КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 13:

«Элементы теории рассеяния»

Задачи

131. Получите общее выражение дифференциального сечения рассеяния неполяризованных тождественных частиц со спином $s = 1/2$ через амплитуду рассеяния, вычисленную без учета тождественности частиц.

Рассеяние происходит равновероятно в любом состоянии с полным спином S и проекцией S_z. В синглетном состоянии $(S = 0)$ координатная часть волновой функции должна быть симметричной относительно перестановки частиц, что соответствует симметричной амплитуде рассеяния

$$f_{S=0}(\theta) = f(\theta) + f(\pi - \theta).$$

В триплетном состоянии $(S = 1)$ амплитуда антисимметрична и не зависит от S_z:

$$f_{S=1}(\theta) = f(\theta) - f(\pi - \theta).$$

Усредняя по различным спиновым состояниям, получаем дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = w_{S=0}\left|f_{S=0}(\theta)\right|^2 + w_{S=1}\left|f_{S=1}(\theta)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left|f(\theta) + f(\pi - \theta)\right|^2 + \frac{3}{4}\left|f(\theta) - f(\pi - \theta)\right|^2.$$

Ответ: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left|f(\theta) + f(\pi - \theta)\right|^2 + \frac{3}{4}\left|f(\theta) - f(\pi - \theta)\right|^2.$

132. Вычислите в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния частиц, взаимодействующих по закону Кулона $U(r) = \frac{\alpha}{r}$.

Амплитуда рассеяния в первом порядке теории возмущений на потенциале $U(r)$ может быть определена по формуле

$$f(\theta) \approx f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}\,'}U(r')dV',$$

где $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$.

Вычисление интеграла дает

$$f(\theta) = -\frac{2\alpha m_{12}}{\hbar^2 q^2}.$$

Дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f^{(1)}(\theta)\right|^2 = \left(\frac{2\alpha m_{12}}{q^2\hbar^2}\right)^2.$$

Ответ: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\alpha m_{12}}{q^2\hbar^2}\right)^2.$

133. Вычислите в борновском приближении сечение рассеяния частиц, взаимодействующих по закону $U(r) = \frac{\alpha e^{-\beta r}}{r}$ (потенциал Юкавы).

Амплитуда рассеяния в первом порядке теории возмущений на потенциале $U(r)$ может быть определена по формуле

$$f(\theta) \approx f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}\,'}U(r')dV',$$

где $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$.

Вычисление интеграла дает

$$f(\theta) = -\frac{2\alpha m_{12}}{\hbar^2\left(q^2 + \beta^2\right)}.$$

Полное сечение равно

$$\sigma = \int\left|f(\theta)\right|^2 d\Omega = \left(\frac{\alpha m_{12}}{\beta\hbar^2}\right)^2 \frac{16\pi}{4k^2 + \beta^2}.$$

Ответ: $\sigma = \left(\frac{\alpha m_{12}}{\beta\hbar^2}\right)^2 \frac{16\pi}{4k^2 + \beta^2}.$

134. Вычислите в борновском приближении сечение рассеяния частиц, взаимодействующих по закону

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} -U_0 \text{ при } & 0 < \mathrm{r} < \mathrm{R}, \\ 0 \quad \text{при} & \mathrm{r} > \mathrm{R}. \end{cases}$$

Амплитуда рассеяния в первом порядке теории возмущений на потенциале $U(r)$ может быть определена по формуле

$$f(\theta) \approx f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}\,'}U(r')dV',$$

где $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$.

При интегрировании

$$f(\theta) = -\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^2}\int_0^R e^{-iqr}U_0 r^2 dr = -\frac{2m_{12}U_0}{\hbar^2}\cdot\frac{\sin qR - qR\cos qR}{q^3}.$$

При малых энергиях рассеяние изотропно и не зависит от энергии, а при высоких энергиях $(kR >> 1)$ рассеяние происходит в узком конусе углов шириной $\Delta\theta \sim 1/kR << 1$. Полное сечение получается интегрированием квадрата амплитуды по углам:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar^2}\left(\frac{m_{12}U_0R^2}{\hbar^2}\right)^2\left[1 - \frac{1}{(2kR)^2} + \frac{\sin 4kR}{(2kR)^3} - \frac{\sin^2 2kR}{(2kR)^4}\right].$$

В пределе при очень малых и очень больших энергиях имеем

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{16\pi R^2}{9}\left(\dfrac{m_{12}U_0R^2}{\hbar^2}\right)^2 & \text{при} \quad kR << 1, \\ \dfrac{2\pi}{k^2}\left(\dfrac{m_{12}U_0R^2}{\hbar^2}\right)^2 & \text{при} \quad kR >> 1. \end{cases}$$

Ответ: $\sigma = \begin{cases} \dfrac{16\pi R^2}{9}\left(\dfrac{m_{12}U_0R^2}{\hbar^2}\right)^2 & \text{при} \quad kR << 1, \\ \dfrac{2\pi}{k^2}\left(\dfrac{m_{12}U_0R^2}{\hbar^2}\right)^2 & \text{при} \quad kR >> 1. \end{cases}$

135. Вычислите в борновском приближении сечение рассеяния частицы на потенциале вида $U(\vec{r}) = U_0\delta(\vec{r})$.

Амплитуда рассеяния в первом порядке теории возмущений на потенциале $U(r)$ может быть определена по формуле

$$f(\theta) \approx f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}\,'}U(r')dV',$$

где $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$.

При интегрировании

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\vec{r}\,'}U_0\delta(r')dV' = -\frac{mU_0}{2\pi\hbar^2}.$$

Амплитуда не зависит от угла рассеяния, тогда сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \left|-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right|^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m^2U_0^2}{4\pi^2\hbar^4}4\pi = \frac{m^2U_0^2}{\pi\hbar^4}.$$

Ответ: $\sigma = \dfrac{m^2U_0^2}{\pi\hbar^4}$.