**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**Радіофізичний факультет**

Кафедра математики і теоретичної радіофізики

***Укладач*** професор Юрачківський А.П.

**Диференціальні рівняння**

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

для студентів спеціальності 6.070204 – прикладна фізика

Затверджена на засіданні кафедри, протокол № 6 від 19.05.11

Завідувач кафедри Висоцький В.І.

Декан факультету Анісімов І.О.

**КИЇВ – 2011**

Робоча навчальна програма з дисципліни **Диференціальні рівняння**

**Укладач** доктор фізико-математичних наук професор Юрачківський А.П.

**Лектор** доктор фізико-математичних професор Юрачківський А.П.

**Практичні заняття:** Юрачківський А.П., Моторна О.В.

**Погоджено**

з науково-методичною комісією

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2011

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Підпис голови НМК факультету*

**Вступ**

**Диференціальні рівняння** – базова нормативна дисципліна для спеціальності *радіофізика і електроніка.* Читається в третьому семестрі в обсязі 4 кредити (лекції – 34 год., практичні заняття – 34 год., самостійна робота 12 год.). Закінчується іспитом.

**Мета і завдання навчальної дисципліни**

Навчити студентів інтегрувати диференціальні рівняння, розв’язувати інтегральні рівняння і лінійні диференціальні задачі, будувати функції впливу і досліджувати стійкість розв’язків систем диференціальних рівнянь.

**Предмет навчальної дисципліни**

Диференціальні рівняння, інтегральні рівняння, лінійні диференціальні задачі.

**Вимоги до знань і вмінь**

Знання у фундаментальних науках відіграють допоміжну, обслуговуючу роль. Головне – здатність робити власні висновки. Студент повинен уміти осмислено інтегрувати диференціальні рівняння, розв’язувати інтегральні рівняння і лінійні диференціальні задачі, будувати функції впливу і досліджувати стійкість розв’язків систем диференціальних рівнянь.

**Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі спеціальності**

Предмет є базовим для всіх фізичних дисциплін.

**Система оцінювання**

Результати навчання оцінюються за модульно-рейтинговою системою. Курс складається з трьох змістових модулів (ЗМ). З курсу передбачено три модульні контрольні роботи (МКР). Підсумкова оцінка (ПО) розраховується за накопичувальною системою.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Максимальна кількість балів | ЗМ 1 | ЗМ 2 | ЗМ 3 | іспит | ПО |
| За МКР | 10  12 | 10 | 4 |  |  |
| За активність на заняттях і виконання завдань СРС | 10 | 8 | 6 |  |  |
| Всього | 32 | 18 | 10 | 40 | 100 |

**ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № теми  № темии | Назва теми | Кількість годин | | | |
| Лекції | Практичні | Самостійна робота | МКР |

|  |
| --- |
| **Змістовий Модуль І. Основи загальної теорії диференціальних рівнянь. Лінійні системи і рівняння** |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | Теореми існування розв’язку задачі Коші. Продовжуваність розв’язку і неперервна залежність від початкової умови. Теореми існування і єдиності | 5 |  |  |  |
| 2 | Рівняння з відокремними змінними і звідні до них. Рівняння в повних диференціалах |  | 4 |  |  |
| 3 | Неявні рівняння |  | 2 | 2 |  |
| 4 | Скалярні рівняння вищих порядків. Випадки пониження порядку |  | 2 |  |  |
| 4 | МКР |  |  |  | 2 |
| 5 | Загальні системи диференціальних рівнянь першого порядку |  |  | 2 |  |
| 6 | Функції від операторів і матриць | 3 |  |  |  |
| 7 | Лінійні однорідні рівняння вищих порядків |  | 2 |  |  |
| 8 | Лінійні неоднорідні рівняння вищих порядків |  | 4 |  |  |
| 9 | Лінійні системи диференціальних рівнянь | 5 | 6 |  |  |
| 10 | Лінійні рівняння вищих порядків | 2 |  |  |  |
| 11 | МКР |  |  |  | 2 |
|  | Всього | 15 | 18 | 4 | 4 |

|  |
| --- |
| **Змістовий Модуль 2. Теорія стійкості. Асимптотичні методи інтегрування диференціальних рівнянь. Операційне числення** |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | Асимптотичні методи інтегрування диференціальних рівнянь |  | 5 | 2 |  |
| 13 | Стійкість лінійних систем | 2 |  |  |  |
| 14 | Стійкість за першим наближенням |  | 1 |  |  |
| 15 | Застосуваннякритерію Льєнара − Шипара в теорії стійкості |  | 0,5 |  |  |
| 16 | Метод функцій Ляпунова в теорії стійкості | 2 |  | 2 |  |
| 17 | Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійних однорідних систем другого порядку | 2 | 2 |  |  |
| 18 | Інтегрування лінійних рівнянь і систем зі сталими коефіцієнтами операційним методом |  |  | 2 |  |
| 19 | МКР |  |  |  | 2 |
| Всього | | 6 | 8,5 | 6 | 2 |

|  |
| --- |
| **Змістовий Модуль 3. Рівняння в частинних похідних. Інтегральні рівняння. Лінійні диференціальні задачі** |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 20 | Квазілінійні рівняння в частинних похідних першого порядку | 1,5 | 2 |  |  |
| 21 | Лінійні операторні, зокрема інтегральні рівняння | 4,5 | 1,5 |  |  |
| 22 | Лінійні диференціальні задачі. Метод функцій впливу | 4 | 3 | 2 |  |
| 23 | Задача Штурма – Ліувіля. Зв’язок лінійних диференціальних задач з інтегральними рівняннями | 3 | 1 |  |  |
| Всього | | 13 | 7,5 | 2 | 0 |

**ТЕМАТИЧНО-ЗМІСТОВА ЧАСТИНА КУРСУ**

**ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1**

**Лекція 1.** Типи рівнянь. Зведення явного рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку і запис останньої як одного рівняння першого порядку в просторі більшої розмірності. Інтегральні криві і траєкторії. Поняття загального розв’язку і загального інтеграла. Особливі точки і особливі розв’язки. Інтегральна форма запису задачі Коші для явного рівняння першого порядку.

**Лекція 2.** Теореми існування розв’язку задачі Коші. Лема Гронуола–Белмана. Продовжуваність розв’язку задачі Коші.

**Лекція 3.** Неперервна залежність розв’язку задачі Коші від початкової умови. Теореми існування і єдиності розв’язку. ТеоремаЖордана про нормальну форму матриці.

**Лекція 4.** Функції від операторів і матриць. Вираз функції від матриці через функції від жорданових клітин. Вираз функції від жорданової клітини.Слід квадратної матриці. Деякі асимптотичні співвідношення для визначників.

**Лекція 5.** Однорідне матричне лінійне диференціальне рівняння. Матрицант і його властивості. Формула Остроградського–Ліувіля для цього рівняння. Варіювання сталих у неоднорідному матричному рівнянні. Формула Коші.

**Лекція 6.** Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Поняття фундаментальної матриці і фундаментальної системи розв’язків. Формула Остроградського–Ліувіля. Будова загального розв’язку. Неоднорідні системи: формула Коші; теореми про будову частинного розв’язку у випадку, коли коефіцієнти системи сталі, а вільний член є квазімногочленом (початок).

**Лекція 7.** Неоднорідні системи: теореми про будову частинного розв’язку у випадку, коли коефіцієнти системи сталі, а вільний член є квазімногочленом (закінчення). Лінійні рівняння вищих порядків. Встановлення зв’язку з системами рівнянь першого порядку. Фундаментальна система розв’язків у комплексній формі автономного лінійного однорідного рівняння.

**Лекція 8.** Лінійні рівняння вищих порядків Фундаментальна система розв’язків у дійсній формі автономного лінійного однорідного рівняння. Варіювання сталих у неоднорідному рівнянні. Теорема про будову будову частинного розв’язку неоднорідного автономногорівняння, вільний член якого − квазімногочлен.

Означення стійкості і асимптотичної стійкості. Теореми про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) для загальної (неавтономної) лінійної однорідної системи в термінах фундаментальної матриці.

**Практичне заняття 1.** Рівняння з відокремними змінними і звідні до них.

**Практичне заняття 2.** Рівняння: Бернуллі, Ріккаті, в повних диференціалах.

**Практичне заняття 3.** Неявні рівняння, зокрема рівняння Лагранжа і Клеро.

**Практичне заняття 4. П**ониження порядку диференціальних рівнянь.

**МКР** – 2 год.

**Практичне заняття 5.** Лінійні однорідні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

**Практичне заняття 6.** Однорідні рівняння Ейлера. Підбір частинного розв’язку неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

**Практичне заняття 7.** Підбір частинного розв’язку неоднорідного рівняння Ейлера. Варіювання сталих у неоднорідному лінійному рівнянні.

**Практичне заняття 8.** Застосування формули Остроградського–Ліувіля. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь.

**Практичне заняття 9.** Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь. Підбір частинного розв’язку, варіювання сталих, застосування формули Коші.

**МКР** – 2 год.

**Питання, винесені на самостійну роботу**

1. Теорія неявних рівнянь [1, § 2.4], [2, § 2.3], [3, § 1.8, 1.9], [4, § 12.1].
2. Прийоми інтегрування нормальних систем диференціальних рівнянь загального вигляду [1, § 2.7], [2, § 3.6], [3, § 3.1, 3.2, 3.3], [4, § 12.1].

**Контрольні запитання**

1. Теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші для явного диференціального рівняння першого порядку.
2. Метод виключення невідомих для нормальних систем.
3. Метод інтегровних комбінацій.
4. Функції від операторів і матриць.
5. Матрицант і його властивості.
6. Формула Остроградського–Ліувіля.
7. Формула Коші.

**ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2**

**Лекція 9.** Теореми про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) для автономної лінійної однорідної системи і автономного лінійного рівняння вищого порядку. Дослідження точок спокою і траєкторій автономної лінійної однорідної системи другого порядку (початок).

**Лекція 10.** Дослідження точок спокою і траєкторій автономної лінійної однорідної системи другого порядку (закінчення). Метод функцій Ляпунова: підготовчі леми .

**Лекція 11.** Метод функцій Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість тривіального розв’язку автономної системи.

Квазілінійні рівняння в частинних похідних першого порядку. Теорема про зв’язок із системою рівнянь характеристик.

**Лекція 12.** Квазілінійні рівняння в частинних похідних першого порядку. Загальний розв’язок лінійного рівняння. Загальний розв’язок квазілінійного рівняння. Поняття про операторні, зокрема інтегральні рівняння. Ітераційний метод розв’язування таких рівнянь. Компактні оператори.

**Практичне заняття 10.** Інтегрування диференціальних рівнянь методом степеневих рядів. Рівняння Бесселя.

**Практичне заняття 11.** Гіпергеометричне і вироджене гіпергеометричне рівняння.

**Практичне заняття 12.** Наближене інтегрування диференціальних рівнянь методом малого параметра. Дослідження стійкості за першим наближенням.

**Практичне заняття 13.** Дослідження точок спокою і траєкторій автономної лінійної однорідної системи другого порядку.

**МКР** – 2 год.

**Питання, винесені на самостійну роботу**

1. Операційне числення [1, додаток 1], [4, § 8.1, 8.2], [5, додаток 2].
2. Гіпергеометричне рівняння [1, § 7.4], [4, § 7.2], [5, § 3.3].
3. Рівняння Бесселя [1, § 7.5], [3, § 2.7], [4, § 7.2], [5, § 3.3].
4. Побудова функцій Ляпунова [1, § 8.4], [3, § 4.3], [4, § 10.4], [5, § 2.4].

**Контрольні запитання**

1. Основні теореми операційного числення.
2. Означення стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості за Ляпуновим.
3. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.
4. Критерій Льєнара–Шипара.
5. Стійкість за першим наближенням.
6. Класифікація точок спокою і траєкторій.
7. Метод функцій Ляпунова. Теореми Ляпунова.
8. Метод степеневих рядів.
9. Регулярний метод малого параметра.
10. Гіпергеометричне рівняння.
11. Рівняння Бесселя.

**ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3**

**Лекція 13.** Компактні оператори. Теорема Ріса про замкнутість образу. ТеоремаФредгольма для операторних рівнянь зкомпактним оператором у гільбертовому просторі.

**Лекція 14.** Ортогональні розклади в евклідових просторах. Теореми про задання лінійного обмеженого і компактного операторів. Теорема Гільберта–Шмідта про рівномірну збіжність.

**Лекція 15.** Оператори Гільберта − Шмідта.Рівняння з компактним ермітовим оператором. Інтегральні рівняння. Резольвента. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Загальна лінійна диференціальна задача (ЛДЗ) і зведення її до двох спеціальних. Умови розв’язності і загальний розв’язок ЛДЗ з однорідним рівнянням.

**Лекція 16.** Функція Гріна загальної ЛДЗ з однорідними додатковими умовами. Вираз розв’язку такої ЛДЗ через функцію Гріна.

Крайові задачі з однорідними додатковими умовами для рівняння другого порядку. Побудова функції Гріна невиродженої розщепленої крайової задачі. Задача Штурма–Ліувіля: постановка, властивості власних елементів.

**Лекція 17.** Зв’язок крайових задач з інтегральними рівняннями. Необхідна і достатня умова існування розв’язку виродженої крайової задачі. Розклад розв’язку крайової задачі, в разі існування його, по власних функціях задачі Штурма–Ліувіля. Узагальнена функція Гріна. Теорема Стеклова.

**Практичне заняття 14.** Застосуваннякритерію Льєнара − Шипара в теорії стійкості. Інтегральні рівняння.

**Практичне заняття 15.** Квазілінійні рівняння в частинних похідних першого порядку.

**Практичне заняття 16.** Лінійні диференціальні задачі. Побудова розв’язку ЛДЗ з однорідним рівнянням. Побудова функції Гріна загальної ЛДЗ і розщепленої крайової задачі.

**Практичне заняття 17.** Матриця Гріна системи лінійних диференціальних рівнянь. Функція Коші задачі Коші. Задача Штурма − Ліувіля.

**Питання, винесені на самостійну роботу**

1. Матрична функція Гріна [1, § 6.3], [4, § 5.2].
2. Функція Коші [1, § 4.2], [4, § 6.1], [5, § 2.4].

**Контрольні запитання**

1. Загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння в частинних похідних першого порядку.
2. Теорема Фредгольма.
3. Теорема Гільберта–Шмідта.
4. Типи лінійних диференціальних задач задач.
5. Побудова функції Гріна ЛДЗ для рівняння другого порядку у випадку нерозщеплених і розщеплених крайових умов.
6. Спектральні крайові задачі. Задача Штурма – Ліувіля та її властивості.

**ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ НА ЕКЗАМЕН**

1. Загальний розв’язок, загальний інтеграл, інтеграли диференціального рівняння. Особливі точки, особливий розв’язок.

2. Лема Гронуола – Белмана.

3. Теореми про існування розв’язку на заданому відрізку задачі Коші в інтегральній формі.

4. Локальна теорема існування розв’язку задачі Коші.

5. Теорема про продовжуваність розв’язку задачі Коші і наслідок про будову максимальної області існування розв’язку.

6. Теорема про неперервну залежність розв’язку задачі Коші в інтегральній формі від початкової умови і наслідки з неї (умови єдиності та існування і єдиності).

7. Метод виключення змінних для систем диференціальних рівнянь.

8. Пониження порядку системи методом інтегровних комбінацій.

9. Функції від операторів і матриць. Вираз функції від матриці через її власні і приєднані вектори і функцію від жорданової клітини.

10. Вираз функції від жорданової клітини. Вираз добутку матриці на показникову функцію від жорданової клітини.

11. Властивості розв’язків матричного диференціального рівняння .

12. Слід матриці. Два асимптотичні співвідношення для визначників. Формула Остроградського – Ліувіля для матричного диференціального рівняння .

13. Матричне диференціальне рівняння  зі сталою матрицею .

14. Матричне диференціальне рівняння  Варіювання сталих. Формула Коші.

15. Фундаментальна система розв’язків і фундаментальна матриця однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Вронскіан набору розв’язків і формула Остроградського–Ліувіля для нього

16. Загальний розв’язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Вираз фундаментальної матриці системи зі сталими коефіцієнтами.

17. Загальний розв’язок абстрактного лінійного неоднорідного рівняння. Загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Формула Коші частинного розв’язку.

18. Частинний розв’язок у комплексній формі системи, вільний член якої – квазімногочлен. Формулювання. Доведення для нерезонансного випадку.

19. Частинний розв’язок у комплексній формі системи, вільний член якої – квазімногочлен. Формулювання. Доведення для резонансного випадку.

20. Частинний розв’язок у дійсній формі системи, вільний член якої – дійсний квазімногочлен.

21. Зведення однорідного лінійного диференціального рівняння -го порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Існування і єдиність розв’язку задачі Коші. Вронскіан, формула Остроградського – Ліувіля. Загальний розв’язок.

22. Фундаментальна система розв’язків у комплексній формі лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

23. Фундаментальна система розв’язків у дійсній формі лінійного однорідного диференціального рівняння з дійсними сталими коефіцієнтами.

24. Загальний розв’язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння. Варіювання сталих.

25. Частинний розв’язок у дійсній формі неоднорідного лінійного диференціального рівняння з дійсними сталими коефіцієнтами, вільний член якого – дійсний квазімногочлен.

26. Поняття стійкості та асимптотичної стійкості. Зведення дослідження стійкості довільного розв’язку до такої ж задачі для тривіального розв’язку, зокрема в лінійному випадку. Необхідні і достатні умови стійкості та асимптотичної стійкості векторного рівняння  в термінах фундаментальної матриці.

27. Теорема про стійкість векторного рівняння 

28. Стійкість однорідного лінійного рівняння -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

29. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадки ненульових дійсних власних значень.

30. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадки комплексних власних значень.

31. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадок виродженої матриці коефіцієнтів.

32. Метод функцій Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість.

33. Метод функцій Ляпунова. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Приклад.

34. Вираз розв’язку квазілінійного рівняння в частинних похідних першого порядку через інтеграл системи звичайних диференціальних рівнянь.

35. Загальний розв’язок лінійного і квазілінійного рівнянь у частинних похідних першого порядку.

36. Ітераційний метод розв’язування лінійних операторних рівнянь.

37. Компактні і скінченновимірні оператори. Компактність збіжної за нормрю границі послідовності компактних операторів. Лема про компактний оператор у гільбертовому просторі.

38. Рівняння з компактним оператором у гільбертовому просторі. Теорема Ріса. Теорема Фредгольма в абстрактній формі.

39. Ортогональні розклади в гільбертовому просторі. Теореми про задання лінійного обмеженого і компактного операторів.

40. Теорема Гільберта − Шмідта про рівномірну збіжність.

41. Оператори Гільберта − Шмідта.

42. Необхідна і достатня умова того, що лінійний оператор у гільбертовому просторі компактний і ермітів. Загальний вигляд такого оператора.

43. Рівняння з компактним ермітовим оператором у гільбертовому просторі.

44. Інтегральні оператори. Компактність оператора Фредгольма з квадратично інтегровним ядром. Теорема Фредгольма в 

45. Ітеровані ядра операторів Фредгольма і Вольтерра. Оцінка норми -го степеня оператора Вольтерра. Існування і єдиність розв’язку рівняння Вольтерра. Вираз розв’язку інтегрального рівняння через резольвенту.

46. Постановка лінійної диференціальної задачі (ЛДЗ) і зведення її до двох простіших задач. Умови існування і єдиності розв’язку ЛДЗ з однорідним рівнянням.

47. Функція Гріна ЛДЗ з однорідними додатковими умовами. Вираз розв’язку задачі через функцію Гріна.

48. Функція Гріна невиродженої крайової задачі другого порядку з розщепленими умовами. Явний вираз і єдиність розв’язку задачі.

49. Лема про вронскіан. Необхідна умова існування розв’язку крайової задачі



Приклад задачі, в якій ця умова порушується.

50. Поняття спектральної задачі. Задача Штурма – Ліувіля. Лема про диференціальний оператор задачі ШЛ (інтегрування частинами) і про скалярний добуток в  власних функцій задачі Властивості власних елементів.

51. Зв’язок між власними елементами задачі ШЛ і фредгольмового оператора. Існування ортонормованого базису з власних функцій задачі ШЛ.

52. Розклад функції Гріна невиродженої крайової задачі з розщепленими умовами по власних функціях задачі ШЛ. Приклад.

53. Необхідна і достатня умова існування розв’язку виродженої крайової задачі з розщепленими умовами. Вираз загального розв’язку.

55. Лема про достатню умову рівномірної абсолютної збіжності розкладу функції  по власних функціях оператора . Теорема Стеклова.

ЛІТЕРАТУРА

1. С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. *Диференціальні та інтегральні рівняння.* 2004.
2. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. *Дифференциальные уравнения.* 2006.
3. Л.Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* 1969.
4. І.І. Ляшко, О.К. Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда. *Диференціальні рівняння.* 1981.
5. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. *Диференціальні рівняння в задачах.* 2003.
6. А.Ф. Филиппов. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* 2000.