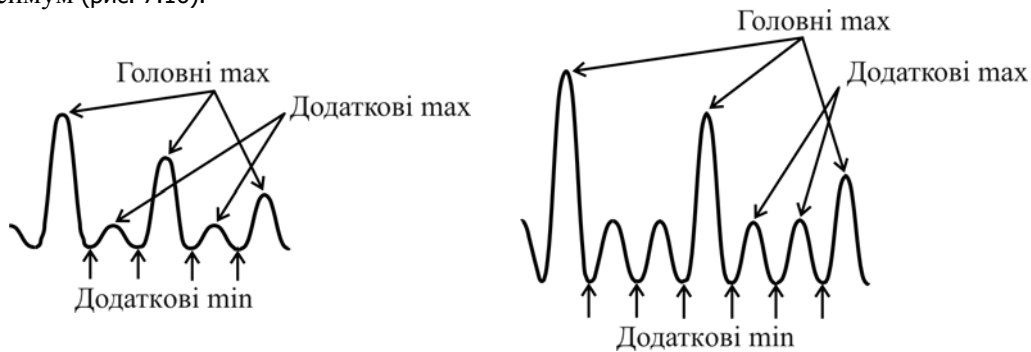


Рис. 7.16. Розподіл інтенсивності світла в дифракції Фраунгофера на трьох щілинах

Рис. 7.17. Розподіл інтенсивності світла в дифракції Фраунгофера на чотирьох щілинах

Дифракція Фраунгофера на чотирьох щілинах. Для чотирьох щілин між двома головними максимумами існують три додаткові мінімуми та два додаткові максимуми (рис. 7.17).

7.2.12. У скільки разів будуть відрізнятися інтенсивності світла в головних максимумах дифракційних картин, отриманих на першій щілині і на N аналогічних щілинах?

Інтенсивності світла в нульовому максимумі дифракційних картин будуть відрізнятися в N^2 разів.

7.2.13. Зобразіть, як виглядає дифракційна картина у разі дифракції Фраунгофера на одній, двох, трьох, чотирьох і п'яти щілинах у випадку, коли відстань між щілинами a пов'язана із шириною щілини b співвідношенням $a = 2b$.

Для кількості щілин $N = 2, 3, 4, 5, \dots$ дифракційна картина являє собою вибірку дифракційної картини для $N = 1$ за рахунок головних максимумів (рис. 7.18). Головні максимуми звужуються в міру збільшення величини N . Дифракційні картини для будь-яких значень N симетрична відносно центрального ($m = 0$) максимуму-

му. Інтенсивності головних максимумів змінюються пропорційно N^2 . У випадку, коли кількість щілин дорівнює N , між двома сусідніми головними максимумами розміщуються $(N-1)$ додаткових мінімумів і $(N-2)$ додаткових максимумів.

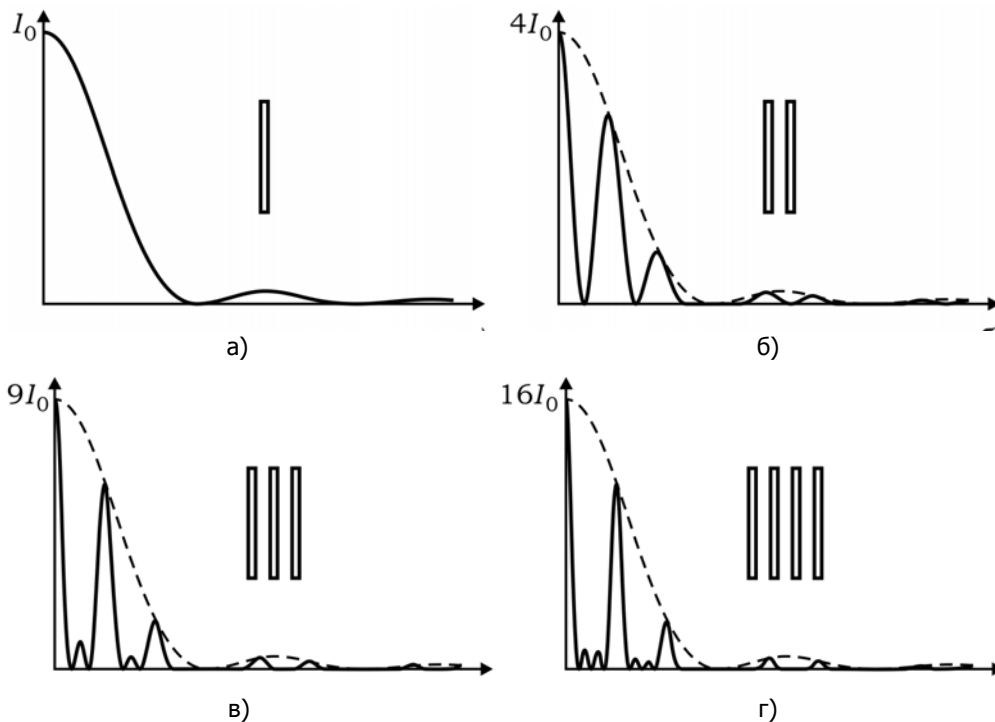


Рис. 7.18. Розподіл інтенсивності світла на екрані, починаючи із середини дифракційної картини, у дифракції Фраунгофера на N щілинах ($N = 1, 2, 3, 4, 5$) у випадку, коли відстань між щілинами a пов'язана із шириною щілини b співвідношенням $a = 2b$. Величина I_0 – інтенсивність світла в головному максимумі дифракції на першій щілині

7.2.14. За яких умов з точки зору дифракції світла можна спостерігати дзеркальне відбиття світла від поверхні твердого тіла?

Термін "відбиття світла" використовується, коли поверхню, від якої відбивається світло, можна вважати ідеальною ("гладенькою") поверхнею, а умови відбиття визначаються принципом Ферма. Проте відомо, що навіть поверхня кристала має нерівності, співмірні зі сталою ґратки. Це призводить до дифракції електромагнітної хвилі на структурі поверхні, яка заважає дзеркальному відбиттю світла. Якщо ця поверхнева структура впорядкована, відбиті промені утворюють дифракційну картину (у разі виконання умови $d \leq \lambda$). Для неупорядкованої (шорсткої) поверхні немає визначеного періоду структури, тому світло дифрагує під різними кутами або, як кажуть, розсіюється.

За малих кутів падіння умовою відбиття ($\varphi = \varphi'$) з точки зору дифракції світла є виконання рівності $d(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) = 0 \cdot \lambda$, тобто "перекачка" світлової енергії в головний ($m = 0$) максимум дифракції. Іншими словами, слід намагатись, щоб нульовий максимум дифракції спостерігався під кутом φ_0 , який дорівнює куту падіння φ . Окрім того, необхідно, щоб умови для максимумів вищих порядків ($m = 1, 2, \dots$) не виконувались. Очевидно, що для цього необхідне виконання умови $\lambda > d$. Щоб розбіжність відбитого світла була незначною, треба "відійти" від дифракції в дальній зоні, посиливши умову $\lambda \gg d$.

За великих кутів падіння умова дзеркального відбиття трохи змінюється: $\lambda \gg d(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$, тому дзеркальне відбиття стає можливим і за більших розмірів нерівностей поверхні твердого тіла (див. також [2, С. 310]).

7.2.15. Чи можна спостерігати дифракцію при падінні сонячного світла на щілину шириною 0,1 мм?

Розглянемо випадок, коли на щілину шириною b падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла. За умов дифракції Фраунгофера на екрані спостерігається центральний дифракційний максимум під кутом дифракції $\varphi_{1\max} = 0$, перший мінімум утворюється під кутом $\varphi_{1\min} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right)$, як показано на рис. 7.13 і т. д.

Однак сонячне випромінювання потрапляє на Землю не у вигляді ідеально паралельних променів: із Землі Сонце видно під кутом $\alpha \approx 32' \approx 10^{-2}$ рад, тобто на щілину падає світло в межах кутів від $\varphi_{01} = 0^0$ до $\varphi_{02} = \alpha$. Для променів, що падають під кутом $\varphi_{01} = 0^0$, картина дифракції буде такою, як на рис. 7.13. Зі збільшенням кута падіння від 0 до α дифракційна картина буде змішуватись, максимально – для променів, що падають на щілину під кутом α . У цьому випадку центральний максимум спостерігатиметься під кутом $\varphi_{2\max} = \alpha$, а перший мінімум – під кутом дифракції $\varphi_{2\min} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right) + \alpha$; і т.д. Якщо внаслідок цього головний максимум дифракції для променів з кутом падіння $\varphi_{01} = 0^0$ буде накладатись на мінімум для променів з кутом падіння $\varphi_{02} = \alpha$, то дифракційна картина взагалі не спостерігатиметься.

Для порівняння необхідно знайти кутові розміри дифракційного максимуму. Перший мінімум спостерігається за умови $b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = \lambda$, центральний максимум за кута $\varphi = 0$. За умови мализни $\Delta\varphi$ отримаємо $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{b} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, якщо взяти довжину хвилі для середини видимої частини сонячного спектра. Унаслідок того,

що зміна кута $\Delta\varphi$ при переході від максимуму дифракції до мінімуму менша від розбіжності сонячного пучка ($\alpha \approx 10^{-2}$), дифракція Фраунгофера на цій щілині не спостерігатиметься.

7.2.16. *Дифракція та інтерференція – це різні ефекти, пов'язані із хвильовими властивостями світла. Що спільного між ними?*

Спільні властивості для дифракції та інтерференції:

- зовнішні прояви дифракції та інтерференції дуже часто мало відрізняються. Наприклад, дифракційна картина, отримана від дифракції монохроматичного світла на отворі, та інтерференційна картина мають кільця Ньютона, що дуже схожі, і треба проводити спеціальні спостереження та дослідження, щоб відрізнити їх. Існує навіть метод виготовлення зонних пластинок, який полягає у фотографуванні кілець Ньютона;

- різна й неоднозначна залежність ширини смуг Δx в інтерференційній і дифракційній картинах від довжини хвилі λ світла. В інтерференційній картині $\Delta x \sim \lambda$ у досліді Юнга та $\Delta x \sim \sqrt{\lambda}$ у кільцях Ньютона. У дифракційній картині величина Δx залежить від довжини хвилі світла за законом $\Delta x \sim \lambda$ у дифракції Фраунгофера та $\Delta x \sim \sqrt{\lambda}$ у дифракції Френеля;

- зв'язок між дифракцією та інтерференцією проявляється також в тому, що у випадку дифракції Фраунгофера на багатьох отворах промені від сусідніх отворів інтерферують між собою, утворюючи головні максимуми та додаткові мінімуми в дифракційній картині. Фактично, у цьому випадку вигляд дифракційної картини є результатом багатопроменевої інтерференції від окремо розташованих джерел (щілин або отворів);

- дифракційна картина на періодичній структурі утворюється в результаті інтерференції хвиль, що продифрагували на її окремих елементах.

7.3. Дифракційна ґратка

7.3.1. Короткі теоретичні відомості

Дифракційна ґратка (Дґр) – це періодична структура з великою кількістю регулярно розташованих елементів, на яких відбувається дифракція світла. Наприклад, дифракційною ґраткою може бути набір паралельних еквідистантних штрихів, нанесених на плоску або вгнуту поверхню. Штрихи з визначеним і постійним для даної дифракційної ґратки профілем повторюються через однаковий проміжок d , який називається її періодом.

Одна із основних властивостей Дґр – здатність розкладати падаючий на неї пучок світла у спектр, за довжинами хвиль. Тому Дґр може використовуватись як диспергуючий елемент у спектральних приладах. Для Дґр, яка складається з N щілин і має період структури d , із шириною щілини b розподіл інтенсивності монохро-

матичного світла $I(\varphi)$, що продифрагував на ДГр при нормальному падінні світла на неї, описується виразом

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2, \quad (7.16)$$

де $\alpha = \frac{\pi \cdot d \cdot \sin \varphi}{\lambda}$; $u = \frac{\pi \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda}$; I_0 – інтенсивність світла, яке випромінюється однією щілиною в напрямку $\varphi = 0$.

• *Кутове положення головних максимумів* дифракційної картини, яку дає ґратка, що освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею, визначається рівнянням дифракційної ґратки

$$d \sin \varphi_m^{\max} = \pm m\lambda, \quad (7.17)$$

де φ_m^{\max} – кути дифракції; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядок дифракції.

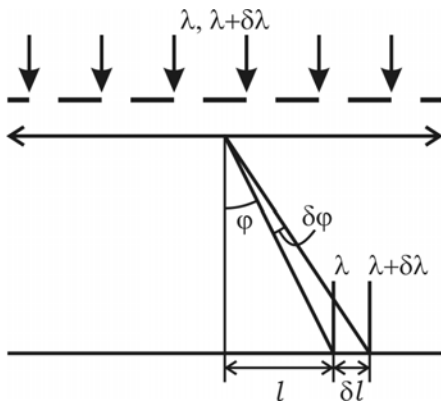


Рис. 7.19. До визначення дисперсії дифракційної ґратки

• *Кутове положення розташованих між головними максимумами додаткових мінімумів* дифракційної картини визначається рівнянням

$$d \sin \varphi_p^{\min} = \left(m + \frac{p}{N} \right) \lambda, \quad (7.18)$$

де p – порядковий номер додаткового мінімуму ($p = 1, 2, 3, \dots, (N-1)$); N – загальна кількість штрихів дифракційної ґратки. За $p = N$ додатковий мінімум перетворюється на головний максимум.

Основні характеристики дифракційної ґратки:

- кількість штрихів N ;
- стала ґратки $d = a + b$;
- ширина $L = N \cdot d$;
- кількість штрихів на одиницю ширини $\frac{1}{d}$, мм^{-1} ;

- тип ґратки (амплітудна, фазова, на відбиття, на просвіт тощо);
- кутова дисперсія (рис. 7.19)

$$D_{\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos\varphi} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2}}; \quad (7.19)$$

- лінійна дисперсія

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = f' D_{\varphi} = f' \frac{m}{d \cos\varphi}, \quad (7.20)$$

де f' – задня фокусна відстань фокусуєчої лінзи;

- роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN. \quad (7.21)$$

Роздільна здатність дифракційної ґратки визначається критерієм Релея – дві спектральні лінії з довжинами хвиль λ та $\lambda + \delta\lambda$ однакової інтенсивності розділяються, якщо відстань між лініями не перевищує відстані, для якої положення центрального (нульового) максимуму однієї лінії збігається з першим дифракційним мінімумом другої лінії;

- область вільної дисперсії визначається інтервалом довжин хвиль $\Delta\lambda$, вільним від накладання спектрів різних (сусідніх) порядків. Накладання почнеться тоді, коли збігаються місце розташування довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ у головному максимумі m -го порядку з місцем розташування довжини хвилі λ у головному максимумі $(m + 1)$ -го порядку:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (7.22)$$

Якщо на дифракційну ґратку падає паралельний пучок світла під кутом φ_0 , то положення головних максимумів визначається рівнянням

$$d(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_m^{\max}) = m\lambda, \quad \text{де } m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ – порядок дифракції.} \quad (7.23)$$

7.3.2. Запитання та відповіді

7.3.1. Чому ДҐр може бути спектральним елементом?

Із рівняння для ДҐр $d \cdot \sin\varphi = m\lambda$ видно, що положення головних дифракційних максимумів, окрім центрального (з $m = 0$), залежить від довжини хвилі λ .

7.3.2. Проаналізуйте розподіл інтенсивності в дифракційній картині від ДҐр для випадку, коли $N = 4$, $d = 3b$; де N – кількість щілин; d – період структури; b – ширина щілини.

У формулі (7.16) для першого множника (позначимо його через I_1) умови головних мінімумів визначаються як $b \sin\varphi = \pm m\lambda$, де $m = 1, 2, \dots$. Головні максимуми

розташовані між ними. Центральний максимум ($m=0$) спостерігається за $\varphi=0$, коли значення $\frac{\sin u}{u}=1$. Наступний максимум ($m=\pm 1$) спостерігається за виконання умови $b \sin \varphi = \frac{3}{2}\lambda$. Відношення інтенсивностей таке: $I_0 : I_1 = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2$ і т. д. (рис. 7.20).

Звернемо увагу, що головні максимуми вдвічі ширші за додаткові (рис. 7.20).

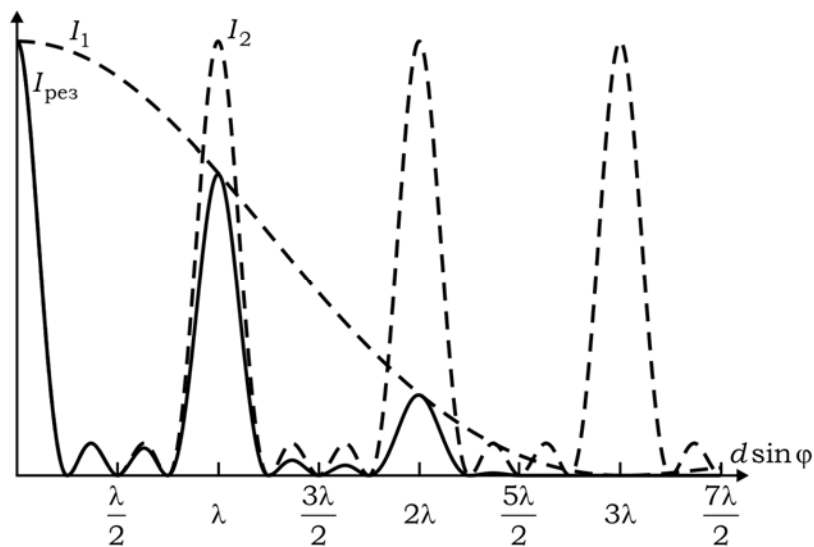


Рис. 7.20. Розподіл інтенсивності в дифракції Фраунгофера на чотирьох щілинах (до запитання 7.3.2)

Другий множник у (7.16) (позначимо його через I_2) складніший за перший. Умовою мінімуму є $d \sin \varphi = \pm \frac{j\lambda}{N}$, $\frac{j}{N} \neq p$. За $p = \frac{j}{N}$ черговий мінімум переходить у головний максимум. У нашому випадку ($N=4$, $d=3b$) це означає, що між головними максимумами є три мінімуми за $j=1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, \dots$. За $j=4, 8, \dots$ у цьому випадку отримуємо головні максимуми, до того ж, їх лише два між головними максимумами. Цей розподіл дає крива I_2 на рис. 7.20. Крива $I_{рез}$ дає результуючий розподіл інтенсивності $I_1 \cdot I_2$. Видно, що внаслідок збігу умов мінімумів для I_1 і максимумів для I_2 зникає кожний третій максимум для другої кривої.

7.3.3. За якої умови при дифракції на ДГр зникають усі парні максимуми?

Порівнюючи умови мінімумів на одній щілині та умови головних максимумів у дифракційній картині від ДГр, можна зробити висновок, що останні зникають, коли їхні умови накладаються одна на одну $\sin \varphi = \frac{m\lambda}{b} = \frac{p\lambda}{d}$, тобто $md = pb$, де m – порядок мінімумів у дифракційній картині від однієї щілини шириною b ; p – порядок максимумів у дифракційній картині від ДГр зі сталою ґратки d . Щоб зникав кожний другий максимум, необхідно створити такі умови: $p = 2m \Rightarrow d = 2b$.

7.3.4. *Запишіть умову спостереження головних максимумів:* а) при нормальному падінні світла з довжиною хвилі λ на дифракційну ґратку зі сталою ґратки d ; б) при падінні світла під кутом φ_0 на ДГр, яка працює у світлі "на прохід"; в) при падінні світла під кутом φ_0 на ДГр, яка працює у відбитому світлі.

Умова спостереження головних максимумів у всіх випадках буде однакою $\Delta = p\lambda$, де $p = 0, 1, 2, \dots$, а різниця ходу Δ утворюватиметься по-різному. При нормальному падінні (рис. 7.21, а) між променями 1 і 2 виникає різниця ходу $\Delta = d \sin \varphi$, що дає відому умову $d \sin \varphi = p\lambda$.

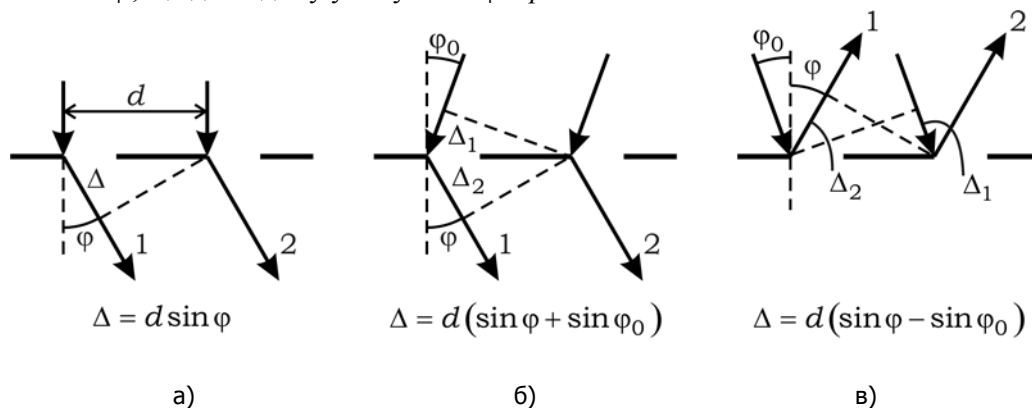


Рис. 7.21. До запитання 5.3.4

При падінні світла під кутом φ_0 на ґратку, яка працює у світлі "на прохід", (рис. 7.21, б) промінь 1 уже при падінні на ДГр відстає від променя 2 на величину $\Delta_1 = d \sin \varphi_0$, після дифракції – на величину $\Delta_2 = d \sin \varphi$. Зведення двох оптичних різниць ходу в одну разом дає $d(\sin \varphi_0 \pm \sin \varphi) = p\lambda$. Якщо дифрагований промінь лежить по інший бік від нормалі до ДГр, то після дифракції запізнюється другий промінь, тому в наведеній вище формулі може бути і знак "+", і знак "-".

При роботі з ґраткою у відбитому світлі (рис. 7.21, в) бачимо протилежне: якщо промені лежать по різні боки від нормалі, то Δ_1 і Δ_2 мають різні знаки, якщо по один бік – однакові. Тут максимуми утворюються за умови: $d(\sin \varphi_0 \mp \sin \varphi) = p\lambda$.

7.3.5. Чому дорівнює кутова ширина головних максимумів дифракційної картини, отриманої за допомогою ДГр при нормальному падінні світла на неї? Проаналізуйте цю закономірність.

Фактично, це питання зводиться до визначення кута $\delta\varphi$ між напрямками на головний максимум і найближчий до нього мінімум у дифракційній картині від ДГр, який буде дорівнювати кутовій півширині головного максимуму.

У формулах (7.15) і (7.16) наведено умови головних максимумів $d \sin \varphi = p\lambda$ і мінімумів $d \sin \varphi = \pm \frac{j\lambda}{N}$, $\frac{j}{N} \neq p$. Коли $p = \frac{j}{N}$ – ціле число, черговий мінімум переходить у головний максимум, тому найближчий до головного максимуму мінімум спостерігається за $j = p + \frac{1}{N}$. У реальних дифракційних ґратках N – повна кількість штрихів ґратки має порядок $10^2 \div 10^4$, тому перехід від максимуму до сусіднього мінімуму відбувається за незначної зміни кута дифракції $\delta\varphi$. Умова мінімуму може бути переписана у вигляді

$$d \sin(\varphi + \delta\varphi) = p\lambda + \frac{\lambda}{N} \Rightarrow d \sin \varphi \cdot \cos \delta\varphi + d \cos \varphi \cdot \sin \delta\varphi = p\lambda + \frac{\lambda}{N}.$$

З урахуванням малих кута $\delta\varphi$:

$$d \sin \varphi + d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = p\lambda + \frac{\lambda}{N} \Rightarrow d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = \frac{\lambda}{N}.$$

З останнього рівняння знаходимо кутову ширину головних максимумів дифракційної картини:

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d \cdot \cos \varphi} = \frac{\lambda}{L \cdot \cos \varphi} = \frac{\lambda}{N \sqrt{d^2 - (p\lambda)^2}}, \quad (7.24)$$

де L – ширина ДГр; N – кількість штрихів у ДГр; d – період ДГр. Таким чином знайдений вираз для кутової півширини головного максимуму дифракційної картини, яку створює ДГр.

Аналіз одержаного результату (7.22) показує:

1) за малих кутів дифракції (для максимумів малих порядків) $\delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d} = \frac{\lambda}{L}$,

тобто дорівнює сталій величині;

2) головні максимуми найрізкіші в центрі дифракційної картини (порядок дифракції p малий);

3) зі збільшенням порядку головних дифракційних максимумів їх ширина збільшується;

4) за $d = \text{const}$ зі збільшенням кількості штрихів N , окрім збільшення інтенсивності $I_\varphi \sim N^2$, відбувається різке $\left(\sim \frac{1}{N}\right)$ звуження головних максимумів;

5) величина $\delta\varphi$ залежить не від d і N окремо, а від добутку $d \cdot N = L$, тобто від L . Головні дифракційні максимуми будуть тим вузькими, чим більша ширина (L) ДГр.

7.3.6. Який максимальний порядок спектра можна спостерігати на дифракційній ґратці з періодом d для світла з довжиною хвилі λ ?

Аналіз умови максимумів $d \cdot \sin \varphi = m\lambda$ показує, що за фіксованих d і λ найбільший порядок буде спостерігатись за $\sin \varphi \rightarrow 1$, тобто це буде найбільше ціле число m , коли кут дифракції наближається до 90° . Це означає, що найбільший порядок дифракції є максимальним цілим числом, яке не перевищує відношення $\frac{d}{\lambda}$: $m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}$. Порядок дифракції можна збільшити, застосовуючи похиле па-

діння променів на ДГр (див. запитання 7.3.7 і 7.3.8): $m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}(\sin \varphi_0 + 1)$.

7.3.7. Чим визначається максимальна довжина хвилі, яку можна одержати в спектрі дифракційної ґратки?

З умови (7.17) дифракційних максимумів отримуємо, що

$$\lambda_{\max} \approx d. \quad (7.25)$$

Це відповідає випадку, коли кут дифракції φ наближається до 90° , а порядок спектра найменший $m = 1$.

Результат змінюється у випадку похилого падіння променів на ДГр. Якщо падаючий і дифрагований промені лежать по один бік від нормалі (див. запитання 7.3.4), то можна спостерігати у спектрі максимальну довжину хвилі

$$\lambda_{\max} = d(\sin \varphi_0 + 1). \quad (7.26)$$

7.3.8. Відомо, що дифракційна ґратка (ДГр) повинна мати період (d) порівняний із довжиною хвилі (λ) випромінювання, що дифрагує: $d \sim \lambda$. Для ДГр з періодом $d > \lambda$, у випадку нормального падіння випромінювання на ДГр, дифракція хвиль неможлива. Чи можна все ж спостерігати дифракцію випромінювання на ДГр за умови, що $d > \lambda$, і навіть $d \gg \lambda$? Яким способом?

Загалом для нормального падіння світла на ДГр, яке часто використовується на практиці, спостереження дифракції неможливе. Це пов'язано з малими кутами відхилення продифрагованого світла, як це видно з рівняння для ДГр $d \cdot \sin \varphi = m\lambda$ (рис. 7.22). Світло за цієї умови поширюється за законами геометричної оптики.

Для похилого падіння світла на ДГр під кутом φ_0 рівняння для ДГр набуває вигляду $d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda$ (див. запитання 7.3.4). Для ковзного падіння світла $\left(\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}\right)$ навіть "груба" (з великим періодом $d \gg \lambda$) ДГр може давати помітну дифракційну картину. Покажемо це.

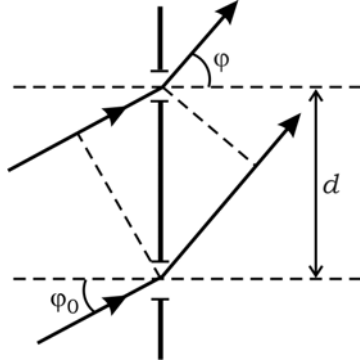


Рис. 7.22. До запитання 7.3.8

Кути $\varphi \approx \varphi_0$. Із цього випливає, що

$$(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = 2 \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \approx (\varphi - \varphi_0) \cdot \cos \varphi_0 .$$

Тоді рівняння ДГр набуде вигляду

$$d \cdot (\varphi - \varphi_0) \cdot \cos \varphi_0 = m\lambda \Rightarrow \frac{m\lambda}{d \cdot \cos \varphi_0} \equiv \frac{m\lambda}{d_{ef}} = (\varphi - \varphi_0) , \text{ де } d_{ef} = d \cdot \cos \varphi_0 .$$

Оскільки $\varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}$, то $\Rightarrow d_{ef} \ll d$. Таким чином, якщо $d_{ef} \sim \lambda$, то на ДГр можна спостерігати дифракцію.

Використовуючи розглянутий метод ковзного освітлення ДГр, можна, наприклад, спостерігати дифракцію видимого світла на рівчаках грамофонної платівки, період яких $d \approx 100$ мкм, тобто, коли $d \gg \lambda$.

7.3.9. Чи можна спостерігати дифракцію рентгенівського випромінювання ($\lambda \sim 10^{-4}$ мкм) на ДГр з $d \sim 10^{-1}$ мкм ($d \gg \lambda$)? Під яким кутом?

Для нормального падіння рентгенівського випромінювання ($\lambda \sim 10^{-4}$ мкм) на ДГр з $d \sim 10^{-1}$ мкм спостерігати дифракцію неможливо (див. запитання 7.3.8). Для похилого падіння променів на ДГр під кутом φ_0 (рис. 7.22) рівняння для ДГр набуває вигляду $d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda$. Тому для ковзного падіння $\left(\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$ рентгенівських променів навіть "груба" (з великим періодом $d \gg \lambda$) ДГр може давати дифракційну картину. Забезпечити такий кут падіння експериментально дуже важко, але можна спробувати.

Визначимо кут φ_0 для ДГр з $d \sim 10^{-1}$ мкм і випромінювання з $\lambda \sim 10^{-4}$ мкм. Для існування дифракції необхідно виконати умову

$$\lambda \approx d_{ef} \equiv d \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow 10^{-4} \approx 10^{-1} \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 \approx 10^{-3} \Rightarrow \varphi_0 \approx 89^{\circ}56' .$$

7.3.10. Чи змінюється роздільна здатність дифракційної ґратки та її дисперсійна область, якщо зафіксувати кут спостереження і перекрити щілини ДҐр через одну?

Перекривання щілин через одну еквівалентно збільшенню періоду ДҐр вдвічі, тобто $d_2 = 2d_1$. За незмінного кута спостереження змінюється порядок спектра, який видно під цим кутом:

$$d_1 \sin \varphi = m_1 \lambda; \quad d_2 \sin \varphi = m_2 \lambda; \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2m_1.$$

При цьому також вдвічі зменшується кількість щілин $N_2 = N_1/2$. Область дисперсії ДҐр (7.22) визначається як ділянка чистого спектра, що не перекривається з іншими порядками спектра $\Delta\lambda = \lambda/m$. При перекриванні щілин під фіксованим кутом спостерігатиметься вдвічі вищий порядок спектра, тому область дисперсії зменшується наполовину.

Роздільна здатність ДҐр (7.21) $R = mN$, де N – повна кількість щілин. Як вже було показано, при перекритті щілин ДҐр через одну відбувається зменшення кількості щілин N у два рази і за незмінного кута спостерігається вдвічі більший порядок дифракції. Таким чином, роздільна здатність заданої ділянки спектра не змінюється.

7.3.11. Доведіть, що при нормальному падінні світла на дифракційну ґратку її роздільна здатність не може перевищувати значення L/λ , де L – ширина дифракційної ґратки.

За роздільну здатність приймають значення (7.21) $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$, тут $\delta\lambda$ – різниця між двома довжинами хвиль λ і $\lambda + \delta\lambda$, які розташовані на межі поділу. Можна сформулювати т. зв. критерій Релея: зображення у спектрі двох ліній однакової інтенсивності, близьких за довжиною хвилі, вважають розділеними, якщо головний максимум дифракції від однієї лінії збігається з найближчим мінімумом дифракції для сусідньої лінії (рис. 7.23).

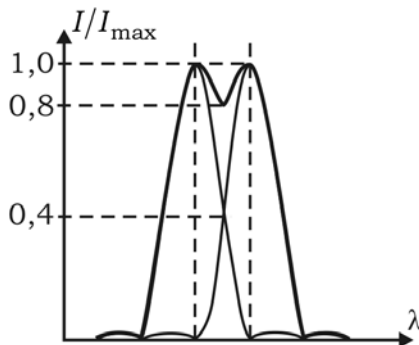


Рис. 7.23. До запитання 7.3.11

Кількісний аналіз показує, що лінії, до яких можна застосувати критерій Релея, перетинаються на висоті ординати $\approx 0,4I_{\max}$, а сумарна обгинаюча має мінімум за $\approx 0,8I_{\max}$. Така зміна в інтенсивності фіксується досить надійно.

Можна показати, що зміна кута при переході від максимуму до найближчого мінімуму дорівнює (7.24) $\delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d} = \frac{\lambda}{L}$. З іншого боку, можна записати умови максимумів для двох ліній $d \sin \varphi = p\lambda$ та $d \sin(\varphi + \delta\varphi_{min}) = p(\lambda + \delta\lambda)$. Із цієї пари рівнянь за умови мализни $\delta\varphi$ отримуємо $\Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{pN}$; $\Rightarrow R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = pN$, тобто роздільна здатність тим вища, чим вище порядок спектра p і більша кількість дифрагуючих пучків світла N .

Урахувавши, що $N = L/d$ (L – ширина ДГр, d – її період), отримуємо $R = \frac{p \cdot L}{d}$. У запитанні 7.3.6 було показано, що максимальний порядок спектра, який дає ДГр, за умов нормального падіння величина $m_{max} \leq \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \frac{m_{max}}{d} \leq \frac{1}{\lambda}$. Тому

$$R \leq \frac{L}{\lambda}. \quad (7.27)$$

7.3.12. Чи змінюється роздільна здатність дифракційної ґратки при зміні кута падіння світла на неї? Напрямок спостереження дифракції при цьому не змінюється.

Роздільна здатність $R = pN$ залежить від порядку спектра, який спостерігається. У запитанні 5.3.4 було показано, що при зміні кута падіння φ_0 під певним кутом дифракції φ може спостерігатись як більший, так і менший порядок дифракції. Відповідно до цього змінюватиметься і роздільна здатність дифракційної ґратки.

7.3.13. Чому при роботі з дифракційною ґраткою чи призмою як зі спектральними приладами важливо забезпечити високу просторову когерентність світла, що падає на неї?

На кожній із N щілин дифракційної ґратки промені дифрагують у певному напрямку φ , збираються об'єктивом та інтерферують між собою. Чим більше променів інтерферує, тим різкішими стають дифракційні максимуми, адже перехід від максимуму до найближчого мінімуму відбувається (7.24) при зміні кута дифракції на $\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd}$ (див. запитання 5.3.5). Якщо не всі промені когерентні між собою, то отримаємо кілька дифракційних картин, кожену для певної кількості променів, когерентних між собою. Виходячи з (6.35), можна сформулювати умову просторової когерентності: кутовий розмір джерела (вхідної щілини спектрального приладу) не має перевищувати кут

$$\Psi_{max} = \frac{\lambda}{l}, \quad (7.26)$$

де l – лінійний розмір джерела (довжина вхідної щілини).

7.3.14. Чи залежить роздільна здатність ДГр від розміру джерела світла? Відповідь дайте на такому прикладі. Віддалене протяжне джерело світла, спектр якого має дві тонкі спектральні лінії $\lambda_1 = 500,0$ нм і $\lambda_2 = 500,2$ нм рівної інтенсивності. Зробіть оцінку кутового розміру Ψ джерела, за якого можна розрізнити ці лінії.

Ширина (L) ДГр має бути не більша за радіус просторової когерентності, який дорівнює (6.38) $r_k = \frac{\lambda}{2\Psi}$, де Ψ – кутовий розмір протяжного джерела, під яким його видно із центра ДГр. З іншого боку, $L = N \cdot d$, де N – кількість штрихів; d – період ДГр.

Таким чином, максимально припустимий розмір протяжного джерела має задовольняти умову $L = N \cdot d \approx \frac{\lambda}{2\Psi}$.

Роздільна здатність ДГр дорівнює (7.21) $R = \frac{\lambda_{\text{сер}}}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Для наведеного прикладу роздільна здатність $R = 2500$. Відомо, що максимальна роздільна здатність пов'язана з максимальним значенням порядку дифракції (m_{max}), який дозволяє спостерігати ДГр, співвідношенням $R = N \cdot m_{\text{max}}$. Для оцінки величини m_{max} можна скористатись рівнянням ДГр $d \cdot \sin \theta = m\lambda$, з якого випливає, що $m_{\text{max}} = \frac{d}{\lambda}$.

Таким чином, $R = N \cdot m_{\text{max}} = N \frac{d}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\Psi} \equiv \frac{1}{2\Psi}$, і тоді $\Psi = \frac{1}{2R} = 2 \cdot 10^{-4}$ рад. Розмір джерела, як бачимо, має бути досить малим.

7.4. Дифракційні обмеження в оптичних елементах і системах. Роздільна здатність оптичних приладів

7.4.1. Короткі теоретичні відомості

- Під лінійною R_l і кутовою R_φ роздільними здатностями оптичного приладу розуміють величини, обернені до значень мінімальної відстані δl або мінімального кута $\delta\varphi$, за яких зображення двох близько розташованих точкових джерел випромінювання однакової інтенсивності ще розрізняються як окремі, тобто

$$R_l = \frac{1}{\delta l}, \text{ м}^{-1}; \quad R_\varphi = \frac{1}{\delta\varphi}, \text{ рад}^{-1}. \quad (7.28)$$

- *Критерій Релея* – це критерій роздільної здатності, згідно з яким два точкових некогерентних джерела вважаються розділеними, якщо центр дифракційної

плями (головного дифракційного максимуму) від одного з них збігається з першим мінімумом дифракційної картини від другого.

• *Роздільні здатності об'єктива (лінзи) з урахуванням формул (7.13) і (7.28) визначаються як*

$$\text{лінійна} \quad R_l = \frac{1}{1,22\lambda} \cdot \frac{D}{f'}; \quad (7.29)$$

$$\text{кутова} \quad R_\varphi = \frac{D}{1,22\lambda}. \quad (7.30)$$

• *Мінімальний розмір об'єкта, який можна розгледіти за допомогою мікроскопа, визначається за формулою*

$$a_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \sigma_A} = \frac{\lambda}{2A}, \quad (7.31)$$

де $A = n \cdot \sin \sigma_A$ – числова апертура об'єктива; n – показник заломлення середовища між об'єктом і об'єктивом; σ_A – апертурний кут об'єктива.

7.4.2. Запитання та відповіді

7.4.1. *Що таке пляма Ейрі (кружок Ейрі), і чому дорівнює її діаметр?*

Пляма Ейрі – це світле коло в центрі дифракційної картини Фраунгофера від круглого отвору. Діаметр плями Ейрі дорівнює діаметру першого темного кільця: $d \approx \theta_1 \cdot f \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} \cdot f$, де f – фокусна відстань об'єктива (рис. 7.25). Розглянемо це

питання на прикладі роботи телескопа, за допомогою якого ведеться спостереження двох близько розташованих зірок.

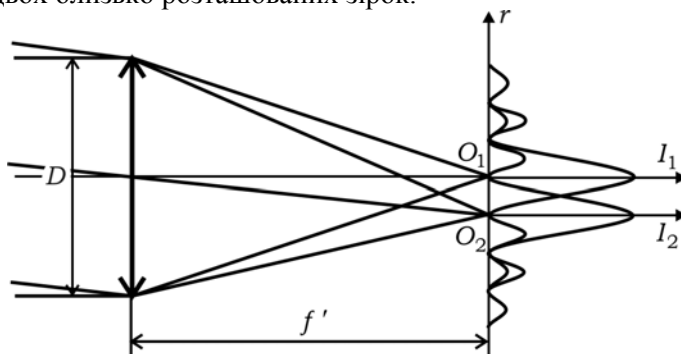


Рис. 7.24. До визначення роздільної здатності об'єктива

При дифракції світлових хвиль на діафрагмі об'єктива діаметром D у задній фокальній площині об'єктива формується дифракційна картина Фраунгофера у вигляді світлого кола в центрі (кружка Ейрі), який оточений концентричними кільцями максимумів і мінімумів (рис. 7.11). Відповідно до критерію Релея, зображення зірок буде розділятися, якщо центральний дифракційний максимум у зображенні однієї

зірки збігається з першим дифракційним мінімумом у зображенні другої. Відстань між центрами дифракційних картин дорівнює радіусу кружка Ейрі $O_1O_2 = \delta l = r_E$, де зосереджено 84 % усієї світлової енергії.

Радіус кружка Ері визначається за формулою

$$r_E = 0,61\lambda \frac{f'}{D}, \quad (7.32)$$

де f' – фокусна відстань об'єктива; λ – довжина хвилі.

7.4.2. На прикладі дифракції Фраунгофера на круглому отворі сформулюйте кількісні оцінки критерію роздільної здатності Релея.

Теорія дифракції Фраунгофера на круглому отворі діаметра D вказує, що напрямком на перший мінімум дифракційної картини відносно її центра визначається кутом θ_1 ,

який задовольняє умову $\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$, або за малих кутів, коли $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, умову

$\theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ (рис. 7.25). При цьому приймається, що $D \gg \lambda$, де λ – довжина хвилі

світла. Тоді критерій Релея набуває кількісного вигляду: мінімальна кутова відстань між джерелами, які ще можна розрізнити як окремі, визначається формулою

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (7.33)$$

Результуюча картина представлена на рис. 7.26.

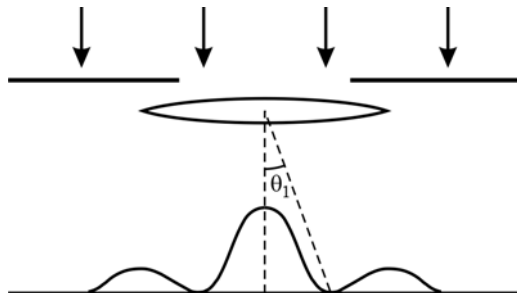


Рис. 7.25. До запитань 7.4.1 та 7.4.2

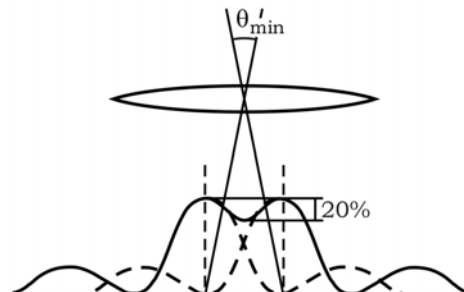


Рис. 7.26. До визначення кількісної оцінки критерію Релея

7.4.3. Скористайтесь критерієм Релея для визначення роздільної здатності телескопа.

Світло від далекої зірки приходить у вигляді плоскої хвилі. У задній фокальній площині об'єктива телескопа виникає дифракційна картина, яка утворюється круглою оправою об'єктива. Як видно із формули, роздільна здатність об'єктива телескопа $R = 1/\theta_{\min} = D/1,22 \lambda \approx D/\lambda$, прямо пропорційна діаметру об'єктива D . Наприклад, телескоп з діаметром об'єктива 5 м може забезпечити для світла з $\lambda = 550$ нм здатність розрізнити зірку з мінімальним кутовим розміром

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{550 \cdot 10^{-9}}{5} \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \approx 0,03''$$

і має кутову роздільну здатність $R_{\varphi} = 1 / \varphi_{\min} \sim 10^7$.

7.4.4. Яким має бути найменший діаметр D об'єктива телескопа, за допомогою якого можна розрізнити зображення двох зірок, якщо кутова відстань між зірками $\Psi = 2''$? Зважте на те, що око найбільш чутливе до світла з довжиною хвилі $\lambda = 550$ нм.

Із (7.33) можна зробити висновок, що діаметр об'єктива телескопа $D \approx 1,22 \frac{\lambda}{\Psi} \approx 7$ см.

7.4.5. Оцініть роздільну здатність ока.

Око при розгляді віддаленого предмета діє так само, як і об'єктив. Тому формулу $\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ можна застосувати і для ока. Роль величини D відіграє діаметр зіниці ока. Вважаючи $D \approx 3$ мм для $\lambda = 550$ нм, знаходимо мінімальну кутову відстань, яка розрізняється оком, дорівнює $\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \approx 35''$. Цей результат добре узгоджується з результатами фізіологічних досліджень ока. Роздільна здатність ока $R_{\varphi} = 1 / \theta_{\min} \approx 6 \cdot 10^3$.

7.4.6. З якої максимальної відстані можна розгледіти оком дві світлі точки, відстань між якими $\delta \ell = 5$ см? Вважати діаметр зіниці ока $D = 1$ мм, довжину хвилі $\lambda = 550$ нм.

Скористаємось формулою $\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ і домножимо її ліву і праву частини на L – відстань від зіниці ока до точок, які треба розгледіти, тоді $L \cdot \theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \cdot L$.

Зрозуміло, що відстань між цими точками $\delta \ell = L \cdot \theta_{\min}$. Тоді $L = \frac{D}{1,22 \lambda} \delta \ell$. Можна

користуватись формулою

$$L \approx \frac{D}{\lambda} \delta \ell. \quad (7.34)$$

Для даних, які наведені в питанні, $L \approx 100$ м.

7.4.7. З якої максимальної відстані за допомогою телескопа з діаметром об'єктива $D = 10$ см можна розгледіти дві світлі точки, відстань між якими $\delta \ell = 5$ см? Вважати, що довжина хвилі $\lambda = 550$ нм.

Скористаємось формулою (7.34): $L \approx \frac{D}{\lambda} \delta \ell \Rightarrow L \approx 10 \text{ км}$.

7.4.8. Великий оптичний телескоп має діаметр головного дзеркала $D = 6 \text{ м}$. Якого розміру об'єкт на поверхні Місяця можна розгледіти за допомогою цього телескопа?

Відстань від Землі до Місяця $L \approx 380\,000 \text{ км}$. Вважаючи $\lambda = 550 \text{ нм}$, скористаємось формулою (7.34): $\delta \ell \approx \frac{\lambda}{D} L \Rightarrow \delta \ell \approx 40 \text{ км}$.

7.4.9. Якими методами можна покращити роздільну здатність телескопа?

Відомо, що мінімальна кутова відстань θ_{\min} між двома віддаленими предметами (напр., зірками), які можна розрізнити як окремі, визначається співвідношенням $\theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{D}$, де λ – робоча довжина хвилі світла; D – діаметр об'єктива телескопа.

Таким чином, роздільну здатність телескопа можна покращити, використовуючи фільтр на об'єктиві телескопа, розрахований на пропускання короткохвильового (напр., фіолетового) світла або/та збільшуючи діаметр D об'єктива телескопа.

7.4.10. Якими методами можна збільшити роздільну здатність мікроскопа?

Відомо, що мінімальна відстань між двома близько розташованими точками, які можна розрізнити як окремі, визначається співвідношенням $d_{\min} \approx 1,22 \frac{\lambda}{A} = 1,22 \frac{\lambda}{n \cdot \sin \varphi}$. Аналізуючи цю формулу, можна дійти висновку, що

зменшення довжини хвилі λ , збільшення показника заломлення n середовища між об'єктивом і предметом, а також збільшення апертурного кута φ приводить до зменшення d_{\min} , тобто покращує роздільну здатність мікроскопа. Усі три методи широко застосовується в мікроскопії: наприклад, існують УФ-мікроскопи "надроздільної здатності", застосовуються імерсійні рідини, використовується метод "скісних променів".

7.4.11. Яким має бути збільшення зорової труби для того, щоб повністю використати її роздільну здатність? Як називається таке збільшення?

За допомогою ока ми бачимо роздільно дві точки під найменшим кутом $\varphi_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{d}$, тут d – діаметр зіниці ока. Зорова труба дозволяє спостерігати на

межі поділу дві точки під мінімальним кутом $\varphi_{\text{тел}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$, тут через D позначено діаметр об'єктива. Тому збільшення Γ зорової труби не має перевищувати відношення цих кутів

$$\Gamma_{\text{кор}} = \frac{\varphi_{\min}}{\varphi_{\text{тел}}} = \frac{D}{d}. \quad (7.34)$$

Величина $\Gamma_{\text{кор}}$ називається корисним збільшенням зорової труби. За умови $\Gamma > \Gamma_{\text{кор}}$ дифракційна пляма зображення (диск Ейрі) буде більшою за елементи сітківки ока і спостерігач зможе побачити "деталі об'єкта", які не існують насправді. Коли $\Gamma < \Gamma_{\text{кор}}$, роздільну здатність телескопічної системи використовується не повністю.

7.4.12. Що таке просторовий фур'є-спектр світлового поля?

Довільне світлове поле можна представити як сукупність плоских хвиль (паралельних променів), які падають на лінзу під різними кутами. Кожній такій хвилі лінза ставить у відповідність точку у фокальній площині. При цьому розподіл світла у фокальній площині набуває форми, яку називають просторовим спектром поля, що падає на лінзу. Тут лінза діє як елемент, що виконує розкладання світла у просторовий спектр, або, як кажуть, здійснює просторове перетворення Фур'є. Цей факт дозволяє отримати просторовий фур'є-спектр оптичного зображення. Для цього достатньо розмістити предмет перед лінзою, направити на нього пучок когерентного світла і розмістити фотопластинку в задній фокальній площині лінзи. Записане на фотопластинку зображення має вигляд дифракційної картини і несе зміст просторового фур'є-спектра світлового поля, яке випромінюється предметом.

Приклад оптичного зображення і його просторового фур'є-спектра, отриманого оптичним методом, наведений на рис. 7.27. (Застосування просторового фур'є-спектра лежить в основі фур'є-оптики, про основні засади якої можна прочитати в [13, розд. 7].

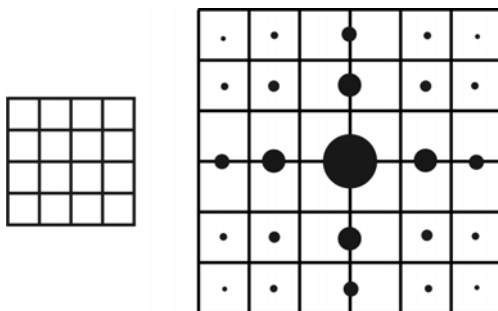


Рис. 7.27. Оптичне зображення двовимірної структури (а) і його просторового фур'є-спектра (б). Розміри максимумів на рисунку у спектрі характеризують їх інтенсивність

7.4.13. Проілюструйте на прикладі предмета у вигляді дифракційної ґратки механізм формування його зображення лінзою за теорією Аббе.

На рис. 7.28 зображений предмет у вигляді ДҐр з періодом d , від якого в бік лінзи йдуть плоскі когерентні хвилі. У фокальній площині лінзи утворюється просторовий спектр поля хвиль, які потрапили в апертуру лінзи (кут u). Положення дифракційних максимумів визначається співвідношенням $d \sin \varphi_m = m\lambda$.

У площині зображень формується зображення предмета. Якщо у фур'є-спектрі, який розташований у фокальній площині лінзи, закрити спеціальним екраном усі максимуми, окрім нульового, то у площині зображень на екрані не буде ніякого зображення, окрім рівномірного засвічування. Щоб на екрані з'явилось зображення,

необхідно відкрити максимально велику кількість максимумів $+1, +2, +3, \dots$. Додавання від'ємних порядків максимумів збільшує яскравість зображення.

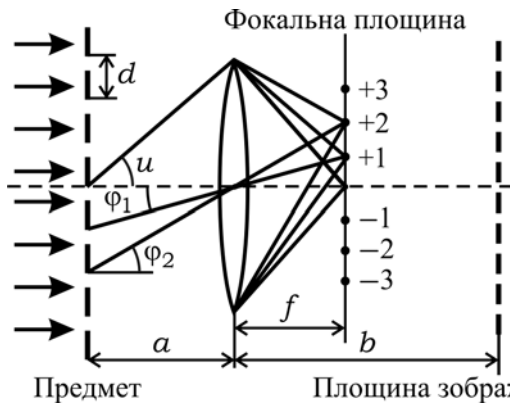


Рис. 7.28. До пояснення механізму формування зображення за теорією Аббе

Найбільш значні за розміром деталі зображення з'являються після відкриття перших $+1$ і -1 максимумів, потім $+2$ і -2 максимумів. Розташовані максимуми малих порядків під малими кутами до головної оптичної осі. Дрібні деталі зображення з'являються після відкриття максимумів великих порядків, які розташовані під великими кутами до головної оптичної осі. Плоскі хвилі, які поширюються під кутами $\varphi_m > u$ участі у формуванні зображення не беруть. Те, що саме у фокальній площині лінзи формується просторовий фур'є-образ предмета, доводить дослід Аббе-Портера [13, § 37].

7.4.14. Як у світлі теорії Аббе виглядають механізми, які обмежують роздільну здатність лінзи?

Продовжуючи розгляд теорії формування зображення за Аббе, умову для розрізнення деталей з розмірами d_{\min} можна записати, скориставшись умовою (5.17). Величина d_{\min} пов'язана з кутом φ_m на дифракційний максимум m -го порядку, який ще припустимий за даного апертурного кута u (рис. 7.28). Таким чином,

$d_{\min} \approx \frac{\lambda}{\sin u}$. Якщо врахувати, що предмет може бути розташований у середовищі з

показником заломлення n , то довжина хвилі λ скоротиться в n разів і умова граничного розрізнення об'єктів набуде вигляду $d_{\min} \approx \frac{\lambda}{n \sin u}$. Більш точний вираз

для d_{\min} такий: $d_{\min} \approx \frac{0,5\lambda}{n \sin u}$. Коефіцієнт 0,5 виникає при врахуванні похилого

падіння променів.

7.4.15. Зобразіть оптичну схему спостереження ультрамалих об'єктів методом темного поля та методом скісних променів. Як вона працює?

Метод темного поля заснований одночасно на використанні двох оптичних ефектів – розсіюванні та дифракції світла. Пучок світла концентрується за допомогою лінзи на кюветі, в якій у газі або рідині перебуває в завислому стані ультрамікроскопічні частинки, які необхідно дослідити (рис. 7.29). Світло, розсіяне такими частинками, потрапляє в об'єктив мікроскопа й утворює у його фокальній площині дифракційну картину. За наявності останньої можна судити про наявність частинок та їх рух. Оскільки в цьому методі з поля зору вилучаються прямі промені, а спостерігаються лише розсіяні та дифраговані, то частинки видно на темному фоні як світлі точки і плями. Інформація про її форму чи справжні розміри при цьому зазвичай втрачається.

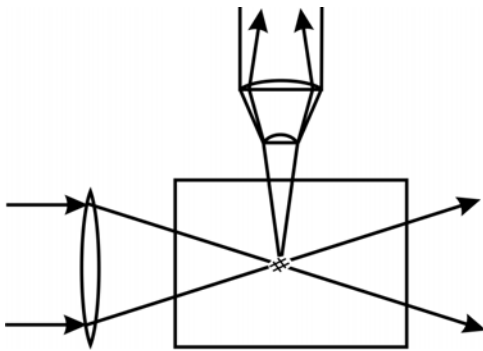


Рис. 7.29. До пояснення методу темного поля

Метод темного поля пов'язаний з методом похилих променів. Цей метод полягає у тому, що спеціальним розташуванням лампи підсвічування, предметного столика з об'єктом дослідження та тубусом мікроскопа досягають того самого ефекту, що і в методі темного поля: із поля зору усувають максимум "нульового" порядку і намагаються працювати з променями, які пов'язані в просторовому фур'є-спектрі з дифракційними максимумами вищих порядків.

Застосування методу темного поля часто називають ультрамікроскопією. Ультрамікроскопія широко застосовується на практиці. Зокрема, за її допомогою з високою ефективністю вдається спостерігати броунівські частинки. Поєднання методу темного поля із застосуванням імерсійної рідини та короткохвильових джерел світла дозволяє спостерігати частинки розміром $\sim 0,1 - 0,01$ мкм, і навіть $\sim 0,001$ мкм! І це при тому, що роздільні можливості звичайного, "не озброєного" методами ультрамікроскопії сучасного мікроскопа з хорошою оптикою і точною механікою, характеризуються величиною d_{\min} , що не перевищує $\sim 0,2$ мкм. (Більш детально з методом темного поля можна ознайомитись у [1, § 99]).

7.4.16. *Зобразіть оптичну схему спостереження фазових прозорих об'єктів методом фазового контрасту. Як вона працює?*

Метод фазового контрасту використовують для спостереження тонких прозорих об'єктів, які слабо поглинають світло і не створюють скільки-небудь помітної амплітудної модуляції, у результаті чого вони практично невидимі. Метод фазового контрасту полягає в тому, що пряме світло (нульовий максимум продифрагованої хвилі) не видаляють із просторового спектра, як це робили в методі темного поля, а

змінюють її фазу на $\pi/2$ за допомогою $\lambda/4$ – фазової пластинки, поставивши її у фокальній площині об'єктива мікроскопа на головній оптичній осі (рис. 7.30). Розсіяне світло (максимуми ненульових порядків продифрагованої хвилі) не змінює фази.

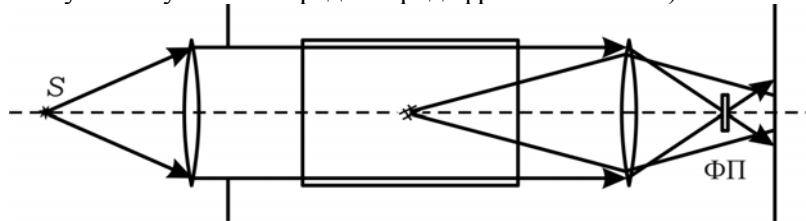


Рис. 7.30. До пояснення методу фазового контрасту

Фазова пластинка (ФП) призводить до того, що фазовий рельєф зображення перетворюється на амплітудний рельєф. ФП здійснює тут зміну фази на $\pi/2$ для "нульового" інтерференційного максимуму просторового спектра. Фонова хвиля, фаза якої змінилась на $\pi/2$, і сигнальна хвиля інтерферують, у результаті чого формується зображення структури об'єкта.

Таким способом, перетворюючи фазову модуляцію хвилі, утворену прозорим об'єктом, яку ми не можемо побачити або сфотографувати, на амплітудну модуляцію, помітно збільшують контрастність зображення. (Більш детально про метод фазового контрасту можна прочитати в [1, § 99]).

7.4.17. Що таке камера-обскура і на якому принципі вона працює?

Камера-обскура – це закритий ящик з малим отвором, який дозволяє отримувати зображення і фотографувати.

У камері-обскурі роль об'єктива, який є у фотоапараті, відіграє круглий отвір. У разі використання об'єктива "працюють" його таутохронні властивості: промені, що йдуть через об'єктив від будь-яких точок предмета до зображення, мають різні геометричні шляхи, але однакові оптичні довжини шляхів. Об'єктив компенсує своєю товщиною відмінність геометричних шляхів усіх променів, і вони приходять у відповідну точку зображення в однакових фазах, інтерферують, що дозволяє сформувати зображення.

Тільки таутохронні промені можуть утворити зображення. Проте відомо, якщо промені не таутохронні, але мають невелике (до $\frac{\pi}{4}$) розходження у фазах, то це ще дозволяє їм створювати зображення з достатньо високим ступенем видимості. Різницю фаз між хвилями в $\frac{\pi}{4}$ і менше, яку вносить оптичний елемент, що утворює зображення (лінза, об'єктив, зонна пластинка тощо), або середовище (флуктуації їх властивостей) можна не брати до уваги, вона не заважає утворенню зображення.

Якщо замінити об'єктив маленьким отвором так, що різниця фаз між променями, які проходять до площини, де ми хочемо отримати зображення, від різних точок площини отвору не буде перевищувати $\frac{\pi}{4}$, то компенсація відмінностей у фазах, яку здійснював об'єктив, стає практично не потрібною. Отвір починає відігравати роль об'єктива.

Що буде відбуватись із зображенням при зміні діаметра отвору? Який розмір отвору можна вважати оптимальним? Дайте відповіді на ці запитання. Допомогти вам в цьому допоможе робота з літературними джерелами (див., напр., [2, § 58]).

Зауважимо, що створення камери-обскури реально, і не тільки принципово, але й практично. Навіть у наш час деякі фотографи використовують т. зв. стенопи – фотоапарати з маленьким отвором замість об'єктива. Зображення, отримані за допомогою таких камер, відрізняються своєрідним м'яким рисунком, ідеальною лінійною перспективою і великою глибиною різкості.

Експериментальне дослідження та комп'ютерне моделювання камери-обскури може бути перспективною темою для студентської роботи.

7.4.18. Чи можна побудувати телескоп без об'єктива?

Телескоп без об'єктива запропонувати принципово можна. Принцип його дії схожий на принцип дії камери-обскури (див. запитання 7.4.17). Однак для реалізації ідеї безлінзового телескопа, для того, щоб виконати умови таутохронізму і сформулювати зображення віддаленого на нескінченність предмета в такому телескопі, необхідно було б створити конструкцію довжиною $\sim 100-1000$ км, що не вбачається можливим. Потрібні нові ідеї! (Більш детально на обрану тему можна прочитати в [1, § 58]).

7.4.19. Поясніть, що таке гауссовий розподіл інтенсивності?

Якщо розподіл інтенсивності по перерізу світлового пучка має вигляд, зображений на рис. 7.31, який описується функцією

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\rho_0^2}\right), \quad (7.35)$$

то кажуть про гауссовий розподіл інтенсивності у світловому промені або про гауссовий світловий пучок. (За амплітудою гауссовий світловий пучок описується ви-

разом $A = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho_0^2}\right)$).

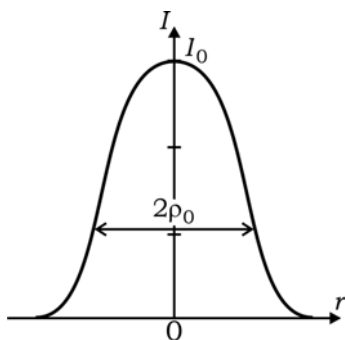


Рис. 7.31. До пояснення гауссового розподілу інтенсивності по перерізу світлового пучка

7.4.20. Що таке радіус пучка за Гауссом?

Поперечний розмір гауссового світлового пучка характеризується радіусом ρ_0 , який визначається рівнем інтенсивності, що спадає на такій відстані в e разів $\frac{I_0}{e}$. Інколи радіус ρ_0 гауссового світлового пучка називають півшириною цього променя. В англійській літературі для ρ_0 використовують аббревіатуру HWe^{-1}M , що означає "half width e^{-1} maximum": величина ρ_0 дорівнює півширині променя за рівнем інтенсивності e^{-1} щодо максимуму.

7.4.23. Що таке дифракційна розбіжність світлового пучка?

Дифракційна розбіжність пучка відбувається в дальній зоні дифракції (рис. 7.31, а). Промені від протилежних меж отвору в точці спостереження P інтерферують з оптичною різницею ходу Δ . Умова мінімуму при додаванні променів, які поширюються на межі світлового пучка, дорівнює $\Delta = \frac{\lambda}{2}$. Як впливає з

рис. 7.32, б, величина $\Delta = d \cdot \sin \frac{\theta_d}{2}$.

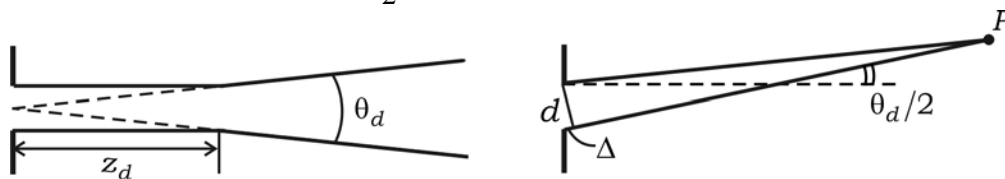


Рис. 7.32. До визначення дифракційної розбіжності світлового пучка

Кут θ_d дифракційної розбіжності зазвичай невеликий ($\theta_d \ll 1$), тому $\Delta \approx d \cdot \frac{\theta_d}{2}$, де d – початковий діаметр пучка. Таким чином,

$$\theta_d = \frac{2\Delta}{d} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{2}}{d} = \frac{\lambda}{d}.$$

Як бачимо, дифракційна розбіжність тим менша, чим менша довжина хвилі випромінювання λ і чим більший розмір початкового діаметра пучка d .

Діаметр пучка в дальній зоні змінюється за законом $d(z) = \frac{\lambda}{d} \cdot z$, де z – координата, яка відраховується вздовж пучка від екрана з отвором.

7.4.24. У чому полягає причина того, що світловий пучок у дальній зоні розширюється (розбігається)?

Для точок на екрані з дифракційною картиною, які характеризуються як дифракція в дальній зоні, у межах отвору вміщується тільки частина центральної (першої) зони Френеля. Інтерференція елементарних вторинних хвиль, яка визначає

положення межі світлового променя, виражена слабкіше. Вона не може підтримувати вихідний поперечний профіль променя, і він стає розбіжним.

7.5. Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. На діафрагму з круглим отвором діаметра $D = 6$ мм нормально падає плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 600$ нм). За діафрагмою на відстані $b = 3$ м розташований екран спостереження. Знайдіть:

- скільки зон Френеля вміщується в отворі діафрагми?
- яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним?
- інтенсивність світла у центрі картини порівняно з інтенсивністю за відсутності екрану;
- за якого радіуса отвору діафрагми у центрі картини буде найбільш темна пляма?
- яким буде центр тіні на екрані, якщо діафрагму з отвором замінити непрозорим диском такого самого діаметра?
- у який бік і на яку відстань необхідно змістити точку P спостереження від диска, щоб інтенсивність світла у плямі Пуассона була збільшена до максимуму?

Розв'язання. Приклад стосується дифракції Френеля на отворі (діаметр отвору $D = 2r_m = 6$ мм; відстані $a = \infty$ і $b = 3$ м; довжина хвилі $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м):

а) кількість зон Френеля m , які вміщуються в отворі діафрагми, знайдемо із формули (7.6):

$$m = \frac{r_m^2}{b\lambda} = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 5;$$

б) амплітуду поля в точці P за $m = 5$ знаходимо за формулою (7.2) $A(P) \approx \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_5$. Оскільки дві амплітуди додаються, то в точці P буде спостерігатися світла пляма;

в) зважаючи на отримане значення $A(P)$ і виходячи з того, що $A_1 \approx A_5$, маємо $A(P) \approx A_1 \Rightarrow I(P) \approx I_1$, де $I(P)$ – інтенсивність світла в точці P спостереження; I_1 – інтенсивність світла в точці P у випадку відкритої першої зони Френеля. Із теорії дифракції Френеля на круглому отворі відомо, що $I_1 = 4I_0$, де I_0 – інтенсивність світла на поверхні перешкоди. Таким чином, інтенсивність світла в точці P у разі відкритих п'яти зон Френеля дорівнює $I(P) \approx I_1 = 4I_0$, тобто інтенсивність $I(P)$ більша майже в 4 рази за інтенсивність світла на поверхні перешкоди;

г) згідно із формулою (7.1) у точці P буде темно, коли в отворі розміщується парна кількість зон ($m = 2, 4, \dots$), а найбільш темно в точці P буде за $m = 2$ тому,

що $A_2 < A_4 < A_6 < \dots$. При цьому радіус отвору визначається за формулою (7.6)

$$r_2 = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

д) результуюча амплітуда в центрі дифракційної картини за непрозорим диском за $m = 5$ закритих ним зон Френеля визначатиметься згідно з (7.2):

$$\begin{aligned} A(P) &= -A_6 + A_7 - A_8 + A_9 - \dots = \\ &= [A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + \dots] - [A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5] \approx \\ &\approx \frac{1}{2}V_1 - \left[\frac{1}{2}A_1 + \left(\frac{1}{2}A_1 - A_2 + \frac{1}{2}A_3 \right) + \left(\frac{1}{2}A_3 - A_4 + \frac{1}{2}A_5 \right) + \frac{1}{2}A_5 \right]. \end{aligned}$$

Згідно з методом Шустера значення виразів у круглих дужках дорівнює нулю. Тоді останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$A(P) \approx \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_5 = -\frac{1}{2}A_5.$$

Оскільки A_5 не набагато менше від A_1 , то в точці P буде спостерігатися світла пляма (пляма Пуассона) з інтенсивністю, трохи меншою від I_0 ;

е) оскільки амплітуди A_m хвилі у плямі Пуассона зменшуються зі зростанням m , то інтенсивність світла у плямі Пуассона також буде повільно зменшуватися. Тому інтенсивність у плямі Пуассона буде більша, якщо $m < 5$. Відповідні значення відстаней від диска до екрана, визначені за формулою (7.6) як $b_m = \frac{R^2}{m\lambda}$, дорівнюють

$$b_5 = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,0 \text{ м}; \quad b_4 = 3,75 \text{ м}; \quad b_3 = 5 \text{ м}; \quad b_2 = 7,5 \text{ м}; \quad b_1 = 15 \text{ м}.$$

Найбільш світла пляма буде, коли диск закrije першу зону Френеля, $m = 1$ за $b_1 = 15 \text{ м}$. Таким чином, якщо знехтувати втратами світла, то можна стверджувати, що точку спостереження треба відсунути від диска – була відстань $b_5 = 1,0 \text{ м}$, нова відстань $b_1 = 15 \text{ м}$.

Приклад 7.2. Монохроматична плоска хвиля з інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий диск, який для точки спостереження P закриває першу зону Френеля. Якою стане інтенсивність світла I_p у точці P після того, як у диска видалили:

- половину (по діаметру);
- половину зовнішньої половини першої зони Френеля (по діаметру)?

Розв'язання. При розв'язуванні задач про дифракцію Френеля на перешкодах з круговою симетрією зручно фронт падаючої хвилі розбити на окремі частини, які виділяються згідно з умовою конкретної задачі. Наприклад, у даній задачі предста-

вимо амплітуду світлового поля в точці спостереження P у вигляді двох векторів: вектора \vec{A}_1 , який відповідає амплітуді світлового поля, створеного першою зоною Френеля, і вектора \vec{A}_∞ , який представляє сумарний внесок усіх відкритих зон (у даному випадку – інших зон, починаючи з другої) (рис. 7.33).

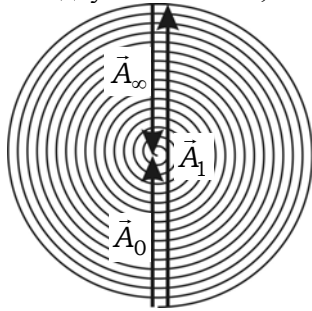


Рис. 7.33. Спіраль Френеля, яка описує дифракцію хвиль на диску

Зверніть увагу, що сума векторів відповідає вектору \vec{A}_0 – амплітуді повністю відкритого хвильового фронту $\vec{A}_1 + \vec{A}_\infty = \vec{A}_0$. Вочевидь наявність перешкоди ніяк не вплине на вектор \vec{A}_∞ . Розглянемо, що відбуватиметься з вектором \vec{A}_1 . Для цього згадаємо, як формується виток спіралі Френеля, який представляє внесок першої зони у збурення в точці P .

Перша зона Френеля розбивається на N вузьких кільцевих підзон однакової площі. Усі вони на векторній діаграмі представляються однаковими за модулем векторами \vec{a}_i (їх величина пропорційна площі окремої підзони), повернутими один відносно одного на кут $\Delta\varphi = \frac{\pi}{N}$ (відповідно до різниці фаз між ними). Зрозуміло, що сума цих векторів дорівнює \vec{A}_1 , а кут повороту останнього вектора відносно першого становить π (рис. 7.34):

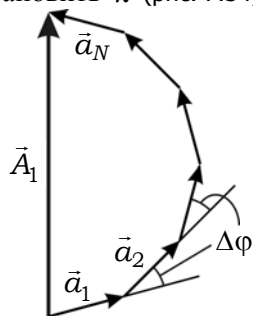


Рис. 7.34. До пояснення дії першої зони Френеля

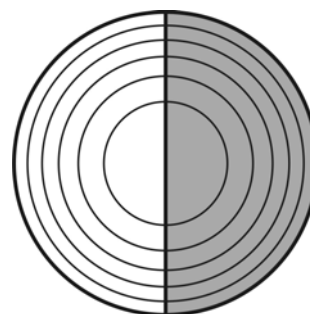


Рис. 7.35. До умови прикладу 7.2 (варіант (а))

а) за умовою задачі половина першої зони (по діаметру) перекривається непрозорою перешкодою (рис. 7.35). Це призводить до зменшення ефективної площі кож-

ної підзони вдвічі. Оскільки довжини векторів \vec{a}_i пропорційні площам відповідних підзон, то вони також зменшуються вдвічі. Зсув фаз $\Delta\varphi$ між окремими підзонами залишається незмінним. У результаті вектор \vec{A}_1 також зменшиться вдвічі

$$\vec{A}'_1 = \frac{\vec{a}_1}{2} + \frac{\vec{a}_2}{2} + \dots + \frac{\vec{a}_N}{2} = \frac{\vec{A}_1}{2}.$$

Таким чином, амплітуду світлового поля в точці P будуть визначати два вектори $\vec{A}_p = \vec{A}_\infty + \vec{A}'_1$. Ці вектори приблизно однакові за модулем і направлені в протилежні боки, тому $\vec{A}_p \approx 0$. Відповідна інтенсивність також дорівнює нулю $I_p \approx 0$;

б) для цієї частини задачі (рис. 7.36) вектор \vec{A}_0 представимо як суму трьох векторів: \vec{A}_{11} – внесок внутрішньої половини першої зони Френеля; \vec{A}_{12} – внесок зовнішньої половини першої зони Френеля; \vec{A}_∞ – внесок усіх інших зон, починаючи з другої. На спіралі Френеля ці вектори розмістяться так, як показано на рис. 7.36. Знову ж таки $\vec{A}_{11} + \vec{A}_{12} + \vec{A}_\infty = \vec{A}_0$.

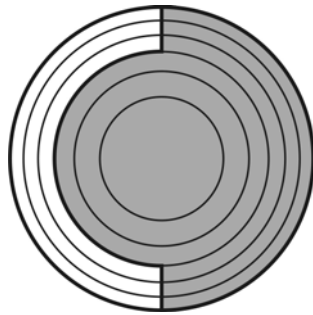


Рис. 7.36. До умови прикладу 7.2 (варіант (б)): частина диска, яка дає внесок в утворення плями Пуассона, затінена

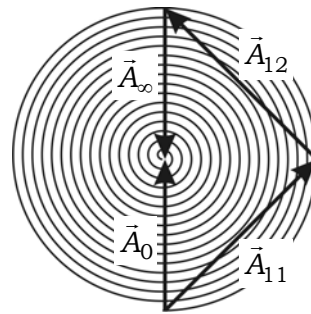


Рис. 7.37. Розташування векторів, що відповідають амплітудам хвиль, які беруть участь в утворенні плями Пуассона у випадку застосування перешкоди, зображеній на рис. 7.36 (варіант (б) прикладу 7.2)

Проведемо аналіз того, як наявність перешкоди (рис. 7.37) вплине на кожний із цих векторів: \vec{A}_∞ не зміниться; внутрішня половина першої зони повністю перекривається, тому вектор \vec{A}_{11} внесок у збурення в точці P не внесе; \vec{A}_{12} подібно до пункту (а), зазнає втрат через зменшення вдвічі площ підзон, які його формують. Отже, $\vec{A}_p = \vec{A}_\infty + \frac{\vec{A}_{12}}{2}$. Складові вектори протилежні за напрямком.

Виразимо модулі обох векторів через амплітуду повністю відкритого хвильового фронту

$$A_{\infty} \approx A_0; \quad \frac{A_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2}A_0}{2}.$$

Модуль результуючого вектора $A_p \approx \sqrt{A_{\infty}^2 - \left(\frac{A_{12}}{2}\right)^2} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$. Оскільки інтенсивність світла в точці спостереження пропорційна квадрату амплітуди світлового поля, то $I_p \approx \frac{I_0}{2}$.

Приклад 7.3. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,6 \mu\text{м}$ падає нормально на досить велику скляну пластинку, на протилежному боці якої зроблена кругла виїмка (рис. 7.38). Для точки спостереження P вона представляє собою перші півтори зони Френеля. Знайдіть глибину h виїмки, за якої інтенсивність світла в точці P буде: а) максимальною; б) мінімальною; в) рівною інтенсивності падаючого світла.

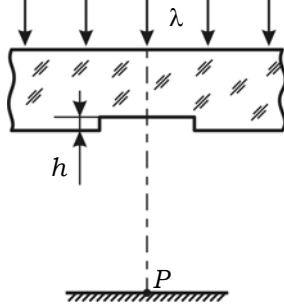


Рис. 7.38. До умови прикладу 7.3

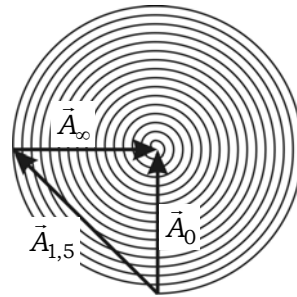


Рис. 7.39. Спіраль Френеля, коли відкрито 1,5 зони Френеля

Розв'язання. Відповідно до рекомендацій, наведених у прикладі 7.2, представимо амплітуду повністю відкритого фронту \vec{A}_0 у вигляді двох векторів: $\vec{A}_{1,5}$ – внесок у збурення в точці спостереження, який вносять перші півтори зони Френеля; \vec{A}_{∞} – внесок усіх інших зон. При цьому $\vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{\infty} = \vec{A}_0$ (рис. 7.39). Поява виїмки призводить до того, що частина хвильового фронту, яка проходить за її межами, буде відставати за фазою на величину $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$ від частини хвильового фронту, яка поширюється в межах виїмки. На фазовій діаграмі це відставання можна зобразити поворотом вектора \vec{A}_{∞} проти годинникової стрілки на кут δ ;

а) для отримання максимальної інтенсивності (амплітуди) у точці P потрібно, щоб вектор $\vec{A}_{1,5}$ був направлений в один бік з вектором \vec{A}_{∞} . Тоді світлові поля, які пройшли крізь виїмку та поза нею, будуть складатись з максимально можливою сумарною амплітудою. Для виконання цієї умови необхідно, щоб вектор \vec{A}_{∞} повер-

нудся (рис. 7.40, а) на кут $\delta = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m$, де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Це буде можливо, якщо глибина виїмки h буде задовольняти умову

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1). \text{ Звідси } h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{8} \right) = 1,2 \left(m + \frac{3}{8} \right) \text{ мкм.}$$

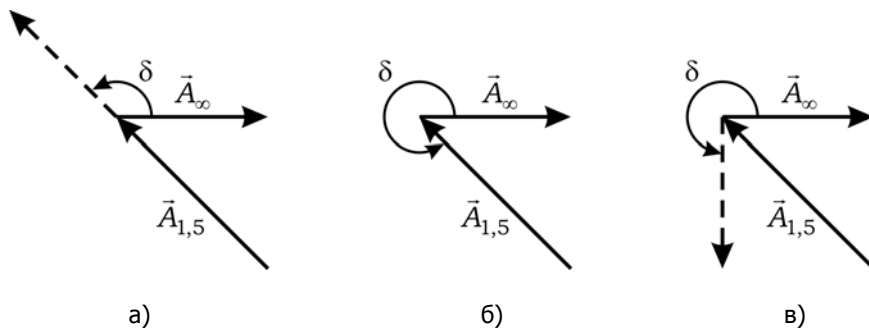


Рис. 7.40. До прикладу 7.3

Отже, щоб у точці P спостерігалась максимальна інтенсивність, виїмка повинна мати глибину, яка відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 0,45; 1,65; 2,85, \dots$

б) щоб отримати в точці P мінімум інтенсивності, потрібно, щоб вектор \vec{A}_∞ був напрямлений у протилежний щодо вектора $\vec{A}_{1,5}$ бік (рис. 7.40, б). Тобто йому потрібно повернутись на кут $\delta = \frac{7}{4}\pi + 2\pi m$. Відповідна глибина виїмки дорівнює

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{7}{8} \right) = 1,2 \left(m + \frac{7}{8} \right) \text{ мкм.}$$

Таким чином, щоб у точці P спостерігалась мінімальна інтенсивність, виїмка повинна мати глибину, яка відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 1,05; 2,25; 3,45, \dots$

в) випадок, коли в точці P інтенсивність буде такою самою, як і інтенсивність падаючого світла ($A_P = A_0$), можлива у двох випадках. Перший відповідає глибині виїмки, за якої відставання за фазою набуває значень $\delta = 2\pi m$. Тобто вектор \vec{A}_∞ робить повний оберт (чи кілька повних обертів) і повертається у своє положення. Відповідна глибина виїмки $h = \frac{m\lambda}{n-1} = 1,2m \text{ мкм}$. Підставляючи числові значення, отримуємо $h(\text{мкм}) = 0; 1,2; 2,4; 3,6, \dots$. Існування другого випадку показано на

рис. 7.40, в. Вектор \vec{A}_∞ повертається на кут $\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m$. Глибина виїмки в цьому випадку дорівнює $h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{4} \right) = 1,2 \left(m + \frac{3}{4} \right)$ мкм.

Таким чином, щоб у точці P інтенсивність світла дорівнювала інтенсивності падаючого світла, виїмка повинна мати глибину, що відповідає одному із таких значень $h(\text{мкм}) = 0,9; 2,1; 3,3 \dots$

Приклад 7.4. Монохроматична плоска хвиля з інтенсивністю I_0 падає на непрозору перешкоду у вигляді кільця. Внутрішній радіус кільця становить $R_1 = r_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$, зовнішній – $R_2 = r_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$. Знайдіть інтенсивність світла I в точці спостереження P , для якої r_1 – радіус першої зони Френеля.

Розв'язання. Скористатись формулою (7.2) не можна, оскільки не виконується умова, за якою вона введена – велика кількість відкритих зон Френеля. Внесок в інтенсивність у точці спостереження буде визначатись усім фронтом світлової хвилі, за винятком частини у вигляді кільця, крізь яке світло не проходить.

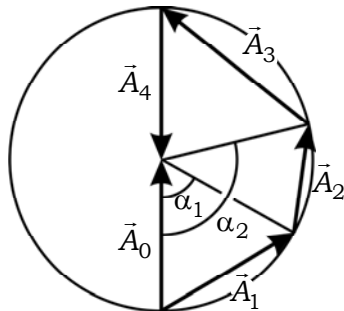


Рис. 7.41. До прикладу 7.4
(вибір кутів α_1 і α_2 довільний)

Розіб'ємо хвильовий фронт на чотири частини і представимо їх на спіралі Френеля (рис. 7.41). (Так само, як у попередніх прикладах знехтуємо зменшенням радіуса витка спіралі Френеля на одному оберті та апроксимуємо перший виток спіралі колом): \vec{A}_1 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених внутрішньою частиною першої зони Френеля, обмеженої радіусом $R_1 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$; \vec{A}_2 – амплітуда хвилі від збурень, створених кільцем, яке не пропускає світло (радіуси кільця – R_1 і R_2); \vec{A}_3 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених зовнішньою частиною першої зони Френеля; \vec{A}_4 – амплітуда хвилі в точці спостереження від збурень, створених усіма іншими, окрім першої, зонами Френеля; \vec{A}_0 – ампліту-

да падаючої на перешкоду хвилі. Результуюча амплітуда \vec{A} у точці спостереження $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$.

Розбиваючи окрему зону Френеля на кільцеві підзони, ми, фактично, розбиваємо відповідну гілку спіралі на окремі частини (дуги), довжини кожної з яких за Френелем пропорційні площі відповідної підзони. З іншого боку, довжину кожної такої дуги можна характеризувати центральним кутом α (рис. 7.41). Для всієї першої зони Френеля він, наприклад, дорівнює π . Таким чином, існує пропорційність між площею окремої підзони і відповідним центральним кутом.

Кути α_i , пропорційні відповідним площам хвильового фронту, можна визначити із пропорцій. Для першої зони Френеля $\pi r_1^2 \sim \alpha = \pi$, тоді $\alpha_1 = \frac{\pi R_1^2}{r_1^2} = \frac{\pi r_1^2}{2r_1^2} = \frac{\pi}{2}$;

$$\alpha_2 = \frac{\pi R_2^2}{r_1^2} = \frac{2\pi r_1^2}{3r_1^2} = \frac{2\pi}{3}.$$

У зв'язку з тим, що з рис. 7.41 знайдені значення α_1 та α_2 , проведемо модифікацію рис. 7.41, у якому величини обирались довільними, на рис. 7.42. Із рис. 7.42 можна зробити висновок про те, що $A_1 = \sqrt{2}A_0$; $A_3 = A_0$; $A_4 = A_0$.

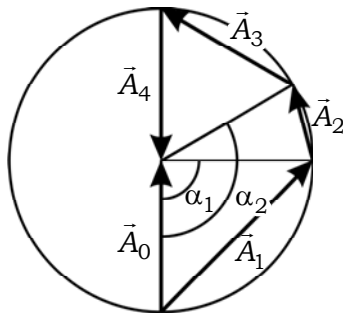


Рис. 7.42. До прикладу 7.4
(вибір кутів α_1 і α_2 уточнений)

Результуючий вектор $\vec{A}(P)$ визначимо через його проекції на дві взаємно перпендикулярні осі – Ox та Oy :

$$\text{на вісь } Ox: A_x = A_1 \cos 45^\circ - A_3 \cos 30^\circ = A_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_0 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) A_0;$$

$$\text{на вісь } Oy: A_y = A_1 \sin 45^\circ + A_3 \sin 30^\circ - A_4 = A_0 + \frac{1}{2} A_0 - A_0 = \frac{A_0}{2}.$$

Інтенсивність у точці спостереження буде

$$I(P) \sim A^2(P) = A_x^2 + A_y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 A_0^2 + \frac{A_0^2}{4} \approx 0,27 I_0.$$

Приклад 7.5. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$ падає нормально на велику скляну пластинку, на протилежному боці якої є виступ і непрозора смужка шириною $a = 0,3 \text{ мм}$ (рис. 7.43). Висоту виступу підібрано так, що в точці 2 на екрані інтенсивність світла максимально можлива. Знайдіть за допомогою спіралі Корню відношення інтенсивностей у точках 1 та 2.

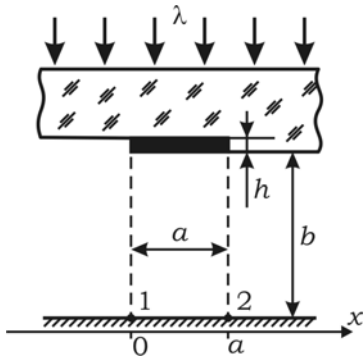


Рис. 7.43. До умови прикладу 7.5

Розв'язання. Для графічного визначення інтенсивності світла в точках 1 та 2 використаємо спіраль Корню (рис. 7.10). Представимо амплітуду світлового поля в точці 1 як результат складання двох векторів: вектора $\vec{A}_{1л}$, який характеризує внесок лівих (щодо точки спостереження 1) зон Шустера, і вектора $\vec{A}_{1п}$ – внесок правих зон. Як видно з рис. 7.43, для точки 1 частина правих зон перекрита непрозорою смужкою. Для того, щоб врахувати це при відшуванні результуючої амплітуди, визначимо величину параметра α на спіралі Корню (рис. 7.10) за формулою (7.9):

$$\alpha = a \sqrt{\frac{2}{b\lambda}} = 0,3 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2}{1,1 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6}}} \approx 0,5.$$

Тепер вектори $\vec{A}_{1л}$ і $\vec{A}_{1п}$ можна зобразити на спіралі Корню (рис. 7.44, а).

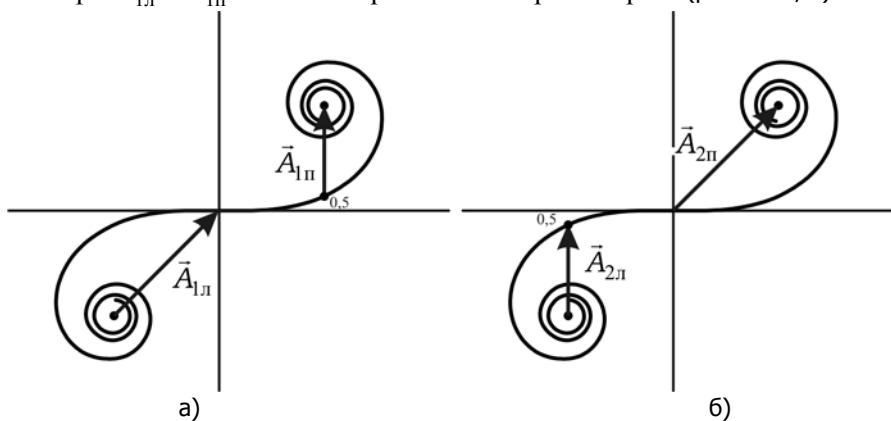


Рис. 7.44. Використання спіралі Корню для визначення амплітуд хвиль у точках 1 (а) і 2 (б) без урахування виступу (до прикладу 7.5)

Графічність методу спіралі Корню полягає в тому, що амплітуда світлового поля вважається пропорційною довжині вектора, зображеного на рисунку. Наприклад, амплітуда повністю відкритого хвильового фронту буде пропорційна довжині вектора, проведеного з лівого фокуса спіралі у правий фокус (для рис. 7.10 ця величина становить 70 мм). Вимірявши довжини векторів на рис. 7.44, а, отримаємо $A_{1л} \sim 20$ мм, $A_{1п} \sim 12$ мм.

Подібним чином можна представити й амплітуду світлового поля в точці 2, урахувавши, що для неї будуть закриті частина лівих зон Шустера (рис. 7.43, б). Відповідні величини векторів $A_{2л} \sim 12$ мм, $A_{2п} \sim 20$ мм.

Наявність виступу призводить до того, що права частина хвильового фронту відставатиме за фазою від лівої частини на величину кута $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$. На векторній діаграмі це відповідатиме повороту векторів $\vec{A}_{1п}$ і $\vec{A}_{2п}$ на відповідний кут проти годинникової стрілки. За умовою прикладу в точці 2 спостерігається максимум. Це можливо, якщо відставання за фазою становитиме кут $\delta = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ (рис. 7.45, а). У цьому разі напрямки векторів $\vec{A}_{2л}$ і $\vec{A}_{2п}$ збігаються, і це дає в точці 2 максимум інтенсивності світла. Таке саме відставання на кут $\delta = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ для правих зон спостерігатиметься і для точки 1. У результаті вектори $\vec{A}_{1п}$ і $\vec{A}_{1л}$ будуть розташовані взаємно перпендикулярно (рис. 7.45, б).

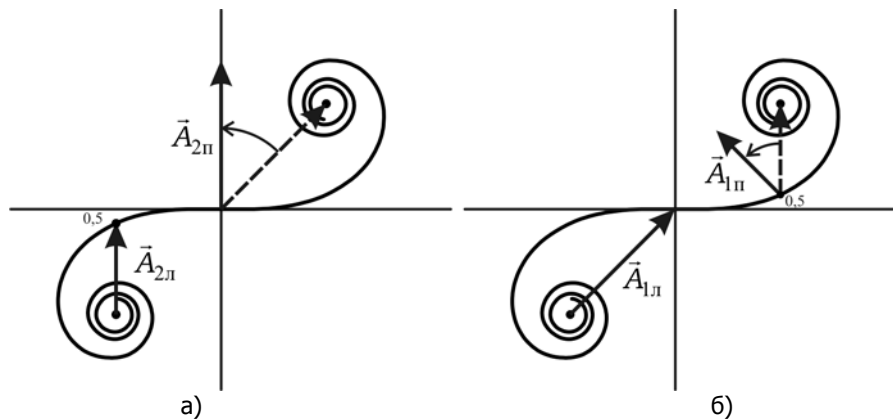


Рис. 7.45. Використання спіралі Корню для визначення амплітуд хвиль у точках 2 (а) та 1 (б) з урахуванням виступу (до прикладу 7.5)

Таким чином, амплітуда світлового поля в точці 2 пропорційна модулю вектора \vec{A}_2 : $A_2 = A_{2л} + A_{2п} = 12 + 20 = 32$ мм. У точці 1:

$$A_1 = \sqrt{(A_{1л})^2 + (A_{1п})^2} = \sqrt{(20)^2 + (12)^2} = \sqrt{544} \text{ мм} \approx 23 \text{ мм}.$$

Відношення інтенсивностей $\frac{I_2}{I_1} = \frac{(32)^2}{(23)^2} \approx 1,9$.

Приклад 7.6. Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на довгу прямокутну щілину шириною b . Знайдіть кутовий розподіл інтенсивності світла за умови фраунгоферової дифракції, а також кутове положення мінімумів.

Розв'язання. Розіб'ємо щілину на велику кількість вузьких паралельних смужок однакової ширини. Кожну з цих смужок можна розглядати як джерело хвиль однакової амплітуди. Окрім того, оскільки світло падає на щілину нормально, то і початкова фаза цих хвиль також буде однаковою.

Залежно від напрямку спостереження різниця фаз між крайніми елементами хвильового фронту в межах щілини становитиме $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \varphi$ (рис. 7.46).

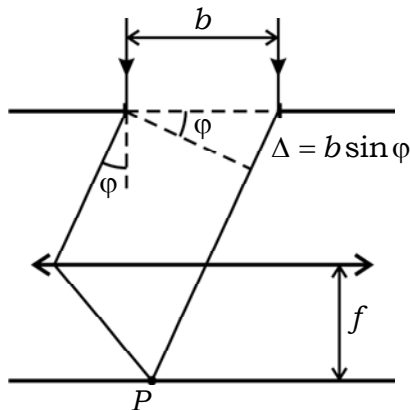


Рис. 7.46. До умови прикладу 7.6

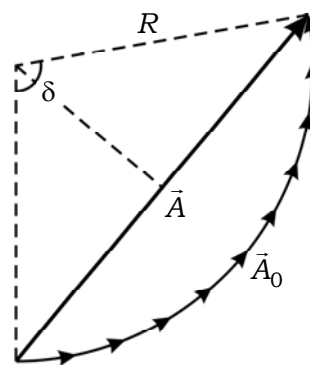


Рис. 7.47. Векторна діаграма, яка відповідає амплітудам падаючої (A_0) і дифрагрованої (A) хвиль: до прикладу 7.6

На векторній діаграмі (рис. 7.47) ланцюжок елементарних векторів, кожний із яких відповідає амплітуді світлового поля, створеного в точці спостереження P окремою смужкою, представляє собою дугу певного радіуса R із центральним кутом δ . Довжина цієї дуги \vec{A}_0 дорівнює амплітуді хвилі, що падає, і може бути записана як $A_0 = R\delta$. Вектор \vec{A} відповідає амплітуді дифрагрованої хвилі і, як видно з рис. 7.47, дорівнює $A = 2R \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Таким чином, $A = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}$. Ураховуючи зв'язок між амплітудою та інтенсив-

ністю світла, отримаємо кутовий розподіл дифрагованого світла $I = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}$.

Зі збільшенням кута дифракції φ ланцюжок векторів буде закручуватись дедалі більше. За $\delta = 2\pi, 4\pi, \dots, 2\pi m$ ланцюжок буде перетворюватись на коло, а результуючий вектор обертатиметься на нуль. Звідси отримуємо умову дифракційних мінімумів $b \sin \varphi = m\lambda$.

Приклад 7.7. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку шириною 10мм виявилось, що компоненти жовтої лінії натрію (589,0 і 589,6нм) спостерігаються роздільно, починаючи з n 'ятого порядку спектра. Знайдіть:

а) період цієї дифракційної ґратки;

б) за якої ширини дифракційної ґратки з таким самим періодом можна роздільно спостерігати в третьому порядку дублет спектральної лінії з $\lambda = 460,0$ нм, компоненти якої відрізняються на 0,13нм?

Розв'язання: а) роздільна здатність дифракційної ґратки визначається (7.21) як $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m \frac{L}{d}$, де m – порядок дифракції, у якому проводяться спектральні дослідження; L – ширина дифракційної ґратки; d – її період. Звідси величина періоду ґратки дорівнює

$$d = \frac{m \cdot L \cdot \delta\lambda}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}}{589,3 \cdot 10^{-9}} \approx 50 \text{ мкм}.$$

Звертаємо увагу на те, що через близькість значень довжин хвиль для спектральних компонентів значення λ , яке підставлялось у формулу для визначення d , було взяте як середнє арифметичне;

б) для іншої дифракційної ґратки, яка має такий самий період d , але іншу ширину L_2 , і яка використовується для дослідження інших спектральних ліній, роздільна здатність буде іншою, і визначатиметься як $R_2 = \frac{\lambda_2}{\delta\lambda_2} = m_2 \frac{L_2}{d}$. Звідси

$$L_2 = \frac{\lambda_2 \cdot d}{\delta\lambda_2 \cdot m_2} = \frac{460,0 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{0,13 \cdot 10^{-9} \cdot 3} \approx 60 \text{ мм}.$$

Приклад 7.8. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим паралельним пучком світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. Відстань між максимумами першого порядку, які проєктуються на екран лінзою із фокусною відстанню

$f' = 1$ м, дорівнює $l = 20,2$ см. Довжина ґратки $L = 10$ см. Визначте: а) період ґратки; б) кількість штрихів на 1 мм; в) кутову та лінійну ширини нульового максимуму; г) кутову та лінійну дисперсії ґратки у спектрі першого порядку; д) роздільну здатність ґратки у спектрі першого порядку.

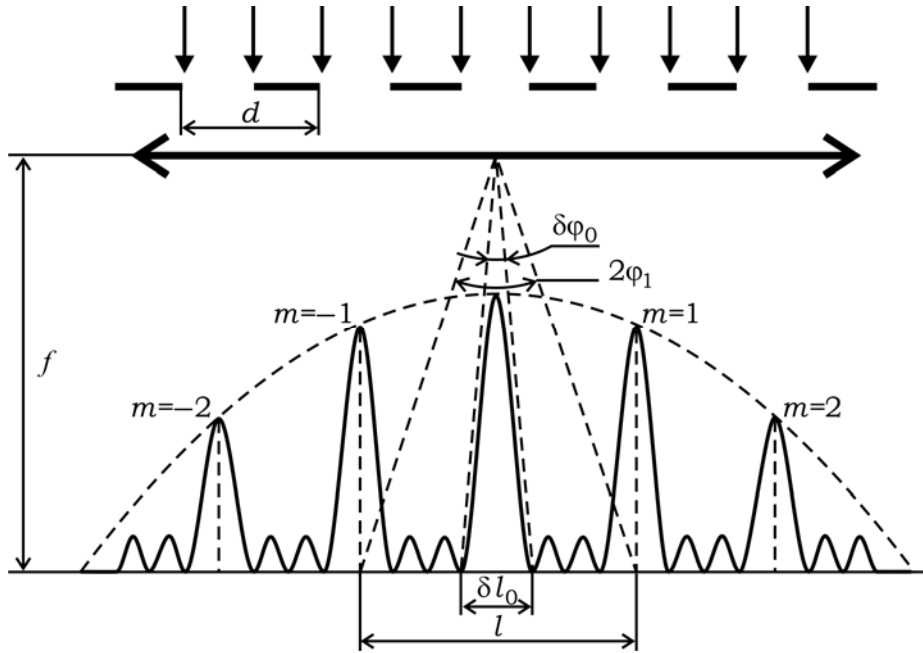


Рис. 7.48. До прикладу 7.8

Розв'язання: а) із умови головних максимумів (7.17) за $m=1$ маємо $d = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1^{\max}}$. Із рис. 7.48 маємо, що для φ_1^{\max} , як для малого кута, $\sin \varphi_1^{\max} \approx \text{tg } \varphi_1^{\max} = \frac{l}{2f'}$. (Додаткове завдання: переконайтесь, що припущення про мализну кута φ_1^{\max} справедливе), тоді

$$d \approx \frac{2\lambda f'}{l} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^6}{20,2 \cdot 10^4} = 4,95 \text{ мкм};$$

б) кількість штрихів на 1 мм ґратки становить

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{-3}} \approx 200 \frac{\text{штрих}}{\text{мм}};$$

в) кутова ширина нульового максимуму – це кут між найближчими до нульового максимуму мінімумами $\delta\varphi_0 = 2\varphi_1^{\min}$ (рис. 7.47). Із умови мінімумів (7.18), якщо кут φ_1^{\min} – малий, маємо $\sin \varphi_1^{\min} \approx \varphi_1^{\min} = \frac{\lambda}{dN}$. Тоді

$$\delta\varphi_0 = 2\frac{\lambda}{dN} = 2\frac{\lambda}{L} = 2\frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{100} = 10^{-5} \text{ рад} = 2,06''.$$

Лінійна ширина нульового головного максимуму $\delta l_0 = f' \cdot \delta\varphi_0 = 10^6 \cdot 10^{-5} = 10 \text{ мкм}$;

г) кутову дисперсію визначаємо за формулою (7.19) за $m = 1$:

$$D_\varphi = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4,95^2 - 0,5^2}} = 0,2 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}}.$$

Лінійну дисперсію визначаємо за формулою (7.20):

$$D_l = f' \cdot D_\varphi = 10^3 \cdot 0,2 = 200 \frac{\text{мм}}{\text{мкм}};$$

д) роздільну здатність визначаємо за формулою (7.21):

$$R = mN = m \frac{L}{d} = 1 \frac{10^5}{4,95} \approx 2,0 \cdot 10^4.$$

Приклад 7.9. Плоска світлова хвиля падає на плоску відбиваючу дифракційну ґратку з періодом $d = 2 \text{ мкм}$ під кутом $\theta = 80^\circ$. Знайдіть кут φ_{\max} , що відповідає максимуму найбільшого порядку, якщо на ґратку падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 546 \text{ нм}$.

Розв'язання. Якщо плоска світлова хвиля падає на дифракційну ґратку під кутом θ , то положення головних максимумів визначається рівнянням (7.23):

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_m) = m\lambda.$$

Визначимо максимальний порядок спектра, виходячи з того, що максимальний кут відхилення променів ґраткою не може перевищувати $\pm 90^\circ$, тобто $\sin \varphi_{\max} \leq \pm 1$. Тоді з рівняння (7.23) можна записати

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}(1 + \sin \theta) = \frac{2}{0,546}(1 + \sin 80^\circ) = 7,27.$$

Число m_{\max} має бути цілим, тобто $m_{\max} = 7$.

Максимальний кут φ_{\max} відхилення променів, який відповідає останньому дифракційному максимуму, визначимо зі співвідношення (7.21):

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_{\max}) = m_{\max} \lambda.$$

Звідки

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d} m_{\max} - \sin \theta\right) = \arcsin\left(\frac{0,546}{2} \cdot 7 - \sin 80^\circ\right) = 67^\circ 51'.$$

Приклад 7.10. Якою має бути ширина основи тригранної призми з дисперсією $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = 0,10 \text{ мкм}^{-1}$, щоб вона мала таку саму роздільну здатність, як і дифракційна ґратка, яка складається з 10^4 штрихів, у другому порядку спектра?

Розв'язання. Згідно з (7.21) роздільна здатність будь-якого спектрального приладу (в оптичному діапазоні – це переважно дифракційні ґратки, інтерферометри та призми) кількісно визначається відношенням довжини хвилі λ , біля якої виконується вимірювання, до мінімальної ділянки $\delta\lambda$, яка відповідає критерію Релея $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$.

Для дифракційної ґратки $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = m \frac{L}{d}$, де m – порядок дифракції, у якому проводяться спектральні дослідження; L – ширина дифракційної ґратки; d – період дифракційної ґратки. Для умови нашого прикладу $R_{\text{ДГ}} = 2 \cdot 10^4$.

Для тригранної призми, яка використовується як спектральний прилад, роздільна здатність визначається за формулою

$$R_{\text{пр}} = b \cdot \frac{dn}{d\lambda}, \quad (7.36)$$

де b – ширина основи призми; $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right|$ – дисперсія показника заломлення матеріалу, з

якого зроблена призма. Із (7.36) $b = \frac{R}{\frac{dn}{d\lambda}}$. Для нашого прикладу

$$b = \frac{2 \cdot 10^4}{0,1} \text{ мкм} = 20 \text{ см}.$$

Приклад 7.11. У телескоп, діаметр об'єктива якого $D = 1000 \text{ мм}$, спостерігають зірки. Знайдіть найменшу кутову відстань $\delta\varphi$ між зірками, за якої їх дифракційні зображення спостерігаються роздільно для довжини хвилі світла $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$.

Розв'язання. Розглянемо рис. 7.23. Згідно з критерієм Релея зображення двох точкових джерел випромінювання буде видно роздільно, якщо дифракційний максимум зображення однієї зірки збігається з першим дифракційним мінімумом зображення другої зірки. Математично це виглядає так:

$$\delta\varphi = \varphi_E = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{0,55 \cdot 10^{-3}}{1000} = 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0,14''.$$

Приклад 7.12. На якій найбільшій відстані (ℓ_{max}) до групи предметів, відстань між якими $d = 1 \text{ м}$, їх видно роздільно:

- а) неозброєним оком, діаметр зіниці якого 3 мм ;
 б) за допомогою зорової труби, яка має об'єктив діаметром 38 мм ?
 в) Розрахуйте кутовий діаметр дифракційного зображення точки, яке формується оком і об'єктивом зорової труби.

Розв'язання. Два точкові джерела світла (предмети) будуть спостерігатися роздільно, якщо кут $\delta\Psi = \frac{d}{\ell}$, під яким вони спостерігаються, буде більшим за граничне кутове розділення оптичної системи (14.3), тобто $\frac{d}{\ell} \geq 1,22 \frac{\lambda}{D}$. Звідси

$$\ell_{\max} = \frac{d \cdot D}{1,22\lambda}.$$

Будемо вважати, що $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$. Тоді:

а) для ока $\ell_{\max} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 4,5 \text{ км}$;

б) для зорової труби $\ell_{\max} = \frac{1 \cdot 38 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 56,5 \text{ км}$;

в) кутовий діаметр дифракційного зображення дорівнює кутовому діаметру кружка Ері $\delta\Psi_0 = 2\varphi_E = 2,44 \frac{\lambda}{D}$.

Для ока $\delta\Psi_0 = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 1,5'$.

Для зорової труби $\delta\Psi_0 = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{38 \cdot 10^{-3}} \approx 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 7''$.

Приклад 7.13. Визначте роздільну здатність мікроскопа для "сухого" об'єктива з числовою апертурою $A = 0,09$ і роздільну здатність для того самого об'єктива, але з масляною імерсією ($n = 1,6$). Довжина хвилі світла $\lambda = 546 \text{ нм}$.

Розв'язання. Роздільна здатність – це обернена величина до мінімально роздільного розміру об'єкта спостереження, що визначається формулами (7.29) та (7.31):

$$R = \frac{1}{a_{\min}} = \frac{2n \sin \sigma_A}{\lambda},$$

де $\sin \sigma_A = 0,09$. Тоді для "сухого" об'єктива маємо

$$R_1 = \frac{2 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 330 \text{ мм}^{-1},$$

а для імерсійного об'єктива

$$R_2 = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 528 \text{ мм}^{-1}.$$

8. КРИСТАЛООПТИКА

8.1. Короткі теоретичні відомості

- Подвійним променезаломленням світла називається явище, пов'язане з тим, що при проходженні світлового променя через деякі анізотропні середовища виникають два промені, які по-різному заломлюються і мають ортогональні поляризації. До таких анізотропних середовищ належать деякі кристали, наприклад, кристал ісландського шпату. Цей кристал має форму ромбоедра (рис. 8.1).

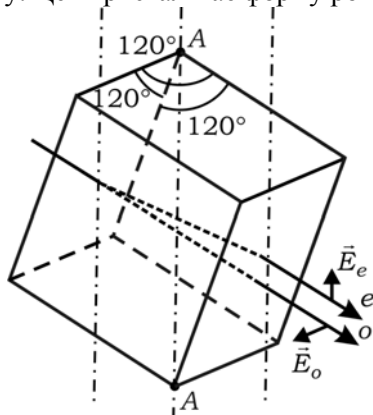


Рис. 8.1. Подвійне променезаломлення та орієнтація оптичної осі, яка збігається з напрямком AA , у кристалі ісландського шпату

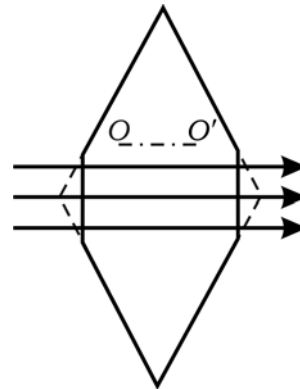


Рис. 8.2. Відсутність подвійного променезаломлення при проходженні світла вздовж оптичної осі OO' кристала

- Пряму AA , що проходить через вершини протилежних тупих кутів ромбоедра і будь-яку іншу паралельну їй пряму, називають *оптичною віссю* кристала. У напрямку цієї осі промінь проходить без подвійного заломлення (рис. 8.1). Існують кристали (напр., слюда, гіпс $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ тощо), які мають дві оптичних осі. Такі кристали називаються *двовісними*. Площина, яка містить падаючий промінь та оптичну вісь кристала, проведена через точку падіння променя на кристал, називається *головним перерізом*, або *головною площиною* кристала відносно цього променя (рис. 8.2).

- В *одновісних кристалах* одна із хвиль (звичайний – o -промінь) має площину поляризації, яка перпендикулярна головному перерізу кристала, а друга хвиля (незвичайний – e -промінь) має площину поляризації, яка паралельна головному перерізу. Явище подвійного променезаломлення обумовлене залежністю показника

заломлення середовища від напрямку поширення світлової хвилі та її поляризації. При падінні світлової хвилі на анізотропне середовище в ньому виникають дві лінійно поляризовані хвилі із взаємно перпендикулярними площинами поляризації. Швидкість поширення звичайної хвилі (v_o) і показник заломлення (n_o) для неї не залежать від напрямку її поширення, а для незвичайної хвилі відповідні величини (v_e, n_e) – залежать. Для незвичайного променя відомі закони заломлення змінюються: наприклад, він може не лежати у площині падіння. При поширенні світла вздовж оптичної осі подвійне променезаломлення відсутнє $n_e = n_o$.

- Одновісні кристали поділяються на *додатні* та *від'ємні* залежно від знака різниці ($n_e - n_o$). Якщо $n_e > n_o$, то кристал – додатний (кварц, лід, TiO_2 , HgS тощо). Якщо $n_e < n_o$, то кристал – від'ємний (ісландський шпат $CaCO_3$, турмалін, апатит, $LiNbO_3$ тощо). Максимальне значення абсолютної величини різниці ($n_e - n_o$) служить числовою характеристикою подвійного променезаломлення.

Властивості звичайного і незвичайного променів:

1. Кожен із променів утворюється в точці падіння на вхідній поверхні анізотропного кристала.

2. Кожен із променів лінійно поляризований у взаємно перпендикулярних площинах ($\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$): звичайний – у площині, яка перпендикулярна до головного перерізу кристала, а незвичайний – у площині головного перерізу.

4. Заломлення *e*-променя відбувається навіть при нормальному падінні світла на межу анізотропного кристала. Незвичайний (*e*-промінь) може не лежати у площині падіння.

5. У середині кристала звичайний і незвичайний промені поширюються з різними швидкостями – $v_o(\varphi) = c / n_o = \text{const}$ і $v_e(\varphi) = c / n_e(\varphi) \neq \text{const}$. Тільки вздовж оптичної осі кристала обидва променя поширюються з однаковою швидкістю $v_e = v_o$. У напрямку, що перпендикулярний до оптичної осі кристала, обидва променя мають максимальну різницю швидкостей $|v_o - v_e|$ і показників заломлення $|n_o - n_e|$, але при цьому поширюються в одному напрямку, без просторового розділення.

6. Звичайний промінь підпорядковується закону заломлення Снеліуса $\sin \varphi / \sin \varphi_o = n_o = \text{const}$, де φ – кут падіння променя на кристал; φ_o – кут заломлення звичайного променя в кристал; n_o – показник заломлення кристала для звичайного променя.

Щодо незвичайного променя правомірність застосування закону Снеліуса визначається тим, що позначати через кут φ_e . Якщо за кут φ_e приймати кут, який визначає напрямок поширення незвичайного променя (це кут між вектором Умова–Пойнтінга \vec{S}_e і нормаллю до межі поділу двох середовищ: ізотропне середовище – кристал), то незвичайний промінь не підпорядковується закону заломлення Снеліу-

са. Проте, якщо за кут φ_e прийняти кут, який визначає напрямок поширення хвильового фронту незвичайного променя (кут між хвильовим вектором \vec{k}_e і нормаллю до межі поділу), то закон Снеліуса можна використовувати для опису заломлення незвичайного променя. Це справедливо навіть з урахуванням того факту, що показник заломлення незвичайного променя змінюється залежно від напрямку падаючого променя.

7. Якщо на кристал падає промінь природного світла інтенсивністю $I_{\text{пр}}$, то його інтенсивності на виході з кристала визначаються формулами:

$$I_o = \frac{1}{2} T_o I_{\text{пр}}; \quad I_e = \frac{1}{2} T_e I_{\text{пр}}, \quad (8.1)$$

де T_o і T_e – коефіцієнти пропускання кристалом звичайного та незвичайного променів, відповідно.

8. Якщо на анізотропний кристал падає лінійно поляризований промінь з інтенсивністю I_1 , то їх інтенсивності на виході з кристала визначаються формулами:

$$I_e = I_1 \cos^2 \alpha; \quad I_o = I_1 \sin^2 \alpha, \quad (8.2)$$

де α – кут між площиною поляризації падаючого променя та оптичною віссю кристала.

9. Для звичайного променя анізотропний кристал поводить себе як ізотропне середовище: $n_o(\varphi) = \text{const}$, хвильова поверхня для o -променів від точкового джерела має форму сфери. Щодо незвичайного променя анізотропний кристал характеризується змінним показником заломлення: $n_e(\varphi) \neq \text{const}$. Наприклад, для жовтого світла $n_e = 1,486 \leq n_e(\varphi) \leq n_o = 1,658$ для ісландського шпату або $n_o = 1,54 \leq n_e(\varphi) \leq n_e = 1,55$ для кварцу.

Максимальне і мінімальне значення показника заломлення одновісного кристала (n_e, n_o) називаються *головними показниками заломлення* такого кристала (див. запитання 8.3.5).

Хвильова поверхня для e -променів від точкового джерела має форму еліпсоїда обертання (рис. 8.3).

10. Для o -хвилі напрямок променя і нормалі до хвильового фронту збігаються, а для e -хвилі їх напрямки можуть бути різними. Тому e -промінь може виходити з площини падіння.

11. Знаючи головні показники заломлення одновісного кристала n_e та n_o , за формулою (8.3) можна знайти показник заломлення $n_e(\varphi)$ для незвичайної хвилі, а

значить і її швидкість $v_e = \frac{c}{n_e(\varphi)}$ для будь-якого напрямку в кристалі:

$$n_e(\varphi) = \frac{n_e \cdot n_o}{\sqrt{n_e^2 \cdot \cos^2 \varphi + n_o^2 \cdot \sin^2 \varphi}}, \quad (8.3)$$

де φ – кут між хвильовим вектором \vec{k}_e незвичайної хвилі та оптичною віссю кристала (рис. 8.3). Формула (8.3) справедлива як для додатних, так і для від'ємних кристалів.

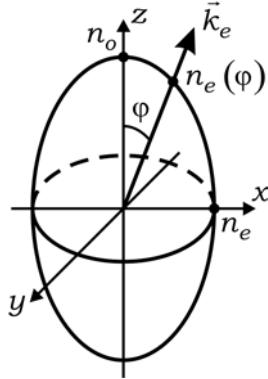


Рис. 8.3. Еліпсоїд показника заломлення в одновісному кристалі: \vec{k} – хвильовий вектор світлової хвилі; z – напрямок оптичної осі кристала

• *Фазовою пластинкою* (ФП) називається плоско-паралельна пластинка, виготовлена з одновісного кристала, оптична вісь якого паралельна поверхні пластинки. На виході ФП утворюються звичайний і незвичайний промені, які поширюються в одному напрямку й мають різницю фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d, \quad (8.4)$$

де λ – довжина хвилі; d – товщина фазової пластинки.

• *Еліптично поляризоване світло* можна отримати, якщо пропускати природне світло через систему, яка складається з поляризатора і ФП (рис. 8.4).

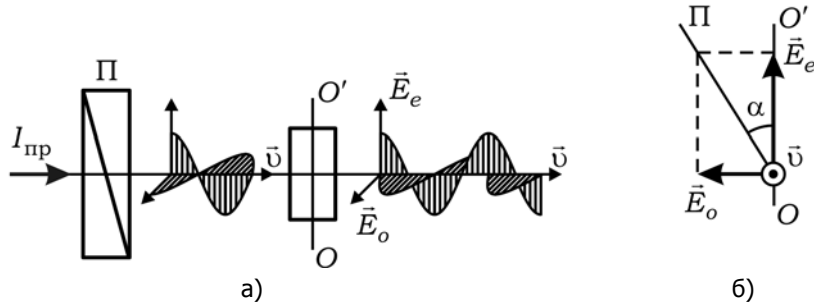


Рис. 8.4. Схема отримання еліптично поляризованого світла: а) оптична система; б) векторна діаграма

У результаті складання двох світлових хвиль однієї частоти, які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах і мають різницю фаз δ , утворюється еліптично поляризоване світло, що описується рівнянням

$$\frac{y^2}{E_e^2} + \frac{z^2}{E_o^2} - 2\frac{yz}{E_e E_o} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (8.5)$$

Це рівняння еліпса, який вписаний у прямокутник зі сторонами $2E_e$ і $2E_o$, а

$$E_e = E_1 \cos \alpha, \quad E_o = E_1 \sin \alpha,$$

де α – кут між головною площиною фазової пластинки і площиною пропускання поляризатора (рис. 8.4, б).

Часткові випадки еліптичної поляризації залежно від різниці фаз показано на рис. 8.5.

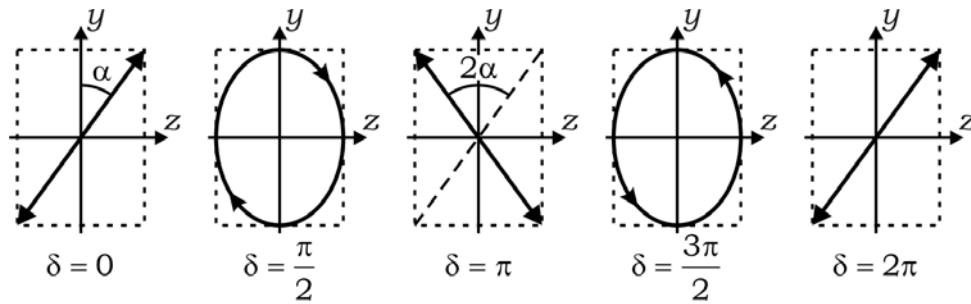


Рис. 8.5. Часткові випадки еліптичної поляризації світла (з аналізу рівняння (8.5))

• Чвертьхвильовою фазовою пластинкою $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -ФП вважається така ФП, для товщини якої виконується умова

$$d = \frac{\lambda}{4}(1 + 4m) \frac{1}{n_e - n_o}, \quad \text{де } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

$\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -ФП може перетворити лінійно поляризоване світло на світло, поляризоване по колу, або, як кажуть, циркулярно поляризоване світло. Це можна показати з (8.5): якщо вибрати товщину ФП $d = \frac{\lambda}{4}(4m + 1) \frac{1}{n_e - n_o}$ і кут $\alpha = 45^\circ$, то це приведе

до $\delta = \frac{\pi}{2}(4m + 1)$, а рівність $E_e = E_o$ остаточно перетворить (8.5) на рівняння кола.

Умова (8.6) може набувати іншого вигляду: різниця фаз між o - і e -променями на виході з $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -ФП дорівнює $\delta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m = \frac{\pi}{2}(1 + 4m)$, оптична різниця ходу між цими променями дорівнює $\Delta = \frac{\lambda}{4} + \lambda m = \frac{\lambda}{4}(1 + 4m)$.

- Півхвильова фазова пластинка ($\frac{\lambda}{2}$ -ФП), для якої різниця фаз між *o*- і *e*-променями на виході з такої ФП дорівнює $\delta = \pi$, має товщину $d = \frac{\lambda (2m+1)}{2 n_e - n_o}$.
- $\frac{\lambda}{2}$ -ФП повертає площину поляризації лінійно поляризованого світла на кут 2α .

Інтерференцію звичайного і незвичайного променів можна спостерігати при проходженні світла через систему поляризатор–фазова пластинка–аналізатор (рис. 8.6). З аналізатора виходять два когерентних промені, які поляризовані в одній площині ($\vec{E}_{e2} \parallel \vec{E}_{o2}$) і мають різницю фаз δ , що визначається формулою (8.4).

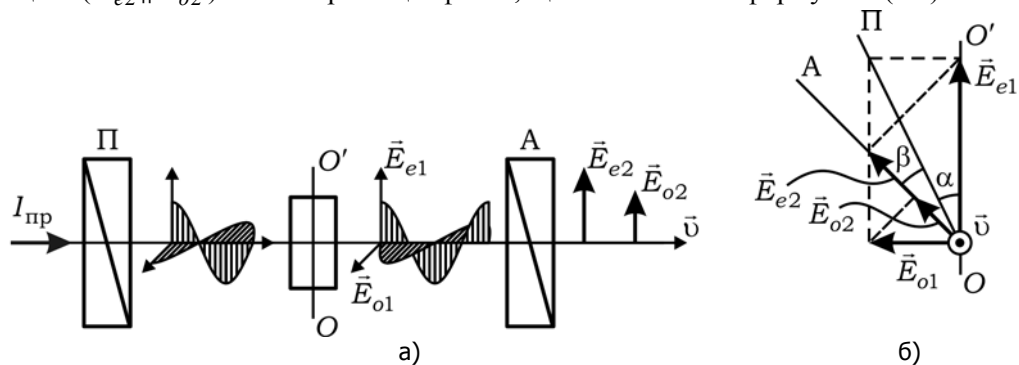


Рис. 8.6. Схема оптичної системи для спостереження інтерференції поляризованих променів

Результуюча інтенсивність поляризованих променів, що інтерферують, дорівнює

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{п}} \left[\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right], \quad (8.7)$$

де β – кут між площинами пропускання поляризаторів Π_1 і Π_2 ; α – кут між площиною пропускання поляризатора Π_1 і оптичною віссю фазової пластинки.

На практиці часто зустрічаються випадки, коли $\alpha = 45^\circ$, а площини пропускання поляризаторів Π_1 і Π_2 паралельні ($\beta = 0^\circ$), тоді

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_{\text{п}} \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad (8.8)$$

або площини пропускання поляризаторів Π_1 і Π_2 взаємно перпендикулярні ($\beta = 90^\circ$), тоді

$$I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\text{п}} \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (8.9)$$

Із (8.8) та (8.9) видно, що при нерівномірній товщині ФП інтерференційні картини при $P_1 \parallel P_2$ та $P_1 \perp P_2$ є взаємодоповнювальними, тобто при спостереженні інтерференції в монохроматичному світлі місця максимумів інтенсивності світла в першому випадку обертаються на місця мінімумів інтенсивності світла в другому випадку. У випадку спостереження в білому світлі кольори у вказаних вище випадках отримуємо різними, і називаються вони *взаємодоповнювальними*.

8.2. Методичні вказівки та поради

1. Звернемо увагу на два можливі способи опису поширення електромагнітних хвиль в анізотропних середовищах: перший – у термінах показників заломлення n_o та n_e ; другий – у термінах фазових швидкостей $v_o = \frac{c}{n_o}$ та $v_e = \frac{c}{n_e}$. Ці два способи опису ні в якому разі не можна плутати, оскільки їх застосування має суттєво різні зовнішні прояви: як видно з рис. 8.7, велика піввісь еліпса v_e не збігається з великою піввіссю еліпса n_e , а перпендикулярна до неї. (Це викликано тим, що величини n_o та v_o (n_e та v_e) пов'язані між собою обернено пропорційною залежністю).

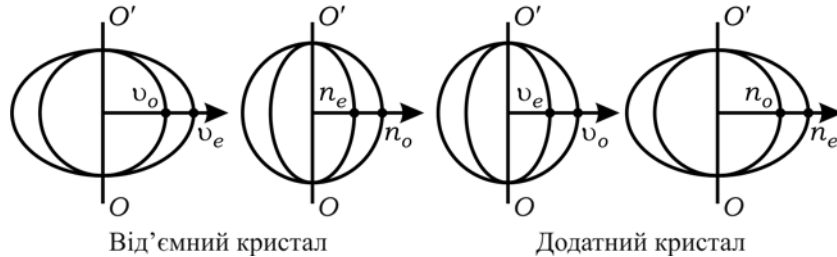


Рис. 8.7. До визначення типів (додатного та від'ємного) анізотропних

У термінах показників заломлення отримують еліпсоїд показника заломлення для незвичайної хвилі $n_e(\varphi)$ (рис. 8.3). Він має таку властивість, що, побудувавши відрізок від центра еліпсоїда вздовж вектора \vec{k}_e , який складає кут φ з оптичною віссю OO' кристала, до його перетину з поверхнею еліпсоїда, можна знайти значення $n_e(\varphi)$ уздовж будь-якого напрямку в кристалі, який визначається кутом φ (рис. 8.3). Це саме значення $n_e(\varphi)$ можна також знайти за допомогою формули (8.3).

2. Другий спосіб опису – через фазові швидкості – дозволяє отримувати напрямки поширення хвильового фронту (хвильового вектора \vec{k}) і напрямки вектора Умова–Пойнтінга \vec{S} (напрямок незвичайного променя) в одновісному анізотропному кристалі, який збігається з нормаллю до поверхні еліпсоїда (рис. 8.8). Цей метод широко використовується при побудовах Гюйгенса і дозволяє визначити на-

прямки звичайної та незвичайної хвиль, які виникають на межі ізотропне середовище – анізотропний кристал (див. приклад 8.1).

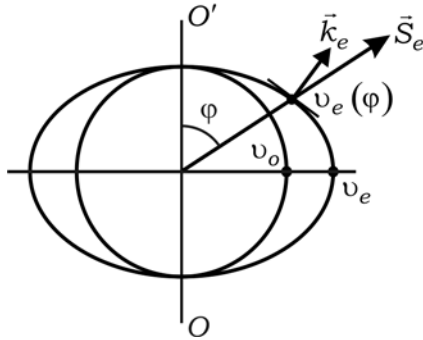


Рис. 8.8. До визначення еліпсоїда фазової швидкості для незвичайної хвилі у від'ємному анізотропному кристалі

8.3. Запитання та відповіді

8.3.1. У чому полягає явище подвійного променезаломлення?

При пропусканні вузького паралельного пучка світла через деякі кристали спостерігається явище подвійного променезаломлення: замість одного пучка в кристалі утворюються і поширюються два пучки. На виході з кристала ці два промені поширюються паралельно один одному та до падаючого (рис. 8.1). Навіть, коли вузький паралельний пучок світла падає нормально на поверхню плоско-паралельної пластинки, вирізаної із анізотропного кристала, що має властивості подвійного променезаломлення, на виході однаково отримуються два паралельних пучки.

Пучок світла, для якого начебто не виконується закон заломлення світла, назвали незвичайним (e), а той, для якого виконується, – звичайним (o). Звичайний і незвичайний промені завжди поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах: вектор \vec{E}_e лежить у площині, що утворює падаючий промінь та оптична вісь кристала, а вектор \vec{E}_o – перпендикулярний до неї. Детальні дослідження показують, що показник заломлення звичайної хвилі n_o залишається постійним для всіх напрямків поширення світла, а показник заломлення незвичайної хвилі n_e змінюється залежно від напрямку поширення світла від n_o до n_e , які називають головними показниками заломлення кристала.

8.3.2. Чи є оптична вісь певною лінією в кристалі, чи вона визначає лише напрямки у кристалі? Чи має оптична вісь певну направленість, як вектор?

Оптична вісь є напрямком у кристалі, у якому відсутнє подвійне променезаломлення, причому в обох напрямках, тобто оптична вісь не є векторною величиною (див. рис. 8.1).

8.3.3. Які кристали називають додатними, а які – від'ємними?

Одновісний кристал має хвильові поверхні у вигляді сфери та еліпсоїда обертання. Для таких кристалів можливі два випадки:

1) $n_e < n_o$ або $v_e > v_o$, коли еліпсоїд обертання для фазової швидкості v_e описаний навколо сфери для v_o (рис. 8.7). Такі кристали називають від'ємними. На практиці часто застосовують кристали ісландського шпату, що належать до від'ємних кристалів. Кристали ісландського шпату відомі тим, що серед природних одновісних кристалів, які застосовуються в оптиці, мають найбільшу різницю в показниках заломлення: для жовтого світла $n_o = 1,568$, $n_e = 1,486 \Rightarrow n_o - n_e = 0,09$.

2) $n_e > n_o$ або $v_e < v_o$. У цьому випадку еліпсоїд обертання для v_e вписується у сферу для v_o (рис. 8.7). Такі кристали називають додатними. Найбільш поширеним серед додатних кристалів є кварц.

8.3.4. У чому полягає специфіка запису матеріальних рівнянь для анізотропних середовищ?

В анізотропних кристалах вектор електричної індукції \vec{D} не паралельний вектору напруженості електричного поля \vec{E} . У таких випадках зв'язок між непаралельними векторами здійснюють за допомогою тензорних величин. (Згадайте, як у механіці зв'язок між моментом імпульсу \vec{L} і кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ через скалярну величину моменту інерції I ($\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$) у випадку, коли $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, змінюється на зв'язок між векторами \vec{L} та $\vec{\omega}$ через тензор інерції \hat{I} у випадку, коли ці вектори непаралельні). Тому в анізотропних кристалах матеріальне рівняння набуває вигляду $\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$, де $\hat{\epsilon}$ – тензор діелектричної проникності.

8.3.5. Запишіть зв'язок між компонентами векторів електричної індукції та електричної напруженості в анізотропній прозорій речовині.

В анізотропній речовині показник заломлення, а тому і діелектрична проникність ϵ , залежать від напрямку поширення світла в кристалі. Із цього випливає, що ці величини перестають бути скалярами. Математично діелектричну проникність у кристалах представляють тензором другого рангу:

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (8.10)$$

Дослід показує, що характер взаємодії хвилі з речовиною не змінюється при зміні напрямку поширення світла на протилежний. Це дозволяє стверджувати, що тензор симетричний, тобто $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$.

Якщо пов'язати координатні осі з головними напрямками кристала, то вигляд тензора суттєво спрощується: недіагональні члени тензора набувають значень нулів, а діагональні позначають як $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Тоді зв'язок між компонентами векторів електричної індукції та напруженості поля представляється у вигляді

$$D_x = \epsilon_x E_x; \quad D_y = \epsilon_y E_y; \quad D_z = \epsilon_z E_z. \quad (8.11)$$

Підкреслимо, що тут $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ – діагональні елементи тензора діелектричної проникності, записаного відносно головних напрямків кристала. Знайдений вище зв'язок між векторами \vec{D} і \vec{E} через тензор $\hat{\epsilon}$ дозволяє стверджувати, що в анізотропній речовині вони різняться не тільки за величиною, але й за напрямком.

Як відомо, вектори електричної індукції \vec{D} , магнітної індукції \vec{B} і хвильового вектора \vec{k} ортогональні і складають праву трійку векторів (рис. 8.9).

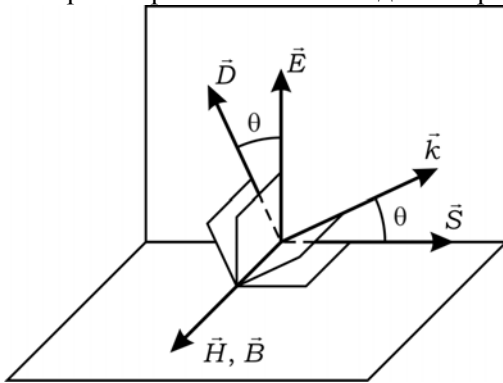


Рис. 8.9. Взаємне розташування трійок векторів $\vec{D}, \vec{B}, \vec{k}$ та $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ у додатному анізотропному кристалі

У свою чергу, потік енергії (вектор Умова – Пойнтінга) $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$ перпендикулярний до векторів електричної \vec{E} та магнітної \vec{H} напруженостей, що також показано на рис. 8.9. Тобто напрямком нормалі до хвильової поверхні і напрямком поширення потоку енергії (світлового променя) в анізотропному кристалі не збігаються.

8.3.6. Що таке головні швидкості поширення світла в кристалі?

Якщо розв'язати відому систему рівнянь Максвелла в системі СІ: $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, що для плоскої хвилі переходять у таку систему рівнянь: $-\vec{k} \times \vec{B} = \omega \epsilon \mu_0 \vec{E}$, $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, де μ_0 – магнітна стала, а виключивши залежні від часу величини для анізотропного середовища, можна отримати т. зв. рівняння Френеля:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_x - v^2} + \frac{\cos^2 \beta}{\epsilon_y - v^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{\epsilon_z - v^2} = 0. \quad (8.12)$$

Через $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ позначені напрямні косинуси хвильового вектора \vec{k} , v – фазова швидкість світла в кристалі, c – швидкість світла у вакуумі. Проаналізуємо цей вираз.

1) Якщо світло поширюється вздовж осі X , то $\cos^2 \alpha = 1$, $\cos^2 \beta = \cos^2 \gamma = 0$, тобто $\left(\frac{c^2}{\varepsilon_x} - v^2\right)\left(\frac{c^2}{\varepsilon_y} - v^2\right) = 0$, що дає $v_{1x} = \frac{c}{n_y}$; $v_{2x} = \frac{c}{n_z}$ з урахуванням $n^2 = \varepsilon$.

2) При поширенні світла вздовж осі Y отримуємо рівність $\left(\frac{c^2}{\varepsilon_x} - v^2\right)\left(\frac{c^2}{\varepsilon_z} - v^2\right) = 0$ і дві відповідних швидкості $v_{1y} = \frac{c}{n_x}$; $v_{2y} = \frac{c}{n_z}$.

3) У напрямку осі Z рівняння Френеля дає рівність $\left(\frac{c^2}{\varepsilon_x} - v^2\right)\left(\frac{c^2}{\varepsilon_y} - v^2\right) = 0$ і дві

швидкості $v_{1z} = \frac{c}{n_x}$; $v_{2z} = \frac{c}{n_y}$. Тобто вздовж кожного з трьох головних напрямків

поширення хвилі в кристалі існують два значення швидкості, а отже, і подвійне променезаломлення. Відповідні значення швидкостей і показників заломлення вздовж координатних осей, які збігаються з головними напрямками в кристалі, називають головними.

8.3.7. Що таке оптична вісь анізотропної речовини? Скільки їх може бути в кристалі?

Рівняння (8.12) дає фазові швидкості хвилі в усіх напрямках. За одиницю часу ці хвилі утворюють поверхні рівних фаз, форма яких залежить від природи кристала. У загальному випадку ми отримаємо не сферу, як для ізотропної речовини, а дві складні поверхні, представлені на рис. 8.10. Вони перетинаються в чотирьох точках, які дають два напрямки, уздовж яких фазові швидкості, а отже, і показники заломлення однакові. Ці напрямки називають оптичними осями кристала. Такі кристали називають двовісними, але вони рідко застосовуються через труднощі, а часто і неможливість виготовлення поляризаційних елементів і приладів із них.

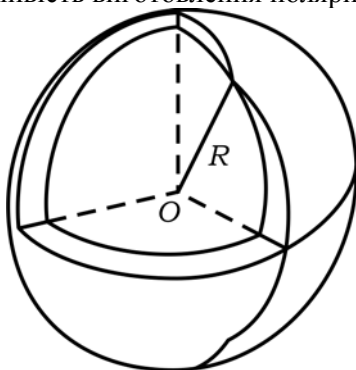


Рис. 8.10. До визначення оптичних осей в анізотропному кристалі

Якщо два з трьох діагональних елементів тензора діелектричної проникливості рівні між собою, картина суттєво спрощується. Оберемо для визначеності

$n_x = n_y = n_0$, $n_z = n_e$. Повторюючи аналіз хвильової поверхні, як і в попередньому питанні, можемо зробити такі висновки:

1) коли хвиля поширюється вздовж осі X , то величина $v_{1x} = \frac{c}{n_y} = \frac{c}{n_0}$, а вектор електричної індукції орієнтований по осі Y (адже він визначається як $D_y = n_y^2 E_y$); величина $v_{2x} = \frac{c}{n_z} = \frac{c}{n_e}$, а вектор електричної індукції орієнтований по осі Z . Тобто в кристалі виникають дві хвилі, які поширюються в одному напрямку, але з різними швидкостями, а їх вектори електричної індукції ортогональні;

2) у напрямку осі Y також виникають дві хвилі зі швидкостями $v_{1y} = \frac{c}{n_x} = \frac{c}{n_0}$ і $v_{2y} = \frac{c}{n_z} = \frac{c}{n_e}$. Швидкості отримуємо такі самі, як і вздовж осі X , тільки змінюється орієнтація вектора \vec{D} у напрямку осі X для звичайної хвилі;

3) при поширенні хвилі вздовж осі Z швидкості визначаються як $v_{1z} = \frac{c}{n_x} = \frac{c}{n_0}$ і $v_{2z} = \frac{c}{n_y} = \frac{c}{n_0}$. У випадку орієнтації хвильового вектора по осі Z не виникає подвійне променезаломлення.

Для кристалів, у яких $n_x = n_y = n_0$, $n_z = n_e$, хвильові поверхні симетричні відносно осі Z і мають точку дотику на ній, у площині XY їх переріз дає два кола. Це дозволяє зробити висновок, що хвильові поверхні утворюють сферу та еліпсоїд обертання. Еліпсоїд обертання може бути або вписаний у сферу, або описаний навколо неї. Вісь Z , по якій обидві поверхні мають однакові швидкості, є оптичною віссю кристала, і вона єдина для таких кристалів.

Хвилю, яка поширюється зі швидкістю $v_0 = c/n_0$, називають звичайною, адже її швидкість і показник заломлення однакові в усіх напрямках, і вона утворює хвильову поверхню у вигляді сфери. Її вектор електричної індукції \vec{D} лежить у площині, перпендикулярній до оптичної осі кристала.

Хвилю, яка поширюється зі швидкістю $v_e = c/n_e$, називають незвичайною, її швидкість і показник заломлення змінюються з напрямком, а вектор електричної індукції \vec{D} лежить у площині, що проходить через оптичну вісь і напрямком поширення.

До речі, якщо $n_x = n_y = n_z = n_0$, то подвійне променезаломлення не спостерігається. Такими є кристали кубічної симетрії, до яких належить, наприклад, NaCl .

8.3.8. Чим відрізняються фазова та групова швидкості в анізотропному кристалі?

У запитаннях 7.3.6 та 7.3.7 ми детально розглянули форму хвильових поверхонь у кристалах, визначили головні фазові швидкості. У запитанні 7.3.5 показано, що напрямок нормалі до хвильової поверхні (хвильовий вектор \vec{k}) не збігається з напрямком потоку енергії \vec{S} , тому групова швидкість u не дорівнюватиме фазовій v ні за величиною, ні за напрямком. Із рис. 8.9 видно, що $u = v \cos \theta$, тут θ – кут між нормаллю до хвильової поверхні та напрямком поширення енергії.

Для одновісних кристалів у площині, перпендикулярній до оптичної осі, напрямки векторів \vec{D} і \vec{E} збігаються. Тобто значення фазової і групової швидкостей для незвичайної хвилі дорівнюють одне одному. Зауважимо, що для звичайної хвилі в одновісних кристалах фазова і групова швидкості однакові в усіх напрямках.

Нагадаємо також, що закон Снеліуса для заломленого світла виводився з умови $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ саме для фазових швидкостей. Коли ми спостерігаємо заломлення світла, у т. ч. і подвійне променезаломлення, то фіксуємо напрямок поширення світлового потоку, тобто променя. Унаслідок того, що в анізотропній речовині напрямки променя і нормалі до хвильового фронту не збігаються між собою, виникає враження, ніби закон заломлення світла для незвичайного променя не виконується. Дійсно, це так, якщо в законі Снеліуса оперувати з кутами, які характеризують незвичайний промінь. Однак, якщо за кут φ_e приймати кут, який визначає напрямок поширення хвильового фронту незвичайного променя (кут між хвильовим вектором \vec{k}_e та нормаллю до межі поділу), то закон Снеліуса можна використовувати для опису заломлення і незвичайного променя. Ураховуючи, що значення показника заломлення незвичайного променя змінюється залежно від напрямку заломленого променя $n_e(\varphi) \neq \text{const}$, користуючись законом Снеліуса в цьому випадку, слід кожного разу обирати значення n_e для конкретного кута падіння φ .

8.3.9. Що таке оптичний дихроїзм?

Анізотропія кристалів проявляється не тільки в подвійному променезаломленні. Якщо в кристалі всі або частина молекул мають певну орієнтацію дипольних моментів \vec{P} , то падаюче світло поглинатиметься вибірково: частина світла, у якого вектори \vec{E} і \vec{P} паралельні, поглинатиметься повністю або частково, а частина світла, у якого вектори електричної напруженості \vec{E} перпендикулярні до дипольного моменту молекули, не поглинатиметься. Тому на виході з такого кристала світло буде частково або повністю лінійно поляризоване в межах смуги поглинання. Це і є явище дихроїзму. Недолік явища дихроїзму щодо його використання полягає в тому, що смуги поглинання світла в кристалах мають вузьку спектральну область, часто не у видимій частині спектра. Широку смугу поглинання практично на всю

видиму частину спектра мають тільки кристали турмаліну. Проте ці кристали оптичного класу рідко зустрічаються в природі й мають малі розміри.

Більш поширені поляроїди – полімерні плівки, у яких молекули орієнтують під час їх виготовлення, що створює ефект дихроїзму. Для поляроїдів обирають полімери, що мають широкі смуги поглинання у видимій частині спектра. До переваг поляроїдів належить можливість отримати поляризатор великої площі та їх невелика вартість, до недоліків – неповна структуризація плівок і, відповідно, менший від одиниці ступінь поляризації світла на виході.

8.3.10. *Пучок монохроматичного світла проходить через поляризатор і пластинку у вигляді клина, вирізаного з кварцу з оптичною віссю, що паралельна ребру клина й утворює кут 45° із площиною пропускання поляризатора. Як буде змінюватися характер поляризації світла за пластинкою за її висотою?*

Клин представляє собою фазову пластинку змінної товщини, на виході якої складаються дві ортогонально поляризовані хвилі – звичайна та незвичайна. У результаті їх складання в загальному випадку утворюється еліптично поляризоване світло (рис. 8.5). Конкретний вигляд поляризації такого світла залежить від різниці фаз (8.4), яка вноситься клиновидною пластинкою змінної товщини d .

Для різних товщин клиновидної пластинки звичайний та незвичайний промені світла будуть набувати різних значень різниці фаз δ між ними. Світло на виході з пластинки буде мати різні види поляризації:

- коли $\delta = 2\pi t$, світло буде лінійно поляризованим у площині поляризації падаючого світла;
- коли $\delta = \pi(2t + 1)$, світло буде лінійно поляризованим у площині, що перпендикулярна до площини поляризації падаючого світла;
- коли $\delta = \frac{\pi}{2}(2t + 1)$, світло буде циркулярно поляризованим.

Для проміжних до цих значень δ світло буде еліптично поляризованим.

Як бачимо, на виході пластинки у вигляді клина за її висотою поляризація світла буде поступово змінюватися і набувати всіх перелічених вище видів.

8.3.11. *Чи можна обирати товщину фазової пластини необмежено великою, наприклад, для $\lambda/4$ -ФП обирати будь-які великі значення числа t , щоб виконувалась*

$$\text{необхідна умова } d = \frac{\lambda}{4}(4t + 1) \frac{1}{n_e - n_o} ?$$

Ні, не можна. Якщо різниця ходу $\Delta = (n_e - n_o)d$ між e - та o -променями після їх проходження через ФП стає рівною довжині когерентності $L_k = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ світла чи більшою за неї, то на виході ФП світло буде неполяризованим.

8.3.12. *Як визначити напрямок оптичної осі у ФП, якщо відомо, що ФП вирізана з кристала ісландського шпату так, що оптична вісь лежить у площині пластинки?*

Визначити напрямок оптичної осі у ФП можна, наприклад, знявши кутову залежність показника заломлення n_e для e -променя. Напрямок, уздовж якого величина n_e буде максимальною, визначить напрямок оптичної осі. Існують ще способи визначення напрямку оптичної осі. Наприклад, це напрямок, уздовж якого в анізотропному кристалі не відбувається просторове розділення променя на два, а значення показників заломлення для обох променів які поширюються вздовж одного напрямку, однакові $n_e = n_o$.

8.3.13. *Чим визначається вид поляризації хвилі на виході з ФП?*

Промінь на виході ФП у загальному випадку має еліптичну поляризацію. Форма та орієнтація еліпса або його різновидів (лінійна або кругова поляризація) залежать від величин α і δ , де α – кут між вектором \vec{E} та оптичною віссю ФП; δ – зсув фаз між e - та o -променями. Кут α – конструктивна характеристика експериментальної схеми. Величина кута δ залежить від характеристики матеріалу, з якого виготовлено ФП, а саме, від величини $(\Delta n = n_e - n_o)$, а також від товщини d ФП і довжини хвилі λ світла. Кут α визначає співвідношення між амплітудами e - та o -променів на виході ФП.

8.3.14. *Відомо, що серед трьох фазових пластинок є $\lambda/4$ -ФП, $\lambda/2$ -ФП та λ -ФП. Якими методами їх можна розрізнити?*

Потрібно провести аналіз стану поляризації променя на виході з ФП за схемою, наведеною на рис. 8.4. Оберемо кут між оптичною віссю фазової пластинки і площиною пропускання поляризатора $\alpha = 45^\circ$. ФП, на виході з якої промінь буде циркулярно поляризованим, є $\lambda/4$ -ФП. Дві інші ФП на виході дадуть лінійно поляризоване світло. Розрізнити $\lambda/2$ -ФП та λ -ФП можна за тим, що на виході з λ -ФП напрямок поляризації світла залишиться незмінним порівняно зі світлом на її вході. Для $\lambda/2$ -ФП напрямки лінійної поляризації світла на вході і на виході ФП різні.

8.3.15. *У наборі наявні пластинка зі звичайного скла, поляроїдна пластинка, $\lambda/4$ -ФП та $\lambda/2$ -ФП. Яким чином можна визначити природу кожної з них?*

1. Найпростіше (за зовнішніми ознаками) виділити поляроїдну пластинку, оскільки вона поглинає світло, а решта – прозорі. Щоб переконатись, що це не просто поглинаюча світло речовина, а дійсно, поляроїд, треба розмістити між нею й оком аналізатор. Якщо це поляроїд, обертанням аналізатора можна змінити інтенсивність світла, яке пропустив поляроїд.

2. Далі слід пластинку по черзі розмістити між схрещеними поляризатором і аналізатором. Скляна пластинка на стан поляризації ніяк не впливає, поле зору залишається темним за будь-якої орієнтації скляної пластинки.

3. Пластинки $\lambda/2$ і $\lambda/4$ у загальному випадку просвітлюють поле зору, коли їх розміщують між схрещеними поляризатором і аналізатором.

Обидві пластинки треба орієнтувати відносно площин пропускання поляризатора і аналізатора: коли оптична вісь кристала паралельна або перпендикулярна до

головного перерізу поляризатора, у кристалічній пластинці виникає тільки одна хвиля, яка і виходить із неї і гаситься аналізатором. Якщо тепер $\lambda/4$ -ФП повернути на кут $\alpha = 45^\circ$, із неї вийде циркулярно поляризоване світло. Це фіксується аналізатором, його обертання не призводить до зміни інтенсивності світла, яке вийшло з $\lambda/4$ -ФП.

При орієнтації оптичної осі пластинки $\lambda/2$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ до головного перерізу поляризатора із неї вийде лінійно поляризоване світло, площина коливань вектора \vec{E} якого повернеться на кут $2\alpha = 90^\circ$. Тепер аналізатор пропускатиме світло максимально, а при повороті на 90° (коли головні перерізи поляризатора й аналізатора паралельні) погасить його.

8.3.16. Як визначити кут між хвильовим вектором \vec{k} та вектором Умова–Пойнтінга \vec{S} оптичної хвилі в анізотропному кристалі?

Для цього виконують побудову Гюйгенса. Напрямок вектора Умова–Пойнтінга \vec{S} це напрямок поширення променя. Для "о" променя напрямки хвильового вектора \vec{k}_o і вектора Умова–Пойнтінга \vec{S}_o збігаються. Для "е" променя напрямки хвильового вектора \vec{k}_e і вектора Умова–Пойнтінга \vec{S}_e різні.

8.3.17. Як визначити кут між векторами електричної напруженості \vec{E} та електричної індукції \vec{D} оптичної хвилі в анізотропному кристалі?

Для цього виконують побудову Гюйгенса. Кут між напрямком поширення фронту плоскої незвичайної хвилі (\vec{k}_e) і напрямком поширення незвичайного променя (\vec{S}_e) дорівнює куту між векторами \vec{E} і \vec{D} оптичної хвилі в анізотропному кристалі (рис. 8.9).

8.3.18. Як можна виміряти різницю фаз між звичайним і незвичайним променями на виході оптичного променя із фазової пластинки?

Різницю фаз між звичайним і незвичайним променями на виході оптичного променя із фазової пластинки можна знайти, вимірявши параметри поляризації світла (у загальному вигляді – нахил великої осі еліпса і відношення величин малої та великої осей еліпса) на виході із ФП за допомогою компенсатора та аналізатора. Далі треба користуватись методами, якими подібна задача розв'язується при додаванні ортогональних коливань, а саме, формулою (8.5), яка має своє відображення у вигляді фігур, зображених на рис. 8.5.

8.3.19. Чи можуть інтерферувати ортогонально поляризовані промені? Чому? Доведіть.

Ні, не можуть. Це пов'язане з тим, що в точці додавання двох когерентних лінійно поляризованих хвиль з напруженостями електричних складових \vec{E}_1 та \vec{E}_2 результуюче поле \vec{E} дорівнює сумі $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Для переходу до енергетичного опи-

су (за інтенсивностями) треба врахувати, що інтенсивність $I \sim E^2$. Тоді $E^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$. Третій доданок – інтерференційний член. Це скалярний добуток двох векторів, який дорівнює нулю у випадку їх ортогональності.

Питання про можливість інтерференції e - та o -променів, поляризації яких ортогональні, потребує спеціального розгляду (див. запитання 8.3.20 та 8.3.21).

8.3.20. Чи можна "примусити" взаємодіяти ортогонально поляризовані e - та o -промені на кшталт того, як це відбувається в інтерференції? Поясніть.

Так, можна. Для цього необхідно (рис. 8.11) зорієнтувати пластину з оптичною віссю OO' , яка лежить у площині пластинки, так, щоб OO' складала кут 45° з вектором \vec{E} лінійно поляризованого світла, що пройшло через поляризатор Π . У цьому випадку у ФП будуть поширюватись два e - та o -промені з ортогональними поляризаціями, промені підуть в одному напрямку (просторово не розділяючись) і матимуть однакові амплітуди, але різні швидкості.

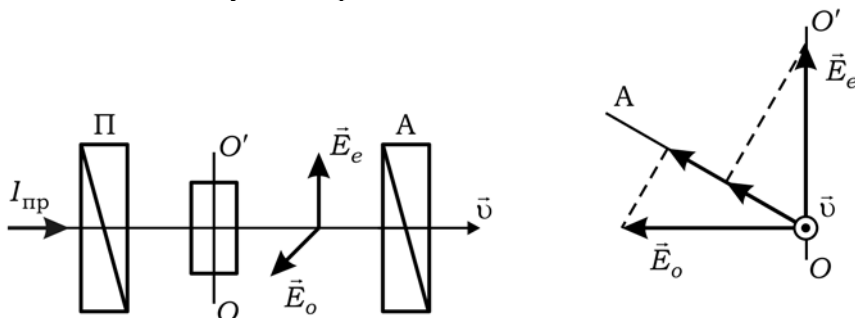


Рис. 8.11. Оптична схема, за допомогою якої можна спостерігати інтерференційну картину від ортогонально поляризованих e - та o -променів

Із ФП вийде один промінь з просторово не розділеними ортогонально поляризованими хвилями, між якими існуватиме різниця ходу $\Delta = (n_e - n_o)d$. Хвиля на виході з ФП утворюється в результаті взаємодії всередині кристала між двома хвилями. Ця результуюча хвиля має поляризацію, вид якої буде визначатись за тими самими правилами, що і при розгляді фігур Ліссажу, тобто поляризація має бути або лінійною, або еліптичною, або круговою.

Таким способом утворені хвилі можна "примусити" взаємодіяти або, як інколи кажуть, інтерферувати.

8.3.21. У якому випадку і за допомогою якої схеми можна спостерігати інтерференційну картину від ортогонально поляризованих хвиль?

Про можливість "примусити" взаємодіяти ортогонально поляризовані e - та o -промені йшлося в запитанні 8.3.20. Водночас відомо (див. запитання 8.3.19), що хвилі, поляризовані ортогонально, інтерферувати не можуть. Без застосування спеціальних прийомів останнє твердження стосується також і e - та o -променів, для яких

$\vec{E}_e \perp \vec{E}_o$, хоча на виході з ФП різниця фаз між ними δ може бути сталою, а промені когерентними. При нормальному падінні лінійно поляризованого променя на ФП, у площині якої лежить оптична вісь, просторового розділення e - та o -променів не буде, вони поширюються одним шляхом. Набіг фаз $\delta = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}$ між ними визначає вид поляризації світла на виході з ФП.

Зауважимо, що, строго кажучи, на виході із ФП існує один у загальному випадку еліптично поляризований промінь. Проте цю хвилю, як і будь-яку еліптично поляризовану хвилю, не залежно від її походження, розглядають як таку, що має дві складові, які перпендикулярно поляризовані з відповідним зсувом фаз між ними. Ці хвилі, які тут просторово не розділені у два променя, але мають зсув фаз δ та ортогональну поляризацію, втратили право називатись e - та o -променями. Тому правильно називати їх, наприклад, променями 1 та 2 (рис. 8.11, а).

Можливість "примусити" e - та o -промені утворити інтерференційну картину з'являються в разі появи у схемі аналізатора А. За його допомогою напрямки коливань у променях 1 і 2 можна звести в одну площину, яка збігається із площиною пропускання аналізатора (рис. 8.11, б). Такі хвилі з паралельними поляризаціями можуть інтерферувати.

Якщо на ФП направити широкий пучок променів, то у випадку, коли між променями утворюється просторовий розподіл різниць фаз δ , наприклад, завдяки неоднаковій товщині ФП, пучок на виході з ФП матиме просторово промодульований розподіл еліптичних поляризацій. Зміни в поляризації світла можна перетворити на зміни інтенсивності за допомогою схеми, зображеної на рис. 8.11, а.

Після ФП світло має еліптичну поляризацію. Форма й орієнтація еліпса залежить від товщини d ФП. Якщо ФП у різних місцях має різні значення d , то для кожної з цих значень (d_i) товщини поляризація буде різною. При цьому інтенсивність світла, що пройшла через ФП у різних її місцях, однакова. Однак такий розподіл інтенсивності суттєво змінюється після проходження світла через аналізатор А. Цей аналізатор пропускає тільки ті складові променів 1 та 2, які збігаються з напрямком його пропускання. У цьому випадку отримують інтерференційну картину.

Інтерференції не буде, якщо поляризація одного із променів (1 або 2) збігається з площиною пропускання аналізатора А. Окрім того, слід брати до уваги і товщину ФП, вона має бути такою, щоб не втрачалась когерентність променів.

8.3.22. Якого кольору буде інтерференційна картина в разі її спостереження за схемою, яка наведена рис. 8.11, при використанні ФП, що має різну товщину?

Якщо світло, яке падає на ФП, монохроматичне, то інтерференційна картина після А складається зі світлих і темних смуг, які відповідають різним товщинам ФП. При обертанні поляризатора А на 90° місце темних смуг займають світлі смуги (плями), і навпаки.

У білому світлі інтерференційна картина буде кольоровою. При обертанні поляризатора A на 90° кольори смуг зміняться на доповнювальні кольори: червоне \rightarrow блакитне, зелене \rightarrow фіолетове, синє \rightarrow жовте.

8.3.23. *Що таке доповнювальні кольори?*

Суміш у строго визначених кількісних пропорціях декількох світлових потоків випромінювань (т. зв. доповнювальних кольорів), наприклад, із довжинами хвиль $\lambda = 560$ нм і $\lambda = 465$ нм не розрізняється за сприйняттям від "білого" денного світла з неперервним спектром.

При спостереженні інтерференції поляризованого світла на кристалічній пластинці нерівномірної товщини інтерференційні картини за $P_1 \parallel P_2$ та $P_1 \perp P_2$ є взаємодоповнюючими, тобто при спостереженні інтерференції в монохроматичному світлі місця максимумів інтенсивності світла в першому випадку обертаються на місця мінімумів інтенсивності світла в другому випадку. У випадку спостереження в білому світлі кольори у вказаних вище випадках отримуємо різними і їх називають доповнювальними.

8.3.24. *Чи можна запропонувати спосіб спостереження інтерференційної картини за схемою, представленою на рис. 8.11, але без застосування аналізатора?*

Так, аналізатор A можна усунути зі схеми, наведеної на рис. 8.11, але при цьому інтерференційну картину слід спостерігати не на екрані або на звичайній фотопластинці, а реєструвати на спеціальних середовищах, чутливих не до зміни інтенсивності світла, а до зміни його поляризації. Такі поляризаційно чутливі реєструючі середовища сучасній науці відомі.

8.3.25. *Чи спостерігається інтерференційна картину, якщо на фазову пластинку у схемі, наведеної на рис. 8.11, пустити неполяризований промінь (усунути поляризатор)? Поясніть.*

Ні, у такому випадку інтерференційна картина не спостерігатиметься. Нагадаємо, що після ФП світло має еліптичну поляризацію, форма та орієнтація еліпса залежить від товщини ФП. Складові променя на виході ФП, які мають походження від e - та o -променів, просторово не розділені, мають зсув фаз δ і ортогональну поляризацію. Напрямки коливань у цих складових променя за допомогою аналізатора можна звести в одну площину, яка збігається із площиною пропускання аналізатора. Коли ж на ФП падає лінійно поляризоване світло, у результаті таких дій отримують інтерференційну картину. Коли на ФП пускають неполяризоване світло (зі схеми усувають поляризатор), то інтерференційна картина зникає.

Відсутність здатності утворювати інтерференційну картину може вказувати тільки лише на відсутність когерентності між e - та o -променями. І це єдина відмінність, до якої призводить використання неполяризованого променя. Усі інші властивості променя, отриманого при падінні на ФП лінійно поляризованого світла, залишаються й у випадку використання неполяризованого світла.

Чому в останньому випадку немає інтерференції? Хоча e - та o -промені виходять з одного й того самого джерела світла, вони містять коливання, які належать різним

цугам хвиль, що випромінюються різними окремими атомами. Коливання, що відповідають одному такому цугу хвиль, здійснюється у випадково орієнтованій площині. В o -промені коливання відбуваються переважно цугами, площина коливань яких близька до одного напрямку в просторі, в e -промені – цугами, площина коливань яких близька до другого, перпендикулярного до першого напрямку. Оскільки окремі цуги некогерентні за визначенням, то e - та o -промені, що виникають із природного світла, також будуть некогерентними.

Інший випадок, коли на ФП падає лінійно поляризоване світло. Тут коливання кожного цугу поділяються між e - та o -променями в одній і тій самій пропорції, яка визначається орієнтацією оптичної осі ФП відносно площини коливань у промені, що падає на ФП.

8.3.26. Як визначити напрямок оптичної осі в $\lambda/4$ -ФП?

Треба зібрати оптичну схему, яка зображена на рис. 8.11. Далі треба зорієнтувати ФП таким чином, щоб інтенсивність світла на виході з аналізатора А не залежала від його обертання. Це буде означати, що $\lambda/4$ -ФП перетворила лінійно поляризоване світло на циркулярно поляризоване, що можливо лише за умови, коли кут між відомим напрямком поляризації \vec{E} , який визначає поляризатор П, та оптичною віссю OO' $\lambda/4$ -ФП становить кут у 45° .

Існують й інші способи визначення напрямку оптичної осі в $\lambda/4$ -ФП. Поміркуйте над ними.

8.3.27. Система зі схрещених поляризатора та аналізатора освітлюється білим світлом. Між ними розміщують тоненьку кристалічну пластинку, вирізану паралельно до оптичної осі. У яких випадках поле зору залишається темним?

При орієнтації кристалічної пластинки, за якої її оптична вісь паралельна або перпендикулярна до головного перерізу поляризатора, після останнього лінійно поляризоване світло проходить через пластинку як одна (звичайна або незвичайна) хвиля, а тому гаситься аналізатором незалежно від довжини хвилі.

Звернемо увагу на те, що, незважаючи на залежність властивостей фазових пластинок від довжини хвилі λ , у цьому експерименті використовується біле світло.

8.3.28. Дві пластинки вирізані з одновісного кристала паралельно до оптичної осі. Товщини пластинок d_1 і d_2 мало відрізняються між собою. Кожна із пластинок, розміщена між схрещеними поляризатором та аналізатором, дає світле поле зору, але забарвлення не виникає. Якщо між поляризатором і аналізатором розташувати обидві пластинки таким чином, щоб їхні оптичні осі були перпендикулярними між собою, то виникне яскраве забарвлення. Поясніть це явище.

Кожна із пластинок вносить свою різницю ходу $\Delta_1 = d_1(n_e - n_o)$ та $\Delta_2 = d_2(n_e - n_o)$, які, напевно, більші за довжину когерентності (L_k). Тому в білому світлі інтерференції немає, забарвлення не виникає. Коли оптичні осі пластинок орієнтовані перпендикулярно одна одній, їхня сумарна різниця ходу (Δ) дорівнює

$\Delta = d_1(n_e - n_o) + d_2(n_o - n_e) = (d_1 - d_2)(n_e - n_o)$, тобто зменшується і може дорівнювати всього кільком дожинам хвиль. Тоді виконується умова $\Delta < L_k$, виникає інтерференція, з'являється яскраве забарвлення поля зору.

8.3.29. Система складається зі схрещених поляризатора та аналізатора, між якими розміщено фазову пластинку, оптична вісь якої утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з напрямками максимального пропускання поляризатора і аналізатора. Якою буде інтенсивність світла на виході із системи, якщо інтенсивність падаючого природного світла I_0 , а фазова пластинка: а) $\lambda/2$ -ФП; б) $\lambda/4$ -ФП? Як зміниться відповідь, якщо пластинку повернути на 45° так, щоб напрямком її оптичної осі збігався із площиною максимального пропускання поляризатора?

1. Розглянемо випадок, коли між схрещеними поляризатором П та аналізатором А розміщено пластинку $\lambda/2$ (рис. 8.12).

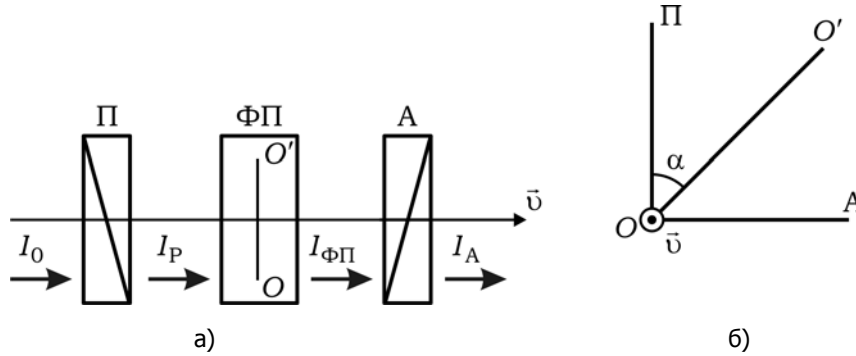


Рис. 8.12. Схема аналізу стану поляризації оптичного променя

Поляризатор пропускає половину інтенсивності падаючого природного світла з певною орієнтацією вектора \vec{E} : $I_P = \frac{I_0}{2}$ або амплітуди $A_P = \sqrt{\frac{I_0}{2}}$. Після проходження пластинки $\lambda/2$ світло отримує лінійну поляризацію із площиною коливань, повернутою на кут $2\alpha = 90^\circ$, тобто площина коливань вектора \vec{E} цієї хвилі збігається з головним перерізом аналізатора, який пропустить все падаюче світло, тому $I_A = I_P = I_0/2$.

2. У випадку пластинки $\lambda/4$ поляризатор знову пропустить половину падаючого світла. У пластинці хвиля розділяється на звичайну та незвичайну хвилі з однаковими амплітудами $A_{\text{ФП}} = A_P \cos 45^\circ$. Це й є амплітуда циркулярно поляризованого світла. Аналізатор пропускає один компонент цієї хвилі (орієнтація якого збігається з головним перерізом аналізатора), тобто $A_A = A_{\text{ФП}} = A_P \cos 45^\circ$, а інтенсивність на виході системи дорівнює

$$I_A = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 45^\circ = 0,25 I_0.$$

Якщо пластинку будь-якої товщини ($\lambda/2$ або $\lambda/4$) повернути на 45° таким чином, щоб напрямок її оптичної осі збігався із площиною пропускання поляризатора, то світло проходить пластинку як одна незвичайна хвиля, а потім повністю затримується аналізатором.

8.3.30. Циркулярно поляризоване світло падає на систему із двох $\lambda/4$ -фазових пластинок, оптичні осі яких утворюють кут α між собою. Якою буде поляризація світла на виході із системи, якщо $\alpha = 0^\circ$; 45° ; 90° ? Укажіть напрямок коливань вектора \vec{E} . Чи можна стверджувати, що дія двох $\lambda/4$ -фазових пластинок еквівалентна дії $\lambda/2$ -фазової пластинки?

1. Кут $\alpha = 0^\circ$. Дія двох пластинок $\lambda/4$, оптичні осі яких орієнтовані паралельно, дає сумарну різницю ходу $\Delta = \lambda/2$. На виході з такої системи отримуємо знову циркулярно поляризоване світло, але напрямок обертання змінюється на протилежний.

2. Кут $\alpha = 45^\circ$. Перша пластинка перетворює циркулярно поляризоване світло на лінійно поляризоване, напрямок коливань вектора \vec{E} якого утворює кут у 45° з оптичною віссю першої пластинки. Тому в другу пластинку лінійно поляризоване світло входить з напрямком коливань, що збігається з напрямком її оптичної осі, тому виходить з неї без зміни стану поляризації.

3. Кут $\alpha = 90^\circ$. Перша пластинка перетворює світло на лінійно поляризоване. У силу того, що оптичні осі пластинок перпендикулярні, хвиля, що пройшла першу пластинку як звичайна, у другій поширюється як незвичайна, і навпаки. Тому друга пластинка лінійно поляризоване світло перетворить на циркулярно поляризоване, але якщо перша вносила різницю ходу $\Delta_1 = \lambda/4$, то друга $\Delta_2 = -\lambda/4$, начебто ліквідує дію першої. Отже, $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$.

Висновок: дві пластинки $\lambda/4$ можна розглядати як одну пластинку $\lambda/2$ тільки у випадку, коли їхні оптичні осі паралельні.

8.3.31. Між поляризатором і аналізатором розташували пластинку, вирізану з кварцу перпендикулярно до оптичної осі. Систему освітлюють паралельним пучком білого світла. Чому за будь-якого повороту аналізатора поле зору залишається забарвленим?

Якби між схрещеним поляризатором і аналізатором розмістили пластинку з іншого анізотропного кристала (не кварцу), вирізану перпендикулярно до оптичної осі, то світло через систему не пройшло б. Проте кварц є оптично активною речовиною, яка обертає площину поляризації на деякий кут, який залежить від λ . Тому світло з різними довжинами хвиль проходить за будь-якої орієнтації аналізатора.

Залежність інтенсивності світла, що пройшло через систему, від λ за фіксованого положення аналізатора визначає забарвлення поля зору.

8.3.32. *Опишіть конструкцію і принцип роботи компенсатора Бабіне та компенсатора Солейля.*

Компенсатор – це оптичний пристрій, призначений для аналізу поляризованого світла. Він дозволяє скомпенсувати до нуля (або доповнити до π) будь-яку різницю фаз між двома ортогональними коливаннями.

Існують декілька типів компенсаторів, розглянемо їх.

Компенсатор Бабіне складається з двох клинів, вирізаних із анізотропного кристала (кварц, ісландський шпат тощо) таким чином, що оптичні осі в них взаємно перпендикулярні (рис. 8.13, а). У компенсаторі цього типу промінь, звичайний у верхньому клині, стає незвичайним у нижньому, і навпаки.

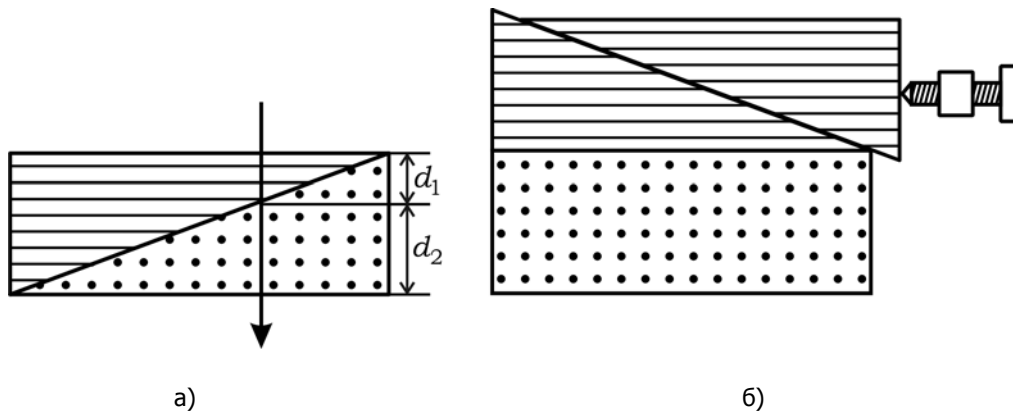


Рис. 8.13. Конструкції компенсатора Бабіне (а) і компенсатора Солейля (б)

Отже, у тому місці, де світло проходить однакові товщини обох клинів, між променями не виникає ніякої різниці фаз. У будь-якому іншому місці, де світло пройде товщину d_1 одного клина і товщину d_2 другого, між променями виникає відповідна різниця фаз. Залежно від місця, у якому світло проходить через клини, можна отримати будь-яку різницю фаз. Недоліком компенсатора Бабіне є необхідність працювати з вузькими пучками світла.

Компенсатор Солейля складається із двох кварцових клинів, оптичні осі яких паралельні, і кварцової плоско-паралельної пластини, вісь якої перпендикулярна до осі клинів (рис. 8.13, б). Верхній клин може поступально переміщатись за допомогою мікрометричного гвинта. При цьому змінюється сумарна товщина клинів, яка порівнюється із товщиною пластинки, і променям можна надати будь-якої потрібної різниці фаз.

8.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. На плоско-паралельну пластинку з одновісного від'ємного кристала падає плоска монохроматична хвиля під кутом φ . Оптична вісь кристала лежить у площині падіння й утворює кут α з поверхнею пластинки. Користуючись принципом Гюйгенса, визначте (побудуйте) напрямки поширення звичайного та незвичайного променів.

Розв'язання. Представимо падаючий пучок двома крайніми променями 1 і 2 (рис. 8.14).

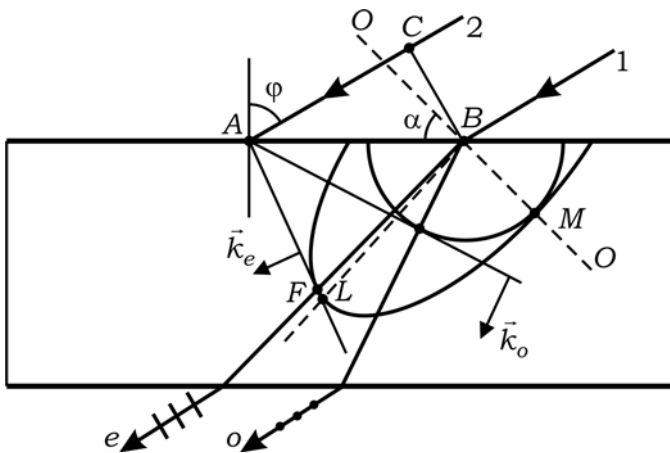


Рис. 8.14. Побудова Гюйгенса до прикладу 8.1

В ізотропному середовищі (над пластинкою) фронт плоскої хвилі буде перпендикулярним до цих променів. Промінь 1 першим приходять на поверхню пластинки в точці B , яка згідно з принципом Гюйгенса служить точковим джерелом випромінювання в кристалі вторинних звичайних і незвичайних хвиль. Через точку B проводимо оптичну вісь кристала OO' під кутом α до поверхні пластинки. За час поширення променя 2 від точки C до точки A , яка розташована на поверхні кристала, навколо точки B виникають вторинні хвилі зі сферичним фронтом для звичайної хвилі та фронтом у вигляді еліпсоїда обертання для незвичайної хвилі. Будемо коло радіусом $BM = AC/n_o$ із центром у точці B для фронту звичайної хвилі та еліпс з малою піввіссю $BM = AC/n_o$ уздовж оптичної осі кристала і великою піввіссю $BL = AC/n_e$ для фронту незвичайної хвилі. Із точки A проводимо дотичні до кола та еліпса, які й будуть хвильовими фронтами для звичайного та незвичайного променів, відповідно. Напрямки поширення звичайного і незвичайного променів у кристалі визначаються відповідно лініями, що проходять через точки дотику проведених із точки A дотичних до кола та еліпса.

Перпендикуляр, проведений до лінії KL , покаже напрямок поширення фронту плоскої незвичайної хвилі (\vec{k}_e). Із точки A проводимо промені, паралельні звичайному та незвичайному променям, що виходять із точки B . На виході з нижньої по-

верхні пластинки всі промені йдуть паралельно падаючим променям 1 і 2. Звичайний промінь буде лінійно поляризованим у площині, яка перпендикулярна до площини падіння, а незвичайний – у площині падіння.

Приклад 8.2. Кварцова пластинка, яка має товщину 0,5 мм і вирізана паралельно оптичній осі, розташована між поляризатором та аналізатором. Оптична вісь пластинки становить кут 45° із площиною пропускання поляризатора. За яких довжин хвиль в інтервалі (0,5–0,6) мкм інтенсивність світла на виході системи не залежатиме від повороту аналізатора? Показник подвійного променезаломлення становить $n_e - n_o = 0,008$.

Розв'язання. Кварцова пластинка, яка вирізана паралельно оптичній осі, є фазовою пластинкою. Оскільки $\alpha = 45^\circ$, величина $E_e = E_o$. Для того, щоб інтенсивність світла на виході аналізатора при повороті останнього була постійною, необхідно, щоб світло, яке падає на нього, задовольняло умову

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \pi m = \frac{\pi}{2}(1 + 2m). \quad (8.13)$$

Оскільки у спектральному діапазоні (0,5–0,6) мкм можливе існування кількох довжин хвиль, для яких кварцова пластинка задовольняє умову (8.13), то спочатку визначимо діапазон можливих значень m .

Для $\lambda_1 = 0,5$ мкм отримуємо

$$m_{\max} = \frac{2(n_e - n_o)d}{\lambda_1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 0,008 \cdot 500}{0,5} - \frac{1}{2} = 17,5.$$

Насправді, $m_{\max} = 17$, тому що: по-перше, m – число ціле, а по-друге, $m_{\max} \neq 18$, оскільки за $m_{\max} = 18$ величина $\lambda < 0,5$ мкм, що виходить за межі інтервалу, визначеного умовою прикладу.

Для $\lambda_1 = 0,6$ мкм отримуємо $m_{\min} = 14,5$. Насправді, $m_{\min} = 15$, тому що m – число ціле і $m_{\min} \neq 14$, оскільки за $m_{\min} = 14$ величина $\lambda > 0,6$ мкм, що виходить за межі визначеного в умові діапазону.

Отже, у спектральному діапазоні (0,5–0,6) мкм для трьох довжин хвиль кварцова пластинка буде задовольняти умову (8.13), коли інтенсивність світла на виході системи не залежатиме від повороту аналізатора. Ці довжини хвиль визначаємо за формулою

$$\lambda = \frac{4(n_e - n_o)d}{2m + 1},$$

де $m = 15, 16, 17$, і їх значення відповідають величинам 0,58; 0,55; 0,51 мкм.

Зауваження: Може виникнути запитання: чому при розв'язуванні цього прикладу не використали умову (8.6), яка визначає $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -ФП, що перетворює світло на циркулярно поляризоване? Адже в цьому випадку обертання аналізатора, що роз-

ташований після ФП, не призводить до зміни інтенсивності світла. Це так, але умова (8.13) містить умову (8.6), не розділяючи при цьому циркулярно поляризоване світло на ліво- та правополяризоване світло, аналізатор як і око не розрізняє їх.

Визначати $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -фазову пластинку умовою (8.13) не коректно.

Приклад 8.3. Світло проходить через систему з двох схрещених поляризаторів, між якими розташована фазова пластинка. Її оптична вісь становить кут 45° із площинами пропускання поляризаторів. За якої мінімальної товщини фазової пластинки світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 643$ нм буде проходити через цю систему з максимальною інтенсивністю, а світло з $\lambda_2 = 564$ нм буде практично затримане, якщо для обох довжин хвиль величина $n_e - n_o = 0,09$?

Розв'язання. Нагадаємо, що на практиці використовують переважно фазові пластинки трьох типів: 1) чвертьхвильові $\lambda/4$ -ФП, ознакою яких є умова $d(n_e - n_o) = \frac{\lambda}{4}m$, де $m = 1, 3, 5 \dots$ – непарні числа; 2) напівхвильові $\lambda/2$ -ФП, ознакою яких є умова $d(n_e - n_o) = \frac{\lambda}{2}m$, де $m = 1, 3, 5 \dots$ – непарні числа; 3) ФП у цілу довжину хвилі (λ -ФП), ознакою яких є умова $d(n_e - n_o) = \frac{\lambda}{2}m$, де $m = 2, 4, 6 \dots$ – парні числа.

Оптична схема, яка найбільш повно відповідає умові прикладу, наведена на рис. 8.11. Розгляд оптичних процесів у ній приводить до висновку, що для максимального пропускання ФП має бути $\lambda/2$ -ФП (m – непарне), а для мінімального пропускання – пластинкою в цілу довжину хвилі (m – парне). При цьому, оптична різниця ходу для обох випадків однакова $\Delta_1 = \Delta_2$. З останнього випливає, що

$$m_1 \cdot \lambda_1 / 2 = m_2 \cdot \lambda_2 / 2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{643}{564} = 1,14.$$

Величина 1,14 являє собою відношення найменших значень парного числа m_2 до непарного числа m_1 . Запишемо такий ряд і шляхом підбору знайдемо величини m_1

$$\text{та } m_2 : \frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{1}; \frac{4}{3}; \frac{6}{5}; \frac{8}{7} = 1,14 \Rightarrow m_2 = 8; m_1 = 7.$$

$$\text{Таким чином, } d = \frac{m_1 \lambda_1}{2(n_e - n_o)} = \frac{m_2 \lambda_2}{2(n_e - n_o)} = 25 \text{ мкм}.$$

Приклад 8.4. Вузкий пучок природного світла з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм падає нормально на поверхню призми Волластона, зробленої з ісландського шпату, як показано на рис. 8.15. Оптичні осі обох частин призми взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут φ між напрямками пучків за призмою, якщо кут $\theta = 30^\circ$.

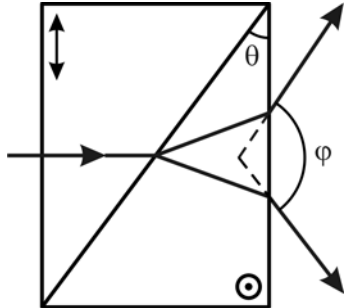


Рис. 8.15. До умови прикладу 8.4

Розв'язання. Неполаризоване світло в одновісному кристалі поділяється на звичайну (o) та незвичайну (e) світлові хвилі. Утворені промені лінійно поляризовані: звичайний – перпендикулярно до площини головного перерізу кристала (поляризація 1 на рис. 8.16), незвичайний – у площині головного перерізу (поляризація 2). Орієнтація оптичної осі кристала в лівій половині призми Волластона така, що обидва промені поширюються в одному напрямку просторово не розділяючись, але при цьому швидкість їх поширення різна. Для звичайного променя ця швидкість становить $v_o = \frac{c}{n_o}$, для незвичайного – $v_e = \frac{c}{n_e}$.

Поляризація 1, характерна для звичайного променя у лівій половині призми, у правій половині відповідає незвичайному променю. Тобто поширюватись він буде вже з іншою швидкістю. Таким чином, на межі двох половинок призми відбувається заломлення. Оскільки для даного кристала $n_o > n_e$ (від'ємний кристал), то кут заломлення для поляризації 1 буде більшим за кут падіння і промінь відхилиться вгору. На противагу цьому, промінь з поляризацією 2 відхилиться вниз.

Проведемо розрахунок кута відхилення ϕ_1 для променя з поляризацією 1. На довжині хвилі $\lambda = 589$ нм для ісландського шпату $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$. Закон заломлення в даному випадку виконується тільки наближено, оскільки незвичайний промінь йому не підпорядковується $n_o \sin \alpha_1 \approx n_e \sin \beta_1$. Кут падіння становитиме $\alpha_1 = \theta = 30^\circ$. Звідси $\beta_1 \approx 33,9^\circ$. Із трикутника ΔABC (рис. 8.17) $180^\circ = \theta + (90^\circ - \beta_1) + (90^\circ + \beta_2)$. Тому $\beta_2 = \beta_1 - \theta \approx 3,9^\circ$. Заломлення на вихідній грані призми опишемо законом $n_e \sin \beta_2 = \sin \alpha_2$. Звідси кут відхилення становитиме $\phi_1 \equiv \alpha_2 \approx 5,8^\circ$.

Подібним чином знайдемо кут відхилення для променя з поляризацією 2: $\phi_2 \approx 5,6^\circ$. Кут ϕ між поляризованими променями на виході дорівнює $\phi = \phi_1 + \phi_2 = 11,4^\circ$.

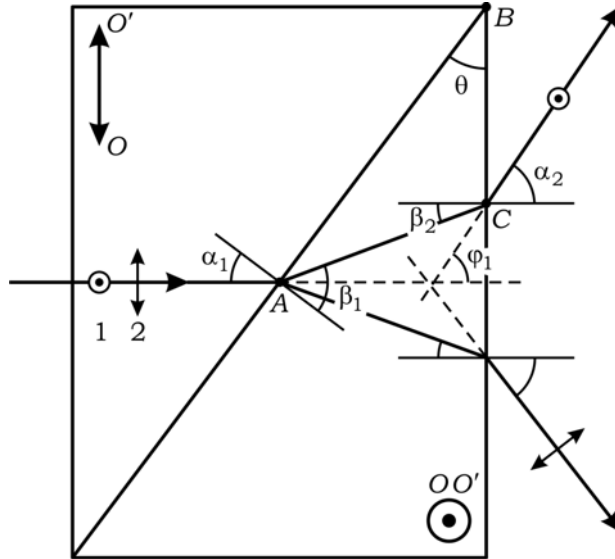


Рис. 8.16. До розв'язання прикладу 8.4

Приклад 8.5. Дві досить товсті пластинки вирізані із ісландського шпату так, що оптична вісь кристала кожної утворює з бічною поверхнею кут у 45° . Товщина першої пластинки d_1 , другої – $d_2 = d_1/2$. На розташовані одна за одною пластинки падає нормально вузький пучок природного світла. Що буде видно на екрані, розташованому за ними, якщо: а) оптичні осі обох пластинок паралельні; б) друга пластинка повернута навколо оптичної осі системи відносно першої на 180° ; в) на 90° ; г) на довільний кут α , зокрема, на кут $\alpha = 45^\circ$. Зобразіть хід променів через цю систему. Знайдіть співвідношення інтенсивностей пучків, що утворюються, коли друга пластинка повернута відносно першої на кут α .

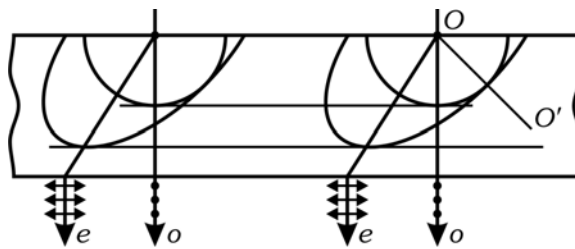


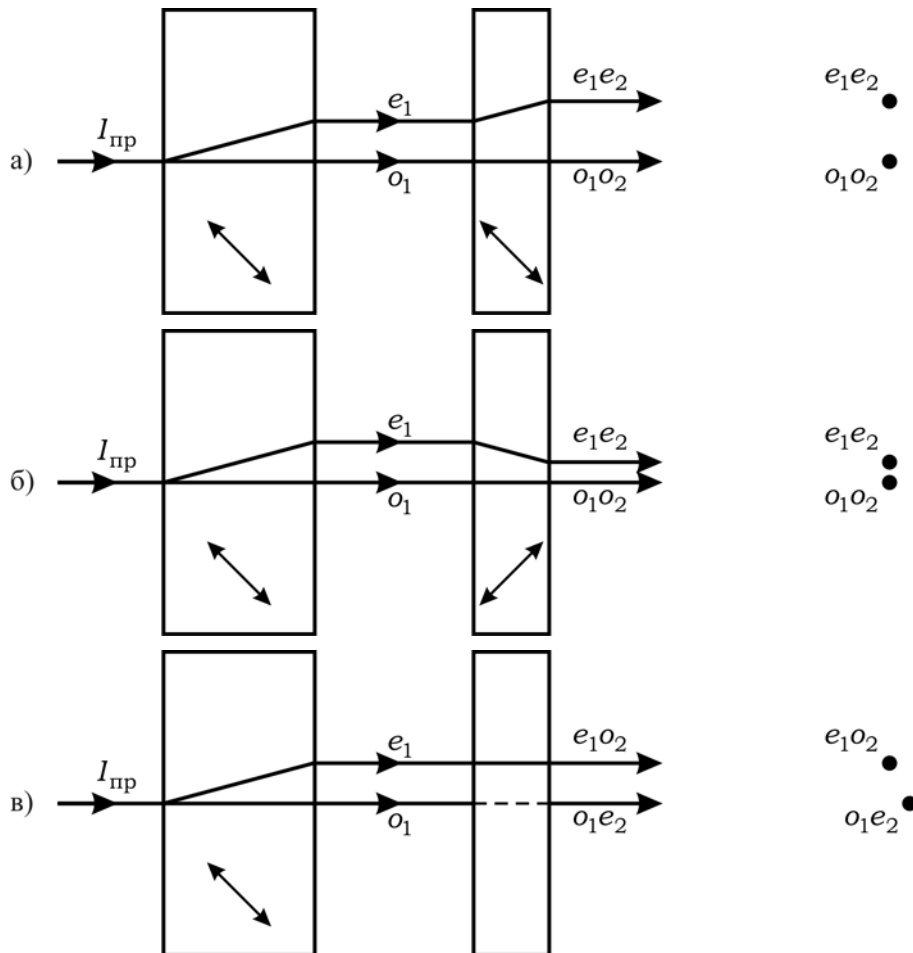
Рис. 8.17. Побудова Гюйгенса для випадку, коли кристал від'ємний, а його оптична вісь утворює кут 45° з поверхнею пластинки

Розв'язання. Виконаємо побудову Гюйгенса для випадку, коли кристал від'ємний (ісландський шпат), а його оптична вісь утворює кут 45° з поверхнею пластинки

ки (рис. 8.17). На виході з пластинки утворюються два паралельних пучки, причому для незвичайного променя вектор \vec{E} лежить у площині рисунка, а для звичайного – перпендикулярно до цієї площини.

а) Якщо світло падає на другу пластинку, оптична вісь якої паралельна до оптичної осі першої, то верхній промінь на рис. 8.18, а проходить як незвичайний і через другу пластинку, тому що його вектор \vec{E} лежить у площині головного перерізу цієї пластинки. Нижній промінь на рис. 8.18, а залишається звичайним і в другій пластинці та проходить без відхилення обидві пластинки. На екрані утворюються дві світліх цятки однакової інтенсивності, адже падаючий на першу пластинку промінь був природним.

б) Якщо друга пластинка повернута відносно першої на 180° , то обидва промені залишаються, як і в попередньому випадку, незвичайним і звичайним, але незвичайний промінь відхиляється не вгору, а вниз (рис. 8.18, б).



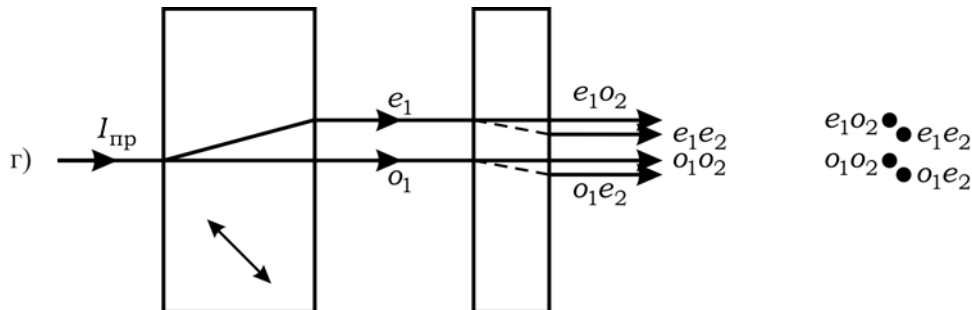


Рис. 8.18. Заломлення світла у двох пластинках ісландського шпату: пластинки орієнтовані однаково (а); друга пластинка повернута відносно напрямку падаючого променя на кут π (б), на кут $\pi/2$ (в) і на кут $\pi/4$ (г) – до прикладу 8.5

в) Тепер оптична вісь другої пластинки орієнтована перпендикулярно до площини рисунка, тому верхній промінь проходить верхню пластинку як звичайний і не відхиляється нею. Нижній промінь поширюється в цій пластинці як незвичайний, відхиляється у площині, через яку проходить оптична вісь, тобто перпендикулярно до площини рисунка (рис. 8.18, в).

г) Нехай друга пластинка повертається на довільний кут α відносно першої. У цьому випадку кожен із променів у другій пластинці поділяється на два, на екрані утворюються чотири цятки, але їх інтенсивності не будуть однаковими. Якщо амплітуди на виході з першої пластинки будуть однаковими $E_o = \sqrt{I/2}$, $E_e = \sqrt{I/2}$, то тепер для верхнього пучка інтенсивності на виході з другої пластинки будуть $E_{eo} = E_e \sin \alpha$; $E_{ee} = E_e \cos \alpha$ для нижнього пучка амплітуди на виході з другої пластинки дорівнюватимуть $E_{oo} = E_o \cos \alpha$, $E_{oe} = E_o \sin \alpha$. Їх інтенсивності запишуться як $I_{eo} = \frac{I}{2} \sin^2 \alpha$, $I_{ee} = \frac{I}{2} \cos^2 \alpha$, $I_{oo} = \frac{I}{2} \cos^2 \alpha$, $I_{oe} = \frac{I}{2} \sin^2 \alpha$.

При обертанні другої пластинки відносно першої на екрані спостерігатимуться дві нерухомі цятки oo та eo на певній відстані x одна від одної, навколо них будуть обертатись по колу з радіусом $x/2$ цятки oe та ee . Коли інтенсивність однієї нерухомої цятки максимальна ($\alpha = 0, \pi, \dots$), друга зникає, і навпаки, коли $\alpha = \pi/2, 3\pi/2, \dots$, інтенсивність рухомих цяток змінюється так, що сумарна інтенсивність кожної пари залишається рівною $I/2$.

Приклад 8.6. Паралельний пучок білого світла проходить через систему схрещених поляризатора і аналізатора та пластинку з ісландського шпату, розташовану між ними. Пластинка вирізана паралельно до оптичної осі кристала, яка утворює кут у 45° з головними перерізами поляризатора та аналізатора. Це світло проектується на вхідну щілину дифракційного спектрографа, що має дифракційну ґратку з $N_0 = 500$ штр/мм і камерний об'єктив із фокусною відстанню в 1 м. Який спектр буде спостерігатись на екрані у фокусній площині об'єктива?

Скільки темних смуг буде спостерігатись на екрані на відстані від 29,45 см до 34,35 см від центрального білого максимуму? Товщина пластинки $d = 0,1$ мм, показники заломлення для однієї довжини хвилі (λ_1) величини $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$; для другої довжини хвилі (λ_2) величини $n_o = 1,653$, $n_e = 1,484$.

Розв'язання. За умовою прикладу поляризатор і аналізатор схрещені, а напрямок оптичної осі утворює з їх напрямками максимального пропускання кут у 45° , тому розподіл інтенсивності залежно від λ на виході з аналізатора буде згідно

$$\text{з (8.9) дорівнювати } I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2}, \text{ де } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d .$$

Якщо світло від неперервного джерела світла проходить через систему поляризатор – кристалічна пластинка – аналізатор і спрямовується на вхідну щілину спектрального приладу, на екрані утворюється т. зв. каналчастий спектр, у якому інтенсивність змінюється у вигляді послідовних максимумів і мінімумів. Для визначення кількості темних смуг на певній ділянці спектра необхідно знайти інтервал довжин хвиль, що припадає на цю ділянку. Умовою утворення дифракційного максимуму для певної довжини хвилі є $d \sin \theta = p \lambda$, тут d – стала дифракційної ґратки, θ – кут дифракції, p – порядок спектра. У нашому випадку $d = 1/N_0$, $\sin \theta = \Delta x / f$.

Тоді менше значення довжини хвилі $\lambda_1 = \frac{d \sin \theta}{p} = \frac{\Delta x_1}{p N_0 f} = \frac{589 \text{ нм}}{p}$, а більше –

$$\lambda_2 = \frac{\Delta x_2}{p N_0 f} = \frac{687 \text{ нм}}{p} .$$

За $p = 1$ ці довжини хвиль відповідають жовтій і червоній ділянкам спектра першого порядку. Для визначення кількості темних смуг підрахуємо різницю ходу для лівого та правого країв ділянки спектра.

За умовою задачі мінімуми утворюються за різниці ходу $m \lambda = d (n_o - n_e)$. Тоді

$$\text{перша довжина хвилі на цій різниці ходу укладається } m_1 = \frac{d (n_{o1} - n_{e1})}{\lambda_1} = 29,2 \text{ раза,}$$

$$\text{а друга довжина хвилі – } m_2 = \frac{d (n_{o2} - n_{e2})}{\lambda_2} = 24,6 \text{ раза. Очевидно, на цій ділянці}$$

спектра будуть спостерігатись п'ять темних смуг 25, 26, 27, 28 та 29 порядків.

9. ПОЛЯРИЗОВАНЕ СВІТЛО

9.1. Короткі теоретичні відомості

• Поляризація світла – це фізична характеристика оптичного випромінювання, яка описує поперечну анізотропію хвиль, тобто нееквівалентність різних напрямків у площині, що перпендикулярна світловому променю. Оскільки вектори \vec{E} і \vec{H} електромагнітного поля перпендикулярні один до одного, то для повного опису стану поляризації світлового променя обирається один із векторів, зазвичай це вектор \vec{E} (світловий вектор).

Таким чином, поляризація світла вказує на упорядкування просторового положення площини коливань світлового вектора \vec{E} відносно деякої початкової в просторі лінії $a - a$, тобто упорядкування характеру зміни значень кута φ (рис. 9.1).

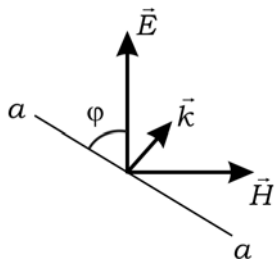


Рис. 9.1. До визначення поляризації світла

Природне світло можна представити у вигляді потоку великої кількості цугів світлових хвиль з випадковим розподіленням орієнтації площин коливань вектора \vec{E} . При цьому кут φ є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 2π (рис. 9.2, а). Таке світло називають *неполяризованим*, або *природним*.

• Розрізняють такі види поляризації світла:

1. Лінійна, або плоска поляризація: світловий вектор \vec{E} у хвилі коливається в одній незмінній площині ($\varphi = \text{const}$), яка називається *площиною поляризації* (рис. 9.2, б).

2. Часткова поляризація: один із напрямків коливань вектора \vec{E} має перевагу (більшу ймовірність) порівняно з іншими напрямками (рис. 9.2, в). Частково поляризоване світло можна розглядати у вигляді суми природного і лінійно поляризованого світла. Під частково поляризованим світлом можуть розуміти також суміш природного світла з еліптично або циркулярно поляризованим світлом. Можна легко уявити собі такі випадки як суміш лінійно та циркулярно поляризованого світла тощо.

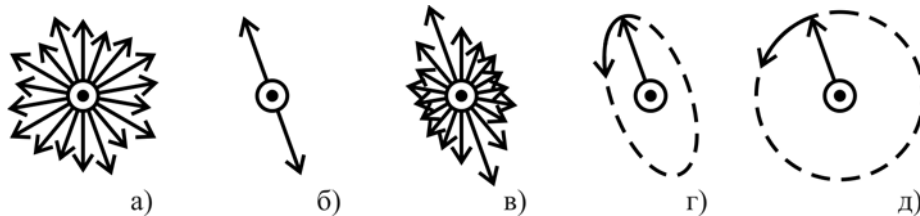


Рис. 9.2. Види поляризації світла: а) природне (неполяризоване) світло; б) лінійна; в) часткова; г) еліптична; д) циркулярна поляризації

3. Еліптична поляризація: площина коливань вектора \vec{E} обертається при поширенні хвилі, а його кінець описує гвинтову лінію навколо напрямку поширення, проекція якої на площину, що перпендикулярна до цього напрямку, є еліпсом (рис. 9.2, г). Площина коливань вектора \vec{E} може обертатися вправо або вліво з круговою частотою хвилі ω .

4. Кругова або циркулярна поляризація: при обертанні площини коливань вектора \vec{E} його кінець описує гвинтову лінію, проекція якої на площину, що перпендикулярна до напрямку поширення хвилі, є колом (рис. 9.2, д). Кругова поляризація є частковим випадком еліптичної.

Поляризація світла відбувається при відбитті та заломленні або при природному подвійному променезаломленні. При падінні природного променя на межу двох діелектриків (n_1, n_2) відбитий промінь стає частково поляризованим з переважним напрямком, що перпендикулярний до площини падіння, а заломлений – частково поляризованим з переважним напрямком, що паралельний до площини падіння (рис. 9.3). Зі зміною кута падіння ступінь поляризації обох променів змінюється.

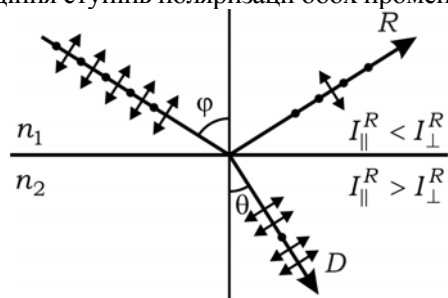


Рис. 9.3. Поляризація світла при відбитті та заломленні

- Азимут поляризації – це кут (α) нахилу вектора \vec{E} до площини падіння.
- Ступінь поляризації характеризує частку лінійно поляризованого світла в частково поляризованому світлі. Ступінь поляризації відбитого R і заломленого D променів розраховується за формулами:

$$P_R = \frac{I_{\max}^R - I_{\min}^R}{I_{\max}^R + I_{\min}^R} = \frac{I_{\perp}^R - I_{\parallel}^R}{I_{\perp}^R + I_{\parallel}^R} = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}}; \quad (9.1)$$

$$P_D = \frac{I_{\max}^D - I_{\min}^D}{I_{\max}^D + I_{\min}^D} = \frac{I_{\parallel}^D - I_{\perp}^D}{I_{\parallel}^D + I_{\perp}^D} = \frac{\frac{1}{2}I_{np}T_{\parallel} - \frac{1}{2}I_{np}T_{\perp}}{\frac{1}{2}I_{np}T_{\parallel} + \frac{1}{2}I_{np}T_{\perp}} =$$

$$= \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel} + T_{\perp}} = \frac{(1 - R_{\parallel}) - (1 - R_{\perp})}{(1 - R_{\parallel}) + (1 - R_{\perp})} = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{2 - (R_{\perp} + R_{\parallel})},$$
(9.2)

де R_{\perp} і R_{\parallel} – часткові енергетичні коефіцієнти відбиття для перпендикулярної та паралельної складових природного світла:

$$R_{\perp} = \left[\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} \right]^2, \quad (9.3)$$

$$R_{\parallel} = \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \theta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \theta)} \right]^2, \quad (9.4)$$

де φ – кут падіння природного світла на межу двох діелектриків (n_1, n_2); θ – кут заломлення (рис. 9.3).

• Закон Брюстера: за кута падіння φ природного світла, що дорівнює куту Брюстера (куту повної поляризації)

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{n_2}{n_1} \right), \quad (9.7)$$

відбитий промінь повністю лінійно поляризований у площині, яка перпендикулярна до площини падіння, а заломлений промінь має найбільший ступінь поляризації з переважним напрямком, який паралельний площині падіння (рис. 9.4). При цьому відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\varphi_B + \theta = 90^\circ. \quad (9.8)$$

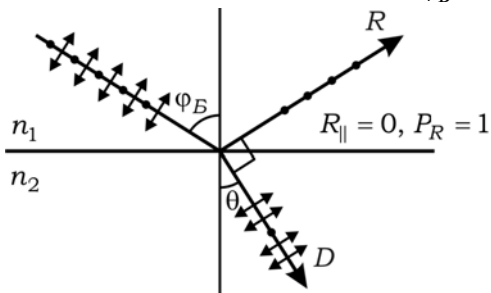


Рис. 9.4. До визначення кута Брюстера

Коли кут падіння дорівнює куту Брюстера, то із формул (9.3), (9.4) і (9.6) випливає, що:

$$R_{\perp B} = \sin^2(\varphi_B - \theta); \quad R_{\parallel B} = 0; \quad R = \frac{1}{2}R_{\perp B}, \quad (9.9)$$

а із формул (9.1) і (9.2):

$$P_R = 1; \quad P_D = \frac{R_{\perp}}{2 - R_{\perp}}. \quad (9.10)$$

• Ступінь поляризації променя, який пройшов через стопу Столетова, що має N плоско-паралельних однакових скляних пластинок, розділених повітряними проміжками, розраховується за формулою

$$P_D = \frac{1 - (1 - R_{\perp B})^{2N}}{1 + (1 - R_{\perp B})^{2N}}, \quad (9.11)$$

де $R_{\perp B}$ визначається формулою (9.9).

• Поляризатор – оптичний елемент, який перетворює світло будь-якого виду поляризації на лінійно поляризоване. Через поляризатор проходять світлові коливання, які паралельні його площині пропускання.

- Аналізатор – поляризатор, який застосовується для аналізу лінійної поляризації світла.
- Аналіз стану поляризації здійснюється за допомогою аналізатора та $\lambda/4$ -пластинки за схемою, наведеною на рис. 9.5.
- Закон Малюса для лінійно поляризованого світла

$$I_A = I_{\text{л.п}} T_A \cos^2 \varphi, \quad (9.12)$$

де I_A – інтенсивність лінійно поляризованого світла на виході аналізатора; $I_{\text{л.п}}$ – інтенсивність лінійно поляризованого світла на вході аналізатора; T_A – коефіцієнт пропускання аналізатора (ураховує відбиття і поглинання світла); φ – кут між площиною поляризації світла, що падає, і площиною пропускання аналізатора.

• Закон Малюса для природного світла: якщо на поляризатор падає природне світло, то інтенсивність $I_{\text{П}}$ лінійно поляризованого світла на виході поляризатора дорівнює

$$I_{\text{П}} = \frac{1}{2} T_{\text{П}} I_0, \quad (9.13)$$

де $T_{\text{П}}$ – коефіцієнт пропускання поляризатора; I_0 – інтенсивність природного світла на вході поляризатора. Інтенсивність світла на виході системи поляризатор–аналізатор з урахуванням (9.13) дорівнює

$$I_A = \frac{1}{2} T_{\text{П}} T_A I_0 \cos^2 \varphi, \quad (9.14)$$

де T_A – коефіцієнт пропускання аналізатора; φ – кут між площинами пропускання поляризатора та аналізатора.

- Чвертьхвильова фазова пластинка $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ -ФП) – оптичний елемент, який у випадку,

коли його оптична вісь становить кут у 45° із площиною поляризації падаючого лінійно поляризованого світла, перетворює його на світло, поляризоване по колу.

9.2. Запитання та відповіді

9.2.1. *Яке світло називається природним?*

Природне світло – це сукупність світлових хвиль з усіма можливими напрямками коливань, які існують одночасно або швидко і безладно змінюють один одного. Ця сукупність статистично симетрична відносно променя, тобто характеризується невпорядкованістю (хаотичністю) напрямків поляризації коливань.

Звертаємо увагу, що у визначенні природного світла ніяких згадувань про його спектральний склад або інших його характеристик немає.

9.2.2. *Які типи поляризованого світла Вам відомі?*

Відомі такі типи поляризованого світла: лінійно поляризоване; еліптично поляризоване; циркулярно поляризоване (як різновид еліптично поляризованого світла); частково поляризоване світло – суміш природного світла зі світлом, яке має один із названих вище типів поляризації.

9.2.3. *Суперпозицією яких хвиль може бути представлена світлова хвиля будь-якої поляризації?*

Світлова хвиля будь-якої поляризації може бути представлена як суперпозиція двох незалежних лінійно поляризованих хвиль, у яких площини коливань електричних векторів \vec{E}_x та \vec{E}_y ортогональні. Стан поляризації результуючої хвилі визначається різницею фаз між цими двома хвилями та співвідношеннями їх амплітуд.

9.2.4. *Якими способами лінійно поляризоване світло можна перетворити на циркулярно поляризоване?*

Традиційно циркулярну поляризацію світлу надають за допомогою $\lambda/4$ пластинки. Це ж можна зробити за допомогою ромба Френеля.

9.2.5. *Якими способами природному світлу можна надати лінійної поляризації?*

Лінійну поляризацію світлу надають за допомогою поляризаційних призм, поляроїдних плівок, стопи Столетова.

9.2.6. *Які фізичні явища можуть бути покладені в основу принципів роботи різних типів поляризаторів?*

Для отримання лінійної поляризації використовують:

- явище відбиття і заломлення світла на межі двох діелектриків (стопа Столетова);

- явище подвійного променезаломлення в кристалах (поляризаційні призми);

- явище дихроїзму (поляроїди).

Для отримання кругової поляризації використовують:

- подвійне відбиття променя від оптично менш густого середовища під кутом, більшим за граничний кут повного внутрішнього відбиття (ромб Френеля);

- $\lambda/4$ -фазові пластинки.

9.2.7. *Чим поляризатор відрізняється від аналізатора?*

І поляризатор (П), і аналізатор (А) – це один і той самий оптичний елемент, але виконує різні функції. Головне завдання поляризатора – перетворювати природне

світло на лінійно поляризоване. Функція аналізатора полягає в аналізі стану поляризації світла та визначенні напрямку орієнтації вектора поляризації світла. Поділ на П та А відносний. Якщо в установці, яка складається з П та А, світло пустити в протилежному напрямку, то А буде відігравати роль поляризатора, а П – роль аналізатора.

9.2.8. Яку поляризацію матиме циркулярно поляризоване світло, якщо його пропустити через поляризатор? Як при цьому зміниться інтенсивність світла?

Світло стане лінійно поляризованим. При цьому інтенсивність (якщо знехтувати втратами) зменшиться вдвічі.

9.2.9. Яку поляризацію матиме світло на виході з фазової $\lambda/4$ -пластинки, якщо на неї направити циркулярно поляризоване світло? Як при цьому зміниться інтенсивність світла?

Фазова $\lambda/4$ -пластинка при пропусканні крізь неї світла, поляризованого по колу, виконує дію, обернену до тієї, яку вона виконувала при одержанні світла циркулярної поляризації. Вона вносить додаткову різницю фаз $\pm\pi/2$ між утвореними на виході з $\lambda/4$ -пластинки когерентними звичайним і незвичайним променями, які накладаючись, дають лінійно поляризоване світло, оскільки різниця фаз між такими променями дорівнюватиме 0 або π . Світло стане лінійно поляризованим. Вектор \vec{E} буде коливатись у площині, яка складає кут 45° з головним перерізом фазової пластинки.

Орієнтація площин коливань вектора \vec{E} залежить від того, з додатного чи від'ємного кристала зроблена фазова пластинка, право- чи лівополяризоване світло падає на пластинку. Інтенсивність (якщо знехтувати втратами) залишиться незмінною.

9.2.10. Яку поляризацію матиме світло на виході з фазової $\lambda/4$ -пластинки, якщо на неї падає природне світло? Як при цьому зміниться інтенсивність світла?

У цьому випадку світло на виході з фазової $\lambda/4$ -пластинки складатиметься із сукупності некогерентних звичайного і незвичайного променів, які мають лінійну поляризацію з ортогональним напрямком коливання вектора \vec{E} лише в межах одного цугу. Світло на виході з пластинки залишиться неполяризованим. Інтенсивність при нехтуванні втратами залишиться незмінною.

9.2.11. Яка частка інтенсивності $I_{\text{лінійно}}$ лінійно поляризованого світла (ЛПС) переходить в інтенсивність $I_{\text{циркулярно}}$ циркулярно поляризованого світла (ЦПС) при перетворенні ЛПС на ЦПС за допомогою $\lambda/4$ -пластинки?

При такому перетворенні, якщо не враховувати втрат світла, інтенсивність світла залишається незмінною.

9.2.12. Запропонуйте схему, за якою можна проаналізувати стан (встановити тип) поляризації світла. Які обмеження мають рекомендації, які наведені в ній? Що означає задача: виміряти параметри поляризованого світла?

Аналіз типу поляризації світла виконується за схемою, наведеною на рис. 9.5.

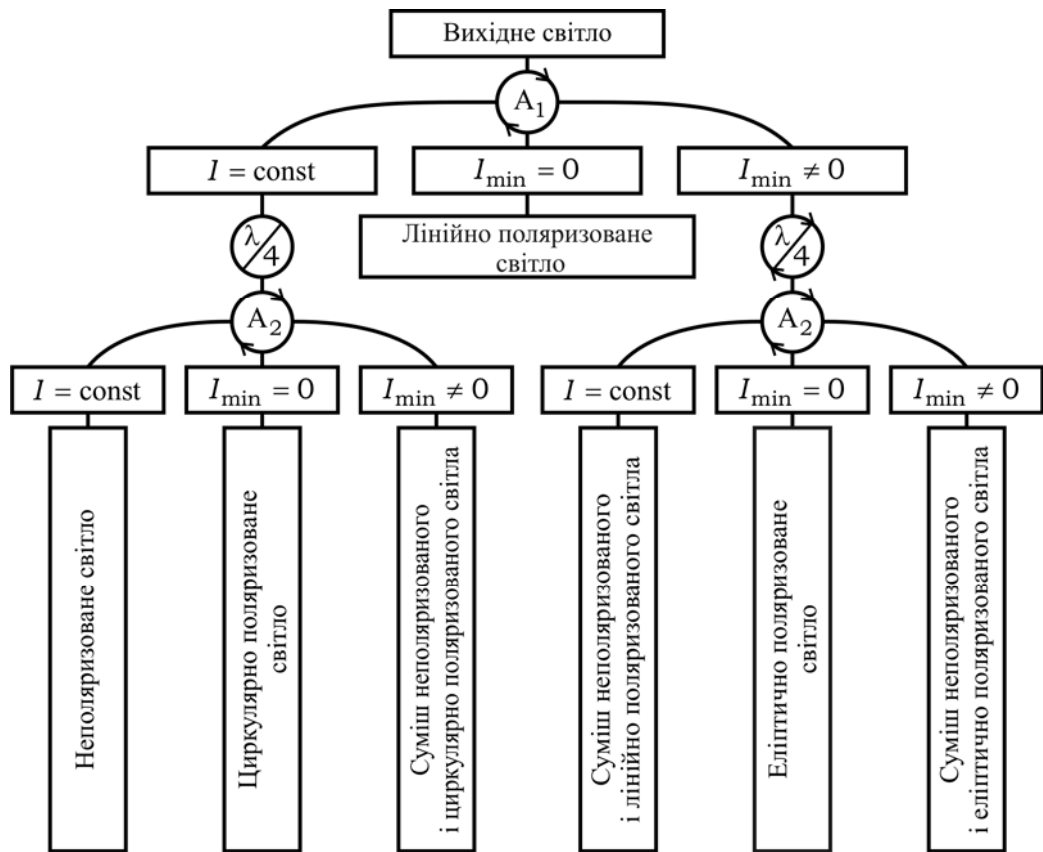


Рис. 9.5. Схема аналізу стану поляризації оптичного променя

При користуванні наведеною схемою треба виходити з того, що світло, поляризація якого аналізується, квазімонохроматичне. Якщо світло біле, треба виділити його окремі монохроматичні компоненти і працювати з ними. У разі, коли встановлено, що світло має еліптичну поляризацію, вимірюють її параметри: нахил великої осі еліпса та відношення його півосей. Для цього використовують аналізатор, $\lambda/4$ -ФП або компенсатор.

У лінійно поляризованого світла визначають кут азимуту поляризації. У світла, яке має змішану поляризацію, вимірюють співвідношення тих компонентів, з яких складається ця суміш – ступінь поляризації.

9.2.13. *Скористайтесь схемою, наведеною на рис. 9.5, щоб відрізнити циркулярно поляризоване світло від природного?*

Треба пропустити світло через аналізатор A_1 і переконатись, що при обертанні A_1 інтенсивність I не змінюється. Тобто світло або циркулярно поляризоване, або

природне, тому що тільки в цих випадках електричний вектор світлової хвилі не має виділеного напрямку коливань. Цю невизначеність розв'язують таким чином: світло, що аналізується, пускають на довільно орієнтовану фазову $\lambda/4$ -пластинку та аналізатор A_2 , який розташований після неї.

Якщо при обертанні аналізатора A_2 можна отримати таке його положення, за якого інтенсивність світла на виході A_2 дорівнює нулю, то світло буде циркулярно поляризованим. Дійсно, у разі циркулярно поляризованого світла фазова $\lambda/4$ -пластинка перетворює його на лінійно поляризоване. Обертання аналізатора A_2 , яке фіксує мінімум інтенсивності світла, підтверджує це.

Якщо при обертанні аналізатора A_2 за будь-якого його положення інтенсивність світла на виході A_2 незмінна, то світло буде неполяризованим (природним). Дійсно, у разі природного світла фазова $\lambda/4$ -пластинка не робить світло поляризованим і обертання аналізатора A_2 "не реагує" на неполяризоване світло: на виході A_2 інтенсивність світла незмінна ($I = \text{const}$).

9.2.14. *Скористайтесь схемою, наведеною на рис. 9.5, щоб відрізнити частково поляризоване світло від еліптично поляризованого?*

Треба пропустити світло через аналізатор A_1 і переконатись, що при обертанні A_1 інтенсивність I змінюється, але в мінімумі не дорівнює нулю. Тобто світло буде або еліптично поляризоване, або частково поляризоване (являє собою суміш природного та лінійно поляризованого). (Також може бути ознакою суміші природного та еліптично поляризованого світла. Цей випадок потребує окремого розгляду). Цю невизначеність розв'язують таким чином: світло, що аналізується, пускають на фазову $\lambda/4$ -пластинку та аналізатор A_2 , який розташований після неї.

Якщо при підборі різних орієнтацій фазової $\lambda/4$ -пластинки обертання аналізатора A_2 може призвести до того, що при деякій орієнтації фазової $\lambda/4$ -пластинки та аналізатора A_2 інтенсивність світла на виході A_2 дорівнює нулю, то світло буде еліптично поляризованим. Дійсно, у разі еліптично поляризованого світла певним чином орієнтована фазова $\lambda/4$ -пластинка може внести додаткову різницю фаз між утвореними на виході з $\lambda/4$ -пластинки когерентними звичайним і незвичайним променями, які накладаючись, дають лінійно поляризоване світло, оскільки різниця фаз між такими променями дорівнюватиме 0 або π . Обертання аналізатора A_2 , яке фіксує мінімум інтенсивності світла, підтверджує це.

Якщо при зміні орієнтації фазової $\lambda/4$ -пластинки та обертанні аналізатора A_2 вдається отримати таку їх орієнтацію, за якої інтенсивність світла на виході A_2 залишається незмінною при обертанні A_2 , то світло являтиме собою суміш природного і лінійно поляризованого світла. Дійсно, у цьому випадку $\lambda/4$ -пластинка на неполяризовану частину світла не впливає, а частину світла, пов'язану з лінійною

поляризацією, перетворює на циркулярно поляризоване світло. Обидві ці частини світла на обертання аналізатора A_2 "не реагують": на виході A_2 інтенсивність світла незмінна ($I = \text{const}$).

9.2.15. *Скористайтеся схемою, наведеною на рис. 9.5, щоб відрізнити природне світло від суміші природного з циркулярно поляризованим світлом?*

За схемою, наведеною на рис. 9.5, треба пропустити світло через аналізатор A_1 і переконатись в тому, що при обертанні A_1 інтенсивність світла за ним не змінюється. Існують три альтернативних варіанти: 1) світло природне; 2) світло циркулярно поляризоване; 3) світло являє собою суміш природного та циркулярно поляризованого. Саме останній варіант, виходячи із запитання, необхідно розглянути. Далі, за згаданою вище схемою, між поляризатором A_1 і аналізатором A_2 розташуємо пластинку $\lambda/4$. Обертання аналізатора A_2 у випадку природного світла не призводить до зміни інтенсивності світла на його виході. Якщо світло є сумішшю природного і циркулярно поляризованого, то обертання аналізатора A_2 показує наявність максимумів і мінімумів. У мінімумі інтенсивність не дорівнює нулю.

9.2.16. *Паралельний пучок досліджуваного світла проходить через аналізатор. Виявилось, що при повороті аналізатора інтенсивність світла, яке пройшло через нього, не змінюється. Яку поляризацію має це світло? Що треба зробити, щоб одержати однозначну відповідь?*

При обертанні аналізатора інтенсивність не змінюється, якщо на нього падає природне або циркулярно поляризоване світло. Для однозначної відповіді перед аналізатором необхідно розташувати фазову пластинку $\lambda/4$, якщо це монохроматичне світло. Природне світло після ФП залишиться природним, а циркулярно поляризоване стане лінійно поляризованим і може загаситися при обертанні аналізатора. Якщо світло біле, треба виділити окремі монохроматичні хвилі.

9.2.17. *Поясніть, у чому полягає фізичне явище дихроїзму, яке покладене в основу принципу роботи широкого класу поляризаторів – поляроїдних пластинок (поляроїдів)?*

Деякі органічні й неорганічні кристали поглинають світло залежно від орієнтації вектора \vec{E} світлової хвилі та від довжини хвилі світла. Це призводить до утворення світла однієї лінійної поляризації та пропускання світла тільки деякої ділянки довжин хвиль. Таке явище називається дихроїзмом. Прикладом кристала, у якому спостерігається дихроїзм, є турмалін. Поглинання в цьому кристалі залежить від стану поляризації світла, що проходить крізь нього. Із пластинки турмаліну товщиною 1 мм виходить майже лінійно поляризований промінь.

Штучно створений в органічних пластинках дихроїзм широко застосовується для виробництва поляроїдів, які призначені для одержання лінійно поляризованого світла.

9.2.18. *Які вимоги покладають на матеріал склеювання двох частинок поляризаційної призми?*

Поляризаційні призми (ПП) бувають двох типів: двопроменеві (ті, на виході з яких два промені, поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах) та однопроменеві (ті, з яких виходить один лінійно поляризований промінь). Поляризаційні призми останнього типу використовують явище повного внутрішнього відбиття (ПВВ) одного із променів на межі поділу частин ПП. Водночас інший промінь, що має інший показник заломлення, через цю межу проходить без ПВВ. Ідея саме такої побудови ПП належить У. Ніколю (1820).

Місце стику двох частин, з яких складається ПП, склеюють канадським бальзамом, що має показник заломлення $n = 1,550$, це значення n лежить між головними значеннями показників заломлення n_o та n_e для звичайного та незвичайного променів у ісландському шпаті.

9.2.19. Пояснить, чому закон Малюса може мати два формулювання:

$I_{\text{вих}} = I_0 \cos^2 \varphi$ та $I_{\text{вих}} = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi$, де $I_{\text{вих}}$ – інтенсивність світла на виході аналізатора А; φ – кут між напрямками OO та $O'O'$ максимального пропускання поляризатора П та аналізатора А (рис. 9.6).

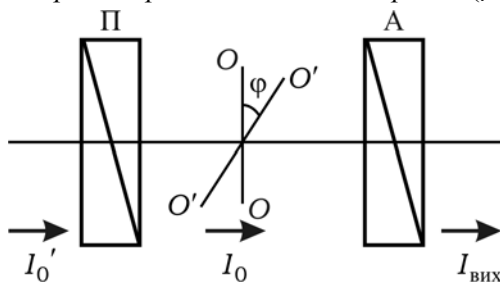


Рис. 9.6. Оптична схема для перевірки закону Малюса (до запитання 9.2.19)

Формулювання закону Малюса у вигляді $I_{\text{вих}} = I_0 \cos^2 \varphi$ наводять у випадку, коли I_0 – інтенсивність лінійно поляризованого світла на вході аналізатора А. Формулювання закону Малюса у вигляді $I_{\text{вих}} = \frac{1}{2} I_0' \cos^2 \varphi$ наводять у випадку, коли I_0' – інтенсивність природного світла на вході поляризатора П. Введення коефіцієнта $\frac{1}{2}$ у закон Малюса для природного світла пов'язане з тим, що при потраплянні природного світла на поляризатор інтенсивність світла на його виході без урахування втрат зменшується в 2 рази.

9.2.20. Чи може бути коефіцієнт пропускання поляризаційної призми, незалежно від її типу, для природного світла більшим за величину 50 %? Чому?

Ні, не може. Це пов'язане з тим, що в поляризаційній призмі, незалежно від її типу та особливостей конструкції, при падінні природного світла на неї відбувається розділення променя на два: звичайний і незвичайний з розподілом інтенсивності в кожному з них 50:50. Один із променів (зазвичай це звичайний промінь) виво-

диться з роботи і працюють з іншим променем. Інтенсивність "робочого" променя не може перевищувати 50 % від інтенсивності падаючого променя.

9.2.21. *Запропонуйте простий і практичний, хоча й не дуже точний метод визначення напрямку максимального пропускання поляризатора.*

Щоб визначити напрямок максимального пропускання поляризатора, можна використати властивості відбитого від межі поділу двох середовищ світла, які впливають із формул Френеля (закону Брюстера). Для цього через досліджуваний поляризатор розглядають будь-яку діелектричну поверхню, від якої відбивається під кутом Брюстера φ_B або під кутом, близьким до φ_B , світло. У світлі, що пройшло через поляризатор в цьому випадку, немає компонента світла \vec{E}_p , який лежить у площині падіння, або воно збіднено на нього. Обертаючи поляризатор, домагаються максимального затемнення світла, що пройшло через нього. Це положення поляризатора відповідає тому, що напрямок максимального пропускання в ньому лежить у площині падіння світла.

9.2.22. *У яких випадках природне світло, відбите від межі поділу двох середовищ світла: а) залишається неполяризованим; б) стає лінійно поляризованим; в) стає частково поляризованим; г) стає еліптично поляризованим?*

Аналіз формул Френеля (див. розділ 5) дозволяє стверджувати, що природне (неполяризоване) світло при відбитті може характеризуватись такими станами поляризації:

- а) при нормальному падінні залишатись неполяризованим;
- б) при падінні під кутом Брюстера $\varphi = \varphi_B$ ставати лінійно поляризованим;
- в) при падінні під кутом $\varphi \neq \varphi_B$, якщо $n_1 < n_2$, і під кутом падіння $\varphi < \varphi_{гр}$, якщо $n_1 > n_2$, ставати частково поляризованим;
- г) при падінні під кутом $\varphi > \varphi_{гр}$, якщо $n_1 > n_2$, ставати еліптично поляризованим.

9.2.23. *В одному напрямку поширюються дві монохроматичні хвилі, але одна поляризована по правому колу, а друга – по лівому. Якою буде результуюча хвиля? Як впливає на результат різниця фаз між ними?*

Хвиля, поляризована по правому колу, характеризується тим, що вектор електричної напруженості $\vec{E}_{пр}$ не змінюється за величиною й обертається із частотою ω за годинниковою стрілкою, якщо дивитись назустріч напрямку поширення світла. Таку хвилю можна представити як суму двох лінійно поляризованих хвиль з різницею фаз $\frac{\pi}{2}$ між ними:

$$\vec{E}_{пр} = E_{1x} \cdot \vec{i} + E_{1y} \cdot \vec{j}, \quad \text{де } E_{1x} = E_0 \cos \omega t, \quad E_{1y} = E_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -E_0 \sin \omega t.$$

Хвилю, поляризовану по лівому колу (напрямок обертання проти годинникової стрілки) записують як:

$$\vec{E}_л = E_{2x} \cdot \vec{i} + E_{2y} \cdot \vec{j}, \quad \text{де } E_{2x} = E_0 \cos \omega t, \quad E_{2y} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin \omega t.$$

Якщо амплітуди хвиль, поляризованих по лівому і правому колах, однакові, і між ними немає різниці фаз, то $\vec{E}_пр + \vec{E}_л = 2E_0 \cos \omega t \cdot \vec{i}$. Тобто їх сума є лінійно поляризованою хвилею з амплітудою $2E_0$, орієнтованою вздовж осі X .

Коли між цими циркулярно поляризованими хвилями є різниця фаз δ (урахуємо її у хвилі, поляризованій по лівому колу: $\vec{E}_л = E_0 \cos(\omega t + \delta) \cdot \vec{i} + E_0 \sin(\omega t + \delta) \cdot \vec{j}$), то сумарне коливання записується як:

$$\vec{E}_пр + \vec{E}_л = 2E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \left\{ \cos \frac{\delta}{2} \cdot \vec{i} + \sin \frac{\delta}{2} \cdot \vec{j} \right\}.$$

Як бачимо, сума двох хвиль є лінійно поляризованою хвилею, як і в першому випадку, з амплітудою $2E_0$, але площина коливань вектора \vec{E} повернута на кут $\frac{\delta}{2}$ відносно осі X .

9.2.24. *Як перетворити циркулярно поляризоване світло в лінійно поляризоване без втрат за інтенсивністю?*

Циркулярно поляризоване світло можна представити як суму двох лінійно поляризованих хвиль з різницею фаз $\pi/2$ між ними. Якщо таке світло пропустити через пластинку $\lambda/4$, різниця фаз між цими компонентами дорівнюватиме $\delta = \pi/2 \pm \pi/2$, Знак \pm в останній рівності обираємо залежно від того, з якого кристала зроблена $\lambda/4$ -ФП. Тому на виході такої ФП отримаємо лінійно поляризоване світло з вектором \vec{E} , орієнтованим під кутом $\pm 45^\circ$ до оптичної осі кристала. При цьому втрати за інтенсивністю виникають лише при відбитті на поверхні пластинки.

9.2.25. *Як перетворити світло, поляризоване по правому колу, на світло, поляризоване по лівому колу, і навпаки?*

Для цього достатньо пропустити світло крізь фазову пластинку $\lambda/2$.

9.2.26. *Як необхідно розташувати $\lambda/4$ -фазову пластинку, щоб з лінійно поляризованого світла одержати світло, поляризоване: а) по правому колу; б) по лівому колу?*

Відповідь залежить від типу кристала, з якого виготовлено фазову пластинку. Припустимо, що це кварцова пластинка, тобто пластинка виготовлена з додатного кристала, у якого $n_e > n_o$. У такому кристалі звичайна хвиля випереджає незвичайну. Якщо в падаючій на пластинку лінійно поляризованій хвилі орієнтувати вектор \vec{E} під кутом 45° до осі OX , як показано на рис. 9.7, а оптичну вісь OO пластинки направити вздовж осі OY , то на виході отримаємо світло, поляризоване по лівому колу. Це дійсно так, оскільки звичайна хвиля (орієнтована вздовж осі OX) випере-

дить незвичайну (з напрямком коливань по осі OY) на $\pi/2$, тому напрямок руху вектора \vec{E} буде від осі OX до осі OY . Коли вектор \vec{E} падаючої хвилі утворює кут $\alpha = 135^\circ$ з віссю OX , напрямок циркуляції буде протилежним (світло буде поляризоване по правому колу).

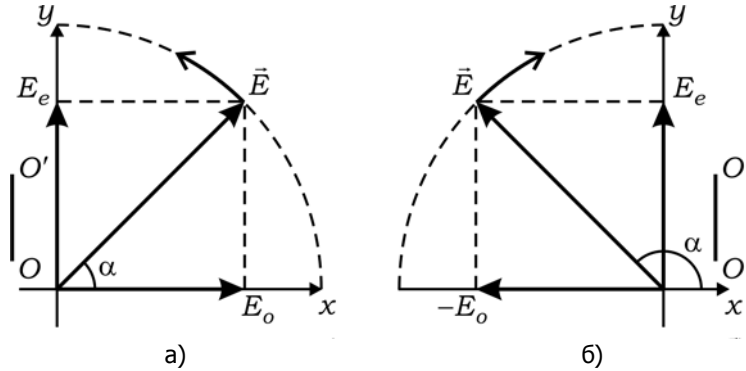


Рис. 9.7. До запитань 9.2.26 та 9.2.28

Зауважимо, що для пластинки, виготовленої з від'ємного кристала, аналогічні міркування призведуть до протилежного результату.

9.2.27. Чи може фазова пластинка перетворювати природне світло на лінійно поляризоване (відігравати роль поляризатора)?

Так, може. Для цього ФП треба нахилити до променя, змінивши кут падіння променя на кут, що не дорівнює нулю. У цьому випадку на виході із ФП будуть існувати два просторово розділені лінійно поляризовані промені з ортогональними напрямками поляризації. Зауважимо, що на практиці такий метод отримання поляризованого світла не використовується через малу різницю між величинами n_o та n_e для більшості матеріалів і незначними товщинами ФП. У цьому разі товщини пластинки не достатньо, щоб просторово розділити промені на значну відстань.

9.2.28. Монохроматичний лінійно поляризований пучок світла проходить крізь фазову пластинку, яка вносить різницю ходу Δ : а) $\Delta = \lambda/4$; б) $\Delta = 3\lambda/4$. Орієнтація вектора \vec{E} падаючої хвилі утворює з оптичною віссю ФП кут $\alpha = 45^\circ$. Чим відрізняються поляризації пучків на виході із ФП цих двох типів?

В обох випадках на виході із ФП отримуємо циркулярно поляризоване світло. Це так, тому що монохроматичний лінійно поляризований пучок світла падає на фазову пластинку, зроблену з кварцу ($n_e > n_o$), оптична вісь якої орієнтована по осі Y (рис. 9.7), а вектор \vec{E} падаючої хвилі утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з віссю X .

Якщо обрано $\lambda/4$ -пластинку, то в ній між компонентами \vec{E}_x та \vec{E}_y виникає різниця фаз $\pi/2$. На виході із ФП у момент $t = 0$ амплітуда E_x максимальна, а амплі-

туда $E_y = 0$. Через чверть періоду $E_x = 0$, а E_y максимальна. Як бачимо, напрямок обертань лівий.

Якщо це $3\lambda/4$ -пластинка, то початковий випадок той самий, а через чверть періоду незвичайна хвиля відстане на $3\pi/2$, отримаємо $(-E_y)$ і протилежний напрямок обертання.

9.2.29. Як природне монохроматичне світло перетворити на еліптично поляризоване зі співвідношенням осей еліпса 1:2?

Для цього природне монохроматичне світло спочатку за допомогою поляризатора перетворюють на лінійно поляризоване. Далі світло має пройти крізь пластинку $\lambda/4$, але при цьому кут α (рис. 9.7) між вектором \vec{E} поляризованої хвилі та віссю X має бути таким, щоб відношення амплітуд E_x і E_y задовольняло умову $E_x/E_y = 0,5$. Це відповідає вимозі $\operatorname{tg} \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha \approx 26,5^\circ$.

9.2.30. Яку функцію в аналізі стану поляризації світла виконують компенсатори?

Щоб відрізнити еліптично поляризоване світло від частково поляризованого, а поляризоване по колу світло від природного, недостатньо використовувати тільки аналізатор. Для цього в дослідження вводять $\lambda/4$ -ФП, відповідним чином її зорієнтувавши. Таким способом аналізують світло, еліптична поляризація якого виникає в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань різної амплітуди з різницею фаз $\pi/2$. Якщо ж еліптична поляризація виникає в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з різницею фаз $\delta \neq \pi/2$, то для перетворення такого світла на лінійно поляризоване потрібно ввести таку додаткову різницю фаз δ' , яка в сумі з δ давала б різницю фаз, що дорівнює π (або $2m\pi$). Для цього замість $\lambda/4$ -ФП використовують спеціальні пристрої, здатні отримувати будь-яке значення різниці фаз, і вони називаються компенсаторами.

Про конструкцію і принцип роботи різних типів компенсаторів див. запитання 8.3.32.

9.2.31. Паралельний пучок досліджуваного світла проходить через аналізатор. Виявляється, що при повороті аналізатора інтенсивність світла, яке пройшло через нього, має максимум і мінімум. Яку поляризацію має це світло? Що треба зробити, щоб одержати однозначну відповідь?

Зміну інтенсивності від I_{\max} до I_{\min} після аналізатора можна отримати у випадках частково поляризованого світла та еліптично поляризованого світла. Для отримання однозначної відповіді перед аналізатором необхідно розмістити компенсатор, що може вносити довільну різницю фаз δ .

Компенсатор не змінить стан тієї частини частково поляризованого світла, яка пов'язана з природним (неполяризованим) світлом, а еліптично поляризоване світло перетворить на лінійно поляризоване, яке можна визначити аналізатором. Викори-

стання компенсатора Солейля дозволяє виміряти різницю фаз δ , яку вносить компенсатор, і кількісно визначити параметри еліптично поляризованого світла.

9.2.32. Використовуючи які фізичні принципи (ефекти), можна побудувати атенюатор (керований послаблювач) оптичного випромінювання?

Побудувати атенюатор (керований послаблювач) оптичного випромінювання можна, використовуючи такі фізичні ефекти:

- залежність коефіцієнта відбиття на межі двох прозорих діелектриків від кута падіння, яка впливає із формул Френеля;
- ефект обернено пропорційній залежності освітленості від квадрата відстані до джерела світла;
- діафрагмування;
- закон Малюса для поляризованого світла: (9.12) – (9.14);
- клиноподібні атенюатори [11, гл. 1, п. 3];
- диск, що обертається, із секторними вирізами [11, гл. 1, п. 3].

Поміркуйте над своїми пропозиціями щодо створення атенюаторів світла.

9.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 9.1. Визначте ступінь поляризації відбитого та заломленого світла, якщо падаюче світло природне?

Розв'язання. Ступінь поляризації визначається як

$$P = \frac{\langle S \rangle_{\max} - \langle S \rangle_{\min}}{\langle S \rangle_{\max} + \langle S \rangle_{\min}}.$$

Тут $\langle S \rangle_{\max}$, $\langle S \rangle_{\min}$ – максимальне та мінімальне значення густини потоку для двох ортогональних напрямків коливань електромагнітної хвилі. Для природного світла значення густини потоку однакове для всіх напрямків коливань вектора \vec{E} . У системі СІ густину потоку можна записати як $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n E_0^2$.

Визначимо спочатку ступінь поляризації для відбитої хвилі, коли $\langle S \rangle_{\max} = \langle S \rangle_{\perp}^r$, $\langle S \rangle_{\min} = \langle S \rangle_{\parallel}^r$. Використавши формули Френеля і те, що для падаючої хвилі $E_{\parallel}^i = E_{\perp}^i = E_0^i / 2$, отримуємо P^r у вигляді

$$P^r = \frac{\frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} - \frac{\text{tg}^2(\varphi - \theta)}{\text{tg}^2(\varphi + \theta)}}{\frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\varphi + \theta)} + \frac{\text{tg}^2(\varphi - \theta)}{\text{tg}^2(\varphi + \theta)}} = \frac{\cos^2(\varphi - \theta) - \cos^2(\varphi + \theta)}{\cos^2(\varphi - \theta) + \cos^2(\varphi + \theta)} = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\theta}{2(\sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \theta)},$$

де φ – кут падіння; θ – кут заломлення.

Очевидно, що для заломленої хвилі $\langle S \rangle_{\max} = \langle S \rangle_{\parallel}^d$, $\langle S \rangle_{\min} = \langle S \rangle_{\perp}^d$, а це дає ступінь поляризації P^d для заломленої хвилі:

$$P^d = \frac{\frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta) \cos(\varphi - \theta)} - \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}}{\frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta) \cos(\varphi - \theta)} + \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}} = \frac{1 - \cos^2(\varphi - \theta)}{1 + \cos^2(\varphi - \theta)} = \frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{1 + \cos^2(\varphi - \theta)}.$$

Приклад 9.2. Граничний кут повного внутрішнього відбиття на межі деякої речовини з повітрям дорівнює 45° . Визначте:

- кут повної поляризації на межі речовина–повітря і повітря–речовина;
- частковий і загальний енергетичні коефіцієнти відбиття при падінні променя під кутом повної поляризації;
- ступінь поляризації заломленого променя, коли відбитий промінь повністю поляризований.

Розв'язання: а) із формули для кута повного внутрішнього відбиття

$$\sin \varphi_{\text{п.в.в}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.15)$$

знаходимо

$$n_1 = \frac{n_2}{\sin \varphi_{\text{п.в.в}}} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1,4142.$$

Тоді за формулою (9.7) визначаємо кут повної поляризації (кут Брюстера) на межі речовина–повітря:

$$\varphi_B = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctg\left(\frac{1}{1,4142}\right) = 35^\circ 16'.$$

Кут повної поляризації при зворотному напрямку поширення світла з повітря в речовину дорівнює

$$\varphi_B = \arctg\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arctg\left(\frac{1,4142}{1}\right) = 54^\circ 44';$$

б) частковий енергетичний коефіцієнт відбиття за $\varphi = \varphi_B$ визначаємо за формулою (9.9):

$$R_{\perp B} = \sin^2(\varphi_B - \theta) = \sin^2(54^\circ 44' - 35^\circ 16') = 0,111.$$

При цьому інший частковий енергетичний коефіцієнт відбиття $R_{\parallel} = 0$, а повний енергетичний коефіцієнт відбиття щодо падаючого природного світла дорівнює $R = 0,5 \cdot 0,111 = 0,055$;

в) ступінь поляризації заломленого променя за $\varphi = \varphi_B$ визначаємо за формулою (9.10):

$$P_D = \frac{R_{\perp}}{2 - R_{\perp}} = \frac{0,111}{2 - 0,111} = 0,059.$$

При цьому ступінь поляризації відбитого променя $P_R = 1$: відбитий промінь повністю поляризований у площині, яка перпендикулярна до площини падіння.

Приклад 9.3. Вузкий пучок природного світла інтенсивності $I_{\text{п}}$ падає під кутом Брюстера на поверхню скляної плоско-паралельної пластинки ($n = 1,5$). Визначте інтенсивності та ступені поляризації променів 1, 2, 3 і 4 (рис. 9.8). Поглинання світла не враховувати.

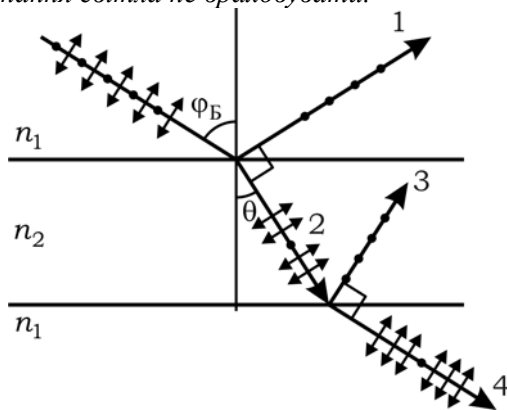


Рис. 9.8. До прикладу 9.2

Розв'язання. Визначимо кут Брюстера на межі повітря–скло за формулою (9.9):

$$\varphi_B = \arctg n = \arctg 1,5 = 56,31^\circ.$$

Кут заломлення θ , він же кут Брюстера на межі скло–повітря, дорівнює

$$\theta = 90^\circ - \varphi_B = 33,69^\circ.$$

Часткові енергетичні коефіцієнти відбиття на межі повітря–скло і скло–повітря знаходимо за формулою (9.9):

$$R_{\perp B} = \sin^2(\varphi_B - \theta) = \sin^2(56,31^\circ - 33,69^\circ) = 0,148 \text{ і } R_{\parallel B} = 0.$$

Падаючий промінь природного світла представимо у вигляді двох некогерентних складових, які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах

$$I_{\text{п}} = I_{\parallel} + I_{\perp}, \quad (9.16)$$

причому $I_{\parallel} = 0,5I_{\text{п}}$ і $I_{\perp} = 0,5I_{\text{п}}$.

Для першого променя складові інтенсивності дорівнюють:

$$I_{\parallel 1} = R_{\parallel} I_{\parallel} = 0 \text{ і } I_{\perp 1} = R_{\perp B} I_{\perp} = R_{\perp B} 0,5I_{\text{п}} = 0,074I_{\text{п}};$$

повна інтенсивність дорівнює

$$I_1 = I_{\parallel 1} + I_{\perp 1} = 0,074I_{\text{п}};$$

ступінь поляризації дорівнює $P_1 = 1$.

Для другого променя згідно із законом збереження енергії на верхній поверхні пластинки

$$I_{\parallel 2} = I_{\parallel} - I_{\perp 1} = I_{\parallel} = 0,5I_{\text{п}}; \quad I_{\perp 2} = I_{\perp} - I_{\perp 1} = 0,5I_{\text{п}} - 0,5I_{\text{п}}R_{\perp\text{Б}} = 0,5I_{\text{п}}(1 - R_{\perp\text{Б}});$$

повна інтенсивність

$$I_2 = I_{\parallel 2} + I_{\perp 2} = 0,5I_{\text{п}} + 0,5I_{\text{п}}(1 - R_{\perp\text{Б}}) = 0,5I_{\text{п}}(2 - R_{\perp\text{Б}}) = 0,926I_{\text{п}}; \quad (9.17)$$

ступінь поляризації

$$P_2 = \frac{I_{\parallel 2} - I_{\perp 2}}{I_{\parallel 2} + I_{\perp 2}} = \frac{1 - (1 - R_{\perp\text{Б}})}{1 + (1 - R_{\perp\text{Б}})} = \frac{R_{\perp\text{Б}}}{2 - R_{\perp\text{Б}}} = 0,080. \quad (9.18)$$

У третьому промені, як і в першому, відсутня паралельна складова, оскільки другий промінь падає під кутом Брюстера на нижню поверхню пластинки (скло-повітря) і повністю лінійно поляризований: $I_{\parallel 3} = 0$ і $P_3 = 1$. Повна інтенсивність

$$I_3 = I_{\perp 3} = R_{\perp\text{Б}}I_{\perp 2} = 0,5I_{\text{п}}(1 - R_{\perp\text{Б}})R_{\perp\text{Б}} = 0,063I_{\text{п}}.$$

Для четвертого променя паралельна складова проходить, як і для другого, без зміни $I_{\parallel 4} = I_{\parallel} = 0,5I_{\text{п}}$. Згідно із законом збереження енергії на нижній поверхні пластинки

$$I_{\perp 4} = I_{\perp 2} - I_{\perp 3} = 0,5I_{\text{п}}[(1 - R_{\perp\text{Б}}) - (1 - R_{\perp\text{Б}})R_{\perp\text{Б}}] = 0,5I_{\text{п}}(1 - R_{\perp\text{Б}})^2,$$

а повна інтенсивність

$$I_4 = I_{\parallel 4} + I_{\perp 4} = 0,5I_{\text{п}} + 0,5I_{\text{п}}(1 - R_{\perp\text{Б}})^2 = 0,5I_{\text{п}}[1 + (1 - R_{\perp\text{Б}})^2] = 0,863I_{\text{п}}$$

і ступінь поляризації

$$P_4 = \frac{I_{\parallel 4} - I_{\perp 4}}{I_{\parallel 4} + I_{\perp 4}} = \frac{1 - (1 - R_{\perp\text{Б}})^2}{1 + (1 - R_{\perp\text{Б}})^2} = 0,159.$$

Приклад 9.4. На шляху паралельного пучка природного світла розташували два схрещені поляроїди (світло через них не проходить). Якщо між ними встановити третій поляризатор, світло через систему починає проходити. Як має бути орієнтований цей поляризатор, щоб інтенсивність світла, яке пройшло через систему з трьох поляризаторів, була максимальною?

Розв'язання. Пронумеруємо поляризатори, як показано на рис. 9.9, а.

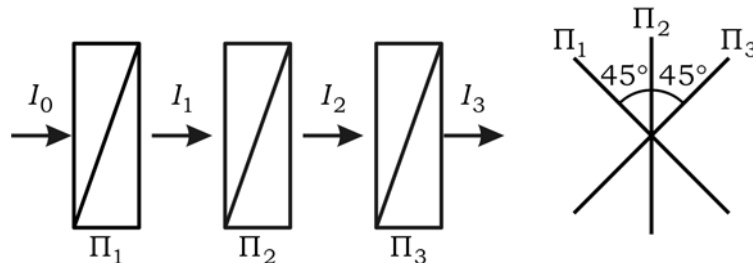


Рис. 9.9. До прикладу 9.2

Поляризатор Π_1 пропускає тільки половину падаючого на нього світла з певною поляризацією $I_1 = \frac{1}{2}I_0$. Якщо напрямки максимального пропускання поляризаторів Π_1 та Π_2 утворюють кут α_1 , то інтенсивність світла на виході поляризатора Π_2 дорівнює $I_2 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2 \alpha_1$. Кут між напрямками максимального пропускання поляризаторів Π_2 та Π_3 буде $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$, а інтенсивність на виході Π_3 дорівнює

$$I_3 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1.$$

Дослідження на екстремум функції $(\cos^2 \alpha_1 \cdot \sin^2 \alpha_1)$ дає $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ (рис. 9.9, б).

Приклад 9.5. Для порівняння яскравостей двох поверхонь при їх освітленні природним світлом одну із них (менш яскраву) розглядають безпосередньо, а другу – через два поляризатори. Яким є відношення яскравостей (інтенсивностей відбитого світла I_2 / I_1), якщо яскравості обох поверхонь здаються однаковими за кута φ між площинами пропускання поляризаторів, що дорівнює 70° ? Кожен поляризатор відбиває і поглинає 10 % енергії світла, яке падає на нього.

Розв'язання. Нехай друга поверхня, що розглядається безпосередньо, має яскравість, яка відповідає інтенсивності природного світла $I_2 = I_{\Pi}$. Перша поверхня створює на виході системи поляризатор–аналізатор інтенсивність $I_1 = \frac{1}{2}T_{\Pi}T_A I_{\Pi} \cos^2 \varphi$, де T_{Π} і T_A – коефіцієнти пропускання поляризатора та аналізатора, відповідно. Тоді

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2}{T_{\Pi}T_A \cos^2 \varphi} = \frac{2}{0,9 \cdot 0,9 \cos^2 70^\circ} = 21,1.$$

Приклад 9.6. На поляризатор падає частково поляризоване світло. Спочатку поляризатор встановлюють так, що його площина пропускання паралельна площині коливань лінійно поляризованої складової світла. Якщо поляризатор повернути на кут 60° , то інтенсивність світла, яке пройшло через нього, зменшиться в 3 рази. Знайдіть відношення інтенсивностей природного I_{Π} і лінійно поляризованого $I_{\text{л.п}}$ світла та ступінь його поляризації.

Розв'язання. У початковому положенні поляризатор за умовою прикладу повністю пропускає лінійно поляризоване світло і половину інтенсивності природного світла. Тому загальна інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор, дорівнює

$$I_1 = 0,5I_{\Pi} + I_{\text{л.п}}.$$

У наступному положенні поляризатора інтенсивність лінійно поляризованого світла, яке пройшло через поляризатор, визначається законом Малюса (9.12). При цьому інтенсивність природного світла також зменшиться у два рази. Тому загальна інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор, дорівнює

$$I_2 = 0,5I_{\Pi} + I_{\text{л.п}} \cos^2 \alpha.$$

З умови прикладу маємо, що $I_1 = 3I_2$, тобто $0,5I_{\Pi} + I_{\text{л.п}} = 1,5I_{\Pi} + 3I_{\text{л.п}} \cos^2 \alpha$. Після перетворень маємо

$$I_{\Pi} = I_{\text{л.п}} (1 - 3 \cos^2 \alpha) \Rightarrow \frac{I_{\Pi}}{I_{\text{л.п}}} = 1 - 3 \cos^2 60^\circ = 0,25.$$

Визначимо ступінь поляризації частково поляризованого світла за формулою (9.1), для чого знайдемо значення максимальної I_{\max} і мінімальної I_{\min} інтенсивностей. Максимальна інтенсивність $I_{\max} = I_1 = 0,5I_{\Pi} + I_{\text{л.п}}$. Якщо врахувати, що $I_{\Pi} = 0,25I_{\text{л.п}}$, то $I_{\max} = 0,125I_{\text{л.п}} + I_{\text{л.п}} = 1,125I_{\text{л.п}}$. Мінімальна інтенсивність відповідає положенню поляризатора, коли його площина пропускання перпендикулярна до площини коливань лінійно поляризованого світла. За такого положення поляризатора поляризоване світло буде повністю загашено, а через поляризатор пройде тільки половина інтенсивності природного світла. Таким чином, $I_{\min} = 0,5I_{\Pi} = 0,125I_{\text{л.п}}$. Підставивши відповідні значення I_{\max} і I_{\min} у (9.1), визначимо ступінь поляризації

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{1,125I_{\text{л.п}} - 0,125I_{\text{л.п}}}{1,125I_{\text{л.п}} + 0,125I_{\text{л.п}}} = 0,8.$$

Приклад 9.7. Лінійно поляризований світловий промінь падає на поляризатор, який обертається навколо осі променя з кутовою швидкістю $\omega = 21$ рад/с. Знайдіть світлову енергію, що проходить через поляризатор за один оберток, якщо потік енергії в пучку, що падає на цю систему, становить величину $\Phi_0 = 4$ мВт.

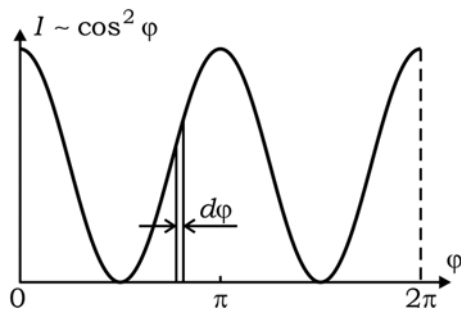


Рис. 9.10. До прикладу 9.7

Розв'язання. Закон Малюса (9.11) можна однаково правильно записати і для інтенсивності (I), що пройшла через поляризатор, і для потоку світлової енергії – Φ . Без урахування втрат енергії в самому поляризаторі закон Малюса матиме вигляд

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad \text{або} \quad \Phi = \Phi_0 \cos^2 \varphi,$$

де I_0 та Φ_0 – інтенсивність і потік енергії, відповідно, що характеризують світловий промінь, який падає на поляризатор.

Як відомо, потік Φ світлової енергії – це світлова енергія W за одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = dW \frac{1}{\frac{d\varphi}{\omega}} = \frac{dW}{d\varphi} \omega. \quad (9.19)$$

(У (9.19) враховано, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, а $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$). Із (9.19) випливає, що швидкість, з якою зі зміною кута змінюється світлова енергія, дорівнює

$$\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\Phi}{\omega} \Rightarrow dW = \frac{\Phi}{\omega} d\varphi. \quad (9.20)$$

Повна енергія, що пройшла через систему за один оберт поляризатора, визначається шляхом інтегрування (9.20):

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\omega} d\varphi. \quad (9.21)$$

Урахувавши табличний інтеграл

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \quad (9.22)$$

і підставивши визначений інтеграл $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$ у (9.21), маємо

$$W = \frac{\Phi_0}{\omega} \cdot \pi = \frac{3.14 \cdot 4 \text{ мВт}}{21 \text{ рад/с}} = 0.6 \text{ мДж}.$$

Приклад 9.8. Знайдіть ступінь поляризації частково поляризованого світла. Експерименти показали, якщо на шляху світла розмістити поляризатор, то при повороті останнього найменша інтенсивність світла дорівнює I_0 . Якщо перед поляризатором розмістити $\lambda/4$ -пластинку, оптична вісь якої орієнтована під кутом 45° до площини пропускання поляризатора, то інтенсивність світла за поляризатором дорівнюватиме $\eta \cdot I_0$, де $\eta = 2$.

Розв'язання. Нагадаємо, що, за визначенням, ступінь поляризації частково поляризованого світла становить

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де I_{\max} та I_{\min} – відповідно максимальна та мінімальна інтенсивності світла після поляризатора.

Як випливає зі схематичного розгляду складу частково поляризованого світла (рис. 9.11), це суміш природного (неполяризованого, хаотично поляризованого) світла та лінійно поляризованого світла.

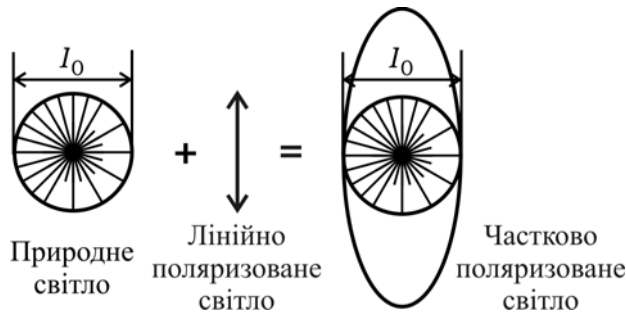


Рис. 9.11. До прикладу 9.8:
схема складу частково
поляризованого світла

Розглянемо випадок, коли використовується тільки поляризатор. Якщо на поляризатор падає частково поляризоване світло, то його складова, що пов'язана з природним світлом, проходить через поляризатор, втрачаючи половину своєї інтенсивності незалежно від положення поляризатора. Поляризатор перетворює неполяризоване світло на лінійно поляризоване.

Лінійно поляризовану складову $I_{\text{лін}}$ частково поляризованого світла поляризатор (аналізатор) в одному положенні повністю затримує, а в другому – повністю пропускає. Із умови прикладу випливає, що значення $I_{\text{мін}}$ дорівнює інтенсивності I_0 . Із рис. 9.12 видно, що складова лінійно поляризованого світла $I_{\text{лін}}$ в цьому випадку дорівнює нулю.

У випадку максимального пропускання поляризатора, коли $I_{\text{лін}} \neq 0$, інтенсивність світла після поляризатора

$$I_{\text{max}} = I_0 + I_{\text{лін}}, \quad (9.23)$$

але значення $I_{\text{лін}}$ залишається невідомим.

Розглянемо випадок використання $\lambda/4$ -пластинки і поляризатора, ($\lambda/4$ -пластинка розташована перед поляризатором).

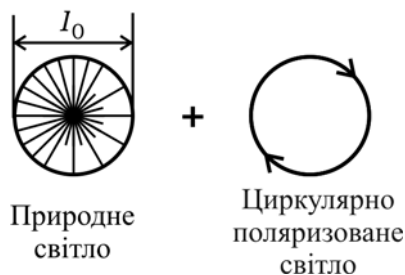


Рис. 9.12. До прикладу 9.8:
схематичний розгляд складу світла,
що пройшло крізь $\lambda/4$ -пластинку,
якщо на неї падає частково
поляризоване світло

Схематичний розгляд складу світла після $\lambda/4$ -пластинки (рис. 9.12) показує, що він містить неполяризовану складову і складову циркулярно поляризованого світла.

Поява останньої є результатом перетворення лінійно поляризованого компонента. На неполяризовану складову $\lambda/4$ -пластинка не впливає. Якщо світло з таким складом направити на поляризатор, через нього пройде половина інтенсивності неполяризованої складової та половина циркулярно поляризованої складової світла. Інтенсивність світла за поляризатором дорівнюватиме

$$\eta \cdot I_0 = I_0 + \frac{I_{\text{лін}}}{2}. \quad (9.24)$$

Із (9.24)

$$I_{\text{лін}} = 2I_0(\eta - 1). \quad (9.25)$$

Якщо підставити (9.25) у (9.23), то

$$I_{\text{max}} = I_0 + I_{\text{лін}} = I_0 + 2I_0(\eta - 1) = I_0(2\eta - 1).$$

Ступінь поляризації світла дорівнює

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_0(2\eta - 1) - I_0}{I_0(2\eta - 1) + I_0} = \frac{\eta - 1}{\eta}$$

Для $\eta = 2$ величина $P = \frac{\eta - 1}{\eta} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$.

10. ШТУЧНА АНІЗОТРОПІЯ. ШТУЧНЕ ДВОПРОМЕНЕЗАЛОМЛЕННЯ. ОПТИЧНА АКТИВНІСТЬ. ЕФЕКТ ФАРАДЕЯ

10.1. Короткі теоретичні відомості

• Штучна анізотропія – це явища, пов'язані зі штучним утворенням анізотропії (яка проявляється, напр., у двоприменезаломленні) у середовищах під дією пружних деформацій, електричного або магнітного полів, охолодженні в зовнішніх полях, освітленні лінійно поляризованим світлом тощо. За своїм походженням ці явища відрізняються від ефектів у природних анізотропних кристалах, але схеми їх спостереження аналогічні, наприклад, схеми на рис. 8.4, у якій замість фазової пластинки встановлено елемент зі штучним двоприменезаломленням (комірка Керра, намагнічений зразок тощо).

• Ефект фотопружності. Під дією пружних деформацій зразки ізотропних прозорих твердих середовищ стають анізотропними зі штучним двоприменезаломленням, яке характеризується величиною

$$n_e - n_o = k\sigma = k \frac{F}{A}, \quad (10.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей матеріалу; σ – внутрішня напруга, створена деформацією; F – сила, яка прикладена до поверхні зразка площею A .

• Ефект Керра. Під дією поперечного електричного поля деякі ізотропні речовини, у т. ч., рідини (напр., нітробензол), стають анізотропними зі штучним променезаломленням, яке дорівнює

$$n_e - n_o = bE_0^2, \quad (10.2)$$

де b – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей рідини та довжини хвилі λ світла; E_0 – напруженість зовнішнього поперечного електричного поля. Величину $B = b/\lambda$ називають *сталю Керра*.

• Ефект Покельса. Під дією електричного поля деякі ізотропні кристали стають анізотропними зі штучним двоприменезаломленням, яке дорівнює

$$n_e - n_o = kE_0, \quad (10.3)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який визначається властивостями середовища; E_0 – напруженість зовнішнього електричного поля.

- Оптична активність – це природне явище, яке полягає в тому, що площина поляризації електромагнітної (світлової) хвилі повертається на деякий кут під час проходження світла крізь оптично активні речовини – деякі кристали та рідкі розчини. При цьому ці речовини не розташовані в зовнішніх полях – магнітному, електричному або механічному. Оптична активність цих речовин природна. До оптично активних речовин належать кристалічний кварц, водний розчин цукру тощо.

Кут повороту площини поляризації для оптично активних кристалів дорівнює

$$\psi = \alpha d, \quad (10.4)$$

де α – стала обертяння, що залежить від властивостей речовини і довжини хвилі; d – шлях світла в оптично активній речовині.

Якщо розташувати оптично активну речовину між схрещеними поляризаторами (рис. 10.1), то на виході такої системи (без урахування втрат світла в елементах системи) інтенсивність світла визначається за законом

$$I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \sin^2 \psi, \quad (10.5)$$

де $I_{\text{пр}}$ – інтенсивність природного світла на вході системи.

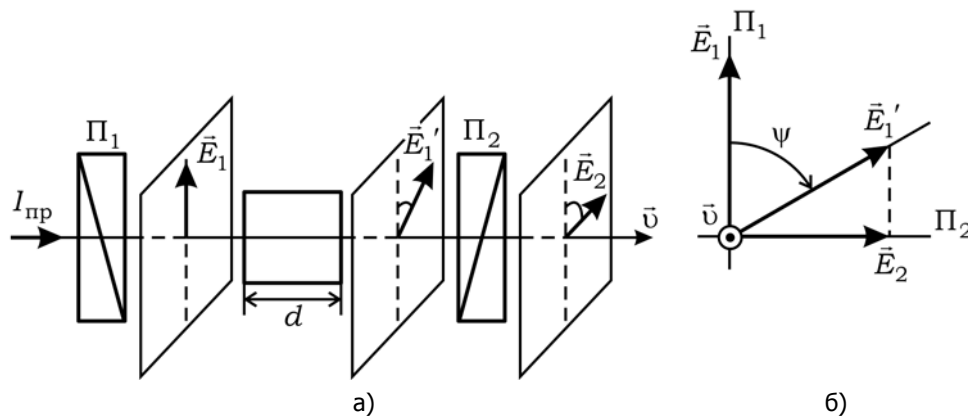


Рис. 10.1. Природне обертяння площини поляризації (оптична активність)

У розчинах оптично активних речовин в оптично неактивному розчиннику кут повороту площини поляризації визначається за законом Біо:

$$\Psi = \alpha c d, \quad (10.6)$$

де α – стала обертяння, що залежить від властивостей активної речовини та довжини хвилі світла; c – концентрація активної речовини в розчиннику ($\text{кг}/\text{м}^3$); d – шлях світла в оптично активній речовині.

- Магнітне обертяння площини поляризації (ефект Фарадея) – це явище, пов'язане з обертянням площини поляризації світла під час його проходження крізь речовину, розміщену в повздовжньому магнітному полі. Це штучне обертяння площини поля-

ризації в прозорих, природно оптично неактивних речовинах здійснюється на кут, що дорівнює

$$\Psi = VH_0d, \quad (10.7)$$

де V – стала магнітного обертання (стала Верде), яка залежить від властивостей речовини та довжини хвилі світла; H_0 – напруженість поздовжньої складової зовнішнього магнітного поля.

10.2. Запитання та відповіді

10.2.1. У якому агрегатному стані речовини можуть мати оптичну активність?

Оптичною активністю можуть характеризуватись тверді тіла (напр., кристали кварцу), чисті рідини (скипидар, нікотин) і розчини оптично активних речовин у неактивних розчинниках (водні розчини цукру, винної кислоти тощо).

10.2.2. У чому полягає основна ідея теорії Френеля, яка пояснює оптичну активність речовин?

Основна ідея теорії Френеля, яка пояснює оптичну активність речовин, полягає в тому, що за аналогією із двоприменезаломлювальними кристалами в ній застосована ідея розбиття хвилі в речовині на дві власні хвилі зі своїми показниками заломлення¹. У випадку оптично активних речовин Френель запропонував розглядати циркулярно поляризовані власні хвилі, які відрізняються показниками заломлення $n_{\text{пр}}$ та $n_{\text{лів}}$. Такий розгляд можливий, якщо згадати, що лінійно поляризовану хвилю можна представити як результат додавання двох циркулярно поляризованих хвиль із відповідною різницею фаз. Якщо $n_{\text{пр}} \neq n_{\text{лів}}$, то і фазові швидкості для цих хвиль будуть різні. У результаті цього після проходження власних хвиль крізь активну речовину на її виході складання двох хвиль дає лінійно поляризовану хвилю з площиною поляризації, що повернута відносно поляризації падаючої хвилі.

Звернемо увагу на те, що в теорії Френеля не йдеться про мікроскопічну природу механізмів, які призводять до обертання площини поляризації в оптично активних середовищах. Це – феноменологічна теорія. (Більш детально про теорію Френеля, яка пояснює оптичну активність речовин, можна прочитати в [1, п. 168]).

10.2.3. Як експериментально сам Френель перевіряв правильність своєї теорії, яка пояснює оптичну активність речовин?

Для перевірки своїх припущень щодо теорії оптично активних речовин Френель провів дослід зі спеціально створеною ним призмою, складеною із трьох призм: двох – із правого кварцу та однієї – з лівого кварцу. Експеримент підтвердив правильність теорії Френеля. (Більш детально про цей дослід Френеля можна прочитати в [1, п. 168]).

¹ Нагадаємо, що у двоприменезаломлювальних кристалах лінійно поляризовані власні хвилі відрізнялись показниками заломлення n_o та n_e щодо головного перерізу кристала.

10.2.4. Як буде зорієнтована поляризація світлового променя після того, як він пройде крізь пластинку, яка вирізана з кристала кварцу перпендикулярно до його оптичної осі, відіб'ється від дзеркала і ще раз пройде через кристал кварцу, але в зворотному напрямку?

У випадку, коли використовується оптична активність кварцу, площина поляризації після подвійного проходження в одному напрямку та зворотному до нього крізь пластинку із кристалічного кварцу відновлює свою первинну орієнтацію.

10.2.5. Як буде зорієнтована поляризація світлового променя після того, як він пройде через поздовжньо намагнічений зразок і в ньому завдяки ефекту Фарадея відбудеться поворот площини поляризації, а потім цей промінь відіб'ється від дзеркала і ще раз пройде через цей самий поздовжньо намагнічений зразок, але у зворотному напрямку? Порівняйте результат такого експерименту з відповіддю на попереднє запитання.

Із теорії ефекту Фарадея відомо, що напрямок обертання площини поляризації залежить від напрямку магнітного поля (а останній залежить від напрямку струму в соленоїді, який у запропонованій умові цього питання не змінився) і не залежить від напрямку поширення світла. Таким чином, площина поляризації відбитого (зворотного) променя при проходженні крізь намагнічену речовину ще раз повернеться на такий самий кут α , як і після першого (прямого) проходження. У підсумку площина поляризації оптичного променя після такого подвійного проходження повернеться на кут 2α .

10.2.6. Як працює пристрій, який пропускає світло лише в одному напрямку і називається оптичним вентилям?

Розглянемо рис. 10.2. Кут між напрямками максимального пропускання поляризаторів Π_1 і Π_2 становить кут 45° . Після поляризатора Π_1 лінійно поляризоване світло потрапляє в комірку з речовиною, яка в поздовжньому магнітному полі за рахунок магнітооптичного ефекту Фарадея обертає площину поляризації світла.

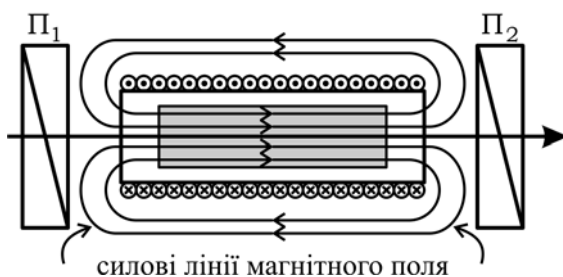


Рис. 10.2. Конструкція оптичного вентиля

Величина кута обертання за формулою (10.7) залежить від величини напруженості (H) або магнітної індукції (B) магнітного поля, довжини (L) комірки з робочою речовиною та властивостей самої речовини (V – сталої Верде). Величина магнітного поля в даному випадку визначається параметрами соленоїда і на-

самперед величиною струму в ньому. Останній підбирається таким, що кут Ψ обертання площини поляризації світла дорівнює 45° . Тобто лінійно поляризоване світло після проходження ним соленоїда буде збігатися за поляризацією з напрямком пропускання поляризатора P_2 і пройде через нього без поглинання.

Як відомо, будь-яка оптична схема, яка складається, з оптичних елементів обов'язково має відбиваючі поверхні. Це призводить до того, що, окрім прямого променя, існує зворотний промінь, який потрібно знешкодити (погасити або хоча б зменшити його інтенсивність). Його наявність може спричинити багато неприємностей, аж до зникнення генерації лазером. Відбитий промінь може бути частково поляризованим або навіть повністю неполяризованим. Однак після проходження поляризатора P_2 "справа наліво" він виходить із P_2 і потрапляє в робочу речовину, яка міститься в соленоїді, поляризованим. Із теорії ефекту Фарадея відомо, що напрямок обертання площини поляризації залежить від напрямку магнітного поля (а останній залежить від напрямку струму в соленоїді, який не змінюється) і не залежить від напрямку поширення світла.

Таким чином, площина поляризації відбитого (зворотного) променя ще раз повернеться на кут $\Psi = 45^\circ$ і на вхід поляризатора P_1 він прийде з площиною поляризації, повернутою на кут 90° . Це збігається з напрямком найменшого пропускання поляризатора P_1 , і відбите світло через нього пройти не зможе. Саме тому пристрій, пропускання світла яким в одному (прямому) напрямку максимальне, а у зворотному – мінімальне, називається оптичним вентиляем.

10.2.7. У досліді Умова паралельний пучок монохроматичного лінійно поляризованого світла спрямовується в прозору (скляну) циліндричну посудину довжиною 0,5–1 м і діаметром приблизно 10 см, наповнену водним розчином цукру. Спостереження ведеться під прямим кутом до напрямку поширення світла. Поясніть гвинтоподібний вигляд картини, що спостерігається при цьому вздовж осі циліндра.

Водний розчин цукру, який використовується в досліді Умова, є оптично активною речовиною. При поширенні світла на відстань d напрямок коливань вектора електричної напруженості \vec{E} повертається на кут $\varphi = [a]cd$, тут $[a]$ – стала обертання, c – концентрація розчину; d – довжина циліндра. Тому, якщо на вході в розчин вектор \vec{E} падаючої хвилі був орієнтований уздовж осі Y (рис. 10.3), то максимум розсіяного випромінювання спостерігався в напрямку осі X . При повороті площини поляризації цукром на кут $\varphi = 90^\circ$ відбуваються зміни, а саме, максимум випромінювання відбувається в напрямку осі Y і т. д.

Відстань між сусідніми світлими (або темними) смугами дорівнює шляху, при проходженні якого площина поляризації повертається на 180° .

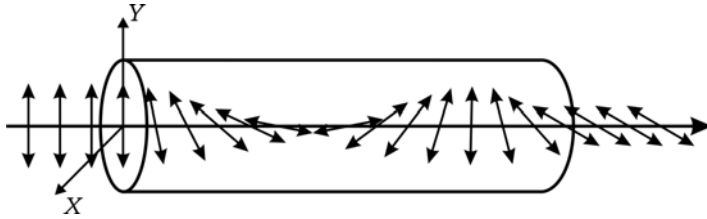


Рис. 10.3. До пояснення природи "гвинта Умова"

10.2.8. *Яке практичне застосування отримало явище штучного двоприменезаломлення, яке пов'язане з виникненням анізотропії при деформаціях?*

Якщо деформоване тіло має форму більш складну, ніж паралелепіпед, або розподіл механічного напруження нерівномірний, то у світлі, яке проходить крізь тіло, виникає картина у вигляді системи так чи інакше розташованих темних і світлих смуг. При зміні напруження картина змінюється. Це використовують під час дослідження розподілу напруги у складних конструкціях, наприклад, у будівництві або машинобудуванні. Для цього виготовляють геометрично подібну модель із відповідних прозорих матеріалів, розміщують її між двома схрещеними поляризаторами і діють на неї навантаженням. Просвічуючи цю модель світлом, зі спостережуваної картини роблять висновки про розподіл внутрішніх напружень. Цей метод значно спрощує досить трудомістку роботу з розрахунку напружень у нових конструкціях.

10.2.9. *Чи можна скористатись підручними матеріалами для спостереження природного та штучного двоприменезаломлення?*

Целофанова плівка має властивості природного двоприменезаломлення. Це пов'язано з анізотропними властивостями молекул цього матеріалу. Целофанові плівки стають двоприменезаломлювальними в результаті їх розтягування.

10.2.10. *Відомо, що можна провести аналогію між виникненням штучної анізотропії в рідинах і аморфних речовинах під дією електричного поля та природною анізотропією в кристалах. Проте анізотропні кристали бувають додатними і від'ємними. З яким типом анізотропних кристалів аналогічні речовини ефекту Керра?*

Величина ефекту Керра в рідинах та аморфних речовинах характеризується співвідношенням (10.2) $n_e - n_o = bE_0^2$. Величина сталої Керра b може бути більшою і меншою за нуль. Для більшості речовин (напр., нітробензол) $b > 0$, тобто $n_e > n_o$, що відповідає додатному кристалу. Проте існують і речовини, для яких $b < 0$ (спирт, етиловий ефір). Анізотропні властивості таких речовин подібні властивостям від'ємних кристалів.

10.2.11. *Назвіть одну із найбільш важливих, на вашу думку, особливостей ефекту Керра.*

Однією з найбільш важливих особливостей ефекту Керра є його надмала інерційність (до 10^{-12} с), яка обумовлює його широке практичне застосування. Це практично безінерційний оптичний затвор з рекордно малим часом перемикання того

самого порядку величини, що і період коливань електромагнітного випромінювання, або наближається до нього: для світла $10^{-14} - 10^{-15}$ с; для НВЧ $10^{-9} - 10^{-10}$ с. Це дозволяє досліджувати швидкоплинні в реальному масштабі часу процеси.

10.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 10.1. Комірка Керра (заповнена нітробензолом посудина, у якій розміщені пластини плоского конденсатора) розташована між паралельними поляризатором і аналізатором. Оптична вісь комірки Керра утворює кут $\alpha = 45^\circ$ із площиною пропускання поляризатора. Довжина пластин конденсатора 100 мм. Стала Керра (B) для монохроматичного світла ($\lambda = 600$ нм) дорівнює $B = 2,2 \cdot 10^{-12}$ м/В². Визначте мінімальне значення напруженості електричного поля конденсатора, за якого: а) на виході аналізатора поле стає темним; б) інтенсивність світла на виході системи не залежить від кутового положення аналізатора.

Розв'язання. На рис. 10.4 представлено схему, у якій функції фазової пластинки виконує комірка Керра. За $\alpha = 45^\circ$ і $\beta = 0^\circ$ інтенсивність світла на виході системи визначається формулою $I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_n \cos^2 \frac{\delta}{2}$, де різниця фаз, ураховуючи формулу (10.2), дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} b E_0^2 d = 2\pi B E_0^2 d. \quad (10.9)$$

Інтенсивність світла на виході системи дорівнюватиме нулю ($I_{\parallel} = 0$), коли $\cos^2 \frac{\delta}{2} = 0$. Ця умова виконується за різниці фаз $\delta = (2m + 1)\pi$. Тоді з рівняння (10.9) отримаємо $E_0 = \sqrt{\frac{2m + 1}{2Bd}}$. Мінімальна напруженість електричного поля буде при $m = 0$:

$$E_0^{\min} = \sqrt{\frac{1}{2Bd}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1}} = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

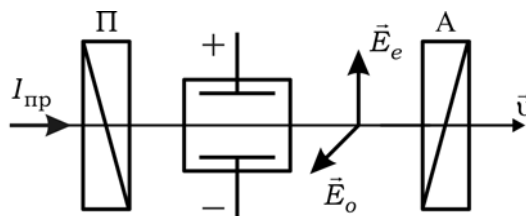


Рис. 10.4. До прикладу 10.1

Інтенсивність світла на виході системи не залежатиме від кута повороту аналізатора, якщо на аналізатор падає циркулярно поляризоване світло, тобто комірка Керра виконує роль $\lambda/4$ -фазової пластинки, яка утворює різницю фаз між двома хвилями: $\delta = (2m + 1)\pi/2$. Таку різницю фаз забезпечує комірка Керра з напруженістю електричного поля величиною

$$E_0 = \sqrt{\frac{2m + 1}{4Bd}}.$$

Мінімальна напруженість буде за $m = 0$:

$$E_0^{\min} = \sqrt{\frac{1}{4Bd}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 2,2 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1}} = 1,07 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Приклад 10.2. Між схрещеними поляризатором і аналізатором розташована кварцова пластинка, що вирізана перпендикулярно до її оптичної осі. Визначте мінімальну товщину пластинки, за якої світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 436$ нм буде повністю затримуватися системою, а світло з довжиною хвилі $\lambda_2 = 550$ нм за аналізатором зменшиться наполовину порівняно зі світлом за поляризатором. Стала обертання кварцу для цих довжин хвиль дорівнює $\alpha_1 = 41,5$ град/мм і $\alpha_2 = 25,94$ град/мм, відповідно.

Розв'язання. Розглянемо рис. 10.1. При проходженні лінійно поляризованого світла вздовж оптичної осі кварцу відбувається обертання площини поляризації на кут Ψ , який розраховується за формулою (10.4). Інтенсивність на виході системи розраховується за формулою (10.5): $I_{\perp} = \frac{1}{2} I_n \sin^2 \psi = I_1 \sin^2 \psi$, де I_1 – інтенсивність світла на виході з поляризатора ($I_1 = 0,5 I_n$).

Визначимо товщини пластинок кварцу, за яких для довжини хвилі λ_1 для інтенсивності буде виконуватись умова $I_{\perp} = 0$. Із (10.5) випливає, що ця умова буде виконуватись за $\psi_1 = \pi m_1$, де $m_1 = 1, 2, 3, \dots$, або, як випливає з (10.4), за товщини пластинки $d_{m1} = \frac{\pi m_1}{\alpha_1}$. Розрахуємо значення d_{m1} для різних m_1 :

$$d_{11} = 4,34 \text{ мм}; \quad d_{21} = 8,67 \text{ мм}; \quad d_{31} = 13,01 \text{ мм}.$$

Визначимо товщини пластинок кварцу, за яких для довжини хвилі λ_2 буде виконуватись умова $I_{\perp} = 0,5 I_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 I_1$. Із формули (10.5) маємо, що $\sin^2 \psi_2 = 0,5$. Звідки

$\psi_2 = \frac{\pi}{4} + m_2 \frac{\pi}{2}$. Цей кут обертання забезпечує пластинка кварцу товщиною

$$d_{m2} = \frac{\pi(2m_2 + 1)}{4\alpha_2}, \quad \text{де } m_2 = 1, 2, 3, \dots$$

Розрахуємо значення d_{m2} для різних m_2 : $d_{12} = 1,74$ мм; $d_{22} = 5,20$ мм; $d_{32} = 8,67$ мм. Порівнюючи числа d_{m1} та d_{m2} , знаходимо, що вони мають однакове значення для $d_{21} = d_{32} = 8,67$ мм. Такою має бути мінімальна товщина кварцової пластинки для того, щоб виконати умову прикладу.

Приклад 10.3. Трубка, заповнена бензолом, має довжину $d = 26$ см і міститься в поздовжньому магнітному полі соленоїда, який розташований між двома поляризаторами. Кут між площинами пропускання поляризаторів становить $\alpha = 45^0$. Знайдіть мінімальну напруженість магнітного поля, за якої світло з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм буде проходити через цю систему тільки в одному напрямі. Для бензолу стала Верде $V = 2,59 \frac{\text{кут. хв}}{\text{м} \cdot \text{А/м}}$.

Розв'язання. В умові прикладу описаний пристрій, який називається оптичним вентилям (див. запитання 10.2.6 та рис. 10.2). Кут повороту площини поляризації світла за рахунок ефекту Фарадея дорівнює (10.7): $\Psi = VH_0d$, де V – стала магнітного обертання (стала Верде), яка залежить від властивостей речовини та довжини хвилі світла; H_0 – напруженість поздовжньої складової зовнішнього магнітного поля. Звідси

$$H_0 = \frac{\Psi}{V \cdot d} \Rightarrow H_0 = \frac{45 \cdot 60 \text{ кут.хв} \cdot \text{А}}{2,59 \text{ кут.хв} \cdot 0,26 \text{ м}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

11. ВЗАЄМОДІЯ СВІТЛА З РЕЧОВИНОЮ. ДИСПЕРСІЯ ТА ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА. ВИПРОМІНЮВАННЯ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА

11.1. Короткі теоретичні відомості

Розгляд взаємодії світла з речовиною базується на класичній моделі осцилятора. Поведінка атома чи молекули речовини у світловому полі в цій моделі еквівалентна коливанням осцилятора, які виникають під дією електричного компонента світлової хвилі.

- Дисперсія світла – це залежність показника заломлення n середовища від частоти ω (або довжини хвилі λ) світла. Така залежність викликана тим, що фазова швидкість світлових хвиль залежить від їх частоти (довжини хвилі). На практиці, зазвичай, мають справу з нормальною дисперсією, коли дисперсія показника заломлення $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ (або $\frac{dn}{d\omega} > 0$). Аномальна дисперсія, коли $\frac{dn}{d\lambda} > 0 \Rightarrow \left(\frac{dn}{d\omega} < 0\right)$, спостерігається в ділянках спектра біля центра ліній поглинання.

- Дисперсійна формула Коші, що застосовується для апроксимації експериментальних залежностей $n(\lambda)$, має вигляд

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots, \quad (11.1)$$

де A , B , C – сталі коефіцієнти, які визначаються експериментальним шляхом для кожного середовища.

- Залежність показника заломлення розрідженого газу на віддалі від ліній поглинання (для нормальної дисперсії) від частоти описується формулою Лоренца:

$$n^2 = 1 + 4\pi \frac{e^2}{m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (\text{у системі Гаусса}), \quad (11.2)$$

де e і m – заряд і маса електрона, відповідно; N – концентрація електронів; ω_0 – власна частота коливань електронів; ω – частота коливань світлової хвилі, яка поширюється в газі.

- У разі врахування поглинання середовища вводять комплексний показник заломлення $n^* = n - i\chi$ середовища і користуються формулами:

$$n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}; \quad (11.3)$$

$$n\chi = \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \quad (11.4)$$

де χ – показник поглинання, γ – коефіцієнт згасання осцилюючого електрона.

Графік частотної залежності показника заломлення з урахуванням поглинання світла в середовищі відповідно до (11.3) має вигляд, зображений на рис. 11.1.

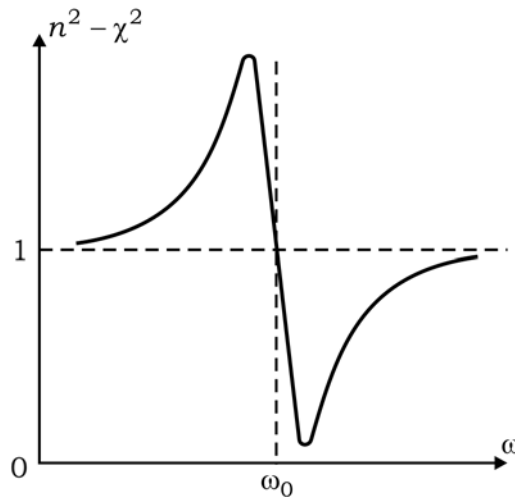


Рис. 11.1. Частотна залежність показника заломлення з урахуванням поглинання світла в середовищі

- Поглинання світла описується законом Бугера–Ламберта:

$$I(l) = I_0 e^{-Kl}, \quad (11.5)$$

який пов'язує інтенсивність $I(l)$ пучка світла, що пройшло в поглинальному середовищі шлях l , з інтенсивністю падаючого світла I_0 . Незалежний від інтенсивності світла коефіцієнт K називається коефіцієнтом поглинання. У більшості випадків показник поглинання залежить від довжини хвилі.

- Випромінювання Вавилова–Черенкова – особливий вид випромінювання, який виникає під час руху тіла в середовищі зі швидкістю u , яка більша за фазову швид-

кість v хвилі у цьому середовищі. За умови, що групова швидкість u більша за фазову швидкість v ($u > v = c/n$), навіть рівномірний рух частинки викликає випромінювання ЕМХ. Рухомо частинка при цьому втрачає енергію, унаслідок чого вона рухається з від'ємним прискоренням (гальмується). Однак це прискорення є не причиною, як у випадку, коли $u < c/n$, а наслідком випромінювання. Навіть, якщо б втрати енергії якимось чином поповнювались, то частинка, рухаючись рівномірно зі швидкістю $u > c/n$, все ж була б джерелом випромінювання.

У випромінюванні Вавилова–Черенкова переважають короткі хвилі, тому воно має синє забарвлення. Характерною ознакою випромінювання Вавилова–Черенкова є те, що воно випромінюється не в усі напрямки, а лише вздовж твірних конуса, вісь якого збігається з напрямком руху частинки, а кут при вершині $\theta = \arccos \frac{c}{ni}$.

11.2. Запитання та відповіді

11.2.1. *Що таке наближення суцільного середовища і в яких випадках його можна застосовувати?*

Згідно з уявленнями про поширення світла в речовині, які систематизовані в класичній електронній теорії Г. А. Лоренца, речовина розглядається як сукупність заряджених частинок. Ці частинки під дією ЕМХ збуджуються і перевипромінюють вторинні хвилі, які складаються між собою та з падаючою на речовину хвилею, визначаючи взаємодію світла з речовиною і поширення світла в речовині. Відстань між зарядженими частинками, як і довжина хвилі, визначена. Залежно від співвідношень між цими величинами середовище можна вважати або суцільним, або дискретним. Постає питання: у яких випадках можна застосовувати наближення суцільного середовища?

Електричне і магнітне поля ЕМХ залишаються майже сталими на відстані $\sim \frac{\lambda}{2\pi}$.

Для видимого світла ця величина становить $\frac{\lambda}{2\pi} \approx 10^{-7}$ м. В об'ємі $(10^{-7})^3$ м³ речовини в конденсованому стані або газу за нормальних умов міститься близько 10^8 атомів. Тому в усьому оптичному діапазоні така речовина має ті самі властивості, що і суцільне середовище.

Проте існують випадки і з негативною відповіддю на це питання:

1) при поширенні світла у верхніх шарах атмосфери, густина яких дуже мала, таке наближення неприпустиме;

2) до таких самих висновків можна дійти, розглядаючи середовище, що перебуває в стані, близькому до критичного. У цьому випадку середовище не може розглядатись як однорідне: флуктуація густини в об'ємах $\sim \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3$ стає істотною, що призводить до розсіювання світла (переважно короткохвильового);

3) у діапазоні рентгенівських хвиль, коли величина $\lambda \sim 0,1$ нм стає порівняною з міжатомними відстанями, мікроскопічний підхід до речовини, як до суцільного середовища, також стає неприпустимим.

11.2.2. Проаналізуйте закон, за яким змінюється показник заломлення із частотою для розрідженого одноатомного газу?

Цей випадок відповідає стану, коли можна знехтувати поглинанням ($\gamma = 0$) і скористатись виразом (11.2): $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$, де ω_0 – власна (резонансна) частота коливань електрона; N – концентрація атомів речовини; m – маса електрона. Видно, що $n > 1$ за $0 < \omega < \omega_0$; $n = \pm\infty$ за $\omega = \omega_0$; $n < 1$ за $\omega_0 < \omega \leq \infty$.

На рис. 11.2 показана залежність функції $n^2 - 1$ від частоти ω . Для значення $\omega = \omega_0$ функція $n^2 - 1$ має розрив, а для всіх інших значень ω спостерігається нормальна дисперсія, тобто $\frac{dn}{d\omega} > 0$. Перетворення показника заломлення на нескінченність за $\omega = \omega_0$ не має фізичного змісту і пов'язане з неврахуванням згасання коливань оптичного осцилятора.

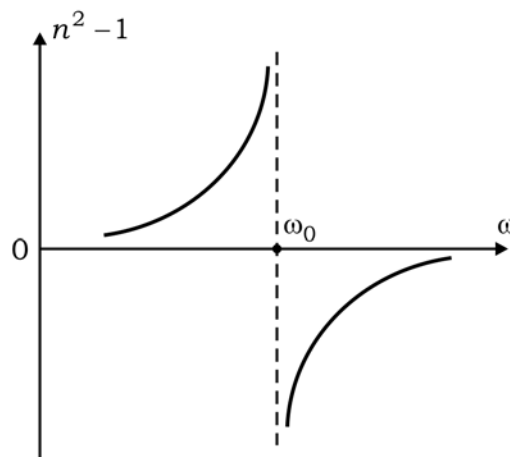


Рис. 11.2. Частотна залежність показника заломлення без урахування втрат світла в середовищі

11.2.3. Чи може показник заломлення n середовища бути меншим одиниці?

Так, може. Зазначимо такі два випадки: *перший випадок* пов'язаний з власним поглинанням світла речовиною. На рис. 11.3, а показано ділянку дисперсії світла $n(\omega)$ у межах смуги поглинання на кривій $\chi(\omega)$, рис. 11.3, б. Видно, що на ній є дисперсійна ділянка (коли $\omega \geq \omega_0$), на якій $n < 1$. *Другий випадок* фіксується в області високих частот далеко від лінії поглинання, коли $\omega \gg \omega_0$ і можна знехтувати внеском поглинання в дисперсію. Тоді закон дисперсії набуває вигляду

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \approx 1 - \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2}. \quad (11.6)$$

Величина показника заломлення n тут також набуває значення, меншого одиниці.

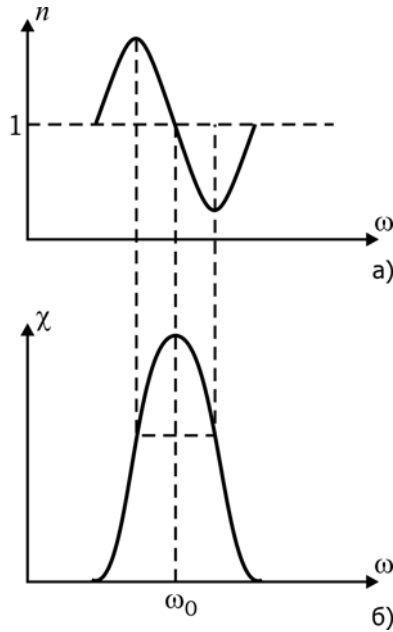


Рис. 11.3. Частотні залежності показника заломлення (n) і показника поглинання (χ) світла в середовищі

11.2.4. Що називається плазмовою частотою ω_p і який її фізичний зміст? Чому вона так називається?

Плазмовою (або ленгмюрівською) частотою ω_p називається власна частота вільних електронів у плазмі:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \text{ (у гауссовій системі), } \omega_p^2 = \frac{N e^2}{\epsilon_0 \cdot m} \text{ (у системі СІ).} \quad (11.7)$$

З урахуванням плазмової частоти закон, за яким змінюється показник заломлення середовища від частоти, набуває вигляду

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.8)$$

Фізичний зміст плазмової частоти ω_p полягає в тому, що вона визначає частоту власних колективних коливань у плазмі, концентрація електронів у якій дорівнює N .

11.2.5. *Якого вигляду набуває залежність $n^2(\omega) = \epsilon(\omega)$ для електромагнітного випромінювання в рентгенівському діапазоні?*

Для частот зовнішнього випромінювання $\omega \gg \omega_0$ (напр., рентгенівське випромінювання, що падає на метал) або для $\omega_0 = 0$ (плазма в іоносфері для радіохвиль) формула для частотної залежності показника заломлення набуває вигляду

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

11.2.6. *У чому полягає фізичний зміст комплексного показника заломлення?*

При вимушених коливаннях електронів речовини під дією електричного поля світлової хвилі їх рух відбувається із запізненням по фазі відносно коливань напруженості електричного поля. Також відбувається згасання коливань електронів у середовищі в часі. Ці два фактори проявляються в деякій видозміні виразу (11.2) для показника заломлення та діелектричної проникності, яка надає їм характер комплексної величини:

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega},$$

де $i = \sqrt{-1}$; γ – коефіцієнт згасання. При цьому вводиться комплексний показник заломлення $n^* = n - i\chi$, де n – дійсна частина показника заломлення, яка визначає фазову швидкість хвилі; χ – показник поглинання, який характеризує спадання амплітуди плоскої хвилі при її поширенні в середовищі.

У тих випадках, коли можна знехтувати згасанням елементарних осциляторів, зсув фази не відбуватиметься і показник заломлення буде дійсною величиною. Це спостерігатиметься для частот, далеких від власної частоти осциляторів, тобто у спектральній смузі прозорості середовища.

Так само вводять комплексну діелектричну проникність $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Її дійсна частина $\varepsilon'(\omega)$ визначає ту складову індукції \vec{D} у середовищі, яка змінюється у фазі з напруженістю \vec{E} електричного поля хвилі, а уявна частина $\varepsilon''(\omega)$ – складову \vec{D} , яка відстає від \vec{E} на $\pi/2$. Окрім того, дійсна частина $\varepsilon(\omega)$ відповідає за заломлення світла на межі середовища, а уявна – за поглинання світла в середовищі.

Між дійсною $\varepsilon'(\omega)$ та уявною $\varepsilon''(\omega)$ частинами діелектричної проникності $\varepsilon(\omega)$ існують співвідношення (формули Крамерса–Кроніга). Вони дозволяють обчислити функцію $\varepsilon'(\omega)$, якщо відома для даної речовини функція $\varepsilon''(\omega)$ у всьому діапазоні частот ω , чи навпаки, обчислити функцію $\varepsilon''(\omega)$, знаючи функцію $\varepsilon'(\omega)$. Тому для повної характеристики оптичних властивостей середовища достатньо знати (напр., з експерименту) тільки одну із цих функцій (напр., $\varepsilon'(\omega)$).

11.2.7. *Коли можна знехтувати комплексним характером діелектричної проникності?*

Взаємодія хвилі із середовищем призводить не тільки до зміни фази і фазової швидкості, але й до зміни амплітуди світлової хвилі. (Поясніть, який фізичний зв'язок існує між згасанням і зсувом фази. Радимо скористатись для цього відомостями з розділу "Коливання та хвилі" → "Вимушені коливання" → "Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики").

У тих випадках, коли можна знехтувати згасанням елементарних осциляторів, відставання по фазі зміщення електронів відносно напруженості електричного поля не буде і діелектрична проникність стає дійсною величиною. Це стосується частот, які далекі від власних частот осцилятора, тобто у спектральній області прозорості діелектричного середовища.

11.2.8. *Що означає термін "дисперсія середовища"?*

Під дисперсією середовища розуміють залежність від довжини хвилі показника заломлення середовища $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$ і фазової швидкості $\left(\frac{dv_\phi}{d\lambda}\right)$ (або $\left(\frac{dn}{d\omega}\right)$ та $\left(\frac{dv_\phi}{d\omega}\right)$)

Загалом термін "дисперсія" може мати більш широке значення і означати розкид, відхилення від найбільш ймовірного значення якихось величин для пояснення різноманітних понять. Наприклад, у статистиці дисперсією називають середню квадратичну похибку або міру розкиду значень випадкової величини від її середнього значення.

11.2.9. *Назвіть ознаки аномальної та нормальної дисперсій.*

Відмінності між нормальною та аномальною дисперсіями в оптиці наведемо в порівняльній таблиці:

Нормальна дисперсія	Аномальна дисперсія
Показник заломлення зменшується зі збільшенням довжини хвилі $\left(\frac{dn}{d\lambda} < 0 \text{ або } \frac{dv_{\phi}}{d\lambda} > 0 \right).$	Показник заломлення збільшується зі збільшенням довжини хвилі $\left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \text{ або } \frac{dv_{\phi}}{d\lambda} < 0 \right)$
Спостерігається поза межами півширини смуги поглинання або на її крилах	Спостерігається в межах півширини смуги поглинання
Групова швидкість $v_{\text{гр}}$ менша від фазової швидкості v_{ϕ} ($v_{\text{гр}} < v_{\phi}$)	Групова швидкість $v_{\text{гр}}$ більша за фазову швидкість v_{ϕ} ($v_{\text{гр}} > v_{\phi}$)

11.2.10. Що таке хвильовий пакет?

ЕМХ зі скінченим (відмінним від нуля) значенням $\Delta\omega$ може бути представлена у вигляді суперпозиції плоских гармонічних хвиль різної частоти. Хвилі з різними частотами мають різні швидкості (існує дисперсія). Тому набір таких хвиль являє собою збурення електромагнітного поля у вигляді імпульсу, амплітуда якого дорівнює нулю за межами деякого інтервалу простору Δx (об'єму ΔV) і проміжку часу τ . Таке хвильове поле групи хвиль називають хвильовим пакетом. Амплітуди гармонічних хвиль, які складають таке збурення, відмінні від нуля лише всередині деякого інтервалу частот $\Delta\omega$ поблизу середньої частоти ω_0 .

11.2.11. Яка швидкість називається груповою швидкістю, а яка фазовою?

Фазова швидкість – це швидкість переносу фронту хвилі. Фаза хвилі дорівнює

$$\varphi = \omega t - kx = \text{const} \Rightarrow \omega \cdot dt - k \cdot dx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{\phi}. \quad (11.9)$$

Групова швидкість – це швидкість амплітуди (максимуму) хвильового пакета. Фактично, групова швидкість – це швидкість хвильового пакета або швидкість передачі енергії хвилею.

11.2.12. Доведіть формулу Релея.

За визначенням $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ та $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$. Тоді

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_{\phi} \cdot k) = v_{\phi} + k \frac{dv_{\phi}}{dk} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}. \quad (11.10)$$

Це й є формула Релея, яка пов'язує групову $v_{гр}$ і фазову $v_{ф}$ швидкості. Її можна модифікувати до інших форм, наприклад:

$$v_{гр} = v_{ф} - \lambda \frac{dv_{ф}}{d\lambda} = \frac{c}{n} - \lambda \frac{d\left(\frac{c}{n}\right)}{d\lambda} = c \left(\frac{1}{n} - \lambda c \left(-\frac{1}{n^2} \right) \frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (11.11)$$

11.2.13. Які існують форми запису рівняння Релея?

Якщо закон дисперсії заданий як функція $v_{ф} = v_{ф}(\lambda)$, то зручно користуватись рівнянням Релея у вигляді

$$v_{гр} = v_{ф} - \lambda \frac{dv_{ф}}{d\lambda}.$$

Якщо відома функція $v_{ф} = v_{ф}(k)$, то рівняння Релея набуває вигляду

$$v_{гр} = v_{ф} + k \frac{dv_{ф}}{dk}.$$

Якщо виразити фазову швидкість через частоту ω і хвильове число k : $v_{ф} = \omega/k$ і

розглядати функцію $\omega = \omega(k)$, то $v_{гр} = \frac{d\omega(k)}{dk}$.

Якщо властивості середовища характеризуються показником заломлення $n = n(\omega)$, то використовується інша форма рівняння Релея:

$$v_{гр} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad \text{або} \quad v_{гр} = \frac{v_{ф}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}. \quad (11.12)$$

Якщо властивості середовища характеризуються показником заломлення $n = n(\lambda)$, то групова швидкість може бути розрахована за рівнянням Релея у вигляді

$$v_{гр} = c \left(\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad \text{або} \quad v_{гр} = v_{ф} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (11.13)$$

11.2.14. Якими відомими вам методами визначали фазову швидкість світла, а якими – групову?

Групову швидкість світла визначали:

- Ремер (1676) методом астрономічного дослідження поведінки супутника Юпітера;
- Бредлі (1725–1728) методом аберації;
- Фуко методом переривання світлового потоку зубчастим колесом (1849) або дзеркалом, що обертається (1862);
- за формулою Релея, знаючи фазову швидкість і закон дисперсії;

Фазову швидкість світла визначали:

- Фізо і Майкельсон (за зсувом смуг в інтерференційній картині);
- за формулою $v_{\phi} = \frac{c}{n}$, вимірюючи величину показника заломлення n середо-

вища;

- методом стоячої хвилі в резонаторі.

Дайте розширене пояснення кожному із наведених тут методів.

11.2.15. *З якою точністю виміряна швидкість світла сучасними методами?*

Швидкість світла у вакуумі, виміряна сучасними методами, дорівнює $c = \lambda \nu = (299792456,2 \pm 1) \text{ м/с}$.

11.2.16. *У яких випадках фазова швидкість дорівнює груповій швидкості?*

Фазова швидкість дорівнює груповій швидкості у випадках, коли немає дисперсії середовища. Це спостерігається принаймні у двох випадках:

- у вакуумі, коли немає дисперсії, $v_{\text{гр}} = v_{\phi} = c$;

- для ідеалізації, яку вводять у вигляді монохроматичної (гармонічної) хвилі. Для монохроматичної (гармонічної) хвилі не може існувати хвильового пакета, немає групової швидкості, немає сенсу казати про $v_{\text{гр}}$, фазову і групову швидкості не розрізняють. Зауважимо, що реально всі хвилі, які існують у природі або утворені штучно, можуть претендувати хіба що на назву "квазімонохроматична хвиля".

11.2.17. *Відомо, що показник заломлення n середовища та фазова швидкість v світла в цьому середовищі пов'язані між собою через швидкість c світла у вакуумі співвідношенням $v = \frac{c}{n}$. Для води величини v , розрахована таким способом і виміряна експериментально, з достатнім ступенем точності збігаються. Інший випадок спостерігаємо із сірковуглецем, для якого виміряне за законом Снеліуса значення дорівнює $n = 1,64$, а розраховане значення – $n = \frac{c}{v} = 1,76$. Розходження значно виходить за межі точності експерименту. Поясніть.*

Для води у видимому діапазоні довжин хвиль $\frac{dn}{d\lambda} \sim 0$. Тому групова швидкість

$v \cong v = \frac{c}{n}$. В експериментах вимірюване значення швидкості відповідає груповій швидкості. Таким чином, для води розрахована і виміряна експериментально величини v з достатнім ступенем точності збігаються, якщо для розрахунків використовувати значення $n = 1,33$.

Для сірковуглецю у видимому діапазоні довжин хвиль величина $\lambda \frac{d\nu}{d\lambda}$ у формулі Релея дає помітний внесок у величину групової швидкості $u \Rightarrow u \neq \nu = \frac{c}{n}$. Так само, як і в експериментах з водою, вимірювана швидкість – це групова швидкість світла, і тому знайдене експериментально значення показника заломлення n не збігається з розрахованим за формулою $n = \frac{c}{\nu}$ значенням n .

11.2.18. *Яка швидкість світла, фазова чи групова, вимірюється у відомих дослідках Фізо, Фуко та Майкельсона, заснованих на перериванні світла?*

У всіх цих дослідках фіксувалась інтенсивність, а не фаза світлової хвилі. Тому виміряна такими методами швидкість групова, а не фазова. У дослідках Фізо, Фуко та Майкельсона відбувається швидкісне переривання світлового потоку, до приймача доходять короткі світлові імпульси. У середовищі, що має дисперсію, монохроматичні складові різних частот, які входять до складу модульованої хвилі, поширюються з різною швидкістю. Цей факт викликає особливий характер поширення імпульсу. У найпростішому випадку, коли спостерігається невелика нормальна дисперсія, імпульс поширюється без деформацій, зі швидкістю, що близька до групової.

11.2.19. *Чим пояснити, що для води діелектрична проникність $\epsilon = 81$, а показник заломлення $n = 1,33$, хоча існує формула $n = \sqrt{\epsilon}$?*

Це можна пояснити залежністю діелектричної проникності ϵ від частоти ω . Величина $\epsilon = 81$ виміряна на низьких частотах. Для оптичних частот, для яких визначається показник заломлення n , величина ϵ набагато менша і становить величину $\epsilon = n^2 = (1,33)^2 \approx 1,8$.

11.2.20. *Для яких середовищ для групової u та фазової ν швидкостей виконується співвідношення $u \cdot \nu = c^2$, де c – швидкість світла у вакуумі?*

Співвідношення $u \cdot \nu = c^2$ виконується для плазми (див. приклад 11.4) і металів.

11.2.21. *Чи може величина групової швидкості світла, визначена за формулою Релея, бути більшою за швидкість c світла у вакуумі? Чи не суперечить це постулату спеціальної теорії відносності, який стверджує, що швидкість передачі інформації не може перевищувати величину c ? Поясніть.*

Групова швидкість світла, визначена за формулою Релея, у випадку аномальної дисперсії $\left(\frac{dn}{d\lambda} > 0\right)$ виявляється більшою за швидкість c світла у вакуумі. Це не суперечить постулату спеціальної теорії відносності, який стверджує, що швидкість передачі інформації не може перевищувати величину c . Пояснення цьому полягає в тому, що групова швидкість не завжди виражає швидкість сигналу. В області спектра зі значним поглинанням та аномальною дисперсією світловий імпульс у міру поширення може змінювати свою форму. Це пов'язано із сильною залежністю поглинання від частоти. При цьому в імпульсі змінюється і частота, яка відповідає максимуму спектра. Поглинання "виїдає" переважно задню частину імпульсу, що збільшує швидкість переміщення його максимуму. Таким чином, амплітуда (максимум) хвильового пакета може переміщуватись зі швидкістю, яка перевищує швидкість світла у вакуумі або навіть із від'ємною швидкістю, але ця швидкість пов'язана із "внутрішньою" перебудовою імпульсу, і тому не може бути використана для передачі сигналу.

Як бачимо, ніяких протиріч з постулатом спеціальної теорії відносності, який обмежує передачу енергії та інформації зі швидкістю, більшою за c , тут немає. (Більш детально про фізику процесів, які відбуваються при поширенні хвильового пакета в середовищі із сильним поглинанням та аномальною дисперсією див. у [10, п. 2.11, С. 134].

Існує думка про те, що формула Релея справедлива тільки для випадку нормальної дисперсії і використовувати її для аномальної дисперсії не можна. Хід доведення цього такий. Із рис. 11.3, а видно, що ділянка аномальної дисперсії, де $dn/d\omega < 0$, спостерігається на тій самій ділянці спектра, що і смуга поглинання. Із теорії дисперсії відомо, що зміни показника заломлення тим більші, чим сильніше поглинання, яке входить у формулу для показника заломлення через сталу радіаційного згасання γ . У сильно поглинальній речовині, де можна було б зафіксувати групову швидкість, більшу за швидкість світла у вакуумі, інтенсивність світлового потоку зменшується на порядок на відстані в декілька λ . За таких умов не можна використовувати як поняття хвильового пакета, так і його швидкості. Проте зробити висновок із цього про неможливість випадку $v_{gr} > c$, на нашу думку, не можна. Гадаємо, що такий підхід суттєво спрощує фізику процесів, які відбуваються в області спектра із сильним поглинанням та аномальною дисперсією.

Зауважимо, що з наведеними тут фізичними механізмами пов'язаний "інформаційний бум" останніх років, що був піднятий переважно в засобах масової інформації та інтернеті навколо "сповільнення", і навіть "зупинки" світла. Фізичне пояснення процесів, що відбуваються в таких експериментах, можна прочитати в [журн.

"Успехи физических наук", 2004, т. 174, № 10, с. 1105–1108; 2006, т. 176, № 10, с. 1093–1102].

11.2.22. Релятивістський електрон проходить тонкий шар діелектрика з показником заломлення n . За яких умов у речовині виникає випромінювання Вавилова–Черенкова? Яка його направленість? Прийняти, що за час проходження цього шару швидкість електрона залишається постійною.

Якщо в тонкий шар речовини влітає релятивістський електрон з груповою швидкістю u_e , то він викликає випромінювання, що поширюється із фазовою швидкістю $v = \frac{c}{n}$. За час Δt хвиля утворює сферу радіуса AD , тоді як електрон за цей час переміщується на відстань AC (рис. 11.4). Навколо рухомого електрона утворюється короткочасна поляризація речовини, молекули якої стають короткочасними джерелами когерентних ЕМХ. Результатом їх інтерференції є випромінювання Вавилова–Черенкова. Однак це буває лише за швидкості електрона $u_e > v = \frac{c}{n}$. Коли ж швидкість електрона $u_e < v = \frac{c}{n}$, то елементарні хвилі взаємно компенсуються і випромінювання не спостерігається. Розглянемо докладніше цей механізм.

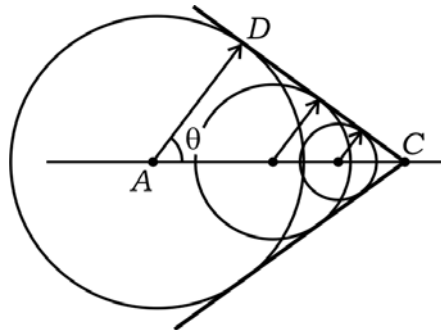


Рис. 11.4. До запитання 22

В усіх точках на своєму шляху AC електрон створює хвилі радіаційного випромінювання, тому утворюється хвильовий фронт по прямій DC . Пряма AD визначає напрямок нормалі до хвильового фронту, тому кут θ між напрямком випромінювання і напрямком руху електрона визначається з умови

$$\cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{v}{u_e} = \frac{c}{nu_e}.$$

Навіть із цього отриманого математичного виразу ($\cos \theta \leq 1$) видно, що умовою існування такого випромінювання є виконання умови $u_e > v = \frac{c}{n}$, тобто швидкість електрона має бути більшою за фазову швидкість світла в речовині.

11.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 11.1. Показник заломлення прозорої речовини для деякого спектрального діапазону описується дисперсійною формулою Коші $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$. Визначте: а) дисперсію показника заломлення речовини; б) фазову швидкість світла; в) групову швидкість світла.

Розв'язання: а) дисперсія показника заломлення речовини визначається за формулою

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right) = -\frac{2B}{\lambda^3}; \quad (11.14)$$

б) фазова швидкість у речовині

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + B/\lambda^2} = c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B}; \quad (11.15)$$

в) групова швидкість світла в речовині визначається за формулою Релея (11.6):

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad \text{де} \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B} \right) = c \frac{2B\lambda}{(A\lambda^2 + B)^2}.$$

Тоді

$$u = c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B} - c \frac{2B\lambda^2}{(A\lambda^2 + B)^2} = c\lambda^2 \frac{A\lambda^2 - B}{(A\lambda^2 + B)^2}. \quad (11.16)$$

Приклад 11.2. Показник заломлення повітря за нормальних умов ($t_1 = 0^\circ\text{C}$, $p_1 = 760$ мм рт. ст.) для жовтої лінії натрію дорівнює $n_1 = 1,0002918$. Визначте показник заломлення n_2 повітря для цієї довжини хвилі за температури $t_2 = 30^\circ\text{C}$ і тиску $p_2 = 3 \cdot 10^6$ Па.

Розв'язання. Для розрахунку показника заломлення скористаємося формулою Лоренца (11.2). Вважатимемо, що зі зміною температури й тиску змінюється тільки концентрація атомів N . Тоді із формули (11.2) легко отримати відношення

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Концентрація електронів (осциляторів) N пропорційна густині повітря ρ , тобто

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Із рівняння Клапейрона – Менделєєва для двох станів повітря маємо

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}.$$

Тоді $\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$, а звідси $n_2 = \sqrt{1 + (n_1^2 - 1) \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}}$. Після підстановки вихідних даних отримаємо

$$n_2 = \sqrt{1 + (1,0002918^2 - 1) \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 273}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 303}} = 1,00777.$$

Приклад 11.3. *Розрахуйте, випромінювання якої максимальної довжини хвилі можуть пройти через атмосферу Землі.*

Розв'язання. Випромінювання не з будь-якою довжиною хвилі може пройти через атмосферу (точніше, іоносферу) Землі. Іонізований стан атомів і молекул атмосфери (іоносфери) характеризується своїм значенням плазмової частоти ω_p (або плазмової довжини хвилі $\lambda_p = 2\pi \frac{c}{\omega_p}$). Максимальна довжина хвилі (λ_{\max}) випромінювання, яке ще може подолати земну атмосферу, дорівнює плазмовій довжині хвилі $\lambda_{\max} = \lambda_p = 2\pi \frac{c}{\omega_p}$. З урахуванням (11.7) маємо

$$\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / m} \approx 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{N} \approx 5,64 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином,

$$\lambda_{\max} = \lambda_p = 2\pi \frac{c}{\omega_p} \approx 34 \text{ м}$$

Випромінювання з довжиною хвилі $\lambda \sim 34$ м належить до радіохвиль. Зроблений тут розрахунок показав, що випромінювання з довжиною хвилі $\lambda < 34$ м може пройти через атмосферу, і за його допомогою, зокрема, можна встановити радіозв'язок із космічною орбітальною станцією.

Приклад 11.4. Показник заломлення іоносфери для радіохвиль із частотою $\nu = 10$ МГц дорівнює $n = 0,9$. Знайдіть концентрацію N електронів у іоносфері, фазову та групову швидкості для цих хвиль.

Розв'язання. Оскільки іоносфера являє собою плазму, для неї $\omega_0 = 0$. Тоді з (11.6) маємо

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (11.7)$$

де ω_p – плазмова частота. Циклічна частота радіохвиль

$$\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^6 = 6,28 \cdot 10^7 \text{ Гц.}$$

Звідси можна визначити концентрацію електронів

$$N = \frac{(1 - n^2)m\omega^2}{4\pi e^2} \approx 0,24 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

Фазова швидкість $\upsilon = \frac{c}{n} \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – величина, більша за швидкість світла у вакуумі. Для визначення групової швидкості скористаємося формулою Релея $u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}$. Щоб знайти $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$, продиференціюємо вираз $\upsilon = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m} \lambda^2}$, який легко отримати із формули (11.7) для n^2 , якщо врахувати, що $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}$, $n = \frac{c}{\upsilon}$:

$$\frac{d\upsilon}{d\lambda} = \frac{\left(\frac{Ne^2}{\pi m}\right)2\lambda}{2\sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m} \lambda^2}} = \frac{\left(\frac{Ne^2}{\pi m}\right)\lambda}{\sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m} \lambda^2}}.$$

Скористаємось формулою Релея (11.10):

$$u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda} = \sqrt{c^2 + \frac{Nc^2}{\pi m} \lambda^2} - \frac{\lambda^2 Nc^2 / \pi m}{\sqrt{c^2 + \frac{Nc^2}{\pi m} \lambda^2}} = \frac{c^2}{\upsilon} = c \cdot n.$$

Бачимо (довели), що для плазми виконується формула, яка пов'язує групову і фазову швидкості: $u \cdot \upsilon = c \cdot n \cdot \frac{c}{n} = c^2$ (див. запитання 11.2.20).

Таким чином, величина групової швидкості для плазми дорівнює $u = c \cdot n$. Після підстановки в цю формулу даних із умови прикладу маємо

$$u = c \cdot n = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 0,9 = 2,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Отримана величина групової швидкості менша від швидкості світла у вакуумі.

Приклад 11.5. Для розріджених газів коефіцієнт поглинання в максимумі лінії (смуги) поглинання можна отримати за формулою $K_{\max} = \frac{2\pi Ne^2}{mc\gamma}$. Як одержати цю формулу?

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли $\omega \sim \omega_0$, тобто робоча частота випромінювання перебуває в максимумі поглинання. Такий випадок можливий, оскільки для розріджених газів коефіцієнт згасання γ є незначною величиною порівняно з величиною ω_0 . Запишемо $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega(\omega_0 - \omega)$ і підставимо це значення у формулу (11.4) для $n\chi$:

$$2n\chi = \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \approx \frac{2\pi Ne^2}{m\omega} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

Знайдемо коефіцієнт поглинання

$$K = \frac{4\pi\chi}{\lambda} = \frac{2\omega n\chi}{c} = \frac{2\pi Ne^2\gamma}{mc[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]}.$$

Якщо $\omega = \omega_0$, то коефіцієнт поглинання в максимумі лінії поглинання

$$K_{\max} = \frac{2\pi Ne^2}{mc\gamma}.$$

У квантовій механіці $K_{\max} = \frac{2\pi Ne^2 f}{mc\gamma}$, де значення N замінюється на величину $(N \cdot f)$, якщо N – концентрація осциляторів, а f – сила осцилятора, яка характеризує ймовірність поглинання.

12. МЕТАЛООПТИКА

12.1. Короткі теоретичні відомості

• *Середовища з провідністю*, як і діелектрики, описуються рівняннями Максвелла. Відмінність полягає в тому, що в цьому випадку в рівняннях Максвелла слід врахувати величини, які характеризують їх провідність, а саме: \vec{j} – вектора густини струму та σ – питомої електричної провідності. Хвильове рівняння в цьому випадку має вигляд

$$\Delta E - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (12.1)$$

де ϵ та μ – діелектрична та магнітна проникності середовища, відповідно. Аналогічне хвильове рівняння можна отримати і для вектора \vec{H} магнітної напруженості ЕМХ.

• *Модель Лоренца* взаємодії світла з речовиною, яка базується на механізмі збудження світлом коливань електронів середовища, дозволяє обчислити її комплексну проникність, якою характеризують середовища з провідністю і, зокрема, метали. Комплексний показник заломлення

$$n^* = n - i\chi \quad (12.2)$$

для середовищ з провідністю складається із дійсної частини – показника заломлення n та уявної частини – показника поглинання χ . Величини n і χ пов'язані між собою співвідношеннями

$$n^2 - \chi^2 = \epsilon\mu \quad \text{та} \quad 2n\chi = \frac{4\pi\sigma}{\omega}\mu. \quad (12.3)$$

Як бачимо, відповідальним за поглинання світла в середовищі є його провідність σ . Якщо $\sigma = 0$, то і $\chi = 0$. Визначення показника заломлення речовини (дійсної та уявної його частин) є задачею еліпсометрії.

• Інтенсивність світла, яке проходить через середовище з показником поглинання χ на відстані d , описується *законом Бугера–Ламберта*:

$$I = I_0 e^{-\frac{2\omega\chi d}{c}} = I_0 e^{-Kd}, \quad (12.4)$$

де K – коефіцієнт поглинання, $K = \frac{2\omega\chi}{c} = \frac{4\pi\sigma}{c \cdot n} = \frac{4\pi\chi}{\lambda}$; I_0 – інтенсивність світла для $d = 0$.

• Існує приповерхневий шар металу, товщина якого характеризується тим, що при проходженні світла через нього, інтенсивність світла зменшується в e разів. Такий приповерхневий шар називається *скін-шаром*. Коефіцієнт відбиття світла при його нормальному падінні на поверхню металу дорівнює

$$R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}. \quad (12.5)$$

12.2. Запитання та відповіді

12.2.1. *Добре відомо, що метали відрізняються від діелектриків своєю електропровідністю: величиною, характером залежності від температури, механізмами провідності. Спробуйте коротко сформулювати основні відмінності оптичних властивостей металів і діелектриків.*

Існують принаймні три основні відмінності оптичних властивостей металів порівняно з діелектриками, а саме:

1) метали мають високий коефіцієнт відбиття R . При нормальному падінні червоного світла для срібла $R = 98\%$, для міді $R = 87\%$, для заліза $R = 40\%$. Нагадаємо, що для скла, яке може представляти типовий діелектрик, $R = 4\%$;

2) у відбитому від металеві поверхні світла завжди (окрім випадку нормального падіння) помітний еліптично поляризований компонент;

3) світло не може поширюватись у метал на помітну товщину (метали сильно поглинають світло).

12.2.2. *Які особливості має класична електронна модель взаємодії світла з металами?*

У металах частина електронів перебуває у вільному стані, ці електрони не пов'язані з якимось атомом, вони відповідають за електричну провідність металу. На відміну від оптичних електронів в атомах діелектриків на вільні електрони не діє квазіпружна сила, яка прив'язує їх до певного атома, але сила тертя (загасання) залишається. Тому рівняння (12.6) класичної теорії дисперсії для оптичного електрона в атомі і всі наслідки з нього можна застосувати і до вільного електрона, поклавши обумовлену квазіпружною силою власну частоту $\omega_0 = 0$:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t). \quad (12.6)$$

Як і у випадку розрідженого середовища (газу або пари), для металів з вільними електронами, які перебувають у хаотичному тепловому русі, справедлива формула для діелектричної проникності

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma},$$

яка із врахуванням того, що $\omega_0 = 0$, набуває вигляду

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - 2i\gamma)}, \quad (12.7)$$

де $\omega_p = \frac{4\pi N e^2}{m}$ – плазмова частота (див. запитання 11.2.4).

12.2.3. Проаналізуйте частотну залежність (12.7) діелектричної проникності для металів.

Аналіз формули (12.7) $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - 2i\gamma)}$ показує, що:

- за низьких частотах, коли $\omega \ll \gamma$ (для міді це відповідає ЕМХ з довжинами $\lambda \geq 1$ мм) формула (12.7) приводить до комплексного показника заломлення з однаковими дійсною та уявною частинами $n = \chi \gg 1$. Такі хвилі проникають углиб металу на відстань $d_e \ll \lambda_0$, де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі; d_e – товщина скіншару. Коефіцієнт відбиття R для цього випадку близький до одиниці;

- для високих частот, коли $\omega \gg \gamma$, у формулі (12.7) можна знехтувати уявним доданком $2i\gamma$, який малий порівняно з ω , і діелектрична проникність набуває вигляду

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (12.8)$$

Для проміжних частот $\omega \approx \gamma$ треба користуватись формулою (12.7), яка містить для показника заломлення відмінні від нуля дійсну та уявну частини, що залежать від частоти. Зокрема, показник поглинання χ випромінювання при його поширенні в металі істотно залежить від ω . Дійсно, дуже тонкий шар металу прозорий для видимого світла, але значно поглинає ІЧ випромінювання.

12.2.4. Які висновки для практики можна зробити, аналізуючи формулу $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, яка використовується для середовищ з провідністю для високих частот, коли $\omega \gg \gamma$?

Із формули $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ видно, що плазмова частота ω_p відіграє роль своєрідної критичної частоти. За $\omega < \omega_p$ діелектрична проникність $\varepsilon(\omega)$ від'ємна, а показник заломлення $n(\omega)$ уявний. За суто уявного показника заломлення $n(\omega)$ коефіцієнт відбиття $R=1$. Тобто хвилі з частотами $\omega < \omega_p$ (але $\omega \gg \gamma$), не можуть поширюватись у металі, а повністю відбиваються від поверхні метала. Чим нижче частота (чим більша λ) за $\omega < \omega_p$, тим краще відбиття світла. Ось чому майже всі метали за великих значень λ (напр., для $\lambda = 10$ мкм) мають $R=1$. За $\omega > \omega_p$ показник заломлення $n(\omega)$ дійсний, метал прозорий для випромінювання. Зазвичай плазмова частота ω_p у металів потрапляє в область рентгенівських променів, для деяких металів ω_p починається з УФ діапазону.

12.2.5. *Покажіть, що за допомогою класичної електронної моделі взаємодії світла з речовиною при нехтуванні загасань електронних коливань при нормальному падінні світла на межу повітря–метал коефіцієнт відбиття $R=1$. (Чому всі метали, починаючи з деякої довжини хвилі, добре відбивають світло?)*

При нехтуванні загасань електронних коливань ($\gamma=0$) або для випадку $\omega \gg \gamma$ діелектрична проникність речовини змінюється при зміні частоти випромінювання за законом $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, де ω_p – плазмова частота, $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e}$. За

$N = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ величина ω_p відповідає довжині хвилі $\lambda_p = 0,3$ мкм. Для видимого діапазону світла $\omega < \omega_p$ величина $\varepsilon(\omega)$ виявляється від'ємною ($\varepsilon < 0$), а комплексний показник заломлення n^* тоді є суто уявним: $\text{Re} \sqrt{\varepsilon} \equiv n = 0 \Rightarrow n^* = i\chi$.

Для металів коефіцієнт відбиття R при його нормальному падінні на поверхню металу визначається за формулою (12.5): $R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}$ (див. приклад 12.3). Для

розглянутого випадку $R=1$. Усі метали, починаючи з деякої довжини хвилі, добре відбивають світло, їх добре відполіровані поверхні мають "металевий блиск". Для великих довжин хвиль ($\lambda \sim 10$ мкм) майже всі метали мають $R \approx 1$.

12.2.6. *Чим пояснити, що кожен із металів має свій колір: золото – жовтий, алюміній – білий і т. д.?*

Для деяких металів (напр., для золота) плазмова частота ω_p лежить у видимому діапазоні. Оскільки для $\omega > \omega_p$ у показнику заломлення з'являється дійсна частина, то величина коефіцієнта відбиття R помітно спадає. При цьому поверхня металу виглядає не білою, як було за $\omega < \omega_p$, а набуває кольору, який визначається величиною ω_p . Наприклад, золото має $\lambda_p = 0,6$ мкм, тому воно слабо відбиває синьо-зелене світло і добре жовто-червоне.

Для алюмінію величина λ_p лежить у УФ діапазоні. Тому алюміній добре відбиває видиме світло в усьому діапазоні, і його поверхня виглядає білою.

12.2.7. Оцініть глибину проникнення світла в середовище з провідністю (напр., для міді).

Якщо в законі Бугера–Ламберта показник експоненти покласти рівним одиниці $\frac{2\omega\chi}{c}d_e = 1$, то d_e дорівнюватиме глибині проникнення світла в середовище з провідністю, на якій інтенсивність світла зменшується в $e \approx 2,7$ раза. (Величину $d_e = \frac{c}{2\omega\chi} = \frac{c \cdot n}{4\pi\sigma} = \frac{\lambda}{4\pi\chi}$ називають товщиною скін-шару).

Розрахована для міді величина d_e добре збігається з експериментальними результатами:

λ	0,1 мкм (УФ)	10 мкм (ІЧ)	10 см (НВЧ)
d_e	$6,2 \overset{\circ}{\text{Å}}$	$62 \overset{\circ}{\text{Å}}$	$6200 \overset{\circ}{\text{Å}}$

12.2.8. Розрахуйте, у скільки разів послаблюється інтенсивність світла на глибині металу, що дорівнює довжині хвилі світла. При цьому врахуйте, що для більшості металів $\chi = 1,5 - 5$.

Згідно із законом Бугера–Ламберта при проходженні світла шару металу товщиною $d = \lambda$ інтенсивність світла послаблюється в $e^{4\pi\chi}$ разів. Розрахунок величини $\frac{I_0}{I} = \exp(4\pi\chi)$ для значення $\chi = 1,5$ дає величину $\frac{I_0}{I} \approx 1,5 \cdot 10^8$, а для $\chi = 5$ величина $\frac{I_0}{I} \approx 3,7 \cdot 10^{28}$.

12.2.9. Чому твердження, що швидкість поширення світла $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, для середовищ з провідністю не справедливе?

Правильним для всіх середовищ (діелектриків, напівпровідників, металів) є твердження, що $v = \frac{c}{n}$. Проте для середовищ з провідністю $n \neq \sqrt{\epsilon\mu}$, а дорівнює

$n = \sqrt{\epsilon\mu + \chi^2}$. При цьому треба враховувати, що величина χ , як видно зі співвідношення (12.3), залежить від σ, μ, ω .

12.2.10. Порівняйте типову залежність коефіцієнта відбиття від кута падіння для металу з такою самою залежністю для діелектрика.

Залежності коефіцієнта відбиття від кута падіння для металів (рис. 12.1) і для діелектриків (рис. 5.3) схожі.

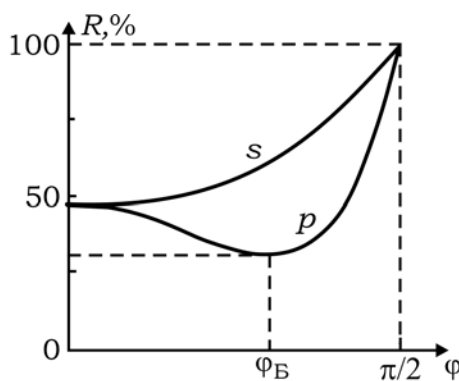


Рис. 12.1. До запитання 12.2.10

Відмінність полягає в тому, що:

1) при нормальному падінні світла на поверхню зразка значення R для металів помітно більші за значення R для діелектриків: $\sim 50\%$ і $\sim 4\%$, відповідно;

2) значення R_p для металів, на відміну від випадку для діелектриків при куті Брюстера, не досягає нуля в мінімумі;

3) при відбитті світла від поверхні металу між p - та s -компонентами виникає різниця фаз. Лінійно поляризоване світло при відбитті від металу стає еліптично поляризованим.

12.2.11. Запишіть вирази, які визначають коефіцієнти відбиття за інтенсивністю

$\left(R = \frac{I_{\text{відб}}}{I_{\text{пад}}} \right)$ для металів і діелектриків при нормальному падінні світла.

Для діелектриків $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$. Для металів $R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}$.

12.2.5. На яких фізичних принципах базується еліпсометрія?

За допомогою методів еліпсометрії можна виміряти коефіцієнт відбиття R і параметри еліптично поляризованого світла (зсув фаз $\delta = \delta_p - \delta_s$ між p - та s -компонентами, відношення великої і малої осей еліпса a/b , азимут – нахил великої осі еліпса до площини падіння). Використовуючи залежність цих величин від дійсної та уявної частин (n і χ) показника заломлення речовини, розраховують значення n і χ за відомими формулами з двох експериментально виміряних величин.

Основні формули для розрахунків n і χ (їх доведення див. у прикладі 12.3) такі:

$$R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2} \quad \text{та} \quad \frac{a}{b} = \frac{1-n^2 - \chi^2}{2\chi}.$$

12.2.13. Чи можна користуватись наведеними в довідниках загального використання значеннями діелектричної проникності ε та питомої провідності σ для розрахунків n і χ ?

Ні, не можна. Це пов'язано з тим, що значення ε та σ , наведені в довідниках належать до статичних або квазістатичних (низькочастотних) полів.

12.2.14. У таблиці наведено виміряні методами еліпсометрії для певної довжини хвилі величини дійсної n та уявної χ частин показника заломлення різних металів:

Метал	χ	n
залізо	1,63	1,51
мідь	4,26	2,06
золото	2,82	0,37
срібло	3,64	0,18
натрій	2,61	0,005

Зробіть фізичні висновки, які випливають із цих даних.

Можна зробити такі висновки:

- для деяких металів (золото, срібло, натрій) величина $n < 1$. На таку можливість вказувалось при розгляді теми "Дисперсія світла" (розд. 11);

- теорія (див. (12.3)) вимагає, щоб добуток дорівнював $n\chi = \frac{4\sigma\mu}{v}$. Якщо пере-

вирити це співвідношення за результатами із таблиці, то побачимо значне розходження. Однією із причин, яка пояснює це, є те, що при падінні світла видимого діапазону на метал помітну роль у поглинанні світла відіграють не тільки вільні електрони, але й зв'язані електрони. Водночас співвідношення (12.3) добре виконується в далекій ІЧ області.

12.2.5. У якому випадку площини рівних фаз і площини рівних амплітуд взаємно перпендикулярні?

У поглинальному середовищі хвильовий вектор \vec{k} – комплексна величина, $\vec{k} = \vec{k}' - i\vec{k}''$.

Врахуємо, що $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' - i\varepsilon'') = k'^2 - k''^2 - i2\vec{k}'\vec{k}''$. Тоді, як видно з остан-

ньої формули, можна записати $k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'$, $2\vec{k}'\vec{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''$. Вектор \vec{k}' вказує на

напрямок поширення хвиль рівних фаз, \vec{k}'' – показує напрямок, у якому зменшується амплітуда хвилі. У загальному випадку площини рівних фаз і рівних амплітуд не перпендикулярні одна одній. Якщо ж $\varepsilon'' = 0$, то із $2(\vec{k}'\vec{k}'') = 0$ випливає, що $k' \perp k''$. Це свідчить про те, що в середовищі, де немає поглинання, площина рівних фаз перпендикулярна до площини рівних амплітуд.

12.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 12.1. Визначте коефіцієнт відбиття від алюмінієвого дзеркала при нормальному падінні світла на нього для довжини хвилі $\lambda = 620$ нм. Показник заломлення для цієї довжини хвилі для алюмінію $n = 1,304$, а показник поглинання $\chi = 7,48$. Порівняйте одержаний коефіцієнт відбиття з коефіцієнтом відбиття для скляної пластинки $n = 1,5$.

Розв'язання. Коефіцієнт відбиття світла від скла при нормальному падінні дорівнює

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{1,5-1}{1,5+1} \right)^2 = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

Для алюмінієвого дзеркала коефіцієнт відбиття світла при нормальному падінні дорівнює

$$R_{\text{Al}} = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2} = \frac{(1,304-1)^2 + (7,48)^2}{(1,304+1)^2 + (7,48)^2} = 0,97 \Rightarrow R = 97\%$$

Приклад 12.2. Знайдіть плазмову частоту для алюмінію, вважаючи, що дисперсія в інфрачервоній ділянці спектра для алюмінію описується лише вільними електронами. Для довжини хвилі $\lambda = 2,5$ мкм показник заломлення буде $n = 3,1$, а показник поглинання $\chi = 25,6$.

Розв'язання. Спочатку запишемо дисперсійні рівняння (11.3) і (11.4) для розрідженого газу:

$$n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \quad n\chi = \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Для вільних електронів у металі $\omega_0 = 0$, а $m = m^*$ (ефективна маса). Тоді ці рівняння набудуть вигляду

$$n^2 - \chi^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m^*} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 4\gamma^2} \Rightarrow -n^2 + \chi^2 + 1 = \frac{4\pi Ne^2}{m^*} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 4\gamma^2}, \quad (12.9)$$

$$n\chi\omega = \frac{4\pi Ne^2}{m^*} \cdot \frac{\gamma}{\omega^2 + 4\gamma^2}. \quad (12.10)$$

Плазмову частоту ω_p можна розрахувати за формулою $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m^*}}$, але нам не відомі значення деяких величин (N, m^*). Тому скористаємось рівняннями (12.9) та (12.10), переписавши їх у вигляді

$$1 - n^2 + \chi^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 4\gamma^2}, \quad (12.11)$$

$$n\chi\omega = \frac{\omega_p \gamma}{\omega^2 + 4\gamma^2}. \quad (12.12)$$

Із (12.11) та (12.12) маємо $n\chi\omega = (1 - n^2 + \chi^2)\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{n\chi\omega}{1 - n^2 + \chi^2}$.

Розрахуємо коефіцієнт γ , що характеризує згасання, урахувавши, що $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$:

$$\gamma = \frac{3,1 \cdot 25,6 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10^4}{1 - 9,4 + 654,3} = 9,2 \cdot 10^{-13}$$

Використавши формулу (12.11) або (12.12), одержимо, що $\omega_p \approx 2 \cdot 10^{16}$ Гц.

Приклад 12.3. *Знайдіть, чому дорівнює коефіцієнт відбиття світла при нормальному падінні на метал? Чому дорівнює різниця фаз між падаючою на метал і відбитою хвилями у випадку нормального падіння?*

Розв'язання. Згідно із формулами Френеля відношення напруженостей відбитої та падаючої світлової хвилі при нормальному падінні світла на межу повітря–діелектрик для обох її складових дорівнює

$$\frac{E^r}{E} \equiv \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}} = \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}} = -\frac{n-1}{n+1},$$

де E та E^r – амплітуди падаючої та відбитої хвиль, відповідно; E_{\perp} та E_{gt}^r , E_{\perp}^r та E_{gt}^r – амплітуди складових відносно площини падіння падаючої та відбитої хвиль, відповідно.

Для металів показник заломлення є комплексною величиною, а саме: $n^* = n - i\chi$. Тоді

$$\frac{E^r}{E} = -\frac{(n-1) - i\chi}{n+1 + i\chi} = \rho e^{i\delta}, \quad (12.13)$$

де δ – різниця фаз між падаючою та відбитою хвилями. Величина амплітудного коефіцієнта відбиття (ρ) визначатиме коефіцієнт відбиття R за інтенсивністю на межі метал–повітря:

$$R = \rho^2 = \left(\frac{E^r}{E}\right) \cdot \left(\frac{E^r}{E}\right)^* = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2},$$

де $\left(\frac{E^r}{E}\right)^*$ – величина, спряжена до $\left(\frac{E^r}{E}\right)$. Перетворимо вираз (12.13) у вираз, який

має вигляд комплексного числа $a + ib$:

$$\begin{aligned} \frac{E^r}{E} &= -\frac{[(n-1)-i\chi][n+1-i\chi]}{(n+1)^2+\chi^2} = -\frac{n^2-1-\chi^2}{(n+1)^2+\chi^2} = -\frac{n^2-1-\chi^2-2in\chi}{(n+1)^2+\chi^2} = \\ &= \frac{1+\chi^2-n^2}{(n+1)^2+\chi^2} + i\frac{2n\chi}{(n+1)^2+\chi^2}. \end{aligned}$$

Скористаємось тим, що

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{2n\chi}{1+\chi^2-n^2}.$$

Таким чином, $\delta = \operatorname{arctg} \frac{2n\chi}{1+\chi^2-n^2}$.

13. РОЗСІЯННЯ СВІТЛА

13.1. Короткі теоретичні відомості

- Розсіянням світла називається процес взаємодії світла з речовиною, у результаті якої відбувається зміна напрямку його поширення і виникає невласне світіння речовини. Розсіяння світла відбувається при його поширенні в оптично неоднорідних середовищах. Розсіяння світла може відбуватись як без зміни λ (релеївське, молекулярне розсіяння), так і зі зміною λ (розсіяння Мандельштама–Бріллюена, комбінаційне розсіяння).

Розсіяння світла безпосередньо пов'язане із взаємодією світлової хвилі з електронами середовища, виникненням вторинних хвиль, які когерентні між собою та дифракцією світла на неоднорідностях. Інтенсивність розсіяного світла значною мірою залежить від співвідношення між характерним розміром неоднорідностей d і довжиною хвилі λ .

- Релеївське розсіяння. Якщо $d < \lambda$ ($d \sim 0,1\lambda$), то розсіяння світла належить до релеївського типу розсіяння, основною рисою якого є залежність

$$I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (13.1)$$

Інтенсивність розсіяного світла у разі, коли падаюче світло – природне (неполяризоване), визначається формулою

$$I_{\text{розс}} = I_{\perp} (1 + \cos^2 \theta), \quad (13.2)$$

де θ – кут між напрямом спостереження розсіяного світла та напрямком поширення прямого пучка світла; I_{\perp} – інтенсивність світла, розсіяного під кутом $\theta = \pi/2$. Для випадку $\theta = \pi/2$ розсіяне світло повністю або майже повністю лінійно поляризоване з площиною поляризації (площиною коливань вектора \vec{E}), перпендикулярною до напрямку поширення прямого світлового пучка.

- Молекулярне розсіяння світла відбувається в середовищах, у яких відсутні сторонні частинки, у цьому разі оптичні неоднорідності в речовині виникають унаслідок флуктуацій, які обумовлені тепловим рухом молекул, що призводить до нерівномірного просторового їх розподілу в речовині.

Молекулярне розсіяння світла може виникати не тільки завдяки флуктуації густини речовини. Наприклад, у розчинах причиною розсіяння можуть бути флуктуації концентрації розчиненої речовини. Окрім того, оптичні неоднорідності можуть виникати внаслідок флуктуацій орієнтації анізотропних молекул у речовині.

А. Ейнштейн у 1910 р., виходячи з ідеї флуктуації густини середовища, створив кількісну термодинамічну теорію молекулярного розсіяння в рідинах і реальних газах. Він одержав формулу для інтенсивності розсіяного світла, окремим випадком якої є формула Релея.

Молекулярне розсіяння світла може виникати не тільки завдяки флуктуації густини речовини. Наприклад, у розчинах причиною розсіяння можуть бути флуктуації концентрації розчиненої речовини.

- Розсіяння світла Мандельштама–Бріллюена виникає внаслідок того, що оптичні неоднорідності, які виникли в середовищі, поширюються в ньому. При цьому частота розсіяного світла змінюється: в розсіяному світлі поряд із частотою падаючої хвилі ω з'являються компоненти з частотами $\omega + \Omega$ та $\omega - \Omega$. Величина Ω у разі руху оптичної неоднорідності у вигляді флуктуації густини середовища дорівнює частоті акустичної хвилі, що поширюється у визначеному напрямку.

Відносна зміна частоти розсіяного світла

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Omega}{\omega} = 2n \frac{v}{c} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (13.3)$$

де v – швидкість поширення пружної хвилі в середовищі; θ – кут розсіяння; n – показник заломлення середовища; c – швидкість світла у вакуумі.

Підстановка числових значень у формулу (13.3) приводить до того, що зміна частоти $\Delta\omega$ становить величину порядку $(10^{-5} - 10^{-6})\omega$. Зареєструвати такі малі зміни частоти можна лише на спектральних приладах високої роздільної здатності типу інтерферометра Фабрі–Перо. Усе це дозволяє казати про лінії розсіювання Мандельштама–Бріллюена як про тонку структуру спектральної лінії релеївського розсіювання. Розсіяння світла можливе не тільки на акустичних хвилях (фононах), а також на інших колективних збудженнях: магнонах, поляритонах, екситонах, плазмонах тощо. Розсіяння Мандельштама–Бріллюена не залежить від інтенсивності світла і належить до лінійної оптики. За великих потужностей світлової хвилі спостерігається залежність $I_{\text{розс}}$ від інтенсивності падаючого світла, таке явище називається *вимушеним розсіянням Мандельштама–Бріллюена*.

- *Комбінаційне розсіяння* (КР) уперше в 1928 р. на кристалах (кварцу та ісландського шпату) спостерігали Л. І. Мандельштам і Г. С. Ландсберг, а в рідинах (бензол та толуол) – Ч. Раман.

Основні закономірності КР полягають у тому, що:

1) спектральні дослідження розсіяного світла показують, що кожна спектральна лінія первинного світла супроводжується виникненням системи додаткових ліній, які називаються супутниками (сателітами) зі значно більшими змінами частоти, ніж у розсіянні Мандельштама–Бріллюена;

2) частоти сателітів $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$ відрізняються від частоти спектральної лінії первинного збуджувального світла ν_0 на значення $\Delta\nu_i$. При переході від однієї спектральної лінії первинного пучка до другої сукупність значень $\Delta\nu_i$ залишається для певної речовини незмінною:

$$\Delta\nu_1 = \nu_0 - \nu_1; \Delta\nu_2 = \nu_0 - \nu_2; \dots \Delta\nu_i = \nu_0 - \nu_i \dots \quad (13.4)$$

3) різниця $\Delta\nu_i$ у частотах збуджувальної первинної лінії ν_0 і лінії кожного із супутників ν_i дорівнює частотам власних коливань молекул речовини;

4) кожному сателіту із частотою $\nu_i^{\text{ч}} = \nu_0 - \Delta\nu_i$, зміщеному в червону частину спектра, відповідає сателіт із частотою $\nu_i^{\text{ф}} = \nu_0 + \Delta\nu_i$, зміщений симетрично відносно ν_0 у фіолетову частину, тобто

$$\nu_0 - \nu_i^{\text{ч}} = \nu_i^{\text{ф}} - \nu_0 = \Delta\nu_i. \quad (13.5)$$

Довгохвильові сателіти називаються червоними або стоксовими, короткохвильові – фіолетовими або антистоксовими;

5) інтенсивність антистоксових сателітів значно менша інтенсивності стоксових сателітів.

За спектрами КР можна проводити структурні та аналітичні дослідження. Параметри лінії КР (частота, інтенсивність, ступінь поляризації, ширина) в основному визначаються структурою та симетрією молекул досліджуваних речовин.

13.2. Запитання та відповіді

13.2.1. Яке середовище вважається оптично неоднорідним?

Неоднорідність середовища завжди пов'язують зі зміною показника заломлення n і навпаки, якщо показник заломлення змінює свою величину в різних точках середовища, то таке середовище вважається оптично неоднорідним. Неоднорідності можуть бути пов'язані, наприклад, з флуктуаціями густини, наявністю в середовищі частинок сторонніх домішок тощо.

При розгляді розсіяння світла в неоднорідних середовищах виключають випадок регулярного (упорядкованого) розподілу неоднорідностей середовища.

13.2.2. *Які види розсіяння світла в неоднорідних середовищах розрізняють залежно від розміру неоднорідностей?*

До класичних типів розсіяння світла належить розсіяння у випадках різних співвідношень між довжиною хвилі λ світла та розміром неоднорідностей (частинок) d :

1) $d \ll \lambda$ (релеївське розсіяння). До цього виду розсіяння належить і молекулярне розсіяння;

2) $d \gg \lambda$. Таке розсіяння обумовлене відбиттям, заломленням і дифракцією світла на неоднорідностях (частинках);

3) $d \sim \lambda$. Таке розсіяння називається розсіянням Mi , або дифракційним розсіянням.

13.2.3. *Які види неоднорідних середовищ розрізняють?*

Вид розсіяння світла пов'язують з макроскопічними характеристиками неоднорідностей. У зв'язку із цим розрізняють такі види неоднорідних середовищ: тверді частинки в газі – дим; рідкі частинки в газі – аерозолі; тверді частинки в рідині – суспензії; рідина, у якій наявні краплинки іншої нерозчиненої рідини, – емульсії; теплові флуктуації концентрації молекул.

13.2.4. *Від чого залежить поляризація розсіяного світла? Чи поляризоване сонячне світло, розсіяне атмосферою?*

Розсіяне світло частково поляризоване навіть у випадку, коли світло, що падає, неполяризоване. Ступінь поляризації залежить від оптичних властивостей неоднорідностей і від напрямку, уздовж якого спостерігається розсіяне світло. Якщо світло, що падає, поляризоване, то поляризація розсіяного світла залежить також від його поляризації.

У напрямку, перпендикулярному напрямку поширення прямого променя, світло, розсіяне, наприклад, на флуктуаціях концентрації молекул (розсіяння Релея), теоретично має бути повністю лінійно поляризованим (див. запитання 13.2.19). Однак, наприклад, сонячне світло поляризоване для цього випадку лише частково. Це пов'язано з тим, що одночасно з релеївським розсіянням сонячного світла спостерігається релеївське розсіяння світла, дифузно відбитого від земної поверхні, а також розсіяння Mi на аерозольних частинках в повітрі. Деяку роль у деполіризації світла відіграє також невелика оптична анізотропія молекул, що складають повітря.

13.2.5. *Запишіть формулу Релея для інтенсивності розсіяного світла.*

Якщо подумки поділити середовище на елементарні об'єми δV_i , які малі порівняно з кубом довжини світла λ^3 і водночас містять невелику кількість молекул, то додатковий дипольний момент $\delta \vec{p}_i$ об'єму δV_i , обумовлений флуктуаціями діелектричної проникності величиною $\delta \epsilon_i$, становить величину $\delta \vec{p}_i = \frac{\delta \epsilon_i \cdot \delta V_i}{4\pi} \vec{E}_0$. Для падаючого природного світла інтенсивність розсіяного світла в цьому випадку дорівнює

$$I_{\text{розс}(i)} = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2r^2} \langle (\delta \epsilon_i)^2 \rangle \cdot (\delta V_i)^2. \quad (13.6)$$

Для газів, для яких показник заломлення n близький до одиниці, можна записати, що $n^2 - 1 \approx 2(n - 1)$. В ідеальних газах кількість молекул у різних елементарних об'ємах флуктує незалежно, тому для визначення інтенсивності $I_{\text{розс}}$ розсіяного світла в об'ємі V світла треба величину $I_{\text{розс}(i)}$ помножити на $V/\delta V_i$. Таким чином можна отримати формулу Релея для інтенсивності розсіяного світла:

$$I_{\text{розс}} = I_0 \frac{2\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{V}{N} (n - 1)^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad (13.7)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла; λ – довжина хвилі світла; V – об'єм газу, у якому спостерігається розсіяння світла на *флуктуаціях концентрації* молекул; N – середня кількість молекул в одиниці об'єму середовища; r – відстань від розсіюючого об'єму до точки спостереження; θ – кут спостереження розсіяного світла.

У випадку розсіювання лінійно поляризованого світла множник $(1 + \cos^2 \theta)/2$ у (13.7) слід замінити на $\sin^2 \theta$.

13.2.6. *Наведіть і проаналізуйте кутову залежність інтенсивності світла, розсіяного у випадку $d < \lambda$.*

Вид розсіяння світла на частинках з розміром $d < \lambda$ або $d \sim 0,1\lambda$ належить до релєвського розсіяння. У наведених формулах (13.2) і (13.3) кут θ – кут між напрямком спостереження та напрямком прямої хвилі.

Крива розподілу інтенсивності розсіяного світла у площині розсіяння залежно від кута розсіяння називається індикатрисою розсіяння (рис. 13.7) й описується формулою (13.2):

$$I_{\text{розс}} = I_{\perp} (1 + \cos^2 \theta),$$

де θ – кут розсіяння; I_{\perp} – інтенсивність розсіяного світла під кутом $\theta = \pi/2$.

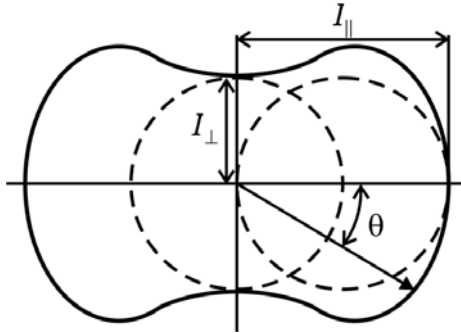


Рис. 13.1. Індикатриса розсіяння Релея

У разі обертання індикатриса розсіяння відносно осей симетрії, яка збігається з напрямком падаючого світла, одержують просторову полярну діаграму інтенсивності розсіяного світла. Із формули (13.7) випливає, що інтенсивність світла, яке пройшло середовище в напрямку поширення падаючої хвилі, у два рази більша, ніж інтенсивність світла, розсіяного в перпендикулярному напрямку.

13.2.7. Із формули Релея (13.7), начебто, випливає, що $I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{N}$. Така залежність суперечить фізиці: чим менша концентрація осциляторів, тим більша інтенсивність розсіяного світла. Чи це так?

Ні, це не так. Тут необхідно враховувати, що діелектрична проникність $\epsilon(N)$ і показник заломлення $n(N)$ середовища є функціями концентрації осциляторів (див. розділ 11). Тому

$$\epsilon - 1 = (n^2 - 1) \sim N \Rightarrow I_{\text{розс}} \sim \frac{N^2}{N} = N.$$

13.2.8. Які фізичні висновки із формули Релея для інтенсивності розсіяного світла важливі для практики?

Аналіз формули Релея для інтенсивності розсіяного світла у випадку, коли світло, що падає, природне

$$I_{\text{розс}} = I_0 \frac{2\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{v_0}{N} (n-1)^2 (1 + \sin^2 \theta),$$

показує таке:

- $I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{\lambda^4}$. Цей висновок надзвичайно важливий для пояснення багатьох явищ у природі: синій колір неба, червоний колір сходу та заходу Сонця. Така залежність не випадково збігається із залежністю інтенсивності випромінювання ос-

цилятора від довжини хвилі в класичній теорії Г. А. Лоренца. Підкреслимо, що тільки розсіяння Релея підпадає під цей закон, інші види розсіяння мають інші залежності інтенсивності від довжини хвилі;

- формула Релея дає ще один, альтернативний до існуючих, спосіб визначення кількості молекул в одиниці об'єму та числа Авогадро.

13.2.9. Чому туман білий (сірий)?

Випадок розсіяння світла на краплях води, для яких $d \gg \lambda$, характеризується тим, що інтенсивність розсіяного світла $I_{\text{розс}}$ не залежить від довжини світла, що розсіюється.

13.2.10. Чому небо має блакитний колір?

Релей показав, що інтенсивність розсіяного світла $I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{\lambda^4}$. При проходженні світла крізь атмосферу короткохвильова (синя) частина спектра сонячного світла розсіюється більш інтенсивно, ніж довгохвильова (червона). Сонячне світло, розсіяне під кутом до напрямку первинного пучка, має синьо-блакитний відтінок, а світло в напрямку поширення первинного пучка – червоний.

13.2.11. Як виглядало б небо над нами в сонячний день, якби з невідомих причин розсіяння сонячних променів в атмосфері не відбувалося?

У цьому уявному випадку небо, як вночі, було б чорним, і на ньому яскраво світилися б зорі, а також диск Сонця. Саме таку картину спостерігають космонавти, перебуваючи над освітленим боком Землі.

13.2.12. Чому під час сходу і заходу Сонце має червоний колір?

Із закону Релея $I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{\lambda^4}$ випливає, що чим коротша довжина хвилі (у видимій частині оптичного спектра – це синє і фіолетове світло), тим більш інтенсивно воно розсіюється. Промені з малими довжинами хвиль (у першу чергу, сині), проходячи через велику товщу атмосфери, розсіюються (відхиляються в бік), тим самим збіднюючи спектр на сині кольори. Коли Сонце сідає за обрій або сходить з обрію, то ми бачимо збіднену короткими хвилями частину спектра, у якій переважає червоний компонент оптичного діапазону випромінювання Сонця.

13.2.13. За яким законом змінюється інтенсивність світла при його проходженні через неоднорідне середовище, що розсіює?

При проходженні світла через неоднорідне середовище, що розсіює, його інтенсивність зменшується, і її можна записати у вигляді співвідношення, подібного до закону поглинання світла:

$$I_{\text{пр}}(x) = I_0 e^{-2\pi N r^2 K x}, \quad (13.8)$$

де $I_{\text{пр}}(x)$ – інтенсивність світла після проходження шару середовища товщиною x ;
 I_0 – інтенсивність світла на вході в середовище; N – концентрація частинок розсі-
 яння; r – радіус частинки; K – функція, яка залежить від співвідношення r/λ .

13.2.14. Як залежить інтенсивність $I_{\text{розс}}$ розсіяного світла від довжини хвилі λ падаючого світла за фіксованого значення характерного радіуса r частинок сферичної форми, на яких відбувається розсіяння?

Залежність інтенсивності $I_{\text{розс}}$ розсіяного світла від довжини хвилі λ падаючого світла за фіксованого значення характерного радіуса r частинок сферичної форми, на яких відбувається розсіяння, описується кривою, загальний вигляд якої зображений на рис. 13.2.

За довжин хвиль $\lambda \ll r$ інтенсивність практично не залежить від довжини хвилі. Максимум інтенсивності розсіяного світла спостерігається за $\lambda \sim r$, а за довжин хвиль $\lambda \gg r$ інтенсивність розсіяного світла змінюється за законом

$$I_{\text{розс}} \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

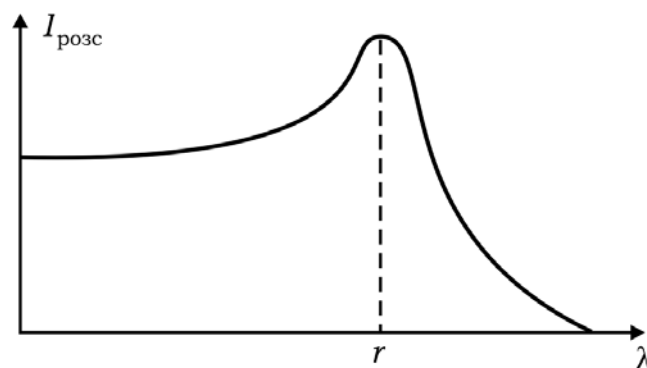


Рис. 13.2. Залежність інтенсивності $I_{\text{розс}}$ розсіяного світла від довжини хвилі λ світла;
 (r – фіксоване значення характерного радіуса частинок сферичної форми, на яких відбувається розсіяння)

13.2.15. У чому полягає фізична причина виникнення молекулярного розсіяння?

Молекулярне розсіяння виникає в середовищах без домішок сторонніх тіл (у чистих середовищах) унаслідок флуктуацій густини молекул, які пов'язані з тим, що концентрація молекул (кількість молекул в однакових і досить малих об'ємах), тобто і густини газу в будь-який момент часу – різні.

Ще однією причиною виникнення молекулярного розсіяння світла є поява оптичних неоднорідностей в однорідних середовищах, які складаються з анізотропних молекул і в яких можуть відбуватися флуктуації орієнтації молекул (флуктуації анізотропії).

Об'єми, у яких виникають флуктуації, значно менші від λ^3 . Тобто молекулярне розсіяння світла відповідає законам релеївського розсіяння.

13.2.16. *Молекулярне розсіяння світла пов'язане із флуктуаціями густини молекул тільки в об'ємі речовини, чи також і на поверхні?*

Ні, розсіяння світла відбувається не тільки в об'ємі, але й на вільній поверхні рідини та на межі двох не змішуваних рідин. Сили поверхневого натягу направлені на те, щоб зробити поверхню мінімальної площі та абсолютно гладенькою. З іншого боку, тепловий рух молекул призводить до відхилення від такого стану. Унаслідок цього на поверхні рідини виникають неоднорідності, на яких відбувається молекулярне поверхнєве розсіяння світла.

13.2.17. *Розглядаючи фізичну причину молекулярного розсіяння світла, поясніть причину явища, яке називається "опалесценцією".*

У критичному стані, коли речовина змінює свій агрегатний стан, спостерігається максимальна флуктуація концентрації молекул речовини. Величина об'єму V_0 неоднорідності, на якій відбувається розсіяння світла, при цьому сильно збільшується і стає більшою за довжину хвилі λ світла. Таке середовище стає каламутним і непрозорим для падаючого на нього світла, воно істотно розсіює світло всього діапазону спектра. Таке явище називається "опалесценцією" (див. [1, п. 160; 9, С. 216]).

13.2.18. *Чому інтенсивність світла при релеївському розсіянні, як впливає із закону Релея (13.7), обернено пропорційна до λ^4 ?*

Осциляторна модель взаємодії електромагнітного випромінювання з атомом чи молекулою викликає наведений дипольний момент $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega_0 t}$. Диполь, коливаючись з прискоренням $\ddot{\vec{p}} = -\omega_0^2 \vec{p}$, випромінює світло, інтенсивність якого дорівнює

$$(3.8): I = \frac{p_0^2 \omega_0^4}{3c^3} = \frac{16\pi^4 p_0^2 c}{3\lambda_0^4}, \text{ тобто величина } I \sim \frac{1}{\lambda_0^4}. \text{ Ця закономірність справедлива}$$

не тільки при поширенні світла в середовищі, але й при його релеївському розсіянні.

13.2.19. *Поясніть, чому природне світло, розсіяне в ізотропній речовині під прямим кутом, буде лінійно поляризованим.*

Це пояснюється двома відомими факторами: 1) електромагнітна хвиля поперечна; 2) електричний диполь не випромінює в напрямку своєї осі.

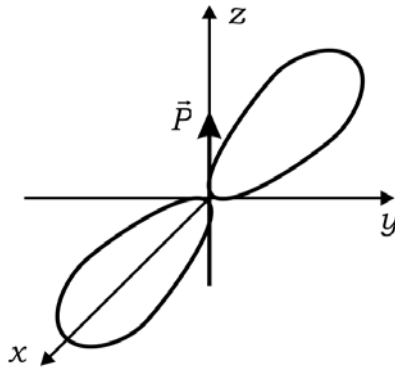


Рис. 13.3. До пояснення причин появи поляризації у розсіяного природного світла

Якщо падаюче неполяризоване світло поширюється в напрямку осі Y (рис. 13.3), то в невеликому об'ємі з розмірами, набагато меншими від довжини хвилі λ світла, виникають наведені дипольні моменти \vec{p} , які випромінюють у площині XZ . Однак у напрямку осі X випромінюють лише диполі, які або орієнтовані по осі OZ , або мають ненульову проекцію дипольного моменту на цю вісь: $p \cdot \sin \theta$, де θ – кут між напрямком поширення світла і напрямком вимірювання розсіяного світла. Тому розсіяне під прямим кутом до напрямку падаючого світла мало б бути лінійно поляризоване ($\vec{E} \parallel OZ$) зі ступенем поляризації, що дорівнює одиниці. Унаслідок теплового руху атомів чи молекул спостерігається деяка дезорієнтація диполів, тому насправді ступінь поляризації трохи менший від одиниці. (Більш детально про поляризацію розсіяного світла див. у [7, С. 306]).

13.2.20. *В ізотропній речовині розсіюється світло, поляризоване по колу. Як буде поляризоване світло, розсіяне під прямим кутом до напрямку падаючого світла?*

Світло, поляризоване по колу, як і природне (неполяризоване), має вектори електричної напруженості \vec{E} , орієнтовані у площині XZ (рис. 13.3). Тому світло, розсіяне під прямим кутом, буде лінійно поляризованим. Пояснення цього ефекту подібне до того, як це робилось у відповіді до запитання 13.2.19.

13.2.21. *У чому полягає якісна відмінність молекулярного (релеївського) розсіювання від комбінаційного (раманівського) розсіювання?*

Спочатку розберемо питання, чому в релеївському розсіянні вторинне випромінювання одного атома (молекули) не гасить випромінювання від іншого атома (молекули). Для пояснення цього явища згадаємо, що $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi N\alpha\vec{E}$, де α – поляри-

зовність молекул речовини; N – кількість молекул в одиниці об'єму речовини. Тому показник заломлення речовини $n^2 = 1 + 4\pi N\alpha$ залежить від кількості молекул (чи атомів) в одиниці об'єму. Наявність флуктуацій густини речовини створює начебто тривимірну фазову ґратку, на якій відбувається дифракція світла. Якби такі флуктуації створили б правильну періодичну структуру, то і розсіяння давало б максимуми та мінімуми в певних напрямках. Однак флуктуації густини в речовині розташовані хаотично і, окрім того, їх можна охарактеризувати лише середнім об'ємом $\langle \Delta V \rangle$. Насправді об'єм ΔV змінюється в досить широких межах, тому розсіяння відбувається рівномірно в усіх напрямках (якщо падаюче світло неполяризоване). Зміни довжини хвилі при релєвському розсіянні не відбувається.

Проте поляризованість α молекул і дипольний момент \vec{p} залежать як від структури молекул, так і від того, перебувають вони в стані спокою чи коливаються. Наприклад, лінійна молекула CO_2 у стані спокою має нульовий дипольний момент. Під дією світлової хвилі в неї виникає наведений дипольний момент. Поляризованість молекули в цьому разі можна записати як $\alpha = \alpha(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \alpha}{\partial q_m} \cdot q_m + \dots$, де $\alpha(0)$

– поляризованість молекули в стані спокою, $\frac{\partial \alpha}{\partial q_m}$ – її зміна при нормальному коливанні, записана через узагальнену координату q_m . Нагадаємо, що кількість коливальних частот дорівнює $m = 3N_{\text{ат}} - 5$ для лінійних молекул і $m = 3N_a - 6$ для нелінійних, де $N_{\text{ат}}$ – кількість атомів, що складають молекулу.

Якщо молекула коливається з власною частотою Ω_m , то координата змінюється із цією самою частотою $q_m = q_m(0) \cos \Omega_m t$.

Унаслідок коливань молекули змінюється і наведений дипольний момент:

$$p(t) = \alpha E = \left[\alpha(0) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_m} \right) q_m(0) \right] E_0 \cos(\omega_0 t - kx) = \alpha(0) E_0 \cos(\omega_0 t - kx) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_m} \right) q_m(0) E_0 \{ \cos[(\omega_0 + \Omega_m)t - kx] + \cos[(\omega_0 - \Omega_m)t - kx] \}.$$

Тобто крім релєвського розсіяння з незмінною частотою ω_0 падаючого світла, інтенсивність якого залежить від стаціонарної поляризованості $\alpha(0)$, виникає розсіяння з частотами $(\omega_0 + \Omega_m)$ та $(\omega_0 - \Omega_m)$, інтенсивність якого на порядок слабша і

яке залежить від зміни поляризованості молекул при коливанні. Це і є комбінаційне розсіяння світла.

13.2.22. Як змінюється з температурою інтенсивність стоксових та антистоксових компонентів розсіяння?

Стоксовими називають компоненти комбінаційного розсіяння, які спостерігаються з боку більших довжин хвиль (і відповідно менших частот) від релєївської лінії у спектрі. Антистоксові компоненти комбінаційного розсіяння спостерігають з боку менших довжин хвиль (і більших частот).

Відповідно до класичної точки зору інтенсивності стоксових і антистоксових компонентів мають бути однаковими. Проте на експерименті інтенсивність стоксових компонентів більша за інтенсивність антистоксових ліній. Цей факт був пояснений у квантовій теорії (див. приклад 13.2).

Із квантової точки зору при розсіянні світла зі стоксовою частотою ($\omega_0 - \Omega_m$) частина енергії падаючого кванта $\hbar\omega_0$ витрачається на збудження внутрішнього коливання молекули з енергією $\hbar\Omega_m$ (рис. 13.4). Антистоксові компоненти комбінаційного розсіяння спостерігаються, коли до енергії падаючого кванта додається енергія внутрішнього коливання молекули. (Збудження молекул, що перебували у незбудженому стаціонарному стані, під дією кванта світла з енергією $\hbar\omega_0$ відбувається через проміжні (нестационарні, віртуальні) електронні стани).

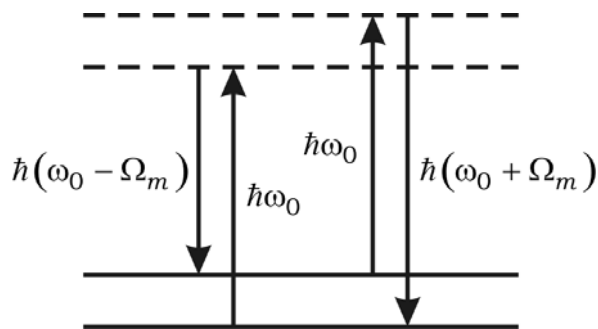


Рис. 13.4. Схема взаємодії оптичного випромінювання з молекулою, яка пояснює появу стоксових та антистоксових компонентів у комбінаційному розсіянні

Молекул, які перебувають в основному стані у процесі розсіяння, набагато більше, ніж у збудженому. Тому стоксові компоненти інтенсивніші за антистоксові. Зі зростанням температури кількість молекул у збудженому стані збільшується за зако-

ном Больцмана як $N_m = N_0 e^{-\hbar\Omega_m/kT}$. Тому за цим самим законом зі зростанням температури зростає інтенсивність антистоксових компонентів, тоді як стоксових – спадає (див. приклад 13.2).

13.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 13.1. Проходячи шар речовини товщиною 15 см, монохроматичне світло послаблюється за інтенсивністю вчетверо. Знайдіть показник розсіяння світла, якщо показник поглинання $k_\lambda = 0,0025 \text{ см}^{-1}$.

Розв'язання. У випадку, коли в речовині відбувається і поглинання, і розсіяння світла, закон Бугера–Ламберта набуває вигляду

$$I = I_0 \exp\left[-(k_\lambda + k_p) l\right],$$

тут I_0 та I – відповідно, інтенсивності світла на вході та виході з шару речовини товщиною l ; k_λ – натуральний показник поглинання; k_p – натуральний показник розсіяння. За умовою задачі відношення цих інтенсивностей дорівнює $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}$. То-

му величина $k_p = \frac{\ln 4}{l} - k_\lambda = 6,75 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$.

Приклад 13.2. У спектрі комбінаційного розсіяння в SO_2 спостерігаються лінії раманівського розсіяння із хвильовими числами $\tilde{\nu}_1 = 525 \text{ см}^{-1}$ і $\tilde{\nu}_2 = 1145 \text{ см}^{-1}$. Розсіяння збуджується аргоновим лазером з $\lambda = 514,5 \text{ нм}$. Знайдіть відношення інтенсивностей стоксівського та антистоксівського компонентів для обох ліній за температури $T = 300 \text{ К}$. З'ясуйте природу їх різних інтенсивностей.

Розв'язання. Числові характеристики коливань молекул зазвичай наводять у хвильових числах $\tilde{\nu} = 1/\lambda$, які вимірюються в см^{-1} , вони набувають значень від десятків до тисяч см^{-1} . У цих одиницях хвильове число випромінювання аргонowego лазера має значення $\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{\lambda_0} = 19436 \text{ см}^{-1}$. Хвильові числа стоксового компонента дорівнюватиме $\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}_p$, антистоксового – $\tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_p$.

Із класичної теорії відомо, що інтенсивність релєївського розсіяного світла внаслідок флуктуацій густини речовини пропорційна його частоті в четвертому степені. Тому відношення інтенсивності стоксового компонента до інтенсивності антистоксового за рахунок цього процесу визначається як

$$\frac{I_{\text{ст}}}{I_{\text{антист}}} = \left(\frac{v_{\text{ст}}}{v_{\text{антист}}} \right)^4 = \left(\frac{c\tilde{\nu}_{\text{ст}}}{c\tilde{\nu}_{\text{антист}}} \right)^4.$$

Для першого коливання $\tilde{\nu}_1 = 525 \text{ см}^{-1}$ величина $I_{\text{ст}}/I_{\text{антист}} = 0,8$; для другого коливання $\tilde{\nu}_2 = 1125 \text{ см}^{-1}$ величина $I_{\text{ст}}/I_{\text{антист}} = 0,625$.

Як бачимо, за рахунок флуктуацій густини (релеївського розсіювання) зміни в інтенсивностях стоксового та антистоксового компонентів на незначній частотній ділянці малі. Набагато сильніші зміни в інтенсивності стоксових та антистоксових компонентів виникають при врахуванні квантових властивостей речовини, а саме, за рахунок різної населеності рівнів, з яких відбувається розсіяння (див. запитання 13.2.22).

Розглянемо умови появи цих компонентів (рис. 13.4). Рівні, що відповідають незбудженому коливному стану, можна вважати заселеними з концентрацією N_0 . У збудженому коливному стані m з енергією коливання $E_m = \hbar\omega_m = hc\tilde{\nu}_m$ перебувають $N_m = N_0 \exp(-E_m/kT) = N_0 \exp(-hc\tilde{\nu}_m/kT)$ молекул.

При розсіянні з основного стану, коли виникає стоксовий компонент, бере участь N_0 молекул, тоді як антистоксові компоненти виникають при розсіянні зі збудженого стану з концентрацією N_m . Очевидно, інтенсивність кожного компонента пропорційна кількості молекул, що можуть брати участь у її створенні

$$\frac{I_{\text{ст}}}{I_{\text{антист}}} = \frac{N}{N_{\text{антист}}} = e^{hc\tilde{\nu}_m/kT}.$$

Для першого коливання $(I_{\text{ст}}/I_{\text{антист}})_1 = e^{2,5} = 12$; $(I_{\text{ст}}/I_{\text{антист}})_2 = e^{5,3} = 200$.

Очевидно, що цей механізм помітно перевищує розглянутий вище механізм релеївського розсіяння й наближує пояснення різної інтенсивності стоксового та антистоксового компонентів до експериментально спостережуваних результатів. Вплив релеївського розсіяння до уваги брати не слід.

14. ЗАКОНИ ТЕПЛООВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

14.1. Короткі теоретичні відомості

- Теплове випромінювання – це електромагнітне випромінювання із суцільним спектром, джерелом якого є нагріті тіла (Сонце, свічка, лампа розжарювання, електрична дуга, тіло людини, електричний паяльник тощо).

- Важливим елементом законів теплового випромінювання є поняття про рівноважне теплове випромінювання, яке відбувається, коли розподіл енергії між нагрітим тілом і випромінюванням для кожної довжини хвилі залишається незмінним. Це стан термодинамічної рівноваги, коли кількість енергії, що випромінюється нагрітим тілом за одиницю часу, дорівнює енергії, яку тіло отримує за одиницю часу. Температура тіла при цьому не змінюється.

- Випромінювальна здатність $M_e(T)$ тіла чисельно дорівнює енергії, що випромінюється при заданій температурі одиницею поверхні нагрітого тіла в усіх напрямках за одиницю часу в усьому інтервалі частот. Одиниця вимірювання $M_e(T)$ – Вт/м². Потік енергії, що випромінюється одиницею поверхні нагрітого тіла в усіх напрямках в інтервалі частот ω , $\omega + d\omega$ позначимо через dM_e . Для малого інтервалу $d\omega$ величина dM_e буде пропорційною $d\omega$:

$$dM_e = M_\omega \cdot d\omega, \quad (14.1)$$

де M_ω – спектральна випромінювальна здатність тіла. Окрім частоти, спектральна випромінювальна здатність залежить від температури $M_\omega(\omega, T)$. Знаючи спектральну випромінювальну здатність $M_\omega(\omega, T)$, можна знайти повну (енергетичну, інтегральну) випромінювальну здатність M_e тіла за заданої температури в усьому діапазоні частот від 0 до ∞ :

$$M_e = \int_0^{\infty} M_\omega(\omega, T) d\omega. \quad (14.2)$$

- Випромінювання можна характеризувати не тільки циклічною (ω) частотою, але й лінійною частотою (ν), або довжиною хвилі (λ). Ділянки $d\omega$ будуть відпові-

дати свої ділянки – $d\nu$ і $d\lambda$. Вони через відомі співвідношення $\nu \cdot \lambda = c$ (де c – швидкість світла) і $\omega = 2\pi\nu$, а також похідні

$$|d\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega; \quad |d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} d\nu \quad |d\omega| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda \quad \text{та} \quad d\omega = 2\pi \cdot d\nu,$$

відповідним чином пов'язані між собою.

Частина енергетичної випромінювальної здатності, що припадає на інтервал $d\lambda$, аналогічно (14.1) дорівнює

$$dM_\lambda = M_{\text{ен}}(\lambda, T) \cdot d\lambda. \quad (14.3)$$

Із (14.1) і (14.3) можемо знайти в разі необхідності значення спектральної випромінювальної здатності тіла на ділянці довжин хвиль, наприклад, від λ до $\lambda + d\lambda$:

$$M_\lambda(\lambda, T) = M_\omega(\omega, T) \frac{d\omega}{d\lambda} = M_\omega(\omega, T) \frac{2\pi c}{\lambda^2} = M_\omega(\omega, T) \frac{\omega^2}{2\pi c}. \quad (14.4)$$

- Поглинальна здатність

$$a = \frac{d\Phi'}{d\Phi}, \quad (14.5)$$

де $d\Phi$ – потік світлової енергії, що падає на поверхню тіла, обумовлений електромагнітними хвилями, значення частот яких лежать в інтервалі ω , $\omega + d\omega$; $d\Phi'$ – потік світлової енергії (частина потоку $d\Phi$), що поглинається тілом. Поглинальна здатність, як і випромінювальна здатність, залежить від частоти та температури $a(\omega, T)$.

• Тіло, яке повністю поглинає випромінювання, що падає на нього, у всьому діапазоні частот і для будь-якої температури ($a=1$) називається абсолютно чорним тілом (АЧТ). Тіло, для якого поглинальна здатність менша від одиниці та/або залежить від частоти чи температури ($a(\omega, T) < 1$), називається *сірим тілом*.

• Густина (об'ємна густина) енергії випромінювання u – кількість енергії випромінювання в одиниці об'єму:

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda, \quad (14.6)$$

де величини $u_\omega d\omega$ та $u_\lambda d\lambda$ мають зміст об'ємної густини променевої енергії, що припадає на інтервал частот ω , $\omega + d\omega$ або інтервал довжин хвиль λ , $\lambda + d\lambda$. Величини u_ω та u_λ називаються спектральними густинами променевої енергії. Для випадку рівноважного випромінювання функції u_ω та u_λ залежать тільки від частоти (довжини хвилі) і від температури випромінювання й не залежать від форми та ма-

теріалу стінок порожнини (тіла, що випромінює). Встановлення функціональної залежності $u_{\omega}(\omega, T)$ є основною задачею теорії теплового випромінювання.

- Повна енергетична випромінювальна здатність M_e АЧТ за заданої температури T пов'язана з об'ємною густиною енергії випромінювання $u(T)$ співвідношенням

$$M_e = \frac{c}{4} u(T), \quad \text{де } c - \text{швидкість світла.} \quad (14.7)$$

- Закон Кірхгофа: відношення випромінювальної здатності до поглинальної здатності не залежить від природи тіла і для всіх тіл є однією й тією самою універсальною функцією частоти (довжини хвилі) і температури:

$$\left(\frac{M_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_1 = \left(\frac{M_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_2 = \left(\frac{M_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_3 = \dots = f(\omega, T). \quad (14.8)$$

- Універсальна функція Кірхгофа $f(\omega, T)$ – це спектральна випромінювальна здатність АЧТ (величина поглинальної здатності для АЧТ $a_{\omega, T} = 1$ за визначенням). Так само, як і для спектральної випромінювальної здатності, розрізняють універсальні функції Кірхгофа трьох видів $f(\omega, T)$, $\phi(\nu, T)$ та $\phi(\lambda, T)$, які пов'язані між собою

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} \cdot \phi(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \phi(\lambda, T) = \frac{c}{2\pi \nu} \cdot \phi(\nu, T). \quad (14.9)$$

- Закон Стефана–Больцмана: інтегральна енергетична світимість $M_{ен}$ АЧТ пропорційна четвертому степеню температури цього тіла

$$M_{ен} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (14.10)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$ – стала Стефана–Больцмана; T – температура АЧТ.

- Закон зміщення Віна: довжина хвилі λ_m , на яку припадає максимум спектральної енергетичної світимості АЧТ, обернено пропорційна абсолютній температурі T :

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (14.11)$$

де $b = 2897,8 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ – стала зміщення Віна.

- Спектральна випромінювальна здатність АЧТ для довжини хвилі λ_{\max} , на яку припадає максимум випромінювання, пропорційна п'ятому степеню температури

$$M_{\lambda}(\lambda_{\max}, T) = CT^5, \quad \text{де стала } C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт / (м}^3 \cdot \text{К}^5). \quad (14.12)$$

- Закон Релея–Джинса для спектральної густини енергії теплового випромінювання:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (14.13)$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана. Цей закон справедливий для великих довжин хвиль. В області малих довжин хвиль – "УФ катастрофа": за $\omega \rightarrow \infty$ величина $u(\omega, T) \rightarrow \infty$.

• В області малих довжин хвиль (великих частот) добрий збіг з експериментом дає закон випромінювання Віна:

$$u(\omega, T) = C\omega^3 A e^{-A\omega/T}, \quad (14.14)$$

де C та A – сталі величини. У сучасних позначеннях із застосуванням сталої Планка h (або величини $\hbar = \frac{h}{2\pi}$), яка в той час ще не була відома, закон випромінювання Віна може бути записаним у вигляді

$$u(\omega, T) = \frac{2\hbar}{\pi c^3} \omega^3 e^{-\hbar\omega/kT}, \quad (14.15)$$

• Закон Релея–Джинса і закон випромінювання Віна – часткові закони. Перший із них дає правильний спектральний розподіл за малих частот ($\hbar\omega \ll kT$), а другий – за великих частот ($\hbar\omega \gg kT$). Вони не дають загальної картини розподілу енергії по всьому діапазону частот. Ці протиріччя усуває формула Планка.

• Спектральна густина рівноважного теплового випромінювання АЧТ визначається формулою Планка

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (14.16)$$

або

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (14.17)$$

або

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}. \quad (14.18)$$

Часто формулу Планка записують для енергетичної світимості $M_{\text{ен}}$. Для такого переходу слід скористатись формулою (14.7).

14.2. Запитання та відповіді

14.2.1. *Яке випромінювання називають рівноважним? Яка основна властивість рівноважного випромінювання? Яку роль відіграє рівноважне випромінювання у формулюванні законів теплового випромінювання?*

Рівноважним випромінюванням називають випромінювання, яке перебуває в термодинамічній рівновазі з нагрітим тілом. У рівноважному стані температури тіла і випромінювання не змінюються або змінюються одночасно й однаково, коли термодинамічна рівновага між випромінюванням і випромінювачем у цілому не порушується. Теплове випромінювання АЧТ розглядається як рівноважне випромінювання.

Усі закони теплового випромінювання, сформульовані тут, справедливі лише для рівноважного випромінювання.

14.2.2. *У законах теплового випромінювання використовуються поняття спектральної $u(\omega, T)$ і повної $u(T)$ об'ємної густини енергії. Чим вони відрізняються?*

Спектральна об'ємна густина енергії $u(\omega, T)$ рівноважного теплового випромінювання – енергія, яка припадає на одиницю об'єму простору в елементарному інтервалі частот $d\omega$ поблизу ω за температури T :

$$u(\omega, T) = \frac{dW}{V \cdot d\omega}, \quad (14.19)$$

де dW – енергія теплового випромінювання в об'ємі V і смузі частот від ω до $\omega + d\omega$.

Повна об'ємна густина енергії (за всіма частотами) рівноважного теплового випромінювання $u(T)$ може бути представлена у вигляді

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega. \quad (14.20)$$

14.2.3. *У якому спектральному діапазоні можна використовувати формулу Релея–Джінса?*

Формула Планка (14.17) $u_{\nu T} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ визначає спектральну густина потоку енергії, що випромінюється абсолютно чорним тілом за температури T в одиничному інтервалі частот (або довжин хвиль) з одиниці поверхні за одиницю часу.

Як буде показано в прикладі 14.1, за $h\nu \ll kT$ формула Планка набуває вигляду розподілу Релея–Джінса (14.15): $u_{\nu T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$.

Таким чином, розподіл Релея–Джинса можна використовувати в діапазоні низьких частот (інфрачервоне випромінювання, радіодіапазон).

14.2.4. У якому спектральному діапазоні можна використовувати формулу Віна?

Формула Планка (14.17) $u_{\nu T} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$, як буде показано в прикладі 14.2,

переходить у формулу Віна (14.17) $u_{\nu T} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$, коли $h\nu \gg kT$.

Таким чином, розподіл густини потоку енергії по спектру у вигляді формули Віна працює в ультрафіолетовій частині спектра, а за $T \leq 1000\text{ К}$ і у видимій частині спектра.

14.2.5. Що в історії фізики називають "УФ катастрофою"?

Теорії, які описували властивості теплового випромінювання, у кінці XIX ст. перебували в різкому протиріччі з результатами експерименту і простим дослідом. Фізику бентежили такі обставини:

- згідно із формулою Релея–Джинса $u(\omega, T) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2$, яка доведена на основі

суто класичних уявлень, в області малих частот (коли $\omega \rightarrow 0$) густина теплового випромінювання $u(\omega, T) \sim \omega^2 kT$. Це добре узгоджується з експериментом. Проте формула Релея–Джинса передбачала зростання спектральної густини аж до нескінченності за $\omega \rightarrow \infty$. Згідно із формулою Релея–Джинса у випромінюванні нагрітого до будь-якої скінченної температури тіла мають переважати УФ і рентгенівські промені;

- формула Віна (1896) $u(\omega, T) \sim \omega^3 e^{-\gamma\omega/T}$ добре описує властивості теплового випромінювання в області високих частот і/або низьких температур (далеко від максимуму): експоненціальне зменшення спектральної густини зі зростанням частоти;

- між граничними випадками, що відповідають застосуванню формул Релея–Джинса і Віна, лежить протяжна область, у якій розташований максимум кривої спектрального розподілу енергії теплового випромінювання. При збільшенні температури цей максимум згідно із законом зміщення Віна зсувається в короткохвильовий бік;

Як "зшити" результати теорії для низьких і високих частот? Як об'єднати закони Релея–Джинса і Віна?

Як описати властивості теплового випромінювання поблизу максимуму густини теплового випромінювання, в області частот, які найбільш цікаві, наприклад, для застосування?

Як пояснити необмежене зростання густини теплового випромінювання в області високих частот, яке випливає із формули Релея–Джинса?

Абсурдним виглядало й те, що класична теорія давала $\int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega = \infty$. Якщо

вважати, що повна енергія випромінювання скінченна, то згідно із цим при встановленні рівноваги між тілом і випромінюванням вся енергія тіла перейде в енергію випромінювання високих частот, тобто термодинамічна рівновага взагалі неможлива.

Увесь цей комплекс питань і проблем, за висловом П. Еренфеста, виглядав, як "УФ катастрофа". Вона була розв'язана за допомогою формули Планка (у 1900 р.)

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

4.2.6. У яких випадках до теплового випромінювання можна застосувати класичну термодинаміку?

Формула Релея–Джинса доведена на основі класичної статистичної механіки: середня енергія теплового збудження кожного коливного степеня свободи становить kT . В області малих частот і/або високих температур формула Релея–Джинса добре узгоджується з експериментальними результатами, у цій області випромінювальна здатність чорного тіла зростає пропорційно ω^2 .

Таким чином, до теплового випромінювання можна застосувати класичну термодинаміку при малих частотах (в ІЧ діапазоні) та/або при високих температурах ($\hbar\omega \ll kT$).

14.2.7. Яке тіло називають абсолютно чорним тілом (АЧТ)?

Тіло, яке поглинає цілком всю енергію випромінювання будь-якої частоти, що падає на нього, називається АЧТ. Поглинальна здатність АЧТ дорівнює одиниці для всіх частот і температур. Випромінювання з АЧТ не порушує його температури, воно рівноважне.

14.2.8. Чому відкриті вікна приміщень виглядають чорними, незважаючи на те, що стіни і стеля приміщень білі?

Світло, що надійшло ззовні через вікна в приміщення, у результаті дифузного відбиття і поглинання в основному "залишається" усередині приміщення. Такий механізм повторює поведінку променя світла, запущеного через маленький отвір у порожнину сферичної форми з добре відбивними поверхнями. Така модель традиційно використовується для пояснення принципу дії та властивостей АЧТ.

14.2.9. Експериментально випромінювання абсолютно чорного тіла отримують, коли спостерігають випромінювання через малий отвір у стінці порожнини. Стін-

ки підтримуються за постійної температури. Чи має значення, з якого матеріалу виготовлені стінки? Чи накладаються які-небудь умови на розміри отвору?

Одна із головних властивостей теплового випромінювання така, що воно може перебувати в рівновазі з випромінювальною поверхнею. Якщо в тілі, яке підтримується за постійної температури T , є порожнина, то за певний час там встановлюється тепла рівновага: скільки енергії падає за одиницю часу на одиницю площі поверхні, стільки ж нею і випромінюється. При цьому не суттєво, чи повністю випромінює речовина радіацію з поверхні, чи частину випромінює, а частину відбиває. Тому немає значення, з якої речовини виготовлені стінки порожнини.

14.2.10. Для яких тіл ("білих", "сірих", "чорних", абсолютно чорних) і для якого випромінювання справедливий закон Кірхгофа?

Закон Кірхгофа полягає у твердженні, що для будь-яких ("білих", "сірих", "чорних", абсолютно чорних) тіл відношення випромінювальної здатності до поглинальної здатності є величиною сталою, що дорівнює випромінювальній здатності абсолютно чорного тіла, яке перебуває за тієї самої температури і частоти. Усі закони теплового випромінювання, у тому числі і закон Кірхгофа, справедливі для випромінювання, яке перебуває в термодинамічній рівновазі із джерелом (порожниною).

14.2.11. Дайте визначення радіаційної температури?

Радіаційна температура T_M характеризує "сірі" (не абсолютно чорні) тіла. Радіаційна температура "сірого" тіла – це температура АЧТ, за якої повна випромінювальна здатність АЧТ дорівнює повній випромінювальній здатності "сірого" тіла.

14.2.12. Чи може радіаційна температура тіла перевищувати істинну температуру?

За температур $T > 1000\text{K}$ часто використовують закони теплового випромінювання для оцінки цієї температури. Виміряне таким чином значення буде істинною температурою тільки тоді, коли досліджуване тіло абсолютно чорне. В інших випадках треба вводити певні поправки, а виміряна таким чином температура буде псевдо-температурою. Однією із таких температур є радіаційна температура. Коли тіло, температуру якого визначають, не є абсолютно чорним, але його здатність до поглинання $a_\nu < 1$ не залежить або мало змінюється із частотою ν , то можна виміряти радіаційну температуру тіла. Такі тіла, які називають "сірими", можна характеризувати середнім значенням поглинальної здатності $\langle a_\nu \rangle$. Для них закон Стефана–Больцмана з урахуванням (14.2) записується у вигляді

$$M_e = \int_0^\infty M_\nu d\nu = \int_0^\infty a_\nu M_{0\nu} d\nu = \langle a_\nu \rangle \sigma T^4 = \sigma T_M^4,$$

тут T та T_M – істинна та радіаційна температури тіла, відповідно; M_v та M_{0v} – випромінювальні здатності сірого та абсолютно чорного тіл, відповідно.

Таким чином, радіаційна температура $T_M = \sqrt[4]{\langle a_v \rangle} T$.

У силу того, що $\langle a_v \rangle < 1$, радіаційна температура не може перевищувати істинну температуру. Для АЧТ $\langle a_v \rangle = 1$ і $T_M = T$.

14.2.13. Дайте визначення яскравісної температури?

Під яскравісною температурою ($T_{яс}$) "сірого" тіла розуміють таку температуру АЧТ, за якої його випромінювальна здатність $M_0(\lambda_0, T_{яс})$ для визначеної довжини хвилі λ_0 дорівнює випромінювальній здатності $M(\lambda_0, T)$ "сірого" тіла для цієї самої довжини хвилі $M_0(\lambda_0, T_{яс}) = M(\lambda_0, T)$.

14.2.14. Поясніть принцип роботи пірометра зі зникаючою ниткою розжарювання. Світлофільтр якого кольору раціонально використовувати в ньому і чому?

Для вимірювання яскравісної температури використовують пірометри зі зникаючою ниткою. Її схему подано на рис. 14.1. Світло від досліджуваного об'єкта 1 падає на об'єктив пірометра 2, за допомогою якого зображення джерела накладається на спіраль етalonної лампи 4. Це зображення і спіраль розглядаються через окуляр 6, тобто оптична схема пірометра телескопічна. Оскільки розміри джерела часто бувають малими, а об'єктив дає його зображення з лінійним збільшенням $\beta < 1$, окуляр повинен мати велике збільшення кута зору.

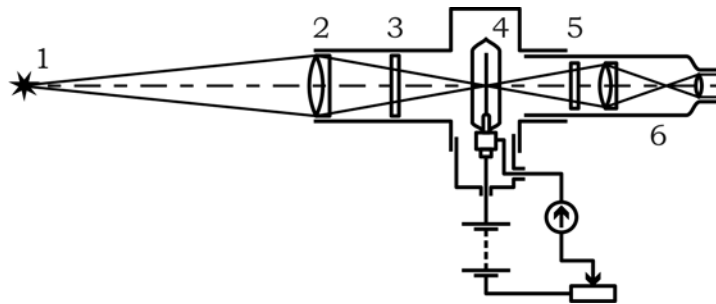


Рис. 14.1. Схема побудови пірометра зі зникаючою ниткою розжарювання (до запитання 14.2.14)

Для порівняння спектральної густини яскравості досліджуваного тіла L_v та абсолютно чорного тіла L_{v0} у пірометрі розміщено світлофільтр 5, який пропускає випромінювання у вузькому інтервалі частот, зазвичай у червоній ділянці спектра.

Вибір червоного фільтра обумовлений тим, що максимум кривої випромінювальної здатності за температури нитки розжарювання лампи ($\sim 10^3 \text{ K}$) лежить саме в околі довжин хвиль, які відповідають червоному світлу.

Під час вимірювань змінюють струм через лампу, доки яскравості досліджуваного об'єкта та еталонної лампи не зрівняються. Значення струму за таблицею переводяться у значення яскравісної температури $T_{\text{яс}}$ тіла. Якщо відоме значення універсальної функції Кірхгофа $\varphi(\lambda, T) = \left(\frac{M_{\lambda, T}}{a_{\lambda, T}} \right)$ (див. (14.8)) на робочій довжині хвилі λ_0 світлофільтра, то за формулою

$$T = \frac{hc}{k\lambda \ln \varphi(\lambda_0, T) + \frac{hc}{T_{\text{яс}}}} \quad (14.21)$$

можна розрахувати його істинну температуру T .

14.2.15. *Отримайте формулу (14.21) для розрахунку істинної температури тіла за його яскравісною температурою.*

Для світла, що випромінюється у видимому діапазоні довжин хвиль нагрітими тілами, температура яких $T \sim 3000 \text{ K}$, величина $\frac{h\nu}{kT} \approx 7$. У цьому разі $e^7 \gg 1$ і формулу Планка (14.17) можна записати у вигляді

$$\exp \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{яс}}} \right) \frac{hc}{k\lambda} \right] = \varphi(\lambda, T) \Rightarrow \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{яс}}} = \frac{k\lambda}{hc} \ln \varphi(\lambda, T) \Rightarrow T = \frac{hc}{k\lambda \ln \varphi(\lambda_0, T) + \frac{hc}{T_{\text{яс}}}}.$$

14.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 14.1. *Отримайте закон Релея–Джінса із формули Планка.*

Розв'язання. Якщо у формулі Планка (14.18) в області малих частот і/або високих температур, коли $\hbar\omega \ll kT$, експоненту розкласти в ряд

$$e^{\hbar\omega/kT} = 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \dots, \text{ то } u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2.$$

Це й є закон Релея–Джінса (14.15).

Приклад 14.2. *Отримайте закон випромінювання Віна із формули Планка.*

Розв'язання. Якщо у формулі Планка (14.18) $u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ в області великих частот і/або низьких температур, коли $h\nu \gg kT$, у знаменнику можна знехтувати одиницею порівняно з доданком $e^{h\nu/kT}$, то

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}.$$

Це й є закон випромінювання Віна (14.16) і (14.17).

Приклад 14.3. Отримайте формулу закону зміщення Віна із формули Планка.

Розв'язання. Для різних значень спектральної об'ємної густини енергії $u(\omega, T)$ та $u(\lambda, T)d\lambda$ рівноважного теплового випромінювання оберемо такі величини $d\omega$ і $d\lambda$, щоб виконувалась умова

$$u(\omega, T)d\omega = u(\lambda, T)d\lambda. \quad (14.22)$$

Підставимо в (14.22) формулу Планка (14.18):

$$u(\omega, T) \frac{d\omega}{d\lambda} = u(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}. \quad (14.23)$$

Нагадаємо, що функція $u(\lambda, T)$ має вигляд кривої з максимумом за деякого значення λ_m при фіксованій величині T , як показано на рис. 14.2.

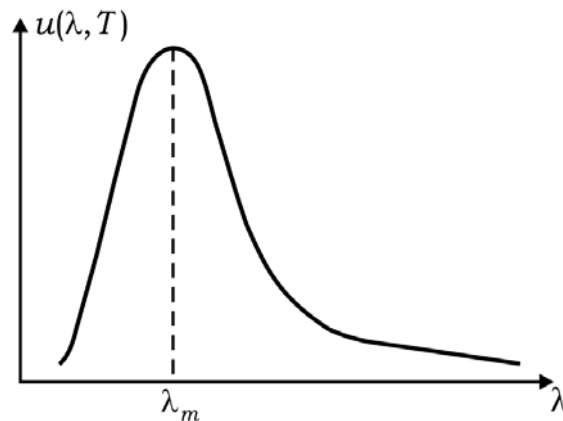


Рис. 14.2. Спектральний розподіл об'ємної густини енергії, що випромінюється абсолютно чорним тілом за фіксованої температури T (до прикладу 14.3)

Диференціюємо (14.23) за змінною λ і дослідимо функцію на екстремум:

$$\frac{\partial u(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0.$$

Провівши заміну $\frac{hc}{kT\lambda} = x$, отримаємо трансцендентне рівняння

$$\frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} = 5. \quad (14.24)$$

Розв'язування (14.24) методом послідовних наближень дає значення $x = 4,965$. Отже,

$$\lambda_m = \frac{hc}{xkT} = \frac{hc}{4,965kT}. \quad (14.25)$$

Підставивши в (14.25) фундаментальні величини h, c, k , маємо

$$\lambda_m = \frac{0,29 \cdot 10^4 \text{ мкм} \cdot \text{К}}{T}.$$

Це й є закон зміщення Віна з розрахованою сталою зміщення Віна $b = 0,29 \cdot 10^4 \text{ мкм} \cdot \text{К}$.

Приклад 14.4. Отримайте формулу Стефана–Больцмана із формули Планка.

Розв'язання. Із (14.13) повна об'ємна густина енергії рівноважного теплового випромінювання з урахуванням (14.18) може бути представлена у вигляді

$$u(T) = \frac{dW}{dV} = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (14.26)$$

Проведемо заміну змінної, позначимо $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$. Тоді (14.26) запишеться як

$$u(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (14.27)$$

Табличний інтеграл $\int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$. Вираз (14.27) набуде вигляду

$$u(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \text{const} \cdot T^4. \quad (14.28)$$

Це й є закон Стефана–Больцмана. Більше того, у (14.28) у сталій, що дорівнює $\text{const} = \frac{\pi^2 \cdot k^4}{15\hbar^3 c^3}$, усі величини – це відомі фундаментальні сталі. Після їх підстановки

отримуємо, що $\text{const} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$. Це й є стала Стефана–Больцмана, σ .

Приклад 14.5. Відомо, що максимум інтенсивності випромінювання Сонця припадає на довжину хвилі $0,48 \text{ мкм}$. Визначте температуру поверхні Сонця.

Розв'язання. Вважаючи Сонце АЧТ і застосувавши закон зміщення Віна (14.10), маємо

$$T = \frac{b}{\lambda_m}, \quad (14.29)$$

де $b = 2898 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ – стала зміщення Віна. Підставимо необхідні числа в (14.29):

$$T = \frac{2,90 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К}}{0,48 \text{ мкм}} \approx 6000 \text{ К}.$$

Приклад 14.6. Планета Земля випромінює $90,8 \text{ Дж/м}^2$ за 1с. За якої температури АЧТ випромінювало б таку саму енергію?

Розв'язання. Потужність P випромінювання з 1 м^2 поверхні Землі дорівнює $P = 90,8 \text{ Вт}$. За визначенням енергетичної світимості $M_{\text{ен}}$ АЧТ ця величина дорівнює $M_{\text{ен}} = \frac{P}{S} = 90,8 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)$, де S – площа поверхні Землі. Із (14.9) маємо

$$T = \sqrt[4]{\frac{M_{\text{ен}}}{\sigma}}, \quad \text{де } \sigma = 5,67 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (14.30)$$

Перевіримо розмірність T у (14.30):

$$[T] = \sqrt[4]{\frac{\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)}{\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4)}} = \text{К}.$$

Підставимо в (14.2) числові дані з умови прикладу:

$$T = \sqrt[4]{\frac{90,8}{5,67} \cdot 10^8} = 200 \text{ К}.$$

Приклад 14.7. У скільки разів змінилась (збільшилась чи зменшилась) інтегральна енергетична світимість АЧТ, якщо максимум випромінювальної здатності спочатку припадав на довжину хвилі $0,7 \text{ мкм}$, а при підвищенні (чи зменшенні) температури змістився на нову довжину хвилі – $0,5 \text{ мкм}$?

Розв'язання. Оскільки довжина хвилі, на яку припадав максимум випромінювальної здатності, зменшилась ($\lambda_{m2} = 0,5 \text{ мкм}$ замість $\lambda_{m1} = 0,7 \text{ мкм}$), то за законом зміщення Віна (14.10) $\left(\lambda_m \sim \frac{1}{T}\right)$ температура АЧТ збільшилась. Збільшилась і

його інтегральна енергетична світимість $M_{\text{ен}} \sim T^4$. У скільки разів? За формулами (14.9) і (14.10) маємо

$$M_{\text{ен1}} = \sigma T_1^4 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m1}} \right)^4, \text{ а } M_{\text{ен2}} = \sigma T_2^4 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m2}} \right)^4. \quad (14.31)$$

$$\frac{M_{\text{ен1}}}{M_{\text{ен2}}} = \left(\frac{\lambda_{m2}}{\lambda_{m1}} \right)^4 \quad (14.32)$$

Підставляючи числові дані з умови прикладу, маємо

$$\frac{M_{\text{ен2}}}{M_{\text{ен1}}} = \left(\frac{0,7}{0,5} \right)^4 = 3,84.$$

Приклад 14.8. Енергетична світимість АЧТ $M_{\text{ен}} = 3,0 \text{ Вт/см}^2$. Визначте довжину хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності цього тіла.

Розв'язання. За законом Стефана–Больцмана (14.9) і законом зміщення Віна (14.10) маємо

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{b}{\sqrt[4]{\frac{M_{\text{ен}}}{\sigma}}}. \quad (14.33)$$

Підставимо в (14.33) числові дані з умови прикладу:

$$\lambda_m = \frac{2898 \text{ мкм} \cdot \text{К}}{\sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10^4 \text{ К}^4}{5,67 \cdot 10^{-8}}}} = 3,5 \text{ мкм}.$$

Приклад 14.9. Є дві порожнини (рис. 14.3) з малими отворами однакових діаметрів $d = 1,0 \text{ см}$ і абсолютно відбиваючими зовнішніми поверхнями. Відстань між отворами $L = 10 \text{ см}$. У порожнині 1 підтримується стала температура $T_1 = 1700 \text{ К}$. Визначте температуру, що встановилась у порожнині 2.

Вказівка: Взяти до уваги, що АЧТ є косинусним випромінювачем.

Розв'язання. Із формули (14.14) повна об'ємна густина енергії теплового випромінювання становить

$$u = \frac{4}{c} M_{\text{ен}}. \quad (14.34)$$

Енергія W теплового випромінювання з об'єму V з урахуванням закону Стефана–Больцмана дорівнює

$$W = u \cdot V = \frac{4}{c} M_{\text{ен}} \cdot V = \frac{4}{c} \sigma T^4 V. \quad (14.35)$$

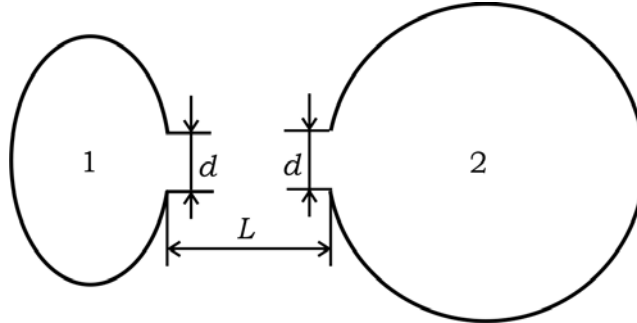


Рис. 14.3. До прикладу 14.9

Із визначення енергетичної світимості випливає, що потужність P теплового випромінювання з поверхні (отвору) площею S дорівнює

$$P = M_{\text{ен}} \cdot S = \sigma T^4 \cdot S. \quad (14.36)$$

Отже, потужність P_1 теплового випромінювання, що випромінюється з отвору 1-ї порожнини, яка має температуру T_1 , площею S_1 , дорівнює

$$P_1 = \sigma T_1^4 \cdot S_1. \quad (14.37)$$

Потужність $P_{2\text{вх}}$ теплового випромінювання, що потрапляє на отвір 2-ї порожнини площею S_2 , пов'язана з P_1 через тілесний кут $d\Omega = \frac{S_2}{L^2}$, під яким з отвору 1-ї порожнини видно отвір 2-ї. Вважаючи випромінювання з отвору таким, як з ламбертового джерела, визначимо величину $P_{2\text{вх}}$ як:

$$P_{2\text{вх}} = P_1 \cdot \frac{d\Omega}{2\pi} = \sigma T_1^4 \cdot S_1 \cdot \frac{S_2}{2\pi L^2}. \quad (14.38)$$

З іншого боку, потужність P_2 теплового випромінювання, що виходить з отвору 2-ї порожнини, яка має температуру T_2 , аналогічно (14.37) дорівнює

$$P_2 = \sigma T_2^4 \cdot S_2. \quad (14.39)$$

Ураховуючи, що $S_1 = S_2 = S = \pi \frac{d^2}{4}$ за умовою прикладу, а також те, що процес перебуває в тепловій рівновазі (зокрема, $P_2 = P_{2\text{вх}}$), маємо $\sigma T_1^4 \cdot \frac{S^2}{2\pi L^2} = \sigma T_2^4 \cdot S$. Звідси

$$T_1^4 \cdot \frac{S}{2\pi L^2} = T_2^4. \text{ І остаточно маємо}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{d}{2,8 \cdot L}} . \quad (14.40)$$

Підставимо в (14.40) числові дані з умови прикладу:

$$T_2 = 1700 \text{ К} \cdot \sqrt{\frac{1}{2,8 \cdot 10}} \approx 320 \text{ К} .$$

Приклад 14.10. Знайдіть за допомогою формули Планка потужність випромінювання з одиниці поверхні АЧТ, яка припадає на вузький інтервал $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ поблизу спектрального максимуму випромінювання за $T = 3000 \text{ К}$.

Розв'язання. Енергетична світимість АЧТ, яка характеризує випромінювання з цього тіла у вузькому інтервалі $\Delta\lambda$ поблизу максимуму випромінювання, за формулою (14.4) дорівнює

$$\Delta M_\lambda = M_\lambda(\lambda, T)_{\max} \cdot \Delta\lambda , \quad (14.41)$$

де $M_\lambda(\lambda, T)_{\max}$ – максимальне значення випромінювальної здатності тіла за обраної температури T .

Згідно із формулою Планка (14.18) випромінювальна здатність (або спектральна густина енергетичної світимості) АЧТ за обраної температури T дорівнює

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} . \quad (14.42)$$

Величина $M_\lambda(\lambda, T)_{\max}$ відповідає довжині хвилі λ_m , яку можна знайти за законом зміщення Віна (14.10) $\lambda_m = \frac{b}{T}$. Підставимо знайдену величину λ_m у (14.16):

$$M_\lambda(\lambda, T)_{\max} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1} . \quad (14.43)$$

Підставимо (14.43) у (14.41):

$$\Delta M_\lambda = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/bk} - 1} . \quad (14.44)$$

Підстановка числових даних з умови прикладу в (14.44) дає

$$\Delta M_\lambda = 0,31 \text{ Вт/см}^2 . \quad (14.45)$$

Таким чином, визначено потужність випромінювання з одиниці поверхні АЧТ, яка припадає на вузький інтервал $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$.

Приклад 14.11. До якої температури сонячне світло може нагріти чорне тіло на поверхні Землі?

Вказівка: Інтенсивність сонячного світла біля поверхні Землі становить величину $I = 0,1 \text{ Вт/см}^2$.

Розв'язання. Для стану рівноважного теплового випромінювання кількість енергії, що випромінюється тілом, дорівнює кількості енергії, що поглинається тілом. Таку умову термодинамічного балансу для деякої ділянки поверхні Землі площею dS (рис. 14.10) можна записати у вигляді рівності потужностей, що падає на цю ділянку сонячного випромінювання $dP_{\text{пад}}$, і випроміненого нею власного теплового випромінювання $dP_{\text{випр}}$:

$$dP_{\text{пад}} = dP_{\text{випр}} \quad (14.46)$$

Причому величина $dP_{\text{пад}}$ дорівнює

$$dP_{\text{пад}} = I \cdot dS, \quad (14.47)$$

де I – інтенсивність сонячного світла біля поверхні Землі.

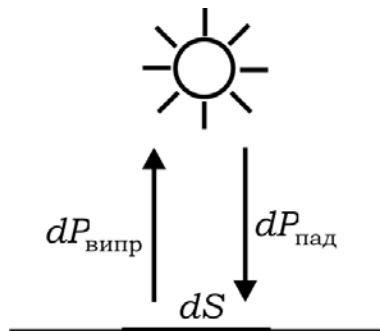


Рис. 14.4. До прикладу 14.11

У свою чергу, величина $dP_{\text{випр}}$ за визначенням енергетичної світимості $M_{\text{ен}}$ (14.2) дорівнює

$$dP_{\text{випр}} = M_{\text{ен}} \cdot dS. \quad (14.48)$$

Поверхня Землі вважається при цьому АЧТ. З урахуванням закону Стефана–Больцмана (14.9) маємо

$$dP_{\text{випр}} = \sigma T^4 \cdot dS. \quad (14.49)$$

Об'єднуючи (14.47) і (14.49) у (14.46), маємо

$$\sigma T^4 = I. \quad (14.50)$$

Звідки

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}}. \quad (14.51)$$

Підставимо в (14.51) числові дані з умови

$$T = \sqrt[4]{\frac{0,1 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град}^4)}} = 364 \text{ К} \approx 90^\circ \text{С}.$$

Досліди, проведені без застосування методів концентрації сонячного світла, підтверджують цей результат. За допомогою дзеркал і лінз можна значно збільшити температуру нагрівання тіла.

15. СПОНТАННЕ ТА ВИМУШЕНЕ (ІНДУКОВАНЕ) ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЛАЗЕРИ

15.1. Короткі теоретичні відомості

- Спонтанне випромінювання (СВ) – це випромінювання, яке відбувається без будь-якої зовнішньої дії на атом, тільки під впливом вакуумних флуктуацій. При цьому атом переходить з верхнього енергетичного стану i в стан з меншою енергією j , а енергія випромінюваного кванта $h\nu = E_i - E_j$ (рис. 15.1, а). В ізотропній речовині спонтанне випромінювання відбувається рівномірно в усіх напрямках. Час, початкова фаза, напрямок і поляризація СВ довільні, тому таке випромінювання некогерентне.

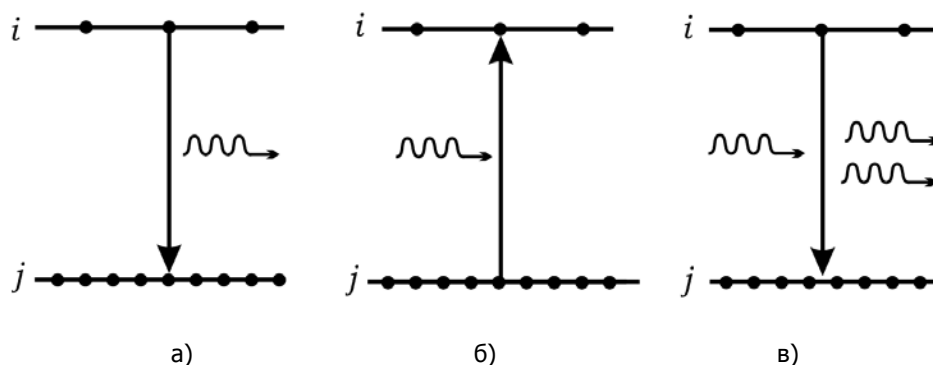


Рис. 15.1. Три типи процесів, які відбуваються при взаємодії світла з речовиною: а) спонтанне випромінювання; б) вимушене поглинання; в) вимушене випромінювання

- Вимушене випромінювання (ВВ) викликається дією зовнішнього випромінювання, у результаті чого відбувається зміна енергії збудженого атома, його перехід з верхнього рівня i на нижній рівень j , у результаті чого відбувається випромінювання світлової енергії (рис. 15.1, в), яка поширюється в тому ж напрямку, що і падаюче випромінювання. Більше того, світлова хвиля, яка відповідає ВВ, має ті самі

частоту, фазу і поляризацію, що і хвиля падаючого випромінювання, тобто, на відміну від СВ, вимушене випромінювання когерентне.

- Заселеність енергетичних рівнів у рівноважному стані речовини визначається розподілом Больцмана, тобто заселеність енергетичних рівнів N_j залежить від заселеності N_0 основного (нижнього) енергетичного рівня і змінюється за законом $N_j = N_0 \exp(-E_j / kT)$.

- В одиниці об'єму за одиницю часу зі стану i у стан j відбувається $A_{ij} N_i$ спонтанних переходів, де коефіцієнт A_{ij} визначає кількість фотонів, що спонтанно випромінюються за одиницю часу за рахунок переходів частинок зі стану i у стан j . Коефіцієнт A_{ij} характеризує ймовірність спонтанного випромінювання.

- Ймовірність вимушеного випромінювання одного атома дорівнює $B_{ij} \cdot u(\nu)$, де B_{ij} – ймовірність ВВ, що належить до одиниці часу, одиниці об'єму та одиниці спектральної густини електромагнітного поля; $u(\nu)$ – спектральна густина енергії оптичного випромінювання.

- Ймовірність вимушеного поглинання (ВП) одного атома дорівнює $B_{ji} \cdot u(\nu)$, де B_{ji} – ймовірність ВП, віднесена до одиниці часу, одиниці об'єму та одиниці спектральної густини енергії електромагнітного поля.

- За умови теплової рівноваги зберігається кількість атомів у станах i та j , тому кількість переходів з поглинанням і випромінюванням має бути однаковою:

$$A_{ij} N_i + B_{ij} u(\nu) N_i = B_{ji} u(\nu) N_j. \quad (15.1)$$

Виходячи з умов рівноваги та розподілу Больцмана, із (15.1) можна отримати вираз для густини оптичного випромінювання, а саме:

$$u(\nu) = \frac{A_{ij} N_i}{B_{ji} N_j - B_{ij} N_i}.$$

Порівняння отриманого результату із формулою Планка (14.17) за умови, що статистичні ваги i -го та j -го рівнів мають однакову величину, дозволяє визначити співвідношення між коефіцієнтами A_{ij}, B_{ij}, B_{ji} :

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad (15.2)$$

$$\frac{A_{ij}}{B_{ij}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}. \quad (15.3)$$

Величини A_{ij}, B_{ij}, B_{ji} називають коефіцієнтами Ейнштейна.

- Лазер – це оптичний квантовий генератор, принцип дії якого заснований на використанні вимушених переходів між енергетичними рівнями. Лазер випромінює когерентне ВВ. Лазер складається із трьох основних частин: активного середовища, системи накачування та резонатора.

Речовину, у якій за допомогою "накачування" створений інвертований стан, коли заселеність верхнього рівня більша за заселеність нижнього рівня, називають *активним середовищем*. Це може бути газ, рідина або тверде тіло. Методи накачування бувають оптичними (випромінюванням потужних газорозрядних ламп), електричними, хімічними тощо.

15.2. Запитання та відповіді

15.2.1. У чому полягають постулати Бора і яка їх роль в сучасній фізиці?

Н. Бор в 1913 р., продовжуючи ідеї М. Планка про квантування енергії, сформулював два постулати, які стосувались будови атома та його поведінки щодо випромінювання:

1) енергія електронів в атомі не може бути довільною, вона квантується: Енергетичні стани електронів утворюють дискретний ряд E_1, E_2, E_3, \dots стаціонарних енергетичних рівнів (рис. 15.2, а). Перебуваючи у стаціонарних станах, електрони (атоми) не випромінюють і не поглинають;

2) зміна енергії електронів, яка відповідає їх переходу між стаціонарними енергетичними рівнями E_m та E_n ($E_m > E_n$), супроводжується випромінюванням або поглинанням монохроматичного світла із частотою ω , що визначається з умови $E_m - E_n = \hbar\omega$ (рис. 15.2, б).

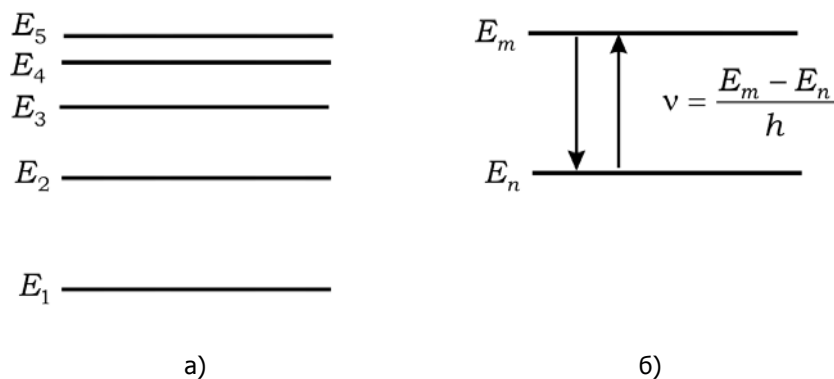


Рис. 15.2. До пояснення постулатів Бора

Якщо атом змінює енергію з більшої на меншу, то відбувається випромінювання світла. Якщо перехід відбувається з нижнього рівня на вищий, то він викликаний поглинанням світла ззовні.

Постулати Бора разом із класичною роботою М. Планка відкрили еру квантових уявлень про властивості речовини та випромінювання, на яких базується сучасна фізика.

15.2.2. *Чи можливий перехід збудженого атома з верхнього енергетичного рівня на нижній без випромінювання?*

Так, перехід за енергіями зверху вниз можливий, як з випромінюванням, так і без нього. За безвипромінювальних переходів енергія віддається іншим атомам, кристалічній ґратці або навколишньому середовищу. Це призводить до нагрівання робочого тіла і вимагає зовнішнього охолодження.

У лазерах зазвичай використовують люмінесцентні матеріали, у яких СВ переважає над процесами переходів без випромінювання.

15.2.3. *Як визначається час життя атома у збудженому стані?*

У квантовій фізиці час життя атома у збудженому стані – це час його перебування на верхньому енергетичному рівні до того, як атом перейде на нижчий рівень із випромінюванням кванта енергій (фотона) або без нього.

Згідно з класичними уявленнями випромінювання або поглинання електромагнітної хвилі пов'язане з гальмуванням або прискоренням електричних зарядів. Наприклад, процес спонтанного випромінювання відбувається за рахунок поступової втрати енергії осцилятора протягом деякого проміжку часу (часу релаксації τ_p). Під часом τ_p у класичній фізиці розуміють інтервал часу, протягом якого енергія збудженого атома як елементарного осцилятора зменшується в e разів (див. розділ 3).

15.2.4. *За яким законом визначається заселеність N_i енергетичних рівнів у стані теплової рівноваги, і як ця залежність змінюється при зміні температури (зобразіть графік)?*

Заселеність енергетичних рівнів у стані теплової рівноваги підпорядкована розподілу Больцмана таким чином:

$$N_m = N_n e^{-\frac{E_m - E_n}{kT}} . \quad (15.4)$$

При зміні температури, як показано на рис. 15.3, змінюється розподіл заселеностей енергетичних рівнів. Наприклад, при збільшенні температури збільшується заселеність вищих рівнів за рахунок заселеностей нижніх рівнів.

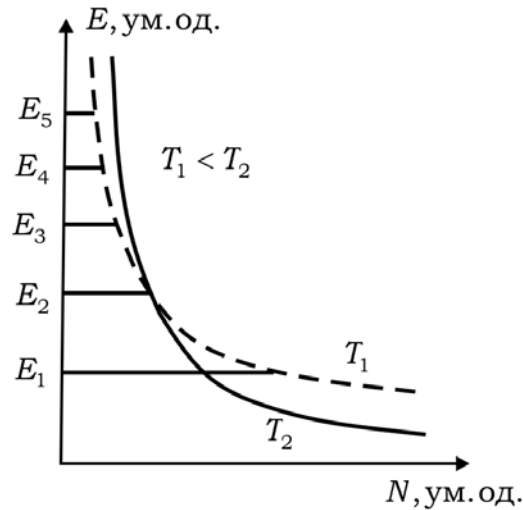


Рис. 15.3. Ілюстрація розподілу Больцмана: залежність заселеностей (N) енергетичних рівнів (E_n) у стані теплової рівноваги для двох значень температур $T_1 < T_2$

15.2.5. Чим відрізняється природа спонтанного та індукованого (вимушеного) випромінювання, а також індукованого (вимушеного) поглинання?

Спонтанне випромінювання. У деякий момент часу t збуджений атом має енергію (розташований на енергетичному рівні E_2). Через деякий час Δt атом може залишитись у збудженому стані або може *самодовільно (спонтанно)* перейти на нижній енергетичний рівень E_1 . При цьому випромінюється фотон з енергією $h\nu$, яка пов'язана із шириною енергетичного зазору між рівнями співвідношенням $E_2 - E_1 = h\nu$ (рис. 15.4).

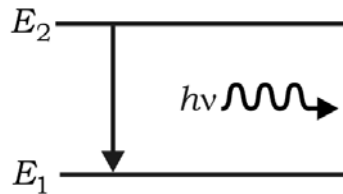


Рис. 15.4. До визначення спонтанного випромінювання

Вимушене (індуковане) поглинання. Атом перебуває в основному (незбудженому) стані, на нижньому енергетичному рівні і має енергію E_1 (рис. 15.5, а). У деякий момент часу на систему ззовні діє фотон з енергією $h\nu = E_2 - E_1$. Фотон поглинається атомом, атом збуджується і переходить на верхній рівень з енергією E_2 . У цьому випадку кажуть про вимушене (індуковане) поглинання.

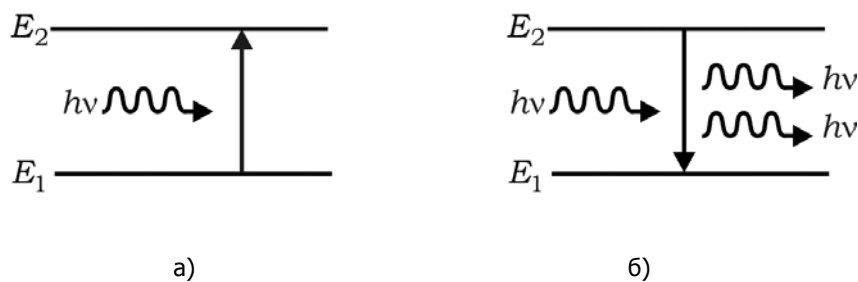


Рис. 15.5. До визначення індукованих (вимушених) поглинання (а) і випромінювання (б)

Вимушене (індуковане) випромінювання. Збуджений атом розташований на верхньому енергетичному рівні і має енергію E_2 (рис. 15.5, б). Ще до того моменту, коли він мав би завдяки спонтанному переходу покинути цей рівень, на систему зовні діє фотон з енергією $h\nu = E_2 - E_1$ і атом вимушено переходить із рівня E_2 на рівень E_1 . При цьому випромінюється ще один фотон з такою самою енергією, частотою, поляризацією, що і фотон, який примусив його покинути верхній енергетичний рівень (рис. 15.4, б). У цьому випадку кажуть про вимушене (індуковане) випромінювання.

15.2.6. *Порівняйте властивості спонтанного випромінювання та індукованого (вимушеного) випромінювання?*

Якщо порівняти спонтанне випромінювання (СВ) і вимушене випромінювання (ВВ), то можна скласти таблицю, з якої видно ті властивості, які їх відрізняють:

Спонтанне випромінювання (СВ)	Вимушене випромінювання (ВВ)
Здійснюється незалежно від дії зовнішнього випромінювання.	Здійснюється під дією зовнішнього випромінювання.
Має ймовірнісний характер.	Має причинно-наслідковий зв'язок із зовнішньою дією.
Імовірність СВ визначається коефіцієнтом Ейнштейна A_{21} , величина якого $A_{21} = \frac{1}{\Delta t}$, де Δt – середня тривалість життя атома у збудженому стані.	Імовірність ВВ визначається коефіцієнтом Ейнштейна B_{21} , який залежить від обраних станів E_1 і E_2 атома й може бути розрахований методами квантової механіки. Коефіцієнт B_{21} не залежить від спектральної густини випромінювання $u(\omega, T)$.
Переходи атома в різні моменти часу, а також різних атомів в один і той самий момент часу, не пов'язані між собою.	Переходи атомів можуть мати лавиноподібний характер і пов'язані між собою.
Між фазами, поляризаціями, напрямками поширення та амплітудами випроміненої хвилі не існує кореляції. СВ некогерентне.	Між фазами, поляризаціями, напрямками поширення та амплітудами вимушеного випромінювання існує кореляція. ВВ когерентне. Вимушене і змушувальне випромінювання також когерентні: у них тотожні напрямки поширення, поляризації, частоти та фази.
Кількість $Z_{21}^{\text{спонт}}$ спонтанних переходів з верхнього енергетичного рівня 2 на нижній рівень 1 за одиницю часу пропорційне заселеності N_2 верхнього рівня: $Z_{21}^{\text{спонт}} = A_{21} \cdot N_2$.	Кількість $Z_{21}^{\text{інд}}$ вимушених (індукованих) переходів з верхнього енергетичного рівня 2 на нижній рівень 1 за одиницю часу пропорційне заселеності N_2 верхнього рівня та спектральній густині енергії $u(\omega, T)$ змушувального випромінювання: $Z_{21}^{\text{інд}} = B_{21} \cdot N_2 \cdot u(\omega, T)$.
Є спонтанне випромінювання, яке характеризується коефіцієнтом A_{21} , але немає спонтанного поглинання.	Є вимушене випромінювання, яке характеризується величиною $B_{21}u_\nu$, і є вимушене поглинання, яке характеризується величиною $B_{12}u_\nu$. Коефіцієнти Ейнштейна для ВВ і вимушеного поглинання для одних і тих самих невироджених енергетичних рівнів однакові за величиною $B_{21} = B_{12}$.
Коефіцієнт Ейнштейна для СВ пропорційний кубу частоти випромінювання $A_{21} \sim \omega^3$.	Коефіцієнти Ейнштейна B_{21} і B_{12} для ВВ не залежать від частоти випромінювання.

15.2.7. Чому в період, який передував створенню лазера, було важко експериментально спостерігати вимушене випромінювання у видимому діапазоні?

Заселеність N_j енергетичних рівнів визначається заселеністю N_0 основного (нижнього) енергетичного рівня і змінюється за законом розподілу Больцмана $N_j = N_0 \exp(-E_j / kT)$. В оптичному діапазоні через велику відстань між енергетичними рівнями у випадку $E_i > E_j$ виконується нерівність для заселеностей рівнів $N_j = N_0 \exp(-E_j / kT) \gg N_i = N_0 \exp(-E_i / kT)$, тому ВВ у видимому діапазоні за невеликих потужностей збудження майже непомітне на фоні спонтанного випромінювання, імовірність якого пропорційна ν^3 .

15.2.8. Який вигляд мала б формула для спектральної густини енергії випромінювання, якщо не враховувати вимушеного випромінювання?

Кількість атомів у станах i та j визначається розподілом Больцмана (15.4):

$$N_i = N_j e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}} = N_j e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

де k – стала Больцмана. Тут прийнято, що статистична вага або ступінь виродження обох енергетичних рівнів дорівнює одиниці. (Під ступенем виродження розуміють кількість різних фізичних станів, які відповідають одній і тій самій енергії системи). Також прийнято, що статистична вага обох рівнів дорівнює одиниці, але це спрощення не суттєве, тому що статистична вага рівнів є величиною порядку 1.

За умови теплової рівноваги кількість атомів у станах i та j має зберігатися, тому кількість переходів із випромінюванням має дорівнювати кількості переходів з поглинанням (15.1):

$$A_{ij}N_i + B_{ij}u(\nu)N_i = B_{ji}u(\nu)N_j. \quad (15.5)$$

Із цього рівняння знаходимо спектральну густину енергії електромагнітного поля

$$u(\nu) = \frac{A_{ij}}{B_{ji}e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{ij}}. \quad (15.6)$$

Якщо знехтувати вимушеним випромінюванням, то формула (15.6) переходить у вираз $u(\nu) = \frac{A_{ij}}{B_{ji}} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$, тобто набуває вигляду формули, яка описує закон випромінювання Віна (14.15). Із (15.6) випливає, що зовнішнє електромагнітне поле викли-

кає не тільки переходи з основного стану в збуджений, але й зворотні переходи – зі збудженого стану в основний, які супроводжуються випромінюванням фотонів (вимушеним випромінюванням).

15.2.9. Чи послаблюється пучок світла при поширенні крізь речовину, якщо спонтанне випромінювання є настільки слабким, що ним можна знехтувати?

Якщо спонтанним випромінюванням можна знехтувати, то, виходячи із рівняння (15.1), можна стверджувати, що теплова рівновага при цьому порушиться, процес поглинання буде перевищувати процес випромінювання. Це буде відбуватись доки не зрівняються концентрації атомів у станах i та j . Після цього пучок проходитиме крізь речовину, не послаблюючись.

Якщо ймовірності вимушених переходів із рівня i на рівень j однакові, як було показано вище, то послаблення чи підсилення пучка при проходженні крізь речовину залежить від кількості атомів у цих станах N_i та N_j . За рівноважних умов, як впливає з розподілу Больцмана (15.4), завжди виконується умова $N_i < N_j$. Щоб отримати підсилення випромінювання, необхідно порушити рівновагу, створити систему з інверсією заселеності енергетичних рівнів, тобто $N_i > N_j$.

15.2.10. Чому інколи систему з інвертованою заселеністю енергетичних рівнів називають системою з від'ємною температурою?

Стан речовини з "від'ємною температурою" означає, що населеність N_2 верхнього енергетичного рівня більша за населеність N_1 нижнього. Цей стан ще називається інвертованим, або інверсним станом. Така характеристика стану з "від'ємною температурою" виникла з розгляду розподілу Больцмана для середовищ, у яких заселеність верхнього (N_2) і нижнього (N_1) енергетичних рівнів пов'язані співвідношенням

$N_2 > N_1$. Дійсно, із розподілу Больцмана (15.5) випливає, що $T = \frac{E_1 - E_2}{k \cdot \ln \frac{N_2}{N_1}}$. Якщо

$N_2 > N_1$ (при тому, що $E_1 - E_2 < 0$), то виконується умова $T < 0$ (температура "від'ємна").

У природі речовини з інвертованою заселеністю енергетичних рівнів (з від'ємною температурою) не зафіксовано, цей стан створюють тільки штучно.

15.2.11. Якими методами можна створити інвертований стан середовища?

Інвертований стан середовища створюють різними методами, за допомогою різних видів "накачки" заселеності верхніх енергетичних рівнів – оптичною накачкою,

електричним розрядом, електричним струмом, хімічною реакцією, атомним вибухом (ядерна накачка) тощо.

15.2.12. *Чи можна створити інвертований стан у дворівневій енергетичній системі?*

Ні, інвертований стан у дворівневій енергетичній системі за допомогою оптичної накачки створити не можна. Для цього потрібні середовища, у яких можна використати три- або чотирирівневу енергетичні системи.

15.2.13. *Які умови необхідно створити, щоб змусити кристал (середовище) генерувати вимушене випромінювання?*

Щоб змусити кристал (середовище) генерувати вимушене випромінювання, необхідно створити інвертований стан середовища, позитивний зворотний зв'язок і вирішити низку технічних проблем (напр., як вивести випромінювання з відкритого оптичного резонатора). Тому обов'язковими складовими елементами лазера є активне середовище, резонатор і система накачки.

15.2.14. *Що таке метастабільний енергетичний рівень, і яку роль він відіграє у створенні умов для використання активного середовища для лазера?*

Це рівень, на якому час життя $\sim (10^{-6} - 10^{-3})$ с збудженого атома помітно більший за час життя $\sim (10^{-8} - 10^{-10})$ с збудженого атома на "звичайному", неметастабільному енергетичному рівні. Перехід із таких рівнів на нижні заборонений певними квантовими правилами в дипольному наближенні.

Метастабільний рівень відіграє одну із центральних ролей в отриманні лазерної генерації (див. запитання 15.2.15).

Якщо метастабільним є рівень, з якого йде вимушене випромінювання, то це добре, оскільки велике значення τ сприяє створенню інверсії. Якщо ж метастабільним є нижній рівень, то електрони будуть накопичуватись на ньому і зменшувати інверсію. У такому випадку важливо створити такі умови (розмір активного середовища, тиск, температура), які б забезпечили велику ймовірність безвипромінювальних переходів із цього рівня.

15.2.15. *Існують лазери, які використовують різні методи одержання інверсії населеності: три- і чотирирівневі схеми накачки. Поясніть їх принципи роботи. Які схеми накачки застосовуються в рубіновому та He – Ne лазерах?*

Схема трирівневої накачки представлена на рис. 15.6, а. Широкий рівень 3 (енергетична зона) заселяється активними атомами, збудженими за допомогою накачки з рівня 1. Завдяки існуванню переходу 1–3 речовина здатна поглинати світло у ши-

рокій смузі частот. Збуджені атоми із зони 3 без випромінювання переходять на метастабільний рівень 2, віддаючи надлишок енергії кристалічній ґратці. (Частково можливі і переходи 3–1, які ми тут не враховуємо).

Якщо рівень 2 звичайний (не метастабільний) і немає зовнішнього випромінювання, то збуджені атоми з нього переходять в основний стан (рівень 1), випромінюючи некогерентне спонтанне випромінювання або віддаючи енергію кристалічній ґратці без випромінювання (інвертованого стану не створено, лазерного ефекту немає).

Проте в лазерах зазвичай використовують матеріали з люмінесцентними властивостями, у яких спонтанне випромінювання переважає над процесами переходів без випромінювання, а рівень 2 метастабільний. Великий час життя τ_{21} атомів на рівні 2 призводить до того, що на ньому накопичується значна кількість збуджених атомів і починає виконуватись умова інверсії заселеностей енергетичних рівнів 2 та 1.

Прикладом трирівневого матеріалу для лазерів є рубін. У чотирирівневій схемі (рис. 15.6, б) накачка здійснюється між основним рівнем 1 та енергетичною зоною 4. Завдяки безвипромінювальному переходу 4–3 збуджені атоми "скочуються" на метастабільний енергетичний рівень 3. Вимушене випромінювання виникає при переході активних атомів між рівнями 3 і 2. Типовою чотирирівневою речовиною для лазерів є скло з домішками неодиму Nd^{3+} .

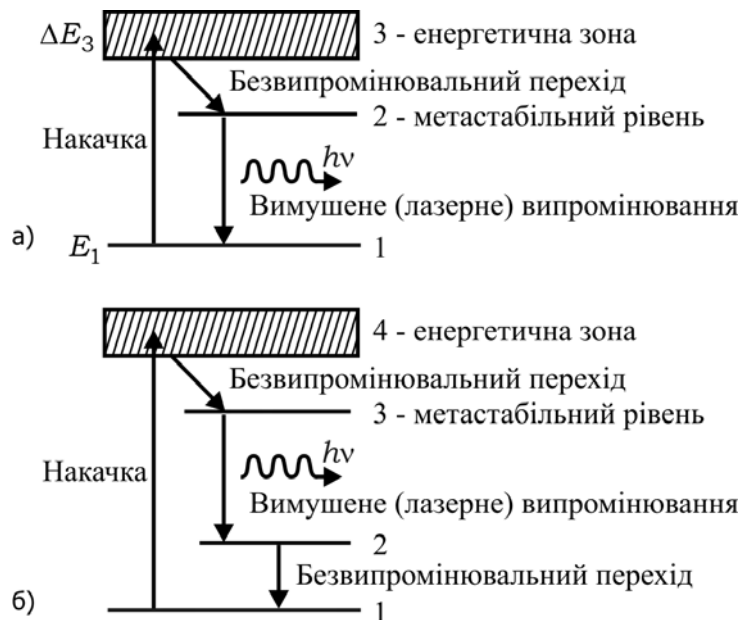


Рис. 15.6. Схеми трирівневої (а) і чотирирівневої (б) накачки

15.2.16. У чому полягають переваги використання чотирирівневої схеми утворення інверсного стану перед трирівневою схемою?

У чотирирівневій схемі (рис. 15.6, б) вимушене випромінювання виникає при переході активних атомів між рівнями 3 і 2, нижній з яких (рівень 2) розташований значно вище основного рівня 1. Якщо різниця між енергіями рівнів 2 і 1 настільки велика, що $E_2 - E_1 \gg kT$, то за термодинамічної рівноваги, яка описується розподілом Больцмана, населеність рівня 2 дуже мала. Тому для створення інверсії населеності в чотирирівневій схемі досить перевести з основного стану 1 у стан 3 лише незначну частину атомів. У зв'язку із цим чотирирівневий лазер потребує для створення інвертованого стану, тобто і генерації, значно меншої енергії, ніж трирівневий.

15.2.17. Оптичні переходи в енергетичному спектрі якого іона використовуються в роботі лазера на рубіні?

Активною речовиною вперше створеного в 1960 р. лазера був рубін – оксид алюмінію Al_2O_3 (матриця) з домішками іонів хрому Cr^{3+} (активні центри). Довжина хвилі генерованого випромінювання $\lambda = 0,694$ мкм.

15.2.18. Опишіть конструкцію типового лазера. Що таке модовий склад лазерного випромінювання?

Конструктивно лазери (окрім напівпровідникових) мають активне тіло у вигляді довгого циліндра, розташованого між двома зазвичай діелектричними дзеркалами – у відкритому резонаторі оптичного генератора (лазера). З точки зору оптики такий резонатор є еталоном Фабрі–Перо довжиною L і дзеркалами з коефіцієнтами відбиття ρ_1 та ρ_2 на торцях.

Генерація відбувається не в усій смузі випромінювання $\nu_0 \pm \Delta\nu_{1/2}$, яке може підсилюватись у генераторі, підсилюється лише те випромінювання, для якого в резонаторі утворюється стояча хвиля, тобто виконується умова

$$\nu_q = cq / (2L), \quad (15.7)$$

де q – кількість півхвиль, що вкладаються в резонаторі вздовж його осі, такі хвилі називають поздовжніми модами резонатора; c – швидкість світла.

У випадку, коли можливе підсилення для хвилі, що поширюється під малим кутом до осі резонатора (хвильовий вектор \vec{k} має відмінну від нуля проекцію на площину дзеркал), утворюються т. зв. поперечні моди генерації, їх позначають як TEM_{lm} , де l, m – кількість ненульових проекцій хвильового вектора \vec{k} на вісь X і Y . Зазвичай l і m мають невеликі значення (1,2,3...), а промені під більшим кутом до осі резонатора Z швидко виходять з резонатора і не встигають підсилитись.

Значення q біля моди не позначають, тому що зазвичай воно $\geq 10^5$. Поздовжня мода позначається як TEM_{00} . Зауважимо, що генерація у багатомодовому режимі збільшує потужність випромінювання лазера, але при цьому збільшується і розбіжність пучка, тобто зменшується його просторова когерентність, погіршується монохроматичність.

15.2.19. При багатомодовій генерації лазера монохроматичність випромінювання залежить від кількості одночасно генеруючих мод. Яка кількість аксіальних мод виникає при генерації лінії $\lambda = 632,8$ нм у He – Ne лазері?

Ширина спектральної лінії неону $\lambda = 632,8$ нм становить 1500 МГц. Відстань між сусідніми аксіальними модами резонатора дорівнює $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ і за довжини резонатора $L = 1$ м дорівнює 150 МГц. Звідси кількість генеруючих мод дорівнюватиме $1500/150 = 10$.

15.2.20. Як перейти від багатомодового режиму генерації лазера до одномодового?

Розгляд принципу роботи лазера, проведений в запитанні 15.2.19, показує, що лазерна генерація йде на дискретних частотах, які визначаються формулою (15.7). Оскільки ці частоти залежать тільки від довжини резонатора L , будемо називати їх частотами власних мод резонатора лазера. Якщо $\Delta\nu$ – міжмодовий частотний інтервал, то кількість M збуджених власних мод залежить від співвідношення між величиною $\Delta\nu$ і шириною спектральної смуги підсилення лазера $\Delta\nu_a$:

$M = \Delta\nu_a / \Delta\nu$, де $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$. Спектр випромінювання багатомодового лазера показаний на рис. 15.7, а.

Проблема створення одномодового лазера пов'язана з проблемою отримання монохроматичного випромінювання, тобто випромінювання, найбільш близького до ідеальної гармонічної хвилі. Схема одномодового лазера (рис. 15.7, б) базується на тому, що всередині резонатора лазера розташований елемент, який здійснює частотну фільтрацію випромінювання. Частотний фільтр являє собою дисперсійний елемент у вигляді призми (Пр), дифракційної ґратки, еталона Фабрі–Перо тощо.

Дія фільтра полягає в тому, що дисперсійний елемент розгортає частотний спектр випромінювання в просторі, а діафрагма (Д) виділяє потрібну поздовжню моду. Поворотом призми можна змінити частоту генерації.

Дотепер вузькосмугове випромінювання отримують у He–Ne лазері з шириною спектральної лінії близько 100 Гц .

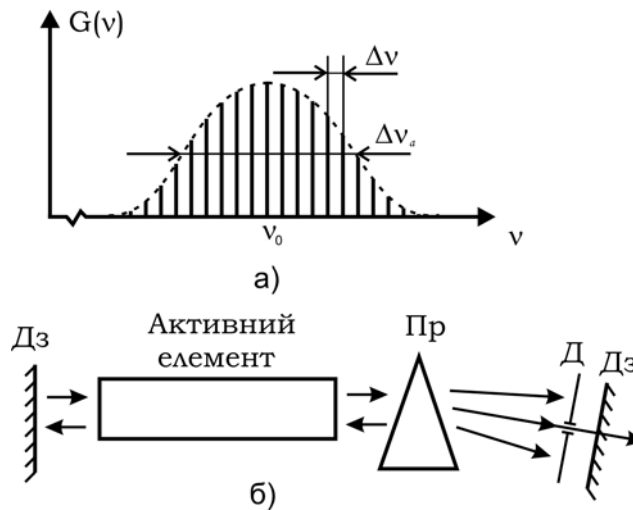


Рис. 15.7. Спектр випромінювання багатомодового лазера (а) і схема одномодового лазера (б)

15.2.21. Наведіть основні етапи створення лазера?

Ідея використання вимушеного випромінювання в інвертованих станах з накачкою для підсилення світлової хвилі була вперше висловлена в докторській дисертації В. Фабриканта в 1939 р. Пізніше (у 1950 р.) на неї було видано авторське свідоцтво. Із різних причин ця наукова ідея належної уваги не отримала. У 1954 р. ця ідея була реалізована в НВЧ діапазоні довжин хвиль для створення підсилувача на газі (аміаку) і на твердому тілі (рубіні). Її авторами були А. М. Прохоров і Н. Г. Басов, а також незалежно від них – Ч. Таунс. Вони ж пізніше (у 1957 р.) запропонували використати цю ідею в оптичному діапазоні, застосувавши як елемент зворотного зв'язку відкритий резонатор у вигляді інтерферометра Фабрі–Перо.

Перший лазер був реалізований на рубіні Т. Мейманом у 1960 р.

15.2.22. Чи є в лазерному випромінюванні складова спонтанного випромінювання? Яку роль у генерації випромінювання в лазері відіграє СВ?

Так, у лазерному випромінюванні наявна складова спонтанного випромінювання, у суперлюмінесценції, що виникає в активному середовищі, складова СВ створює фон.

Відомо, що в умовах стаціонарної генерації лазера втрати в його резонаторі компенсуються за рахунок ВВ в активному середовищі. Однак СВ, яке випромінюється збудженими атомами в активному середовищі, також бере участь у введенні енергії в резонатор. Оскільки енергія СВ не скорельована з полем випромінювання лазерної моди, що випромінюється, СВ вносить випадкові флуктуації в його фазу та амплітуду. Це приводить до збільшення ширини спектра вихідного випромінювання. Чим більша вихідна потужність лазера, тим вужча спектральна лінія його випромінювання, оскільки зі зростанням густини енергії поля в резонаторі ВВ усе більшою мірою перевищує внесок СВ у механізм передачі енергії від активного середовища до моди резонатора.

15.2.23. *Якщо в лазерному випромінюванні існує складова спонтанного випромінювання (запитання 15.2.22), якими експериментальними методами можна із суміші СВ та ВВ виділити один із цих компонентів?*

ВВ як основна складова лазерного випромінювання має строго визначений напрямок поширення у вигляді пучка з низькою розбіжністю та великий ступінь просторової та часової когерентності. СВ має ізотропну індикатрису і низький ступінь часової когерентності.

За допомогою фотоприймача, який розташований на достатньо великій відстані від лазера і має обмежену апертуру, позбавившись таким способом від СВ, можна виміряти інтенсивність вимушеного випромінювання.

Інший спосіб вимірювання частки ВВ у суміші ВВ і СВ полягає у використанні інтерференційних методів за великих різниць ходу між променями, що інтерферують (напр., в інтерферометрах Майкельсона чи Фабрі–Перо): у створенні інтерференційних картин буде брати участь тільки ВВ.

15.2.24. *Чим визначається розбіжність лазерного пучка?*

Розбіжність лазерного пучка має дифракційну природу (див. запитання 7.4.23 з розд. 7). Як впливає з нього, кут θ_d дифракційної розбіжності, яка виникає в дальній зоні дифракції, зазвичай невеликий і його величина визначається формулою $\theta_d \approx \frac{\lambda}{d}$, де d – початковий діаметр пучка, тобто розбіжність лазерного пучка визначається довжиною хвилі λ і початковим діаметром d пучка: величина розбіжності пучка тим менша, чим менша величина λ і чим більша величина d .

15.2.25. *Зробіть оцінку величин дифракційної довжини z_d і кута дифракційної розбіжності θ_d пучка He–Ne лазера.*

Якщо покласти розмір початкового діаметра пучка $d = 2$ мм й обрати довжину хвилі лазерного випромінювання $\lambda = 0,63$ мкм, то

$$z_d = \frac{r^2}{\lambda} \sim 1,5 \text{ м}; \quad \theta_d = \frac{\lambda}{d} \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1'.$$

15.2.26. Яку функцію в роботі лазера виконує резонатор?

Резонатор здійснює позитивний зворотний зв'язок, перетворюючи підсилювач на генератор. Резонатор формує спектральні та просторові властивості вихідного випромінювання лазера.

15.2.27. Чим визначається добротність резонатора?

Добротність резонатора Q визначається як відношення енергії W_3 електромагнітного поля, накопиченої в резонаторі, до енергії W_B втрат за один період коливань:

$$Q = 2\pi \frac{W_3}{W_B} = 2\pi \frac{W_3}{P_B} \nu, \quad (15.12)$$

де P_B – потужність втрат, ν – частота. Накопичена енергія $W_3 = S \cdot L \cdot u_\nu$, де S – площа дзеркал резонатора, L – довжина резонатора, u_ν – об'ємна спектральна густина енергії. Потужність втрат P_B складається із втрат усередині резонатора та корисних втрат на випромінювання й дорівнює $P_B = u_\nu \cdot c \cdot S \cdot \alpha$ (c – швидкість світла, α – коефіцієнт втрат). Підставляючи у формулу для добротності вирази для W_3 та P_B , отримаємо

$$Q = 2\pi \frac{L}{\lambda \cdot \alpha}. \quad (15.13)$$

Зробимо числові оцінки. Для $L \sim 1$ м, $\alpha \approx 2\%$ і $\lambda = 0,63$ мкм ($\nu \approx 4,7 \cdot 10^{14}$ Гц) добротність резонатора становить $Q \approx 5 \cdot 10^8$. Інший вираз для добротності ($Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$) дозволяє зробити висновок про ширину лінії генерації: $\Delta\lambda \approx 10^{-6}$ нм ($\Delta\nu \approx 1$ МГц).

15.2.28. Чому для лазерів не використовуються резонатори НВЧ типу?

Об'ємні резонатори НВЧ діапазону мають лінійні розміри, співмірні з робочою довжиною хвилі. Тому в оптичному діапазоні, де $\lambda_{\text{роб}} \sim 1$ мкм, використання НВЧ резонаторів пов'язане з технологічними труднощами. Такі малі розміри також при-

зведуть до зменшення потужності генерації лазера. Окрім того, відомо, що добротність НВЧ резонаторів $Q \sim \sqrt{\nu}$. Відповідно ширина лінії генерації буде $\Delta\nu = \frac{\nu}{Q} \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Це вказує на те, що за високих частот спектральні лінії можуть перекиватись, тобто резонатор втрапить свої резонансні властивості.

15.2.29. *Ширина лінії генерації лазера з тривалістю імпульсу 5 нс не може бути менша, ніж 200 МГц. Чому?*

В імпульсних лазерах обмеження на ширину лінії генерації накладається відомим співвідношенням $\Delta\nu \cdot \tau \sim 1$, звідки $\Delta\nu \sim \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} \text{ с}} = 2 \cdot 10^8 \text{ Гц} = 200 \text{ МГц}$.

15.2.30. *У неупорядкованих середовищах коефіцієнт підсилення не залежить від поляризації. Тоді чому при генерації лінії з довжиною хвилі $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ у He – Ne лазері виникає поляризоване випромінювання?*

Коефіцієнт підсилення в активному середовищі для $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ малий. Тому для зменшення втрат вікна газорозрядної трубки в лазері встановлені під кутом Брюстера. При цьому втрати для випромінювання з напрямком вектора E , перпендикулярним до площини падіння (E_{\perp}), більші, ніж для випромінювання з напрямком вектора E , паралельним до площини падіння (E_{\parallel}). Тому в генерованого випромінювання спостерігається тільки паралельна складова (E_p) світлового вектора.

15.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 15.1. *Зробіть оцінку заселеностей енергетичних рівнів для оптичних частот за кімнатної температури.*

Розв'язання. Розглянемо дворівневу систему, заселеність енергетичних рівнів у якій описується формулою Больцмана $N_2 = N_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$. Якщо $T = 300 \text{ К}$ і $\lambda = 500 \text{ нм}$ ($\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$), то $\frac{\hbar\omega}{kT} \sim 10^2$. Тобто заселеністю верхнього рівня, якої він набуває в результаті теплової рівноваги, можна знехтувати $N_2 \approx 0$ (усі атоми зосереджені на нижньому, основному рівні).

Приклад 15.2. Отримайте вираз для спектральної густини оптичного випромінювання $u(\omega, T)$, урахувавши термодинамічну рівновагу переходів атомів з верхнього енергетичного рівня на нижній і у зворотному напрямку тільки за рахунок спонтанного випромінювання без залучення вимушеного випромінювання. Проаналізуйте отриману відповідь.

Розв'язання. Середня кількість переходів, які викликають спонтанне випромінювання, з верхнього рівня на нижній за проміжок часу від t до $t + dt$ дорівнює $dN_{21} = A_{21} N_2 dt$. Середня кількість переходів з основного стану в збуджений, які пов'язані з вимушеним поглинанням, дорівнює $dN_{12} = B_{12} N_1 u(\omega, T) dt$. Припускаючи, що атоми перебувають у термодинамічній рівновазі з полем випромінювання, а кількість переходів атомів з верхнього енергетичного рівня на нижній і у зворотному напрямку однакова ($dN_{21} = dN_{12}$), а також, нехтуючи вимушеним випромінюванням (як в умові), маємо

$$A_{21} N_2 dt = B_{12} N_1 u(\omega, T) dt \Rightarrow \frac{A_{21} N_2}{B_{12} N_1} = u(\omega, T).$$

Урахуємо, що населеності рівнів E_1 та E_2 пов'язані співвідношенням Больцмана (15.1):

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right),$$

а між коефіцієнтами існує зв'язок (15.3):

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \text{ Тоді } u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right).$$

Отримали формулу Віна, тобто граничний випадок формули Планка, який спостерігається за виконання умови $\hbar\omega \gg kT$. Важливий фізичний висновок, який випливає з цього, такий: для отримання формули Планка, а отже, і для переходу до квантування енергії, необхідно враховувати існування вимушеного випромінювання.

Приклад 15.3. Доведіть формулу Планка для спектральної густини теплового випромінювання $u(\omega, T)$, виходячи зі співвідношень між коефіцієнтами Ейнштейна.

Розв'язання. Коефіцієнти Ейнштейна A_{21} , B_{12} та B_{21} визначають імовірності переходів, які пов'язані, відповідно, зі спонтанним випромінюванням, вимушеним поглинанням і вимушеним випромінюванням. У стані термодинамічної рівноваги

переходи, що супроводжуються випромінюванням і поглинанням квантів світла, мають врівноважувати один одного (за визначенням рівноважного теплового випромінювання):

$$\begin{aligned} Z_{21}^{\text{спонт}} + Z_{21}^{\text{інд}} = Z_{12}^{\text{інд}} &\Rightarrow A_{21} \cdot N_2 + B_{21} \cdot N_2 \cdot u(\omega, T) = B_{12} \cdot N_1 \cdot u(\omega, T) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(\omega, T) &= \frac{A_{21} / B_{21}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Відношення коефіцієнтів Ейнштейна A_{21} / B_{21} та B_{12} / B_{21} можна знайти з розгляду граничних випадків:

1) якщо $T \rightarrow \infty$, то $u(\omega, T) \rightarrow \infty$ і заселеність енергетичних рівнів вирівнюється $N_1 = N_2$. За цих умов із (15.8) випливає (15.2): $B_{12} = B_{21}$;

2) якщо $\omega \rightarrow 0$, то $\hbar\omega \ll kT$. Тобто квантова структура не проявляється і для спектральної густини випромінювання $u(\omega, T)$ справедлива класична формула Релея–Джинса:

$$u(\omega, T) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2. \quad (15.9)$$

3) за умови, що $\omega \rightarrow 0$, урахувавши рівність коефіцієнтів Ейнштейна $B_{12} = B_{21}$, із (15.8) випливає

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{kT}{\hbar\omega}. \quad (15.10)$$

Порівнюючи (15.9) та (15.10), знаходимо, що

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (15.11)$$

Якщо підставити (15.2) і (15.11) у (15.8), отримуємо

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Це і є формула Планка (14.16), яку в 1900 р. ввів у користування (у деяких книжках пишуть "побудував", і навіть "вгадав") для розв'язування "УФ катастрофи" М. Планк. Ввів він її, не користуючись поняттями спонтанного і вимушеного випромінювань. Після введення в 1915 р. А. Ейнштейном у фізичний вжиток вимушеного і спонтанного випромінювання її можна довести методом, який використаний нами в цьому прикладі. Висновки, які випливають із формули Планка, привели до народження сучасної квантової фізики.

Приклад 15.4. Знайдіть діапазон частот випромінювання, для яких імовірність СВ у $\eta = 100$ і більше разів перевищує ймовірність вимушеного переходу під дією рівноважного випромінювання з температурою 300 К.

Розв'язання. Із теорії відомо (15.3), що співвідношення між коефіцієнтами Ейнштейна для випромінювання дорівнює

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

За умовою задачі $\frac{A_{21}}{B_{21}u(\nu)} = \eta = 100$. Спектральну густину енергії визначаємо за формулою Планка (14.17):

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad \text{тоді} \quad \eta = \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Очевидно, якщо $\frac{A_{21}}{B_{21}u(\nu)} = \eta = 100$, то експонента мало відрізняється від 1, тому

наближено, скориставшись формулою $e^x - 1 \approx x$ за $x \ll 1$, можна прийняти, що $\eta \approx kT/h\nu \approx 100$. Звідси маємо $\nu \geq kT/h\eta \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, тобто цій умові відповідає випромінювання із сантиметровими та коротшими довжинами хвиль.

Приклад 15.5. Перехід з рівня 1 на рівень 2 в атомі супроводжується випромінюванням на довжині хвилі 500 нм. Знайдіть співвідношення заселеності цих двох рівнів за умови теплової рівноваги за температури 300 К.

Розв'язання. Відношення заселеності двох рівнів, виходячи зі співвідношення Больцмана, дорівнює

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1 \exp(-E_1/kT)}{g_2 \exp(-E_2/kT)} = \frac{g_1}{g_2} e^{h\nu/kT},$$

якщо $E_2 - E_1 = h\nu$. Для рівнів, статистична вага яких невідома, приймаємо $\frac{g_1}{g_2} = 1$.

Тоді $\frac{N_1}{N_2} = e^{h\nu/kT}$, а величина

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{k\lambda T} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{1,4 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot 300 \text{ К}} = 86.$$

Тоді $\frac{N_1}{N_2} = e^{86} \approx 10^{37}$. Отримали дуже велике число, тобто в стільки разів відрізняються заселеності двох рівнів за температури 300 К у стані теплової рівноваги, коли

відстань між ними характеризує перехід з випромінюванням на довжині хвилі 500 нм.

Приклад 15.6. Гелій-неоновий лазер випромінює в неперервному режимі одну поздовжню моду з потужністю 50 мВт на довжині хвилі $\lambda = 632,8$ нм. Визначте ширину смуги випромінювання, виходячи з того, що довжина резонатора 1 м, коефіцієнт відбиття діелектричних дзеркал $R = 0,98$, діаметр пучка 3 мм. Можна прийняти, що по перерізу пучка густина енергії випромінювання залишається постійною. Яку температуру повинно мати абсолютно чорне тіло, щоб досягти тієї самої спектральної густини енергії?

Розв'язання. Ширину смуги випромінювання лазера визначаємо, розглядаючи відкритий резонатор лазера як еталон Фабрі–Перо з базою $L = 1$ м і дзеркалами з коефіцієнтами відбиття $R = 0,98$. Розподіл інтенсивності залежно від різниці фаз описується формулою Ейрі (6.44):

$$I(\delta) = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)} = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)},$$

де $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ – фактор різкості; δ – різниця фаз між сусідніми променями;

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nL \cos \varphi$, де φ – кут падіння променів на дзеркала. Максимум інтенсивності

$I_{\max} = I_0$ отримуємо за різниці фаз $\delta = 2\pi \cdot m$, тобто коли $2nL \cos \varphi = m\lambda$.

Ширину смуги випромінювання прийнято визначати за рівнем, де інтенсивність спадає вдвічі порівняно з максимумом. У п. 6.3 при розгляді запитання 6.3.7 було показано, що ширина смуги випромінювання пов'язана з величиною фактора різкості співвідношенням $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{F}}$. Відповідно ширина смуги випромінювання для центра

інтерференційної картини ($\varphi = 0$) в одиницях довжин хвиль має вигляд

$$\Delta\lambda = \varepsilon \frac{d\lambda}{d\delta} = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{F}\pi nL} = \frac{\lambda^2(1-R)}{4\sqrt{R}\pi nL} \approx 6,44 \cdot 10^{-7} \text{ нм}.$$

Тепер визначимо температуру АЧТ, яке на цій ділянці спектра мало б таку саму густину енергії випромінювання, що й лазер. Потужність випромінювання W розраховується за допомогою співвідношення $W = U_\lambda(T) \cdot \Delta\lambda \cdot c \cdot S$, де $S = \frac{\pi d^2}{4}$, d –

діаметр лазерного пучка; $U_\lambda(T)$ – об'ємна спектральна густина енергії випромінювання АЧТ, яка описується формулою Планка (14.18):

$$U_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Отримаємо

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{2\pi^2 d^2 c^2 h \cdot \Delta\lambda}{W\lambda^5} \approx 1,0013.$$

Відповідно температура $T = \frac{hc}{\lambda k \cdot \ln(1,0013)} \approx 1,75 \cdot 10^7 \text{ К}.$

Як бачимо, для того, щоб отримати випромінювання з потужністю (50 мВт) і шириною смуги ($\Delta\lambda \approx 644 \cdot 10^{-9} \text{ нм}$), які має випромінювання звичайного He – Ne лазера, необхідно було б узяти АЧТ, нагріте до температури $T \approx 1,75 \cdot 10^7 \text{ К}.$ (Нагадаємо, що температура поверхні Сонця, яке складається із речовини в стані плазми, усередині якого відбуваються термоядерні реакції, дорівнює $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ К}.$)

16. НЕЛІНІЙНА ОПТИКА

16.1. Короткі теоретичні відомості

- Нелінійна оптика – це розділ оптики, який охоплює дослідження та застосування процесів, пов'язаних із поширенням і взаємодією потужних світлових пучків з речовиною (твердим тілом, рідиною, газом). Сильне світлове поле змінює оптичні характеристики середовища (показник заломлення та коефіцієнт поглинання), які стають функціями напруженості E електричного поля світлової хвилі. Тобто поляризація P середовища починає нелінійно залежати від E .

Розгляд взаємодії світла з речовиною базується на класичній моделі осцилятора. Поведінка атома чи молекули у світловому полі еквівалентна коливанням осцилятора. Характер відгуку атомного осцилятора на світлову хвилю можна встановити, порівнюючи величину E з напруженістю внутрішньоатомного поля $E_{ат}$:

$E_a \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}$, де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; a – радіус Бора. Величина

$E_a \approx 10^8 - 10^9$ В/см визначає сили зв'язку в атомному осциляторі. У світлових пучках від нелазерних джерел $E \ll E_a$. Промінь лазера дозволяє отримати величину $E \sim E_a$.

- Лінійна оптика базується на співвідношенні для поляризації середовища

$$P_{л} = \chi E = \chi \cdot A \cos(\omega t - kx), \quad (16.1)$$

де χ – лінійна діелектрична сприйнятливість, яка залежить лише від властивостей середовища. Співвідношення (16.1) означає, що світлові поля, які перевипромінюються вторинними хвилями, мають ту саму частоту, що й падаюче поле.

У потужних лазерних світлових пучках величина E наближається до величини E_a , атомний осцилятор стає ангармонічним, виникає нелінійна взаємодія випромінювання з речовиною. Матеріальне рівняння для нелінійного середовища записується як

$$P = P_{л} + P_{нл} = \chi E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \chi^{(4)} E^4 + \dots, \quad (16.2)$$

$$P_{нл} = \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \chi^{(4)} E^4 + \dots,$$

де χ – лінійна сприйнятливість; $\chi^{(i)}$ – нелінійна сприйнятливість i -го порядку.

Як видно із (16.2), рівноважна поляризація середовища є нелінійною функцією величини напруженості світлової хвилі E . Рівняння (16.2) є базовим рівнянням нелінійної оптики.

Нелінійні за E доданки в $P_{\text{нл}}$ (16.2) описують основні нелінійно-оптичні ефекти: генерація другої гармоніки (ГДГ), генерація третьої гармоніки (ГТГ), оптичне детектування (випрямлення світла), багатофотонне поглинання, самоприсвітлення середовища, вимушене розсіювання тощо¹.

- Нелінійна поляризація середовища 2-го порядку дорівнює

$$P_{\text{нл}}^{(2)} = \chi^{(2)} E^2 = \frac{\chi^{(2)} \cdot A^2}{2} + \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 \cos(2\omega t - 2kx). \quad (16.3)$$

- Нелінійна поляризація середовища 3-го порядку дорівнює

$$P_{\text{нл}}^{(3)} = \chi^{(3)} E^3 = \frac{3}{4} \chi^{(3)} \cdot A^3 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{4} \chi^{(3)} A^3 \cos 3(\omega t - kx). \quad (16.4)$$

- Залежність (16.2) веде до залежності від E діелектричної проникності ϵ і відповідно показника заломлення

$$n(E) = n_0 + n_2 E^2 + n_3 E^3 + \dots \quad (16.5)$$

Залежність $n(E)$ призводить, зокрема, до явищ самофокусування та самодефокусування світла в нелінійних середовищах.

16.2. Запитання та відповіді

16.2.1. *Як у моделі, у якій середовище розглядається у вигляді ансамблю осциляторів, пояснити їх нелінійні властивості, які призводять до нелінійно-оптичних ефектів?*

В околі точки рівноваги $x=0$ електрона потенціальна енергія його коливань може бути розкладена в ряд і отримана формула Маклорена

$$U(x) = \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{3} \beta x^3 + \dots \quad (\text{рис. 16.1}).$$

¹ Зазначимо, що на наступному етапі розгляду нелінійної оптики діелектрична сприйнятливість розглядається як тензор, компоненти якого є комплексними функціями деяких частотних аргументів. Звідси впливає велике розмаїття нелінійно-оптичних явищ як дисперсійних, так і абсорбційних.

Поворотна сила $f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha x - \beta x^2 + \dots$ набуває нелінійних складових, що призводить до появи нелінійно-оптичних ефектів.

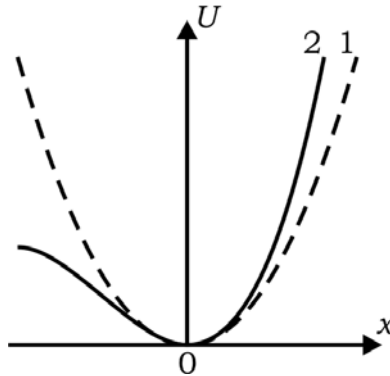


Рис. 16.1. Потенціальна енергія U коливань електрона як функція його відхилення від положення рівноваги x при гармонічних (1) та ангармонічних (нелінійних) (2) коливаннях

16.2.2. При врахуванні нелінійної поляризації середовища існують доданки парні та непарні за порядком нелінійності. Покажіть, що для ізотропного нелінійного середовища парні доданки у виразі для нелінійної поляризації "занулені" і нелінійністю найнижчого порядку, яка відмінна від нуля, є кубічна нелінійність.

Як видно з (16.2), нелінійна поляризація середовища містить доданки з квадратичною, кубічною та більш високих порядків сприйнятливостями. Якщо кожна точка середовища є центром симетрії, як в ізотропному середовищі, то величини сприйнятливостей парних порядків дорівнюють нулю, тобто

$$P = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}} = \chi E + \chi^{(3)} E^3 + \chi^{(5)} E^5 + \dots \quad (16.6)$$

Покажемо, що це дійсно так.

Якщо розкласти силу $f(x)$, що діє на осцилятор (електрон), у ряд Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \quad (16.7)$$

і проаналізувати (16.7), то можна побачити, що $f(0) = 0$, у точці стійкої рівноваги осцилятора $x = 0$. Тоді можливі два випадки: а) $f'(0) \neq 0$ або б) $f'(0) = 0$, а саме:

а) якщо $f'(0) \neq 0$, то доданок $x \cdot f'(0)$ у (16.7) є основним членом ряду і для малих коливань $f(x) \approx x \cdot f'(0)$. Сила $f(x)$ – поворотна сила. Вона має бути напрям-

лена до точки стійкої рівноваги $x=0$. Тобто $f(x) \approx x \cdot f'(0) < 0 \Rightarrow f'(0) < 0$. Відхилення x і сила $f(x)$ мають різні знаки;

б) якщо $f'(0)=0$, то слід звертатись у (16.7) до доданка $\frac{x^2}{2} f''(0)$. Проте він має дорівнює нулю $f''(0)=0$, якщо $x=0$ – точка стійкої рівноваги. Це впливає з того, що цей доданок має один і той самий знак як для $x > 0$, так і для $x < 0$. Тому сила, яку він визначає, при відхиленні електрона, що осилює, в один бік від положення рівноваги намагається повернути електрон назад, але при відхиленні його в інший бік, навпаки, намагається віддалити електрон від точки $x=0$. Тому доданок з $f''(0)$ дорівнює нулю. Тоді $f'''(0) \neq 0$. При цьому коливання осцилятора значно ускладнюються, вони стають *нелінійними*. У цьому випадку $f(x) \approx \frac{1}{3!} x^3 \cdot f'''(0)$.

Зауважимо, що в реальних фізичних системах (напр., механічних) виконується умова $f'(0) \neq 0$ і для малих коливань рівняння руху має вигляд $m \cdot \ddot{x} = x \cdot f'(0) \equiv -D \cdot x$, де $D = -f'(0) > 0 \Rightarrow f'(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ – поворотна сила.

Таким чином, для ізотропного нелінійного середовища нелінійністю найнижчого порядку, відмінною від нуля, є кубічна нелінійність $P = \chi E + \chi^{(3)} E^3 + \chi^{(5)} E^5 + \dots$, що й треба було довести.

16.2.3 *З якими значеннями напруженостей E світлового поля мали справу в джерелах світла, які використовували до появи потужних лазерів, і які значення напруженостей світлового поля дозволяють отримати лазери?*

У "долазерний" період потужні джерела світла дозволяли отримати значення напруженості світлового поля $E \sim (0,1-10)$ В/см. Такі значення E дають можливість застосувати лінійні матеріальні рівняння і казати про роботу в межах лінійної оптики. У лазерах значення E сягають величини $\sim (10^6 - 10^7)$ В/см, що дозволяє вільно працювати в області нелінійної оптики.

16.2.4. *Назвіть основні мікроскопічні механізми нелінійно-оптичних ефектів.*

Існують принаймні два основні мікроскопічні механізми нелінійно-оптичних ефектів:

1) електрострикція у світловому полі призводить до появи тиску, який змінює густину (ρ) середовища, а отже, і показник заломлення;

2) у рідинах сильна електрична складова світлового поля призводить до орієнтації (повороту) анізотропних молекул рідини залежно від інтенсивності та поляризації світла. При цьому середовище стає анізотропним, а середнє значення показни-

ка заломлення $\langle n \rangle$ зростає. Цей ефект називають *високочастотним ефектом Керра*, оскільки такий самий (або схожий) механізм лежить в основі двопроренезаломлення, наведеного постійним електричним полем.

16.2.5. Чому нелінійно-оптичні ефекти часто спостерігають у матеріалах, у яких традиційно спостерігається ефект Керра (ЕК): наприклад, у нітробензолі спостерігають ЕК значної величини і зазвичай демонструють самофокусування світла?

Нагадаємо, що класичний ЕК полягає в утворенні штучної оптичної анізотропії деяких речовин під дією поперечного зовнішнього електричного поля (див. розд. 10). Водночас серед можливих механізмів нелінійно-оптичних ефектів у рідинах обов'язково згадують т. зв. високочастотний ЕК, який полягає в тому, що електрична складова потужної світлової хвилі може викликати поворот і орієнтацію анізотропних молекул рідини, залежні від інтенсивності та поляризації світла. При цьому середовище стає анізотропним. Як бачимо, механізми класичного ЕК та високочастотного ЕК багато в чому схожі. Цим можна пояснити той факт, що нелінійно-оптичні ефекти часто спостерігають у матеріалах, у яких традиційно спостерігається ефект Керра (напр., у нітробензолі).

16.2.6. Що таке оптичне детектування? У чому полягають теоретичні передумови та схема експериментального спостереження оптичного детектування?

Оптична хвиля з величиною напруженості $E = A \cos(\omega t - kx)$, де $k = \frac{\omega}{c}n$ – хвильове число, викликає поляризацію середовища, величина якої з урахуванням нелінійності другого порядку дорівнює

$$P = \chi A \cos(\omega t - kx) + \chi^{(2)} A^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Нелінійна частина поляризації середовища в цьому разі дорівнює

$$P_{\text{нл}}^{(2)} = \chi^{(2)} A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (16.8)$$

Якщо скористатись тригонометричною формулою для подвійного кута

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2},$$

то із (16.5) можна отримати

$$P_{\text{нл}}^{(2)} = \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 + \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 \cos(2\omega t - 2kx). \quad (16.9)$$

Із (16.9) можна побачити, що $P_{\text{нл}}^{(2)}$ складається із двох доданків – один сталої величини, а другий – змінної величини із подвоєною частотою.

Перший (сталий) доданок у (16.9) не призводить до перевипромінювання електроном світлової енергії, а призводить до перетворення відповідної частини світло-

вої енергії на енергію сталої поляризації середовища. Це явище називається оптичним детектуванням, або оптичним випрямленням. Стала поляризація середовища призводить до появи сталого електричного поля в середовищі, яке можна зареєструвати та виміряти.

Схему досліду зі спостереження оптичного детектування наведено на рис. 16.2.

Ефект оптичного детектування можна використати для вимірювання величини $\chi^{(2)}$.

16.2.7. У чому полягає ефект генерації другої гармоніки (ГДГ)? У чому полягають теоретичні передумови та схема експериментального спостереження ГДГ?

Ефект генерації другої гармоніки (ГДГ) полягає в подвоєнні частоти ($\omega \rightarrow 2\omega$) світла при поширенні потужного лазерного променя в нелінійному середовищі. Механізм ГДГ пов'язаний з нелінійністю коливань елементарного атомного осцилятора.

Продовжуючи розгляд отриманого в попередньому питанні виразу (16.9), бачимо, що другий доданок у ньому змінюється з подвоєною відносно падаючого сигналу частотою 2ω . Саме цей доданок відповідає за ефект ГДГ, який відбувається в нелінійних середовищах.

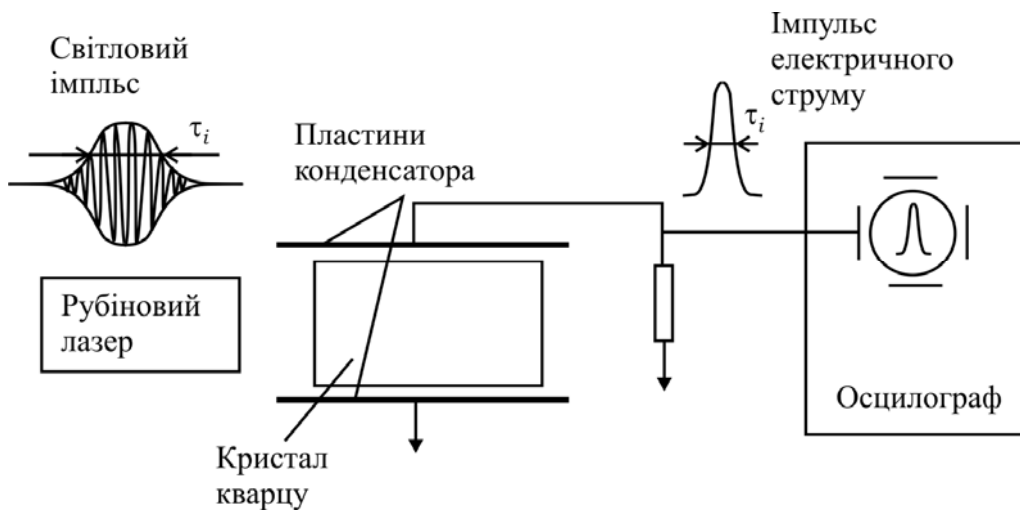


Рис. 16.2. Схема досліду зі спостереження оптичного детектування

Електрон, який приведений у коливання з частотою 2ω , стає джерелом електромагнітної хвилі, яка утворює поляризацію середовища

$$P_{2\omega} = \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 \cos(2\omega t - 2kx) = A' \cos(2\omega t - k_2 x),$$

де

$$A' = \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2; \quad k_2 = 2k = \frac{2\omega}{v_\phi(2\omega)}.$$

ГДГ, що належить до ефектів трихвильового змішування, – це квадратичний за полем параметричний процес. Схему досліду зі спостереження ГДГ наведено на рис. 16.3.

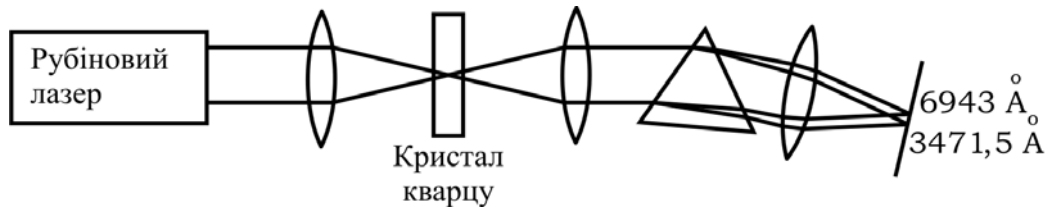


Рис. 16.3. Схема досліду зі спостереження генерації другої гармоніки (ГДГ)

16.2.8. У чому полягає фізичний зміст створення умов синхронізму при нелінійно-оптичній генерації гармонік вищих порядків?

Ефективність ГДГ за схемою, наведеною на рис. 16.3, яку застосовував П. Франкен у 1961 р., працюючи з кристалом кварцу, була дуже низькою, $\sim 10^{-8}$. Однак незабаром експериментально вдалось отримати ефективність ГДГ, близьку до 80%. Це було зроблено, завдяки використанню умови фазового синхронізму, який полягає у збігу в деяких напрямках анізотропних кристалів фазових швидкостей світлових хвиль на основній частоті та на частоті другої гармоніки (рис. 16.4)

$$v(\omega) = v(2\omega). \quad (16.10)$$

У цьому випадку відбувається накопичування проявів нелінійно-оптичних ефектів у процесі поширення світлових хвиль. При спостереженні ГДГ умова фазового синхронізму була реалізована в 1962 р. Для виконання умови синхронізму було запропоновано використати явище двопроменезаломлення. Напрямки в кристалі, уздовж яких еліпсоїд n_{2e} для гармоніки перетинає коло n_o для основного сигналу (накачки), називаються *напрямками фазового синхронізму*. При виконанні умов синхронізму потужність хвилі з частотою 2ω зростає монотонно.

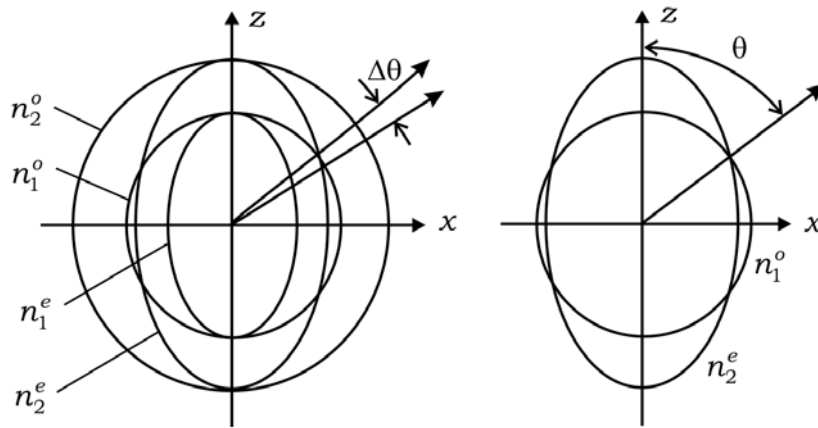


Рис. 16.4. Схема створення умов синхронізму з використанням явища двоприменезаломлення

З квантової точки зору умова фазового синхронізму відповідає закону збереження імпульсу \vec{k} при народженні або розпаді фотонів: для ГДГ умова синхронізму має вигляд $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, де $k_1 = k_2$ – хвильові вектори для хвилі основної частоти; k_3 – хвильовий вектор для хвилі подвоєної частоти.

16.2.9. Від чого залежить ефективність ГДГ при використанні умов синхронізму?

На ефективність перетворення світла на випромінювання із частотою 3ω за допомогою нелінійно-оптичного ефекту ГДГ при використанні умов синхронізму впливає низка факторів, а саме:

- довжина кристала має бути достатньою для того, щоб отримати повне (близьке до 100 %) перетворення випромінювання;
- кутова ширина синхронізму досить мала, для кристала KDP вона становить $\sim 0,1^\circ$. Тому для покращення ефективності ГДГ треба ретельно добирати потрібний кут поширення променя в кристалі, за якого ефективність ГДГ максимальна;
- слід враховувати, що явище дисперсії заважає виконанню умов синхронізму.

16.2.10. Чи всі анізотропні кристали можуть задовольняти умову синхронізму?

Для деяких кристалів, до яких належить, наприклад, кварц, умова синхронізму не може бути виконана ні для яких напрямків, як видно з рис. 16.5.

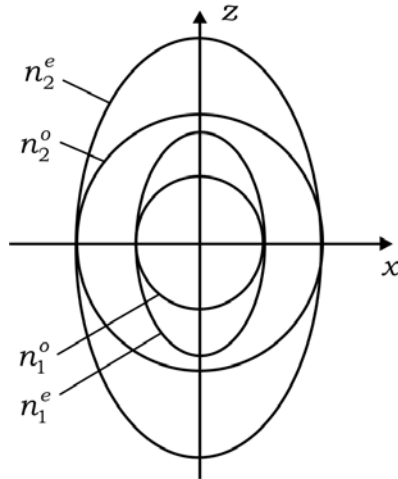


Рис. 16.5. Демонстрація неможливості виконання умови синхронізму в кристалі кварцу

16.2.11. До прояву зокрема яких нелінійно-оптичних ефектів призводить урахування оптичної сприйнятливості третього порядку ($\chi^{(3)}$)?

Оптична хвиля з величиною напруженості $E = A \cos(\omega t - kx)$ викликає поляризацію середовища, нелінійна частина якої з урахуванням нелінійності третього порядку дорівнює

$$P_{\text{нл}}^{(3)} = \chi^{(3)} A^2 \cdot A \cos^3(\omega t - kx). \quad (16.11)$$

Ураховуючи тригонометричну формулу для потрійного кута,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha,$$

з (16.11) одержимо

$$P_{\text{нл}}^{(3)} = \frac{3}{4} \chi^{(3)} A^2 \cdot A \cos(\omega t - kx) + \frac{\chi^{(3)} A^2}{4} A \cos 3(\omega t - kx). \quad (16.12)$$

Із (16.12) видно, що $P_{\text{нл}}^{(3)}$ складається із двох доданків: перший призводить, зокрема, до зміни показника заломлення, який визначається як

$$n^2 = \epsilon_0 + \epsilon_2 \cdot A^2, \quad \text{де} \quad \epsilon_0 = 1 + 4\pi\chi; \quad \epsilon_2 = 3\pi\chi^{(3)}, \quad (16.13)$$

а другий доданок у (16.12) призводить до перевипромінювання електроном світлової хвилі з частотою 3ω , зокрема, до генерації третьої гармоніки.

16.2.12. Покажіть, у якому порядку нелінійності діелектричної сприйнятливості речовини проявляється залежність показника заломлення від інтенсивності світла?

Нелінійність діелектричної сприйнятливості другого порядку, як ми вже пересвідчились, відповідає за оптичне детектування та за ГДГ (див. запитання 16.2.6 та 16.2.7). Тому звернемось до сприйнятливості третього порядку (див. приклад 16.2) і пересвідчимось, що саме в середовищі з кубічною нелінійністю сприйнятливості показник заломлення n лінійно залежить від інтенсивності I світла. Залежність $n(I)$ викликає, зокрема, ефект самофокусування потужного світлового променя тощо.

Зауважимо, що додаток до показника заломлення, який залежить від інтенсивності світла I , може бути пов'язаний не тільки з нелінійністю електронної поляризації, але й з нагріванням речовини потужним світловим потоком.

16.2.13. Яке фізичне явище називається дво- і багатофотонним поглинанням?

Залежність поглинання світла від його інтенсивності I , яке настає за великих значень I , називається дво- і багатофотонним поглинанням. Це нелінійно-оптичні ефекти. У лінійній оптиці поглинання фотона з частотою ν відбувається тоді, коли енергія фотона $h\nu$ збігається або близька до різниці енергій між рівнями квантової системи (атома чи молекули) $E_2 - E_1 = h\nu_0$, де ν_0 – власна резонансна частота. У цьому разі в елементарному акті взаємодії світла з речовиною поглинається один фотон (рис. 16.6, а).

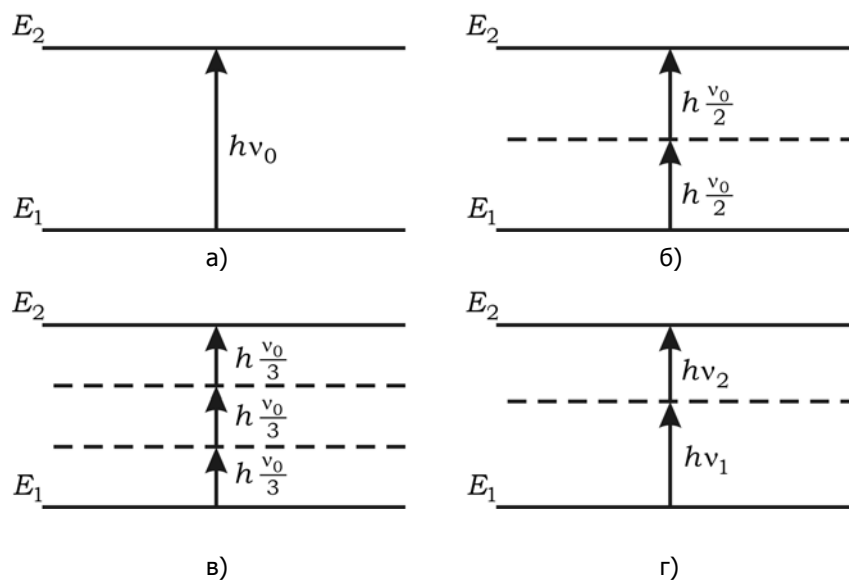


Рис. 16.6. Лінійне (а) і нелінійне (б–г) поглинання: (б, г) – двофотонне; (в) – трифотонне

За великих інтенсивностей світла можуть одночасно поглинатись два або кілька квантів світла. Умовами дво- та трифотонного поглинання є виконання енергетичних співвідношень, відповідно: $h\nu + h\nu = E_2 - E_1$ (рис. 16.6, б) та $h\nu + h\nu + h\nu = E_2 - E_1$ (рис. 16.6, в), де $E_2 - E_1 = h\nu_0$.

Таким чином, уточнюючи визначення дво- і багатофотонного поглинання, наведено вище, можна сказати, що поглинання світла частотою $\nu_0 / 2$ середовищем з резонансною частотою ν_0 називається двофотонним поглинанням, поглинання світла з частотою $\nu_0 / 3$ – трифотонним поглинанням і т. д.

Багатофотонне поглинання може мати й інші прояви. Наприклад, якщо речовину опромінювати світлом, до складу якого входять спектральні компоненти з частотами ν_1 і ν_2 , то може відбутись поглинання двох фотонів з енергіями $h\nu_1$ та $h\nu_2$ за умови, що $h\nu_1 + h\nu_2 = E_2 - E_1$ (рис. 16.6, г).

Ще один прояв багатофотонного поглинання може спостерігатись при дослідженні суперпозиції світла від двох джерел – потужного лазера з частотою випромінювання ν_L і нелазерного джерела світла із суцільним спектром. Якщо інтенсивність лазера досить велика, то у спектрі поглинання речовини, окрім звичайних ліній (смуг) поглинання поблизу власних резонансних частот ν_0 речовини з'являється нова лінія поглинання на частоті ν_1 , яка задовольняє умову $h\nu_1 + h\nu_L = E_2 - E_1$. Імовірність таких процесів дуже мала, процеси дво- і багатофотонного поглинання спостерігаються за великих інтенсивностей світла.

Проявом багатофотонного поглинання є експериментальне спостереження ще одного нелінійно-оптичного явища – багатофотонної іонізації (або багатофотонного фотоэффекту). Воно полягає в тому, що від атома можна відірвати оптичний електрон не тільки за допомогою світла, енергія кванта якого більша за енергію іонізації E_i ($h\nu > E_i$), а й за допомогою світла, для якого $h\nu < E_i$, але $n \cdot h\nu > E_i$ ($n = 2, 3, \dots$). Чим більше n , тим потужнішим має бути лазер накачки. Тепер зафіксовано багатофотонну іонізацію атома гелію, у якій бере участь 21 фотон випромінювання неодимового лазера з довжиною хвилі $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$.

Зауважимо, що багатофотонне поглинання й ефекти, які з нього випливають, зазвичай розглядаються у формалізмі нелінійних сприйнятливостей як непараметричні процеси, зумовлені кубічною нелінійною сприйнятливістю.

16.2.14. У чому полягають особливості нелінійно-оптичних процесів порівняно з лінійними оптичними процесами?

Можна назвати принаймні такі особливості нелінійно-оптичних процесів:

- ефект генерації другої гармоніки (ГДГ) можна розглядати з квантової точки зору і трактувати як "зникнення" одного фотона та "народження" двох фотонів. Процеси "зникнення" і "народження" фотонів відбуваються миттєво, без затримки, так би мовити, "одночасно". Це призводить до того, що хвилі з подвоєною частотою ν' і хвилі накачки когерентні й інтерферують між собою;

- однофотонні процеси можуть бути заборонені з точки зору квантової механіки, навіть у випадку, коли енергія $h\nu$ фотона точно збігається з різницею енергій ΔE між енергетичними рівнями. А багатофотонні процеси можливі й у тому випадку, коли перехід між відповідними рівнями навіть заборонений квантово-механічними правилами;

- однофотонні переходи відбуваються "часто": збуджений атом випромінює квант світла і знову поглинає в середньому через кожні 10^{-8} с. Двофотонне поглинання за тієї самої потужності поглиненого світла одним атомом відбувається не частіше ніж один раз у 10^{-3} с. Тому, щоб здійснити двофотонне поглинання, потрібно створити потужний потік фотонів (використати світло великої інтенсивності). У зв'язку з цим кажуть, що інтенсивність багатофотонного поглинання залежить від інтенсивності накачки. Для спостереження багатофотонних процесів більш високого, ніж другий порядок (трифотонні і вище), потужність накачки має бути більшою, ніж у випадку двофотонних процесів.

16.2.15. *Які властивості процесів, що відбуваються при нелінійно-оптичній генерації вищих гармонік, призводять до того, що вторинні хвилі не втрачають направленої характеру поширення порівняно з первинною хвилею накачки?*

Дійсно, промені генерованого випромінювання вищих гармонік не втрачають напрямку поширення, який їм задає випромінювання накачки. Цієї властивості немає, наприклад, у розсіяного випромінювання або у випромінювання, яке отримується в результаті люмінесценції. Ця особливість випромінювання, отриманого шляхом нелінійно-оптичної генерації вищих гармонік, пов'язана з когерентністю вторинних хвиль у багатофотонному поглинанні порівняно з однофотонним поглинанням (див. запитання 16.2.14).

Той факт, що процеси "зникнення" і "народження" фотонів відбуваються без затримки ("одночасно"), викликає когерентність вторинних хвиль із подвоєною частотою ν' , вони інтерферують між собою. Цим пояснюється строго визначений напрямок поширення хвиль з подвійною (потрійною і т. д.) частотою.

Якби вторинні хвилі із подвоєною частотою $\nu' = 2\nu$ не були когерентними і не інтерферували між собою, то вони б поширювались у бік від напрямку первинної хвилі, наприклад, як це відбувається з розсіяним світлом або світлом, що спостерігається при флуоресценції, в ефектах, які належать до лінійної оптики.

16.2.16. Які нелінійно-оптичні ефекти спостерігаються за умови поширення в нелінійному середовищі двох або декількох інтенсивних світлових хвиль з різними частотами, ω_1 та ω_2 ?

У цьому випадку поруч з гармоніками кожної із хвиль ($2\omega_1, 2\omega_2$ і т.д.) виникають хвилі з комбінаційними частотами ($\omega_1 + \omega_2; \omega_1 - \omega_2$ і т.ін.), тобто світлові хвилі починають взаємодіяти між собою.

16.2.17. Які схеми і фізичні принципи нелінійної оптики можна застосувати для створення джерела світла з плавною перебудовою спектрального складу випромінювання?

В основі створення джерела світла з плавною перебудовою спектрального складу випромінювання покладене використання нелінійно-оптичного ефекту параметричної генерації та умов синхронізму. Пояснимо це.

Якщо на квадратично-нелінійне середовище, поляризація якого P залежить від квадрата поля E^2 згідно із формулою $P = \chi E + \chi^{(2)} E^2$, падає потужна світлова хвиля частоти ω_n (хвиля накачки) $E_n = A_n \cos(\omega_n t - k_n z)$ і одночасно дві слабкі хвилі

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) \text{ та } E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

із частотами ω_1 та ω_2 , які задовольняють співвідношення $\omega_1 + \omega_2 = \omega_n$, то хвилі на частотах ω_1 та ω_2 стають зв'язаними. Нелінійна поляризація на частоті ω_1 дорівнює

$$P_{\text{нл}}(\omega_1) = \chi^{(2)} A_n A_2 \cos[\omega_1 t - (k_n - k_2) z].$$

Нелінійна поляризація на частоті ω_2 дорівнює

$$P_{\text{нл}}(\omega_2) = \chi^{(2)} A_n A_1 \cos[\omega_2 t - (k_n - k_1) z].$$

Поширення в нелінійному середовищі трьох хвиль зі зв'язаними частотами супроводжується обміном енергії між ними. Максимальний обмін спостерігається тоді, коли задовольняється умова просторового синхронізму, $k_1 + k_2 = k_n$. Завдяки взаємодії хвиль на частотах ω_n та ω_2 виникає поляризація середовища і, як наслідок, перевипромінювання світла на частоті ω_1 , а завдяки взаємодії хвиль на частотах ω_n та ω_1 – перевипромінювання на частоті ω_2 .

Тому, якщо нелінійний кристал, через який проходить хвиля накачки, розмістити в оптичний резонатор, тобто між дзеркалами, що відбивають світлові хвилі з частотами ω_1 та ω_2 (рис. 16.7), то за достатньо великих коефіцієнтів відбиття дзеркал і великої потужності хвилі накачки в такому резонаторі виникає генерація на частотах ω_1 та ω_2 . Початкові сигнали обумовлені власними флуктуаціями, які неминуче

існують у кристали. Нелінійний кристал для отримання умов синхронізму в ньому має бути анізотропним, двовісним типу KDP .

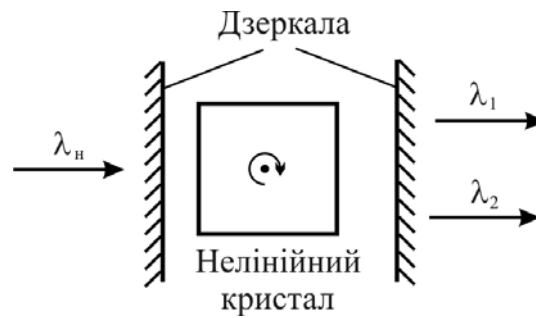


Рис. 16.7. Схема параметричного генератора світла

Частота, для якої виконується умова синхронізму в нелінійному кристалі, як і у випадку генерації вищих гармонік, визначається вибором напрямку поширення хвиль, що взаємодіють. Для цього нелінійний кристал за незмінної частоти хвилі накачки обертають. При цьому отримують плавну перебудову частот ω_1 та ω_2 . Таким чином працює джерело когерентного світла, довжина хвилі якого плавно змінюється в діапазоні від видимого до ІЧ спектра, яке називають параметричним генератором світла.

16.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 16.1. Отримайте вираз для нелінійного показника заломлення ізо-
тропного нелінійно-оптичного середовища.

Розв'язання. Поляризація ізо-тропного нелінійно-оптичного середовища опи-
сується виразом

$$P = \chi E + \chi^{(3)} E^3 . \quad (16.14)$$

У цьому наближенні вектор електричної індукції дорівнює $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E} = n^2\vec{E}$.
Звідки

$$n = \sqrt{1 + 4\pi \frac{P}{E}} . \quad (16.15)$$

Якщо (16.14) підставити в (16.15), то показник заломлення для нелінійно-оптичного
ізо-тропного середовища дорівнює

$$n = \sqrt{1 + 4\pi\chi + 4\pi\chi^{(3)}E^2} = \sqrt{n_0^2 + 4\pi\chi^{(3)}E^2} = n_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi\chi^{(3)}E^2}{n_0^2}}, \quad (16.16)$$

де $n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\chi}$ – лінійний показник заломлення.

Урахуємо в (16.16) мализну нелінійного доданка, що дозволяє застосувати формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$:

$$n \approx n_0 \left(1 + \frac{2\pi\chi^{(3)}E^2}{n_0^2} \right) = n_0 + \frac{2\pi\chi^{(3)}E^2}{n_0} = n_0 + n_{\text{нл}}, \quad (16.17)$$

де $n_{\text{нл}} = \frac{2\pi\chi^{(3)}E^2}{n_0}$ – нелінійний показник заломлення середовища.

Приклад 16.2. Покажіть, як показник заломлення для ізотропного нелінійно-оптичного середовища залежить від інтенсивності світла.

Розв'язання. Будемо виходити із формули (16.17) для показника заломлення $n = n_0 + \frac{2\pi\chi^{(3)}E^2}{n_0}$, яку отримали в прикладі 16.1. Окрім того, скористаємось відомою

формулою для інтенсивності світла $I = \frac{c}{8\pi}E^2$. Тоді

$$n = n_0 + n_2 \cdot I. \quad (16.18)$$

Із (16.17) та (16.18) видно, що в середовищі, починаючи саме із кубічної нелінійності сприйнятливості, показник заломлення n лінійно залежить від інтенсивності I світла. Залежність $n(I)$ викликає, зокрема, ефект самофокусування потужного світлового променя тощо.

Величина n_2 має розмірність, обернену до розмірності інтенсивності світла. Для кристалів кварцу $n_2 \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$. (Нагадаємо, що показник заломлення n_0 лінійного середовища – це безрозмірна величина).

Приклад 16.3. Зробіть оцінку величин лінійної та нелінійної ($\chi^{(2)}$ та $\chi^{(3)}$) оптичних сприйнятливостей речовини.

Розв'язання. Лінійна сприйнятливість χ пов'язана з показником заломлення n співвідношенням $n = \sqrt{1 + 4\pi\chi}$. Для прозорих діелектриків значення $n \sim 1,5$. Звідси $\chi \approx 0,1$. Квадратична нелінійна сприйнятливість $\chi^{(2)} = \frac{\chi}{E}$.

Характерною напруженістю світлового поля в середовищі прийнято вважати внутрішньоатомне поле $E_{\text{ат}} = \frac{e}{a^2}$, де e – заряд електрона; a – розмір атома (діаметр першої борівської орбіти); $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см; $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ од.СГСЕ Звідси

$$E_{\text{ат}} = 2 \cdot 10^7 \text{ од.СГСЕ} \Rightarrow \\ \Rightarrow \chi^{(2)} = \frac{0,1}{2 \cdot 10^7} \text{ од.СГСЕ} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ од.СГСЕ} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ г}^{-1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с}.$$

Експеримент для одного із найбільш поширених у досліджах нелінійно-оптичних кристалів KDP дає значення $\chi^{(2)} = 3 \cdot 10^{-9}$ од.СГСЕ, що добре збігається з отриманими розрахунками.

Кубічна нелінійна сприйнятливість

$$\chi^{(3)} = \frac{\chi}{E_{\text{ат}}^2} = \dots = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ од.СГСЕ} = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{ерг}.$$

Експеримент для кристалів кварцу дає значення $\chi^{(3)} = 10^{-14}$ од.СГСЕ. Існують матеріали, у яких значення $\chi^{(3)}$ набуває значно більшої величини: для кристалів кремнію $\chi^{(3)} = 10^{-8}$ од.СГСЕ; для рідинних кристалів $\chi^{(3)} = 10^{-3}$ од.СГСЕ; для кристалів InSb (за температури 77 К) $\chi^{(3)} = 1$ од.СГСЕ; для кристалів GaAs:Al величина $\chi^{(3)} = 6 \cdot 10^{-2}$ од.СГСЕ.

Приклад 16.4. Оцініть, у скільки разів лінійна поляризація перевищує нелінійну поляризацію $P_{\text{нл}}^{(3)}$ третього порядку.

Розв'язання. Поляризація середовища з урахуванням нелінійності сприйнятливості другого порядку дорівнює

$$P = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}^{(2)} = \chi E + \chi^{(2)} E^2 \Rightarrow \frac{P_{\text{нл}}^{(2)}}{P_{\text{л}}} = \frac{\chi^{(2)} \cdot E^2}{\chi \cdot E} = \frac{\chi^{(2)} \cdot E}{\chi} = \frac{E}{E_{\text{ат}}}.$$

Аналогічно можна отримати відношення для нелінійності сприйнятливості третього порядку $\frac{P_{\text{нл}}^{(3)}}{P_{\text{л}}} = \left(\frac{E}{E_{\text{ат}}}\right)^2$.

Оцінімо величину $\left(\frac{E}{E_{\text{ат}}}\right)$. Якщо інтенсивність світла $I = 10^9$ Вт/см², то напруженість світлового поля $E = \sqrt{\frac{8\pi I}{nc}} \approx 3 \cdot 10^3$ В/см, а з урахуванням того, що величина всередині кристалічного поля $E_{\text{ат}} \approx 5 \cdot 10^8$ В/см, маємо $\left(\frac{E}{E_{\text{ат}}}\right) \sim 10^{-5}$.

Таким чином, бачимо, що $E \ll E_{\text{ат}}$, тобто $\chi^{(2)}$ та $\chi^{(3)}$ – малі величини (див. приклад 16.3), але при створенні умов синхронізму (див. запитання 16.2.8) виникає можливість накопичування змін відповідних параметрів світлової хвилі в процесі її поширення в нелінійно-оптичному середовищі і нелінійні ефекти в цьому випадку можуть бути набагато сильнішими.

ЛІТЕРАТУРА

Підручники з оптики

1. *Ландсберг, Г. С.* Оптика / Г. С. Ландсберг. – М., 1976.
2. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика / Д. В. Сивухин. – М., 1985.
3. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М., 1970.
4. *Горбань, І. С.* Оптика : навч. посіб. для ун-тів / І. С. Горбань. – К., 1979.
5. *Ахманов, С. А.* Физическая оптика / С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. – М., 1998.
6. *Горбань, І. С.* Основы хвильової та променевої оптики : навч. посіб. для студ. фіз. спеціальностей / І. С. Горбань, О. Г. Олійник, І. М. Халімонова. – К., 1999.
7. *Білий, М. У.* Загальна фізика. Оптика / М. У. Білий, А. Ф. Скубенко. – К., 1987.
8. *Одарич, В. А.* Основы теории та методів розрахунку оптичних систем. У 2 ч. / В. А. Одарич. – К., 2001–2002. – Ч. 1, 2.
9. *Кучерук, І. М.* Загальний курс фізики. Т. 3. Оптика. Квантова фізика / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук. – К., 1999.
10. *Бутиков, Е. И.* Оптика : учеб. пособие для вузов / Е. И. Бутиков ; под ред. Н. И. Калитеевского. – М., 1986.
11. *Годжаев, Н. М.* Оптика : учеб. пособие для вузов / Н. М. Годжаев. – М., 1977.
12. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. Т. 3. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц / И. В. Савельев. – М., 1971.
13. *Матвеев, А. Н.* Оптика / А. Н. Матвеев. – М., 1985.
14. *Саржевский, А. М.* Оптика. В 2 т. / А. М. Саржевский. – Минск, 1984. – Т. 1; 1986. – Т. 2.
15. *Калитеевский, Н. И.* Волновая оптика / Н. И. Калитеевский. – М., 1971.
16. *Фриш, С. Э.* Курс общей физики / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – М., 1962. – Т. 3.
17. *Дитчборн, Р.* Физическая оптика / Р. Дитчборн. – М., 1965.
18. *Бегунов, Б. Н.* Геометрическая оптика / Б. Н. Бегунов. – М., 1961.
19. *Джеррард, А.* Введение в матричную оптику / А. Джеррард, Дж. М. Берч. – М., 1978.
20. *Апенко, М. И.* Прикладная оптика / М. И. Апенко, А. С. Дубовик. – М., 1971.

21. *Шишловский, А. А.* Прикладная физическая оптика / А. А. Шишловский. – М., 1961.
22. *Королев, Ф. А.* Теоретическая оптика / Ф. А. Королев. – М., 1966.
23. *Китайгородский, А. И.* Введение в оптику / А. И. Китайгородский. – М., 1973.
24. *Элементарный учебник физики.* В 3 т. Т. 3. Колебания, волны. Оптика. Строение атома / под ред. Г. С. Ландсберга. – М., 1964.

Збірники задач з оптики

25. *Иродов, И. Е.* Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М., 1988.
26. *Иродов, И. Е.* Волновые процессы. Основные законы : учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. – М., 1999.
27. *Коваленко, В. Ф.* Розв'язування задач з курсу "Загальна фізика" (розділ "Оптика") : навчальний посібник / В. Ф. Коваленко, В. Г. Колобродов. – К., 2005.
28. *Безручко, В. М.* Метод графічних побудов у променевій оптиці : навчальний посібник / В. М. Безручко, В. Ф. Коваленко, В. М. Стецюк. – К., 2007.
29. *Ильичева, Е. Н.* Методика решения задач оптики / Е. Н. Ильичева, Ю. А. Кудеяров, А. Н. Матвеев ; под ред. А. Н. Матвеева. – М., 1981.
30. *Сборник задач по общему курсу физики.* Оптика / под ред. Д. В. Сивухина. – М., 1977.
31. *Халімонова, І. М.* Задачі та питання з оптики : навчальний посібник / І. М. Халімонова. – К., 2004.
32. *Розв'язування задач з курсу загальної фізики (практикум)* / А. А. Остроухов, В. Л. Стрижевський, М. Г. Цвелих, Ю. П. Цященко. – К., 1966.
33. *Загальний курс фізики : збірник задач* / І. П. Гаркуша, І. Т. Горбачук, В. П. Курінний та ін. – К., 2004.
34. *Задачи по физике* / под ред. О. Я. Савченко. – М., 1988.
35. *Сборник задач по общему курсу физики* / под ред. В. А. Овчинкина. – М., 2004. – Ч. 2.
36. *Сахаров, Д. И.* Сборник задач по физике / Д. И. Сахаров. – М., 2003.
37. *Волькенштейн, В. С.* Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М., 1969.

З М І С Т

ВСТУП	3
1. Геометрична оптика	5
1.1. Терміни, означення та закони геометричної оптики	5
1.2. Метод графічних побудов в геометричній оптиці (хід променів у призмах, плоских і сферичних дзеркалах, лінзах та оптичних елементах)	9
1.2.1. Методичні вказівки та поради	9
1.2.2. Запитання та відповіді	13
1.3. Геометрична оптика у формулах	21
1.3.1. Короткі теоретичні відомості	21
1.3.2. Запитання та відповіді	23
1.4. Матрична оптика	36
1.4.1. Запитання та відповіді	36
1.5. Приклади розв'язування задач	42
2. Фотометрія	68
2.1. Короткі теоретичні відомості	68
2.3. Запитання та відповіді	72
2.4. Приклади розв'язування задач	78
3. Класична теорія оптичного випромінювання	91
3.1. Короткі теоретичні відомості	91
3.3. Запитання та відповіді	92
3.4. Приклади розв'язування задач	97
4. Електромагнітна теорія світла	101
4.1. Короткі теоретичні відомості	101
4.2. Запитання та відповіді	104
4.3. Приклади розв'язування задач	111

5. Відбиття та заломлення світла на межі двох діелектриків. Формули Френеля.....	116
5.1. Короткі теоретичні відомості	116
5.2. Методичні вказівки та поради.....	119
5.3. Запитання та відповіді.....	119
5.4. Приклади розв'язування задач.....	141
6. Інтерференція світла	142
6.1. Когерентне випромінювання.....	142
6.1.1. Короткі теоретичні відомості	142
6.1.2. Запитання та відповіді	145
6.2. Двопроменева інтерференція. Інтерференція в тонких плівках. Кільця Ньютона	173
6.2.1. Короткі теоретичні відомості	173
6.2.2. Запитання та відповіді	175
6.3. Багатопроемова інтерференція. Інтерферометр Фабрі–Перо	190
6.3.1. Короткі теоретичні відомості	190
6.3.2. Методичні поради та вказівки	192
6.3.3. Запитання та відповіді	192
6.4. Застосування інтерференції. Інтерферометри	200
6.4.1. Короткі теоретичні відомості	200
6.4.2. Запитання та відповіді	201
6.5. Приклади розв'язування задач.....	206
7. Дифракція світла	219
7.1. Дифракція Френеля	219
7.1.1. Короткі теоретичні відомості	219
7.1.2. Запитання та відповіді	220
7.2. Дифракція Фраунгофера.....	232
7.2.1. Короткі теоретичні відомості	232
7.2.2. Запитання та відповіді	233
7.3. Дифракційна ґратки	243
7.3.1. Короткі теоретичні відомості	243
7.3.2. Запитання та відповіді	245
7.4. Дифракційні обмеження в оптичних елементах і системах. Роздільна здатність оптичних приладів	253
7.4.1. Короткі теоретичні відомості	253
7.4.2. Запитання та відповіді	254
7.5. Приклади розв'язування задач.....	264

8. Кристалооптика	280
8.1. Короткі теоретичні відомості	280
8.2. Методичні поради та вказівки	286
8.3. Запитання та відповіді	287
8.4. Приклади розв'язування задач	303
9. Поляризоване світло	311
9.1. Короткі теоретичні відомості	311
9.2. Запитання та відповіді	315
9.3. Приклади розв'язування задач	325
10. Штучна анізотропія. Штучне двопроменезаломлення.	
Оптична активність. Ефект Фарадея	334
10.1. Короткі теоретичні відомості	334
10.2. Запитання та відповіді	336
10.3. Приклади розв'язування задач	340
11. Взаємодія світла з речовиною. Дисперсія та поглинання світла.	
Випромінювання Вавилова–Черенкова	343
11.1. Короткі теоретичні відомості	343
11.2. Запитання та відповіді	345
11.3. Приклади розв'язування задач	350
12. Металооптика	360
12.1. Короткі теоретичні відомості	360
12.2. Запитання та відповіді	361
12.3. Приклади розв'язування задач	367
13. Розсіяння світла	371
13.1. Короткі теоретичні відомості	371
13.2. Запитання та відповіді	373
13.3. Приклади розв'язування задач	373
14. Теплове випромінювання	385
14.1. Короткі теоретичні відомості	385
14.2. Запитання та відповіді	389
14.3. Приклади розв'язування задач	394

15. Спонтанне та вимушене випромінювання.	
Лазери	403
15.1. Короткі теоретичні відомості.....	403
15.2. Запитання та відповіді.....	405
15.3. Приклади розв'язування задач.....	419
16. Нелінійна оптика	425
16.1. Короткі теоретичні відомості.....	425
16.2. Запитання та відповіді.....	426
16.3. Приклади розв'язування задач.....	438
Література	442

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Валерій Фадейович
ХАЛІМОНОВА Інна Миколаївна
ХАРЧЕНКО Надія Павлівна
СТЕЦЮК Володимир Миколайович

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

У ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ

ОПТИКА

Навчальний посібник

Редактор *Л. П. Львова*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"



Формат 70x100^{1/16}. Ум. друк. арк. 36,1. Наклад 200. Зам. № 212-5972.
Вид. № Рф10. Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 24.02.12

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601
☎ (044) 239 3222; (044) 239 3161; тел./факс (044) 234 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.2002