# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

## Решение задач по теме 12:

# «Атом водорода в магнитном поле. Спин»

### Основные понятия, законы и формулы

Пусть частица находится в электромагнитном поле, в котором напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукция магнитного поля $\vec{B}$ связаны с потенциалами $\vec{A}(\vec{r},t)$ и $\varphi(\vec{r},t)$:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

тогда в операторе Гамильтона следует оператор импульса заменить на $\hat{\vec{p}} - e\vec{A}$, а потенциальная энергия $\hat{U} = e\varphi$. Оператор Гамильтона примет вид:

$$\hat{H} = \frac{\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + e\varphi,$$

пренебрегая членом $e^2\vec{A}^2$, можно записать нестационарное уравнение Шредингера (волновое уравнение) в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \frac{i\hbar e}{m}\left(\vec{A}\cdot\nabla\Psi\right) + e\varphi\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Операторы спина связаны с матрицами Паули

$$\hat{S}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{x,y,z},$$

где матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора $\hat{S}_z$ равны $m_s\hbar$, где

$$m_s = \pm\frac{1}{2}.$$

Уравнение Клейна-Фока для релятивистской частицы:

$$\left(\nabla_\alpha^2 - \aleph^2\right)\psi = 0,$$

где $\nabla_\alpha^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2 + \nabla_3^2 + \nabla_4^2$ – оператор Д'Аламбера, $\aleph^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$.

Уравнение Дирака для свободной релятивистской частицы:

$$\left(\gamma_\alpha\nabla_\alpha + \aleph\right)\psi = 0,$$

где $\gamma_\alpha$ – матрицы Дирака

Матрицы Дирака связаны с матрицами Паули соотношением:

$$\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3; \quad \hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}.$$

Полный момент частицы

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}.$$

Собственные значения оператора $\hat{J}_z$ равны $m_j\hbar = m\hbar + m_s\hbar$, где $-l \le m \le l$, а $m_s = \pm\frac{1}{2}$, следовательно, собственные значения оператора $\hat{J}^2$ равны

$$j = l \pm \frac{1}{2}.$$