КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 12:

«Атом водорода в магнитном поле. Спин»

Задачи

120. Определите уровни энергии и функции состояния свободного электрона в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной по оси Oz.

Выберем координаты так, чтобы векторный потенциал магнитного поля имел компоненты

$$A_x = -By, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Уравнение Шредингера

$$\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m}\psi = E\psi$$

приведем к виду

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{i\hbar}{m}eBy\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{e^2}{2m}B^2y^2\psi = E\psi.$$

Так как коэффициенты его не зависят от x и z, то решение можно искать в виде

$$\psi = e^{iax}e^{ibz}f(y),$$

после подстановки и сокращения на экспоненты получим уравнение на $f(y)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}y_1^2 f = \varepsilon f,$$

где вводим обозначения $\omega_0 = \frac{eB}{m}$, $y_1 = y + \frac{\hbar a}{eB}$, $\varepsilon = E - \frac{\hbar^2 b^2}{2m}$.

Уравнение на $f(y)$ аналогично уравнению для квантового гармонического осциллятора. Его решение

$$f(y_1) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi),$$

где $H_n(\xi)$ – полиномы Чебышева-Эрмита, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}y_1$, собственные значения этого уравнения $\varepsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$. Функция электрона в магнитном поле

$$\psi_{nab} = C_n e^{iax}e^{ibz}e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi),$$

$$E_{nb} = \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.$$

Электрон свободно движется в магнитном поле вдоль его индукции, в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции, спектр энергий дискретен.

Ответ: $E_{nb} = \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{eB}{m}$,

$\psi_{nab} = C_n e^{iax}e^{ibz}e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)$, при $\xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(y + \frac{\hbar a}{eB}\right)$.

123. Составьте вектор плотности тока для частицы в электромагнитном поле.

Запишем временное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m}\psi + e\Phi\psi,$$

где $\vec{A}$ и Φ – скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля. Раскроем скобки

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \frac{i\hbar e}{m}\vec{A}\cdot\nabla\psi + \frac{i\hbar e}{2m}\operatorname{div}\vec{A}\psi + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi + e\Phi\psi.$$

Сопряженное ему уравнение:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* - \frac{i\hbar e}{m}\vec{A}\cdot\nabla\psi^* - \frac{i\hbar e}{2m}\operatorname{div}\vec{A}\psi^* + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\psi^* + e\Phi\psi^*.$$

Составим $\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \psi^* \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \cdot \psi$. Домножим первое уравнение на ψ^*, второе – на $-\psi$ и сложим, разделим на $i\hbar$.

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \cdot \Delta\psi - \Delta\psi^* \cdot \psi\right) + \frac{e}{m}\left(\psi^* \vec{A} \cdot \nabla\psi + \nabla\psi^* \cdot \vec{A}\psi + \psi^* \psi div\vec{A}\right).$$

так как

$$\mathrm{div}\left(\psi^* \cdot \nabla\psi - \nabla\psi^* \cdot \psi\right) = \psi^* \cdot \Delta\psi - \Delta\psi^* \cdot \psi,$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\psi^*\psi\right) = \psi^* \vec{A} \cdot \nabla\psi + \nabla\psi^* \cdot \vec{A}\psi + \mathrm{div}\,\vec{A} \cdot \psi^*\psi,$$

то правую часть равенства можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = -div\left(\frac{i\hbar}{2m}\left(\nabla\psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot \nabla\psi\right) - \frac{e}{m}\vec{A}|\psi|^2\right).$$

Сравнивая с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0,$$

делаем вывод, что $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\nabla\psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot \nabla\psi\right) - \frac{e}{m}\vec{A}|\psi|^2$ – плотность тока.

Ответ: $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\nabla\psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot \nabla\psi\right) - \frac{e}{m}\vec{A}|\psi|^2$.

121. Вычислите магнитный момент атома водорода μ_L, обусловленный пространственным движением электрона.

Волновая функция электрона в атоме водорода

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi).$$

Плотность тока

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar e}{2m_e}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

в сферических координатах имеет проекции

$$j_r = -\frac{i\hbar e}{2m_e}\left(\psi^*_{nlm}\frac{\partial}{\partial r}\psi_{nlm} - \psi_{nlm}\frac{\partial}{\partial r}\psi^*_{nlm}\right),$$

$$j_\theta = -\frac{i\hbar e}{2m_e}\left(\psi^*_{nlm}\frac{\partial}{r\partial\theta}\psi_{nlm} - \psi_{nlm}\frac{\partial}{r\partial\theta}\psi^*_{nlm}\right),$$

$$j_\varphi = -\frac{i\hbar e}{2m_e}\left(\psi^*_{nlm}\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\psi_{nlm} - \psi_{nlm}\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\psi^*_{nlm}\right).$$

Их средние значения:

$$\langle j_r \rangle = 0, \quad \langle j_\theta \rangle = 0, \quad \langle j_\varphi \rangle = -\frac{e\hbar}{m_e r\sin\theta}|\psi_{nlm}|^2 m.$$

Равенство нулю первых двух средних значений – следствие действительности той части волновой функции, которая зависит от r и θ. При вычислении последней проекции был использован явный вид зависимости от угла φ волновой функции.

Ток распределен по поверхности шара. Представим полный момент в виде суммы моментов от кольцевых трубок токов радиусов $r\sin\theta$ и площадью ds. Каждая трубка эквивалентна кольцевому току $dI = \langle j_\varphi \rangle ds$, обтекающему круг площади $S = \pi r^2 \sin^2\theta$, тогда этот ток создает магнитный момент

$$d\mu_L = \frac{1}{c}SdI = -\frac{\pi e\hbar r\sin\theta}{cm_e}|\psi_{nlm}|^2 mds.$$

Полный магнитный момент

$$\mu_L = -\frac{e\hbar m}{2m_e c}\int|\psi_{nlm}|^2 dV = -\frac{e\hbar m}{2m_e c} = g_L L_z,$$

где $L_z = \hbar m$ – проекция момента импульса на ось Oz, а множитель

$$g_L = -\frac{e}{2m_e c}.$$

Ответ: $\mu_L = -\frac{e\hbar m}{2m_e c} = g_L L_z$.

122. Оцените минимальный размер электрона на основании наличия у него спина.

Будем считать электрон однородным шаром радиуса r. Момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mr^2$, следовательно, момент импульса L равен

$$L = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}mr\,\mathrm{v}.$$

Собственный момент электрона (спин)

$$J = \frac{\hbar}{2}.$$

Из равенства собственного и механического моментов:

$$\frac{2}{5} mr\,\mathrm{v} = \frac{\hbar}{2}, \quad r = \frac{5\hbar}{4m\,\mathrm{v}},$$

где v – максимальная скорость поверхности электрона не может превышать скорость света $\mathrm{v} < c$. Для предельного случая возьмем максимальное значение скорости $\mathrm{v} = c$

$$r = \frac{5\hbar}{4mc} = \frac{5 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 5 \cdot 10^{-13}\ \text{м}.$$

Заметим, что радиус $r = 10^{-11}$ см принято называть классическим радиусом электрона.

Ответ: $r = 5 \cdot 10^{-13}$ м.

111. Найдите собственные значения и собственные функции операторов проекций спина $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$, выраженных через матрицы Паули.

Операторы спина связаны с матрицами Паули

$$\hat{S}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{x,y,z},$$

где матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать собственные функции этих операторов в виде столбца

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

где ψ_1 и ψ_2 – произвольные функции.

$$\hat{\sigma}_x \Psi = \sigma_x \Psi, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sigma_x \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi_2 = \sigma_x \psi_1 \\ \psi_1 = \sigma_x \psi_2 \end{cases},$$

откуда $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_x = \pm 1$.

При $\sigma_x = 1$ $\psi_1 = \psi_2$, тогда

$$\Psi_{1x} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пронормируем функцию

$$1 = \Psi_{1x}^* \Psi_{1x} = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |a|^2 (1+1) = 2|a|^2, \ a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

С учетом нормировки

$$\Psi_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $\sigma_x = -1$ $\psi_1 = -i\psi_2$, тогда с учетом нормировки

$$\Psi_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для $\hat{\sigma}_z$: при $\sigma_y = 1$ $\psi_1 = i\psi_2$, с учетом нормировки

$$\Psi_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

при $\sigma_y = -1$ $\psi_1 = -i\psi_2$, с учетом нормировки

$$\Psi_{2y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Те же функции соответствуют и операторам спина $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$, но с собственными значениями:

при $S_x = \frac{\hbar}{2}$ $\Psi_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S_x = -\frac{\hbar}{2}$ $\Psi_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

при $S_y = \frac{\hbar}{2}$ $\Psi_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $S_y = -\frac{\hbar}{2}$ $\Psi_{2y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Ответ: $S_{x,y} = \pm\frac{\hbar}{2}$, $\Psi_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Psi_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\Psi_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\Psi_{2y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

112. Найдите $\hat{\sigma}_x^n$, $\hat{\sigma}_y^n$, $\hat{\sigma}_z^n$, где $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ – матрицы Паули.

Покажем, что $\hat{\sigma}_x^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_x & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$

Воспользуемся методом математической индукции.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{I}},$$

$$\hat{\sigma}_x^3 = \hat{\sigma}_x^2\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x .$$

Пусть справедливо: $\hat{\sigma}_x^n = \hat{\mathrm{I}}$, тогда

$$\hat{\sigma}_x^{n+1} = \hat{\sigma}_x^n\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x ,$$

$$\hat{\sigma}_x^{n+2} = \hat{\sigma}_x^{n+1}\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{I}}, \text{ ч.т.д.}$$

Пусть справедливо: $\hat{\sigma}_x^n = \hat{\sigma}_x$, тогда

$$\hat{\sigma}_x^{n+1} = \hat{\sigma}_x^n\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{I}},$$

$$\hat{\sigma}_x^{n+2} = \hat{\sigma}_x^{n+1}\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x, \text{ч.т.д.}$$

Аналогично $\hat{\sigma}_y^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_y & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$ $\hat{\sigma}_z^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_z & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$

Ответ: $\hat{\sigma}_x^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_x & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$ $\hat{\sigma}_y^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_y & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$

$\hat{\sigma}_z^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_z & n = 2k+1; \\ \hat{\mathrm{I}} & n = 2k. \end{cases}$

113. Рассматривая матрицы Паули как компоненты векторного оператора $\hat{\vec{\sigma}}$, найдите скалярное $\left(\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right)$, векторное $\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right]$ и смешанное произведение $\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\right)$ матриц-операторов.

По определению скалярного произведения

$$\left(\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right) = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\hat{\mathrm{I}}$$

,

где $\hat{\mathrm{I}}$ – двумерная единичная матрица.

По определению векторного произведения

$$\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right]_x = \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_x ;$$

$$\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right]_y = \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_y ;$$

$$\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right]_z = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z ;$$

$$\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right] = 2i\left(\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_z\right) = 2i\hat{\vec{\sigma}} .$$

По определению смешанного произведения

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\right) = \left(\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right];\hat{\vec{\sigma}}\right) = 2i\left(\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right) = 2i\cdot 3\hat{\mathrm{I}} = 6i\hat{\mathrm{I}} .$$

Ответ: $\left(\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right) = 3\hat{\mathrm{I}}$, $\left[\hat{\vec{\sigma}};\hat{\vec{\sigma}}\right] = 2i\hat{\vec{\sigma}}$, $\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{\sigma}}\right) = 6i\hat{\mathrm{I}}$.

114. Найдите коммутаторы операторов $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$.

Коммутатор матриц Паули

$$\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=2i\hat{\sigma}_z .$$

Ответ: $\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]=2i\hat{\sigma}_z$.

115. Найдите операторы $\hat{\sigma}_+=\dfrac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2}$ и $\hat{\sigma}_-=\dfrac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2}$, коммутатор операторов $\hat{\sigma}_+^2$ и $\hat{\sigma}_-^2$, коммутатор этих операторов с операторами $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$.

Найдем коммутатор операторов:

$$\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_-\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2};\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2}\right]=\frac{1}{4}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\left(\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y\right)\right]+i\left[\hat{\sigma}_y;\left(\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y\right)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_x\right]-i\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]+i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_x\right]+\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_y\right]\right)=\frac{i}{4}\left(\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_x\right]-\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]\right)=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]=-\frac{i}{2}\cdot 2i\hat{\sigma}_z=\hat{\sigma}_z .$$

$$\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_x\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_x\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_x\right]+i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_x\right]\right)=-\frac{i}{2}\cdot 2i\hat{\sigma}_z=\hat{\sigma}_z$$

.

$$\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_y\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_y\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]+i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_y\right]\right)=\frac{1}{2}\cdot 2i\hat{\sigma}_z=i\hat{\sigma}_z$$

.

$$\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_z\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_z\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_z\right]+i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_z\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-2i\hat{\sigma}_y+i2i\hat{\sigma}_x\right)=-\hat{\sigma}_+ .$$

Аналогично

$$\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_x\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_x\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_x\right]-i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_x\right]\right)=\frac{i}{2}\cdot 2i\hat{\sigma}_z=-\hat{\sigma}_z$$

.

$$\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_y\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_y\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_y\right]-i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_y\right]\right)=-\frac{1}{2}\cdot 2i\hat{\sigma}_z=-i\hat{\sigma}_z$$

.

$$\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_z\right]=\left[\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2};\hat{\sigma}_z\right]=\frac{1}{2}\left(\left[\hat{\sigma}_x;\hat{\sigma}_z\right]-i\left[\hat{\sigma}_y;\hat{\sigma}_z\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-2i\hat{\sigma}_y-i2i\hat{\sigma}_x\right)=\hat{\sigma}_- .$$

$$\hat{\sigma}_+^2=\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2}\cdot\frac{\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y}{2}=\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2+i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y+i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x-\hat{\sigma}_y^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2+i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y+i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x-\hat{\sigma}_y^2\right).$$

Найдем произведение матриц:

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}=i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=i\hat{\sigma}_z .$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-i\hat{\sigma}_z .$$

$$\hat{\sigma}_+^2=\frac{1}{4}\left(\hat{I}-\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z-\hat{I}\right)=0 .$$

$$\hat{\sigma}_-^2=\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2}\cdot\frac{\hat{\sigma}_x-i\hat{\sigma}_y}{2}=\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2-i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y-i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x-\hat{\sigma}_y^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\hat{\sigma}_x^2-i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y-i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x-\hat{\sigma}_y^2\right)=\frac{1}{4}\left(\hat{I}+\hat{\sigma}_z-\hat{\sigma}_z-\hat{I}\right)=0 .$$

Ответ: $\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_-\right]=\hat{\sigma}_z$, $\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_x\right]=\hat{\sigma}_z$, $\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_y\right]=i\hat{\sigma}_z$, $\left[\hat{\sigma}_+;\hat{\sigma}_z\right]=-\hat{\sigma}_+$, $\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_x\right]=-\hat{\sigma}_z$, $\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_y\right]=-i\hat{\sigma}_z$, $\left[\hat{\sigma}_-;\hat{\sigma}_z\right]=\hat{\sigma}_-$,

$\hat{\sigma}_+^2 = 0$,
$\hat{\sigma}_-^2 = 0$.

116. Для операторов $\hat{\sigma}_+ = \dfrac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}$ и $\hat{\sigma}_- = \dfrac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2}$ покажите, что для любых целых n справедливо $(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^n = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$.

Воспользуемся методом математической индукции. Для $n=1$ $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \equiv \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ – тождество.

Вычислим

$$\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- = \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y)(\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y) = \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_x^2 + i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y^2) =$$
$$= \frac{1}{4}(2\hat{I} - i2i\hat{\sigma}_z) = \frac{1}{2}(\hat{I} + \hat{\sigma}_z).$$

Проверим для $n=2$

$$(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^2 = \frac{1}{2}(\hat{I} + \hat{\sigma}_z)\frac{1}{2}(\hat{I} + \hat{\sigma}_z) = \frac{1}{4}(\hat{I}^2 + \hat{I}\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{I} + \hat{\sigma}_z^2) =$$
$$= \frac{1}{4}(2\hat{I} + 2\hat{\sigma}_z) = \frac{1}{2}(\hat{I} + \hat{\sigma}_z) = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-.$$

Пусть для n справедливо $(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^n = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$, покажем, что это верно для $n+1$:

$$(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^{n+1} = (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)^n(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) = (\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-,$$

это верно для любых n, что требовалось доказать.

117. Найдите собственные значения скалярного произведения $(\hat{\vec{\sigma}}_1;\hat{\vec{\sigma}}_2)$ двух электронов, пользуясь тем, что $\hat{\vec{\sigma}}_1$ и $\hat{\vec{\sigma}}_2$ перестановочны.

Так как $\hat{\vec{\sigma}}_1$ и $\hat{\vec{\sigma}}_2$ перестановочны, то

$$(\hat{\vec{\sigma}}_1 + \hat{\vec{\sigma}}_2)^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2.$$

Сумма двух моментов изменяется от их суммы до разности, так что суммарный спин принимает значения 1 и 0. Так как $\hat{\vec{\sigma}}$ – удвоенный оператор спинового момента, то соответствующие

максимальные проекции вдвое больше. Поэтому, когда спины складываются как параллельные векторы, собственное значение квадрата $(\hat{\vec{\sigma}}_1 + \hat{\vec{\sigma}}_2)^2$ в четыре раза больше, чем соответствующего квадрата момента, т.е. равно $4\cdot1\cdot2 = 8$, когда же спины антипараллельны, оно равно 0.

Итак, собственное значение $(\hat{\vec{\sigma}}_1;\hat{\vec{\sigma}}_2)$ при параллельных спинах равно $\dfrac{8-6}{2} = 1$ и при антипараллельных спинах $\dfrac{0-6}{2} = -3$.

Ответ: 1, –3.

118. Докажите справедливость равенства:
а) $\sin(\hat{\sigma}_x\psi) = \hat{\sigma}_x\sin\psi$**, б)** $\cos(\hat{\sigma}_z\psi) = \cos\psi$**.**

а) Разложим в ряд

$$\sin\hat{\sigma}_x\psi = \left(\hat{\sigma}_x\psi + \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^3}{3!} + \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^5}{5!} + \ldots\right) =$$
$$= \left(\hat{\sigma}_x\psi + \frac{\hat{\sigma}_x^3\psi^3}{3!} + \frac{\hat{\sigma}_x^5\psi^5}{5!} + \ldots\right) = \hat{\sigma}_x\sin\psi, \text{ ч.т.д.}$$

б) Аналогично

$$\cos\hat{\sigma}_z\psi = \left(1 - \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^2}{2!} + \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^4}{4!} - \ldots\right) = \cos\psi, \text{ ч.т.д.}$$

119. Докажите справедливость равенства $e^{i\hat{\sigma}_z\psi} = \cos\psi + i\hat{\sigma}_z\sin\psi$.

Аналогично решению задачи 85 разложением в ряд экспоненты.

$$e^{i\hat{\sigma}_z\psi} = 1 + \frac{i\hat{\sigma}_z\psi}{1!} + \frac{(i\hat{\sigma}_z\psi)^2}{2!} + \frac{(i\hat{\sigma}_z\psi)^3}{3!} + \frac{(i\hat{\sigma}_z\psi)^4}{4!} + \frac{(i\hat{\sigma}_z\psi)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= 1 + i\frac{\hat{\sigma}_z\psi}{1!} - \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^2}{2!} - i\frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^3}{3!} + \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^4}{4!} + i\frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^2}{2!} + \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^4}{4!} + \ldots + i\left(\frac{\hat{\sigma}_z\psi}{1!} - \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^3}{3!} + \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^5}{5!} + \ldots\right).$$

Так как

$$\sin\hat{\sigma}_z\psi = \left(\hat{\sigma}_z\psi + \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^3}{3!} + \frac{(\hat{\sigma}_z\psi)^5}{5!} + \ldots\right) = \hat{\sigma}_z \sin\psi\,,$$

$$\cos\hat{\sigma}_z\psi = \left(1 - \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^2}{2!} + \frac{(\hat{\sigma}_x\psi)^4}{4!} - \ldots\right) = \hat{I}\cos\psi\,,$$

то $e^{i\hat{\sigma}_z\psi} = \cos\psi + i\hat{\sigma}_z \sin\psi$, ч. т. д.

124. Проверьте, являются ли матрицы Дирака эрмитовыми.

Матрицы Дирака связаны с матрицами Паули соотношением:

$$\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3; \quad \hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix},$$

где матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\hat{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Условие эрмитовости:

$$(\psi; \hat{\gamma}_1\varphi) = (\hat{\gamma}_1\psi; \varphi),$$

где $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$,

первый множитель в скалярном произведении – транспонированный и комплексно сопряженный вектор.

$$\hat{\gamma}_1\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\varphi_4 \\ -i\varphi_3 \\ i\varphi_2 \\ i\varphi_1 \end{pmatrix},$$

$$(\psi; \gamma_1\varphi) = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\varphi_4 \\ -i\varphi_3 \\ i\varphi_2 \\ i\varphi_1 \end{pmatrix} =$$

$$= -i\psi_1^*\varphi_4 - i\psi_2^*\varphi_3 + i\psi_3^*\varphi_2 + i\psi_4^*\varphi_1\,. \qquad (1)$$

Теперь найдем

$$\hat{\gamma}_1\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_4 \\ -i\psi_3 \\ i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix},$$

транспонируем и возьмем комплексное сопряжение:

$$(\hat{\gamma}_1\psi)^{T*} = \begin{pmatrix} i\psi_4^* & i\psi_3^* & -i\psi_2^* & -i\psi_1^* \end{pmatrix},$$

найдем скалярное произведение:

$$(\hat{\gamma}_1\psi; \varphi) = \begin{pmatrix} i\psi_4^* & i\psi_3^* & -i\psi_2^* & -i\psi_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} =$$

$$= i\psi_4^*\varphi_1 + i\psi_3^*\varphi_2 - i\psi_2^*\varphi_3 - i\psi_1^*\varphi_4\,,$$

что совпадает с (1).

Аналогично можно доказать эрмитовость остальных матриц Дирака:

$$(\psi;\hat{\gamma}_2\varphi)=(\hat{\gamma}_2\psi;\varphi)=-\psi_4^*\varphi_1+\psi_3^*\varphi_2+\psi_2^*\varphi_3-\psi_1^*\varphi_4,$$
$$(\psi;\hat{\gamma}_3\varphi)=(\hat{\gamma}_3\psi;\varphi)=-\psi_4^*\varphi_1+\psi_3^*\varphi_2+\psi_2^*\varphi_3-\psi_1^*\varphi_4,$$
$$(\psi;\hat{\gamma}_4\varphi)=(\hat{\gamma}_4\psi;\varphi)=-\psi_4^*\varphi_1+\psi_3^*\varphi_2+\psi_2^*\varphi_3-\psi_1^*\varphi_4.$$

125. Найдите произведения матриц Дирака:

$$\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_4,\quad \hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_4,\quad \hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4,\quad \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2,\quad \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_3,\quad \hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3.$$

Матрицы Дирака:

$$\hat{\gamma}_k=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix},\quad k=1,2,3;\quad \hat{\gamma}_4=\begin{pmatrix}\hat{I} & 0\\ 0 & -\hat{I}\end{pmatrix}.$$

Найдем для $k=1,2,3$:

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{I} & 0\\ 0 & -\hat{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}=\hat{\gamma}_k.$$

Найдем для $k,n=1,2,3$:

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_n\\ i\hat{\sigma}_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n\end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n=i\hat{\sigma}_m$ для $(knm)=(123)=(231)=(312)$, и $\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n=-i\hat{\sigma}_m$ для $(knm)=(321)=(213)=(132)$,

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n=\begin{pmatrix}i\hat{\sigma}_m & 0\\ 0 & i\hat{\sigma}_m\end{pmatrix}\text{ для }(knm)=(123)=(231)=(312),$$

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n=\begin{pmatrix}-i\hat{\sigma}_m & 0\\ 0 & -i\hat{\sigma}_m\end{pmatrix}\text{ для }(knm)=(321)=(213)=(132).$$

Ответ: $\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_4=\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_4=\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4=\hat{\gamma}_3$,

$$\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2=\begin{pmatrix}i\hat{\sigma}_3 & 0\\ 0 & i\hat{\sigma}_3\end{pmatrix},\qquad \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_3=\begin{pmatrix}-i\hat{\sigma}_2 & 0\\ 0 & -i\hat{\sigma}_2\end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3=\begin{pmatrix}i\hat{\sigma}_1 & 0\\ 0 & i\hat{\sigma}_1\end{pmatrix}.$$

126. Покажите, что матрицы Дирака антикоммутируют.

Найдем произведение матриц для $k,n\neq 4$:

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_n\\ i\hat{\sigma}_n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n\end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_k=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_n\\ i\hat{\sigma}_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k\end{pmatrix}.$$

Найдем сумму произведений, учитывая, что матрицы Паули антикоммутируют, т.е. $\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k+\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n=0$,

$$\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_k+\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k+\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k+\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n\end{pmatrix}=0.$$

Аналогично

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{I} & 0\\ 0 & -\hat{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k=\begin{pmatrix}\hat{I} & 0\\ 0 & -\hat{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ -i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}.$$

Найдем сумму произведений

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4+\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k=\begin{pmatrix}0 & i\hat{\sigma}_k\\ i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -i\hat{\sigma}_k\\ -i\hat{\sigma}_k & 0\end{pmatrix}=0.$$

Вывод: матрицы Дирака антикоммутируют.

127. Найдите собственные значения матриц Дирака.

Матрицы Дирака:

$$\hat{\gamma}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{\gamma}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение на собственные функции и собственные значения

$$\hat{\gamma}_1 \psi = \lambda \psi$$

$$\hat{\gamma}_1 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_4 \\ -i\psi_3 \\ i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1 \\ \lambda\psi_2 \\ \lambda\psi_3 \\ \lambda\psi_4 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений на λ:

$$\begin{cases} -i\psi_4 = \lambda\psi_1, \\ -i\psi_3 = \lambda\psi_2, \\ i\psi_2 = \lambda\psi_3, \\ i\psi_1 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i\psi_3 = \lambda\psi_2, \\ i\psi_2 = \lambda\psi_3, \\ -i\psi_4 = \lambda\psi_1, \\ i\psi_1 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

При $\lambda = 1$ $\psi_3 = i\psi_2$, $\psi_4 = i\psi_1$, волновая функция:

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ $\psi_3 = -i\psi_2$, $\psi_4 = -i\psi_1$, волновая функция:

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -i\psi_2 \\ -i\psi_1 \end{pmatrix}.$$

Для $\hat{\gamma}_2$: $$\hat{\gamma}_2 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1 \\ \lambda\psi_2 \\ \lambda\psi_3 \\ \lambda\psi_4 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений на λ:

$$\begin{cases} -\psi_4 = \lambda\psi_1, \\ \psi_3 = \lambda\psi_2, \\ \psi_2 = \lambda\psi_3, \\ -\psi_1 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_3 = \lambda\psi_2, \\ \psi_2 = \lambda\psi_3, \\ -\psi_4 = \lambda\psi_1, \\ -\psi_1 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

При $\lambda = 1$ $\psi_3 = \psi_2$, $\psi_4 = -\psi_1$, волновая функция:

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ $\psi_3 = -\psi_2$, $\psi_4 = \psi_1$, волновая функция:

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Для $\hat{\gamma}_3$: $$\hat{\gamma}_3 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_3 \\ i\psi_4 \\ i\psi_1 \\ -i\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1 \\ \lambda\psi_2 \\ \lambda\psi_3 \\ \lambda\psi_4 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений на λ:

$$\begin{cases} -i\psi_3 = \lambda\psi_1, \\ i\psi_4 = \lambda\psi_2, \\ i\psi_1 = \lambda\psi_3, \\ -i\psi_2 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i\psi_3 = \lambda\psi_1, \\ i\psi_1 = \lambda\psi_3, \\ i\psi_4 = \lambda\psi_2, \\ -i\psi_2 = \lambda\psi_4, \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

При $\lambda = 1$ $\psi_3 = i\psi_1$, $\psi_4 = -i\psi_2$, волновая функция:

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ i\psi_1 \\ -i\psi_2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ $\psi_3 = -i\psi_1$, $\psi_4 = i\psi_2$, волновая функция:

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -i\psi_1 \\ i\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Для $\hat{\gamma}_4$: $\hat{\gamma}_4\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1 \\ \lambda\psi_2 \\ \lambda\psi_3 \\ \lambda\psi_4 \end{pmatrix}.$

Получаем систему уравнений на λ:

$$\begin{cases} \psi_1 = \lambda\psi_1, \\ \psi_2 = \lambda\psi_2, \\ -\psi_3 = \lambda\psi_3, \\ -\psi_4 = \lambda\psi_4. \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ $\psi_4 = \psi_3 = 0$, волновая функция: $\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda = -1$ $\psi_2 = \psi_1 = 0$, волновая функция: $\psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda = \pm 1$.

128. Найдите коммутаторы матриц Дирака.

Найдем произведение матриц для $k, n \neq 4$:

$$\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_n \\ i\hat{\sigma}_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_n \\ i\hat{\sigma}_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n \end{pmatrix}.$$

Найдем разность произведений, учитывая, что коммутаторы матриц Паули $\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n = i\hat{\sigma}_m$ для $(knm) = (123) = (231) = (312)$, и $\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n = -i\hat{\sigma}_m$ для $(knm) = (321) = (213) = (132)$,

$$\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k - \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_k - \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} -i\hat{\sigma}_m & 0 \\ 0 & -i\hat{\sigma}_m \end{pmatrix} & \text{для } (knm) = (123) = (231) = (312), \\ \begin{pmatrix} i\hat{\sigma}_m & 0 \\ 0 & i\hat{\sigma}_m \end{pmatrix} & \text{для } (knm) = (321) = (213) = (132). \end{cases}$$

Аналогично

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ -i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму произведений

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4 - \hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & i\hat{\sigma}_k \\ i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_k \\ -i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i\hat{\sigma}_k \\ 2i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_n == \begin{cases} \begin{pmatrix} -i\hat{\sigma}_m & 0 \\ 0 & -i\hat{\sigma}_m \end{pmatrix} & \text{для } (knm) = (123) = (231) = (312), \\ \begin{pmatrix} i\hat{\sigma}_m & 0 \\ 0 & i\hat{\sigma}_m \end{pmatrix} & \text{для } (knm) = (321) = (213) = (132). \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_k\hat{\gamma}_4 - \hat{\gamma}_4\hat{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & 2i\hat{\sigma}_k \\ 2i\hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

129. Докажите, что свободный квант не может образовать пару электрон-позитрон в пустом пространстве без дополнительного внешнего поля.

Воспользуемся законом сохранения энергии и импульса в отсутствие поля:

$$-\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}+\hbar\omega=\sqrt{m^2c^4+c^2p_1^2}\,,\quad \vec{p}+\frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}=\vec{p}_1\,.$$

Здесь $\vec{p}$ – импульс электрона в состоянии с отрицательной энергией, $\vec{n}$ – единичный вектор направления импульса кванта, $\vec{p}_1$ – импульс электрона в состоянии с положительной энергией.

Подставим $\vec{p}_1$ в закон сохранения энергии и возведем в квадрат обе части

$$m^2c^4+c^2p^2-2\hbar\omega\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}+\hbar^2\omega^2=m^2c^4+c^2\left(\vec{p}+\frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}\right)^2,$$

$$c^2p^2-2\hbar\omega\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}+\hbar^2\omega^2=c^2\left(p^2+2\frac{\hbar\omega}{c}\left(\vec{p};\vec{n}\right)+\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}\right),$$

$$-\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}=c\left(\vec{p};\vec{n}\right).$$

Правая часть равенства может быть отрицательной, но ее модуль не больше cp, тогда, возведя в квадрат,

$$m^2c^4+c^2p^2\le c^2p^2,$$

что невыполнимо. Следовательно, электрон-позитронная пара не может быть возбуждена квантом энергии в отсутствие внешнего поля.

130. Покажите, что если ψ – решение уравнения Дирака с положительной энергией E, то $\hat{\rho}_2\psi$ – решение уравнения с отрицательной энергией $-E$.

Уравнение для собственной функции:

$$E\psi=c\left(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}\right)\psi+\hat{\beta}mc^2\psi\,.$$

Отсюда

$$E\hat{\rho}_2\psi=c\hat{\rho}_2\left(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}\right)\psi+mc^2\hat{\rho}_2\hat{\beta}\psi=-c\left(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}\right)\hat{\rho}_2\psi-\hat{\beta}mc^2\hat{\rho}_2\psi=$$
$$=-\left[c\left(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}\right)+\hat{\beta}mc^2\right]\hat{\rho}_2\psi\,,$$

тогда

$$-E\hat{\rho}_2\psi=c\left(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}\right)\hat{\rho}_2\psi+\hat{\beta}mc^2\hat{\rho}_2\psi\,.$$

Это доказывает, что решений с отрицательной энергией нельзя избежать.