Типи задач на екзамен із диференціальних рівнянь

1. Рівняння в повних диференціалах.

2. Рівняння Бернуллі.

3. Рівняння Ріккаті.

4. Неявні рівняння.

5. Пониження порядку диференціального рівняння.

6. Неоднорідне лінійне рівняння вищого за перший порядку зі сталими коефіцієнтами (у складі ЛДЗ).

7. Неоднорідне рівняння Ейлера: а) підбір частинного розв'язку; б) варіювання сталих.

8. Застосування формули Остроградського – Ліувіля.

9. Неоднорідна лінійна система другого порядку: а) підбір частинного розв'язку; б) варіювання сталих.

10. Однорідна лінійна система третього порядку: а) одне дійсне власне значення і два комплексні; б) трикратне власне значення, якому відповідає один власний вектор;
в) трикратне власне значення, якому відповідають два власні вектори.

11. Метод степеневих рядів: а) розв'язок у вигляді ряду Тейлора; б) розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду.

12. Метод малого параметра.

13. Застосування операційного числення.

14. Дослідження стійкості за першим наближенням.

15. Застосування критерію Льєнара – Шипара.

16. Дослідження траєкторій і точок спокою однорідної лінійної системи другого порядку.

17. Рівняння в частинних похідних: а) загальний розв'язок; б) розв'язок задачі Коші.

18. Інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром.

19. Інтегральне рівняння типу згортки.

20. Лінійна диференціальна задача (без використання функції Гріна).

21. Побудова функції Гріна: а) ЛДЗ з рівнянням другого порядку і довільними додатковими умовами; б) задачі Коші (функція Коші); в) системи рівнянь із довільними додатковими умовами (матриця Гріна).

22. Лінійна крайова задача другого порядку з розщепленими умовами (функцію Гріна будувати не обов'язково).

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ НА ЕКЗАМЕН З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. Загальний розв'язок, загальний інтеграл, інтеграли диференціального рівняння. Особливі точки, особливий розв'язок.
2. Лема Гронуола – Белмана.
3. Теореми про існування розв'язку на заданому відрізку задачі Коші в інтегральній формі.
4. Локальна теорема існування розв'язку задачі Коші.
5. Теорема про неперервну залежність розв'язку задачі Коші в інтегральній формі від початкової умови і наслідки з неї (умови єдиності та існування і єдиності).
6. Метод виключення змінних для систем диференціальних рівнянь.
7. Метод інтегровних комбінацій.
8. Функції від операторів і матриць. Вираз функції від матриці через її власні і приєднані вектори і функцію від жорданової клітини.
9. Теорема Гамільтона – Келі.
10. Вираз функції від жорданової клітини. Вираз добутку матриці на показникову функцію від жорданової клітини.
11. Слід оператора і матриці. Два асимптотичні співвідношення для детермінантів.
12. Властивості розв'язків матричного диференціального рівняння $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$.
13. Формула Остроградського – Ліувіля для матричного диференціального рівняння $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$.
14. Матричне диференціальне рівняння $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ зі сталою матрицею A.
15. Матричне диференціальне рівняння $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t)$. Варіювання сталих. Формула Коші.
16. Фундаментальна система розв'язків і фундаментальна матриця однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Вронскіан набору розв'язків і формула Остроградського–Ліувіля для нього
17. Загальний розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Вираз фундаментальної матриці системи зі сталими коефіцієнтами.
18. Загальний розв'язок абстрактного лінійного неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Формула Коші частинного розв'язку.
19. Частинний розв'язок у комплексній формі системи, вільний член якої – квазімногочлен. Формулювання. Доведення для нерезонансного випадку.
20. Частинний розв'язок у комплексній формі системи, вільний член якої – квазімногочлен. Формулювання. Доведення для резонансного випадку.
21. Частинний розв'язок у дійсній формі системи, вільний член якої – дійсний квазімногочлен.
22. Зведення однорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Вронскіан, формула Остроградського – Ліувіля. Загальний розв'язок.
23. Характеристичне рівняння. Частинні розв'язки однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, відповідаючі l-кратному кореневі характеристичного рівняння.
24. Фундаментальна система розв'язків у комплексній формі лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.
25. Фундаментальна система розв'язків у дійсній формі лінійного однорідного диференціального рівняння з дійсними сталими коефіцієнтами.
26. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння. Варіювання сталих.
27. Частинний розв'язок у дійсній формі неоднорідного лінійного диференціального рівняння з дійсними сталими коефіцієнтами, вільний член якого – дійсний квазімногочлен.
28. Поняття стійкості і асимптотичної стійкості. Зведення дослідження стійкості довільного розв'язку до такої ж задачі для тривіального розв'язку, зокрема у випадку лінійної системи диференціальних рівнянь. Необхідні і достатні умови стійкості та асимптотичної стійкості векторного рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ в термінах матриціанта.
29. Теорема про стійкість тривіального розв'язку векторного рівняння $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

30. Стійкість тривіального розв'язку однорідного лінійного рівняння n-го порядку. Необхідна умова від'ємності дійсних частин усіх коренів многочлена. Критерій Льєнара – Шипара.

31. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадки ненульових дійсних власних значень.

32. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадки комплексних власних значень.

33. Класифікація точок спокою і дослідження траєкторій лінійної однорідної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Випадок виродженої матриці коефіцієнтів.

34. Метод функцій Ляпунова. Формулювання теорем Ляпунова. Лема про продовження розв'язку і наслідок із неї. Лема про неперервну функцію і наслідок із неї.

35. Метод функцій Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість.

36. Метод функцій Ляпунова. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість.

37. Вираз розв'язку квазілінійного рівняння в частинних похідних першого порядку через інтеграл системи звичайних диференціальних рівнянь.

38. Загальний розв'язок лінійного і квазілінійного рівнянь у частинних похідних першого порядку.

39. Лінійні операторні, зокрема інтегральні рівняння. Ітераційний метод розв'язування.

40. Ітеровані ядра операторів Фредгольма і Вольтерра. Оцінка норми n-го степеня оператора Вольтерра. Існування і єдиність розв'язку рівняння Вольтерра. Вираз розв'язку інтегрального рівняння через резольвенту.

41. Поняття ортогонального доповнення, проекції на підпростір і компактного оператора. Теорема Ріса. Теорема Фредгольма в абстрактній формі.

42. Теорема Фредгольма в $L_2[a,b]$.

43. Властивості компактного ермітового оператора A в гільбертовому просторі. Існування в ортогональному доповненні до $\ker A$ ортонормованого базису з власних функцій оператора. Розклад ядра по власних функціях і рівність Парсеваля – Ляпунова для нього.

44. Необхідна і достатня умова існування розв'язку рівняння $x = f + Ax$, де A – компактний ермітів оператор, і розклад розв'язку по власних функціях оператора.

45. Теорема Гільберта – Шмідта.

46. Постановка лінійної диференціальної задачі (ЛДЗ) і зведення її до двох простіших задач. Умови існування і єдиності розв'язку ЛДЗ з однорідним рівнянням.

47. Функція Гріна ЛДЗ з однорідними додатковими умовами. Вираз розв'язку задачі через функцію Гріна.

48. Функція Гріна загальної крайової задачі з квадратною невиродженою матрицею Γ.

49. Функція Гріна невиродженої крайової задачі другого порядку з однорідними розщепленими умовами і невиродженою матрицею Γ.

50. Лема про вронскіан. Необхідна умова існування розв'язку крайової задачі

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f,$$
$$\alpha_i y(x_i) + \beta_i y'(x_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Приклад задачі, в якій ця умова порушується.

51. Поняття спектральної задачі. Задача Штурма – Ліувіля. Лема про диференціальний оператор задачі ШЛ (інтегрування частинами). Леми: про скалярний добуток в $L_2([a,b],\rho)$ власних функцій задачі, про існування дійсної власної функції, про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння задачі ШЛ.

52. Задача Штурма – Ліувіля (постановка). Властивості власних елементів і наслідок із них (про дійсну власну функцію).

53. Зв'язок між власними елементами задачі ШЛ і фредгольмового оператора. Існування в N_ρ ортонормованого базису з власних векторів задачі ШЛ.

54. Розклад функції Гріна невиродженої крайової задачі з розщепленими умовами по власних функціях задачі ШЛ. Приклад.

55. Необхідна і достатня умова існування розв'язку виродженої крайової задачі з розщепленими умовами. Вираз загального розв'язку.

56. Теорема Стеклова.