КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Решение задач по теме 10:

«Нестационарная теория возмущений»

Задачи

1. Система, стационарные состояния которой описываются функциями ψ_1 и ψ_2, находится в состоянии ψ_1. В момент времени $t=0$ включается возмущение, не зависящее от времени. Определите зависимость от времени функции $\psi(t)$, описывающую возмущенную систему.

Функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют нестационарному уравнению Шредингера

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \text{ и } \psi_n = u(r)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}, \quad \int\psi_n^*\psi_k dV = \delta_{nk},\ n,\ k = 1, 2.$$

После включения возмущения $\hat{W}$ уравнение приобретает вид:

$$\left(\hat{H}+\hat{W}\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Решение его следует искать в виде

$$\psi = a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2,$$

где $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ и начальные условия для коэффициентов $a_1(0)=1$ и $a_2(0)=0$. Подставим функцию в уравнение, умножим полученное уравнение на ψ_1 и ψ_2 и получим два уравнения на коэффициенты:

$$i\hbar\dot{a}_1 = a_1W_{11} + a_2W_{21}e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t}, \quad i\hbar\dot{a}_2 = a_1W_{21}e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} + a_2W_{22},$$

где матричные элементы оператора возмущения $W_{ik} = \left(u_i(r);\hat{W}u_k(r)\right)$. Если ввести $\alpha_1(t) = a_1(t)$ и $\alpha_2(t) = a_2(t)e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t}$, то получим уравнения для α_i

$$i\hbar\dot{\alpha}_1 = \alpha_1W_{11} + \alpha_2W_{21}, \quad i\hbar\dot{\alpha}_2 = \alpha_1W_{12} + \alpha_2\left[W_{22}+E_2-E_1\right],$$

решения этих уравнений можно искать в виде $\alpha_1(t) = Ae^{-i\Omega t}$ и $\alpha_2(t) = Be^{-i\Omega t}$, подставив, получим уравнения на A и B:

$$(W_{11}-\hbar\Omega)A + W_{21}B = 0, \quad W_{12}A + \left[W_{22}+E_2-E_1-\hbar\Omega\right]B = 0,$$

решения которых существует, если система является совместной, т.е.

$$\begin{vmatrix} W_{11}-\hbar\Omega & W_{21} \\ W_{12} & W_{22}+E_2-E_1-\hbar\Omega \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\hbar\Omega_{1,2} = W_{11} + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{|W_{21}|^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \text{ где } \gamma = W_{22} - W_{11} + E_2 - E_1.$$

Находим $\alpha_1(t) = A_1e^{-i\Omega_1 t} + A_2e^{-i\Omega_2 t}$, $\quad \alpha_2(t) = B_1e^{-i\Omega_1 t} + B_2e^{-i\Omega_2 t}$, причем

$$B_k = \frac{\hbar\Omega_k - W_{11}}{W_{21}}A_k.$$

Из начальных условий: $A_1 + A_2 = 1$, $B_1 + B_2 = 0$, тогда

$$A_1 = \frac{W_{11}-\hbar\Omega_2}{\hbar(\Omega_1-\Omega_2)},\ B_1 = \frac{W_{21}}{\hbar(\Omega_1-\Omega_2)},$$

следовательно,

$$\alpha_1(t) = A_1\left(e^{-i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_2 t}\right) + e^{-i\Omega_1 t},$$
$$\alpha_2(t) = B_1\left(e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t}\right).$$

Ответ:

$$\psi = u(r)\left[\left(A_1\left(e^{-i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_2 t}\right) + e^{-i\Omega_1 t}\right) + B_1\left(e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t}\right)\right]e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}.$$

2. На частицу, находящуюся в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a, в момент времени $t=0$ накладывается слабое возмущение вида:

а) $\hat{V}(x,t) = -xF_0e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$; **б)** $\hat{V}(x,t) = -xF_0e^{-\frac{|t|}{\tau}}$.

Вычислите в первом приближении теории возмущений вероятности возбуждений различных состояний частицы при $t\to\infty$.

В начальный момент времени $t<0$ система описывается функциями $\psi_n^{(0)}$, удовлетворяющими стационарному уравнению $\hat{H}^{(0)}\psi_n^{(0)}=E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}$. После наложения возмущения уравнение

$$\left(\hat{H}^{(0)}+\hat{W}\right)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

решаем в виде

$$\Psi=\sum_j c_j(t)\psi_j^{(0)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_j^{(0)}t},$$

при этом $c_j(0)=\delta_{jn}$ (в начальный момент $\Psi=\psi_n^{(0)}$), а для $c_j(t)$ получается уравнение

$$i\hbar\frac{\partial c_k(t)}{\partial t}=\sum_j W_{kj}(t)c_j(t)e^{i\omega_{kj}t},$$

где $W_{kj}(t)=\int\psi_k^{(0)*}\hat{W}\psi_j^{(0)}dV$ – матричный элемент оператора возмущения, $\omega_{kj}=\dfrac{E_k^{(0)}-E_j^{(0)}}{\hbar}$. При условии, что $\hat{W}=0$ при $t<0$ и $t>\tau$ решение этого уравнения в первом приближении

$$c_k(\tau)=\frac{1}{i\hbar}\int_0^\tau W_{kj}(t)e^{i\omega_{kj}t}dt.$$

Вероятность перехода системы из состояния n в состояние k определяется как $|c_k(\tau)|^2$, т.е.

$$P_{n\to k}=|c_k(\tau)|^2=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}|W_{kn}(\omega_{kn})|^2,$$

где

$$W_{kn}(\omega_{kn})=\frac{1}{2\pi}\int W_{kn}(t)e^{i\omega_{kn}t}dt$$

– коэффициент Фурье матричного элемента энергии возмущения.

Учтем, что $W=const$

$$c_k(\tau)=\frac{W_{kj}}{i\hbar}\int_0^\tau e^{i\omega_{kj}t}dt=\frac{W_{kj}}{i\hbar}\frac{e^{i\omega_{kj}\tau}-e^{i\omega_{kj}0}}{i\omega_{kj}}=\frac{W_{kj}}{i\hbar}e^{\frac{i\omega_{kj}\tau}{2}}\frac{e^{\frac{i\omega_{kj}\tau}{2}}-e^{-\frac{i\omega_{kj}\tau}{2}}}{i\omega_{kj}}=$$

$$=2\frac{W_{kj}}{i\hbar}e^{\frac{i\omega_{kj}\tau}{2}}\frac{\sin\frac{\omega_{kj}\tau}{2}}{\omega_{kj}}.$$

Вероятность

$$P_{n\to k}=\frac{4|W_{kn}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\frac{(E_k-E_n)\tau}{2\hbar}}{\left(\frac{E_k-E_n}{\hbar}\right)^2}=\frac{4|W_{kn}|^2}{\hbar^2}F(E_k-E_n).$$

По определению δ-функции $\delta(x)=\lim\limits_{A\to\infty}\delta(x,A)=\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{\sin^2 Ax}{\pi Ax^2}$,

тогда $F(E_k-E_n)\to\dfrac{\pi\hbar\tau}{2}\delta(E_k-E_n)$, а следовательно,

$$P_{n\to k}=\frac{2\pi\tau}{\hbar}|W_{kn}|^2\delta(E_k-E_n).$$

Ответ: $P_{n\to k}=\dfrac{2\pi\tau}{\hbar}|W_{kn}|^2\delta(E_k-E_n)$.

3. На плоский ротатор с моментом инерции J и дипольным моментом $\vec{\mu}$ в момент времени $t=0$ накладывается слабое электрическое поле напряженностью:

а) $\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$**;** **б)** $\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0e^{-\frac{|t|}{\tau}}$**.**

Вычислите в первом приближении теории возмущений вероятности возбуждений различных состояний частицы при $t\to\infty$, если при $t\to-\infty$ ротатор находился в состоянии с квантовым числом m.

Вероятность возбуждения k-го состояния:

$$W^{(1)}(n\to k)=\frac{1}{\hbar^2}|V_{kn}I|^2,$$

где n – квантовое число начального состояния, k – конечного, V_{kn} – матричные элементы оператора возмущения:

$$V_{kn}=\left(\psi_k(x);\hat{V}(x)\psi_n(x)\right),$$

интеграл I – Фурье-образ временной функции $f(t)$:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{kn}t}f(t)dt,$$

где частота перехода $\omega_{kn}=\dfrac{E_k^{(0)}-E_n^{(0)}}{\hbar}$.

В задаче $n=1$, $\hat{V}(x)=\hat{x}$. Волновые функции и энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a:

$$\psi_n^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi nx}{a},\quad E_n^{(0)}=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2ma^2}.$$

Матричный элемент оператора возмущения:

$$V_{k1}=F_0\int_0^a\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi kx}{a}x\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}dx=\frac{2F_0}{a}\int_0^a x\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi kx}{a}dx=$$

$$=\frac{2F_0}{a}\int_0^a x\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi kx}{a}dx=\frac{F_0}{a}\int_0^a x\left(\cos\frac{\pi(k-1)x}{a}-\cos\frac{\pi(k+1)x}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{F_0}{a}\int_0^a x\cos\frac{\pi(k-1)x}{a}dx-\frac{F_0}{a}\int_0^a x\cos\frac{\pi(k+1)x}{a}dx=$$

$$=\frac{F_0}{a}\frac{a^2}{\pi^2(k-1)^2}\left[\cos\frac{\pi(k-1)x}{a}+\frac{\pi(k-1)x}{a}\sin\frac{\pi(k-1)x}{a}\right]\Bigg|_0^a-$$

$$-\frac{F_0}{a}\frac{a^2}{\pi^2(k+1)^2}\left[\cos\frac{\pi(k+1)x}{a}+\frac{\pi(k+1)x}{a}\sin\frac{\pi(k+1)x}{a}\right]\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{aF_0}{\pi^2}\left[\frac{1}{(k-1)^2}\left((-1)^{k-1}-1\right)-\frac{1}{(n+1)^2}\left((-1)^{k+1}-1\right)\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2aF_0}{\pi^2}\dfrac{4k}{(k^2-1)^2} & \text{при } k \text{ четном;}\\ 0 & \text{при } k \text{ нечетном.}\end{cases}$$

В случае а) $f(t)=e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{k1}t}e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{k1}t-\frac{t^2}{\tau^2}}dt.$$

В показателе экспоненты выделим полный квадрат

$$-\frac{t^2}{\tau^2}+i\omega t=-\frac{t^2}{\tau^2}+i\omega t+\frac{\omega^2\tau^2}{4}-\frac{\omega^2\tau^2}{4}=-\left(\frac{t}{\tau}-\frac{i\omega\tau}{2}\right)^2-\frac{\omega^2\tau^2}{4}.$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{\tau^2}\left(t-i\frac{\omega_{k1}\tau^2}{2}\right)^2}e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}dt=e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{\tau^2}\left(t-i\frac{\omega_{k1}\tau^2}{2}\right)^2}dt=e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}\tau\sqrt{\pi}.$$

Вероятность перехода:

$$W^{(1)}(1\to k)=\frac{1}{\hbar^2}\left|-\frac{2aF_0}{\pi^2}\frac{4k}{(k^2-1)^2}e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}\tau\sqrt{\pi}\right|^2.$$

Для нечетных k:

$$W^{(1)}(1\to k)=\frac{64a^2\tau^2k^2F_0^2}{\hbar^2\pi^3(k^2-1)^4}e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{2}},$$

где частота перехода

$$\omega_{k1}=\frac{E_k^{(0)}-E_1^{(0)}}{\hbar}=\frac{\pi^2\hbar(k^2-1)}{2ma^2}.$$

В случае б) $f(t)=e^{-\frac{|t|}{\tau}}$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{k1}t}e^{-\frac{|t|}{\tau}}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{i\omega_{k1}t+\frac{t}{\tau}}dt+\int_{0}^{\infty}e^{i\omega_{k1}t-\frac{t}{\tau}}dt=$$

$$=\frac{e^{i\omega_{k1}t+\frac{t}{\tau}}}{i\omega_{k1}+\frac{1}{\tau}}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{i\omega_{k1}t-\frac{t}{\tau}}}{i\omega_{k1}-\frac{1}{\tau}}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{\tau}{i\omega_{k1}\tau+1}-\frac{\tau}{i\omega_{k1}\tau-1}=\frac{2\tau}{\omega_{k1}^2\tau^2+1}.$$

Вероятность перехода:

$$W^{(1)}(1\to k)=\frac{1}{\hbar^2}\left|\frac{2aF_0}{\pi^2}\left[\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\frac{2\tau}{\omega_{k1}^2\tau^2+1}\right|^2.$$

Для нечетных k:

$$W^{(1)}(1\to k)=\frac{256a^2\tau^2k^2}{\hbar^2\pi^4(k^2-1)^4(\omega_{k1}^2\tau^2+1)^2}.$$

Общее условие применимости теории возмущений:

$$|V_{km}| << |E_k - E_m|,$$

для данной задачи при малых номерах уровней:

$$F_0 << \frac{\pi^4\hbar^2}{16ma^3}.$$

Ответ: а) $W^{(1)}(1\to k) = \dfrac{64a^2\tau^2k^2F_0^2}{\hbar^2\pi^3(k^2-1)^4}e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{2}}$,

б) $W^{(1)}(1\to k) = \dfrac{256a^2\tau^2k^2}{\hbar^2\pi^4(k^2-1)^4(\omega_{k1}^2\tau^2+1)^2}$.

4. На плоский ротатор с моментом инерции J и дипольным моментом $\vec{\mu}$ в момент времени $t=0$ накладывается слабое электрическое поле напряженностью:

а) $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$; **б)** $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{|t|}{\tau}}$.

Вычислите в первом приближении теории возмущений вероятности возбуждений различных состояний частицы при $t\to\infty$, если при $t\to-\infty$ ротатор находился в состоянии с квантовым числом m.

Вероятность возбуждения k-го состояния:

$$W^{(1)}(n\to k) = \frac{1}{\hbar^2}|V_{kn}I|^2,$$

где n – квантовое число начального состояния, k – конечного, V_{kn} – матричные элементы оператора возмущения:

$$V_{kn} = \left(\psi_k(x);\hat{V}(x)\psi_n(x)\right),$$

интеграл I – Фурье-образ временной функции $f(t)$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{kn}t} f(t)dt,$$

где частота перехода $\omega_{kn} = \dfrac{E_k^{(0)} - E_n^{(0)}}{\hbar}$.

Волновые функции и энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a:

$$\psi_m^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \quad E_m^{(0)} = \frac{\hbar^2m^2}{2J}.$$

Оператор возмущения $\hat{V}(\varphi) = -\vec{E}_0\cdot\vec{\mu} = -E_0\mu\cos\varphi$.

Матричный элемент оператора возмущения:

$$V_{km} = -\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\varphi}E_0\mu\cos\varphi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{E_0\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\varphi}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)e^{im\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{E_0\mu}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}e^{i(m+1-k)\varphi}d\varphi + \int_0^{2\pi}e^{i(m-1-k)\varphi}d\varphi\right] = \begin{cases} -\dfrac{E_0\mu}{2} & k = m\pm1; \\ 0 & k\neq m\pm1. \end{cases}$$

В случае а) $f(t) = e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$ (см. задачу 3):

$$I = e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}\tau\sqrt{\pi}.$$

Вероятность перехода:

$$W^{(1)}(m\to m\pm1) = \frac{1}{\hbar^2}\left|-\frac{E_0\mu}{2}e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{4}}\tau\sqrt{\pi}\right|^2.$$

Для нечетных k:

$$W^{(1)}(m\to m\pm1) = \frac{E_0^2\mu^2\pi\tau^2e^{-\frac{\omega_{k1}^2\tau^2}{2}}}{4\hbar^2},$$

где частота перехода

$$\omega_{m\pm1,m} = \frac{E_{m\pm1}^{(0)} - E_m^{(0)}}{\hbar} = \frac{\hbar\left((m\pm1)^2 - m^2\right)}{2J} = \pm\frac{\hbar(2m\pm1)}{2J}.$$

В случае б) $f(t) = e^{-\frac{|t|}{\tau}}$ (см. задачу 3):

$$I = \frac{2\tau}{\omega_{k1}^2\tau^2+1}.$$

Вероятность перехода:

$$W^{(1)}(m\to m\pm1) = \frac{1}{\hbar^2}\left|-\frac{E_0\mu}{2}\frac{2\tau}{\omega_{k1}^2\tau^2+1}\right|^2 = \frac{E_0^2\mu^2\tau^2}{\hbar^2\left(\omega_{k1}^2\tau^2+1\right)^2}.$$

Общее условие применимости теории возмущений:

$$\left|V_{km}\right| << \left|E_k - E_m\right|,$$

для данной задачи

$$\mathrm{E}\mu << \frac{\hbar^2(2m+1)}{J}.$$

Ответ: а) $W^{(1)}(m \to m \pm 1) = \dfrac{\mathrm{E}_0^2 \mu^2 \pi \tau^2 e^{-\frac{\omega_{k1}^2 \tau^2}{2}}}{4\hbar^2}$,

б) $W^{(1)}(m \to m \pm 1) = \dfrac{\mathrm{E}_0^2 \mu^2 \tau^2}{\hbar^2 \left(\omega_{k1}^2 \tau^2 + 1\right)^2}$.

5. Частица массы m находится в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a. В некоторый момент времени правая стенка ямы быстро смещается в точку $b > a$. Найдите вероятности возбуждения различных состояний частицы после остановки стенки.

Гамильтонианы системы при $t < 0$ и $t > 0$:

$$\hat{H}_0 \quad \text{и} \quad \hat{H}_1 = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

функции состояния этих гамильтонианов

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-\frac{E_n t}{\hbar}} \quad \text{и} \quad \tilde{\psi}_n(x,t) = \tilde{\psi}_n(x) e^{-\frac{E_n t}{\hbar}}.$$

Тогда функцию начального состояния можно разложить по новым функциям в ряд:

$$\psi_n = \sum_k c_{nk} \tilde{\psi}_n e^{-\frac{E_k t}{\hbar}},$$

где $c_{nk} = \int \tilde{\psi}_k^* \psi_n dV$. Тогда вероятность перехода из начального состояния в конечное:

$$W(n \to k) = \left|c_{nk}\right|^2.$$

Применим эти рассуждения к бесконечно глубокой потенциальной яме, где функции начального состояния

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a},$$

для основного состояния

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi x}{a}$$

и конечного

$$\tilde{\psi}_k = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{\pi k x}{b}.$$

Коэффициент разложения в ряд:

$$c_{k1} = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi x}{a} \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{\pi k x}{b} dx = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi k x}{b} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{1}{2} \int_0^a \left[\cos\left(\pi \frac{ka-b}{ab} x\right) - \cos\left(\pi \frac{ka+b}{ab} x\right)\right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{ka-b}{ab} x\right)}{ka-b} - \frac{\sin\left(\pi \frac{ka+b}{ab} x\right)}{ka+b}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{ka}{b} - \pi\right)}{ka-b} - \frac{\sin\left(\pi \frac{ka}{b} + \pi\right)}{ka+b}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{ka}{b}\right)\cos\pi - \cos\left(\pi \frac{ka}{b}\right)\sin\pi}{ka-b} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\left(\pi \frac{ka}{b}\right)\cos\pi + \cos\left(\pi \frac{ka}{b}\right)\sin\pi}{ka+b}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{\pi} \sin\left(\pi \frac{ka}{b}\right) \left[-\frac{1}{ka-b} + \frac{1}{ka+b}\right] = \frac{2b\sqrt{ab}}{\pi\left(k^2 a^2 - b^2\right)} \sin\left(\pi \frac{ka}{b}\right).$$

$$W(1\to k)=\left|\frac{2b\sqrt{ab}}{\pi\left(k^2a^2-b^2\right)}\sin\left(\pi\frac{ka}{b}\right)\right|^2=\frac{4ab^3}{\pi^2\left(k^2a^2-b^2\right)^2}\sin^2\left(\pi\frac{ka}{b}\right).$$

При $b=2a$

$$W(1\to k)=\frac{32}{\pi^2\left(k^2-4\right)^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right),$$

при четных $k=2m$ $\sin\pi n=0$, при нечетных $k=2m+1$ $\sin\left(\pi m+\frac{\pi}{2}\right)=\pm1$, $W(1\to 2m+1)=\frac{32}{\pi^2\left((2m+3)(2m-1)\right)^2}$, то есть возможны переходы только на нечетные уровни.

Ответ: $W(1\to k)=\frac{4ab^3}{\pi^2\left(k^2a^2-b^2\right)^2}\sin^2\left(\pi\frac{ka}{b}\right)$.

6. На заряженный линейный гармонический осциллятор, находящийся в основном состоянии, внезапно накладывается однородное электрическое поле, направленное вдоль оси колебаний. Найдите вероятность возбуждения первого возбужденного состояния.

Гамильтонианы системы при $t<0$ и $t>0$:

$$\hat{H}_0 \quad \text{и} \quad \hat{H}_1=\hat{H}_0+\hat{V},$$

функции состояния этих гамильтонианов

$$\psi_n(x,t)=\psi_n(x)e^{-\frac{E_nt}{\hbar}} \quad \text{и} \quad \tilde{\psi}_n(x,t)=\tilde{\psi}_n(x)e^{-\frac{E_nt}{\hbar}}.$$

Тогда функцию начального состояния можно разложить по новым функциям в ряд:

$$\psi_n=\sum_k c_{nk}\tilde{\psi}_n e^{-\frac{E_kt}{\hbar}},$$

где $c_{nk}=\int\tilde{\psi}_k^*\psi_n dV$. Тогда вероятность перехода из начального состояния в конечное:

$$W(n\to k)=\left|c_{nk}\right|^2.$$

Применим эти рассуждения к бесконечно глубокой потенциальной яме, где функции начального состояния

$$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi nx}{a},$$

для основного состояния

$$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

и первого возбужденного:

$$\psi_1=\frac{2x}{a\sqrt{2a\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

причем при наложении поля происходит смещение энергетических уровней и координат (см. задачу 7 темы 7):

$$\tilde{\psi}_1=\frac{2\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)}{a\sqrt{2a\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2}{2a^2}}.$$

Коэффициент разложения в ряд:

$$c_{k1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\frac{2\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)}{a\sqrt{2a\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2}{2a^2}}dx=$$

$$=\frac{2}{a^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)e^{-\frac{x^2+\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2}{2a^2}}dx.$$

Преобразуем показатель экспоненты:

$$x^2+\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2=2x^2-2x\frac{qE}{m\omega^2}+\frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}=$$

$$=2\left(x^2-2x\frac{qE}{2m\omega^2}+\frac{q^2E^2}{4m^2\omega^4}\right)+\frac{q^2E^2}{2m^2\omega^4}=2\left(x-\frac{qE}{2m\omega^2}\right)^2+\frac{q^2E^2}{2m^2\omega^4},$$

тогда

$$c_{k1}=\frac{2}{a^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{qE}{m\omega^2}\right)e^{-\frac{2\left(x-\frac{qE}{2m\omega^2}\right)^2+\frac{q^2E^2}{2m^2\omega^4}}{2a^2}}dx=$$

$$= \frac{2}{a^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{4a^2m^2\omega^4}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{q\mathrm{E}}{m\omega^2} \right) e^{-\frac{\left(x - \frac{q\mathrm{E}}{2m\omega^2}\right)^2}{a^2}} dx =$$

$$= \left| t = x - \frac{q\mathrm{E}}{2m\omega^2} \right| = \frac{2}{a^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{4a^2m^2\omega^4}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{q\mathrm{E}}{2m\omega^2} \right) e^{-\frac{t^2}{a^2}} dt =$$

$$= \frac{2}{a^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{4a^2m^2\omega^4}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{a^2}} dt - \frac{q\mathrm{E}}{2m\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{a^2}} dt \right] =$$

$$= -\frac{q\mathrm{E}}{a\sqrt{2}m\omega^2} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{4a^2m^2\omega^4}} .$$

Вероятность перехода

$$W(0 \to 1) = \left| -\frac{q\mathrm{E}}{a\sqrt{2}m\omega^2} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{4a^2m^2\omega^4}} \right|^2 = \frac{q^2\mathrm{E}^2}{2a^2m^2\omega^4} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{2a^2m^2\omega^4}} .$$

Ответ: $W(0 \to 1) = \frac{q^2\mathrm{E}^2}{2a^2m^2\omega^4} e^{-\frac{q^2\mathrm{E}^2}{2a^2m^2\omega^4}}$.