5_01_15

$(e^x+8)\,\mathrm{dy}=ye^x\,\mathrm{dx}-$ *уравнение с разделяющимися переменными*

$$\frac{\mathrm{dy}}{y}=\frac{e^x\,\mathrm{dx}}{e^x+8}$$

$$\int\frac{\mathrm{dy}}{y}=\int\frac{e^x\,\mathrm{dx}}{e^x+8}$$

$$\ln y=\ln(e^x+8)+\ln C$$

$$y=C(e^x+8)$$

$$\frac{y}{e^x+8}=C$$

5 _ 02 _ 15

$y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$ – *уравнение, приводящиеся к однородному дифференциальному уравнению*

$y' = \dfrac{1 + 2(y/x) - (y/x)^2}{2 - 2(y/x)}$ – *однородное дифференциальное уравнение*

$y/x = u \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{1 + 2u - u^2}{2 - 2u}$

$\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} x = \dfrac{1 + u^2}{2 - 2u}$ – *уравнение с разделяющимися переменными*

$\dfrac{(2 - 2u)}{1 + u^2} \mathrm{du} = \dfrac{\mathrm{dx}}{x}$

$2 \operatorname{arctg} u - \ln(1 + u^2) = \ln x + C$

$2 \operatorname{arctg}(y/x) - \ln(x^2 + y^2) + \ln x = C$

5_03_15

$$y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$$

$$\begin{cases} x = v+1 \\ y = u+1 \end{cases}$$

$$u' = \frac{v+1+3u+3-4}{5v+5-u-1-4}$$

$$u' = \frac{1+3u/v}{5-u/v} - \textit{однородное дифференциальное уравнение}$$

$$u/v = z \Rightarrow u' = z + z'v$$

$$z + z'v = \frac{1+3z}{5-z}$$

$$z'v = \frac{1+3z-5z+z^2}{5-z}$$

$$\frac{dz}{dv}v = \frac{1-2z+z^2}{5-z} - \textit{уравнение с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{(5-z)\,dz}{(1-z)^2} = \frac{dv}{v} \Rightarrow \int\frac{(5-z)\,dz}{(1-z)^2} = \int\frac{dv}{v} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{4}{1-z} - \ln(z-1) = \ln v + C$$

$$\frac{4}{1-u/v} - \ln\left(\frac{u}{v}-1\right) - \ln v = C$$

$$\frac{4v}{v-u} - \ln(u-v) = C$$

$$\textit{ответ}: \frac{4(x-1)}{x-y} - \ln(y-x) = C$$

(1)

$$\int\frac{(5-z)\,dz}{(1-z)^2} = \int\frac{1-z+4}{(1-z)^2}dz = \int\left(\frac{1}{1-z} + \frac{4}{(1-z)^2}\right)dz = \int\left(\frac{-1}{z-1} + \frac{4}{(1-z)^2}\right)dz =$$

$$= -\ln\left(z-1\right) + \frac{-4}{1-z}\cdot\left(-1\right) + C = \frac{4}{1-z} - \ln\left(z-1\right) + C$$

5_04_15

$y'+\frac{2}{x}y=x^3$ – *уравнение Бернулли*

$y(1)=-5/6$

$y=uv\Rightarrow y'=u'v+uv'$

$u'v+uv'+\frac{2uv}{x}=x^3$

$u'v+u(v'+\frac{2v}{x})=x^3$

$\begin{cases} v'+2v/x=0 \\ u'v=x^3 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} v=x^{-2} \\ u'v=x^3 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} v=x^{-2} \\ u=x^6/6+C \end{cases}$

$\begin{cases} y=uv=x^4/6+C\cdot x^{-2}/6 \\ y(1)=-5/6 \end{cases} \Rightarrow C=-6$

$y=x^4/6-\frac{1}{x^2}$ – *решение задачи Коши*

(1) $\frac{dv}{\mathrm{dx}}=\frac{-2v}{x}\Rightarrow\frac{\mathrm{dv}}{v}=\frac{-2\,\mathrm{dx}}{x}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{dv}}{v}=\int\frac{-2\,\mathrm{dx}}{x}\Rightarrow\ln v=-2\ln x\Rightarrow v=x^{-2}$

(2) $u'x^{-2}=x^3\Rightarrow u'=x^5\Rightarrow u=x^6/6+C$

5_05_15

$$2y^2\,\mathrm{dx}+(x+e^{1/y})\,\mathrm{dy}=0,\ y|_{x=e}=1$$

$$2y^2\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}=-(x+e^{1/y})$$

$$2y^2x'_y=-(x+e^{1/y})$$

$$x=uv\Rightarrow x'_y=u'v+uv'$$

$$2y^2(u'v+uv')=-uv-e^{1/y}$$

$$2y^2u'v+2y^2uv'+uv=-e^{1/y}$$

$$v(2y^2u'+u)+2y^2uv'=-e^{1/y}$$

$$\begin{cases}2y^2u'=-u\\2y^2uv'=-e^{1/y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y^2\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}=-u\\2y^2uv'=-e^{1/y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{du}}{u}=\dfrac{\mathrm{dy}}{2y^2}\\2y^2uv'=-e^{1/y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\ln u=-1/2y\\2y^2uv'=-e^{1/y}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=e^{1/(2y)}\\2y^2e^{1/(2y)}v'=-e^{1/y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=e^{1/(2y)}\\v'=-\dfrac{e^{1/(2y)}}{2y^2}\end{cases}\overset{(1)}{\Rightarrow}\begin{cases}u=e^{1/(2y)}\\v=e^{1/(2y)}+C\end{cases}\Rightarrow x=uv=e^{1/y}+C\cdot e^{1/(2y)}$$

$$y|_{x=e}=1\Rightarrow C=0$$

$$x=e^{1/y}$$

$$(1)\int-\frac{e^{\frac{1}{2y}}}{2y^2}\,\mathrm{dy}=\begin{vmatrix}t=1/(2y)\\\mathrm{dt}=\dfrac{-1}{2y^2}\mathrm{dy}\end{vmatrix}=\int e^t\,\mathrm{dt}=e^t+C=e^{\frac{1}{2y}}+C$$

5_06_15

$$y' - y = 2xy^2,\ y(0) = 1/2$$

$$-\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \frac{1}{y} = -2x$$

$$z = 1/y \Rightarrow \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

$$z' + z = -2x$$

$$z = uv$$

$$u'v + uv' + uv = -2x$$

$$v(u' + u) + uv' = -2x$$

$$\begin{cases} u' = -u \\ uv' = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{\mathrm{dx}} = -u \\ uv' = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{u} = -\mathrm{dx} \\ uv' = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = e^{-x} \\ v' = -2xe^{x} \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} u = e^{-x} \\ v = 2e^{x}(1-x) + C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = uv = 2(1-x) + Ce^{-x} = 1/y$$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{2(1-x) + Ce^{-x}}$$

$$y(0) = 1/2 \Rightarrow C = 0$$

$$y = \frac{1}{2(1-x)}$$

$$(1)\int -2xe^{x}\,\mathrm{dx} = -2\int x\cdot e^{x}\,\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{l} dv = e^{x}\,\mathrm{dx} \\ v = e^{x} \\ u = x \\ du = \mathrm{dx} \end{array} \right| = -2\left(x\cdot e^{x} - \int e^{x}\,\mathrm{dx} \right) =$$

$$= -2e^{x}(x-1) + C = 2e^{x}(1-x) + C$$

5 _ 07 _15

$$\frac{y}{x^2}\,\mathrm{dx} - \frac{xy+1}{x}\,\mathrm{dy} = 0$$

$$P(x,y) = y/x^2 \Rightarrow P_y' = 1/x^2$$

$$Q(x,y) = -\frac{xy+1}{x} \Rightarrow Q_x' = \frac{1}{x^2}$$

$P_y' = Q_x' \Rightarrow$ *это уравнение полных дифференциалов*

$$F(x,y) = \int P\,\mathrm{dx} + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$F_y' = \frac{-1}{x} + \varphi'(y) = Q(x,y) \Rightarrow \varphi' = -y \Rightarrow \varphi = -y^2/2 + C$$

$$-\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} = C$$

5_10_15

$xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0 -$ *дифференциальное уравнение высшего порядка, допускающее понижение степени*

$y'' = p$

$xp' - p + \frac{1}{x} = 0$

$p = uv$

$xu'v + xuv' - uv + 1/x = 0$

$v(xu' - u) + xuv' + 1/x = 0$

$$\begin{cases} xu' = u \\ xuv' + 1/x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ x^2 v' + 1/x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v' = -1/x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \frac{1}{2x^2} + C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = uv = \frac{1}{2x} + Cx = y''$$

$$y' = \int y''\mathrm{dx} = \frac{\ln x}{2} + \frac{Cx^2}{2} + C_1$$

$$y = \int y'\mathrm{dx} = \frac{x\ln x - x}{2} + \frac{Cx^3}{6} + C_1 x + C_2$$

5_11_15

$y''y^3+25=0,\ y(2)=-5,\ y'(2)=-1$

это дифференциальное уравнение высшего порядка, допускающее понижение степени

$$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}$$

$$p\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}y^3=-25$$

$$p\,\mathrm{dp}=-\frac{25\,\mathrm{dy}}{y^3}$$

$$p^2=25/y^2+C$$

$$\begin{cases}(y')^2=25/y^2+C\\ y(2)=-5\\ y'(2)=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C=0\\ y'=5/y\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=5/y \Rightarrow y\,\mathrm{dy}=5\,\mathrm{dx} \Rightarrow \begin{cases}y^2/2=5x+C\\ y(2)=-5\end{cases} \Rightarrow C=5/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\sqrt{10x+5}$$

5_12_15

$y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1 -$ *линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

характеристическое уравнение

$k^3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = 1, k = -1$

общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$y_{общ} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$

частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$y_{час} = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

$y'_{час} = 3ax^2 + 2bx + c$

$y''_{час} = 6ax + 2b$

$y'''_{час} = 6a$

$y'''_{час} - y'_{час} = 3x^2 - 2x + 1$

$6a - 3ax^2 - 2bx - c - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$-3(1+a)x^2 + (2-2b)x + 6a - c - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6a = 1 + c \\ 1 + a = 0 \\ 2 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\cdot(-1) = 1 + c \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -7 \end{cases}$$

$y_{час} = x(-x^2 + x - 7)$

$y = y_{общ} + y_{час} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} - x^3 + x^2 - 7x$

5_14_15

$y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

характеристическое уравнение

$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$

общее решение

$y_{общ} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

частное решение

$y_{час} = A\cos 5x + B\sin 5x$

$y'_{час} = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$

$y''_{час} = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$

$y''_{час} + y_{час} = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + A\cos 5x + B\sin 5x - 2\cos 5x - 3\sin 5x = 0$

$(-25A + A - 2)\cos 5x + (-25B + B - 3)\sin 5x = 0$

$$-(24A + 2)\cos 5x - 3(1 + 8B)\sin 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 + 24A = 0 \\ 1 + 8B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/12 \\ B = -1/8 \end{cases}$$

$$y_{час} = \frac{-\cos 5x}{12} - \frac{\sin 5x}{8}$$

$$y = y_{общ} + y_{час} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 5x}{12} - \frac{\sin 5x}{8}$$