

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 2:

«Понятие вероятности в квантовой механике.

Среднее значение физической величины»

Задачи

1. Найдите возможные собственные значения оператора

$\hat{L}_z$ и их вероятности для частицы, находящейся в состоянии

а) $\Psi(\varphi) = A \sin^3 \varphi$; б) $\Psi(\varphi) = A(2 - \cos 4\varphi)$.

а) Собственные функции оператора $\hat{L}_z$

$$\Psi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Выразим функцию состояния через экспоненты.

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

тогда

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) &= A \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^3 = -\frac{A}{8i} (e^{3i\varphi} - 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} - e^{3i\varphi}) = \\ &= -\frac{A\sqrt{2\pi}}{8i} \left(\frac{e^{3i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - 3\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + 3\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{3i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \\ &= \left(-\frac{A\sqrt{2\pi}}{8i} \frac{e^{3i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i} \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i} \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{A\sqrt{2\pi}}{8i} \frac{e^{3i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \\ &= \left(-\frac{A\sqrt{2\pi}}{8i} \Psi_3(\varphi) + \frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i} \Psi_1(\varphi) - \frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i} \Psi_{-1}(\varphi) + \frac{A\sqrt{2\pi}}{8i} \Psi_{-3}(\varphi) \right). \end{aligned}$$

Разложение функции состояния по собственным функциям оператора $\hat{L}_z$

$$\Psi(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \Psi_m(\varphi)$$

содержит коэффициенты разложения c_m , такие, что $w_m = |c_m|^2$ – вероятность системы находиться в состоянии с магнитным квантовым числом m . Тогда из разложения функции получаем коэффициенты:

$$c_3 = -\frac{A\sqrt{2\pi}}{8i}, \quad c_1 = \frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i}, \quad c_{-1} = -\frac{3A\sqrt{2\pi}}{8i}, \quad c_{-3} = \frac{A\sqrt{2\pi}}{8i}$$

и вероятности:

$$w_3 = \frac{|A|^2 \pi}{32}, \quad w_1 = \frac{9|A|^2 \pi}{32}, \quad w_{-1} = \frac{9|A|^2 \pi}{32}, \quad w_{-3} = \frac{|A|^2 \pi}{32},$$

но поскольку сумма вероятностей должна быть равна 1, то

$$1 = \frac{|A|^2 \pi}{32} + \frac{9|A|^2 \pi}{32} + \frac{9|A|^2 \pi}{32} + \frac{|A|^2 \pi}{32} = \frac{10|A|^2 \pi}{16},$$

откуда

$$|A|^2 = \frac{16}{10\pi}, \quad \text{а } A = \frac{4}{\sqrt{10\pi}},$$

тогда

$$w_3 = \frac{16\pi}{32 \cdot 10\pi} = \frac{1}{20}, \quad w_1 = \frac{9}{20}, \quad w_{-1} = \frac{9}{20}, \quad w_{-3} = \frac{9}{20}.$$

Итак, частица может находиться в состояниях с квантовыми числами $m = \pm 1; \pm 3$, то есть проекция момента импульса может иметь значения с соответствующими вероятностями:

L_z	$-$	$-\hbar$	$\hbar$	$3\hbar$
w	$0,05$	$0,45$	$0,45$	$0,05$

б) Аналогично:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

тогда

$$\Psi(\varphi) = A \left(1 - \frac{e^{i4\varphi} + e^{-i4\varphi}}{2} \right)^3 = A\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{i4\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-i4\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \right) =$$

$$= \left(A\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - A\sqrt{2\pi} \frac{e^{i4\varphi}}{\sqrt{2\pi}} + A\sqrt{2\pi} \frac{e^{-i4\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \right) =$$

$$= (A\sqrt{2\pi}\psi_0(\varphi) - A\sqrt{2\pi}\psi_4(\varphi) + A\sqrt{2\pi}\psi_{-4}(\varphi)).$$

коэффициенты:

$$c_0 = 2A\sqrt{2\pi}, \quad c_4 = A\sqrt{2\pi}, \quad c_{-4} = -A\sqrt{2\pi}$$

и вероятности:

$$w_0 = 4|A|^2\pi, \quad w_4 = |A|^2\pi, \quad w_{-4} = |A|^2\pi,$$

но поскольку сумма вероятностей должна быть равна 1, то

$$1 = 4|A|^2\pi + |A|^2\pi + |A|^2\pi = 6|A|^2\pi,$$

откуда

$$|A|^2 = \frac{1}{6\pi}, \text{ а } A = \frac{1}{\sqrt{6\pi}},$$

тогда

$$w_0 = \frac{4\pi}{6\pi} = \frac{2}{3}, \quad w_4 = \frac{1}{6}, \quad w_{-4} = \frac{1}{6}.$$

Итак, частица может находиться в состояниях с квантовыми числами $m=0; \pm 4$, то есть проекция момента импульса может иметь значения с соответствующими вероятностями:

L_z	0	$-4\hbar$	$4\hbar$
w	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ответ: а) $L_z = \pm\hbar; \pm 3\hbar$; $w=0,05; 0,45$;

б) $L_z = 0; \pm 4\hbar$; $w = \frac{2}{3}; \frac{1}{6}$.

2. В момент времени $t=0$ частица описывается функцией

$$\psi(x,0) = Ae^{-a^2x^2 + ik_0x},$$

где a и k_0 – постоянные. Пронормируйте функцию и найдите область локализации частицы и плотность тока.

Из условия нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-a^2x^2 - ik_0x} A e^{-a^2x^2 + ik_0x} dx =$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a^2x^2} dx = |A|^2 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$A = \sqrt{a\sqrt{\frac{2}{\pi}}}.$$

Чтобы найти область локализации, найдем плотность вероятности

$$\rho(x) = |\psi(x,0)|^2 = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2a^2x^2}.$$

Эта функция имеет максимум в точке $x_0=0$ и быстро убывает с ростом $|x|$, следовательно, частица локализована в начале координат. Ширина пакета, заданного такой функцией, порядка $\frac{1}{a\sqrt{2}}$.

Плотность тока вероятности

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{a\hbar k_0}{m\sqrt{\pi}} e^{-2a^2x^2} = \frac{\hbar k_0}{m} \rho.$$

Конечное выражение для тока совпадает с классическим. Множитель ρ (аналог плотности заряда) зависит только от параметров вещественной части функции состояния, а множитель $\frac{\hbar k_0}{m}$ (аналог скорости частицы) – связан только с мнимой частью.

$$\text{Ответ: } x_0 = 0, \quad \psi(x) = \sqrt{a\sqrt{\frac{2}{\pi}}} e^{-a^2x^2 + ik_0x}, \quad j_x = \frac{a\hbar k_0}{m\sqrt{\pi}} e^{-2a^2x^2}.$$

3. Определите распределение вероятности различных значений импульса для основного состояния частицы, находящейся в «ящике» размерами $a \times b \times c$.

Волновая функция такой частицы в координатном представлении

$$\Psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}.$$

В импульсном представлении

$$\Psi(p_x, p_y, p_z) = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \frac{e^{-\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}}{\sqrt{\pi^3 \hbar^3 abc}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^3 \hbar^3 abc}} \int_0^a e^{-\frac{ip_x x}{\hbar}} \sin \frac{\pi x}{a} dx \int_0^b e^{-\frac{ip_y y}{\hbar}} \sin \frac{\pi y}{b} dy \int_0^c e^{-\frac{ip_z z}{\hbar}} \sin \frac{\pi z}{c} dz.$$

Интеграл

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \left| \begin{array}{l} U = \sin \beta x \quad dU = \beta \cos \beta x dx \\ dV = e^{-\alpha x} dx \quad V = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\sin \beta x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{-\alpha x} \cos \beta x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} U = \cos \beta x \quad dU = -\beta \sin \beta x dx \\ dV = e^{-\alpha x} dx \quad V = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\sin \beta x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{\cos \beta x}{\alpha} e^{-\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin \beta x}{\alpha} e^{-\alpha x} - \frac{\beta \cos \beta x}{\alpha^2} e^{-\alpha x} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx,$$

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = -\frac{\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x}$$

Распределение вероятности значений импульса

$$\rho(\vec{p}) = |\Psi(p_x, p_y, p_z)|^2 = \frac{(4\pi\hbar^3)^3 abc \cos^2 \frac{p_x a}{2\hbar} \cos^2 \frac{p_y b}{2\hbar} \cos^2 \frac{p_z c}{2\hbar}}{(p_x^2 a^2 - \pi^2 \hbar^2)(p_y^2 b^2 - \pi^2 \hbar^2)(p_z^2 c^2 - \pi^2 \hbar^2)}.$$

$$\text{Ответ: } \rho(\vec{p}) = \frac{(4\pi\hbar^3)^3 abc \cos^2 \frac{p_x a}{2\hbar} \cos^2 \frac{p_y b}{2\hbar} \cos^2 \frac{p_z c}{2\hbar}}{(p_x^2 a^2 - \pi^2 \hbar^2)(p_y^2 b^2 - \pi^2 \hbar^2)(p_z^2 c^2 - \pi^2 \hbar^2)}.$$

4. Найдите сумму $\sum_n x_n \delta_{nk}$.

Так как $\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases}$

то сумма $\sum_n x_n \delta_{nk} = x_k$.

Ответ: x_k .

5. Найдите вероятность того, что импульс электрона в основном состоянии атома водорода заключен в интервале $(p, p + dp)$.

Вероятность частицы иметь указанный импульс

$$dw = |\Psi(\vec{p})|^2 d\vec{p},$$

где $\Psi(\vec{p})$ – функция состояния в импульсном представлении.

Функция основного состояния электрона в атоме водорода в координатном представлении

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}},$$

где a – радиус первой боровской орбиты электрона.

Волновая функция в импульсном представлении может быть записана так

$$\Psi(\vec{p}) = \int \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \Psi(r) dV = \frac{1}{\pi^2 (2a\hbar)^{3/2}} \int e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} - \frac{r}{a}} dV.$$

Вычисление интеграла по бесконечному объему проведем в сферических координатах. Ось Oz направим вдоль вектора импульса,

$$\int e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar} - \frac{r}{a}} dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi e^{-i\frac{pr \cos \theta}{\hbar} - \frac{r}{a}} \sin \theta d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 e^{-i\frac{pr \cos \theta}{\hbar} - \frac{r}{a}} d \cos \theta = \frac{2\pi\hbar}{ip} \int_0^\infty \left[e^{-\left(\frac{1}{a} - i\frac{p}{\hbar}\right)r} - e^{-\left(\frac{1}{a} + i\frac{p}{\hbar}\right)r} \right] r dr =$$

$$= \frac{8\pi a^3 \hbar^4}{(a^2 p^2 + \hbar^2)^2}.$$

Волновая функция в импульсном представлении имеет вид

$$\Psi(\vec{p}) = \frac{1}{\pi} \frac{\hbar(2a\hbar)^{3/2}}{(a^2 p^2 + \hbar^2)^2}.$$

Квадрат волновой функции

$$|\Psi(\vec{p})|^2 = \frac{8a^3 \hbar^5}{\pi^2 (a^2 p^2 + \hbar^2)^4}.$$

Умножая на объем шарового слоя в импульсном пространстве $4\pi p^2 dp$, получим искомую вероятность

$$dw = \frac{32a^3 \hbar^5 p^2}{\pi^2 (a^2 p^2 + \hbar^2)^4} dp.$$

Ответ: $dw = \frac{32a^3 \hbar^5 p^2}{\pi^2 (a^2 p^2 + \hbar^2)^4} dp.$

6. Вычислите вероятности нахождения частицы в интервалах значений координаты z от z_1 до z_2 по заданной волновой функции

$$\Psi(x, y, z) = A \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2a^2}\right).$$

Вероятность частицы иметь координату

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{z_1}^{z_2} dz \left| A \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2a^2}\right) \right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{z_1}^{z_2} dz |A|^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right) =$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{a^2}\right) dy \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right) dz =$$

$$= |A|^2 a \sqrt{\pi} a \sqrt{\pi} a (\operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1)) = \pi |A|^2 a^3 (\operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1)),$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ — интеграл Пуассона, а функция

$$\operatorname{erf}(z) = \int_z^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \text{ — интеграл ошибок.}$$

Ответ: $w = \pi |A|^2 a^3 (\operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1)).$

7. Найдите среднее значение проекции момента импульса $\hat{L}_z$ и среднее значение квадрата проекции момента импульса $\hat{L}_z^2$ для частицы, находящейся в состоянии

а) $\Psi(\varphi) = A \sin^3 \varphi$; **б)** $\Psi(\varphi) = A(2 - \cos 4\varphi).$

а) Исходя из решения задачи 18, частица может находиться в состояниях с квантовыми числами $m = \pm 1; \pm 3$, то есть проекция момента импульса может иметь значения с соответствующими вероятностями:

L_z	$-3\hbar$	$-\hbar$	$\hbar$	$3\hbar$
w	0,05	0,45	0,45	0,05

Тогда среднее значение проекции момента L_z

$$\langle L_z \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m (L_z)_m,$$

$$\langle L_z \rangle = 0,05 \cdot (-3\hbar) + 0,45 \cdot (-\hbar) + 0,45 \cdot \hbar + 0,05 \cdot 3\hbar = 0,$$

а среднее значение квадрата проекции момента L_z^2

$$\langle L_z^2 \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m (L_z^2)_m,$$

$$\langle L_z^2 \rangle = 0,05 \cdot 9\hbar^2 + 0,45 \cdot \hbar^2 + 0,45 \cdot \hbar^2 + 0,05 \cdot 9\hbar^2 = 1,8\hbar^2.$$

Аналогично, частица может находиться в состояниях с квантовыми числами $m = 0; \pm 4$, то есть проекция момента импульса может иметь значения с соответствующими вероятностями:

L_z	0	$-4\hbar$	$4\hbar$
w	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда среднее значение проекции момента L_z

$$\langle L_z \rangle = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-4\hbar) + \frac{1}{6} \cdot 4\hbar = 0,$$

а среднее значение квадрата проекции момента L_z^2

$$\langle L_z^2 \rangle = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 16\hbar^2 + \frac{1}{6} \cdot 16\hbar^2 = \frac{16}{3} \hbar^2.$$

Ответ: а) $\langle L_z \rangle = 0$, $\langle L_z^2 \rangle = 1,8\hbar^2$; б) $\langle L_z \rangle = 0$, $\langle L_z^2 \rangle = \frac{16}{3}\hbar^2$.

8. Найдите среднее значение проекции момента импульса частицы, находящейся в состоянии $\Psi(\theta, \varphi) = A \sin \theta \cos \varphi$.

По определению среднего значения физической величины L^2 , которой соответствует оператор $\hat{L}^2$

$$\langle L^2 \rangle = (\Psi; \hat{L}^2 \Psi),$$

в сферических координатах оператор $\hat{L}^2$ имеет вид

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

тогда среднее значение

$$\langle L^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi^* \hat{L}^2 \Psi \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= -\hbar^2 |A|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \sin \theta \cos \varphi \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= -\hbar^2 |A|^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right] = \frac{8}{3} \hbar^2 |A|^2 \pi.$$

Пронормируем функцию Ψ

$$1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi^* \Psi \sin \theta d\theta d\varphi = |A|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= -|A|^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d \cos \theta = -|A|^2 \pi \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi = \frac{4}{3} |A|^2 \pi,$$

$$|A|^2 = \frac{3}{4\pi},$$

тогда

$$\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2.$$

Ответ: $\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$.

9. Найдите среднее значение координаты $\langle x \rangle$ и импульса

$\langle p_x \rangle$ частицы, находящейся в состоянии $\Psi(x) = A e^{ikx - \frac{x^2}{a^2}}$.

По определению среднего значения

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx = |A|^2 \int e^{-ikx - a^2 x^2} x e^{ikx - a^2 x^2} dx = |A|^2 \int x e^{-a^2 x^2} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \int \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx = \int \Psi^* \left(\hbar k + \frac{i\hbar x}{a} \right) \Psi dx = \\ &= \hbar k \int \Psi^* \Psi dx + \frac{i\hbar x}{a} \int \Psi^* x \Psi dx = \hbar k. \end{aligned}$$

Ответ: $\langle x \rangle = 0$, $\langle p_x \rangle = \hbar k$.

10. Найдите среднее значение квадратичного отклонения координаты $\langle \Delta x^2 \rangle$ частицы, находящейся в состоянии $\Psi(x) = A e^{ikx - a^2 x^2}$.

Поскольку среднее значение координаты в этом состоянии равно нулю, то $\Delta x = x - \langle x \rangle = x$ и $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$.

По определению среднего значения квадрата координаты

$$\langle x^2 \rangle = \int \Psi^* x^2 \Psi dx = |A|^2 \int e^{-ikx - a^2 x^2} x^2 e^{ikx - a^2 x^2} dx = |A|^2 \int x^2 e^{-a^2 x^2} dx.$$

Воспользуемся интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = -\frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

тогда с учетом нормировки $A = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}$ (задача 8)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{|A|^2 \sqrt{\pi}}{2a^3} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3} = \frac{1}{2a^2}.$$

Ответ: $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2a^2}.$

11. Проверьте соотношение неопределенностей для частицы, описываемой функцией $\Psi(x) = Ae^{ikx - \alpha x^2}$.

Пронормируем волновую функцию

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \alpha x^2} \cdot e^{ikx - \alpha x^2} dx = \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}, \\ A &= \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Найдем среднее значение квадрата отклонения координаты для случая, когда начало отсчета выбрано в точке локализации частицы $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta x^2 &= \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} = (\Psi; \hat{x}^2 \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x}^2 \Psi dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \alpha x^2} \cdot x^2 \cdot e^{ikx - \alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-2\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

Значение интеграла найдем с помощью интеграла Пуассона

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Продифференцируем интеграл Пуассона по α

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}. \\ \Delta x^2 &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{8\alpha^3}} = \frac{1}{4\alpha}. \end{aligned}$$

Найдем среднее значение квадрата отклонения импульса для случая, когда начало отсчета движется с постоянной скоростью, равной скорости частицы $\bar{p} = p_0 = \hbar k$.

$$\begin{aligned} \Delta p^2 &= \overline{(p - \bar{p})^2} = (\Psi; (\hat{p} - p_0)^2 \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* (\hat{p} - p_0)^2 \Psi dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \alpha x^2} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - p_0 \right)^2 e^{ikx - \alpha x^2} dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \hbar k \right) e^{-ikx - \alpha x^2} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \hbar k \right) e^{ikx - \alpha x^2} dx = \\ &= \hbar^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (k - 2i\alpha x - k) e^{-ikx - \alpha x^2} \cdot (k + 2i\alpha x - k) e^{ikx - \alpha x^2} dx = \\ &= 4\alpha^2 \hbar^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 4\alpha^2 \hbar^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{8\alpha^3}} = \alpha \hbar^2. \end{aligned}$$

Найдем

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2} \overline{(p - \bar{p})^2}} = \sqrt{\frac{1}{4\alpha} \alpha \hbar^2} = \frac{\hbar}{2}.$$

Вывод: соотношение неопределенностей выполняется.