

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 4:

«Теория представлений»

Основные понятия, законы и формулы

Пусть физическая величина изображается оператором $\hat{L}$, обладающим дискретным спектром собственных значений λ_n , т.е.

$$\hat{L}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x),$$

причем ψ_n – ортонормированные функции.

Если волновая функция состояния системы $\psi(x)$ не является собственной функцией оператора $\hat{L}$, тогда $\psi(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям оператора $\hat{L}$:

$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x),$$

где c_n – коэффициенты Фурье в разложении. Их можно найти по формуле:

$$c_n = (\psi_n(x), \psi(x)) = \int \psi_n^*(x) \psi(x) dx.$$

Между функцией $\psi(x)$ и коэффициентами Фурье c_n существует взаимно однозначное соответствие

$$\psi(x) \leftrightarrow c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

Совокупность коэффициентов Фурье c_n – волновая функция $\psi(x)$ в представлении оператора $\hat{L}$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Пусть оператор $\hat{A}$ задан так:

$$\hat{A}f(x) = \varphi(x),$$

причем $f(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$, $\varphi(x) = \sum_n b_n \psi_n(x)$, тогда определение оператора $\hat{A}$ имеет вид:

$$\sum_n c_n \hat{A} \psi_n(x) = \sum_n b_n \psi_n(x).$$

Умножим это равенство скалярно на $\psi_k(x)$, получим

$$\sum_n c_n (\psi_k(x), \hat{A} \psi_n(x)) = \sum_n b_n (\psi_k(x), \psi_n(x)) = \sum_n b_n (\psi_k(x), \psi_n(x)) = b_k,$$

Обозначим интеграл $(\psi_k(x), \hat{A} \psi_n(x)) = \int \psi_k^*(x) \hat{A} \psi_n(x) dx = A_{kn}$, где совокупность чисел A_{kn} представляется в виде матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

которая является оператором $\hat{A}$ в представлении оператора $\hat{L}$.

В случае непрерывного спектра собственных значений λ

$$\hat{L}\psi(x, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda)$$

волновая функция состояния системы $\psi(x)$ разлагается в интеграл Фурье

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) \psi(x, \mu) d\lambda,$$

где совокупность интегральных коэффициентов Фурье

$$c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x, \lambda) d\lambda$$

является волновой функцией состояния системы в представлении оператора $\hat{L}$.

Пусть оператор $\hat{A}$ задан так:

$$\hat{A}f(x) = \varphi(x),$$

причем $f(x) = \int c(\lambda) \psi(x, \lambda) d\lambda$, $\varphi(x) = \int b(\lambda) \psi(x, \lambda) d\lambda$, тогда определение оператора $\hat{A}$ имеет вид:

$$\int c(\lambda) \hat{A} \psi(x, \lambda) d\lambda = \int b(\lambda) \psi(x, \lambda) d\lambda.$$

Умножим это равенство скалярно на $\psi(x, \lambda')$, получим

$$\int c(\lambda) d\lambda \int \psi(x, \lambda') \hat{A} \psi(x, \lambda) dx = \int b(\lambda) d\lambda \int \psi(x, \lambda') \psi(x, \lambda) dx = b(\lambda').$$

Обозначим интеграл $\int \psi(x, \lambda') \hat{A} \psi(x, \lambda) dx = A(\lambda - \lambda')$, где $A(\lambda - \lambda')$ – функция от λ и λ' .

Оператор $\hat{A}$ в представлении оператора $\hat{L}$ имеет вид интегрального оператора с ядром $A(\lambda - \lambda')$.