КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 4:

«Теория представлений»

Задачи

1. Оператор координаты в координатном представлении равен $\hat{x} = x$. Найдите вид оператора координаты $\hat{x}$ в импульсном представлении.

Оператор импульса в координатном представлении $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$. Найдем собственную функцию этого оператора

$$-i\hbar\frac{\partial\psi(x,p)}{\partial x} = p\psi(x,p).$$

Собственной функцией оператора импульса является пространственная часть волны де Бройля:

$$\psi(x,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px},$$

нормированная на δ-функцию:

$$(\psi(x,p);\psi(x,p')) = \delta(p-p').$$

Определение оператора координаты в импульсном представлении:

$$\hat{x}c(p) = b(p).$$

Оператор $\hat{x}$ в импульсном представлении имеет вид интегрального оператора с ядром $x(p',p)$:

$$x(p',p) = \int\psi^*(x,p')\hat{x}\psi(x,p)dx = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-\frac{i}{\hbar}p'x}xe^{\frac{i}{\hbar}px}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int xe^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}dx.$$

По определению

$$\int c(p)x(p',p)dp = b(p'),$$

$$\int c(p)\left\{\frac{1}{2\pi\hbar}\int xe^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}dx\right\}dp = b(p'),$$

$$\int c(p)\frac{(-i\hbar)}{2\pi\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}dx\right\}dp = b(p').$$

Учтем, что δ-функция выражается через интеграл:

$$\delta(p'-p) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i(p'-p)x}dx,$$

тогда:

$$-i\hbar\int c(p)\frac{\partial}{\partial x}\delta(p'-p)dp = b(p'),$$

проинтегрируем левую часть равенства по частям, учитывая, что значение δ-функции на $\pm\infty$ равно нулю:

$$-i\hbar\int c(p)\frac{\partial}{\partial x}\delta(p'-p)dp = -i\hbar c(p)\delta(p'-p)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\hbar\int\frac{\partial c(p)}{\partial x}\delta(p'-p)dp,$$

$$-i\hbar\int\frac{\partial c(p)}{\partial x}\delta(p'-p)dp = -i\hbar\frac{\partial c(p')}{\partial x} = b(p').$$

Окончательно будем иметь оператор координаты в импульсном представлении

$$\hat{x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Ответ: $\hat{x} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$.

2. Матрица оператора $\hat{A}$ имеет диагональный вид. Пусть оператор $\hat{B}$ коммутирует с оператором $\hat{A}$ ($\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = 0$). Может ли представление оператора $\hat{A}$ являться собственным для оператора $\hat{B}$?

Поскольку матрица оператора $\hat{A}$ имеет диагональный вид, то оператор $\hat{A}$ записан в собственном представлении. Поскольку операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют, то они обладают общей полной системой собственных функций, эти функции составляют базис общего собственного представления операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Ответ: да.

3. Даны два некоммутирующих оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Найдите представление, в котором оба они имеют диагональный вид?

Так как операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют, то системы их собственных функций не совпадают. Если матрица оператора $\hat{A}$ имеет диагональный вид в собственном базисе, то этот базис не является собственным для оператора $\hat{B}$, тогда в этом представлении матрица $\hat{B}$ не диагональная. То же самое справедливо для $\hat{B}$ и $\hat{A}$. Следовательно, представления, в котором и $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют одновременно диагональный вид, не существует.

Ответ: нет.

4. Функция Ψ является собственной функцией оператора $\hat{L}$. Какой вид имеет эта функция в представлении оператора $\hat{L}$?

Пусть оператор $\hat{L}$ имеет дискретный спектр собственных значений. Волновая функция в представлении оператора $\hat{L}$ имеет вид вектор-столбца с компонентами

$$\Psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad c_n = (\psi_n; \Psi),$$

где ψ_n – собственные функции оператора $\hat{L}$. Если Ψ – собственная функция оператора $\hat{L}$, то она – одна из ψ_n, т.е. $\Psi = \psi_{n'}$. Компоненты вектор-столбца:

$$c_n = (\psi_n; \Psi) = (\psi_n; \psi_{n'}) = \delta_{n,n'},$$

тогда

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

где единица занимает строку с номером n'.

Ответ: $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

5. По заданной волновой функции $\Psi(x,y,z)$ вычислите вероятности нахождения частицы в интервалах значений координаты z от z_1 до z_2 и импульса p_y от p_1 до p_2.

Вероятность частицы иметь координату z от z_1 до z_2

$$w=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp_y\int_{z_1}^{z_2}dz\left|\Psi(x,p_y,z)\right|^2,$$

где $\Psi(x,p_y,z)=\int\frac{\exp\left(-\frac{ip_y y}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\Psi(x,y,z)dy$ – функция состояния частицы в представлении оператора $\hat{p}_y$.

Ответ: $w=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp_y\int_{z_1}^{z_2}dz\left|\int\frac{\exp\left(-\frac{ip_y y}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\Psi(x,y,z)dy\right|^2$.

6. Запишите в импульсном представлении волновую функцию $\Psi(x,y,z)=A\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}\right)$.

Волновая функция в импульсном представлении имеет вид

$$\Psi(p_x,p_y,p_z)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_y y}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_z z}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\Psi(x,y,z)dz.$$

Подставим явный вид функции

$$\Psi(p_x,p_y,p_z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_y y}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}dy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_z z}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}A\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}\right)dz=$$

$$=A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_y y}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{y^2}{2a^2}\right)dy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_z z}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right)dz.$$

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты и найдем каждый интеграл в отдельности:

$$-\left(\frac{x^2}{2a^2}+\frac{ip_x x}{\hbar}\right)=-\frac{1}{2a^2}\left(x^2+2\frac{ia^2p_x}{\hbar}x+\left(\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)^2-\left(\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)^2\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2a^2}\left(x+\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{ap_x}{\hbar}\right)^2\right).$$

Тогда интеграл по x:

$$I(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{ip_x x}{\hbar}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2a^2}\left(x+\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)^2-\frac{a^2p_x^2}{\hbar^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{a^2p_x^2}{\hbar^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2a^2}\left(x+\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)^2\right)d\left(x+\frac{ia^2p_x}{\hbar}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{a^2p_x^2}{\hbar^2}\right)\sqrt{2a^2\pi}.$$

Тогда интеграл $I(x)=\frac{a}{\sqrt{\hbar}}\exp\left(-\frac{a^2p_x^2}{\hbar^2}\right)$, аналогично находятся интегралы по y и z. Волновая функция в импульсном представлении

$$\Psi(p_x,p_y,p_z)=\left(\frac{a}{\sqrt{\hbar}}\right)^3\exp\left(-\frac{a^2p_x^2}{\hbar^2}-\frac{a^2p_y^2}{\hbar^2}-\frac{a^2p_z^2}{\hbar^2}\right).$$

Ответ: $\Psi(p_x,p_y,p_z)=\frac{a^3}{\sqrt{\hbar^3}}\exp\left(-\frac{a^2\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)}{\hbar^2}\right)$.

7. Выразите оператор трансляции $\hat{T}_{\vec{a}}$ параллельного переноса на конечное расстояние $\vec{a}$ через оператор импульса.

Согласно определению оператора трансляции $\hat{T}_{\vec{a}}$

$$\hat{T}_{\vec{a}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}+\vec{a}).$$

Разложим функцию $\psi(\vec{r}+\vec{a})$ в ряд Тейлора по $\vec{a}$

$$\psi(\vec{r}+\vec{a}) = \psi(\vec{r}) + \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r})}{\partial\vec{r}^{\,2}}\cdot\vec{a}^{\,2} + \ldots,$$

где $\frac{\partial}{\partial\vec{r}} = \vec{\nabla}$ – оператор набла. Оператор импульса может быть выражен через него:

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla},$$

тогда

$$\psi(\vec{r}+\vec{a}) = \left[1 + \frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}\right)^2 + \ldots\right]\psi(\vec{r}),$$

где множитель в квадратных скобках и есть оператор трансляции

$$\hat{T}_{\vec{a}} = 1 + \frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}\right)^2 + \ldots = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}}.$$

Ответ: $\hat{T}_{\vec{a}} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}}$.