ШПОРА ФОТОЕФЕКТ

Коли енергія фотона $\hbar\omega$ перевищує енергію іонізації атома , поглинання фотона буде супроводжуватися переходом електрона з зв”язаного стану в стан неперервного спектру. Для спрощення розрахунку імовірності такого переходу в одиницю часу, будемо вважати, що вільний електрон, який утвориться, буде слабо взаємодіяти з атомом. А це означає те, що його стан можна буде описати плоскою хвилею.

$\varphi_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{q}\vec{r}), \vec{q} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ нормованою на об’єм V системи. Таке наближення буде виконуватись коли кінетична енергія вільних електронів велика порівняно з енергією іонізації атома. У випадку коли електрон знаходиться у початковому 1s- стані в атомі, він описувався хвильовою функцією вигляду $\psi_o = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a}}; a = \frac{h^2}{\mu e^2 Z}$. Отже, оскільки зміна стану системи відбулася в наслідок гармонічного збурення ел.-маг. Хвилі, для визначення імовірності такого переходу в одиницю часу можна використати формулу вигляду: $P_{oq} = \frac{W_{oq}}{t} = \frac{4\pi^2 e^2 I}{\mu^2 h^2 c\omega^2} |B_{oq}|^2 \delta(\omega_{oq} + \omega)$

де Boq : $B_{oq} = \int \psi^*{}_o e^{i\vec{k}\vec{r}} (\vec{e}_k \vec{p}) \psi_q dv$. Далі йде якась муть про розподіл по кутам, конкретніше можна подивитись наприклад в Давидові, сторінка 473.

7 Для будь-якого оператора А довести що $< A^2 > \geq 0$. Розв: $\int \psi^* \hat{A}\hat{A}\psi dV = \int \psi^* \hat{A}\left(\hat{A}\psi\right) dV =$

$\int \left(\hat{A}\psi\right) \hat{A}^* \psi^* dV = \int \left(\hat{A}\psi\right)\left(\hat{A}\psi\right)^* dV = \int \left|\hat{A}\psi\right|^2 dV \geq 0$.

6 Довести тотожність для будь-яких операторів A і B : $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}\hat{B}] + \frac{1}{2}\left[\hat{A}[\hat{A}\hat{B}]\right] + \ldots$

$e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} + \ldots \qquad e^{-\hat{A}} = 1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} - \ldots$

$\hat{B}\left(1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2} - \ldots\right) = \hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}$, $\left(1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!}\right)\left(\hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}\right) =$ Розкриваємо дужки, Записуємо з отриманого результату $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\hat{B}\right]$ та $\hat{A}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\left[\hat{A}\hat{B}\right]\right]$, що відповідає шуканому виразу.

9 Показати, що сер. значення ермітового оператора $\hat{L}^* * \hat{L}$ невід’ємні.

Розв. $\int \psi^* \hat{L} + \hat{L}\psi dx = \int \psi^* \hat{L} + \phi dx = \int \phi \hat{L}\psi^* dx = \int \left(\hat{L}\phi\right)\left(\hat{L}\psi\right)^* dx = \int \left|\hat{L}\psi\right|^2 dx \geq 0$

8 Показати якщо $\hat{A}$ і $\hat{B}$ - ермітові то $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ - також ермітові. Розв: $\int \psi^* \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)\psi dV =$

$\int \psi^* \hat{A}\hat{B}\psi dV + \int \psi^* \hat{B}\hat{A}\psi dV = \int \psi^* \hat{A}(\hat{B}\psi) dV + \int \psi^* \hat{B}(\hat{A}\psi) dV = \int \hat{B}\psi \hat{A}^* \psi^* dV + \int \hat{A}\psi \hat{B}^* \psi^* dV = *$

$\int \hat{A}^* \psi^* \hat{B}\psi dV + \int \hat{B}^* \psi^* \hat{A}\psi dV = \int \psi \hat{B}^* \hat{A}^* \psi^* dV + \int \psi \hat{A}^* \hat{B}^* \psi^* dV = \int \psi (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^* \psi^* dV$.

11 Довести що $[\hat{L}_x, \hat{P}_z] = -i\hbar \hat{P}_y$

Розв: $[\hat{L}_x, \hat{P}_z] = \left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right)\hat{P}_z - \hat{P}_z\left(y\hat{P}_z - z\hat{P}_y\right) = y\left(\hat{P}_z\right)^2 - z\hat{P}_y\hat{P}_z - \hat{P}_z y\hat{P}_z + \hat{P}_z z\hat{P}_y =$

$= y\left(\hat{P}_z\right)^2 - y\left(\hat{P}_z\right)^2 - z\hat{P}_z\hat{P}_y + \hat{P}_z z\hat{P}_y = [\hat{P}_z, z]\hat{P}_y = -i\hbar\hat{P}_y$

10 Електрон знаходиться в атомі водню в основному стані Визначити середній радіус і сер R^2

Розв: $\Psi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$;

$\bar{r}_1 = \int \psi^* r\psi d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \int e^{-r/a} r d\tau = \left| r^2 \sin\theta d\theta dr d\phi = d\tau \right| = < r_1 > = \frac{2\pi}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty e^{-2r/a} r^3 dr$

$= \frac{2\pi}{\pi a^3} r \frac{3!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{4\pi}{\pi} \frac{6a^4}{16} = \frac{3}{2} a$

12 Знайти власні функ-ції і власні значення оператора $\hat{L}_z{}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{d\phi^2}$

Розв: $\vec{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$; $\hat{L}^2{}_z = -\hbar^2 \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$; $-\frac{\hbar^2 \partial^2\psi}{\partial\phi^2} = \lambda\psi$; $\psi'' + \frac{\lambda}{\hbar^2}\psi = 0$; $\psi = Ce^{k\phi}$;

$\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$; $k^2 + \frac{\lambda}{\hbar^2}\psi = 0$; $\Psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi}$; $k = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}$;

$e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}(2\pi+\phi)} = e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}2\pi} = e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} = \psi(\phi)$; $e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\hbar}2\pi} = 1$; $\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar} = im$; $|\lambda| = m^2\hbar^2, \lambda > 0$;

$< p^2 > = +\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{\pi^2}{a^2}\psi + \pi^2 \sqrt{\frac{2}{a}} 3C_2 \frac{\sin 2\pi x}{a}\right) dx =$

$= \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\psi}_{=1} + \frac{\pi^2 3\hbar^2}{a^2} \sqrt{\frac{2}{a}} C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{2\pi x}{a} \psi dx$

$\int_0^a C_1 C_2 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi x}{a} + C_2{}^2 \underbrace{\sin^2 \frac{2\pi x}{a}}_{= \frac{C_2{}^2}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{a}\right)} dx$ бо Ψ çàìåæàìèÿì è $= 0$

$\frac{Ñ_1 Ñ_2}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right) \Rightarrow \frac{C_2{}^2}{2} a$ Отже

$< p^2 > = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} + \frac{C_2{}^2}{2} a 3 \frac{\hbar^2\pi^2}{a^2} \frac{2}{a} = \frac{\pi^2\hbar 2}{a^2}\left(1 + 3C_2{}^2\right)$

13 Знайти серед. значення $\vec{p}^2{}_x$ в состоянии $\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$, де $\psi_1(x)$ *ta* $\psi_2(x)$. Основне та перше збуджений стан част. в ∞ глибокій прямокутній ямі, шириною а. $\psi_n = A_n \sin\frac{\pi n U}{a}$

Розв: $\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$; $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}$; $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$; $\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1 \sin\frac{\pi x}{a} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\right)$;

$< p^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi dx =$ ψ^* - дійсна тому $\psi^* = \psi$ $= \int_{-\infty}^{\infty} -\hbar^2 \psi \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) dx$

$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1 \frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1 \frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{4\pi^2}{a^2} C_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\right) =$

$= -\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi^2}{a^2}\left(C_1 \sin\frac{\pi x}{a} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + 3C_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\right) = -\psi\frac{\pi^2}{a^2} - \sqrt{\frac{2}{a}} 3C_2 \sin\frac{2\pi x}{a} \frac{\pi^2}{a^2}$;

14Нескінченно глибока потенціальна яма (0,а) збурення $V(x) = V_0 xos^2 \frac{\pi x}{a}$

0) $E^{(0)}{}_n = \frac{\pi^2 h^2}{2ma^2} n^2$ $\psi_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{a}\right) x$ 1) $V\psi_n + H_0 \psi^{(1)}{}_n = E^{(0)}{}_n \psi^{(0)}{}_n + E^{(1)}{}_n \psi_n$

$V\psi_n + H_0 \psi^{(1)}{}_n = E^{(0)}{}_n \psi^{(0)}{}_n + E^{(1)}{}_n \psi_n$

$$V_{nn} = \int_0^a \psi_n V \psi_n * dx = \frac{2}{a} V_0 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx =$$

$= \frac{V_0}{2a} \int_0^a \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) dx = \ldots = \frac{V_0}{2a} - \frac{\delta_{n1} V_0}{4}$ да да, це символи Кронекера

вродє. $E^{(1)}{}_n = 1/2 V_0 \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n1}\right)$ $V_{nn} = \frac{V_0}{2}\left(1 - \frac{\delta_{n1}}{2}\right)$ n=m $E = E^{(0)} + E^{(1)}$

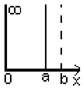
$$\text{integral}=\int_0^a \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi n x}{b}dx = \frac{2}{2\sqrt{ab}}\int_0^a\left\{\cos\pi x\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{b}\right)-\cos\pi x\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{b}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{\pi\sqrt{ab}}\left(\frac{ab}{b-an}\sin\frac{\pi x(b-an)}{ab}-\frac{ab}{b+an}\sin\frac{\pi x(b+an)}{ab}\right)\Bigg|_0^a=$$

$.... = \dfrac{2b\sqrt{ab}}{\pi(b^2-a^2n^2)}\sin\dfrac{\pi an}{b}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_n)t}$. Ймовірність $W_{1\to k}=|a_{1k}|^2=a_{1k}\cdot a_{1k}^{*}=$

$\dfrac{4ab^3\sin^2(\frac{\pi an}{b})}{\hbar^2(b^2-a^2n^2)}[....]$.

15 Частинка в основному стані у ∞ глибокій ямі ширино. a . В певний момент часу права стінка ями зсунулась в точку b . Знайти ймовірність переходу частинки в різні стаціонарні стани.



1) $\psi_1=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{\pi x}{a}$; $\psi_n(x,t)=\psi_1(x)e^{\frac{-i}{\hbar}tE_1}$.

2)Для розширеної ями: $\tilde\psi_n=\sqrt{\dfrac{2}{b}}\sin\dfrac{\pi n x}{b}$, $\tilde\psi_n(x,t)=\tilde\psi_n(x)e^{\frac{-i}{\hbar}tE_1}$.

3) $\psi(x,t)=\sum\limits_n a_{ik}\tilde\psi_k(x,t)$, $\psi_1(x)-e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}=\sum\limits_k a_{ik}\tilde\psi_k(x)=\quad e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}\Big|\psi_n(x)\quad\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}\int_0^a\psi_1(x)\tilde\psi_n(x)dx=$

$\sum\limits_n a_{ik}e^{-\frac{i}{\hbar}tE}\underbrace{\int_0^b\tilde\psi_k(x)\tilde\psi_n(x)dx}_{\delta_{nk}}$. $\quad a_{1n}=e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_n)t}\underbrace{\int_0^a\psi_1(x)\tilde\psi_n(x)dx}_{Integral}$.

16 Знайти середнє значення потенціальноїенергії для атома водню. $\psi=\dfrac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}(1-r/2a)\cdot e^{-r/2a}$ - волнова фун-я атома фодню.

Розв: 1) Для атома водню $U=-e^2/r$;

$$\Rightarrow\langle U\rangle=\int_0^\infty\psi^*(r)U\psi(r)r^2\sin\theta d\theta d\phi dr=-\frac{4\pi e^2}{8\pi a^3}\int_0^\infty(1-r/2a)^2e^{-r/a}\cdot\frac{r^2}{r}dr=$$

$$=-\frac{e^2}{2a^3}\int_0^\infty\left(r-\frac{r^2}{a}+\frac{r^3}{4a^2}\right)e^{-r/a}dr=...\text{âèêîðèñòàâ}\left|\int_0^\infty x^ne^{-\alpha x}dx=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right|$$

17 Знайти власні значення та власні функції оператора $S_x=\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

Розв: $\hat A\psi=A\psi$; $\hat S_x\psi(\sigma_x)=S_x\psi(\sigma_x)$, $\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=S_x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Rightarrow\quad\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=S_x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}\frac{\hbar}{2}b=S_xa\\ \frac{\hbar}{2}a=S_xb\end{cases}=\begin{cases}\frac{\hbar}{2}-S_x=0\\ -S_x+\frac{\hbar}{2}a=0\end{cases}\quad\Delta=0=\begin{vmatrix}\frac{\hbar}{2}&-S_x\\-S_x&\frac{\hbar}{2}\end{vmatrix}=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2-S_x=0\Rightarrow\quad S_x=\pm\frac{\hbar}{2}$ - влісні значення.

Розглянемо ці 2 випадки: 1) $S_x=\dfrac{\hbar}{2}\Rightarrow$ і. Умова нормування:

$\sum\limits_{\sigma_x}\chi_{m_s}{}^+(\sigma_x)\chi_{m'_s}(\sigma_x)=\delta_{m_sm'_s}\Rightarrow(a^*\quad b^*)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\quad a^*a+b^*b=1\Rightarrow|a|^2+|b|^2=1$. З умови нормування

слідує $a=b=\pm\dfrac{1}{\sqrt2}$. Тоді $\Psi(\sigma_x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ влісна функція при $S_x=\dfrac{\hbar}{2}$; 2)

$S_x=-\dfrac{\hbar}{2}\Rightarrow\dfrac{\hbar}{2}b+\dfrac{\hbar}{2}a=0\Rightarrow\quad b=-a=\pm\sqrt{\dfrac12}\Rightarrow\quad\Psi(\sigma_x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ влісна функція при $S_x=-\dfrac{\hbar}{2}$

Известно, что (кому неизвестно – втыкайте в 94 страницу Ландау), что для одномерного осциллятора, решение будет в следующем виде: $\Psi=Ce^{-\frac{\xi_1}{2}}H_n(\xi_1)$, где H_n - полиномы Эрмита. Учитывая все вышесказанное, для волновой функции 3-х мерного осциллятора, получаем $\Psi_{n_1n_2n_3}=Ce^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}H_{n_1}(\xi_1)H_{n_2}(\xi_2)H_{n_3}(\xi_3)$, а для энергий имеем следующую парафию: $E_{n_1n_2n_3}=\left(n_1+\frac12\right)\hbar\omega_1+\left(n_2+\frac12\right)\hbar\omega_2+\left(n_3+\frac12\right)\hbar\omega_3$. Где $\dfrac{\hbar\omega}{2}$ - минимальное значение, а n – условие квантования. Для того, чтобы узнать коэффициент С используем условие нормировки волновой функции. Полином Эрмита можно записать в след форме: $H_n=(-1)^1e^{\xi^2}\dfrac{d^ne^{\xi^2}}{d\xi^n}$, подставим это в условие нормировки: $\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_1}}C_n^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}\dfrac{d^nH_n}{d\xi^n}d\xi=1$. Откуда-то известно, что $\dfrac{d^nH_n}{d\xi^n}=2^nn!$, то есть

$C_n^2=\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_n}}\dfrac{1}{2^nn!}$, то есть после всей этой еботни получаем решение:

$\Psi(x,y,z)=\dfrac{\sqrt[4]{m^3\omega_1\omega_2\omega_3}\,e^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}H_{n_1}(\xi)H_{n_2}(\xi)H_{n_3}(\xi)}{(\hbar\pi)^{\frac34}\sqrt{2^{n_1+n_2+3}n_1!n_2!n_3!}}$. Вот в принципе и все. Ну что, мой дорогой и прыщавый дружок, правда ведь, что очко уже меньше рипит, и мона идти пиздеть с Высочким, зная, что у тя в билете написана задача.. ☺ Карочо УДАЧИ при ответе.

18 Знайти рівні енергії ш аласні функції 3-вимірного гармонічного осцилятораз пот. енергією

$V(x,y,z)=\dfrac12k_1x^2+\dfrac12k_2y^2+\dfrac12k_3z^2$.

Запишем для осциллятора уравнение Шредингера: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\left(\dfrac{k_1x^2}{2}+\dfrac{k_2y^2}{2}+\dfrac{k_3z^2}{2}\right)=E\Psi$. В данном случае мы можем использовать разделение переменных, то есть переписать волновую функцию в след виде: $\Psi(x,y,z)=\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$. Подставим ее в уравнение Шредингера и поделим на нее же.

Получаем: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x}\dfrac{1}{\Psi_1}+\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y}\dfrac{1}{\Psi_2}+\dfrac{\partial\Psi_3}{\partial z}\dfrac{1}{\Psi_3}\right)+\left(\dfrac{k_1x^2}{2}+\dfrac{k_2y^2}{2}+\dfrac{k_3z^2}{2}\right)=E$. Ахуенно. Теперь введем некоторые обозначения: $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ и подставим его во вторую часть уравнения Шредингера. После небольшой перегруппировки членов получаем:

$\left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x}\dfrac{1}{\Psi_1}+\dfrac{k_1x^2}{2}\right)+\left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y}\dfrac{1}{\Psi_2}+\dfrac{k_2y^2}{2}\right)+\left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial\Psi_3}{\partial z}\dfrac{1}{\Psi_3}+\dfrac{k_3z^2}{2}\right)=E$. А теперь сделаем ход ФЕРЗЕМ! Запишем нашу энергию так: $E=E_1+E_2+E_3$ типа как для 3-х одномерных осцилляторов. Очевидно, что мы имеем полное право промутить такую фичу. Теперь нам осталось решить все это и записать энергии и волновые функции. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\dfrac{k_1x^2}{2}\Psi_1=E\Psi_1$. Для упрощения вида и следовательно геморроя при решении, введем следующие обозначения: $\xi_1=\sqrt{\dfrac{m\omega_1}{\hbar}};\xi_2=\sqrt{\dfrac{m\omega_2}{\hbar}};\xi_3=\sqrt{\dfrac{m\omega_3}{\hbar}}$.

$\psi(\varphi)=\psi(\varphi+2\pi)$

Далее путем несложных мат. преобразований используя, что $\exp(i\varphi)=\exp(i(\varphi+2\pi m))$ при $m=0,\pm1,\pm2,....$ (целое) находим

$A=\hbar m$ - это и есть собственные значения оператора. Не нормированные собственные функции:

$\psi(\varphi)=c\exp(\dfrac{i(a\cos\varphi+\hbar m\varphi)}{\hbar})$ Нормировка находится из $\int_0^{2\pi}\psi_m{}^*\psi_md\varphi=1$ отсюда $c=\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$ Тогда нормированные собственные функции: $\psi(\varphi)=\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\exp(i(\dfrac{a\cos\varphi}{\hbar}+m\varphi))$

19 Найти нормированные собственные функции и собственные значения оператора $\hat A=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}+a\sin\varphi$ (φ - азимутальный угол)

Решение: Собственные функции и значения находятся из $(\hat A-A)\psi=0\Leftrightarrow\hat A\psi=A\psi$ подставляя явный вид оператора:

$-i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\psi(a\sin\varphi-A)$ Разделяем переменные и интегрируем $\int i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\psi}=\int(a\sin\varphi-A)d\varphi$ получим

$\ln\psi=\dfrac{i(a\cos\varphi+A\psi)}{\hbar}+c$ отсюда $\psi(\varphi)=c\exp(\dfrac{i(a\cos\varphi+A\varphi)}{\hbar})$. Для выполнения условий однозначности

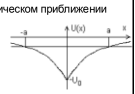
$=4\sqrt{2mU_0/e}\int_0^a\sqrt{\exp(1-(x/a))-1}\qquad\int_0^a\sqrt{\exp(1-(x/a))-1}=\left|\sqrt{\exp(1-(x/a))-1}=t\right|=-2\int_{\sqrt{e-1}}^0\dfrac{t^2dt}{t^2+1}$

Прибавим и отнимем 1 в числителе, тогда $2\int_{1.3}^0dt-2\int_{1.3}^0\dfrac{dt}{t^2+1}=2t-2arctg(t)|_{1.3}^0=0.78$ следовательно

$\oint pdx=0.78\sqrt{2mU_0/e}=0.78\sqrt{2mE}=2\pi\hbar(n+1/2)$ Отсюда $E=\dfrac{4\pi^2\hbar^2(n+1/2)^2}{(0.78)^22m}$ стационарные уровни

20 Определить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в потенциале вида: $U(x)=-U_0\exp(-|x|/a)$

Решение. График имеет вид показанный на рисунке. Стационарные уровни энергии в квазиклассическом приближении находятся из правил квантования Бора-Зомерфельда: $\oint pdx=2\pi\hbar(n+1/2)$ где p – импульс, n – квант. число $p=\sqrt{2m(E-U(x))}$ пересечение U(x) и E например при x=a, x=-a



тогда $E=-U_0/\exp(1)$ Задача сводится к нахождению интеграла

$\oint pdx=2\int_{-a}^a\sqrt{2m(-(U_0/e)+U_0\exp(-|x|/a))}dx=$

Решение: Среднее значение ищем по общему правилу $\langle U\rangle=\int\psi^*\hat U(r)\psi\,dr$ **(2)** оператор же потенциальной энергии равняется самой потенциальной энергии. Для атома водорода $\hat U(r)=U(r)=-\dfrac{e^2}{r}$ **(3)**. Задача сводится к нахождению интеграла (2) подставляя в него (3) и явный вид волновой ф-и из условия. **Б.Т.У**

21 Найти среднее значение потенциальной энергии в 2s состоянии атома водорода:

$\psi_{200}=(8\pi a^3)^{-1/2}(1-\dfrac{r}{2a})\exp(-\dfrac{r}{2a})$

для кулоновской потенциальной энергии $U(r)=-\dfrac{e^2}{r}$

$$< H >= \frac{-11}{2}\frac{h^2\alpha^2}{\mu} - 4ql\alpha$$

акуратно виписуємо (нічого складного). Отримуємо тпере від цього виразу беремо похідну по альфа, прирівнюємо нулю і отримуємо

$$\alpha_0 = -\frac{4\mu ql}{11\hbar^2} \quad < H > (\alpha_0) = \frac{88}{121}\frac{\mu q^2 l^2}{h^2}$$

22 Визначити енергію основного стану атома водню за допомогою варіаційного метода використовуючі пробну функцію

$$\psi = Ce^{-\alpha r} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{ql}{r}$$

параметри обраної функції визначаються таким чином щоб обчисленний на цій функції середній гамільтоніан мав мінімум при умові нормування псі.

$$\int|\psi|^2 d\tau = \left[d\tau = r^2\sin\Theta d\Theta d\varphi\right] = 4\pi C^2\int_0^{oo} r^2 e^{-2\alpha r}dr = \left[\int_0^{oo} r^2 e^{-2\alpha r}dr = \frac{n!}{2^{n+1}}\right] = 4\pi C^2\frac{2}{(2\alpha)^3} = 1$$

$$C = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}}$$

Знайдемо сер. Гам. $< H >= \int_0^{oo}\psi^*\hat{H}\psi d\tau = 4\pi C^2\int e^{-\alpha r}\hat{H}e^{-\alpha r}r^2 dr = ...$ далі іде застосування гамільтоніана до ф-ції. Для взяття інт. Все

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta(x)}}\left(F\exp\left(\int_0^x\beta(y)dy\right) + E\exp\left(-\int_0^x\beta(y)dy\right)\right)$$

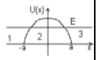
, где $\beta = \sqrt{\frac{2m(U(x)-E)}{\hbar^2}}$. Из условий непрерывности $\psi_1(-a) = \psi_2(-a), \quad \psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \psi_1'(-a) = \psi_2'(-a) \quad \psi_2'(a) = \psi_3'(a)$ можно найти четыре соотношения между коэффициентами A,B, C, F, E . В квазиклассическом приближении $\beta(x)$ является плавной ф-ей от x, поэтому в производной можно учитывать зависимость $\beta(x)$ только в exp. Коэффициент прохождения D потенциального барьера $D = \left|\frac{C}{A}\right|^2$ и в принципе можно пользоваться и готовой формулой $D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{-a}^{a}\sqrt{2\mu[U(x)-E]}dx\right)$ (Считать по этой формуле)

Критерием применимости результата как уже говорилось плавности ф-и от x (в данном случае выполняется) и достаточная ширина барьера $\bar{\beta}a >> 1$ (при этом F<<E и им можно пренебречь при нахождении D)

23 Вычислить в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности параболического барьера

$$U(x) = \begin{cases} U_0(1 - x^2/a^2), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Найти критерий применимости результата.



Решение: Будем считать что частица с определенной энергией и импульсом $p = \hbar k_0$ движется из 1 в 3. Тога в 1 волновая ф-я это суперпозиция 2-х волн : $\psi_1 = A\exp(ik_0x) + B\exp(-ik_0x)$ Где A – амплитуда 'падающей' волновой ф-и, B – амплитуда волновой ф-и 'отраженных' частиц. В области 3 по условию могут быть только уходящие частицы. $\psi_3(x) = c\exp(ik_0x)$ Эти равенства можно найти решая уравнение Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi$ (в данном случаи U=0) учитывая что $E = p^2/2m$

Аналогично для области 2 надо решить дифур: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (U_0(1 - x^2/a^2) - E)\psi = 0$ в общем случае его решение это:

25 Задача. Маємо такий потенціал: $V(x) = \sum_{n=-oo}^{oo}V_o\delta(x - na); \delta -$ гребінка Дірака. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{h^2}V(x)\psi = 0;$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{h^2}\left(i - \sum_{-oo}^{oo}V_o\delta(x - na)\right)\psi = 0; \quad \psi_1 = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx}; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2m}{h^2}E\right)\psi_2 = 0;$$

$\psi_2 = f(Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)}) \quad |f| = 1; \psi_1(a) = \psi_2(a); \quad \psi_1'(a) - \psi_2'(a) = \frac{2m}{h^2}\psi_2(a)V_o;$ Підставляємо і

отримуємо: $Ae^{ika} + Be^{-ika} = f(A + B) = fA + fB; \quad Aike^{ika} - Bike^{-ika} - fAik + fBik = \frac{2m}{h^2}(fA + fB)V_o$;

$$A(e^{ika} - f) + B(e^{ika} - f) = 0; \quad A\left(fik - ike^{ika} - \frac{2m}{h^2}fV_o\right) = 0;$$

$$A\left(f - e^{ika} + \frac{i2m}{kh^2}fV_o\right) + B\left(e^{-ika} - f + \frac{i2m}{h^2}fV_o\right) = 0; \quad 1 - A(f - e^{-ka} + igf) + B(e^{-ika} - f + igf) = 0;$$

$$(e^{ika} - f)(e^{-ika} - f + igt) - (e^{-ika} - f)(fe^{ika} + igt) = 0;$$

$$1 - fe^{ika} + igfe^{ika} - fe^{-ik_o} + f^2 - igf^2 + e^{ika}f + f^2 - fe^{ika} + git^2 = 0;$$

$1 - fe^{ika} + igfe^{ika} - fe^{-ika} + f^2 - fe^{-ika} + 1 - igfe^{-ika} + f^2 - fe^{-ika}$ вообщем піздец.

24 Тривимірний випадок гармонічного осцилятора.

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}\omega(x^2 + y^2 + z^2)\psi = E\psi; \quad -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)\psi = E\psi;$$

$$-\frac{h^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega_x^2}{2}x^2\psi = \lambda_x\psi \Rightarrow \quad \lambda_x = h\omega_x(n_x + 1/2);$$

$$E_{n_xn_yn_z} = h\omega_x(n_x + 1/2) + h\omega_y(n_y + 1/2) + h\omega_z(n_z + 1/2); \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z;$$

$E_{n_xn_yn_z} = h\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ Отже енергія основного стану рівна: $E_n = \frac{3}{2}h\omega$.

$\psi_{n_xn_yn_z}(x,y,z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$ Функція основного стану рівна($n_x = n_y = n_z = 0$):

$\psi_{ooo} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi h}}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2}H_n\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\right) = |n = 0; H_o = 1| = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi h}}e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2}$. Отже ми маємо:

$\psi_{ooo} = \left(\frac{m\omega}{\pi h}\right)^{3/2}e^{-\frac{m\omega}{2h}(x^2 + y^2 + z^2)}$ Для даного осцилятора енергетичні рівні будуть вироджені.

$$E_{n_xn_y} = h\omega(n_x + n_y + 1)$$

27 Знайти варіаційним методом енергію основного рівня частинки в потенціалі U=Fx x>0; U=infinity x<0

Використовуючи пробну ф-цію $\psi = Axe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}$. Умова нормування:

$A^2\int_0^{oo}x^2e^{-\alpha x^2}dx = 1 \quad A^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1 \quad A = 2\sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{\pi}}$ Середня потенціальна енергія

$< V >= \frac{m\omega^2}{2}FA^2\int_0^{oo}x^3e^{-\alpha x^2}dx = \frac{m\omega^2F}{4}A^2\int_0^{oo}ye^{-\alpha y}dy = \frac{m\omega^2}{4\alpha^2}FA^2 = \frac{m\omega^2F}{4\alpha^2}\frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{m\omega^2F}{\sqrt{\alpha\pi}}$ Середня

кінетична енергія $< T >= \frac{\hbar^2A^2}{2m}\int_0^{oo}\left[\frac{\partial}{\partial x}xe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}\right]^2dx = ... = \frac{3}{4}\frac{\hbar^2\alpha}{m} \quad I(\alpha) = \frac{m\omega^2F}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m}\alpha$ Беремо

похідну по альфа=0 маємо $\alpha_0 = \left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} \quad E_0 = I(\alpha_0) = \frac{15\hbar^2}{4m}\left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$

26 Частинка знаходиться в пот. ямі $U = -\alpha\delta(x)$ Потенціал раптово переходить у точку xo. Знайти ймовірність, що частинка залишиться в потенціалі.

$\left(\frac{-h^2}{2m}\nabla + U(x)\right)\psi = E\psi(x); \quad -\frac{h^2}{2m}\nabla\psi + (U - E)\psi = 0; \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\frac{2m}{h^2}\psi = 0; k^2 = \frac{2Em}{h^2}$; Для

зони(1), що лівіше дельта функції: $\psi_1 = A_1e^{kx}$. Для зони (2) : $\psi_2 = B_2e^{-kx}$;

$$A_1 = B_2; (kA_1 + kB_2) = \frac{2m\alpha}{h^2}A_1; \Rightarrow k = \frac{m\alpha}{h^2}; \quad \frac{\sqrt{2mE}}{h} = \frac{m\alpha}{h^2}; \quad E = \frac{m\alpha^2}{2h^2} .$$

$$\psi_0 = \sqrt{n}e^{-kx}; \tilde{\psi}_o = \sqrt{k}e^{-k(x-x_o)}; \quad \Psi_o = \sqrt{k}e^{-kx}e^{-\frac{iE_o}{h}t}; \tilde{\Psi}_o = \sqrt{k}e^{-k(x-x_o)}e^{i\frac{E_o}{h}t};$$

$$a_{oo} = k\int_{-oo}^{oo}e^{-kx}e^{-k(x-x_o)}dx = k\int_{-oo}^{oo}e^{-kx(1-|1-\frac{x_o}{x}|)}dx = k\int_{-oo}^{0}e^{kx}e^{k(x-x_o)}dx + k\int_0^{x_o}e^{-kx}e^{k(x-x_o)}dx + \int_{x_o}^{oo}e^{-kx}e^{-k(x-x_o)}dx$$

$$k\left[e^{-kx_o}\int_{-oo}^0e^{2kx}dx + e^{-kx_o}\int_0^{x_o}dx + e^{kx_o}\int_{x_o}^{oo}e^{-2kx}dx\right] = \quad k\left(e^{-kx_o}\frac{1}{2k} + e^{-kx_o}x_o + e^{-kx_o}\frac{1}{2k}\right) =$$

$$= e^{-kx_o} + x_oe^{-kx_o} = e^{-kx_o}(1 + x_ok); \quad W = e^{-2k^2x_o^2}(1 + x_ok)^2 = a_{oo};$$

28. Частинка знаходиться в потенціальному полі . Довести співвідношення $\frac{dx^2}{dt} = \frac{p_xx + xp_x}{m}$

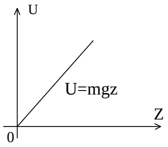
$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi; \quad \dot{\bar{f}} = \dot{\bar{f}} = \frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{f}\psi dq = \quad = \int\psi^*\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial t^2}\psi dq + \int\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\hat{f}\psi dq + \int\psi^*\hat{f}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dq;$$

$\bar{f} = \int\psi^*\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\psi dq + \frac{i}{h}\int(\hat{H}^*\psi^*)\hat{f}\psi dq - \frac{i}{h}\int\psi^*\hat{f}(\hat{H}^*\psi)dq;$ Врахуємо таку властивість:

$$\int(\hat{H}^*\psi^*)(\hat{f}\psi)dq = \int\psi^*\hat{H}\hat{f}\psi dq; \quad \dot{\bar{f}} = \int\psi^*\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{h}\hat{H}\hat{f} - \frac{i}{h}\hat{f}\hat{H}\right)\psi dq \quad \dot{\hat{f}} = \frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{h}(\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H})$$

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x\nabla\hat{f} + \nabla\hat{f}\hat{p}_x) \quad => \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial x}\hat{p}_x\right) = \frac{\hat{p}_x\hat{x} + \hat{x}\hat{p}_x}{m}$$

29 Використовуючи умови квантування Бора-Зомерфельда. Знайти спектр рівнянь енергії частинки масою m в гравітаціонному полі Землі по відношенню до площини z=0 .



В квазікласичному випадку стан частинки в гравітаційному полі Землі відповідає умові квантування Бора Зоммерфельда $\oint pdx = 2\pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right)$ (p – це імпульс частинки).

$\int_0^a pdx = \int_0^a\sqrt{2m(E - mgz)}dz$ (Максимальна координата,буде тоді, коли вся енергія перетвориться в потенціальну тобто E=mga звідси і шукатимемо a – межу інтегрування).

$$\int_0^a pdx = \int_0^a\sqrt{2m(E - mgz)}dz = \int_0^a m\sqrt{2g}\sqrt{a - z}dz = \left|\sqrt{a - z} = t^2, -\frac{1}{2t^2}dz = 2tdt, c\right.$$

$$= \int_0^a m\sqrt{2g} - 4t^5dt = m\sqrt{2g}\,4t^6\Big|_0^{\sqrt[4]{a}} = \frac{2}{3}m\sqrt{2g}\,a^{3/2}$$

Відповідь $E_m = \sqrt[3]{\frac{mg^2}{2}\left(\frac{3}{2}\pi\hbar\right)^2}\left(n + \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$E=A^2\int_0^R-\frac{\hbar^2}{2m}(\rho-R)\Delta(\rho-R)\rho d\rho=-\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_0^R(\rho^2-R\rho)d\rho=-\frac{\hbar^2A^2}{2m}\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^2}{2}\right)=\frac{A^2\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6}=$$

$$=\frac{9}{R^2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6}=\frac{3}{4}\frac{\hbar^2R}{2m}\ .$$

30 *Отримати наближене значення енергії основного стану частинки у нескінченно глибокій двовимірній ямі*

$$U(x)=\begin{cases}0,\rho\le R\\ \infty,\rho>R\end{cases}$$

варіаційним методом, використовуючи пробну функцію $\psi_0(\rho)=A(R-\rho)$ *при* $\rho<R$.

Розв'язок:

$$\int_\rho^R\psi_0^2d\rho=1=A^2\int_0^R(R-\rho)^2\rho d\rho=\int_0^R(R^2\rho+\rho^2+2R\rho^2)d\rho=R^2\frac{R^2}{2}+\frac{R^4}{4}+\frac{2}{3}R^4=\frac{3}{4}R^2-\frac{2}{3}R^2=$$

$$=\frac{1}{9}R^2A^2=1\Rightarrow\quad A=\frac{3}{R}\ ,\quad \Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right);$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x}\psi=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right)=\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{l}$$

$$E=A^2\int_0^l\psi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi dx=\ldots$$

31 *Отримати наближене значення енергії основного стану у нескінченно глибокій двовимірній ямі*

$$U(x)=\begin{cases}0,x\in(0,l)\\ \infty,x\notin(0,l)\end{cases}$$

варіаційним методом використовуючи пробну ф-цію $\psi_0(x)=A\sin^2(\frac{\pi x}{l})$

Розв'язок:

$$A^2\int_0^l\sin^4\frac{\pi x}{l}dx=A^2\int_0^l\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right)=A^2\frac{1}{4}l=1\Rightarrow A=\frac{2}{\sqrt{l}}$$

32 *Довести* $\left[\hat{A}\hat{B}^3\right]=3\hat{B}^2$, $AB-BA=1$

Розв'язок:

$$(BBAB-BBBA)\psi=B^2\psi\ ,\quad AB^3-B^3A=ABBB-BBBA=AB^3-B^2AB+B^2=ABB^2-B^2AB+B^2=$$

$$=ABB^2-BAB^2+BAB^2-B^2AB+B^2=(AB-BA)B^2+B(AB^2-BAB)+B^2=$$

$$=2B^2+B(AB-BA)B=3B^2$$

33 *Знайти* $\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]$

Розв'язок:

$$\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=\hat{p}_x\hat{x}^n-\hat{x}^n\hat{p}_x\ ,\quad \hat{p}_x\hat{x}^n\psi=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{x}^n\psi)=\frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi+\hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x})\ ,\quad \hat{x}^n\hat{p}_x\psi=\frac{\hbar}{i}\hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=\frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi)\Rightarrow\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=-i\hbar n\hat{x}^{n-1}\ ,$$

34 *Знайти середню кінетичну енергію* $\left\langle\Delta E^2\right\rangle$ *в основному стані частинки:*

Розв'язок:

$$\psi_1(x)=\sqrt{2/a}\sin\frac{\pi}{a}\ ,\quad \bar{E}=\int\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\sqrt{2/a}\right)^2\sin\frac{\pi x}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(\frac{\pi}{a}x)dx=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\int|\psi_1|^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2dx=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2=\bar{E}\ ,\quad \sqrt{\overline{(E-\bar{E})}^2}=\sqrt{\bar{E}^2-(\bar{E})^2}\ ,$$

$$\Rightarrow\bar{E}^2=\int\left(\sqrt{2/a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)^2dx=\ldots$$

35 *Для частинки в полі знайти спектр в імпульсному представлені:*

Розв'язок:

$$\hat{V}=A\hat{x}=Ai\hbar\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\frac{p^2}{2m\psi}+i\hbar A\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=E\psi$$ - р-ня для власних ф-цій оператора енергії.

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{E-p^2/2m}{i\hbar A}dp\Rightarrow\quad \varphi=C\exp\left(-\frac{p^2}{2m}-Ep\right)$$, знайдемо сталу C:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_E(p)\varphi_{E`}(p)dp=\delta(E-E`)=C^2\int_-^+\exp\left(\frac{(E-E`)p}{\hbar A}\right)dp\ ,\quad \left(\delta(E-E`)=\frac{1}{2\pi}\int\exp(i(E-E`)y)dy\right)$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar A}}$$

36 *Відомо* $[A,C],[B,C]$ *, виразити* $[AB,C]$

Розв'язок:

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=ABC-CAB+ACB-ACB+ACB-ACB=A[B,C]+[A,C]B$$

37 *Як змінюється спектр при збурені?*

Розв'язок:

$$\begin{cases}\psi=\sqrt{2/a}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\\ E_n=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2\mu a^2}\end{cases}$$ - для стаціонарної задачі.

38 Довести що $\frac{d}{dt}\left[x,\hat{p}_x\right]=\frac{p_x}{m}-x\frac{\partial U}{\partial x}$. Рішення 1) $K=\frac{d}{dt}\left[x\hat{p}_x-\hat{P}_xx\right]=\frac{dx}{dt}\hat{p}_x+x\frac{d\hat{p}}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\hat{p}_xx\right)$; 2) $\frac{d}{dt}\left(\hat{p}_xx\right)=\frac{d}{dt}\underbrace{\left(-i\hbar\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}x}_{1}\right)}_{const}=0$; 3) $\frac{dx}{dt}=\frac{\hat{p}_x}{m}$; $\frac{d\hat{p}_x}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=F_x$ р-ня Ньютона 4) $k=\frac{\hat{p}_x}{m}-x\frac{\partial U}{\partial x}$