ШПОРА ФОТОЕФЕКТ

Коли енергія фотона $\hbar\omega$ перевищує енергію іонізації атома , поглинання фотона буде супроводжуватися переходом електрона з зв"язаного стану в стан неперервного спектру. Для спрощення розрахунку імовірності такого переходу в одиницю часу, будемо вважати, що вільний електрон, який утвориться, буде слабо взаємодіяти з атомом. А це означає те, що його стан можна буде описати плоскою хвилею.

$\varphi_q = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(i\vec{q}\vec{r}), \vec{q} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ нормованою на об'єм V системи. Таке наближення буде виконуватись коли кінетична енергія вільних електронів велика порівняно з енергією іонізації атома. У випадку коли електрон знаходиться у початковому 1s- стані в атомі, він описувався хвильовою функцією вигляду $\psi_o = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a}}; a = \frac{h^2}{\mu e^2 Z}$. Отже, оскільки зміна стану системи відбулася в наслідок гармонічного збурення ел.-маг. Хвилі, для визначення імовірності такого переходу в одиницю часу можна використати формулу вигляду: $P_{oq} = \frac{W_{oq}}{t} = \frac{4\pi^2 e^2 I}{\mu^2 h^2 c\omega^2} |B_{oq}|^2 \delta(\omega_{oq} + \omega)$ де Boq : $B_{oq} = \int \psi^*{}_o e^{ik\vec{r}} (\vec{e}_k \vec{p})\psi_q dv$. Далі йде якась муть про розподіл по кутам, конкретніше можна подивитись наприклад в Давидові, сторінка 473.

6 Довести тотожність для будь-яких операторів

A і B: $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}\hat{B}] + \frac{1}{2}\left[\hat{A}[\hat{A}\hat{B}]\right] + ...$ $e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} + ...$ $e^{-\hat{A}} = 1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} - ...$

$\hat{B}\left(1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2} - ...\right) = \hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}$, $\left(1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!}\right)\left(\hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}\right) =$ Розкриваємо дужки, Записуємо з отриманого результату $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\hat{B}\right]$ та $\hat{A}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\left[\hat{A}\hat{B}\right]\right]$, що відповідає шуканому виразу.

7 Для будь-якого оператора А довести що $< \mathrm{A}^2 > \geq 0$.

Розв: $\int \psi^* \hat{A}\hat{A}\psi dV = \int \psi^* \hat{A}\left(\hat{A}\psi\right) dV =$ $\int \left(\hat{A}\psi\right) \hat{A}^* \psi^* dV = \int \left(\hat{A}\psi\right)\left(\hat{A}\psi\right)^* dV =$ $\int \left|\hat{A}\psi\right|^2 dV \geq 0$.

8 Показати якщо $\hat{A}$ і $\hat{B}$ - ермітові то $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ - також ермітові.

Розв: $\int \psi^* \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)\psi dV =$ $\int \psi^* \hat{A}\hat{B}\psi dV + \int \psi^* \hat{B}\hat{A}\psi dV =$ $\int \psi^* \hat{A}(\hat{B}\psi) dV + \int \psi^* \hat{B}(\hat{A}\psi) dV =$ $\int \hat{B}\psi \hat{A}^* \psi^* dV + \int \hat{A}\psi \hat{B}^* \psi^* dV =$* $\int \hat{A}^* \psi^* \hat{B}\psi dV + \int \hat{B}^* \psi^* \hat{A}\psi dV =$ $\int \psi \hat{B}^* \hat{A}^* \psi^* dV + \int \psi \hat{A}^* \hat{B}^* \psi^* dV =$ $\int \psi (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^* \psi^* dV$.

9 Показати, що сер. значення ермітового оператора $\widehat{L}^* * \widehat{L}$ невід'ємні.

Розв. $\int \psi^* \widehat{L} + \widehat{L}\psi dx = \int \psi^* \widehat{L} + \phi dx = \int \phi \widehat{L}\psi^* dx = \int \left(\widehat{L}\phi\right)\left(\widehat{L}\psi\right)^* dx = \int \left|\widehat{L}\psi\right|^2 dx \geq 0$

10 Електрон знаходиться в атомі водню в основному стані Визначити середній радіус і сер R^2

Розв: $\Psi_!(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$;

$$\overline{r_1}=\int\psi^* r\psi d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\int e^{-r/a}rd\tau=\left|r^2\sin\theta d\theta dr d\phi=d\tau\right|=<r_1>=\frac{2\pi}{\pi a^3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^\infty e^{-2r/a}r^3dr$$

$$=\frac{2\pi}{\pi a^3}r\frac{3!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{4\pi}{\pi}\frac{6a^4}{16}=\frac{3}{2}a$$

11 Довести що $[\hat{L}_x,\hat{P}_z]=-i\hbar\hat{P}_y$

Розв: $[\hat{L}_x,\hat{P}_z]=\left(\hat{y}\hat{P}_z-\hat{z}\hat{P}_y\right)\hat{P}_z-\hat{P}_z\left(\hat{y}\hat{P}_z-\hat{z}\hat{P}_y\right)=y\left(\hat{P}_z\right)^2-\hat{z}\hat{P}_y\hat{P}_z-\hat{P}_z\hat{y}\hat{P}_z+\hat{P}_z\hat{z}\hat{P}_y=$

$$=y\left(\hat{P}_z\right)^2-y\left(\hat{P}_z\right)^2-\hat{z}\hat{P}_z\hat{P}_y+\hat{P}_z\hat{z}\hat{P}_y=[\hat{P}_z,z]\hat{P}_y=-i\hbar\hat{P}_y$$

12 Знайти власні функ-ції і власні значення оператора $\hat{L}_z{}^2=-\hbar^2\dfrac{d^2}{d\phi^2}$

Розв: $\vec{L}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$; $\hat{L}_z^2=-\hbar^2\left(\dfrac{\partial}{\partial\phi}\right)^2=-\hbar^2\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$; $-\dfrac{\hbar^2\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=\lambda\psi$; $\psi''+\dfrac{\lambda}{\hbar^2}\psi=0$; $\psi=Ce^{k\phi}$;

$\psi(\phi)=\psi(\phi+2\pi)$; $k^2+\dfrac{\lambda}{\hbar^2}\psi=0$; $\Psi=C_1e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi}+C_2e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi}$; $k=\pm\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}$;

$V(x)=\sum\limits_{n=-oo}^{oo}V_o\delta(x-na);\delta-$; $e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\hbar}2\pi}=1$; $\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}=im$; $|\lambda|=m^2\hbar^2,\lambda>0$;

13 Знайти served. значення $\vec{p}_x^{\,2}$ **в состоянии** $\psi=C_1\psi_1+C_2\psi_2$**, де** $\psi_1(x)$ *ta* $\psi_2(x)$**. Основне та перше збуджений стан част. в** ∞ **глибокій прямокутній ямі, шириною а.** $\psi_n=A_n\sin\dfrac{\pi nU}{a}$

Розв: $\psi=C_1\psi_1+C_2\psi_2$; $\psi_n=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$; $\hat{p}_x=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$;

$\Psi=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\left(C_1\sin\dfrac{\pi x}{a}+C_2\sin\dfrac{2\pi x}{a}\right)$; $<p^2>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi dx=$ ψ^*- дійсна тому

$\psi^*=\psi=\int_{-\infty}^{\infty}-\hbar^2\psi\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right)dx$ $\qquad\dfrac{\partial}{\partial x}\psi=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\left(C_1\dfrac{\pi}{a}\cos\dfrac{\pi x}{a}+\dfrac{2\pi}{a}\cos\dfrac{2\pi x}{a}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{4\pi^2}{a^2}C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\right)=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(C_1\sin\frac{\pi x}{a}+C_2\sin\frac{2\pi x}{a}+3C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\right)=-\psi\frac{\pi^2}{a^2}-\sqrt{\frac{2}{a}}3C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{\pi^2}{a^2};$$

$<p^2> = +\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{\pi^2}{a^2}\psi + \pi^2 \sqrt{\frac{2}{a}}\, 3C_2 \frac{\sin 2\pi x}{a} \right) dx =$

$= \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\psi}_{=1} + \frac{\pi^2 3\hbar^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\, C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{2\pi x}{a}\psi dx$

$\int_0^a C_1C_2 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a} + C_2{}^2 \underbrace{\sin^2\frac{2\pi x}{a}}_{=\frac{C_2{}^2}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{a}\right)} dx$ бо Ψ за межами = 0

$\frac{C_1C_2}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)$ $\Rightarrow \frac{C_2{}^2}{2}a$ Отже

$<p^2> = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} + \frac{C_2{}^2}{2}a3\frac{\hbar^2\pi^2}{a^2}\frac{2}{a} = \frac{\pi^2\hbar 2}{a^2}\left(1+3C_2{}^2\right)$

14Нескінченно глибока потенціальна яма (0,а) збурення $V(x)=V_0 xos^2\frac{\pi x}{a}$

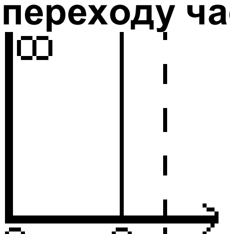
0) $E^{(0)}{}_n = \frac{\pi^2h^2}{2ma^2}n^2$ $\psi_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{a}\right)x$ 1)$V\Psi_n + H_0\Psi_n^{(1)} = E_n^{(0)}\Psi_n^{(0)} + E_n^{(1)}\Psi_n$

$V\psi_n + H_0\psi^{(1)}{}_n = E^{(0)}{}_n\psi^{(0)}{}_n + E^{(1)}{}_n\psi_n$

$V_{nn} = \int_0^a \psi_n V\psi_n{}^* dx = \frac{2}{a}V_0\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\cos^2\frac{\pi x}{a}dx =$

$= \frac{V_0}{2a}\int_0^a\left(1-\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)dx = ... = \frac{V_0}{2a} - \frac{\delta_{n1}V_0}{4}$да да, це символи Кронекера вродє. $E^{(1)}{}_n = 1/2V_0\left(1-\frac{1}{2}\delta_{n1}\right)$ $V_{nn} = \frac{V_0}{2}\left(1-\frac{\delta_{n1}}{2}\right)$n=m $E = E^{(0)} + E^{(1)}$

15 Частинка в основному стані у ∞ глибокій ямі ширино. a. В певний момент часу права стінка ями зсунулась в точку b. Знайти ймовірність переходу частинки в різні стаціонарні стани.



1) $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$; $\psi_n(x,t) = \psi_1(x)e^{\frac{-i}{\hbar}tE_1}$.

2)Для розширеної ями: $\tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi nx}{b}$, $\tilde{\psi}_n(x,t) = \tilde{\psi}_n(x)e^{\frac{-i}{\hbar}tE_1}$.

3) $\psi(x,t)=\sum_n a_{ik}\tilde{\psi}_k(x,t)$, $\psi_1(x)-e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}=\sum_k a_{ik}\tilde{\psi}_k(x)=$ $e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}\Big|\psi_n(x)$ $\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}\int_0^a \psi_1(x)\tilde{\psi}_n(x)dx=$

$\sum_n a_{ik}e^{-\frac{i}{\hbar}tE}\underbrace{\int_0^b \tilde{\psi}_k(x)\tilde{\psi}_n(x)dx}_{\delta_{nk}}$. $\quad a_{1n}=e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_n)t}\underbrace{\int_0^a \psi_1(x)\tilde{\psi}_n(x)dx}_{Integral}$.

integral$=\int_0^a \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi nx}{b}dx=$ $\quad \frac{2}{2\sqrt{ab}}\int_0^a\left\{\cos\pi x(\frac{1}{a}-\frac{n}{b})-\cos\pi x(\frac{1}{a}+\frac{n}{b})\right\}$

$=-\frac{1}{\pi\sqrt{ab}}\left(\frac{ab}{b-an}\sin\frac{\pi x(b-an)}{ab}-\frac{ab}{b+an}\sin\frac{\pi x(b+an)}{ab}\right)\Bigg|_0^a=$

$....=\frac{2b\sqrt{ab}}{\pi(b^2-a^2n^2)}\sin\frac{\pi an}{b}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_n)t}$. Ймовірність $W_{1\to k}=\left|a_{1k}\right|^2=a_{1k}\cdot a_{1k}{}^*=$

$\frac{4ab^3\sin^2(\frac{\pi an}{b})}{\hbar^2(b^2-a^2n^2)}[....]$.

16 Знайти середнє значення потенціальноїенергії для атома водню. $\psi=\frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}\left(1-r/2a\right)\cdot e^{-r/2a}$ **- волнова фун-я атома фодню.**

Розв: 1) Для атома водню $U=-e^2/r$;

$\Rightarrow <U>=\int_0^\infty \psi^*\left(r\right)U\psi\left(r\right)r^2\sin\theta d\theta d\phi dr=-\frac{4\pi e^2}{8\pi a^3}\int_0^\infty\left(1-r/2a\right)^2e^{-r/a}\cdot\frac{r^2}{r}dr=$

$=-\frac{e^2}{2a^3}\int_0^\infty\left(r-\frac{r^2}{a}+\frac{r^3}{4a^2}\right)e^{-r/a}dr=...використати\left|\int_0^\infty x^ne^{-\alpha x}dx=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right|$

17 Знайти власні значення та власні функції оператора $s_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

Розв: $\hat{A}\psi=A\psi$; $\quad \hat{S}_x\psi(\sigma_x)=S_x\psi(\sigma_x)$, $\quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=S_x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=S_x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}\frac{\hbar}{2}b=S_xa\\ \frac{\hbar}{2}a=S_xb\end{cases}=\begin{cases}\frac{\hbar}{2}-S_x=0\\ -S_x+\frac{\hbar}{2}a=0\end{cases}$ $\quad \Delta=0=\begin{vmatrix}\frac{\hbar}{2}&-S_x\\-S_x&\frac{\hbar}{2}\end{vmatrix}=$ $\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2-S_x=0\Rightarrow$ $\quad S_x=\pm\frac{\hbar}{2}$- влісні значення. Розглянемо ці 2 випадки: 1) $S_x=\frac{\hbar}{2}\Rightarrow$ і. Умова нормування: $\sum_{\sigma_x}\chi_{m_s}{}^+(\sigma_x)\chi_{m_s'}(\sigma_x)=\delta_{m_sm_s'}\Rightarrow(a^*\quad b^*)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$ $\quad a^*a+b^*b=1\Rightarrow|a|^2+|b|^2=1$. З умови нормування слідує $a=b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді $\Psi(\sigma_x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$влісна функція при

$S_x = \frac{\hbar}{2}$; 2) $S_x = -\frac{\hbar}{2} \Rightarrow \frac{\hbar}{2}b + \frac{\hbar}{2}a = 0 \Rightarrow \quad b = -a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad \Psi(\sigma_x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ влісна функція при $S_x = -\frac{\hbar}{2}$

18 Знайти рівні енергії власні функції 3-вимірного гармонічного осцилятора з пот. енергією $V(x, y, z) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3z^2$.

Запишем для осциллятора уравнение Шредингера: $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \left(\frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E\Psi$. В данном случае мы можем использовать разделение переменных, то есть переписать волновую функцию в след виде: $\Psi(x, y, z) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$. Подставим ее в уравнение Шредингера и поделим на нее же. Получаем: $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{1}{\Psi_1} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial y}\frac{1}{\Psi_2} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\frac{1}{\Psi_3}\right) + \left(\frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E$. Ахуенно. Теперь введем некоторые обозначения: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ и подставим его во вторую часть уравнения Шредингера. После небольшой перегруппировки членов получаем:

$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{1}{\Psi_1} + \frac{k_1x^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}\frac{1}{\Psi_2} + \frac{k_2y^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\frac{1}{\Psi_3} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E$. А теперь сделаем ход ФЕРЗЕМ! Запишем нашу энергию так: $E = E_1 + E_2 + E_3$ типа как для 3-х одномерных осцилляторов. Очевидно, что мы имеем полное право промутить такую фичу. Теперь нам осталось решить все это и записать энергии и волновые функции. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \frac{k_1x^2}{2}\Psi_1 = E\Psi_1$. Для упрощения вида и следовательно геморроя при решении, введем следующие обозначения: $\xi_1 = \sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}}; \xi_2 = \sqrt{\frac{m\omega_2}{\hbar}}; \xi_3 = \sqrt{\frac{m\omega_3}{\hbar}}$.

Известно, что (кому неизвестно – втыкайте в 94 страницу Ландау), что для одномерного осциллятора, решение будет в следующем виде: $\Psi = Ce^{-\frac{\xi_1}{2}}H_n(\xi_1)$, где H_n- полиномы Эрмита. Учитывая все вышесказанное, для волновой функции 3-х мерного осциллятора, получаем $\Psi_{n_1n_2n_3} = Ce^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}H_{n_1}(\xi_1)H_{n_2}(\xi_2)H_{n_3}(\xi_3)$, а для энергий имеем следующую парафию: $E_{n_1n_2n_3} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_3$. Где $\frac{\hbar\omega}{2}$- минимальное значение, а n – условие квантования. Для того, чтобы узнать коэффициент C используем условие нормировки волновой функции.

Полином Эрмита можно записать в след форме: $H_n = (-1)^1 e^{\xi^2} \frac{d^n e^{\xi^2}}{d\xi^n}$, подставим это в условие нормировки: $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1} C_n^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n}{d\xi^n} d\xi} = 1$. Откуда-то известно, что $\frac{d^n H_n}{d\xi^n} = 2^n n!$, то есть $C_n^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_n}} \frac{1}{2^n n!}$, то есть после всей этой еботни получаем решение: $\Psi(x,y,z) = \frac{\sqrt[4]{m^3\omega_1\omega_2\omega_3 e^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}} H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\xi) H_{n_3}(\xi)}{(\hbar\pi)^{\frac{3}{4}} \sqrt{2^{n_1+n_2+3} n_1! n_2! n_3!}}$. Вот в принципе и все..

19 Найти нормированные собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} + a\sin\varphi$ (φ-азимутальный угол)

Решение: Собственные функции и значения находятся из $(\hat{A} - A)\psi = 0 \Leftrightarrow \hat{A}\psi = A\psi$ подставляя явный вид оператора:

$-i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \psi(a\sin\varphi - A)$ Разделяем переменные и интегрируем $\int i\hbar \frac{\partial\psi}{\psi} = \int (a\sin\varphi - A) d\varphi$ получим

$\ln\psi = \frac{i(a\cos\varphi + A\psi)}{\hbar} + c$ отсюда $\psi(\varphi) = c\exp(\frac{i(a\cos\varphi + A\varphi)}{\hbar})$. Для выполнения условий однозначности

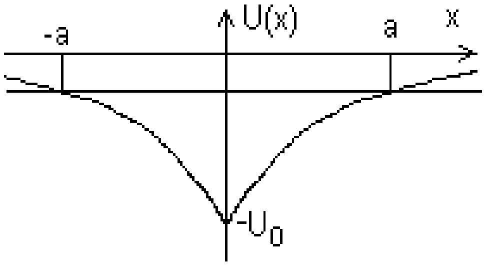
$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$

Далее путем несложных мат. преобразований используя, что $\exp(i\varphi) = \exp(i(\varphi + 2\pi m))$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$(целое) находим

$A = \hbar m$ - это и есть собственные значения оператора. Не нормированные собственные функции: $\psi(\varphi) = c\exp(\frac{i(a\cos\varphi + \hbar m\varphi)}{\hbar})$ Нормировка находится из $\int\limits_0^{2\pi} \psi_m{}^* \psi_m d\varphi = 1$ отсюда $c = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ Тогда нормированные собственные функции:

$\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(i(\frac{a\cos\varphi}{\hbar} + m\varphi))$

20 Определить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в потенциале вида: $U(x) = -U_0 \exp(-|x|/a)$



Решение. График имеет вид показанный на рисунке. Стационарные уровни энергии в квазиклассическом приближении находятся из правил квантования Бора-Зомерфельда: $\oint pdx = 2\pi\hbar(n+1/2)$ где p – импульс, n – квант. число $p=\sqrt{2m(E-U(x))}$ пересечение U(x) и E например при x=a, x=-a тогда $E=-U_0/\exp(1)$ Задача сводится к нахождению интеграла $\oint pdx = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{2m(-(U_0/e)+U_0\exp(-|x|/a))}dx =$

$$=4\sqrt{2mU_0/e}\int_0^a\sqrt{\exp(1-(x/a))-1}$$

$$\int_0^a\sqrt{\exp(1-(x/a))-1} = |\sqrt{\exp(1-(x/a))-1}=t| = -2\int_{\sqrt{e-1}}^{0}\frac{t^2dt}{t^2+1}$$

Прибавим и отнимем 1 в числителе, тогда $2\int_{1.3}^{0}dt - 2\int_{1.3}^{0}\frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2arctg(t)|_{1.3}^{0}$=0.78 следовательно

$\oint pdx = 0.78\sqrt{2mU_0/e} = 0.78\sqrt{2mE} = 2\pi\hbar(n+1/2)$ Отсюда

$E=\dfrac{4\pi^2\hbar^2(n+1/2)^2}{(0.78)^2 2m}$ стационарные уровни

21 Найти среднее значение потенциальной энергии в 2s состоянии атома водорода: $\psi_{200}=(8\pi a^3)^{-1/2}(1-\frac{r}{2a})\exp(-\frac{r}{2a})$ **для кулоновской потенциальной энергии** $U(r)=-\dfrac{e^2}{r}$

Решение: Среднее значение ищем по общему правилу $<U>=\int\psi^*\hat{U}(r)\psi dr$ **(2)** оператор же потенциальной энергии равняется самой потенциальной энергии. Для атома водорода $\hat{U}(r)=U(r)=-\dfrac{e^2}{r}$ **(3)**. Задача сводится к нахождению интеграла (2) подставляя в него (3) и явный вид волновой ф-и из условия. **Б.Т.У**

22 Визначити енергію основного стану атома водню за допомогою варіаційного метода використовуючі пробну функцію $\Psi = Ce^{-\alpha r}$ **,**

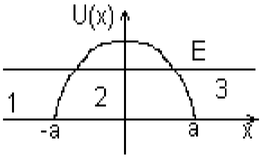
$\hat{H}=-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)-\dfrac{ql}{r}$ параметри обраної функції визначаються таким чином щоб обчисленний на цій функції середній гамільтоніан мав мінімум при умові нормування псі.

$\int |\Psi|^2\, d\tau = \left[d\tau = r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi\right] = 4\pi C^2 \int_0^{-\infty} r^2 e^{-2\alpha r} dr = \left[\int_0^{-\infty} r^2 e^{-2\alpha r} dr = \frac{n!}{2^{n+1}}\right] =$

$4\pi C^2 \frac{2}{(2\alpha)} = 1$ $C = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}}$ Знайдемо сер. Гам. $< H >= \int_0^{\infty} \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau = 4\pi C^2 \int e^{-\alpha r} \hat{H} e^{-\alpha r} r^2 dr$ далі іде застосування гамільтоніана до ф-ції. Для взяття інт. Все акуратно виписуємо (нічого складного). Отримуємо $< H >= -\frac{11}{2}\frac{h^2\alpha}{\mu} - 4ql\alpha$ тепер від цього виразу беремо похідну по альфа, прирівнюємо нулю і отримуємо $\alpha_0 = \frac{4\mu ql}{11\hbar}; < H > (\alpha_0) = \frac{88}{121}\frac{\mu q^2 l^2}{\hbar^2}$

23 Вычислить в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности параболического барьера

$U(x)\begin{cases} U_0(1-\frac{x^2}{a^2}), |x| < a \\ 0, |x| > a \end{cases}$ **Найти критерий применимости результата.**



Решение: Будем считать что частица с определенной энергией и импульсом $p = \hbar k_0$ движется из 1 в 3. Тога в 1 волновая ф-я это суперпозиция 2-х волн : $\Psi_1 = Ae^{ik_0 x} + Be^{-ik_0 x}$ Где A – амплитуда ‘падающей’ волновой ф-и, B – амплитуда волновой ф-и 'отраженных’ частиц. В области 3 по условию могут быть только уходящие частицы. $\Psi_3(x) = Ce^{ik_0 x}$ Эти равенства можно найти решая уравнение Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U\Psi = E\Psi$ (в данном случаи U=0) учитывая что $E = \frac{p^2}{2m}$

Аналогично для области 2 надо решить дифур: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (U_0(1-\frac{x^2}{a^2}) - E)\Psi = 0$ в общем случае его решение это:

$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta(x)}}\left(Fe^{\int_0^x \beta(y)dy} + Ee^{-\int_0^x \beta(y)dy}\right)$, где $\beta = \sqrt{\frac{2m(U(x)-E)}{\hbar^2}}$. Из условий непрерывности $\Psi_1(-a) = \Psi_2(-a)$; $\Psi_2(a) = \Psi_3(a)$; $\Psi_1'(-a) = \Psi_2'(-a)$; $\Psi_2'(a) = \Psi_3'(a)$ можно найти четыре соотношения между коэффициентами A,B, C, F, E . В квазиклассическом приближении $[A,C],[B,C]$ является плавной ф-ей от x, поэтому в производной можно учитывать зависимость $\beta(x)$ только в exp. Коэффициент прохождения D потенциального барьера $D = \left|\frac{C}{A}\right|^2$ и в принципе можно пользоваться и готовой формулой $D \approx e^{\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{-a}^{a}\sqrt{2\mu[U(x)-E]}dx\right)}$ (Считать по этой формуле)

Критерием применимости результата как уже говорилось плавности ф-и от x (в данном случае выполняется) и достаточная ширина барьера $\bar{\beta}a >> 1$ (при этом F<<E и им можно пренебречь при нахождении D)

24 Тривимірний випадок гармонічного осцилятора.

$-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}\omega(x^2+y^2+z^2)\psi = E\psi$; $-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}(\omega_x{}^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)\psi = E\psi$;

$-\frac{h^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega_x^2}{2}x^2\psi = \lambda_x\psi \Rightarrow$ $\lambda_x = h\omega_x(n_x+1/2)$;

$E_{n_xn_yn_z} = h\omega_x(n_x+1/2) + h\omega_y(n_y+1/2) + h\omega_z(n_z+1/2);$ $\omega_x=\omega_y=\omega_z;$

$E_{n_xn_yn_z} = h\omega(n_x+n_y+n_z+3/2)$ Отже енергія основного стану рівна: $E_n = \frac{3}{2}h\omega$.

$\psi_{n_xn_yn_z}(x,y,z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$ Функція основного стану рівна($n_x=n_y=n_z=0$) :

$\psi_{ooo} = \sqrt[n]{\frac{m\omega}{\pi h}}(\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2}H_n\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x) = |\,n=0; H_o=1\,| = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi h}}e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2}$. Отже ми маємо:

$\psi_{ooo} = (\frac{m\omega}{\pi h})^{3/2}e^{-\frac{m\omega}{2h}(x^2+y^2+z^2)}$ Для даного осцилятора енергетичні рівні будуть вироджені. $E_{n_xn_y} = h\omega(n_x+n_y+1)$

<u>25 Задача.</u>Маємо такий потенціал: $V(x) = \sum_{n=-oo}^{oo}V_o\delta(x-na); \delta -$ **гребінка Дірака.**

$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{h^2}V(x)\psi = 0;$ $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{h^2}(i - \sum_{-oo}^{oo}V_o\delta(x-na))\psi = 0;$ $\psi_1 = A\ {}^{i}{}_{1}e^{k} + {}^{x\ -}\ E;$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\frac{2m}{h^2}E)\psi_2 = 0;$ $\psi_2 = f(Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)})$ $|\,f\,| = 1; \psi_1(a) = \psi_2(a);$

$\psi_1'(a) - \psi_2'(a) = \frac{2m}{h^2}\psi_2(a)V_o;$ Підставляємо і отримуємо:

$Ae^{ika} + Be^{-ika} = f(A+B) = fA + fB;$ $Aike^{ika} - Bike^{-ika} - fAik + fBik = \frac{2m}{h^2}(fA+fB)V_o$;

$A(e^{ika} - f) + B(e^{ika} - f) = 0;$ $A(fik - ike^{ika} - \frac{2m}{h^2}fV_o) = 0;$

$A(f - e^{ika} + \frac{i2m}{kh^2}fV_o) + B(e^{-ika} - f + \frac{i2m}{h^2}fV_o) = 0;$ $1-$

$A(f - e^{-ka} + igf) + B(e^{-ika} - f + igf) = 0;$

$(e^{ika} - f)(e^{-ika} - f + igt) - (e^{-ika} - f)(fe^{ika} + igt) = 0;$

$1-fe^{ika}+igfe^{ika}-fe^{-ik_o}+f^2-igf^2+e^{ika}f+f^2-fe^{ika}+git^2=0;$

$1-fe^{ika}+igfe^{ika}-fe^{-ika}+f^2-fe^{-ika}+1-igfe^{-ika}+f^2-fe^{-ika}$ вообщем піздец.

26 Частинка знаходиться в пот. ямі $U=-\alpha\delta(x)$ Потенціал раптово переходить у точку хо. Знайти ймовірність, що частинка залишиться в потенціалі.

$(\frac{-h^2}{2m}\nabla+U(x))\psi=E\psi(x)$; $-\frac{h^2}{2m}\nabla\psi+(U-E)\psi=0;$ $\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-U)\frac{2m}{h^2}\psi=0;k^2=\frac{2Em}{h^2}$; Для зони(1), що лівіше дельта функції: $\psi_1=A_1e^{kx}$. Для зони (2) : $\psi_2=B_2e^{-kx}$;

$A_1=B_2;(kA_1+kB_2)=\frac{2m\alpha}{h^2}A_1;\Rightarrow k=\frac{m\alpha}{h^2}$; $\frac{\sqrt{2m}}{h}=\frac{\alpha E}{h^2};$ $E=\frac{m\alpha^2}{2h^2}$.

$\psi_0=\sqrt{n}e^{-kx};\tilde{\psi}_o=\sqrt{k}e^{-k(x-x_o)}$; $\Psi_o=\sqrt{k}e^{-kx}e^{-\frac{iE_o}{h}t};\tilde{\Psi}_o=\sqrt{k}e^{-k(x-x_o)}e^{i\frac{E_o}{h}t}$;

$a_{oo}=k\int\limits_{-oo}^{oo}e^{-kx}e^{-k(x-x_o)}dx=k\int\limits_{-oo}^{oo}e^{-kx(1-|1-\frac{x_o}{x}|)}dx=k\int\limits_{-oo}^{oo}e^{kx}e^{k(x-x_o)}dx+k\int\limits_{0}^{x_o}e^{-kx}e^{k(x-x_o)}dx+\int_{x_o}^{oo}e^{-kx}e^{-k(x-x_o)}dx=$

$k[e^{-kx_o}\int_{-oo}^{0}e^{2kx}dx+e^{-kx_o}\int_0^{x_o}dx+e^{kx_o}\int_{x_o}^{oo}e^{-2kx}dx]=$ $k(e^{-kx_o}\frac{1}{2k}+e^{-kx_o}x_o+e^{-kx_o}\frac{1}{2k})=$

$=e^{-kx_o}+x_oe^{-kx_o}=e^{-kx_o}(1+x_ok);\ W=e^{-2k^2x_o^2}(1+x_ok)^2=a_{oo};$

27 Знайти варіаційним методом енергію основного рівня частинки в потенціалі U=Fx x>0; U=infinity x<0

Використовуючи пробну ф-цію $\psi=Axe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}$. Умова нормування: $A^2\int_0^{oo}x^2e^{-\alpha x^2}dx=1$ $A^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=1$ $A=2\sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{\pi}}$ Середня потенціальна енергія $<V>=\frac{m\omega^2}{2}FA^2\int_0^{oo}x^3e^{-\alpha x^2}dx=\frac{m\omega^2F}{4}A^2\int_0^{oo}ye^{-\alpha y}dy=\frac{m\omega^2}{4\alpha^2}FA^2=\frac{m\omega^2F}{4\alpha^2}\frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{m\omega^2F}{\sqrt{\alpha\pi}}$ Середня кінетична енергія $<T>=\frac{\hbar^2A^2}{2m}\int_0^{oo}\left[\frac{\partial}{\partial x}xe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}\right]^2dx=...=\frac{3}{4}\frac{\hbar^2\alpha}{m}$

$I(\alpha)=\frac{m\omega^2F}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m}\alpha$ Беремо похідну по альфа=0 маємо

$\alpha_0=\left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$ $E_0=I(\alpha_0)=\frac{15\hbar^2}{4m}\left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$

28. Частинка знаходиться в потенціальному полі . Довести співвідношення $\frac{dx^2}{dt}=\frac{p_xx+xp_x}{m}$

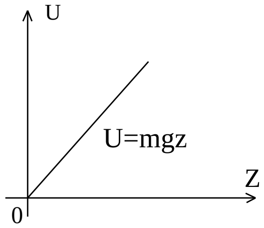
$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$; $\bar{\dot{f}}=\dot{\bar{f}}=\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{f}\psi dq==\int\psi^*\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial t^2}\psi dq+\int\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\hat{f}\psi dq+\int\psi^*\hat{f}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dq;$

$\bar{f} = \int \psi^* \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \psi dq + \frac{i}{h}\int (\hat{H}^* \psi^*)\, \hat{f}\psi dq - \frac{i}{h}\int \psi^*\, \hat{f}\,(\hat{H}^* \psi) dq;$ Врахуємо таку властивість:

$\int (\hat{H}^*\psi^*)(\hat{f}\psi)dq = \int \psi^* \hat{H}\hat{f}\psi dq;$ $\bar{\dot{f}} = \int \psi^*(\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{h}\hat{H}\hat{f} - \frac{i}{h}\hat{f}\hat{H})\psi dq$ $\quad \hat{\dot{f}} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{h}(\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H})$

$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x \nabla \hat{f} + \nabla \hat{f}\hat{p}_x)$ **=>** $\frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial x}\hat{p}_x) = \frac{\hat{p}_x \hat{x} + \hat{x}\hat{p}_x}{m}$

29 Використовуючи умови квантування Бора-Зомерфельда. Знайти спектр рівнянь енергії частинки масою m в гравітаціонному полі Землі по відношенню до площини z=0 .



В квазікласичному випадку стан частинки в гравітаційному полі Землі відповідає умові квантування Бора Зоммерфельда $\oint pdx = 2\pi\hbar(n+\frac{3}{4})$ (p – це імпульс частинки).

$\int_0^a pdx = \int_0^a \sqrt{2m(E-mgz)}dz$ (Максимальна координата,буде тоді, коли вся енергія перетвориться в потенціальну тобто E=mga звідси і шукатимемо a – межу інтегрування).

$$\int_0^a pdx = \int_0^a \sqrt{2m(E-mgz)}dz = \int_0^a m\sqrt{2g}\sqrt{a-z}dz = \left|\sqrt{a-z} = t^2, -\frac{1}{2t^2}dz = 2tdt, dz = -4t^3dt\right| =$$

$$= \int_0^a m\sqrt{2g} - 4t^5 dt = m\sqrt{2g}\,4t^6 \,\Big|_0^{\sqrt[4]{a}} = \frac{2}{3}m\sqrt{2g}\,a^{3/2}$$

Відповідь $E_m = \sqrt[3]{\frac{mg^2}{2}(\frac{3}{2}\pi\hbar)^2}(n+\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

30 Отримати наближене значення енергії основного стану частинки у нескінченно глибокій двовимірній ямі

$$U(x) = \begin{cases} 0, \rho \le R \\ \infty, \rho > R \end{cases}$$

варіаційним методом, використовуючи пробну функцію $\psi_0(\rho) = A(R-\rho)$ **при** $\rho < R.$

<u>Розв'язок:</u>

$$\int_\rho^R \psi_0^2 d\rho = 1 = A^2\int_0^R (R-\rho)^2 \rho d\rho = \int_0^R (R^2\rho + \rho^2 + 2R\rho^2)d\rho =$$

$$R^2\frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{4} + \frac{2}{3}R^4 = \frac{3}{4}R^2 - \frac{2}{3}R^2 =$$

$$= \frac{1}{9}R^2A^2 = 1 \Rightarrow \quad A = \frac{3}{R}, \quad \Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right);$$

$$E = A^2\int_0^R -\frac{\hbar^2}{2m}(\rho-R)\Delta(\rho-R)\rho d\rho = -\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_0^R(\rho^2-R\rho)d\rho = -\frac{\hbar^2A^2}{2m}\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^2}{2}\right)=$$

$$\frac{A^2\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6}=$$

$$=\frac{9}{R^2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6}=\frac{3}{4}\frac{\hbar^2R}{2m}.$$

31 Отримати наближене значення енергії основного стану у нескінченно глибокій двовимірній ямі

$$U(x)=\begin{cases}0, x\in(0,l)\\ \infty, x\notin(0,l)\end{cases}$$

варіаційним методом використовуючи пробну ф-цію $\psi_0(x)=A\sin^2(\frac{\pi x}{l})$

__Розв'язок:__

$$A^2\int_0^l \sin^4\frac{\pi x}{l}dx = A^2\int_0^l\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right)=A^2\frac{1}{4}l=1\Rightarrow A=\frac{2}{\sqrt{l}}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x}\psi=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right)=\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{l}$$

$$E=A^2\int_0^l\psi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi dx=...$$

32 Довести $\left[\hat{A}\hat{B}^3\right]=3\hat{B}^2$**,** $AB-BA=1$

__Розв'язок:__

$(BBAB-BBBA)\psi=B^2\psi$,

$$AB^3-B^3A=ABBB-BBBA=AB^3-B^2AB+B^2=ABB^2-B^2AB+B^2=$$
$$=ABB^2-BAB^2+BAB^2-B^2AB+B^2=(AB-BA)B^2+B(AB^2-BAB)+B^2=$$
$$=2B^2+B(AB-BA)B=3B^2$$

33 Знайти $\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]$

__Розв'язок:__

$$\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=\hat{p}_x\hat{x}^n-\hat{x}^n\hat{p}_x,\quad \hat{p}_x\hat{x}^n\psi=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{x}^n\psi)=\frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi+\hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x}),\quad \hat{x}^n\hat{p}_x\psi=\frac{\hbar}{i}\hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=\frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi)\Rightarrow\left[\hat{p}_x,\hat{x}^n\right]=-i\hbar n\hat{x}^{n-1},$$

34 Знайти середню кінетичну енергію $\langle\Delta E^2\rangle$ **в основному стані частинки:**

__Розв'язок:__

$$\psi_1(x)=\sqrt{2/a}\sin\frac{\pi}{a},\quad \bar{E}=\int\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\sqrt{2/a}\right)^2\sin\frac{\pi x}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(\frac{\pi}{a}x)dx=$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int|\psi_1|^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 dx = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \bar{E}\,,\quad \sqrt{\overline{(E-\bar{E})}^2} = \sqrt{\bar{E}^2-(\bar{E})^2}\,,$$

$$\Rightarrow \bar{E}^2 = \int\left(\sqrt{2/a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)^2 dx = ...$$

35 Для частинки в полі знайти спектр в імпульсному представлені:

Розв'язок:

$$\hat{V} = A\hat{x} = Ai\hbar\frac{\partial}{\partial p}$$

$\frac{p^2}{2m\psi} + i\hbar A\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = E\psi$ - р-ня для власних ф-цій оператора енергії.

$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{E - p^2/2m}{i\hbar A}dp \Rightarrow \varphi = C\exp\left(-\frac{p^2}{2m} - Ep\right)$, знайдемо сталу С:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_E(p)\varphi_{E`}(p)dp = \delta(E-E`) = C^2\int_{-}^{+}\exp\left(\frac{(E-E`)p}{\hbar A}\right)dp\,,$$

$$\left(\delta(E-E`) = \frac{1}{2\pi}\int\exp(i(E-E`)y)dy\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar A}}$$

36 Відомо $[A,C],[B,C]$, виразити $[AB,C]$

Розв'язок:

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = ABC - CAB + ACB - ACB + ACB - ACB = A[B,C] + [A,C]B$$

37 Як змінюється спектр при збурені?

Розв'язок:

$\begin{cases}\psi = \sqrt{2/a}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\\ E_n = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2\mu a^2}\end{cases}$ - для стаціонарної задачі.

38.Довести що $\frac{d}{dt}[x,\hat{p}_x] = \frac{p_x}{m} - x\frac{\partial U}{\partial x}$.

Рішення $1) K = \frac{d}{dt}\left[x\hat{p}_x - \hat{P}_x x\right] = \frac{dx}{dt}\hat{p}_x + x\frac{d\hat{p}}{dt} - \frac{d}{dt}(\hat{p}_x x)$; 2) $\frac{d}{dt}(\hat{p}_x x) = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x\right)}_{const} = 0$;

3) $\frac{dx}{dt} = \frac{\hat{p}_x}{m}$; $\frac{d\hat{p}_x}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_x$ р-ня Ньютона 4) $k = \frac{\hat{p}_x}{m} - x\frac{\partial U}{\partial x}$